Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Ю.И. Параев

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

(Часть 1. Экстремумы функций многих переменных)

Методические указания для проведения практических занятий
для студентов направлений 230100 «Информатика и вычислительная техника»,
230400 «Информационные системы и технологии»

Томск
ТУСУР
2010

УДК 519.85 (076)

Параев Ю.И.
Методы оптимизации (Часть 1. Экстремумы функций многих переменных) – Методические указания для проведения практических занятий для студентов направления 230100 «Информатика и вычислительная техника». 2010. – 20 с.

Содержание

ТЕМА 1. БЕЗУСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Постановка задачи. Для заданной функции $F(x)$ найти точки экстремума.

Решение

Вариант 1. Функция *F(x)* непрерывная и дифференцируемая.

1. Вычисляется первая производная и записывается уравнение

$$F'(x)=0 \tag{1.1}$$

Пусть $\hat{x}_1,...,\hat{x}_k$ – корни этого уравнения (k = 0, 1, ...).

2. Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается в этих точках, нужно вычислить вторую производную. В результате получается.

Если $F''(\hat{x}_i)>0$, то функция в данной точке имеет минимум.

Если $F''(\hat{x}_i)<0$, то функция в данной точке имеет максимум.

Если $F''(\hat{x}_i)=0$, то функция в данной точке имеет перегиб или требуются дальнейшие исследования, связанные с вычислением старших производных.

Пример 1.1. Найти точки экстремума функции $F(x)=xe^{-x}$. Получаем

$$F'(x)=e^{-x}(1-x)=0$$

Это уравнение имеет один корень x=1. Вторая производная $F''(x)=e^{-x}(x-2)$. Поскольку *F*✧(1)<0, то в точке x=1 функция имеет максимум. График этой функции приведен на рис.1.1.

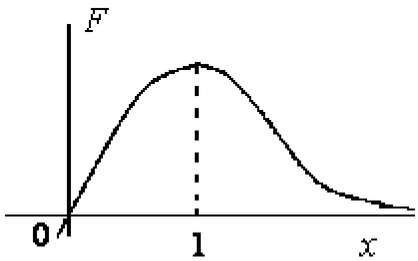

Рис. 1.1 График функции $F(x)=xe^{-x}$

Вариант 2. Функция $F(x)$ имеет точки излома, т.е. в этих точках первая производная терпит разрыв. Поэтому кроме исследования на экстремум точек, где функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема, так, как указано выше, нужно проверять точки излома. Пусть $\hat{x}$ – точка излома. В точке $\hat{x}$ функция $F(x)$ имеет максимум, если

$$F'(x-\varepsilon)>0 \text{ и } F'(x+\varepsilon)<0. \tag{1.2}$$

В точке $\hat{x}$ функция F(x) имеет минимум, если

$$F'(x-\varepsilon)<0 \text{ и } F'(x+\varepsilon)>0. \tag{1.3}$$

Здесь ε – какое-то малое число. В точке $\hat{x}$ функция $F(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если в этой точке производная $F'(x)$ не меняет знак.

Пример 1.2. Рассмотрим функцию $F(x)=|x|$. Графики этой функции и ее производной приведены на рис.1.2. Видно, что выполняется (1.2) и функция имеет минимум.

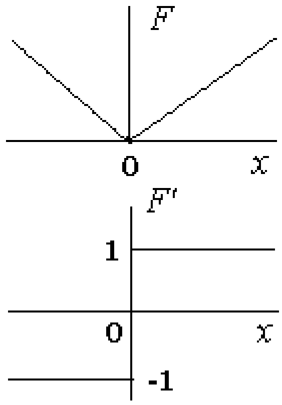

Рис. 1.2 График функции $F(x)=|x|$ и ее производной

ТЕМА 2. БЕЗУСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Постановка задачи

