Федеральное агентство по образованию

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Ю.И. Параев

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

(Часть 2. Линейное программирование)

Методические указания для проведения практических занятий
для студентов направлений 230100 «Информатика и вычислительная техника»,
230400 «Информационные системы и технологии»

Томск
ТУСУР
2010

УДК 519.85 (076)

Параев Ю.И.
Методы оптимизации (Часть 2. Линейное программирование) – Методические указания для проведения практических занятий для студентов направления 230100 «Информатика и вычислительная техника». 2010. – 46 с.

Содержание

ТЕМА 5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1. Постановка задачи

Найти экстремум линейной функции

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{5.1}$$

на линейном многообразии S, задаваемом условиями:

I. Все $x_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$. (5.2)

II. Должны выполняться либо равенства

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i = b_1,\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i = b_2,\\
&\quad\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i = b_m,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

либо неравенства

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \leq b_1,\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \leq b_2,\\
&\quad\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \leq b_m.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Задача с ограничениями типа (5.3) называется основной.

Замечания.

1. Ограничения (5.3) или (5.4)должны быть совместны.

2. Задача с ограничениями типа неравенств сводится к задаче с ограничениями типа равенств с помощью введения новых переменных

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i + x_{n+1} = b_1,\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i + x_{n+2} = b_2,\\
&\quad\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i + x_{n+m} = b_m.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Такой подход называется методом искусственного базиса.

3. Перечисленные соотношения удобно записать в матричной форме, если ввести в рассмотрение

вектор-строку $C^T=[c_1,c_2,\ldots,c_n]$ (T – означает транспонирование),

векторы-столбцы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

и матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

В результате вместо (5.1) получаем

$$F(x) = c^T x . \tag{5.6}$$

Вместо (5.2) и (5.3) –

$$x \geq 0 , \tag{5.7}$$

$$Ax = b . \tag{5.8}$$

4. Предполагается, что $rang\ A = m < n$, $rang\,[A,b] = rang[A]$. Последнее есть условие совместности системы уравнений (5.8).

5. Обычно предполагается, что $b \geq 0$. Это можно всегда получить, умножая при необходимости уравнения (5.1) на – 1.

5.2. Решение задач линейного программирования. Симплекс-метод

Условия (5.7) и (5.8) задают линейное многообразие S, угловыми точками которого являются вектора x, у которых n-m координат обязательно равны 0, а m координат $\neq 0$. Решением задачи, если оно существует, является одна из таких угловых точек. Такие точки еще называют планом решения.

Симплекс-метод решения задач линейного программирования состоит в последовательном переборе этих угловых точек. Для определенности будем искать минимум функции $F(x)$.

Пусть x – некоторая угловая точка, которая взята в качестве начального приближения или начального плана. Вопрос о выборе начального приближения будет рассмотрен ниже. Эта точка удовлетворяет условиям (5.7) и (5.8).

Обозначим через $I(x)$ набор индексов ненулевых координат вектора x и через $O(x)$ набор индексов нулевых координат этого вектора. Множество $I(x)$ сдержит m чисел, а множество $O(x)$ – n-m чисел. Очевидно, что $I(x) \cup O(x) = \{1,2,...,n\}$.

Введем новую угловую точку

$$\bar{x} = x + \theta \Delta x , \tag{5.9}$$

где θ(>0) – некоторое число, Δx – некоторый произвольный вектор. Вектор $\bar{x}$ должен удовлетворять условиям (5.7) и (5.8). Подставляя (5.9) в (5.8), получаем, что вектор Δx должен удовлетворять уравнению

$$A\Delta x = 0 . \tag{5.10}$$

Обозначим через x_I – вектор порядка *m*, составленный из элементов вектора *x* с номерами из множества $I(x)$, и через x_O – вектор порядка *n-m*, составленный из элементов вектора *x* с номерами из множества $O(x)$. Очевидно, что $x_O = 0$. Аналогично разделим строку c^T на c_I^T и c_O^T. В результате вместо (5.6) получаем

$$F(x) = c_I^T x_I. \tag{5.11}$$

Аналогично разделим вектор $\bar{x}$ на векторы $\bar{x}_I$ и $\bar{x}_O$, и вектор Δx на векторы Δx_I и Δx_O.

При этом получается

$$\bar{x}_I = x_I + \theta \Delta x_I, \; \bar{x}_O = \theta \Delta x_O. \tag{5.12}$$

Из последнего выражения следует необходимость условия $\Delta x_O \geq 0$.

Матрицу *A* можно записать в виде двух блоков A_I, куда входят столбцы с номерами из множества $I(x)$ и A_O, куда входят столбцы с номерами из множества $O(x)$. Блок A_I имеет размерность *m*×*m*, блок A_O – *m*×(*n-m*) соответственно. Тогда уравнение(5.10) можно переписать в виде

$$A_I \Delta x_I + A_O \Delta x_O = 0 \text{ или } A_I \Delta x_I = -A_O \Delta x_O. \tag{5.13}$$

Если блок A_I невырожденный, то

$$\Delta x_I = -A_I^{-1} A_O \Delta x_O = P \Delta x_O. \tag{5.14}$$

($P = -A_I^{-1} A_O$.) Элементы вектора Δx_O назовем независимыми переменными, а вектора Δx_I – зависимыми. Подставляя (5.14) в (5.12), получаем

$$\bar{x}_I = x_I + \theta P \Delta x_O, \tag{5.15}$$

$$\bar{x}_O = \theta \Delta x_O. \tag{5.16}$$

Подставим последнее в (5.6). В результате получим

$$F(\bar{x}) = c_I^T \bar{x}_I + c_O^T \bar{x}_O = c_I^T (x_I + \theta P \Delta x_O) + \theta c_O^T \Delta x_O =$$
$$= F(x) + \theta (c_O^T + c_I^T P) \Delta x_O = F(x) + \theta \sigma^T \Delta x_O,$$

где

$$\sigma^T = c_O^T + c_I^T P. \tag{5.17}$$

Элементы строки $\sigma^T = [\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-m}]$ – называются коэффициентами замещения.

Учитывая, что θ>0 и $\Delta x_O \geq 0$, получаем следующий результат. Если все $\sigma_j \geq 0$, то $F(\bar{x}) \geq F(x)$ и, следовательно, вектор *x* дает минимальное значение функции $F(x)$. Таким образом, решение задачи заканчивается. Если имеются $\sigma_j < 0$, то можно получить вектор $\bar{x}$, для которого $F(\bar{x}) < F(x)$. Для этого выберем наименьшее из $\sigma_j < 0$. Пусть это будет $\sigma_k (k \in O(x))$. Тогда положим $\Delta x_k = 1$, а все остальные $\Delta x_i = 0 \; (k, i \in O(x))$. В результате в векторе $\bar{x}_O$ появляется *k*-ый элемент, равный θ. В этом случае вектор (5.15) примет вид

$$\bar{x}_I = x_I + \theta p_k,$$

где p_k – k-ый столбец матрицы P. Вектор $\bar{x}$ должен удовлетворять условию (5.7), т.е. должно выполняться

$$x_i + \theta p_{ik} \geq 0,\ i \in I(x).$$

Поскольку $x_i \geq 0,\ i \in I(x)$, то эти неравенства выполняются всегда, когда $p_{ik} \geq 0$. Поэтому рассматриваются неравенства, где $p_{ik} < 0$. Параметр θ выбирается так, чтобы одно из неравенств, например, $\bar{x}_l = x_l - \theta p_{lk} = 0$, а остальные $\bar{x}_i = x_i - \theta p_{ik} > 0,\ i \in I(x) \setminus l$. Таким образом,

$$\theta = \frac{x_l}{p_{lk}}. \tag{5.18}$$

В результате получается, что для вектора $\bar{x}$ набор индексов ненулевых координат $I(\bar{x}) = \{I(x) \setminus l, k\}$, нулевых координат – $O(\bar{x}) = \{O(x) \setminus k, l\}$.

