МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

Н.Ю. Салмина

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

2015

В настоящем учебном пособии изложены основные вопросы теории игр. Рассматриваются формы представления игр, как способы формализации различных задач. В учебное пособие включены для рассмотрения следующие классы игровых моделей: конечные и бесконечные антагонистические игры, бескоалиционные игры, кооперативные игры. Для каждого из рассматриваемых классов игровых моделей приводятся принципы оптимальности и методы нахождения оптимального решения.

Теоретический материал иллюстрируются многочисленными примерами.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 080700 «Бизнес-информатика» и студентов родственных направлений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория игр является составной частью исследования операций. Она находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких, как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство и т.д. Теория игр исследует операции в условиях конфликта, занимается анализом математических моделей принятия рациональных решений в условиях неопределенного поведения конфликтующих сторон.

В данном пособии рассматриваются некоторые общие вопросы теории игр: представление игр в различных формах; принципы оптимальности в антагонистических и неантагонистических играх; методы нахождения решений. Рассмотрены различные классы игровых моделей. Большое внимание уделено изучению антагонистических игр, как конечных, так и бесконечных. Достаточно подробно изложены также идеи кооперативного принятия решений на основе классических кооперативных игр.

Для усвоения основных результатов и понятий, приведенных в учебном пособии, достаточно знания курса математики в объеме университетской программы. Во всех главах содержатся многочисленные примеры, иллюстрирующие основные положения теории игр.

Дисциплина «Теория игр» — одна из основных дисциплин подготовки бакалавров по направлению «Бизнес-информатика». Основной задачей курса «Теория игр» является формирование у студентов профессиональных знаний и практических навыков по решению задач принятия решений в условиях противодействия, а также по решению задач кооперативного принятия решений; разработке и созданию игровых моделей с целью исследования сложных систем, решению экономических задач.

Введение

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т.е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. При этом каждая сторона вынуждена принимать решения в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект (игрок) располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он может находиться, о множестве решений (стратегий), которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Неопределенность, как правило, является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы [1].

Основные идеи и термины теории игр заимствованы из классических (салонных) игр, таких как карты, домино, шахматы и т.д. Классическая салонная игра начинается из начальной позиции и состоит из последовательности шагов игры, а каждый шаг включает последовательность ходов (выборов) игроков, причем игрок делает выбор из множества альтернатив. Если каждый игрок в каждый момент времени знает все предыдущие ходы (выборы) игроков, то такая игра называется игрой с полной информацией. В играх с неполной информацией игрок не в состоянии определить, какой ход сделает противник, либо принимает решение, не зная, в каком состоянии находится игра.

В реальной игре каждый игрок, в зависимости от опыта и квалификации интуитивно стремится придерживаться такой стратегии, которая обеспечивает ему максимально возможный выигрыш (минимальный проигрыш).

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.

Теория игр занимается исследованием математических моделей конфликтов и их формальным решением, что позволяет [2]:

– смоделировать процесс и возможные результаты будущей игры еще до ее фактического начала;

– по результатам моделирования будущей игры принять решение об экономической целесообразности собственного участия в конфликте.

Выбор стратегии заранее возможен в игре только с личными ходами. Если в игре присутствуют случайные ходы или вся игра состоит из случайных ходов игроков, то можно говорить лишь о математическом ожидании выигрыша.

В первой главе пособия приводится математическая модель игры, дана классификация игр и рассмотрены основные вопросы теории. Различные формы представления игр рассматриваются во второй главе.

Третья глава посвящена антагонистическим играм: приведены принципы оптимальности антагонистических игр, основные методы нахождения решений как в чистых, так и в смешанных стратегиях. Рассмотрены конечные (матричные) и бесконечные антагонистические игры.

В четвертой главе пособия рассмотрены игры многих лиц: бескоалиционные игры, кооперативные игры без побочных платежей, а также классические кооперативные игры.

1. Определение и классификация игр

Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации [3]:

$$\Gamma = < U_i, J_i, i \in N >,$$

где U_i — множество стратегий i-го игрока;

J_i — функция выигрыша i-го игрока;

N — множество игроков.

Игровой смысл модели заключается в том, что функция выигрыша i-го игрока зависит не только от стратегии U_i этого игрока, но от стратегий всех остальных игроков: $J_i = J_i(U_1, ..., U_i, ..., U_n)$.

Игры, как и все задачи исследования операций, бывают статическими и динамическими. Мы будем рассматривать только статические игры (U_i, J_i не зависят от времени). Класс статических игр по различным признакам подразделяется на подклассы.

В зависимости от **количества игроков** все игры делятся на **игры двух лиц** и **игры многих лиц**. Игры двух лиц разделяются на антагонистические (игры со строгим соперничеством) и неантагонистические.

Игры двух лиц называют **антагонистическими**, если игроки преследуют противоположные цели. Здесь всегда выполняется условие $J_2 = -J_1$ (все, что выигрывает один игрок, проигрывает другой, и наоборот). Антагонистическую игру можно задать тройкой $\Gamma = < U_1, U_2, J >$, где J — функция выигрыша первого игрока. В такой игре сумма выигрышей игроков всегда равна нулю. Антагонистические игры иногда называют играми с нулевой суммой либо играми двух лиц со строгим соперничеством.

В **неантагонистических** играх двух лиц интересы игроков не противоположны: оба игрока могут быть в проигрыше, в выигрыше, один игрок может проигрывать или выигрывать больше другого. Здесь необходимо задавать функции выигрыша для обоих игроков и игра задается четверкой $\Gamma = < U_1, U_2, J_1, J_2 >$.

Игры многих лиц подразделяются на бескоалиционные и коалиционные. В **бескоалиционных** играх целью каждого игрока является максимизация индивидуального выигрыша (минимизация проигрыша). **Коалиционные** игры — это игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрыша коллектива (коалиции). В свою очередь, бескоалиционные игры подразделяются на кооперативные и некооперативные. В **некооперативных** играх каждый игрок действует сам по себе, не вступая ни в какие соглашения с другими игроками. В **кооперативных** играх игроки могут объединяться в группы — коалиции — с целью максимизации суммарного выигрыша, который впоследствии делится между членами коалиции по соглашению.

В зависимости от **используемых стратегий** происходит деление на **конечные** и **бесконечные** игры. Если множества стратегий всех игроков конечны, то игра — конечная. Если множество стратегий хотя бы одного игрока бесконечно, то игра называется бесконечной.

Вид функции выигрышей определяет **игры с непрерывными функциями выигрышей** и **игры с дискретными функциями выигрышей**. Для класса игр с непрерывными функциями выигрышей можно рассматривать в зависимости от вида функции выпуклые, вогнутые, выпукло-вогнутые игры.

Конечной целью исследования любой игры является нахождение оптимальных стратегий игроков и их выигрышей. *Множество оптимальных стратегий игроков и вектора выигрышей называется* ***оптимальным решением игры.***

Оптимальность обычно понимают в смысле максимизации дохода, минимизации затрат, наискорейшего достижения цели и т.д. Но в конфликтной ситуации участник не может односторонне максимизировать свой выигрыш, т.к. этот выигрыш зависит и от поведения других сторон. Кроме того, оптимальные стратегии необходимо найти для всех игроков, причем с точки зрения игры все участвующие стороны равноправны. Поэтому понятие оптимальности в любой игровой ситуации очень тонко, в связи с чем и возникают следующие три основные проблемы:

1) Необходимость выбора принципа оптимальности перед началом игры. То есть необходимо ответить на вопрос: «В чем состоит оптимальность поведения?».

2) Необходимость выяснения вопроса, реализуем ли выбранный принцип оптимальности. Существуют ли оптимальные, в смысле выбранного принципа, решения? Важной задачей исследования игры является установление необходимых и достаточных условий существования оптимальных стратегий в широких классах игр.

3) Поиск оптимальных решений, если они существуют. Во-первых, необходимо выяснить, по каким признакам отличаются оптимальные стратегии от остальных; во-вторых, разработать эффективные методы решений.

В общем случае для каждого класса игр существуют некоторые общие принципы оптимальности («разумного» поведения). Знакомство с этими принципами дает возможность лицу, принимающему решение, обосновать свой выбор, основываясь не на интуиции, а на строгих расчетах.

Вопросы для самопроверки

1. Какая игра называется антагонистической?
2. Какая игра называется бескоалиционной?
3. Что является конечной целью любой игры?
4. Что понимается под оптимальностью в игре?
5. Перечислите основные проблемы, которые возникают при решении игр.

2. Формы представления игр

Поскольку в статических играх выбор стратегии производится один единственный раз, то можно считать, что игроки делают свои выборы до начала игры. Для многоходовых игр под стратегией будем понимать правило поведения игрока от начала до конца игры. Конечно, в таких играх как шахматы, шашки, в некоторых карточных играх число возможных ходов настолько велико, что нельзя заранее запланировать свои действия. Но поскольку в таких играх число различных ситуаций все же конечно, то можно абстрагироваться от практических затруднений и считать, что игрок еще до начала игры решает, как ему действовать в тех или иных ситуациях.

Существуют реальные конфликты, в которых участники делают свои ходы одновременно и независимо друг от друга. Если ходы выполняются не одновременно, то действия первых участников могут быть известны или неизвестны последним участникам. Если в игре участвует случай (раздача карт, бросание кубика и т.д.), то игроки могут иметь или не иметь информацию о результатах его действия. Все это учитывается в математических моделях представления игр.

В зависимости от цели исследования любую игру можно рассматривать в **развернутой** (позиционной) или в **нормальной** (частный случай — матричной) формах. В развернутой форме лучше раскрывается последовательность событий, она более наглядна для многоходовых игр. Здесь показываются очередности ходов игроков, их информированность и выигрыши. Недостатком этой формы представления является сложность нахождения решения. Нормальная форма игры менее наглядна, зато большинство эффективных методов нахождения решений разработано именно для этой формы.

Развернутая форма представляет игру в виде дерева, имеющего следующую структуру [13]:

1) начальная точка — исходная позиция игры;

2) ребра, исходящие из одной и той же вершины, называются альтернативами и нумеруются, либо помечаются в соответствии с ходами игроков; каждое ребро соответствует какому-либо ходу игрока;

3) вершины, имеющие хотя бы одну альтернативу, называются промежуточными; каждая промежуточная позиция соответствует какому-то состоянию игры;

4) вершины, не имеющие ни одной альтернативы, называются конечными и означают конец игры; возле каждой конечной вершины записывается вектор $(Q_1, Q_2, ..., Q_N)$, определяющий выигрыши игроков в данной позиции;

5) множество всех промежуточных вершин (включая начало дерева) разбивается на $N+1$ множество $I_0, I_1, \ldots, I_N$ (N — количество игроков), называемых множествами очередностей; в множестве I_i ходит i-й игрок, I_0— очередь хода случая;

6) каждое множество очередностей I_i разбивается на подмножества I_i^k, называемые информационными множествами, отражающими информированность игрока: игрок знает, в каком информационном множестве он находится, но не знает, в какой именно вершине; следовательно, вершины одного и того же информационного множества имеют одинаковое число альтернатив; если каждое информационное множество игрока содержит только одну вершину дерева, то говорят, что игрок имеет полную информацию (т.е. игрок всегда знает, кто, когда и как ходил); игра имеет полную информацию, если в ней каждый игрок имеет полную информацию;

7) путь от начала дерева до любой конечной позиции называется партией; каждая партия содержит не больше одной вершины в каждом информационном множестве.

Рассмотрим примеры представления игры в позиционной форме.

Пример 2.1

Пусть игрок 1 имеет 2, а игрок 2 — 3 фишки. Независимо и тайно друг от друга они откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1, в противном случае фишки достаются игроку 2.

Эта игра с неполной информацией. Фактически игроки делают ходы одновременно и не знают о действиях противника. Их незнание показывается информационным множеством, а игру можно представить двумя способами (рис. 2.1).

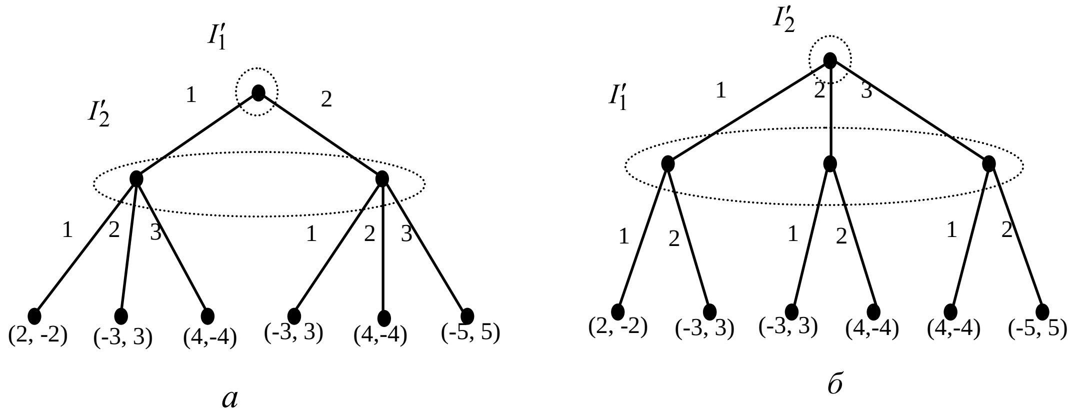

Рис. 2.1. Представление игры с фишками в позиционной форме:
а — 1-й способ; *б* — 2-й способ

Так как данная игра является антагонистической, то можно указывать выигрыш только первого игрока. Для второго игрока в таком случае выигрыш будет браться с противоположным знаком.

Пример 2.2

Пусть двое игроков имеют по 2 шара, которые они должны разложить в две урны. Сначала свои шары раскладывает игрок 1, затем — игрок 2. Игрок 2 знает, как сходил игрок 1. До игроков в одну из урн кладется 1 шар, причем ни 1-й, ни 2-й игрок не знают — в какую именно. Если количество шаров в урне оказывается четным, то их забирает 1-й игрок, иначе — 2-й. Выигрывает тот игрок, у кого в результате оказывается больше шаров. Так как игра антагонистическая, будем указывать выигрыш только 1-го игрока.

Здесь ходы игроков помечены двумя цифрами: первая цифра — количество шаров, положенных в 1-ю урну; вторая цифра — количество шаров, положенных игроком во 2-ю урну (рис. 2.2).