Дана функция многих переменных $F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если из переменных составить n-мерный вектор-столбец *x*, то можно записать $F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x)$. Этот вектор можно рассматривать как точку в n-мерном пространстве *Rn* ($x \in Rn$). Введем также следующие обозначения: градиент функции - n-мерный вектор-столбец

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

и гессиан функции – n×n-мерная матрица

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Пусть *C* – симметрическая n×n-мерная матрица с элементами *Cij* и Δx – n-мерный вектор с элементами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, *T* – знак транспонирования. Тогда выражение

$$q(C, \Delta x) = \Delta x^T C \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{2.3}$$

называется квадратической формой. Квадратическая форма $q(C, \Delta x)$ (соответственно матрица С) называется

- положительно определенной, если $q(C, \Delta x) > 0$ при любых $\Delta x(\neq 0)$;
- неотрицательно определенной, если $q(C, \Delta x) \geq 0$ при любых $\Delta x(\neq 0)$;
- отрицательно определенной, если $q(C, \Delta x) < 0$ при любых $\Delta x(\neq 0)$;
- неположительно определенной, если $q(C, \Delta x) \leq 0$, при любых $\Delta x(\neq 0)$;
- знаконеопределенной, если $q(C, \Delta x)$ может иметь разные знаки при разных Δx.

Проверка квадратической формы $q(C, \Delta x)$ или матрицы *C* на знакоопределенность может быть выполнена с помощью критерия Сильвестра. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ – главные миноры матрицы *C*.

Критерий Сильвестра. Квадратическая форма $q(C, \Delta x)$ (соответственно матрица *C*)

- положительно определена, если все $\Delta_i > 0$ (i=1;…,n);.
- неотрицательно определена, если все $\Delta_i \ge 0$ (i=1;…,n);
- отрицательно определена, если все $(-1)^i \Delta_i > 0$ (i=1;…,n);
- неположительно определена, если все $(-1)^i \Delta_i \ge 0$ (i=1;…,n);
- знаконеопределена, если не выполняются предыдущие условия.

Задача. Для заданной функции $F(x)$ нужно найти точки экстремума.

Решение

1. Составляется система уравнений (первое необходимое условие экстремума)

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = 0, \\ &\dots \\ &\frac{\partial F(x)}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Эта система уравнений может иметь несколько решений $\hat{x}_1,...,\hat{x}_k$ (k=0,1,…), которые являются точками в Rn.

2. Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается в этих точках, нужно вычислить вторые производные функции $F(x)$ и составить матрицу

$$C = \frac{d^2F(\hat{x}_m)}{dx^2} = \left.\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right|_{x=\hat{x}_m}$$

или соответствующую квадратическую форму (2.3). Здесь $\hat{x}_m$ – исследуемое решение. В результате получается (второе необходимое условие экстремума):

- Если квадратическая форма (2.3) (или матрица C) положительно определена, то функция $F(x)$ в точке $\hat{x}_m$ имеет минимум.
- Если квадратическая форма (2.3) (или матрица C) отрицательно определена, то функция $F(x)$ в точке $\hat{x}_m$ имеет максимум.
- В остальных случаях точка $\hat{x}_m$ является седловой.

Пример 2.1. Найти точки экстремума функции

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Решение

Составляем уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Они имеют единственное решение $x_1 = x_2 = 0$. Вторые производные равны

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Поэтому квадратическая форма $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$, и, следовательно, данная функция в точке $x_1 = x_2 = 0$ имеет минимум.

Пример 2.2. Найти точки экстремума функции

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2. \tag{2.5}$$

Решение

Составляем уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2 = 0.$$

Они имеют единственное решение $x_1 = x_2 = 0$. Вторые производные равны

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Отсюда матрица

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

и ее главные миноры равны $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = -4$. Поэтому эта матрица не является знакоопределенной, и, следовательно, точка $x_1 = x_2 = 0$ является седловой.