Далее процедура повторяется для вектора $\bar{x}$. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не окажется, что на каком-то этапе все коэффициенты замещения $\sigma_j \geq 0$, т.е. получается окончательное решение.

Пример 5.1. Найти минимум функции

$$F(x) = x_2 - 3x_3 + 2x_5, \tag{5.19}$$

при условиях

I. Все $x_i \geq 0, i = 1,\dots,6.$

II. Должны выполняться уравнения

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +2x_5 & & = 7, \\ & -2x_2 & +4x_3 & +x_4 & & & = 12, \\ & -4x_2 & +3x_3 & & +8x_5 & +x_6 & = 10. \end{array} \tag{5.20}$$

В данном примере n=6,m=3. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение. Начальное приближение выберем в виде

$$x = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Видно, что этот вектор удовлетворяет уравнениям (5.20). Для проведения решения удобно составить таблицу (см. таблица 2.1).

Таблица 2.1. Первая итерация

	c_i	x	Δx_2	Δx_3	Δx_5	$x+\theta\Delta x$	$\bar{x}$
1	0	7	-3	1	-2	$7+\theta$	10
2	1	0	1	0	0	0	0
3	-3	0	0	1	0	θ	3
4	0	12	2	-4	0	$12-4\theta$	0
5	2	0	0	0	1	0	0
6	0	10	4	-3	-8	$10-3\theta$	1
		$\sigma_i=$	1	-3	2	$\theta=3$	
		$F(x)=0$		*			$F(\bar{x})=-9$

В 1-й столбец заносятся коэффициенты c_i согласно с (5.19), во 2-й – начальный план x. Следующий шаг состоит в записи и решении уравнения (5.13). Из вида вектора x следует, что независимые переменные $\Delta x_2,\Delta x_3,\Delta x_5$, зависимые $\Delta x_1,\Delta x_4,\Delta x_6$. Поэтому уравнение (5.13) следует записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= -3\Delta x_2 + \Delta x_3 - 2\Delta x_5 \\ \Delta x_4 &= 2\Delta x_2 - 4\Delta x_3 \\ \Delta x_6 &= 4\Delta x_2 - 3\Delta x_3 - 8\Delta x_5 \end{aligned}$$

Это решение заносится в 3,4,5-й столбцы таблицы 2.1. Далее вычисляются коэффициенты замещения σ_j. Для этого вычисляются суммы попарных произведений элементов 1-го и 3,4,5-го столбцов. Получается, что $\sigma_3<0$. Это отмечается с помощью *. Поэтому полагается: $\Delta x_2=0,\Delta x_3=1,\Delta x_5=0$. В 6-й столбец заносится вектор $x+\theta\Delta x$, который равен сумме 2-го столбца и 4-го, умноженного на θ. Параметр θ выбирается как $\min\{12/4,\,10/3\}=3$. В 7-й столбец заносится окончательный план, т.е. 6-й столбец при $\theta=3$. В нижней строке таблицы приведены значения $F(x)$ и $F(\bar{x})$. Видно, что $F(\bar{x})<F(x)$.

Далее выполняется вторая итерация, результаты которой заносятся в таблицу 2.2.

Таблица 2.2. Вторая итерация

	c_i	x	Δx_2	Δx_4	Δx_5	$x+\theta\Delta x$	$\bar{x}$
1	0	10	$-5/2$	$-1/4$	-2	$10-5\theta/2$	$0*$
2	1	0	1	0	0	θ	4
3	-3	3	$1/2$	$-1/4$	0	$3+\theta/2$	5
4	0	0	0	1	0	0	0
5	2	0	0	0	1	0	0
6	0	1	$5/2$	$3/4$	-8	$1+5\theta/2$	11
		$\sigma_i=$	$-1/2$	$3/4$	2	$\theta=4$	
		$F(x)=-9$	*				$F(\bar{x})=-11$

Теперь независимые переменные $\Delta x_2,\Delta x_4,\Delta x_5$, зависимые $\Delta x_1,\Delta x_3,\Delta x_6$.

Уравнения(5.13) для них имеют вид

$$
\begin{array}{llllll}
\Delta x_1 & -\Delta x_3 & & = & -3\Delta x_2 & & -2\Delta x_5 \\
& 4\Delta x_3 & & = & 2\Delta x_2 & -\Delta x_4 & \\
& 3\Delta x_3 & +\Delta x_6 & = & 4\Delta x_2 & & -8\Delta x_5
\end{array}
$$

Их решение заносится в 3,4,5-й столбцы таблицы 2.2. Вычисляя коэффициенты замещения, получаем, что $\sigma_2 < 0$. Поэтому полагаем: $\Delta x_2 = 1, \Delta x_4 = 0, \Delta x_5 = 0$. В 6-й столбец заносится вектор $x + \theta\Delta x$.

Из требования, чтобы первый элемент равнялся 0, получаем $\theta = 4$. В 7-й столбец заносится окончательный план. В нижней строке таблицы приведены значения $F(x)$ и $F(\bar{x})$. Видно, что $F(\bar{x}) < F(x)$, т.е. план $\bar{x}$ лучше, чем план x.

Таблица 2.3. Третья итерация

	c_i	x	Δx_1	Δx_4	Δx_5	$x+\theta\Delta x$	$\bar{x}$
1	0	0	1	0	0		
2	1	4	$-2/5$	$-1/10$	$-4/5$		
3	-3	5	$1/5$	$-3/10$	$-2/5$		
4	0	0	0	1	0		
5	2	0	0	0	1		
6	0	11	-1	$1/2$	-10		
		$\sigma_i =$	$1/5$	$8/10$	9		
		$F(x) = -11$					

Теперь независимые переменные $\Delta x_1, \Delta x_4, \Delta x_5$, зависимые $\Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_6$.

Уравнения(5.13) для них имеют вид

$$
\begin{array}{lllllll}
3\Delta x_2 & -\Delta x_3 & & = & -\Delta x_1 & & -2\Delta x_5 \\
-2\Delta x_2 & +4\Delta x_3 & & = & & -\Delta x_4 & \\
-4\Delta x_2 & +3\Delta x_3 & +\Delta x_6 & = & & & -8\Delta x_5
\end{array}
$$

Их решение заносится в 3,4,5-й столбцы таблицы 2.3. Вычисляя коэффициенты замещения, получаем, что все $\sigma_i > 0$. Следовательно, дальнейшее улучшение плана уже невозможно. Решением задачи является план, стоящий во 2-м столбце таблицы 2.3.