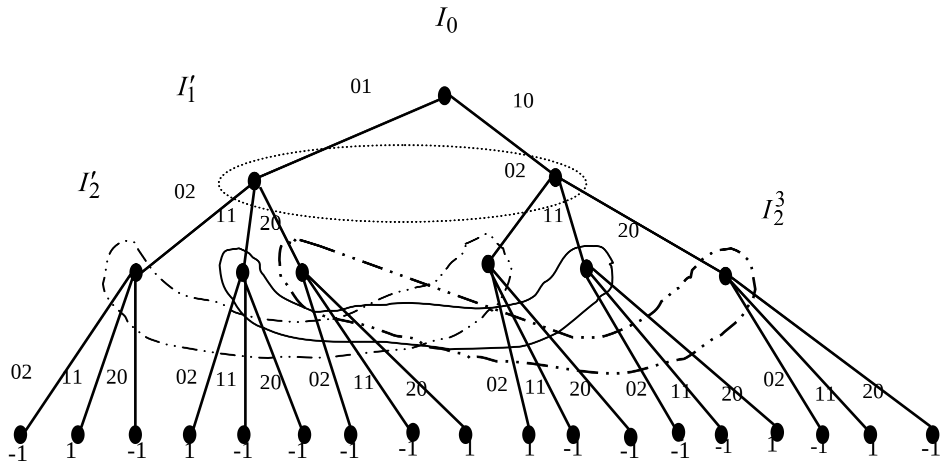

Рис. 2.2. Позиционная форма игры с шарами

Пример 2.3

Два игрока по очереди называют числа из множества $\{1,2,3,4\}$, при этом числа не могут повторяться. Игра ведется до тех пор, пока не будут названы все четыре числа. В результате игрок 1 выигрывает $x1+x4-x2\times x3$ очков, игрок 2 выигрывает $x2+x1-x3-x4$ очков, где x_i — число, названное на i-ом шаге.

Данная игра — это игра с полной информацией: в каждый момент времени каждый игрок имеет полную информацию о ходе игры. Так как здесь каждая вершина дерева является отдельным информационным множеством, то мы пометим только множества очередностей (рис. 2.3).

Нормальная форма игры N лиц — это совокупность $2N$ элементов

$$\Gamma = <U_1,...,U_N, J_1,...,J_N>.$$

Таким образом, нормальная форма игры представляется в виде математической модели, в которой перечисляются множества стратегий для каждого игрока и описываются функции выигрышей игроков.

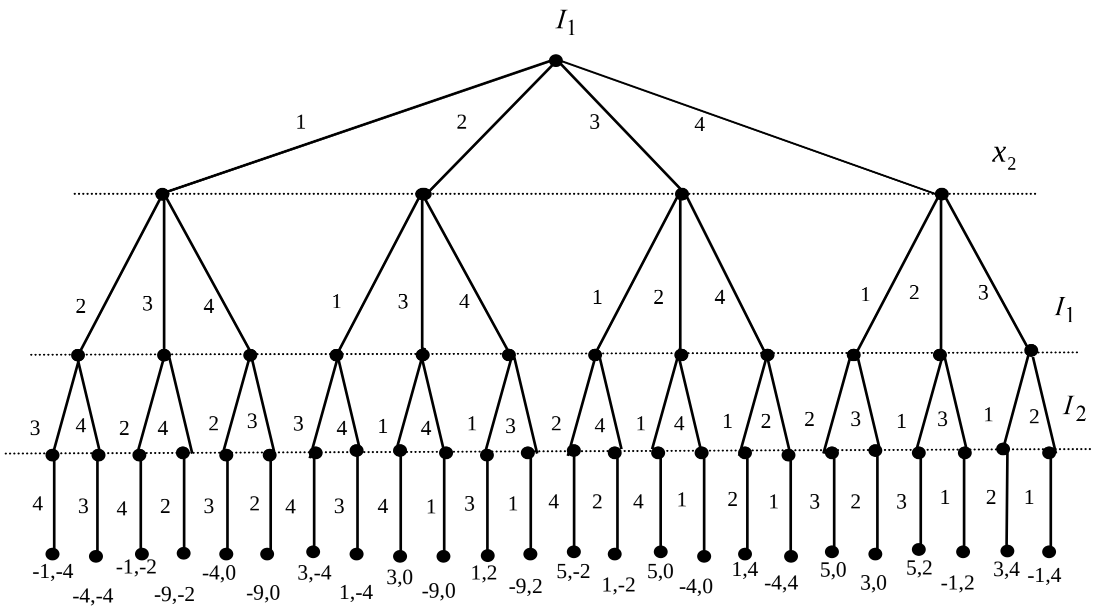

Рис. 2.3. Позиционная форма представления игры с числами

Если игра является конечной игрой 2-х лиц, то чаще она записывается в виде двух матриц, в которых строки соответствуют выборам 1-го игрока, а столбцы — выборам 2-го игрока. Причем для антагонистических игр можно записывать только матрицу выигрыша 1-го игрока.

Пример 2.4

Представим игру с фишками (пример 2.1) в нормальной форме.

$$\Gamma = < U_1 = \{1, 2\}, U_2 = \{1, 2, 3\},\ J_1 = (-1)^{U_1+U_2} \cdot (U_1 + U_2),\quad J_2 = (-1)^{U_1+U_2+1} \cdot (U_1 + U_2) > .$$

Здесь четное/нечетное количество отложенных фишек записывается в функции выигрышей через степень (-1).

Либо эту же игру можно представить в матричной форме: по строкам располагаем стратегии первого игрока, по столбцам – стратегии второго игрока. В результате получаем следующею матрицу размерностью два на три:

	1	2	3
1	2	-3	4
2	-3	4	-5

Пример 2.5

Представить игру с шарами (пример 2.2) в нормальной форме.

Здесь у каждого из игроков по три стратегии: 1) оба шара складываются в первую урну; 2) шары раскладываются по разным урнам; 3) оба шара складываются во вторую урну. В нормальной форме игры, где присутствует случай, величина выигрыша обычно задается в виде вероятности выигрыша. Тогда наша игра в матричной форме примет вид:

	02	11	20
02	0	0	-1
11	0	-1	0
20	-1	0	0

Вопросы для самопроверки

1. Какие формы представления игр вы знаете?
2. В каком случае используется нормальная форма игры?
3. В каком случае предпочтительней использовать развернутую форму игры?
4. Что такое «множество очередностей»?
5. Что показывают «информационные множества» в позиционной форме?
6. Когда игра имеет полную информацию?

3. Антагонистические игры

3.1. Конечные игры

3.1.1. Защитные и уравновешенные стратегии

Рассмотрим антагонистическую игру. У нас имеется два игрока, интересы которых прямо противоположны. Пусть первый игрок имеет m возможных стратегий $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, второй — n стратегий $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$. Если первый игрок использует стратегию α_i, а второй использует стратегию β_j, то первый игрок получает выигрыш в размере a_{ij}, или, по-другому, второй игрок платит первому a_{ij}. Матрица $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ называется платежной матрицей. Задача теории игр состоит в том, чтобы рекомендовать каждому из игроков выбрать стратегию, которую в некотором смысле следует считать наилучшей.

Какие же стратегии можно считать наилучшими в антагонистической игре? Для определения оптимальных стратегий рассмотрим **два основополагающих принципа** — осторожности и уравновешенности.

Следуя принципу осторожности, каждый игрок, памятуя о том, что перед ним разумный и злонамеренный противник, должен выбирать свои действия, исходя из самого неблагоприятного для него ответа партнера, и играть с гарантией. Таким образом, принцип осторожности приводит к максиминному (по полезности) критерию оптимальности для первого игрока и минимаксному (по потерям) критерию для второго игрока.

Определение. Стратегия α', максимизирующая гарантированный выигрыш 1-го игрока, т.е. выбранная в соответствии с максиминным критерием $\min\limits_{j} a_{ij} \to \max\limits_{\alpha_i}$, и стратегия β', минимизирующая гарантированный проигрыш 2-го игрока, т.е. выбранная в соответствии с минимаксным критерием $\max_i a_{ij} \to \min_{\beta_j}$, образуют **защитную пару стратегий**.

Таким образом, применяя защитные стратегии, оба игрока из всех наихудших вариантов выбирают наилучший. Применяя защитную стратегию α', 1-й игрок, независимо от действий второго игрока, обеспечивает себе выигрыш не меньше, чем $V_1 = \max_i \min_j a_{ij}$. Это число называется нижней ценой игры. Аналогично, применяя стратегию β', 2-й игрок может быть уверен, что он проиграет не более, чем $V_2 = \min_j \max_i a_{ij}$. Величина V_2 называется верхней ценой игры.

Рассмотрим нахождение защитных стратегий на двух примерах.

Пример 3.1

У каждого из игроков по две монеты: 1 копейка и 2 копейки. Оба одновременно выкладывают по одной из них на стол. Если достоинства монет совпадают, то выложенные деньги забирает первый игрок, если нет, то второй.

У каждого игрока по две стратегии: первая — игрок выложил монету достоинством в 1 копейку, вторая — игрок выложил монету в 2 копейки. Платежная матрица будет выглядеть следующим образом:

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для первого игрока гарантированный выигрыш при выборе стратегии α_1 равен $\min_j a_{1j} = -1$; при выборе стратегии α_2 — $\min_j a_{2j} = -2$.

Следовательно, защитная стратегия 1-го игрока $\alpha' = \alpha_1$, и нижняя цена игры $V_1 = \max_i \min_j a_{ij} = -1$.

Аналогично для второго игрока $\beta' = \beta_1$, и верхняя цена игры $V_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 1$. Здесь нижняя и верхняя цены игры не совпадают: $V_1 \neq V_2$.

Пример 3.2

Пусть у каждого игрока на руках имеются по 3 карты. У первого — валет, девятка, десятка, у второго — шестерка, восьмерка, дама. Игроки одновременно открывают по одной карте. Тот, у кого карта старше, получает выигрыш, равный сумме очков на обеих картах (валет считается старше десятки, но его стоимость — 2 очка, дамы — 3 очка).

Обозначим стратегии игроков: α_1 — валет, α_2 — 9, α_3 — 10;

β_1 — 6, β_2 — 8, β_3 — дама.

Платежная матрица: $A = \begin{vmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 15 & 17 & -12 \\ 16 & 18 & -13 \end{vmatrix}$.

Здесь защитная пара стратегий (α_1, β_3). При этом нижняя цена игры $V_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = -5$, верхняя цена игры $V_2 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = -5$, т.е. $V_1 = V_2$.

Защитные стратегии есть всегда, более того, их может быть несколько. Можно ли пару защитных стратегий считать решением игры? Нет, нельзя. Сам по себе принцип осторожности еще недостаточен для выбора оптимальной стратегии, если он не сочетается с другим принципом — уравновешенности. Покажем это на рассмотренных выше примерах.

Вернемся к примеру 3.1 и предположим, что игроки решили воспользоваться защитными стратегиями. Итак, первый игрок собрался применить α_1. Тогда второй, глядя на платежную матрицу, может рассуждать так: «Мой противник, зная теорию, очевидно, захочет воспользоваться α_1. При этом он думает, что я тоже применю β_1, и надеется получить выигрыш $a_{11} = 1$. А я тем временем применю β_2, и он получит $a_{12} = -1$». В это время первый игрок думает: «Если я приму теоретическую α_1, то мой противник может меня обмануть и выбрать β_2. Но я это разгадал и иду α_2, тогда я получу $a_{22} = 2$». Второй игрок может разгадать цепочку рассуждений первого игрока и снова вернуться к β_1, и так до бесконечности. Складывается ситуация, когда каждый из игроков, подозревая противника, испытывает соблазн отойти от своей защитной стратегии. Такое свойство называется *неуравновешенностью защитных стратегий*.

Другая ситуация складывается в игре с отгадыванием карт. Здесь отклонение от защитной стратегии не имеет смысла, т.к. если второй игрок применит β_3, то первому нет смысла отклоняться от α_1, и наоборот.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что пара стратегий $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$ **уравновешена**, если для $\forall\, i, j \quad a_{ij*} \le a_{i*j*} \le a_{i*j}$.

Если один из игроков использует стратегию уравновешенной пары, то второму ничего не остается, как воспользоваться второй стратегией из этой пары. При этом требование уравновешенности является более сильным, чем требование осторожности: уравновешенная пара стратегий, если она существует, является защитной, но не наоборот.

3.1.2. Решение игр в чистых стратегиях

Теперь мы можем дать определение решения антагонистической игры.

О п р е д е л е н и е. **Решением игры** в чистых стратегиях называется **уравновешенная пара** $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$ чистых стратегий. Число $V = \alpha_{i*j*}$, которое представляет собой выигрыш первого игрока при условии, что оба игрока используют оптимальные стратегии, называется **ценой игры**. Если $V = 0$, то игра называется справедливой.

Не всякая игра имеет решение в чистых стратегиях (пример с монетами). Встает вопрос — как определить, имеет ли игра решение, а если имеет, то как найти решение. Другими словами, необходимо найти элемент матрицы α_{i*j*}, который является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце, а именно — седловую точку.

Определить существование седловой точки в платежной матрице можно непосредственно, проверяя каждый элемент матрицы, является ли он седловым. Однако этот путь весьма трудоемок, желательно иметь более простой критерий существования седловой точки. Приведем теорему, позволяющую значительно уменьшить число операций при проверке существования седловой точки (здесь и далее мы будем давать только формулировки теорем; при желании читатель может ознакомиться с их доказательствами по источникам, приведенным в списке литературы).

Т е о р е м а . Игра с платежной матрицей $\|a_{ij}\|$ имеет седловую точку тогда и только тогда, когда $V_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = V_2$, т.е. когда нижняя цена игры равна верхней.

Данная теорема указывает путь нахождения седловой точки и соответственно — решения игры.

Вопрос о неоднозначности решений решается следующей теоремой.

Т е о р е м а . Если $(\alpha_{i1}, \beta_{j1})$ и $(\alpha_{i2}, \beta_{j2})$ — уравновешенные пары стратегий, то пары $(\alpha_{i1}, \beta_{j2})$ и $(\alpha_{i2}, \beta_{j1})$ — также уравновешены, причем $\alpha_{i1j1} = \alpha_{i2j2} = \alpha_{i1j2} = \alpha_{i2j1}$.

Пример 3.3

Антагонистическая игра задана в виде следующей платежной матрицы:

A =

2	2	3	4
2	0	4	3
4	2	3	3
3	1	0	2

Находим решение и определяем, что в данной игре имеется две седловые точки: a_{12} и a_{32}, и, соответственно, две уравновешенных пары стратегий: (α_1, β_2) и (α_3, β_2). Таким образом, второй игрок имеет одну оптимальную стратегию β_2, а первый игрок — две: α_1 и α_3. Значения всех седловых точек одинаковы и равны 2.

3.1.3. Решение игр в смешанных стратегиях

3.1.3.1. Понятие смешанной стратегии

Для игр, которые не имеют уравновешенных пар, любая теория, рекомендующая в качестве решения чистые стратегии, окажется нежизнеспособной, т.к. для любого игрока сразу же возникает желание отклониться от решения. В такой ситуации необходимо стремиться засекретить выбор стратегии, и наилучший способ для этого — выбирать стратегии случайным образом. Процесс принятия решения в таком случае осуществляется следующим образом: устанавливается вероятность выбора для каждой чистой стратегии, и решение принимается в соответствии с вероятностным распределением.

Определение. **Смешанной стратегией** называется распределение вероятностей на заданном множестве чистых стратегий. Другими словами, это совокупность чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, где $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, соответствующих решениям $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$.

Очевидно, любая чистая стратегия α_i является частным случаем смешанной, в которой все вероятности, кроме одной, соответствующей α_i, равны нулю, а эта равна единице.