ТЕМА 3. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА РАВЕНСТВ

Постановка задачи. Для заданной функции многих переменных $F(x)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространстве Rn, которая задается системой уравнений

$$\begin{aligned} &g_1(x)=0,\\ &g_2(x)=0,\\ &\ldots\\ &g_m(x)=0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

При этом $m<n$ и предполагается, что система (3.1) совместная.

3.1. Метод исключения переменных

Решая уравнения (3.1) можно m переменных x' выразить через остальные $n-m$ переменных x'', т.е. найти зависимость $x'=h(x'')$. Подставляя последнее в функцию $F(x)$, получаем новую функцию $F_0(x'')$, зависящую только от переменных x'', на которые не накладывается никаких ограничений. Поэтому задача поиска точек экстремума функции $F_0(x'')$ может быть решена методом, описанным выше.

3.2. Метод множителей Лагранжа

1. Составляется функция Лагранжа

$$L(x,\mu)=F(x)+\sum_{s=1}^{m}\mu_s g_s(x),$$

где μi – некоторые числа, называемые множителями Лагранжа. Затем находится экстремум этой функции.

2. Первое необходимое условие экстремума приводит к системе равенств

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial x_1}+\sum_{s=1}^{m}\mu_s\frac{\partial g_s(x)}{\partial x_1}=0,\\ &\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial F}{\partial x_2}+\sum_{s=1}^{m}\mu_s\frac{\partial g_s(x)}{\partial x_2}=0,\\ &\ldots\\ &\frac{\partial L}{\partial x_n}=\frac{\partial F}{\partial x_n}+\sum_{s=1}^{m}\mu_s\frac{\partial g_s(x)}{\partial x_n}=0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Объединяя (3.1) и (3.2), получаем $n+m$ уравнений для $n+m$ неизвестных x и μ. Эти уравнения могут иметь несколько решений $(\hat{x}_1,\hat{\mu}_1),\ldots,(\hat{x}_k,\hat{\mu}_k)$ (k=0,1,…). Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается при каждом из этих решений, нужно вычислить вторые производные функции $L(x,\mu)$ и составить квадратическую форму

$$q(C,\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\Delta x_i\Delta x_j\ , \tag{3.3}$$

где теперь

$$C_{ij}=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{x=\hat{x}_m,\mu=\hat{\mu}_m}=\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{s=1}^{m}\mu_s\frac{\partial^2 g_s(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{x=\hat{x}_m,\mu=\hat{\mu}_m} \tag{3.4}$$

$(\hat{x}_m, \hat{\mu}_m)$ – исследуемое решение. Последние обозначения означают, что для вычисления элементов Cijнужно вычислить вторые производные функции $L(x,\mu)$ и затем в полученные выражения вместо x и μ подставить $\hat{x}_m$ и $\hat{\mu}_m$. В отличие от (2.3) переменные Δxi –здесь уже не произвольные числа, а они должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\Delta x_n=0,\\
&\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\Delta x_n=0,\\
&\qquad\qquad\ldots\\
&\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial g_m}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\Delta x_n=0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

которые следуют из (3.1). В этих уравнениях производные $\partial g_i / \partial x_j$ нужно вычислять при $x=\hat{x}_m, \mu=\hat{\mu}_m$. Так как $m<n$, то система (3.5) допускает ненулевые решения. Выражая m переменных Δxi через другие $n-m$ переменных Δxi и подставляя их в (3.3), получаем новую квадратическую форму, которую нужно проверять на знакоопределенность.

Пример 3.1. Пусть имеется прямоугольник со сторонами x_1 и x_2 и пусть

$$x_1 = x_2 = 1. \tag{3.6}$$

При каких x_1 и x_2 площадь прямоугольника $S = x_1 \cdot x_2$ максимальна?