5.3. Выбор начального плана

Начальный план легко получить, если в матрице A можно выделить блок, состоящий из единичной матрицы. Тогда соответствующие элементы плана приравниваются к элементам вектора b. Так получен начальный план в примере 5.1. В общем случае для выбора начального плана вводятся новые переменные, которые добавляются также в функцию $F(x)$ с очень большими коэффициентами. В результате после ряда применений симплекс-метода эти новые переменные будут исключены их плана, так как в функцию $F(x)$, которая минимизируется, они входят с большими коэффициентами. После этого получается начальный план для основного решения задачи.

Пример 5.2. Минимизировать функцию

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad (5.21)$$

при условиях

I. Все $x_i \geq 0, i = 1,...,4.$

II. Должны выполняться уравнения

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & 15, \\
2x_1 & +x_2 & +5x_3 & & = & 20, \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10.
\end{array}
\tag{5.22}
$$

В данном примере *n*=4*, m*=3. Введем новые переменные x_5 и x_6, и вставим их в функцию $F(x)$ и уравнения (5.22). В результате получим

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + wx_5 + wx_6,$$

и

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +x_5 & & = & 15, \\
2x_1 & +x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 20, \\
x_1 & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = & 10.
\end{array}
$$

Здесь w – какое-то большое число. При этом матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда легко получить начальный план. Он занесен во 2-й столбец таблицы 3.1

Таблица 3.1. Первая итерация

	c_i	x	Δx_1	Δx_2	Δx_3	$x+\theta\Delta x$	$\bar{x}$
1	-1	0	1	0	0	0	0
2	-2	0	0	1	0	0	0
3	-3	0	0	0	1	θ	4
4	1	10	-1	-2	-1	$10-\theta$	6
5	w	15	-1	-2	-3	$15-3\theta$	3
6	w	20	-2	-1	-5	$20-5\theta$	0
		$\sigma_i =$	$-2-3w$	$-4-3w$	$-4-8w$	$\theta = 4$	
		$F(x) = x$ $10+35w$			*		$F(\bar{x}) =$ $-6+3w$

Теперь независимые переменные – $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, зависимые – $\Delta x_4, \Delta x_5, \Delta x_6$. Уравнения(5.13) для них имеют вид

$$
\begin{array}{ccccc}
\Delta x_4 & = & -\Delta x_1 & -2\Delta x_2 & -\Delta x_3 \\
\Delta x_5 & = & -\Delta x_1 & -2\Delta x_2 & -3\Delta x_3 \\
\Delta x_6 & = & -2\Delta x_1 & -\Delta x_2 & -5\Delta x_3
\end{array}
$$

Их решение заносится в 3,4,5-й столбцы таблицы 3.1. В результате вычисления коэффициентов замещения, получаем, что наименьшим является коэффициент $\sigma_3 = -4 - 8w$. Поэтому полагается: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = 1$. В 6-й столбец заносится вектор $x + \theta\Delta x$. Параметр θ выбирается как $\min\{10, 15/3, 20/5\} = 4$. В 7-й столбец заносится оконча-

тельный план. В нижней строке таблицы приведены значения $F(x)$ и $F(\bar{x})$. Видно, что $F(\bar{x}) < F(x)$. В результате исключен элемент x_6.
Далее выполняется вторая итерация, результаты которой заносятся в таблицу 3.2.

Таблица 3.2. Вторая итерация

	c_i	x	Δx_1	Δx_2	Δx_6	$x+\theta\Delta x$	$\bar{x}$
1	-1	0	1	0	0	0	0
2	-2	0	0	1	0	θ	$15/7$
3	-3	4	$-2/5$	$-1/5$	$-1/5$	$4-\theta/5$	$25/7$
4	1	6	$-3/5$	$-9/5$	$1/5$	$6-9\theta/5$	$15/7$
5	w	3	$1/5$	$-7/5$	$3/5$	$3-7\theta/5$	0
6	w	0	0	0	1	0	0
		$\sigma_i =$	$-2/5-3w/5$	$-16/5-21w/5$	$4/5+3w/5$	$\theta=15/7$	
		$F(x)= -6+3w$		$*$			$F(\bar{x})=-90/7$

Теперь независимые переменные – $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_6$, зависимые – $\Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5$.
Уравнения (5.13) для них имеют вид

$$\begin{array}{lllllll} 3\Delta x_3 & & +\Delta x_5 & = & -\Delta x_1 & -2\Delta x_2 & \\ 5\Delta x_3 & & & = & -2\Delta x_1 & -\Delta x_2 & -\Delta x_6 \\ \Delta x_3 & +\Delta x_4 & & = & -\Delta x_1 & -2\Delta x_2 & \end{array}$$

Их решение заносится в 3,4,5-й столбцы таблицы 3.2. В результате вычисления коэффициентов замещения, получаем, что наименьшим является коэффициент $\sigma_2 = -16/5 - 21w/5$. Поэтому полагается: $\Delta x_1 = \Delta x_6 = 0, \Delta x_2 = 1$. В 6-й столбец заносится вектор $x + \theta\Delta x$. Параметр θ выбирается как $\min\{20, 30/9, 15/7\} = 15/7$. В 7-й столбец заносится окончательный план. В нижней строке таблицы приведены значения $F(x)$ и $F(\bar{x})$. Видно, что $F(\bar{x}) < F(x)$. В результате исключен элемент x_5.
Таким образом, начальный план для исходной задачи равен

$$x == \begin{bmatrix} 0 \\ 15/7 \\ 25/7 \\ 15/7 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что этот вектор удовлетворяет системе (5.22).

5.4. Геометрическое решение задач линейного программирования

Геометрическое решение удобно применять в случаях, когда *n*-*m*=1 или *n*-*m*=2.

5.4.1. Решение для случая *n*-*m*=1

Сначала применяется метод исключения, т.е. в системе уравнений (5.3) выбирается одна переменная и все остальные выражаются через нее. Подставляя это решение в (5.1) получаем функцию одного аргумента. Условия (5.2) задают интервал изменения этого аргумента.

Пример 5.3. Рассмотрим задачу из примера 5.1. Решая систему уравнений (5.22) относительно переменной x_4, получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= 5/2 - 7/6 x_4, \\ x_2 &= 5/2 - 1/6 x_4, \\ x_3 &= 5/2 + 1/2 x_4. \end{aligned}$$

Подставляя это в (5.21), получаем, что $F(x) = F(x_4) = -15 + x_4$. Условия $x_i \geq 0, i = 1,...,4$, приводят к неравенству $0 \leq x_4 \leq \min\{15/7, 15\} = 15/7$. Видно, что минимум функции $F(x_4)$ достигается при $x_4 = 0$ и равен –15, что совпадает с полученным ранее решением.