Применение смешанной стратегии на практике заключается в следующем: в каждой партии игрок выбирает свою чистую стратегию случайным образом, в соответствии с вероятностным распределением X , и получает выигрыш, соответствующий его выбранной чистой стратегии и выбранной стратегии противника. В результате нескольких сыгранных партий можно оценить средний выигрыш игрока.

Оценка полезности смешанных стратегий ведется по математическому ожиданию выигрыша: если в игре с платежной матрицей $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ первый игрок использует смешанную стратегию $X=(x_1, x_2, ..., x_m)$, а второй — чистую стратегию β_j, то математическое ожидание выигрыша первого игрока будет равно $M(X,\beta_j)=\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot a_{ij}$.

Если первый игрок выбирает чистую стратегию α_i, а второй — смешанную стратегию $Y=(y_1, y_2, ..., y_n)$, то средний выигрыш первого игрока будет равен $M(\alpha_i, Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot a_{ij}$.

Если оба игрока применяют смешанные стратегии X и Y, то средний выигрыш первого игрока (он же средний проигрыш второго) будет определяться по формуле:

$$M(X,Y)=\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot M(\alpha_i, Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot M(X,\beta_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j .$$

Когда целесообразно применение смешанных стратегий? Наверное, если игра проводится всего один раз и ставки велики, предпочтительнее использовать чистую защитную стратегию. Если же игра повторяется многократно, и выигрыши накапливаются, то средний выигрыш приобретает практический смысл. В дальнейшем будем предполагать, что мы находимся в ситуации многократного повторения игры, и если некоторая смешанная стратегия обеспечивает нам увеличение выигрыша в среднем по сравнению с чистой стратегией, то мы принимаем ее. Покажем, что, используя смешанные стратегии, можно повысить свой гарантированный выигрыш.

Пример 3.4

Вспомним игру с отгадыванием монет (пример 3.1). Защитная чистая стратегия первого игрока в данной игре — α_1, нижняя цена игры — $V_1 = -1.$ Применим произвольную смешанную стратегию, например — $X = (1/2, 1/2).$ Тогда средний выигрыш первого игрока против чистых стратегий второго составит

$$M(X, \beta_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}; \qquad M(X, \beta_2) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда видно, что наименьший (т.е. гарантированный) выигрыш первого игрока против любой чистой стратегии второго:

$$\min\{M(X, \beta_1), M(X, \beta_2)\} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом мы повысили гарантированный выигрыш игрока на $1/2$ по сравнению с наилучшей чистой стратегией. Можно предположить, что, подбирая оптимальным способом вероятности $(x_1, x_2),$ удастся еще повысить гарантированный средний выигрыш.

Определение. Смешанная стратегия $X' = (x_1', ..., x_m')$, максимизирующая средний гарантированный выигрыш первого игрока, т.е. выбранная в соответствии с максиминным критерием $\min\limits_j M(X, \beta_j) \to \max\limits_X,$ называется **защитной смешанной стратегией** первого игрока.

Смешанная стратегия $Y' = (y_1', ..., y_n')$, минимизирующая средний гарантированный проигрыш второго игрока, т.е. выбранная в соответствии с минимаксным критерием $\max\limits_i M(\alpha_i, Y) \to \min\limits_Y,$ называется **защитной смешанной стратегией** второго игрока**.**

Достигаемый при использовании защитной стратегии X' максимум гарантированного выигрыша первого игрока $V_1 = \max_X \min_j M(X, \beta_j)$ называется **нижней ценой игры**, а достигаемый при использовании Y' минимум гарантированного проигрыша $V_2 = \min_Y \max_i M(\alpha_i, Y)$, соответственно, **верхней ценой игры.**

Защитные смешанные стратегии существуют всегда. Их можно искать различными способами. Для простых игр размером $2 \times n$ или $m \times 2$ можно применять **графический метод**.

3.1.3.2. Графический метод

Рассмотрим нахождение смешанных стратегий с помощью графического метода. Пусть задана игра $2 \times n$ с платежной матрицей

	β_1	β_2	...	β_n
α_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
α_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Смешанная стратегия первого игрока представляет собой совокупность двух чисел x_1, x_2, в сумме дающих единицу, или $X = (x, 1 - x)$. Отложим на оси абсцисс единичный отрезок для представления смешанной стратегии первого игрока. На концах отрезка — два перпендикуляра, на которых будем откладывать выигрыши первого игрока, когда он использует чистые стратегии α_1 и α_2 (рис. 3.1).

Пусть второй игрок выбрал β_1. Тогда, если первый игрок выберет стратегию α_1, то его выигрыш составит a_{11}, если выберет стратегию α_2 — выигрыш составит a_{21}. Соединив эти две точки, мы получаем график зависимости среднего выигрыша первого игрока от его смешанной стратегии $M(X, \beta_1)$.

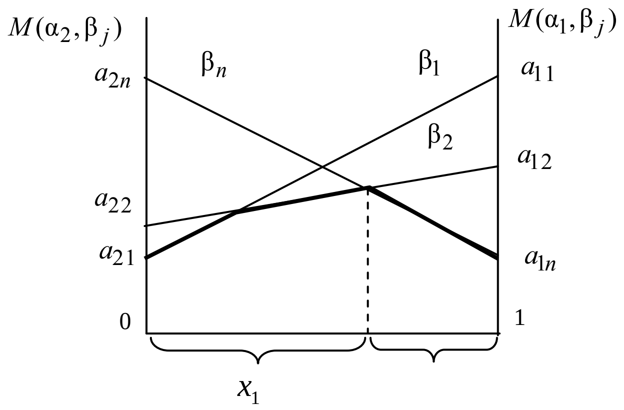

Рис. 3.1. Графический метод нахождения защитных смешанных стратегий

Аналогично строим графики для $\beta_2, ..., \beta_n$. Далее, исходя из определения защитной смешанной стратегии, мы для каждого значения X, т.е. для каждой точки единичного отрезка на оси абсцисс, находим $\min M(X, \beta_j)$, т.е. нижнюю границу множества прямых (на графике это жирная ломанная кривая). Та точка отрезка, при которой нижняя граница достигает максимума, соответствует искомой смешанной защитной стратегии X'; высота максимума дает при этом значение нижней цены игры.

Аналогично находится решение для второго игрока в играх $m \times 2$, с той разницей, что здесь необходимо искать минимум верхней границы.

Пример 3.5

Найдем пару защитных смешанных стратегий в игре с отгадыванием монетки. Здесь графическим методом можно найти стратегии и для первого и для второго игрока (рис. 3.2).

	β_1	β_2
α_1	1	–1
α_2	–2	2

Точка пересечения двух прямых для первого игрока: $2-3x=-2+3x,$ решая, получаем: $x=\frac{2}{3},$ отсюда смешанная стратегия первого игрока $X'=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$

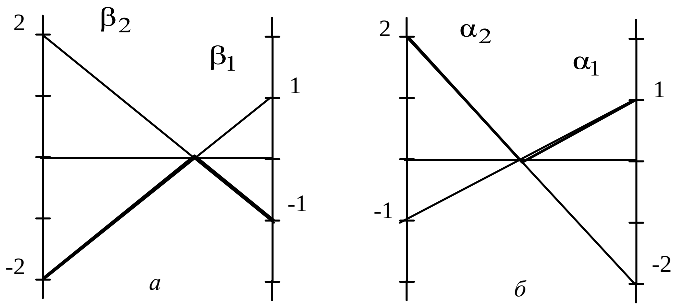

Рис. 4.5. Графическое представление смешанных стратегий: *а* — 1-го игрока; *б* — 2-го игрока

Для второго игрока: $2-4y=-1+2y,\quad y=\frac{1}{2},\ Y'=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$

Нижняя и верхняя цены игры $V_1=V_2=0.$

Заметим, что защитные смешанные стратегии игроков являются защитными не только против любой чистой стратегии противника, но и против любой смешанной:

$$\min_Y M(X,Y)\to\max_X;$$
$$\max_X M(X,Y)\to\min_Y,$$

причем это будут те же самые стратегии $X', Y'.$

Рассмотрим понятие уравновешенности для смешанных стратегий.

Определение. Пара (X^*,Y^*) смешанных стратегий называется **уравновешенной**, если для любых X, Y

$$M(X,Y^*)\le M(X^*,Y^*)\le M(X^*,Y).$$

Из уравновешенности пары стратегий следует их защитность, т.е. *уравновешенная пара стратегий всегда является защитной.*

Определение. **Решением игры** в смешанных стратегиях называется **уравновешенная пара** (X^*, Y^*) стратегий. Число $V = M(X^*, Y^*)$, которое представляет собой выигрыш первого игрока при условии, что оба игрока используют оптимальные стратегии, называется **ценой игры**.
Если $V = 0$, то игра называется **справедливой**.

Заметим, что если игра имеет решение в чистых стратегиях, то оно будет также решением и в классе смешанных стратегий. Более того, если рассматривать $M(X, Y)$ как функцию двух векторных аргументов, то уравновешенную пару (X^*, Y^*) можно понимать как седловую точку этой функции.

Теперь необходимо выяснить, всегда ли игра имеет решение в смешанных стратегиях, и как это решение находить?

Основная теорема теории матричных игр, **теорема о минимаксе**, гласит, что **любая конечная игра двух лиц со строгим соперничеством имеет решение в смешанных стратегиях**.

Таким образом, уравновешенная пара смешанных стратегий существует всегда. Более того, для **смешанных стратегий защитные стратегии всегда являются и уравновешенными**. Следовательно, найдя пару защитных смешанных стратегий, мы найдем решение игры.

Обратимся теперь к практическим вопросам отыскания решения. Один из способов — это графический метод для игр $2 \times n$ или $m \times 2$. Для игр большей размерности графический метод неприменим, здесь нужны более универсальные численные методы. Самым мощным и распространенным из них является метод, основанный на сведении игры к задаче линейного программирования.

3.1.3.3. Метод линейного программирования

Пусть первый игрок задался целью выиграть не менее V_1 единиц при любой стратегии противника, причем V_1 должно быть максимальным. Тогда его задача состоит в нахождении такого вектора (смешанной стратегии) $X = (x_1, ..., x_m)$, для которого выполнялось бы:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq V_1 \to \max, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Можно считать все элементы платежной матрицы положительными: $a_{ij} \geq 0$. Если это не так, можно добиться этого, прибавив ко всем элементам матрицы положительную константу. Такая прибавка никак не влияет на стратегии игроков. У игроков с положительной платежной матрицей нижняя цена игры V_1 также положительна. Тогда мы можем перейти к новым переменным $u_i = x_i / V_1$, а задача первого игрока сведется к нахождению вектора $U = (u_1, ..., u_m)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{1}{V_1} \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Мы получили задачу линейного программирования с m переменными, n ограничениями, единичными коэффициентами линейной формы и единичным вектором ограничений.

Аналогично, если второй игрок задался целью проиграть не более V_2 единиц, и это число он желает минимизировать, то он должен найти такой вектор $Y = (y_1, ..., y_n)$, для которого

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \le V_2 \to \min, \quad j=\overline{1,m};$$
$$y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Переходя к переменным $\omega_j = y_j / V_2$, получаем задачу второго игрока как задачу максимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = \frac{1}{V_2} \to \max$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \le 1, \quad i=\overline{1,m},$$
$$\omega_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Сопоставляя задачи первого и второго игроков, можно заметить, что они образуют двойственную пару задач линейного программирования (число переменных одной задачи равно числу ограничений другой, вектор ограничений и вектор линейной формы поменялись местами, матрица условий одна и та же, а направления оптимизации линейных форм противоположны).

Самые общие свойства решений двойственной пары задач устанавливаются двумя фундаментальными теоремами:

Первая теорема двойственности. Если одна из задач двойственной пары имеет решение, то и другая имеет решение, причем экстремальные значения линейных форм равны.

В нашем случае это означает, что $V_1 = V_2 = V$ — экстремальные значения линейных форм обратно пропорциональны цене игры $\frac{1}{V}$.

Вторая теорема двойственности. Для оптимальных планов прямой и двойственной задач в каждой паре двойственных условий одно свободное, а другое – связанное.

Это означает, что если $X^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ и $Y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ — оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков, то для них имеют место соотношения:

1) если $x_i^* > 0,$ то для этого i $\sum_j a_{ij} \cdot y_j^* = V;$

2) если $x_i^* = 0,$ то для этого i $\sum_j a_{ij} \cdot y_j^* < V;$

3) если $y_j^* > 0,$ то для этого j $\sum_i a_{ij} \cdot x_i^* = V;$

4) если $y_j^* = 0,$ то для этого j $\sum_i a_{ij} \cdot x_i^* > V.$

Эти свойства оптимальных стратегий могут быть использованы для аналитического нахождения решения в играх $2 \times 2.$

Для решения задач линейного программирования существует много вычислительных методов и, прежде всего, симплекс-метод.

Пример 3.6

Найти решение в игре с платежной матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем матрицу таким образом, чтобы все ее элементы стали неотрицательными (добавим двойку ко всем элементам матрицы):

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Задачи первого и второго игроков запишутся следующим образом:

$u_1 + u_2 + u_3 \to \min,$

$2u_1 + 4u_2 \geq 1,$

$5u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 1,$

$3u_2 + 2u_3 \geq 1,$

$3u_1 + u_2 + 4u_3 \geq 1,$ $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0.$

$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \to \max,$

$2\omega_1 + 5\omega_2 + 3\omega_4 \leq 1,$

$4\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 + \omega_4 \leq 1,$

$3\omega_2 + 2\omega_3 + 4\omega_4 \leq 1,$

$\omega_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, \omega_4 \geq 0.$

Здесь удобнее решать вторую задачу, т.к. при приведении ее к каноничеcкой форме матрица условий будет содержать единичную положительную подматрицу. Введем три дополнительные переменные $\omega_5, \omega_6, \omega_7,$ и, поменяв знаки у коэффициентов целевой функции, заменим минимизацией $\left(L = -\dfrac{1}{V}\right)$:

$$
\begin{aligned}
&L = -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 \to \min,\\
&2\omega_1 + 5\omega_2 + 3\omega_4 + \omega_5 = 1,\\
&4\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 + \omega_4 + \omega_6 = 1,\\
&3\omega_2 + 2\omega_3 + 4\omega_4 + \omega_7 = 1, \qquad \omega_1 \ge 0, \dots, \omega_7 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Для удобства представим решение в виде таблиц, где направляющий элемент подчеркивается.