Метод исключения переменных

Из (3.6) находим $x_1 = 1 - x_2$. Подставляя в S, получаем

$$S(x_2) = (1 - x_2)x_2.$$

Вычисляя первую производную функции $S(x_2)$, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 1 - 2x_2 = 0.$$

Отсюда следует, что экстремум площади S достигается при

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

Вторая производная функции $S(x_2)$ равна

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} = -2 < 0.$$

Отсюда следует, что площадь S имеет максимум. Таким образом, из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат.

Метод множителей Лагранжа

Составляется функция Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \mu) = x_1 x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 1),$$

где μ – множитель Лагранжа. Первое необходимое условие экстремума приводит к системе равенств

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \mu = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \mu = 0.$$

Решая эти уравнения вместе с (3.6), получаем

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2},\ \mu = -\frac{1}{2}.$$

Вторые производные функции Лагранжа равны

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 1.$$

Поэтому квадратическая форма (ср. с (3.3)) равна

$$q(\Delta x_1, \Delta x_2) = \Delta x_1 \Delta x_2 .$$

Но согласно (3.5) и (3.6) величины Δx_1 и Δx_2 должны удовлетворять условию: $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$. Отсюда следует, что $\Delta x_1 = -\Delta x_2$, и, следовательно, $q(\Delta x_1, \Delta x_2) = -\Delta x_2^2 < 0$, т.е. достигается максимум.

Пример 3.2. Пусть имеется цилиндрическая емкость высотой h и радиусом r (см. рис. 3.1). Объем цилиндра равен $V = \pi r^2 h$, а общая поверхность

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

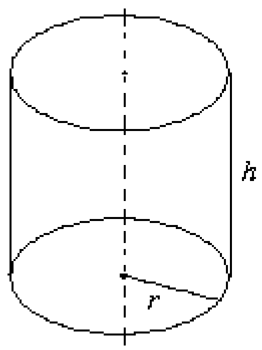

Рис. 3.1 Цилиндрическая емкость

Задача: Пусть поверхность

$$S = 2\pi r(r + h) = S_0 \tag{3.7}$$

задана. Найти такие r и h, при которых объем $V = \pi r^2 h$ максимален.

Решение

Метод исключения переменных

Из (3.7) находим

$$h = \frac{S_0}{2\pi r} - r.$$

Подставляя это в выражение для объема, получаем

$$V = \pi r^2 \left(\frac{S_0}{2\pi r} - r \right) = \frac{r S_0}{2} - \pi r^3.$$

Вычисляя первую производную функции $V(r)$, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{S_0}{2} - 3r^2 = 0.$$

Отсюда следует, что экстремум объема V достигается при

$$r = \sqrt{\frac{\mathrm{S}_0}{6\pi}}, \quad h = 2r, \tag{3.8}$$

т.е. диаметр цилиндра равен его высоте. Здесь предполагается, что $r > 0$.

Вторая производная функции $V(r)$ равна

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -6\pi r < 0,$$

т.е. достигается максимум.

Метод множителей Лагранжа

Составляется функция Лагранжа

$$L(x, \mu) = \pi r^2 h + \mu \left(2\pi r (r + h) - S_0 \right),$$

где μ – множитель Лагранжа. Первое необходимое условие экстремума приводит к системе равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= 2\pi r h + 2\pi \mu (2r + h) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial h} &= \pi r^2 + 2\pi \mu r = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Решая совместно уравнения (3.7) и (3.9), получаем (3.8) и $\mu = -r/2$.