5.4.2. Решение для случая *n*-*m*=2

Сначала применяется метод исключения, т.е. в системе уравнений (5.3) выбираются две переменные и все остальные переменные выражаются через них. Подставляя это решение в (5.1) получаем функцию двух аргументов. Условия (5.2) задают интервалы изменения этих аргументов. Например, если в системе уравнений (5.3) в качестве независимых выбираются переменные x_1 и x_2, то для остальных переменных получаем

$$x_k = p_{k1} x_1 + p_{k2} x_2 + d_k,\ k = 3,...,n$$

где $p_{k1}, p_{k2}, d_k\ (k = 3,...,n)$ некоторые числа. Подставляя это решение в (5.1) получаем функцию

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2,$$

как функцию двух аргументов x_1 и x_2. Условия (5.2) приводят к системе неравенство

$$x_1, x_2 \geq 0,$$
$$p_{k1} x_1 + p_{k2} x_2 + d_k \geq 0,\ k = 3,...,n.$$

На плоскости $0x_1x_2$ можно построить область *S*, точки которой удовлетворяют последним неравенствам.

Для нахождения точек максимума или минимума функции $F(x_1, x_2)$ можно воспользоваться методом градиента. Градиентом функции $F(x_1, x_2)$ называется геометрический вектор вида

$$grad\ F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \vec{i}_2.$$

Этот вектор направлен в сторону увеличения функции $F(x_1, x_2)$. В нашем случае имеем

$$grad\ F = \bar{c}_1 \vec{i}_1 + \bar{c}_2 \vec{i}_2.$$

При этом в точках прямой, перпендикулярной градиенту, функция $F(x_1, x_2)$ постоянна.

Пример 5.4. Найти экстремумы функции

$$F(x) = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \tag{5.23}$$

при условиях

I. Все $x_i \geq 0, i = 1,...,4$ (5.24)

II. Должны выполняться уравнения

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &+2x_2 \quad +x_3 & &= 10,\\
3x_1 \quad &+2x_2 & +x_4 \quad &= 18
\end{aligned}
$$

Решение. Исключим из этих уравнений переменные x_3 и x_4

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 10 \quad -x_1 \quad -2x_2,\\
x_4 &= 18 \quad -3x_1 \quad -2x_2.
\end{aligned}
$$

Подставляя это в (5.23), получаем

$$F(x_1, x_2) = 28 + x_1 + x_2.$$

Требование (5.24) приводит к неравенствам

$$x_1, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 10, 3x_1 + 2x_2 \leq 18.$$

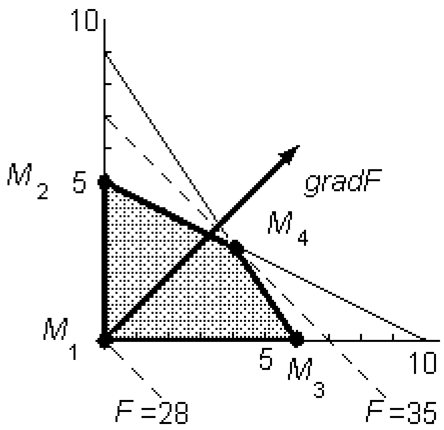

Рис. 5.1 Геометрическое решение

Решение приведено на рис. 5.1. Последние неравенства задают область S, которая имеет угловые точки $M_1(0,0)$, $M_2(0,5)$, $M_3(6,0)$, $M_4(4,3)$. В этих точках функция $F(x)$ принимает значения: $F(0,0)=28$, $F(0,5)=33$, $F(6,0)=34$, $F(4,3)=35$. Таким образом, минимум функции достигается в точке $M_1(0,0)$, максимум – в точке $M_4(4,3)$. В данном примере $grad\ F = 1\vec{i}_1 + 1\vec{i}_2$.

При движении вдоль этого вектора значения функции $F(x)$ возрастают.

ТЕМА 6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

6.1. Постановка задачи

Пусть имеется *m* складов, на которых находится $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц товара соответственно (запасы товара), и *n* магазинов, которым требуется $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц товара соответственно потребление товара). Известны C_{ij} – стоимости перевозки единицы товара из *i*-го склада в *j*-й магазин. Из этих стоимостей можно составить матрицу

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (6.1)$$

Пусть x_{ij} – количество единиц товара, перевозимых из *i*-го склада в *j*-й магазин. Можно составить матрицу

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (6.2)$$

которая определяет план перевозок. В результате получаем, что величина $c_{ij}x_{ij}$ есть цена перевозки из *i*-го склада в *j*-й магазин. Суммируя по всем *i* и *j*, получаем общую цену всех перевозок

$$F(C, X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} . \qquad (6.3)$$

Ограничения:

1. Все $x_{ij} \geq 0$, так как нельзя перевозить отрицательное количество единиц товара.

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \leq a_k$, $k = 1,2,...,m$, (6.4)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq b_k, \; k = 1,2,...,n . \qquad (6.5)$$

Эти неравенства означают, что нельзя вывозить количество товара, большее, чем имеется на складе, и нельзя привозить в магазин товара, большее, чем поданная заявка.

Задача называется основной, если в (6.1) и (6.2) имеют место чистые равенства, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = a_k, \; k = 1,2,...,m, \qquad (6.6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = b_k, \; k = 1,2,...,n . \qquad (6.7)$$

Это можно всегда сделать, если ввести фиктивный склад или фиктивный магазин, стоимость перевозок из которых или в которые очень велика. Кроме того, требуется, чтобы выполнялось условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \tag{6.8}$$

Это также можно всегда сделать, если ввести фиктивный склад или фиктивный магазин.

Пример 6.1. Пусть m=3, n=4, количество единиц товара на складах равно

$$a_1 = 10,\ a_2 = 9,\ a_3 = 18,$$

заявки магазинов равны

$$b_1 = 5,\ b_2 = 6, b_3 = 7,\ b_4 = 12,$$

т.е. запасы превышают потребности на 7 единиц. Введем 5-й магазин, заявка которого $b_5 = 7$, и в матрицу стоимостей перевозок добавим 5-й столбец, состоящий из очень больших чисел w.

Таким образом, транспортная задача состоит в выборе такого плана X, при котором общая цена всех перевозок $F(C, X)$ минимальна. Заметим, что возможны задачи такого типа, когда нужно максимизировать целевую функцию. Однако, чтобы перейти от задачи максимизации к задаче минимизации нужно просто стоимостную матрицу C умножить на –1.

6.2. Структура решения

Данная задача является одним из вариантов задач линейного программирования. Основной результат: в плане X всегда число ненулевых элементов не может превышать n+m–1. Остальные элементы равны нулю. Если число ненулевых элементов плане X меньше n+m–1, то такой план называется вырожденным.

Решение транспортных задач состоит в выборе начального плана и затем процедуры последовательного улучшения получающихся планов. Это улучшение планов выполняется с помощью метода потенциалов.

Процедуру решения рассмотрим на примере.