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_5	1	2	5	0	3	1	0	0
ω_6	1	$\underline{4}$	1	3	1	0	1	0
ω_7	1	0	3	2	4	0	0	1
L	0	–1	–1	–1	–1	0	0	0

Первый шаг

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_5	$1/2$	0	$\underline{9/2}$	$-3/2$	$5/2$	1	$-1/2$	0
ω_1	$1/4$	1	$1/4$	$3/4$	$1/4$	0	$1/4$	0
ω_7	1	0	3	2	4	0	0	1
L	$-1/4$	0	$-3/4$	$-1/4$	$-3/4$	0	$1/4$	0

Второй шаг

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_2	$1/9$	0	1	$-1/3$	$5/9$	$2/9$	$-1/9$	0
ω_1	$2/9$	1	0	$5/6$	$1/9$	$-1/18$	$5/18$	0
ω_7	$2/3$	0	0	$\underline{3}$	$7/3$	$-2/3$	$1/3$	1
L	$-1/3$	0	0	$-1/2$	$-1/3$	$1/4$	$1/4$	0

Третий шаг

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_2	$5/27$							
ω_1	$1/27$							
ω_3	$2/9$	0	0	1	$7/9$	$-2/9$	$1/9$	$1/3$
L	$-4/9$	0	0	0	$1/18$	$1/18$	$4/18$	$3/18$

Поскольку в последней таблице все элементы последней строки положительны, то возрастание переменных $\omega_1 \div \omega_7$ не приведет к уменьшению L, следовательно, это окончательное решение. Достигнутый минимум $L^* = -4/9$. Оптимальный план второго игрока выбираем из базиса. У второго игрока четыре стратегии, но четвертая переменная отсутствует в базисе, поэтому ее значение приравнивается нулю. Получаем вектор: $W^* = (1/27,\ 5/27, 2/9, 0)$

Оптимальный план первого игрока находится в последней строке результирующей симплексной таблицы на месте дополнительных переменных: $U^* = (1/18,\ 4/18, 3/18)$

Осталось перейти от оптимальных планов U^*, W^* к оптимальным стратегиям игроков. Для этого нужно умножить эти планы на цену игры:

$$V = -\frac{1}{L^*} = \frac{9}{4},$$
$$X^* = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right),\ Y^* = \left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Скорректируем цену игры (для матрицы с отрицательными элементами):

$$V = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}.$$

3.1.3.4. Аналитическое решение игр 2x2

В простейшем случае, когда игра имеет минимальный размер 2x2, ее можно решить аналитически. Пусть платежная матрица $\mathrm{A} = \left\| a_{ij} \right\|_{2\times 2}$ не имеет седловой точки. Тогда решение есть только в смешанных стратегиях, причем $x_1^* > 0, x_2^* > 0,\ y_1^* > 0,\ y_2^* > 0$. Согласно второй теореме двойственности получаем:

$$a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = V,$$
$$a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = V,$$
$$a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = V,$$
$$a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = V.$$

Мы получили четыре уравнения и пять неизвестных. Для нахождения решения добавим условие нормировки:

$$x_1^* + x_2^* = 1,\ y_1^* + y_2^* = 1.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{c},\ y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{c},$$
$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{c},\ y_{21}^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{c},$$
$$V = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{c},$$

где $c = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$.

Таким образом, используя полученные уравнения, любую игру размерностью 2x2 можно решить аналитическим методом.

3.1.3.5. Итеративный метод

Рассмотренные до сих пор методы решения игр относятся к разряду конечных, дающих точное решение за конечное число шагов. Наряду с ними существует целый класс итеративных методов, в принципе бесконечных, но позволяющих за некоторое число итераций получить сколь угодно точное приближенное решение.

Один из таких методов — метод фиктивной партии или метод «вилки», предложенный Брауном. Разыгрывается фиктивная последовательность партий, в которой каждый из игроков, отправляясь от некоторой исходной стратегии и наблюдая за поведением своего противника, от партии к партии корректирует свою стратегию, обучаясь на прошлом опыте. Алгоритм обучения выбирается таким образом, чтобы обеспечить сходимость к решению.

Основную роль здесь играет понятие эмпирической смешанной стратегии. Допустим, что сыграно N партий, в которых первый игрок k_1 раз применил чистую стратегию α_1, k_2 раз — чистую стратегию α_2, и т.д., k_m раз — чистую стратегию α_m. Тогда можно сказать, что игрок применил эмпирическую смешанную стратегию $\hat{X} = \left(\frac{k_1}{N}, \frac{k_2}{N}, \dots, \frac{k_m}{N} \right)$.

Аналогично вводим понятие эмпирической смешанной стратегии для второго игрока.

Последовательность фиктивных партий разворачивается следующим образом.

1-я партия. Первый игрок выбирает любую чистую стратегию $\alpha^{(1)}$, второй — $\beta^{(1)}$. Число сыгранных партий $N=1$. Эмпирическая смешанная стратегия первого игрока:

$$\hat{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha_m \\ 0, \dots, 1, \dots, 0 \end{pmatrix}$$

Второго игрока: $\hat{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta_1, \ldots, \beta^{(1)}, \ldots, \beta_n \\ 0, \ \ldots, \ 1, \ldots, 0 \end{pmatrix}$

N-я партия. К началу N-й партии каждый из игроков, наблюдая за своим противником на протяжении прошедших $(N-1)$ партий, знает эмпирические смешанные стратегии свою и противника:

$$\hat{X}^{(N-1)} = \left(\hat{x}_1^{N-1}, \ldots, \hat{x}_m^{N-1}\right),$$

$$\hat{Y}^{(N-1)} = \left(\hat{y}_1^{N-1}, \ldots, \hat{y}_n^{N-1}\right).$$

Первый игрок, используя эмпирическую смешанную стратегию противника как статистическую оценку его смешанной стратегии, выбирает свою чистую $\alpha^{(N)}$ так, чтобы максимизировать математическое ожидание выигрыша в этой партии:

$$M\left(\alpha_i, \hat{Y}^{(N-1)}\right) \to \max_{\alpha_i}.$$

Обозначим значение достигаемого при этом максимума через

$$\hat{V}_2^{(N)} = \max_i M\left(\alpha_i, \hat{Y}^{(N-1)}\right).$$

Аналогично для 2-го игрока достигаемое минимальное значение проигрыша

$$\hat{V}_1^{(N)} = \min_j M\left(\hat{X}^{(N-1)}, \beta_j\right).$$

С учетом выбранных чистых стратегий $\alpha^{(N)}$ и $\beta^{(N)}$ корректируются эмпирические смешанные стратегии:

$$\hat{X}^{(N)} = \frac{1}{N}\alpha^{(N)} + \frac{(N-1)}{N} \cdot \hat{X}^{(N-1)},$$

$$\hat{Y}^{(N)} = \frac{1}{N}\beta^{(N)} + \frac{(N-1)}{N} \cdot \hat{Y}^{(N-1)},$$

и последовательность фиктивных партий продолжается. Числа $\hat{V}_1^{(N)}$ и $\hat{V}_2^{(N)}$, полученные в N-й партии, берут «в вилку» цену игры:

$$\hat{V}_1^{(N)} \le V \le \hat{V}_2^{(N)}.$$

Более того, независимо от выбора начальных стратегий $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$, будет выполняться условие $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{V}_1^{(N)} = V = \lim\limits_{N\to\infty} \hat{V}_2^{(N)}$.

Отсюда $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{X}^{(N)} = X^*$, $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{Y}^{(N)} = Y^*$.

На практике выгодно брать не последние значения $\hat{V}_1^{(N)}$, $\hat{V}_2^{(N)}$, а наилучшие из всех промежуточных:

$$\hat{V}_1 = \max_N V_1^{(N)},\ \hat{V}_2 = \min_N V_2^{(N)}.$$

Игра обычно ведется до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\hat{V}_2^{(N)} - \hat{V}_1^{(N)} < \varepsilon_1,$$

где ε_1 — заданная точность.

Пример 3.7

Решить игру с платежной матрицей $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Приведем решение в виде таблицы 3.1. Жирным шрифтом отметим достигаемые в каждой партии максимумы и минимумы ожидаемых выигрышей; если экстремумов несколько, то выбирается любой.

1-я итерация – игроки еще ничего не знают о ходах друг друга, поэтому выбирают стратегии произвольно – в качестве $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}$ возьмем α_1, β_1.

2-я итерация – первый игрок смотрит, как перед этим сходил второй: тот выбрал первую стратегию. Тогда первый игрок видит, что если он возьмет свою 1-ю стратегию, а второй тоже первую – первый получит 1. Если первый возьмет 2-ю стратегию, то он получит 2. Из двух вариантов он выбирает максимум – для этого он должен выбрать α_2 и получить $V_2^{(N)} = 2$. В результате по двум итерациям первый игрок 1 раз выбрал 1-ю стратегию, 1 раз – 2-ю. Получилась

Таблица 3.1

№	$M(\alpha_i, \hat{Y}^{(N-1)})$		$M(\hat{X}^{(N-1)}, \beta_j)$			$\alpha^{(N)}$	$\beta^{(N)}$	$\hat{V}_1^{(N)}$	$\hat{V}_2^{(N)}$	$\hat{X}^{(N)}$		$\hat{Y}^{(N)}$		
	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3					X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
1	-	-	-	-	-	α_1	β_1	-	-	1	0	1	0	0
2	1	**2**	1	**-2**	3	α_2	β_2	**-2**	**2**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	α_2	β_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
4	-1	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	**1**	α_2	β_3	1	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
5	0	**2**	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	α_2	β_3	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	**2**	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
6	$\frac{3}{5}$	$\mathbf{\frac{8}{5}}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{3}{5}$	α_2	β_3	$\frac{3}{5}$	$\mathbf{\frac{8}{5}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
7	1	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{1}{2}$	α_2	β_3	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
8	$\mathbf{\frac{9}{7}}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{16}{7}$	$\mathbf{\frac{3}{7}}$	α_1	β_3	$\mathbf{\frac{3}{7}}$	$\mathbf{\frac{9}{7}}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
9	$\mathbf{\frac{6}{4}}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	α_1	β_3	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	$\mathbf{\frac{6}{4}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$
10	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	**1**	α_1	β_3	**1**	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

смешанная стратегия (1/2, 1/2). Для второго игрока рассуждения аналогичные, только он выбирает ту стратегию, которая дает минимум его проигрыша.

3-я итерация: первый игрок смотрит на предыдущую стратегию второго игрока: (1/2, 1/2, 0). Если первый выберет свою 1-ю стратегию, а второй будет применять (1/2, 1/2, 0), то выигрыш первого игрока составит -1/2 (средний выигрыш определяется по формуле из раздела 3.1.3.1). Если первый игрок выберет вторую стратегию, его выигрыш составит 5/2. Из двух вариантов он выбирает тот, который максимизирует его выигрыш, то есть стратегию α_2. По результатам 3-х итераций: 1 раз выбрана 1-я стратегия, 2 раза – 2-я. Получаем смешанную стратегию (1/3, 2/3). Для второго игрока рассуждения аналогичны, только он смотрит на предыдущую смешанную стратегию первого и выбирает минимум.

Дальнейшие итерации проходят аналогично. После десяти итераций мы можем приблизительно сказать, что оптимальные стратегии игроков равны

$$X^* \cong \hat{X}^{(10)} \cong \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right);\ Y^* \cong \hat{Y}^{(10)} \cong \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}\right).$$

Цена игры лежит в пределах: $\max \hat{V}_1 = 1 \le V \le \frac{9}{7} = \min \hat{V}_2.$

3.1.3.6. Сокращение платежной матрицы

Трудоемкость всех рассмотренных численных методов решения игр существенно зависит от размеров платежной матрицы. Возникает вопрос — нельзя ли сократить размеры матрицы без потери информации, относящейся к решению игры. В некоторых случаях это можно сделать, основываясь на понятии доминирования стратегий.

О п р е д е л е н и е . Пусть в игре с платежной матрицей $\mathrm{A} = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ найдутся две стратегии первого игрока $\alpha_{i'}$ и $\alpha_{i''}$, для которых при всех j

$a_{i'j} \geq a_{i''j}$, т.е. i'-я строка поэлементно больше или равна i''-й. Тогда говорят, что i'-я стратегия доминирует i''-ю.

Определение. Если в игре с платежной матрицей А найдутся две стратегии второго игрока $\beta_{j'}$ и $\beta_{j''}$, для которых $\forall i \ a_{ij'} \leq a_{ij''}$, т.е. j'-й столбец поэлементно меньше или равен j''-му, то говорят, что j'-я стратегия второго игрока доминирует j''-ю.

Доминируемая стратегия при любом ответе противника хуже доминирующей, поэтому первому игроку совершенно неразумно когда-либо использовать стратегию $\alpha_{i''}$, и соответствующая строка может быть вычеркнута из A.

Аналогично, второму игроку никогда не выгодно применять доминируемую стратегию $\beta_{j''}$, и столбец, соответствующий данной стратегии, также можно вычеркнуть, уменьшая размерность платежной матрицы.

Заметим, что вычеркивание стратегий — это итерационный процесс: после того как вычеркнуты доминируемые строки, а затем столбцы, необходимо снова просмотреть строки на предмет доминирования и т.д., пока вычеркиваются столбцы и строки.

Пример 3.8

Рассмотрим антагонистическую игру с платежной матрицей размерностью 4x4 и попробуем ее сократить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & \cancel{4} & 2 & \cancel{7} \\ 1 & \cancel{2} & 5 & \cancel{5} \\ 5 & \cancel{6} & 4 & \cancel{6} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} \\ 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

В результате сокращения мы получили матрицу 2x2, которую можно решить даже аналитическим методом.

3.1.4. Игры в позиционной форме

При решении игр, представленных в позиционной форме, принципиальное значение имеет информированность игроков. В общем случае решение игры в позиционной форме сводится к переходу к нормальной форме, а затем игра решается любым из рассмотренных ранее методов. В частном случае для игр с полной информацией существуют методы, позволяющие находить решение без перехода к нормальной форме.

Рассмотрим сначала первый подход. Для перехода от позиционной формы игры к нормальной форме необходимо описать чистые стратегии игроков. Имея перед собой дерево игры, каждый из игроков, по крайней мере, в принципе, может составить для себя совокупность инструкций следующего вида: «если я буду находиться в 1-ом информационном множестве, то мне следует сделать такой-то выбор, если во 2-ом — то такой-то…» и так далее для каждого информационного множества.

Определение. ***Чистой стратегией*** i-го игрока называется правило, ставящее в соответствие каждому информационному множеству этого игрока определенный выбор (альтернативу) хода в этом информационном множестве.

Иными словами, одна чистая стратегия игрока дает ему правило поведения во всех информационных множествах. Тогда, если у игрока имеется z информационных множеств и количество альтернатив в k-ом множестве равно m_k, то общее число вариантов выбора поведения (число возможных чистых стратегий) определяется произведением:

$$\mathrm{M} = \prod_{k=1}^{z} m_k .$$

Отсюда видно, что непосредственное перечисление чистых стратегий возможно лишь для самых простых игр, для сколько-нибудь сложных реальных игр (например, шахмат) число возможных чистых стратегий оказывается хоть и конечным, но очень большим. Тем не менее, для игр с неполной информацией переход к нормальной форме является единственным способом решения.

Пример 3.9

Рассмотрим простую игру в позиционной форме и перечислим для нее все возможные чистые стратегии игроков (рис. 3.2).