Вычисляя вторые производные функции $L(x, \mu)$, получаем с учетом (3.8)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} = 2\pi h + 4\pi\mu = 2\pi r, \ \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial h} = 2\pi r + 2\pi\mu = \pi r, \ \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} = 0 .$$

Отсюда квадратическая форма (3.3) равна

$$q(\Delta r, \Delta h) = 2\pi r \left(\Delta r^2 + \Delta r \Delta h \right). \tag{3.10}$$

Чтобы найти соотношение между Δr и Δh воспользуемся уравнениями (3.5) и (3.7). Поскольку в данном случае

$$g(r, h) = 2\pi r (r + h) - S_0 ,$$

то из (3.5) имеем с учетом (3.8)

$$\frac{\partial g}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial g}{\partial h} \Delta h = 2\pi (2r + h) \Delta r + 2\pi r \Delta h = 8\pi r \Delta r + 2\pi r \Delta h = 0 .$$

Отсюда получаем, что $\Delta h = -4\Delta r$. Подставляя это в (3.10), получаем окончательно, что

$$q(\Delta r, \Delta h) = -3\pi r \Delta r^2 < 0,$$

т.е. достигается максимум.

Пример 3.3: Пусть имеется кусок проволоки длиной l, который разрезается на два куска длиной x_1 и x_2 соответственно, т.е.

$$x_1 + x_2 = l. \tag{3.11}$$

Из первого куска выгибается квадрат, из второго равносторонний треугольник со сторонами $x_1/4$ и $x_2/3$ соответственно (см. рис. 3.2).

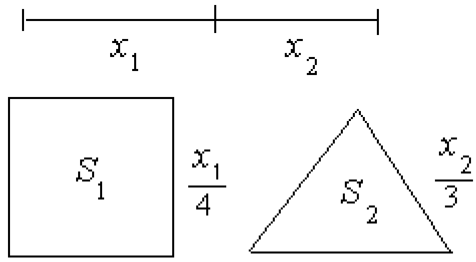

Рис. 3.2 Квадрат и равносторонний треугольник

Задача. Найти x_1 и x_2, при которых суммарная площадь обеих фигур минимальна и максимальна. Используя известные формулы из геометрии, можно подсчитать, что $S_1 = c_1 x_1^2$ и $S_2 = c_2 x_2^2$, где c_1=1/16 и c_2=$\sqrt{3}/36$. Главное для дальнейшего то, что c_1>c_2. В результате общая площадь равна

$$F(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2. \tag{3.12}$$

Метод исключения переменных

Из (3.11) находим $x_2 = l - x_1$. Подставляя это в (3.12), получаем

$$F(x_1) = c_1 x_1^2 + c_2 (l - x_2)^2,$$

т.е. получаем функцию одной переменной. Первое необходимое условие экстремума приводит к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2c_1 x_1 - 2c_2 (l - x_1) = 0.$$

Отсюда получается

$$x_1 = \frac{c_2 l}{c_1 + c_2}, \; x_2 = \frac{c_1 l}{c_1 + c_2}. \tag{3.13}$$

Вычисляя вторую производную, получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2c_1 + 2c_2 > 0,$$

и, следовательно, в точке (3.13) функция $F(x_1, x_2)$ имеет минимум. Проведенное решение не позволяет найти максимум функции $F(x_1, x_2)$. Причина заключается в том, что при решении не учтены требования, чтобы $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Полное решение этой задачи будет получено в следующем разделе. Метод множителей Лагранжа приводить не будем, так как он дает тот же результат. Геометрическое решение задачи легко получить из рис. 3.3, где приведен график функции $F(x_1)$. Видно, что на интервале [0, l] эта функция имеет максимум в угловых точках $x_1=0$ и $x_1=l$. Причем при $x_1=l$ получается глобальный максимум. На рис. 3.3 $x_0 = \dfrac{c_2 l}{c_1 + c_2}$, т.е. это точка, где достигается минимум.