Пример 6.2. Пусть m=3, n=4, количество единиц товара на складах равно

$$a_1 = 10,\ a_2 = 9,\ a_3 = 11,$$

заявки магазинов равны

$$b_1 = 5,\ b_2 = 6, b_3 = 7,\ b_4 = 12,$$

матрица стоимостей имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & 10 \\ 12 & 9 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Можно проверить, что задача сбалансированная. В данном случае число ненулевых элементов плана должно равняться n+m–1=6. Составим таблицу плана. Для наглядности к плану добавим числа a_i и b_i:

$X =$

$a \setminus b$	5	6	7	12
10				
9				
11				

6.3. Выбор начального плана

6.3.1. Метод северо-западного угла

Этот метод реализуется с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Из 1-го склада товар перевозится в 1-й, 2-й и т.д. магазины, пока склад не опустеет. Если заявка какого-то магазина окажется выполненной, то следующие элементы в соответствующем столбце заполняются нулями:

$X =$

$a \setminus b$	5	6	7	12
0	5	5	0	0
9	0			
11	0			

Шаг 2. Из 2-го склада товар перевозится в магазины, начиная с того, заявки которого еще не выполнены.

Это продолжается до тех пор, пока склад не опустеет. Если заявка какого-то магазина окажется выполненной, то следующие элементы в соответствующем столбце заполняются нулями:

$X =$

$a \setminus b$	5	6	7	12
0	5	5	0	0
0	0	1	7	1
11	0	0	0	

Далее процедура продолжается для следующих складов. Окончательно получаем

$X =$

$a \setminus b$	5	6	7	12
0	5	5	0	0
0	0	1	7	1
0	0	0	0	11

Видно, что имеется 6 ненулевых элементов плана. С учетом (6.9) общая цена всех перевозок F=151. Этот метод не учитывает стоимости перевозок.

6.3.2. Выбор по минимальным элементам строк матрицы C

Этот метод реализуется с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Из 1-го склада товар перевозится в магазины, стоимости перевозок в которые наименьшие. Это продолжается, пока склад не опустеет. Если заявка какого-то магазина окажется выполненной, то следующие элементы в соответствующем столбце заполняются нулями:

$X =$

$a \backslash b$	5	6	7	12
0	4	6	0	0
9		0		
11		0		

Шаг 2. Из 2-го склада товар перевозится в магазины, заявки которых еще не выполнены, в соответствии с наименьшими стоимостями перевозок. Это продолжается до тех пор, пока склад не опустеет. Если заявка какого-то магазина окажется выполненной, то следующие элементы в соответствующем столбце заполняются нулями:

$X =$

$a \backslash b$	5	6	7	12
0	4	6	0	0
0	0	0	7	2
11		0	0	

Далее процедура продолжается для следующих складов. Окончательно получаем

$X =$

$a \backslash b$	5	6	7	12
0	4	6	0	0
0	0	0	7	2
0	1	0	0	10

Видно, что опять имеется 6 ненулевых элементов плана. С учетом (6.9) общая цена всех перевозок F=141. Аналогичный алгоритм можно провести, выбирая минимальные элементы столбцов матрицы C.

6.3.3. Выбор по минимальным элементам всей матрицы C (метод минимального тарифа)

Этот метод реализуется с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. В матрице C находится минимальный элемент. Если таких элементов несколько, то выбирается любой. Пусть это будет элемент с индексами i и j. В данном примере это C_{23}=2. Из i-го склада товар перевозится в j-й магазин. Если склад опустеет, то в плане X в остальные элементы i й строки заносятся 0. Если заявка j-го магазина окажется выполненной, то остальные элементы j-го столбца заполняются нулями:

$X =$

$a \backslash b$	5	6	7	12
10			0	
2			7	
11			0	

Шаг 2. В матрице C вычеркиваются элементы, индексы которых совпадают с индексами заполненных в X клеток. В примере это (1,3), (2,3), (3,3). Среди оставшихся в C элементов находится минимальный (пусть его индексы i и j). Если таких элементов несколько, то выбирается любой. В данном примере это C_{12}=3. Из i-го склада товар перевозится в j-й магазин. Если склад опустеет, то в плане X в остальные элементы i-й строки заносится 0. Если заявка j-го магазина окажется выполненной, то остальные элементы в j-го столбца заполняются нулями:

$X =$

$a \backslash b$	5	6	7	12
4		6	0	
2		0	7	
11		0	0	

Шаг 3. В матрице C вычеркиваются элементы, индексы которых совпадают с индексами заполненных в X клеток. В примере это (1,3), (2,3), (3,3), (1,2), (2,2), (3,2). Среди оставшихся в C.находится минимальный элемент с индексами i и j. Если таких элементов несколько, то выбирается любой. В данном примере это $C_{31=}3$. Из i-го склада товар перевозится в j-й магазин. Если склад опустеет, то в плане X в остальные элементы i-й строки заносится 0. Если заявка j-го магазина окажется выполненной, то остальные элементы j–го столбца заполняются нулями:

$X =$

$a \backslash b$	5	6	7	12
4	0	6	0	
2	0	0	7	
6	5	0	0	

Эта процедура продолжается, пока не останется один магазин, куда перевозятся все остатки. Окончательно в примере получается

$X =$ (6.10)

$a \backslash b$	5	6	7	12
10	0	6	0	4
9	0	0	7	2
11	5	0	0	6

С учетом (6.1) общая цена всех перевозок F=145.

Рассмотренные варианты показывают, что начальные приближения могут быть разными.

6.4. Метод потенциалов

Для улучшения полученного начального приближения используется метод потенциалов.

Пусть выбран какой-то начальный план X. Обозначим через $I(X)$ множество индексов ненулевых элементов в матрице X, а через $O(X)$ – множество индексов нулевых элементов. Улучшение плана X состоит в ведении новой перевозки в множестве $O(X)$ и исключения одной старой перевозки из множества $I(X)$.

Для примера возьмем план (6.10). Включим в него перевозку $x_{11} = \theta$. Для сохранения баланса величину θ нужно вычесть из x_{14} и из x_{31} и добавить к x_{34}. В результате получим план

$X^{(11)} =$ (6.11)

$a \backslash b$	5	6	7	12
10	θ	6	0	$4-\theta$
9	0	0	7	2
11	$5-\theta$	0	0	$6+\theta$

Если $X^{(11)}$ подставить в (6.3), то получим

$$F\left(C, X^{(11)}\right) = F(C, X) + \theta(\bar{c}_{11} - c_{14} - c_{31} + c_{34}).$$

Здесь элемент $\bar{c}_{11}$ отмечен чертой сверху, потому, что индексы $(1,1) \in O(X)$. Величина $\Delta c_{11} = \bar{c}_{11} - c_{14} - c_{31} + c_{34}$ называется коэффициентом замещения. Если окажется, что $\Delta c_{11} < 0$, то $F\left(C, X^{(11)}\right) < F(C, X)$, т.е. план $X^{(11)}$ лучше, чем план *X*. Аналогично нужно просмотреть все остальные элементы из множества $O(X)$.

Для упрощения этой процедуры вычисления коэффициентов замещения введен метод потенциалов. Вводятся соотношения

$$c_{ij} = u_i + v_j, \ (i, j) \in I(X). \tag{6.12}$$

Учитывая способ вычисления коэффициентов замещения, можно показать, что

$$\Delta c_{ij} = \bar{c}_{ij} - u_i - v_j, \ (i, j) \in O(X). \tag{6.13}$$

В результате получается следующий алгоритм решения. Пусть *X* – начальный план и пусть *I*(*X*) и $O(X)$ – множества индексов ненулевых и ненулевых элементов в этом плане. Множество *I*(*X*) состоит из $n+m-1$ элементов. Множество *I*(*X*) состоит из $n+m-1$ элементов, множество $O(X)$ – из $nm\text{-}n\text{-}m+1$ элементов.