Здесь у первого игрока два информационных множества — I_1^1 и I_1^2, в 1-ом — 3 альтернативы, во 2-ом — 2 альтернативы. Общее число чистых стратегий равно 6. Аналогично, у 2-го игрока два информационных множества и 6 чистых стратегий. Перечислим стратегии игроков:

	I_1^1	I_1^2
α_1	1	1
α_2	1	2
α_3	2	1
α_4	2	2
α_5	3	1
α_6	3	2

	I_2^1	I_2^2
β_1	1	1
β_2	1	2
β_3	1	3
β_4	2	1
β_5	2	2
β_6	2	3

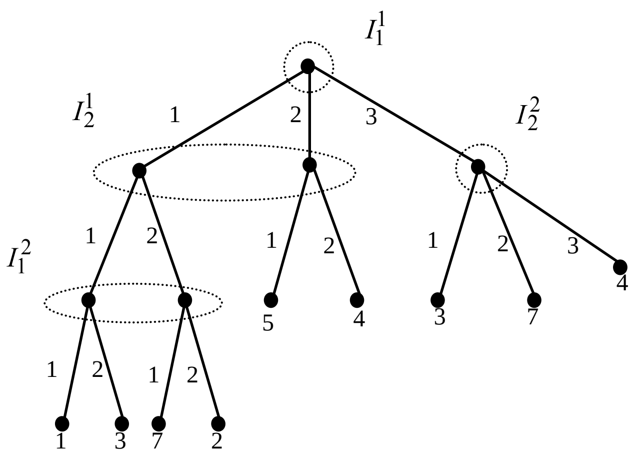

Рис. 3.2. Пример игры с неполной информацией в позиционной форме

Теперь мы можем построить платежную матрицу игры, а затем попытаемся ее сократить.

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	1	~~1~~	~~1~~	7	~~7~~	~~7~~
α_2	~~3~~	~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~
α_3	5	~~5~~	~~5~~	4	~~4~~	~~4~~
α_4	~~5~~	~~5~~	~~5~~	~~4~~	~~4~~	~~4~~
α_5	3	~~7~~	~~4~~	3	~~7~~	~~4~~
α_6	~~3~~	~~7~~	~~4~~	~~3~~	~~7~~	~~4~~

$\Rightarrow$

	β_1	β_4
α_1	1	7
α_3	5	4
α_5	~~3~~	~~3~~

$\Rightarrow$

	β_1	β_4
α_1	1	7
α_3	5	4

В результате мы получили матрицу размером 2х2, которую можно решить аналитическим методом:

$$x_1 = \frac{4-5}{-7} = \frac{1}{7};\ x_2 = \frac{1-7}{-7} = \frac{6}{7};\ y_1 = \frac{4-7}{-7} = \frac{3}{7};\ y_2 = \frac{1-5}{-7} = \frac{4}{7};\ V = \frac{31}{7}.$$

Результирующие смешанные стратегии должны быть записаны для исходной матрицы, и, соответственно, имеют размерность 6 и 6. Вычеркнутые стратегии никогда не применяются игроками, поэтому вероятность их выбора равна нулю:

$$X^* = \left(\frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7}, 0, 0, 0\right);\ Y^* = \left(\frac{3}{7}, 0, 0, \frac{4}{7}, 0, 0\right).$$

Дадим интерпретацию полученных стратегий: первый игрок в информационном множестве I_1^1 должен с вероятностью $\frac{1}{7}$ выбирать 1-ю альтернативу, а с вероятностью $\frac{6}{7}$ — 2-ю, в информационном множестве I_1^2 — всегда выбирать 1-ю альтернативу. Второй игрок в информационном множестве I_2^1 с вероятностью $\frac{3}{7}$ должен выбирать 1-ю альтернативу, с вероятностью $\frac{4}{7}$ — 2-ю, во множестве I_2^2 — всегда 1-ю.

Рассмотрим пример игры с полной информацией с дальнейшим решением.

Пример 3.10

На столе лежат 6 спичек. Игроки берут спички по очереди, каждый может взять 1 или 2 спички. Тот, кто берет последнюю спичку, проигрывает 1 очко. Данная игра является игрой с полной информацией — каждый из игроков знает, в каком состоянии находится игра в данный момент времени. Каждое информационное множество содержит только одну вершину дерева, поэтому мы будем показывать только множества очередностей (рис. 3.3).

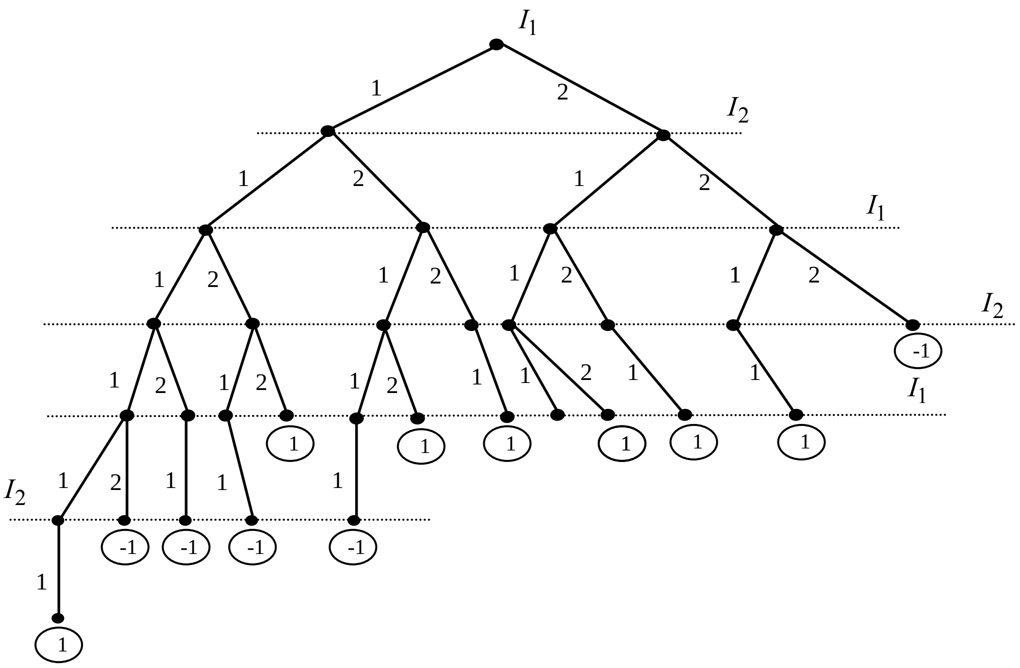

Рис. 3.3. Представление игры со спичками в позиционной форме

В этой игре у первого игрока $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 64$ чистых стратегии, у второго игрока — тоже 64. Чтобы перейти к нормальной форме, необходимо построить матрицу 64×64.

Процесс построения матриц большой размерности слишком трудоемок. Существует более простой метод решения игры, который позволяет найти оптимальные стратегии и цену игры без перехода к нормальной форме — это ***графический метод решения игры с полной информацией.***

Рассмотрим графический метод на примере игры в 6 спичек. Введем следующие обозначения: возле каждой вершины будем ставить число в кружке, которое будет обозначать выигрыш первого игрока в случае, если игра начинается из данной вершины и далее ведется оптимально обоими игроками до конца; оптимальные альтернативы будем помечать стрелками. Алгоритм решения состоит в разметке дерева снизу-вверх: первый игрок из нескольких возможных решений всегда выбирает максимальное, второй — минимальное. В процессе разметки дерева мы поднимемся до начальной вершины. Число в кружке около этой вершины даст нам цену игры, а расположение стрелок укажет оптимальные чистые стратегии игроков. Решение приведено на рис. 3.4.

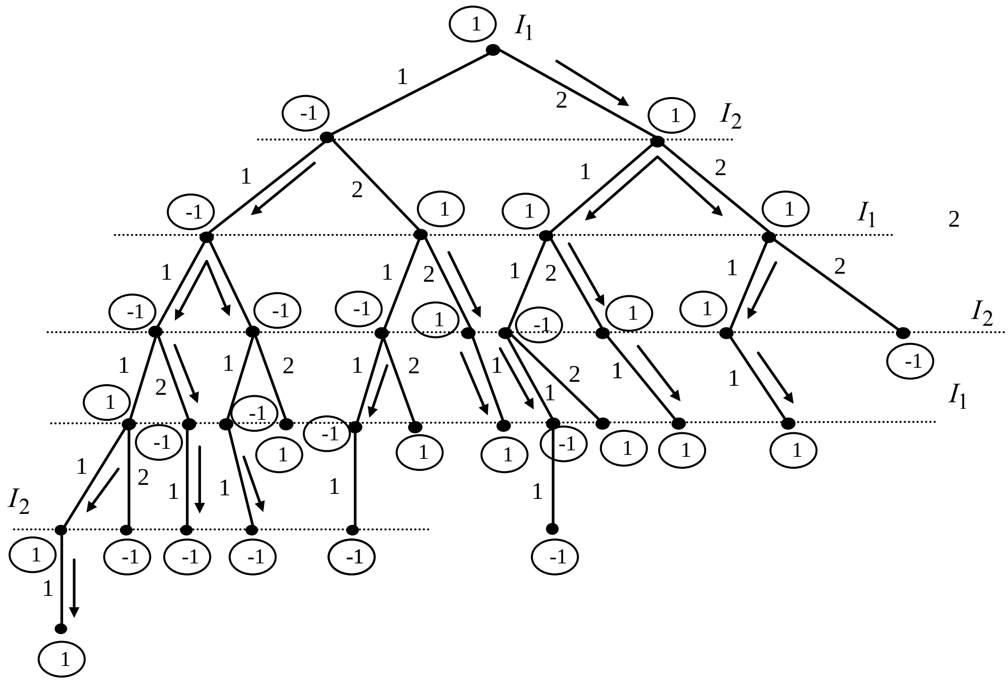

Рис. 3.4. Графический метод решения игры в позиционной форме

Описанный алгоритм пригоден для решения любых игр с полной информацией, заданных в позиционной форме. Причем из самого способа построения видно, что в результате решения всегда получаются оптимальные чистые стратегии игроков, следовательно, все игры с полной информацией имеют решение в чистых стратегиях.

3.2. Бесконечные антагонистические игры

3.2.1. Понятие бесконечной игры

Будем рассматривать бесконечные антагонистические игры в нормальной форме:

$$\Gamma = < X, Y, J >,$$

где X, Y — множество чистых стратегий первого и второго игроков, соответственно, и хотя бы одно из них бесконечно;

J — функция выигрыша первого игрока. Ввиду бесконечности X и Y невозможно выписать все выигрыши игрока в виде матрицы.

Игра состоит в выборе первым игроком чистой стратегии $x \in X,$ а вторым игроком — стратегии $y \in Y,$ после чего первый игрок получает выигрыш $J(x, y),$ а второй игрок — $-J(x, y).$ Как и во всех антагонистических играх, принципом оптимальности в бесконечных антагонистических играх является принцип минимакса:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} J(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} J(x, y).$$

Стратегии x^* и y^*, на которых достигаются максимум и минимум, называются оптимальными чистыми стратегиями. Они, как и в матричных играх, являются уравновешенными и удовлетворяют неравенству:

$$J(x, y^*) \le J(x^*, y^*) \le J(x^*, y),$$

а значение $V = J(x^*, y^*)$ является ценой игры.

Пример 3.11

Рассмотрим бесконечную игру. Пусть каждый игрок выбирает произвольное число из сегмента [–1, 1]. Если сумма выбранных чисел оказывается положительной, то ее выигрывает игрок 1, в противном случае эту сумму выигрывает игрок 2.

Запишем игру в нормальной форме:

$$\Gamma = < [-1,1], [-1,1], x+y > .$$

Найдем решение по максиминному и минимаксному критериям:

$$V_1 = \max_{x\in[-1,1]}\left[\min_{y\in[-1,1]}(x+y)\right] = \max_{x\in[-1,1]}(x-1) = 0,$$

$$V_2 = \min_{y\in[-1,1]}\left[\max_{x\in[-1,1]}(x+y)\right] = \min_{y\in[-1,1]}(1+y) = 0,$$

т.е. цена игры $V = 0,$ а оптимальные чистые стратегии: $x^* = 1,\ y^* = -1.$

Изменим условия рассмотренного примера таким образом, чтобы границы -1 и 1 не входили в множество стратегий игроков: $\Gamma = < (-1,1), (-1,1),\ x+y > .$

Такая игра не имеет седловых точек, т.к. числа –1 и 1, на которых достигаются максимум и минимум, не входят во множество стратегий игроков. Другими словами, минимум и максимум не достигаются, т.к. множество (-1, 1) не компактно. Между тем ясно, что игрок 1 может выбрать число x^ε, сколь угодно близкое к единице $(1 - x^\varepsilon = \varepsilon)$, и добиться выигрыша, сколь угодно близкого к цене игры $V = 0.$ Аналогично, второй игрок может выбрать y^ε, близкое к минус единице $(1 + y^\varepsilon = \varepsilon)$, и добиться проигрыша, близкого к $V = 0.$ Выбранные числа x^ε и y^ε называются ***ε-оптимальными стратегиями***, а предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(x^\varepsilon + y^\varepsilon) = 0$ — ценой игры.

Определение. Пара чистых стратегий $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ называется ε-седловой точкой, если для любых стратегий $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство $J(x, y^\varepsilon) - \varepsilon \le J(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \le J(x^\varepsilon, y) + \varepsilon,$ где $x^\varepsilon, y^\varepsilon$ — ε-оптимальные стратегии.

Смысл ε-оптимальности состоит в том, что отклонение игрока от ε-оптимальной стратегии может увеличить его выигрыш разве лишь на ε.

Теорема. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в игре Г существует ε-седловая точка $(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon})$. Тогда существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0} J(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) = V,$ который будем называть ценой игры.

Теорема существования. Для того чтобы в бесконечной антагонистической игре при любом $\varepsilon > 0$ существовали ε-оптимальные стратегии и цена игры, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} J(x, y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} J(x, y) = V.$$

3.2.2. Смешанное расширение бесконечной игры

Существуют бесконечные антагонистические игры, не имеющие даже ε-оптимальных стратегий. В данном классе игр, как и в матричных играх, оптимальные чистые стратегии существуют не всегда. Введение смешанных стратегий в бесконечных играх не столь удачно, как в матричных, однако и здесь класс игр, имеющих оптимальные смешанные стратегии, достаточно широк.

Бесконечное множество стратегий бывает двух видов: дискретным (стратегии игрока изолированы друг от друга) и непрерывным (т.е. для любого малого $\delta > 0$, δ-окрестность любой стратегии содержит другие стратегии). В случае дискретного множества стратегий обычно предполагается, что оно счетно. Смешанные стратегии и ожидаемый выигрыш определяются как в матричных играх, с той лишь разницей, что количество компонент смешанной стратегии и количество слагаемых в формуле математического ожидания – бесконечное множество. В таких играх множество смешанных стратегий некомпактны, т.е. максимум и минимум не будут существовать.

Мы будем рассматривать игры только с непрерывными множествами стратегий. В непрерывных множествах X, Y мы не можем определить смешанные стратегии, как раньше: вероятность выбора чистой стратегии x / y может быть равна нулю для всех $x \in X / y \in Y$.