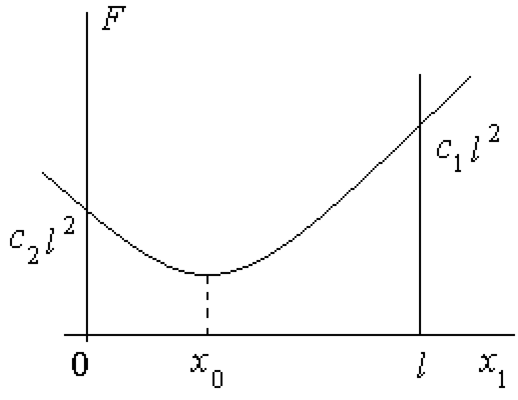

Рис. 3.3 График функции $F(x_1)$

ТЕМА 4. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Постановка задачи. Для заданной функции многих переменных $F(x)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространстве Rn, которая задается системой неравенств

$$\begin{aligned} &g_1(x) \le 0, \\ &g_2(x) \le 0, \\ &\dots \\ &g_m(x) \le 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

При этом предполагается, что система (4.1) совместная.

Решение. С помощью введения новых переменных система (4.1) может быть приведена к системе равенств вида

$$\begin{aligned} &g_1(x) + x_{n+1}^2 = 0, \\ &g_2(x) + x_{n+2}^2 = 0, \\ &\dots\dots \\ &g_m(x) + x_{n+m}^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В результате приходим к задаче, решение которой обсуждалось в теме 3.

Пример 4.1. Найти экстремумы функции $F(x) = x^2$ на интервале $S = a \le x \le b$. Графическое решение приведено на рис. 4.1.

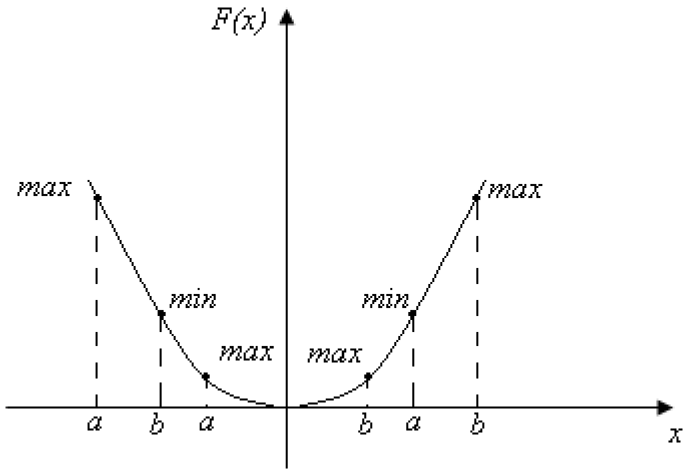

Рис. 4.1 График функции $F(x) = x^2$

Последние неравенства запишем в виде двух равенств

$$\begin{aligned} &g_1 = x - a - x_1^2 = 0, \\ &g_2 = b - x - x_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где x_1 и x_2 – новые переменные.

Составим функцию Лагранжа

$$L = x^2 + \mu_1\left(x - a - x_1^2\right) + \mu_2\left(b - x - x_2^2\right),$$

где μ, μ_1 – множители Лагранжа. Условия первого порядка приводят к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x \ + \mu_1 - \mu_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2\mu_1 x_1 = 0, \qquad (4.4)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2\mu_2 x_2 = 0.$$

Чтобы решить вопрос об экстремумах функции, вычислим вторые производные функции $L(x, \mu)$. Эти производные равны:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому квадратическая форма (3.3) равна

$$q(\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2) = 2\Delta x^2 - 2\mu_1 \Delta x_1^2 - 2\mu_2 \Delta x_2^2. \qquad (4.5)$$

При этом величины $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2$ согласно (3.5) и (4.3) должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta x - 2x_1 \Delta x_1 = 0,$$
$$-\Delta x - 2x_2 \Delta x_2 = 0. \qquad (4.6)$$

Решая совместно уравнения (4.3) и (4.4), получаем три варианта решений.

Вариант I. Пусть x1=0. Тогда

$$x = a, \mu_1 \neq 0, x_1 = 0, x_2 = \pm\sqrt{b - a} \neq 0, \mu_2 = 0, \quad \mu_1 = -2a.$$

Далее из (4.6) получаем: $\Delta x = \Delta x_2 = 0, \Delta x_1 \neq 0$. Поэтому $q = 2a\Delta x_1^2$. В результате получается, что в точках $x=a$ функция имеет максимум при $a<0$ и минимум при $a>0$.