Шаг 1. Решается система уравнений (6.12) относительно неизвестных u_i и v_j. В этой системе $n+m-1$ уравнение и $n+m$ неизвестных. Поэтому одно из неизвестных можно взять произвольно, например, $u_1 = 1$.

Шаг 2. На основе (6.13) вычисляют коэффициенты замещения $\Delta c_{ij}, (i, j) \in O(X)$.

Шаг 3. Если все $\Delta c_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in O(X)$, то план *X* нельзя улучшить и он является решением задачи. Иначе переход к следующему шагу.

Шаг 4. Из всех отрицательных Δc_{ij} выбирается наименьший. Пусть он имеет индексы (*p*,*q*). Тогда в план *X* вводится элемент $x_{pq} = \theta$. Далее проводится балансировка, в результате чего из каких-то элементов плана *X*, принадлежащих множеству *I*(*X*), будут вычитаться значение θ. Так как элементы плана не могут быть отрицательными, то значение θ выбирается так, чтобы среди всех элементах нового плана с индексами из множества *I*(*X*), содержащих θ, один элемент, например с индексами (*s*, *t*) стал =0, а остальные >0. Это приведет к тому, что $\theta = x_{st}$.В результате получается новый план, который отличается от *X* тем, что появляется элемент $x_{pq} = \theta$, а элемент $x_{st} = 0$.

Полученный новый план проверяется согласно введенному алгоритму.

Пример 6.3. Проведем исследование плана

$$X = \begin{array}{c|c:c:c:c} a \backslash b & 5 & 6 & 7 & 12 \\ \hline 10 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ \hdashline 9 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ \hdashline 11 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \tag{6.14}$$

с учетом матрицы стоимостей перевозок (6.9). Для него общая цена всех перевозок *F*=145. В соответствие с этим планом в матрице *C* выделим старые и новые элементы

$$C = \begin{bmatrix} \bar{4} & 3 & \bar{7} & 10 \\ \overline{12} & \bar{9} & 2 & 5 \\ 3 & \bar{6} & \overline{11} & 8 \end{bmatrix},$$

и запишем систему уравнений для потенциалов

$$c_{12} = u_1 + v_2 = 3,$$
$$c_{14} = u_1 + v_4 = 10,$$
$$c_{23} = u_2 + v_3 = 2,$$
$$c_{24} = u_2 + v_4 = 5,$$
$$c_{31} = u_3 + v_1 = 3,$$
$$c_{34} = u_3 + v_4 = 8.$$

Решение этой системы уравнений равно

$$u_1 = 1,\ u_2 = -4, u_3 = -1, v_1 = 4, v_2 = 2, v_3 = 6, v_4 = 9.$$

На основании этих данных составляем таблицу коэффициентов замещения.

$$\Delta C = \begin{array}{c|c:c:c:c|} u_i \setminus v_j & 4 & 2 & 6 & 9 \\ \hline 1 & \bar{c}_{11} - u_1 - v_1 & & \bar{c}_{12} - u_1 - v_2 & \\ \hdashline -4 & \bar{c}_{21} - u_2 - v_1 & \bar{c}_{22} - u_2 - v_2 & & \\ \hdashline -1 & & \bar{c}_{32} - u_3 - v_2 & \bar{c}_{33} - u_3 - v_3 & \\ \hline \end{array} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 & \\ 12 & 11 & & \\ & 5 & 6 & \end{bmatrix}$$

Поскольку коэффициент замещения $\Delta c_{11} = -1 < 0$, то вводим новую перевозку $x_{11} = \theta$. В результате после проведения балансировки получаем

$$\overline{X} = \begin{array}{c|c:c:c:c|} a \setminus b & 5 & 6 & 7 & 12 \\ \hline 10 & \theta & 6 & 0 & 4-\theta \\ \hdashline 9 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ \hdashline 11 & 5-\theta & 0 & 0 & 6+\theta \\ \hline \end{array}.$$

Так как элементы плана не могут быть отрицательными, то значение θ нужно выбрать так, чтобы $4-\theta \geq 0$ и $5-\theta \geq 0$. Отсюда следует $\theta = 4$. При этом $x_{14} = 0$. В результате получаем новый план

$$X = \begin{array}{c|c:c:c:c|} a \setminus b & 5 & 6 & 7 & 12 \\ \hline 10 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ \hdashline 9 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ \hdashline 11 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ \hline \end{array}. \qquad (6.15)$$

Для него общая цена всех перевозок F=141, т.е. значение F уменьшилось.

Для этого плана (6.15) повторим исследования. В соответствие с этим планом в матрице C выделим старые и новые элементы

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \bar{7} & \overline{10} \\ \overline{12} & \bar{9} & 2 & 5 \\ 3 & \bar{6} & \overline{11} & 8 \end{bmatrix},$$

и запишем систему уравнений для потенциалов

$$c_{11} = u_1 + v_1 = 4,$$
$$c_{12} = u_1 + v_2 = 3,$$
$$c_{23} = u_2 + v_3 = 2,$$

$$c_{24} = u_2 + v_4 = 5,$$

$$c_{31} = u_3 + v_1 = 3,$$

$$c_{34} = u_3 + v_4 = 8.$$

Решение этой системы уравнений равно

$$u_1 = 1,\ u_2 = -3, u_3 = 0, v_1 = 3, v_2 = 2, v_3 = 5, v_4 = 8\,.$$

На основании этих данных составляем таблицу коэффициентов замещения.

$$\Delta C = \begin{array}{c|cccc} u_i \setminus v_j & 3 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 1 & & & \bar{c}_{12}-u_1-v_2 & \bar{c}_{14}-u_1-v_4 \\ -3 & \bar{c}_{21}-u_2-v_1 & \bar{c}_{22}-u_2-v_2 & & \\ 0 & & \bar{c}_{32}-u_3-v_2 & \bar{c}_{33}-u_3-v_3 & \end{array} = \begin{bmatrix} & & 1 & 1 \\ 7 & 10 & & \\ & 4 & 6 & \end{bmatrix}$$

Получается, что все коэффициенты замещения неотрицательны. Поэтому план (6.15) дает окончательное решение задачи.

ТЕМА 7. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

7.1. Постановка задачи

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, когда число складов и число магазинов одинаково и равно n. На каждом складе имеется только одна единица товара и каждому магазину требуется также только одна единица товара. Предполагается, что известны c_{ij} – стоимости перевозки единицы товара из i-го склада в j-й магазин. Из этих стоимостей можно составить матрицу

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

Пусть x_{ij} − количество единиц товара, перевозимых из i-го склада в j-й магазин. Можно составить матрицу

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \tag{7.2}$$

которая определяет план перевозок. В результате получаем, что величина $c_{ij}x_{ij}$ есть цена перевозки из i-го склада в j-й магазин. Суммируя по всем i и j, получаем общую цену всех перевозок

$$F(C,X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \tag{7.3}$$

Особенностью данной задачи является то, что

1. Все $x_{ij} = 0$ или 1.