Теперь задание смешанной стратегии игрока будет состоять в указании тех вероятностей, с которыми выбираются чистые стратегии игроков из тех или иных подмножеств множества стратегий. Другими словами, смешанная стратегия игрока 1(2) есть вероятностное распределение на множестве $2^x (2^y)$, где через 2^x обозначено множество всех подмножеств множества X. Дадим строгое определение смешанных стратегий.

Определение. Система F подмножеств Ω называется ***σ-алгеброй***, если она является алгеброй и, кроме того, выполнено следующее свойство: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F,\ \forall A_i \in F.$

Система G подмножеств Ω называется ***алгеброй***, если

$$\Omega \in G,$$

$$\forall A, B \in G \to A \bigcup B \in G,\ A \bigcap B \in G,$$

$$\forall A \in G \to \overline{A} \in G.$$

Определение. Пусть A — некоторая σ-алгебра на 2^x; B — некоторая σ-алгебра на 2^y; $\aleph$ (каппа) и Z — множества всех вероятностных мер на A и B соответственно, т.е.

$$\aleph = \{\mu \mid \mu(\varnothing) = 0,\ \mu(X) = 1,\ 0 \le \mu(C) \le 1,\ \forall C \in A\};$$

$$Z = \{\nu \mid \nu(\varnothing) = 0,\ \nu(Y) = 1,\ 0 \le \nu(D) \le 1,\ \forall D \in B\}.$$

Любые вероятностные меры $\mu \in \aleph$ и $\nu \in Z$ называются ***смешанными стратегиями игроков***. Множества $\aleph$ и Z суть множества смешанных стратегий игроков.

Пусть функция выигрыша J измерима относительно σ-алгебры $A \times B$. Тогда существует двойной интеграл $M(\mu,\nu) = \int\limits_X \int\limits_Y J(x,y) d\mu d\nu,$ представляющий собой математическое ожидание выигрыша $J(x,y)$ по мерам μ,ν.

Смешанным расширением игры Г называется игра $\tilde{\Gamma} = <\aleph, Z, M>,$ где $M(\mu,\nu)$ — функция выигрыша первого игрока.

Поведение игроков в смешанном расширении $\tilde{\Gamma}$ можно комментировать следующим образом: игрок 1, независимо от выбора противника, выбирает вероятностную меру $\mu \in \aleph$ и реализует в соответствии с этой мерой случайный выбор чистой стратегии $x \in X$. Далее первый игрок получает выигрыш $J(x,y)$.

Определение. Пара смешанных стратегий (μ^*, ν^*) называется **седловой точкой в игре** $\tilde{\Gamma}$, если для всех вероятностных мер $\mu \in \aleph, \nu \in \mathrm{Z}$

$$M(\mu,\nu^*) \le M(\mu^*,\nu^*) \le M(\mu^*,\nu).$$

Стратегии μ^* и ν^* называются **оптимальными**, а величина

$$M(\mu^*,\nu^*) = \max_{\mu} \min_{\nu} M(\mu,\nu) = \min_{\nu} \max_{\mu} M(\mu,\nu)$$

называется **ценой игры**.

Соответственно определяются и ***ε-оптимальные стратегии*** μ^ε и ν^ε, и здесь $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} M(\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon) = M(\mu^*, \nu^*)$.

Далее рассмотрим вопрос существования оптимальных смешанных стратегий.

Теорема. Пусть в игре Γ пространства X и Y компактны, а функция J непрерывна на $X \times Y$. Тогда в игре Γ существуют оптимальные смешанные стратегии и цена игры.

В настоящее время теоремы существования доказаны для весьма широких классов бесконечных игр.

3.2.3. Игры на единичном квадрате

Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Понятие эквивалентности применимо как к конечным, так и к бесконечным множествам.

Для двух эквивалентных бесконечных множеств говорят, что они имеют одинаковую мощность. Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел между 0 и 1, говорят, что они имеют мощность континуума.

Обширный класс бесконечных игр составляют игры, в которых каждый игрок имеет континуум чистых стратегий. В таких играх множество стратегий игрока можно сопоставить с множеством точек действительных чисел интервала [0, 1]. Здесь чистой стратегией 1/2 игрока будет любое действительное число из этого интервала: $x/y \in [0,1]$. Поэтому говорят, что $J(x, y)$ определена на единичном квадрате [0, 1] $\times$[0, 1].

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют континуум чистых стратегий, называются ***играми на единичном квадрате***.

Как и прежде, смешанная стратегия игрока есть вероятностная мера на σ-алгебре над множеством [0, 1]. В нашем случае смешанная стратегия может быть представлена функцией распределения. Пусть $x \in [0,1]$. Функция распределения вероятностей $F(x)$ определяет вероятность P того, что выбранная чистая стратегия ξ будет не больше, чем x: $F(x) = P(0 \le \xi \le x)$, т.е. чистая стратегия будет выбрана из сегмента $[0, x]$.

В играх на единичном квадрате будем обозначать: x, y — чистые стратегии, а F, Q — смешанные стратегии игроков. Если первый игрок использует чистую стратегию x, а второй игрок — смешанную стратегию Q, то ожидаемый выигрыш первого игрока будет определяться по формуле: $E(x,Q) = \int_0^1 J(x, y) dQ(y)$. Аналогично, если первый игрок использует смешанную стратегию F, а второй — чистую стратегию y, то ожидаемый выигрыш первого игрока: $E(F,y)=\int_0^1 J(x,y)dF(x).$

Если оба игрока применяют смешанные стратегии, то ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$E(F,Q)=\int_0^1\int_0^1 J(x,y)dF(x)dQ(y).$$

Так как сегмент [0, 1] компактен, то, если функция выигрыша $J(x,y)$ непрерывна по обеим переменным, игра **обладает седловой точкой в смешанных стратегиях**.

Единых методов решения бесконечных игр нет. Попытка решения таких игр приводит к успеху лишь в отдельных случаях. В непрерывных играх на единичном квадрате решение в явном виде можно находить при функции выигрыша, выпуклой по стратегии второго игрока и вогнутой по стратегии первого игрока.

Вспомним понятия о выпуклых функциях. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на $[a,b]$. Говорят, что $f(x)$ ***выпукла***, если для любых $x_1,x_2\in[a,b]$ и для любого $\lambda\in[0,1]$ выполняется неравенство: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. $F(x)$ ***строго выпукла***, если при $x_1\ne x_2$ и $\lambda\in[0,1]$ следует строгое неравенство.

При противоположном неравенстве $f(x)$ ***вогнута***.

Любая точка графика выпуклой функции находится не выше отрезка, соединяющего концы любой точки графика, содержащей эту точку (рис. 3.5).

Пусть $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ и $0\le\lambda_i\le1,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$. По аналогии можно написать $f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

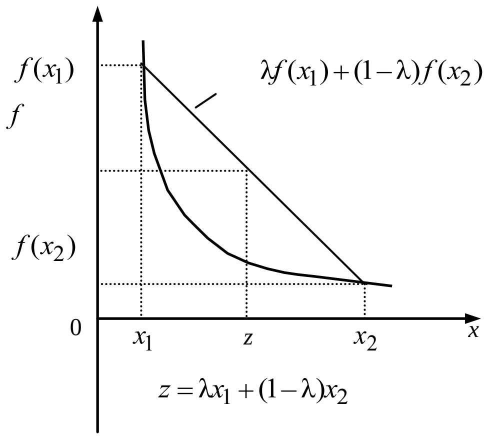

Рис. 3.5. Геометрическое представление выпуклой функции

При непрерывной f и при $n \to \infty$ для выпуклой функции получаем: $f\left(\int\limits_a^b x dF(x)\right) \le \int\limits_a^b f(x) dF(x).$

Если $f(x)$ имеет вторую производную, то ее выпуклость (вогнутость) равносильна неравенству: $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \ge 0$ $\left(\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \le 0\right).$

В случае строгого неравенства имеем строгую выпуклость/вогнутость.

Допустим, что функция выигрыша $J(x, y)$ выпукла по y и имеет вторую производную по y. Тогда для любой функции распределения $F(x)$ функция $E(F, y)$ также строго выпукла по y (при неотрицательности $F(x)$):

$$\frac{d^2 E(F, y)}{dy^2} = \int\limits_0^1 \frac{d^2 J(x, y)}{dy^2} dF(x) > 0.$$

Лемма. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и строго выпукла (строго вогнута). Тогда она достигает своего минимума (максимума) на $[a, b]$ один раз.

Следствие 1. Множество точек минимума/максимума не строго выпуклой/ не строго вогнутой функции является сегментом.

Следствие 2. Выпуклая/вогнутая функция имеет график, состоящий не более чем из двух монотонных частей. Если их две, то убывание/возрастание предшествует возрастанию/убыванию.

3.2.4. Выпуклые и вогнутые игры

Определение. Непрерывная **игра** на единичном квадрате называется **выпуклой (вогнутой)**, если $J(x,y)$ выпукла по y (вогнута по x). Если имеет место строгая выпуклость по y / строгая вогнутость по x, то говорят о ***строго выпуклой (вогнутой)*** игре. Говорят, что непрерывная игра на единичном квадрате ***вогнуто-выпукла***, если ее функция выигрыша вогнута по x при каждом значении y и выпукла по y при каждом значении x.

Теорема. В выпуклой игре у второго (минимизирующего) игрока имеется чистая оптимальная стратегия. В вогнутой игре у первого (максимизирующего) игрока имеется чистая оптимальная стратегия.

Теорема (следствие). В вогнуто-выпуклой игре существует седловая точка в чистых стратегиях.

Теорема. В строго выпуклой/вогнутой игре второй/первый игрок имеет единственную оптимальную стратегию, которая является чистой (в строго вогнуто-выпуклой игре существует единственная седловая точка в чистых стратегиях).

Пример 3.11

Рассмотрим игру $\Gamma = < [0,1],[0,1], -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y >$.

Поскольку функция выигрыша непрерывна по обоим параметрам, то игра является непрерывной на единичном квадрате. Проверим игру на выпуклость/вогнутость.

$J'_x = -4x + 3y - 1,\ J''_{xx} = -4 < 0,$
$J'_y = 2y + 3x - 2,\ J''_{yy} = 2 > 0.$

Игра строго вогнуто-выпукла. Для решения необходимо найти x^*, максимизирующую $J(x, y)$ на $[0, 1]$ и y^*, минимизирующую $J(x, y)$ на $[0, 1]$. Так как игра имеет решение в чистых стратегиях, мы можем воспользоваться любым из двух критериев:

$$\min_y \max_x J(x, y) = \max_x \min_y J(x, y).$$

Возьмем минимаксный критерий: $V = \min_y \max_x J(x, y).$ Для нахождения максимума по x возьмем первую производную $J'_x = -4x + 3y - 1 = 0,$ отсюда получим $x = (3y-1)/4,\ 0 \le y \le 1.$

Здесь x является стратегией только при $\frac{1}{3} \le y \le 1,$ т.к. при $y < 1/3$ $x < 0.$

Тогда $x = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le y \le 1/3, \\ (3y-1)/4, \text{ если } 1/3 < y \le 1. \end{cases}$

$$V = \min_{0 \le y \le 1} J(x, y) =$$
$$= \min\left\{ \min_{0 \le y \le 1/3} (y^2 - 2y),\ \min_{1/3 < y \le 1}\left[-2\frac{(3y-1)^2}{4^2} + y^2 + 3y\left(\frac{3y-1}{4}\right) - \frac{3y-1}{4} - 2y \right] \right\} =$$
$$= \min\left\{ \min_{0 \le y \le 1/3} (y^2 - 2y),\ \min_{1/3 < y \le 1}\left(\frac{17}{8}y^2 - \frac{11}{4}y + \frac{1}{8} \right) \right\}.$$

Найдем минимумы двух полученных функций через первые производные.

Производная первой функции: $2y - 2 = 0,\ \ y = 1,$ т.к. здесь $0 \le y \le \frac{1}{3},$ то $y = \frac{1}{3},\ V' = -\frac{5}{9}$

Для второй функции: $\frac{17}{4}y - \frac{11}{4} = 0,\ y = \frac{11}{17},\ V'' = -\frac{13}{17}.$

$V = \min\left\{ -\frac{5}{9}\Big|_{y=\frac{1}{3}},\ -\frac{13}{17}\Big|_{y=\frac{11}{17}} \right\} = -\frac{13}{17},$ отсюда

$$y^* = \frac{11}{17},\ V = -\frac{13}{17},\ x^* = \frac{3\cdot\frac{11}{17}-1}{4} = \frac{4}{17}.$$

Заметим, что взяв изначально для нахождения решения другой критерий: $V = \max\limits_x \min\limits_y J(x,y)$, мы получим тот же самый результат.

Рассмотрим теперь нахождение решений в выпуклых и вогнутых играх.

Т е о р е м а . Значение **выпуклой/вогнутой игры** определяется формулой

$$V = \min_{0\le y\le 1}\max_{0\le x\le 1} J(x,y) \Big/ V = \max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1} J(x,y).$$

Чистая оптимальная стратегия y^* / x^* второго/первого игрока есть решение уравнения:

$$V = \max_{0\le x\le 1} J(x,y) \Big/ V = \min_{0\le y\le 1} J(x,y).$$

Пусть (F^*, y^*) — седловая точка в выпуклой игре.

Тогда для всех $x\in[0,1]$ $J(x,y^*) \le E(F^*,y^*) = V$.

Разобьем все стратегии первого игрока следующим образом: пусть $X_1 = \{x\in[0,1] \mid J(x,y^*) = V\}$, $X_2 = \{x\in[0,1] \mid J(x,y^*) < V\}$.

Очевидно, $X_1 \cup X_2 = [0,1]$. Для точек из X_2 имеем:

$$\int_0^1 J(x,y^*)dF^*(x) < \int_0^1 V dF^*(x)$$

или (из определения выигрыша)

$$E(F^*,y^*) < V = E(F^*,y^*).$$

Содержательный смысл полученного противоречия таков, что оптимальная стратегия первого игрока смешивает только точки из множества X_1, и не использует точки из множества X_2. Поэтому чистые стратегии из X_1 называются ***существенными стратегиями*** первого игрока.

Т е о р е м а . Пусть в выпуклой игре функция выигрыша $J(x, y)$ дифференцируема по y, а y^* — чистая оптимальная стратегия 2-го игрока. Тогда:

1) если $y^* = 1,$ то среди оптимальных стратегий 1-го игрока существует чистая стратегия x' такая, что $x' \in X_1,\ J'_y(x', 1) \le 0;$

2) если $y^* = 0,$ то среди оптимальных стратегий 1-го игрока существует чистая стратегия x'' такая, что $x'' \in X_1,\ J'_y(x'', 0) \ge 0;$

3) если $0 < y^* < 1,$ то среди оптимальных смешанных стратегий 1-го игрока существует такая, которая является смесью существенных стратегий x', x'', и для них выполняются неравенства $J'_y(x', y^*) \ge 0,\ J'_y(x'', y^*) \le 0.$ При этом стратегии употребляются с вероятностями α и $1-\alpha$ соответственно, где α — решение уравнения:

$$\alpha J'_y(x', y^*) + (1-\alpha) J'_y(x'', y^*) = 0.$$

Оптимальную стратегию в этом случае будем обозначать:

$$F^* = \left(\alpha\big|_{x'}, 1-\alpha\big|_{x''}\right).$$

Пример 3.12

Дана игра на единичном квадрате

$$\Gamma = <[0,1], [0,1],\ y^3 - 3xy + x^3 >.$$

В данной игре функция выигрыша непрерывна по обеим переменным, поэтому игра имеет решение. Найдем производные функции по обоим переменным для определения выпуклости или вогнутости игры:

$J'_x = -3y + 3x^2,\ J''_{xx} = 6x \ge 0,$

$J'_y = -3y^2 + 3x,\ J''_{yy} = 6y \ge 0$ — игра выпукла.