Вариант II. Пусть $x_2=0$. Тогда

$$x = b, \mu_2 \neq 0, x_2 = 0, x_1 = \pm\sqrt{b - a} \neq 0, \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 2b.$$

Далее из (4.6) получаем: $\Delta x = \Delta x_1 = 0, \Delta x_2 \neq 0$. Поэтому $q = -2b\Delta x_2^2$. В результате получается, что в точках $x=b$ функция имеет минимум при $b<0$ и максимум при $b>0$.

Вариант III. Пусть $x_1 \neq 0, \ x_2 \neq 0$. Тогда $x = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Поэтому $q = 2\Delta x^2 > 0$ и в точке $x=0$ функция имеет минимум.

Пример 4.2. Рассмотрим пример 3.3. Добавим условия $x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$. Эти условия можно преобразовать в равенства, если ввести новые переменные x_3 и x_4,

$$g_1 = x_1 - x_3^2 = 0,$$
$$g_2 = x_2 - x_4^2 = 0. \qquad (4.7)$$

Учитывая (3.11), (3.12) и (4.7), составим функцию Лагранжа

$$L = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - l) + \mu_1(x_1 - x_3^2) + \mu_2(x_2 - x_4^2),$$

где μ, μ_1, μ_2 – множители Лагранжа. Условия первого порядка приводят к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2c_1x_1 + \mu + \mu_1 = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2c_2x_2 + \mu + \mu_2 = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial x_3} = -2\mu_1x_3 = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial x_4} = -2\mu_2x_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Вторые производные функции $L(x,\mu)$ равны:

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \begin{vmatrix} 2c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu_2 \end{vmatrix}.
$$

Поэтому квадратическая форма (3.3) равна

$$
q(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4) = 2c_1\Delta x_1^2 + 2c_2\Delta x_2^2 - 2\mu_1\Delta x_3^2 - 2\mu_2\Delta x_4^2. \tag{4.9}
$$

При этом величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4$ согласно (3.5) и (4.7) должны удовлетворять уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0,\\
&\Delta x_1 - 2x_3\Delta x_3 = 0,\\
&\Delta x_2 - 2x_4\Delta x_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Решая совместно уравнения (3.11), (4.7) и (4.8), получаем три варианта решений.

Вариант I. Пусть x_3=0. Тогда

$$
x_1 = 0, x_2 = l,\ x_4 \neq 0, \mu_2 = 0, \mu = -2c_2l, \mu_1 = 2c_2l.
$$

Далее из (4.10) получаем: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_4 = 0, \Delta x_3 \neq 0$. Поэтому $q = -2c_2\Delta x_3^2 < 0$. В результате получается, что при $x_1 = 0, x_2 = l$ функция имеет максимум.

Вариант II. Пусть x_4=0. Тогда

$$
x_1 = l, x_2 = 0,\ x_3 \neq 0, \mu_1 = 0, \mu = -2c_1l, \mu_2 = 2c_1l.
$$

Далее из (4.10) получаем: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0, \Delta x_4 \neq 0$. Поэтому $q = -2c_1\Delta x_4^2 < 0$. В результате получается, что при $x_1 = l, x_2 = 0$ функция имеет максимум.

Вариант III. Пусть $x_3 \neq 0,\ x_4 \neq 0$. Тогда: $\mu_1 = \mu_2 = 0, x_1 = \dfrac{c_2l}{c_1 + c_2}, x_2 = \dfrac{c_1l}{c_1 + c_2}$.

Поэтому $q = 2c_1\Delta x_1^2 + 2c_2\Delta x_2^2 > 0$ и, следовательно, в указанной точке функция имеет минимум.

Таким образом, найдено полное решение задачи, которое соответствует рис. 3.3.

ЗАДАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

К теме 1. Найти точки экстремума следующих функций

1.1. $F(x) = \sin x.$

1.2. $F(x) = e^{-x^2}.$

1.3. $F(x) = x^2 e^{-x}.$

1.4. $F(x) = x^2 e^{-x^2}.$

1.5. $F(x) = x + \dfrac{1}{x}.$

1.6. $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}.$

1.7. $F(x) = xe^{-x}.$

1.8. $F(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}.$

1.9. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}.$

1.10. $F(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}.$

1.11. $F(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}.$

1.12. $F(x) = |\sin x|.$

1.13. $F(x) = |x|\, e^{-|x|}.$

Указание: решение должно сопровождаться построением графиков функций и их производных.

К теме 2. Исследовать на экстремум функции

2.1. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2.$

2.2. $F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 (1 - x_1 - x_2).$

2.3. $F(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 15 x_1 x_2.$

2.4. $F(x_1, x_2) = 4 - (x_1^2 + x_2^2)^{2/3}.$

2.5. $F(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3 x_1 x_2.$

2.6. $F(x_1, x_2) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2.$

2.7. $F(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \dfrac{50}{x_1} + \dfrac{20}{x_2}; (x_1, x_2 > 0).$

2.8. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2;\ (x_1, x_2 > 0).$

2.9. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 x_3 + 4x_2 x_3.$

2.10. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 - 6x_2 - 4x_3$.

2.11. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 4x_3$.

2.12. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_3 + 2x_2 - 4x_3$.

2.13. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{2}{x_3}$.

2.14. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3^3(1 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$; $(x_1, x_2, x_3 > 0)$.

К теме 3.

3.1. Из всех прямоугольников с заданной площадью найти такой, у которого периметр имеет наименьшее значение.

3.2. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

3.3. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.

3.4. Из всех треугольников, имеющих данный периметр, найти тот, у которого площадь наибольшая.

3.5. Для цилиндра с заданным объемом (см. пример 3.2) найти такие r и h, при которых поверхность минимальна.

Найти экстремумы функций при ограничениях типа равенств:

3.6. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; $x_1x_2 = 1$.

3.7. $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$; $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

3.8. $F(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; $x_1 + x_2 = 1$.

3.9. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; $(x_1 - \sqrt{2})^2 + (x_2 - \sqrt{2})^2 = 9$.

3.10. $F(x_1, x_2) = x_1x_2^2$; $x_1 + 2x_2 = 1$.

3.11. $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 36$.

3.12. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{4}$.

3.13. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$; $x_1 + x_2 + x_3 = 4$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$.

Указание: для решения использовать метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа.

К теме 4.

4.1. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ в круге $(x_1 - \sqrt{2})^2 + (x_2 - \sqrt{2})^2 \le 9$.

4.2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) =$ $= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1$ в замкнутой области: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, 2x_1 + 3x_2 \le 12$.

4.3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = = x_1 x_2 + x_1 + x2$ в квадрате $1 \le x_1 \le 2,\ 2 \le x_2 \le 3$.

4.4. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ в круге $x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 1$.

4.5. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2$ в треугольнике $x_1 \le 1,\ x_2 \le 1, x_1 + x_2 \ge 1$.

4.6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$ в круге $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1$.

4.7. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = = \sin x_1 + \sin x_2 + \cos(x_1 + x_2)$ в замкнутой области: $0 \le x_1 \le \frac{3\pi}{2}, 0 \le x_2 \le \frac{3\pi}{2}$.

4.8. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin(x_1 + x_2)$ в замкнутой области: $0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2}$.

4.9. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = = \sin x_1 \sin x_2 \sin(x_1 + x_2)$ в замкнутой области: $0 \le x_1 \le \pi,\ 0 \le x_2 \le \pi$.

4.10. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ в круге $x_1^2 + x_2^2 \le 1$.