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 1,\ k = 1,2,...,n,$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1,\ \ k = 1,2,...,n.$$

Эти условия означают, что в плане X в каждой строке и в каждом столбце должна стоять одна и только одна 1.

Задача о назначениях состоит в выборе такого плана X, при котором общая цена всех перевозок $F(C,X)$ минимальна. Если в исходной задаче нужно максимизировать целевую функцию, то можно просто стоимостную матрицу C умножить на –1 и затем перейти к задаче минимизации целевой функции.

7.2. Решение задачи

При решение задачи используется тот факт, что добавление к стокам или столбцам матрицы C одинаковых чисел не влияет на окончательный результат. Поэтому решение задачи сводится к преобразованию матрицы C к виду, когда все $c_{ij} \geq 0$ и в каждой строке и в каждом столбце матрицы C должен стоять хотя бы один 0. Такие нули названы значимыми. Решением задачи будет план X, в котором на месте значимых нулей ставятся 1.

Таким образом, строится следующий алгоритм решения.

Шаг 1. (Подготовительный). Если исходная задача требует нахождения максимума функции $F(C,X)$, все элементы матрицы C умножаются на –1. Далее. Из всех элементов каждого столбца вычитается минимальный элемент. Из всех элементов каждой строки вычитается минимальный элемент. В результате получается, что все $c_{ij} \geq 0$.

Шаг 2. В матрице C выделяются значимые нули. Эта процедура состоит в следующем. Выделяется какой-то нулевой элемент. Лучше начинать с нулей, которые единственные в какой-то строке и каком-то столбце. Вычеркиваются строка и столбец, на пересечении которых стоит этот элемент. В оставшейся части выделяется какой-то новый нулевой элемент, и вычеркиваются строка и столбец, на пересечении которых стоит этого элемента. И т.д. Если значимых нулей окажется n, то задача решена. Иначе переход к следующему шагу.

Шаг 3. Отмечаются строки, где нет значимых нулей.

Шаг 4. Отмечаются столбцы, где в выделенных строках есть неотмеченные нули. Если таких нулей нет, то переход к шагу 6, иначе к шагу 5.

Шаг 5.Отмечаются строки, где в отмеченных столбцах имеются значимые нули. Переход к шагу 4.

Шаг 6. В матрице C вычеркиваются отмеченные столбцы и неотмеченные строки. В оставшейся части не должно быть нулевых элементов.

Шаг 7. В оставшейся части находится минимальный элемент и это число вычитается из всех невычеркнутых столбцов уже всей матрицы C. В результате в матрице C появятся отрицательные элементы. Они появятся в каких-то вычеркнутых строках. Прибавляем к элементам этих строк указанное число, чтобы в C не было отрицательных элементов. Окончательно получим новую матрицу C, у которой все $c_{ij} \geq 0$. Затем переход к шагу 2.

Пример 7.1. Пусть исходная матрица

$$C = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.4}$$

Нужно построить план

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix},$$

при котором общая цена всех перевозок

$$F(C,X) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

минимальна.

Решение

Шаг 1. Из всех элементов каждого столбца матрицы C. вычитается минимальный элемент столбца

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из всех элементов 2-й и 3-й строк вычитается минимальный элемент

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В результате получается, что все $c_{ij} \geq 0$.

Шаг 2. В матрице C выделяются значимые нули.

$$C = \begin{vmatrix} 7 & \bar{0} & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & \bar{0} \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ \bar{0} & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Они отмечаются чертой сверху. Эта матрица имеет 3 значимых нуля, поскольку элемент $c_{33} = 5$.

Шаг 3. Отмечаются строки, где нет значимых нулей.

$$C = \begin{array}{|cccc|c} 7 & \bar{0} & 2 & 7 & \\ 1 & 1 & 2 & \bar{0} & \\ 3 & 0 & 5 & 2 & * \\ \bar{0} & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & \end{array}.$$

Шаг 4. Отмечаются столбцы, где в выделенных строках есть неотмеченные нули.

$$C = \begin{array}{|cccc|c} 7 & \bar{0} & 2 & 7 & \\ 1 & 1 & 2 & \bar{0} & \\ 3 & 0 & 5 & 2 & * \\ \bar{0} & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & * & & & \end{array}.$$

Шаг 5. Отмечаются строки, где в отмеченных столбцах имеются отмеченные нули

$$C=\begin{array}{|cccc|c}7 & \bar{0} & 2 & 7 & * \\ 1 & 1 & 2 & \bar{0} & \\ 3 & 0 & 5 & 2 & * . \\ \bar{0} & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & * & & & \end{array} \qquad (7.5)$$

Переход к шагу 4.

Шаг 6. Отмечаются столбцы, где в выделенных строках есть неотмеченные нули. Таких больше нет. Переход к шагу 6.

Шаг 7. В матрице C вычеркиваются отмеченные столбцы и неотмеченные строки

$$C=\left|\begin{array}{cccc}7 & \vdots & 2 & 7 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 3 & \vdots & 5 & 2 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots\end{array}\right|.$$

В оставшейся части не должно быть нулевых элементов.

Шаг 8. В оставшейся части находится минимальный элемент. В данном случае это c_{13}=2. Это число вычитается из всех не вычеркнутых столбцов уже всей матрицы C (см. (7.7)).

$$C=\left|\begin{array}{cccc}5 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -2\end{array}\right|.$$

Прибавляем к элементам 2-й и 4-й строк число 2. Окончательно получим новую матрицу

$$C=\left|\begin{array}{cccc}5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0\end{array}\right|, \qquad (7.6)$$

у которой все $c_{ij} \geq 0$. Затем переходим к шагу 2.

Шаг 9. В матрице (7.6) выделяются значимые нули

$$C=\left|\begin{array}{cccc}5 & 0 & \bar{0} & 5 \\ 1 & 3 & 2 & \bar{0} \\ 1 & \bar{0} & 3 & 0 \\ \bar{0} & 3 & 0 & 0\end{array}\right|.$$

Поскольку эта матрица имеет 4 значимых нуля, то решение задачи закончено. Соответствующий оптимальный план имеет вид

$$X=\left|\begin{array}{cccc}0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right|.$$

Если вернуться к исходной матрице (7.4), то в ней можно отметить перевозки из плана X

$$C = \begin{vmatrix} 9 & 6 & \overline{5} & 8 \\ 4 & 8 & 6 & \overline{2} \\ 6 & \overline{7} & 9 & 4 \\ \overline{2} & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Минимальная цена перевозок равна 16. Если перевозки планировать из принципа минимального тарифа (см. п.6.3.3), то цена перевозок будет равна $F = c_{44} + c_{21} + c_{13} + c_{32} = 17$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq -28$

$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 26$

$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -48$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

б) $F(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$

$-3x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geq -3$

$-5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 2x_4 \geq -40$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матриц стоимостей:

2	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

2	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Вариант 2

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 5$

$-x_2 + 5x_3 \le 33$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

б) $F(x) = x_1 + x_2 \to \min$

$5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le -16$

$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \ge -10$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	5	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