Решение будем находить по формуле $V = \min\limits_y \max\limits_x \left(y^2 - 3xy + x^3\right).$

Так как функция выпукла по x, то имеется единственный минимум по x на данном отрезке. Тогда максимум по x достигается либо при $x = 0,$ либо при $x=1$ (в зависимости от y). Рассмотрим графики функций $J(0,y)=y^3$, $J(1,y)=y^3-3y+1$ (рис. 3.6).

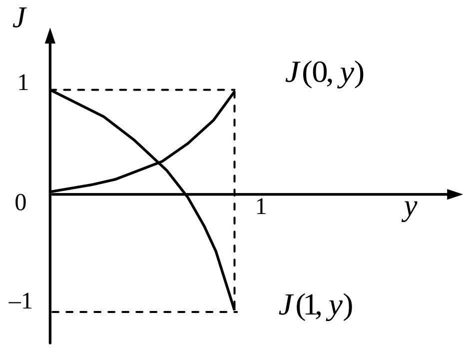

Рис. 3.6. Графики функции выигрыша при граничных значениях x

Функции пересекаются в точке $y=\frac{1}{3}$.

Из графика видно, что

$$\max_{0\le x\le 1} J(x,y)=\begin{cases} J(1,y), \text{ при } 0\le y\le \frac{1}{3}; \\ J(0,y), \text{ при } \frac{1}{3}< y\le \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тогда минимум из всех максимумов достигается в точке пересечения:

$$\min_{0\le y\le 1}\ \max_{0\le x\le 1} J(x,y)=\frac{1}{27} \text{ при } y=\frac{1}{3}.$$

Мы нашли цену игры и оптимальную стратегию второго игрока: $V=\frac{1}{27}$, $y^*=\frac{1}{3}$.

Необходимо найти оптимальную стратегию первого игрока F^*. Так как $0<y^*<1$, то F^* — это смесь двух существенных стратегий. Найдем эти стратегии.

$$J(x,y^*)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\left(\frac{1}{3}\right)\cdot x+x^3=\frac{1}{27};\ -x+x^3=0.$$

$x_1^*=0$, $x_2^*=1$ ($x_3=-1$ не является стратегией).

Таким образом, оптимальное поведение 1-го игрока состоит в смешивании своих крайних стратегий.

Найдем вероятность выбора первой стратегии α. Должно выполняться условие: $J'_y(x',y^*)\ge 0$, $J'_y(x'',y^*)\le 0$.

$$J'_y(x_1,y^*)=\left.\frac{dy^3}{dy}\right|_{y=\frac{1}{3}}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}>0 \text{ (коэффициент при } \alpha\text{).}$$

$$J'_y(x_2, y^*) = \left.\frac{\alpha(y^3 - 3y + 1)}{\alpha y}\right|_{y=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3} < 0$$ (коэффициент при $1-\alpha$).

Решаем уравнение: $\frac{1}{3} - \frac{8}{3}(1-\alpha) = 0;\ \alpha = \frac{8}{9},$ отсюда оптимальная стратегия первого игрока $F^* = \left(\left.\frac{8}{9}\right|_{x=0}, \left.\frac{1}{9}\right|_{x=1}\right).$

Заметим, что не существует единого подхода к решению выпуклых и вогнутых игр. Основная трудность — определение поведения функции J, зависящей от двух переменных. Приведем примерный порядок решения выпуклых/вогнутых игр [12].

Алгоритм решения выпуклых и вогнутых игр

1. Проверить функцию выигрыша на непрерывность по обеим переменным.

2. Вычислить J''_{yy}. Если $J''_{yy} \ge 0,$ то игра выпукла. Идти к п. 4. Иначе — к п. 3.

3. Вычислить J''_{xx}. Если $J''_{xx} \le 0,$ то игра вогнута. Идти к п. 12. Иначе — к п. 20.

4. Значение игры вычисляется по формуле:

$$V = \min_{0 \le y \le 1} \max_{0 \le x \le 1} J(x, y).$$

5. Определить значение $y = a$ так, чтобы на $[0, a]$ и $[a, 1],$ были определены

$$\max_{0 \le x \le 1} J(x, y) = \begin{cases} J(b_1, y) \text{ на } y \in [0, a], \\ J(b_2, y) \text{ на } y \in [a, 1]. \end{cases}$$

(для нахождения a, b_1, b_2 можно воспользоваться производной функции $J,$ ее графиком и т.д.).

6. Вычислить значение игры

$$V = \min \left\{ \min_{0 \le y \le a} J(b_1, y), \min_{a \le y \le 1} J(b_2, y) \right\}$$

и оптимальную чистую стратегию y^* (она соответствует найденной V).

7. Если $y^* = 1$ $(y^* = 0)$, то вычислить оптимальную чистую стратегию x^* первого игрока из условия: $J(x^*, y^*) = V,\ J'_y(x^*, 1) \le 0\ \ J'_y(x^*, 1) \ge 0$ и идти к п. 20.

Иначе $(0 < y^* < 1)$ идти к п. 8.

8. Найти существенные стратегии $x \in [0, 1] : J(x, y^*) = V.$

9. Вычислить $J'_y(x', y^*),\ J'_y(x'', y^*)$, где x', x'' — существенные стратегии.

10. Найти α из решения уравнения: $\alpha J'_y(x', y^*) + (1 - \alpha) J'_y(x'', y^*) = 0,$ где $J'_y(x', y^*) \ge 0,\ J'_y(x'', y^*) \le 0.$

11. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока есть вероятностное распределение $F^* = \left\{ \alpha\big|_{x'}, (1 - \alpha)\big|_{x''} \right\}$. Идти к п. 20.

12. Значение игры вычислить по формуле:

$$V = \max_{0 \le x \le 1} \min_{0 \le y \le 1} J(x, y).$$

13. Определить значение $x = c$ так, чтобы на $[0, c]$ и $[c, 1]$ были определены

$$\min_{0 \le y \le 1} J(x, y) = \begin{cases} J(x, \alpha_1) \text{ на } x \in [0, c], \\ J(x, \alpha_2) \text{ на } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

14. Вычислить значение игры

$$V = \max \left\{ \max_{0 \le x \le c} J(x, \alpha_1), \max_{c \le x \le 1} J(x, \alpha_2) \right\}.$$

и оптимальную чистую стратегию x^* (она соответствует найденной V).

15. Если $x^* = 1 (x^* = 0)$, то вычислить оптимальную стратегию y^* второго игрока из условия: $J(x^*, y^*) = V,\ J'_x(1, y^*) \le 0\ \left(J'_x(0, y^*) \ge 0 \right)$, идти к п. 20.

Иначе — к п. 16 $(0 < x^* < 1)$.

16. Найти существенные стратегии $y : J(x^*, y) = V,\ y \in [0, 1].$

17. Вычислить $J'_x(x^*, y'),\ J'_x(x^*, y''),$ где y', y'' — существенные стратегии.

18. Найти вероятность выбора стратегий $\beta : \beta\, J'_x(x^*, y') + (1-\beta)\, J'_x(x^*, y'') = 0$, где $J'_x(x^*, y') \ge 0$, $J'_x(x^*, y'') \le 0$.

19. Оптимальная смешанная стратегия второго игрока есть вероятностное распределение $Q^* = \left(\beta\big|_{y'}, (1-\beta)\big|_{y''}\right)$.

20. Конец.

Примечание. Вогнуто-выпуклые игры можно решить как по п.п. 1, 2, 4–7, 20, так и по п.п. 1, 3, 12–15, 20. При этом в п.п. 7 и 15 оптимальная стратегия другого игрока вычисляется просто по $J(x^*, y^*) = V$ (без проверок $J'_y <> 0$, $J'_x <> 0$).

Пример 3.13

Решить игру $\Gamma = \left\langle [0,1],\ [0,1], \sin\dfrac{\pi(x+y)}{2} \right\rangle$. Функция непрерывна.

Здесь $\dfrac{d^2 J(x,y)}{dx^2} = -\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2} \le 0$ — игра вогнута и решение будем находить по минимаксному критерию:

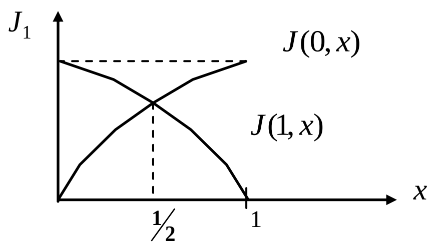

Рис. 3.7. График функции выигрыша при граничных значениях y

$$V = \max_x \min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Из графика (рис. 3.7)

$$\min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{2},\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}\ (y=0), \\ \sin\dfrac{\pi(x+1)}{2},\ 1/2 \le x \le 1\ (y=1). \end{cases}$$

$$V = \max\left\{ \max_{0\le x 1/2} \sin\frac{\pi x}{2},\ \max_{1/2 \le x \le 1} \sin\frac{\pi(x+1)}{2} \right\} = \max\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}} \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мы нашли цену игры и оптимальную стратегию первого игрока: $V = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x^* = \frac{1}{2}.$

Найдем существенные стратегии: $\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y' = 0,\quad y'' = 1.$

Так как $J'_x(x,0)\big|_{x=1/2} = \pi/2 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 0,$

$$J'_x(x,1)\big|_{x=1/2} = \pi/2 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} < 0,$$

то $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\beta - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}(1-\beta) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} : Q^* = \left(\frac{1}{2}\bigg|_{y=0}, \frac{1}{2}\bigg|_{y=1}\right).$

Вопросы для самопроверки

1. Какая игра называется антагонистической?
2. Что является решением антагонистической игры?
3. Что понимается под принципом осторожности?
4. Какие игры называются играми на единичном квадрате?
5. Всегда ли антагонистическая конечная игра имеет решение?
6. Дайте понятие смешанной стратегии в конечных играх.
7. Как решаются игры, представленные в позиционной форме?
8. Что понимается под оптимальностью в вогнуто-выпуклых играх?
9. Что такое платежная матрица?
10. Всегда ли антагонистическая игра имеет решение?

4. Игры многих лиц

4.1. Общие понятия

Нормальная форма игры N лиц:

$$\Gamma = \langle X_i, J_i, i \in N \rangle,$$

где N — количество игроков;

X_i — множество стратегий i-го игрока;

J_i — функция выигрыша i-го игрока.

В ситуации $(x_1, ..., x_n)$ i-й игрок получает величину $J_i(x_1, ..., x_n)$. По-прежнему цель каждого игрока — максимизировать свой выигрыш.

Любое подмножество S множества N называется ***коалицией***. Коалиция может состоять из одного игрока или быть пустой. Множество всех возможных коалиций равно 2^N.

Важное отличие игр многих лиц от антагонистических заключается в возможности сообщения и сговора между игроками, т.е. в образовании коалиций. В этом смысле игры многих лиц можно классифицировать по ограничениям, налагаемым правилами игры на образование коалиций. Выделим три подхода к задаче ограничения сговора [12].

1. Реальные условия таковы, что игроки не могут или не хотят сообщаться между собой, не вступают ни в какие сговоры. Такие игры называются ***бескоалиционными или некооперативными играми***.

2. Наложены некоторые ограничения на сговор. Подобная реальная обстановка приводит к образованию непересекающихся коалиций, причем внутри коалиции имеет место полное сотрудничество, а между ними — либо полное безразличие, либо конкуренция, либо антагонизм. Такое разбиение игроков на коалиции называется ***коалиционной структурой***, а ***игры — играми в условиях коалиционного разбиения***.

3. Допускается любой логически возможный сговор между всеми игроками. Такая свобода сотрудничества приводит в большинстве случаев к объединению

всех игроков в одну большую коалицию, если, конечно, в максимальной коалиции каждый игрок получает доход больший, чем в любой другой коалиции. Это класс ***кооперативных игр***.

В случае наличия сговора в играх многих лиц большое значение имеет делимость (трансферабельность) или неделимость (нетрансферабельность) выигрышей. В первом случае игроки в состоянии сравнивать свои выигрыши, имеют возможность делить общий доход и передавать, если это необходимо, часть своего выигрыша другим игрокам, т.е. производить ***побочные платежи***. Кооперативные игры с делимыми выигрышами называются ***классическими кооперативными играми*** или ***кооперативными играми с трансферабельными выигрышами***. В играх с неделимыми выигрышами (например, моральные выигрыши) побочные платежи не имеют места. Результат совместных действий игроков будет выражаться не общей суммой доходов, как в классических кооперативных играх, а некоторым множеством ***векторов выигрышей***, соответствующие компоненты которых могут быть гарантированы членам этой коалиции. Такие игры называются ***кооперативными играми без побочных платежей*** или ***кооперативными играми с нетрасферабельными выигрышами***.

Исследование игр тем сложнее, чем больше в них игроков. В настоящее время наиболее полно исследованы игры 2-х, 3-х и 4-х лиц. Мы рассмотрим лишь основные вопросы теории игр многих лиц.

4.2. Конечные бескоалиционные игры

Рассмотрим бескоалиционную игру, где множества стратегий игроков X_i, $i=1,...,n$ конечны. Под смешанной стратегией игрока будем понимать, как и раньше, вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий. Пусть $X_i = (x_i^1,...,x_i^{m_i})$. Тогда смешанная стратегия i-го игрока есть вектор $\mu_i = (\mu_i^1,...,\mu_i^{m_i})$, где для любого j $0 \le \mu_i^j \le 1$, $\sum_{j=1}^{m_i} \mu_i^j = 1$. Множество смешанных стратегий i-го игрока будем обозначать через $\aleph_i$. Если все игроки применяют свои смешанные стратегии, то их ожидаемые выигрыши вычисляются как математическое ожидание:

$$M_i(\mu_1,...,\mu_n)=\sum_{j_1=1}^{m_1}...\sum_{j_n=1}^{m_n}J_i(x_1^{j_1},...,x_n^{j_n})\cdot\prod_{k=1}^{n}\mu_k^{j_k},\ i=\overline{1,n}.$$

Для $\forall i$ в ситуации $(\mu_1,...,\mu_{i-1},x_i^j,\mu_{i+1},...,\mu_n)$

$$M_i(\mu_1,...,\mu_{i-1},x_i^j,\mu_{i+1},...,\mu_n)=\sum_{j_1=1}^{m_1}...\sum_{j_{i-1}=1}^{m_{i-1}}\sum_{j_{i+1}=1}^{m_{i+1}}...\sum_{j_n}^{m_n}J_i\left(x_1^{j_1},...,x_n^{j_n}\right)\prod_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\mu_k^{j_k}.$$

Вектор выигрышей $(M_1,M_2,...M_n)$ можно представить точкой в многомерном пространстве. Когда игроки перебирают свои всевозможные смешанные стратегии μ_i, точка $(M_1,M_2,...M_n)$ пробегает некоторое множество K, называемое ***платежным множеством***, со следующими свойствами:

1) Каждому вектору $(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ смешанных стратегий соответствует единственная точка из K.