8	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	11	9

2	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	11	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Вариант 3

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 + 2x_2 \to \min$

$7x_2 + x_3 \geq -28$

$-6x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -16$

$5x_1 - 6x_2 + 7x_3 \leq -18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$-7x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 4x_4 \geq -28$

$x_1 + 6x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	12	16	19	19
45	41	13	17	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	43	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
14	1	11	3
5	6	4	12
8	18	9	9

2	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	11	1	14	5
6	7	8	9	10
5	14	3	2	1

Вариант 4

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$-4x_1 - 7x_2 - 4x_3 \geq 5$

$3x_2 - 4x_3 \leq 43$

$-6x_1 + 7x_2 - 6x_3 \leq 95$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$-6x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 4x_4 \geq 42$

$x_1 + 7x_2 \geq -43$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	41	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	16	21	35	10	11
21	17	20	9	17	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

21	9	8	8
4	19	11	3
5	6	4	12
8	8	9	19

2	8	3	1	4
11	2	18	7	5
21	1	1	14	5
6	7	8	8	10
5	4	3	2	1

Вариант 5

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

$-2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geq -38$

$-4x_1 - 4x_2 - x_3 \leq 29$

$7x_1 + x_2 + x_3 \leq 53$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq -48$

$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 \leq -18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	24	16	21	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	35	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

12	5	8	8
14	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

12	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	22	1

Вариант 6

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$-7x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq -12$

$-7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq -17$

$4x_1 + x_2 + 4x_3 \geq -12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq -10$

$7x_1 - x_3 + 5x_4 \leq 7$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

2	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

2	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Вариант 7

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq -57$

$-6x_1 - 7x_2 - 6x_3 \geq -31$

$-4x_1 - 2x_2 \geq -14$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

б) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-2x_1 - 4x_2 + 3x_4 \geq -10$

$7x_1 - 3x_2 - 3x_3 \geq -33$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \setminus b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \setminus b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

2	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

8	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11

Вариант 8

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geq -25$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 23$

$-4x_1 - 6x_2 - 3x_3 \geq -48$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$5x_2 - x_3 - 4x_4 \leq -30$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 22$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \setminus b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \setminus b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

2	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

2	8	3	1	4
11	2	18	7	15
1	1	11	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	21

Вариант 9

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-7x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq -24$

$-6x_1 - x_2 = 7$

$-3x_1 - 5x_2 - x_3 = -19$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = -3x_1 + x_2 \to \min$

$7x_1 - 6x_4 \geq 7$

$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 \geq -20$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	17
15	12	23	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

2	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

2	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Вариант 10

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 + 2x_2 \to \min$

$5x_1 + 2x_2 \geq -20$

$3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq -16$

$-6x_1 + 2x_3 \leq 16$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$

$5x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 32$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 10$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

12	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

21	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Вариант 11

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$2x_1 - 4x_3 \geq -4$

$7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 37$

$-3x_1 + 3x_2 - 7x_3 \geq -33$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$3x_1 - 3x_3 + 4x_4 \geq -18$

$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq -24$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	19	17	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

8	5	8	8
4	1	11	3
5	6	4	12
8	8	9	9

7	8	3	1	4
11	2	18	7	5
1	1	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Вариант 12

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$6x_1 - 4x_2 - 6x_3 \geq -46$

$-2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 31$

$-5x_2 + 2x_3 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \geq -21$

$5x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 40$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \setminus b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \setminus b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	27
15	12	21	35	10	11
21	17	20	29	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	3
5	16	14	12
8	8	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11

Вариант 13

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 3x_2 \to \min$

$4x_1 + x_2 - x_3 \geq -21$

$x_1 + 7x_3 \geq -21$

$6x_2 - 2x_3 \geq 6$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$

$-3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 7x_4 \geq 10$

$-4x_1 - 2x_2 + 5x_4 \leq 22$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	21	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	3
5	16	14	12
8	8	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	12	11

Вариант 14

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$4x_1 - 7x_2 + 4x_3 \geq -8$

$2x_1 - 6x_3 \leq 44$

$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \geq -2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = -3x_1 + 2x_2 \to \min$

$6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 48$

$-3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \geq 15$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	14	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	3
5	16	14	12
8	18	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	19	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11

Вариант 15

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 - x_2 \to \min$

$3x_1 - 2x_2 - 7x_3 \geq -16$

$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 17$

$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 14$

$-5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geq -10$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	15	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	3
5	16	14	12
8	8	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	1	14	5
6	7	8	9	10
5	24	3	2	11

Вариант 16

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-2x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 1$

$-x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 41$

$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geq 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$

$-2x_2 + 6x_3 - 2x_4 \leq 4$

$2x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \leq 32$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	35	16	71	19	8
45	31	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	3
5	16	14	12
18	18	11	19

12	8	3	21	4
11	2	18	7	15
11	21	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11

Вариант 17

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-4x_1 + x_2 + 4x_3 \ge -2$

$-3x_1 + 3x_2 + 7x_3 \ge -1$

$2x_1 - x_2 - 6x_3 \le 4$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

б) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$6x_2 - x_3 - 3x_4 \le 24$

$6x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \ge 20$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	23
5	16	14	12
8	8	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	1	14	25
6	7	8	9	10
5	4	31	2	11

Вариант 18

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-x_1 + 4x_2 - 4x_3 \le 38$

$-3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4$

$-x_2 + 6x_3 \ge -18$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

б) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$-3x_1 + 4x_3 - 2x_4 \le 15$

$x_2 - 5x_3 + 3x_4 \ge 5$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	15	11	3
5	16	14	12
8	8	19	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	1	4	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11

Вариант 19

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$5x_1 + 2x_2 \geq -37$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -23$

$-x_2 + 6x_3 \leq 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

б) $F(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \min$

$-x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 \geq -13$

$4x_2 - 3x_3 - 6x_4 \geq -12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \ \backslash \ b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
4	5	11	3
5	6	14	12
8	8	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	7	15
11	21	21	14	15
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11

Вариант 20

1. Решить геометрически и симплекс-методом задачи линейного программирования

а) $F(x) = x_1 + x_2 \to \min$

$-5x_1 + 7x_2 - 5x_3 \le 8$

$-3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 11$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -23$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

б) $F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

$2x_2 + -4x_3 + 5x_4 \le 4$

$6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \ge -24$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$.

2. Решить транспортные задачи. Провести сбалансирование задач. Первый план перевозок построить методом северо-западного угла.

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20
35	25	16	71	19
45	41	13	27	15
20	18	54	75	17
15	12	21	35	10

$a_i \quad \backslash \quad b_j$	18	40	51	20	30
35	25	16	71	19	8
45	41	13	27	15	9
20	18	54	75	17	7
15	12	21	35	10	11
21	17	20	9	7	31

3. Решить задачи о назначениях для следующих матрицу стоимостей:

7	5	8	8
14	15	11	3
15	16	14	12
18	8	9	19

12	8	3	1	4
11	2	18	17	15
11	21	1	14	5
6	7	8	9	10
5	4	3	2	11