2) Каждой точке платежного множества соответствует по крайней мере один вектор смешанных стратегий. Таких векторов может быть и несколько, но они эквивалентны в том смысле, что обеспечивают одинаковые средние выигрыши. Имея в виду такое однозначное соответствие между выигрышами и стратегиями, будем условно называть вектора $(M_1,M_2,...M_n)$ в пространстве выигрышей стратегиями.

3) Множество K в общем случае не является выпуклым

Пример 4.1

Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут остаться дома и смотреть по телевизору футбольный матч, а могут пойти в театр. Причем муж больше заинтересован остаться дома, и от этого он получает удовлетворение, равное 2, а жена — 1. При посещении театра они получают, соответственно, 1 и 2. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по

-1. Будем считать, что никакой сговор между ними невозможен. Так как эта игра 2-х лиц, то мы можем представить ее в матричной форме, но, в отличие от антагонистических игр, теперь нужно задать две матрицы выигрыша.

$$J_{\text{м}} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \ J_{\text{ж}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обозначим выигрыши первого и второго игроков через V и U соответственно. Смешанная стратегия 1-го игрока — $(\mu_1, 1-\mu_1)$, 2-го — $(\mu_2, 1-\mu_2)$. Тогда

$V(\mu_1,\mu_2) = 2\mu_1\mu_2 - \mu_1(1-\mu_2) - (1-\mu_1)\mu_2 + (1-\mu_1)(1-\mu_2) = 5\mu_1\mu_2 - 2(\mu_1+\mu_2) + 1,$

$U(\mu_1,\mu_2) = \mu_1\mu_2 - \mu_1(1-\mu_2) - (1-\mu_1)\mu_2 + 2(1-\mu_1)(1-\mu_2) = 5\mu_1\mu_2 - 3(\mu_1+\mu_2) + 2.$

Платежное множество есть область значений функций V и U, когда аргументы пробегают область определения $0 \le \mu_1 \le 1$ и $0 \le \mu_2 \le 1$. Для данной задачи после некоторых преобразований получим следующий вид платежного множества (заштрихованная фигура на рис. 4.1):

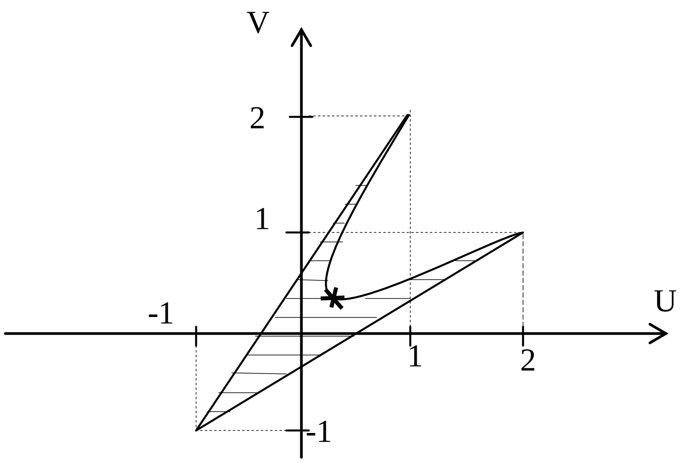

Рис. 4.1. Платежное множество игры

Рассмотрим вопрос решения в некооперативных играх.

Поскольку выигрыш игрока зависит от поведения всех его партнеров, то при выборе своей стратегии он должен учитывать все возможные ситуации. Наихудшим для i-го игрока является тот случай, когда все остальные игроки пойдут против него. Тогда он может гарантировать лишь величину (принцип осторожности):

$$V(i) = \max_{x_i} \min_{x_1} \dots \max_{x_{i-1}} \max_{x_{i+1}} \dots \max_{x_4} J_i(x_1, \dots, x_n).$$

Если все игроки будут применять свои защитные стратегии, то мы получим ситуацию $(V_1^*, ..., V_N^*)$, которая называется точкой *status quo*.

Но, по определению, в бескоалиционной игре каждый игрок имеет свою цель — максимизировать свой выигрыш, а заданная ситуация возможна либо при $J_i = -J_j \quad \forall_j \in N \setminus i$, либо при $J_i = -\sum_{j \in N \setminus i} J_j$. Очевидно, что первое равенство не будет выполняться для всех i одновременно, а в случае второго равенства бескоалиционную игру можно заменить на N антагонистических игр. В остальных случаях игроку, видимо, нет надобности придерживаться максиминной стратегии. В чем же состоит принцип оптимального действия игрока в бескоалиционной игре? Вспомним принцип равновесия и рассмотрим его для игр многих лиц, некооперативный вариант.

Определение. Пусть дана бескоалиционная игра. Ситуация $(x_1^*, ..., x_n^*)$, где $x_i^* \in X_i$, $i = \overline{1, n}$, называется ***равновесной***, если для всех $i = \overline{1, n}$ $J_i(x_1^*, ..., x_n^*) \geq J_i(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*)$ для любого $x_i \in X_i$. Другое название равновесной ситуации — ***точка Нэша***.

В смешанных стратегиях ситуация равновесия определяется аналогично. Более того, существует теорема, гласящая, что любая бескоалиционная игра n лиц имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. В ситуации равновесия ни один игрок не заинтересован в отклонении от своей стратегии, если остальные игроки придерживаются стратегий, соответствующих данной равновесной ситуации.

Но для данного класса игр выбор равновесных стратегий в качестве оптимальных довольно спорен. Во-первых, в отличие от антагонистических игр равновесные стратегии могут не быть защитными, а защитные не обязательно являются уравновешенными (т.е. принципы осторожности и уравновешенности вступают в противоречие, а также затрудняются методы поиска равновесных стратегий). Во-вторых, игра может иметь несколько ситуаций равновесия. Причем, в отличие от антагонистических игр, они не обладают свойствами эквивалентности и взаимозаменяемости, что приводит к неопределенности (неясно, какая из ситуаций равновесия будет реализована) и, как следствие, к разным результатам.

Пример 4.2

Рассмотрим задачу из примера 4.1, и найдем для нее сначала защитные стратегии.

Защитные стратегии игроков можно находить с помощью любого известного нам метода. Разница по сравнению с антагонистическим вариантом заключается в том, что выигрыш каждого игрока рассчитывается по своей платежной матрице и поэтому защитная стратегия второго игрока тоже максиминная, а не минимаксная, как была раньше. Для поиска воспользуемся графическим методом (рис. 4.2).

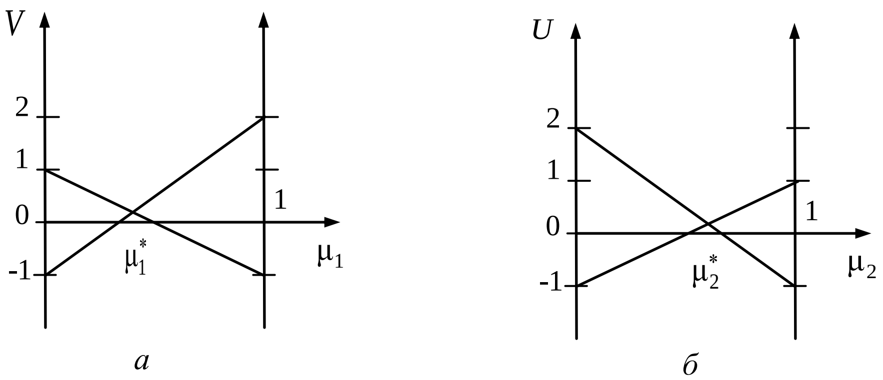

Рис. 4.2. Поиск защитных стратегий:
а — для 1-го игрока; *б* — для 2-го игрока

$$1-2\mu_1=-1+3\mu_1,\ \mu_1=\frac{2}{5},\ \mu_1^*=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right);$$

$$2-3\mu_1=-1+2\mu_2,\ \mu_2=\frac{3}{5},\ \mu_2^*=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right);$$

$$V^*=5\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}-2\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)+1=\frac{1}{5},\ U^*=\frac{1}{5}.$$

(V^*,U^*) — точка status quo (на рис.4.1 она показана звездочкой).

Для этой игры можно указать, по крайней мере, три равновесных ситуации:

1) $\mu_1' = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right), \mu_2' = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), V' = \frac{1}{5}, U' = \frac{1}{5};$

2) $\mu_1'' = (1, 0),\ \mu_2'' = (1, 0),\ V'' = 2,\ U'' = 1;$

3) $\mu_1''' = (0, 1),\ \mu_2''' = (0, 1),\ V''' = 1,\ U''' = 2.$

Их уравновешенность можно проверить прямой проверкой. Например, для третьей ситуации:

$U(\mu_1, \mu_2''') = 5 \cdot \mu_1 \cdot 0 - 3(\mu_1 + 0) + 2 = 2 - 3\mu_1$ максимум достигается при $\mu_1''' = 0.$

$V(\mu_1''', \mu_2) = 5 \cdot 0 \cdot \mu_2 - 3(0 + \mu_2) + 1 = 1 - 3\mu_2$ — максимум достигается при $\mu_2''' = 0.$

Так как игра некооперативная, и игроки не могут договориться о совместном использовании стратегий, первый игрок, наверное, захочет воспользоваться стратегией μ_1'' и получить выигрыш $V'' = 2,$ а второй — стратегией μ_2''' и получить выигрыш $U''' = 2.$ В результате, при (μ_1'', μ_2''') получаем вектор выигрышей $U = -1,\ V = -1,$ т.е. вместо того чтобы получить по 2, оба игрока получат по -1.

Таким образом, ввиду противоречивости принципа равновесия, не удается сформулировать непротиворечивого понятия решения. Можно только порекомендовать считать решением бескоалиционных игр пару защитных стратегий.

Примечание. Если все игроки будут применять свои защитные стратегии, то в некоторых случаях они могут получить даже больше, чем гарантированный выигрыш.

Пример 4.3

Пусть задана следующая бескоалиционная игра трех лиц:

$X_1 = \{0,2\}, X_2 = \{1, 2, 3\}, X_3 = \{0, 3, 4\},\ J_1 = J_2 = J_3 = x + y + z.$ Здесь защитная стратегия первого игрока $x_1^* = 2,$ при этом гарантированный выигрыш $V_1 = 3.$ Защитные стратегии второго и третьего игроков, соответственно, $x_2^* = 3$ и

$x_3^* = 4,$ гарантированные выигрыши — $V_2 = 3, V_3 = 5.$ При этом точка *status quo* $(V_1^*, V_2^*, V_3^*) = (9, 9, 9).$

Таким образом, применяя свои защитные стратегии, игроки получат максимальные выигрыши.

4.3. Кооперативные игры без побочных платежей

В кооперативных играх без побочных платежей предполагается, что игроки могут сообщаться в процессе игры и принимать согласованные действия, используя совместные стратегии.

Будем называть ***совместной чистой стратегией*** множество чистых стратегий, которое игроки обязуются использовать совместно.

Тогда ***совместная смешанная стратегия*** игроков $\mu_s \in \aleph_s$ есть распределение вероятностей на множестве их совместных чистых стратегий. Множество совместных смешанных стратегий коалиции S определяется как $\aleph_S = \prod_{\mathrm{i \in S}} \aleph_i$.

Для случая двух игроков удобно представлять совместную смешанную стратегию в виде матрицы:

$$Z = \left\| Z_{ij} \right\|_{\mathrm{mxn}},$$

где m, n - количество стратегий 1-го и 2-го игроков, соответственно;

$$Z_{ij} \geq 0, \quad \sum_i \sum_j Z_{ij} = 1.$$

Применяя совместные смешанные стратегии, игроки расширяют платежное множество, введенное в некооперативном варианте игры. Новое множество будет выпуклым и представляет собой выпуклую оболочку платежного множества некооперативной игры.

Задача игроков состоит в выборе наилучшей совместной стратегии. То есть они должны выбрать такую точку совместного платежного множества, которая была бы наилучшей для обоих игроков.

Пусть имеются два вектора смешанных стратегий μ' и μ''. В платежном множестве им соответствуют точки $(M_1',...,M_n')$ и $(M_1'',...,M_n'')$.

Говорят, что стратегия μ' доминирует стратегию μ'', если $\forall i\ M_i' \geq M_i''$.

Всем игрокам выгодно отказаться от доминируемых стратегий. Этот отказ приводит к тому, что разумными являются только стратегии, лежащие на «северо-восточной» границе платежного множества. Эти стратегии образуют ***переговорное множество*** или ***множество Парето***. Приведем строгое определение оптимальности по Парето.

Определение. Ситуация μ^* называется оптимальной по Парето, если для любой совместной смешанной стратегии $\mu \in \aleph$ либо $M(\mu^*) = M(\mu)$, либо $M_i(\mu^*) > M_i(\mu)$, хотя бы для одного $i = \overline{1,n}$. Или для $\forall\ i\ M_i(\mu^*) \geq M_i(\mu)$. Множество оптимальных по Парето ситуаций обозначим $\aleph^R$. Множество $R = \{M(\mu^*) | \mu^* \in \aleph^R\}$ называется ***множеством Парето*** или ***переговорным множеством***.

Переговорное множество обладает тем свойством, что принадлежащие ему точки уже не доминируют друг друга. Любой вектор из R таков, что увеличение выигрыша одного игрока невозможно без уменьшения выигрыша другого игрока (здесь интересы игроков в некотором роде антагонистические), т.е. для дальнейшего решения игрокам необходимо вступить в переговоры.

Некоторые авторы считают, что само переговорное множество является решением. При этом анализ игры заканчивается, а выбор конкретной точки остается на совести игроков. Другой подход основан на понятии справедливого решения: игроки до начала игры договариваются о некоторых принципах (аксиомах) справедливости. Эти принципы сообщаются некоему незаинтересованному лицу (арбитру), основываясь на которых он выбирает конкретную точку переговорного множества.

Рассмотрим один из вариантов арбитражного решения.

Арбитражная схема Нэша.

Для того, чтобы вынести решение в конкретной игре, арбитру должны быть известны: вид платежного множества K в данной игре; точка *status quo* $(\mu_1^*, ..., \mu_n^*) \in K$.

Задача построения арбитражной схемы состоит в выборе функции, которая давала бы решение $(\overline{\mu}_1, ..., \overline{\mu}_n) = f(K, (\mu_1^*, ..., \mu_n^*))$ и при этом удовлетворяла бы заданным аксиомам справедливости:

<u>Аксиома 1</u> *(оптимальность по Парето)*. Арбитражное решение должно принадлежать переговорному множеству: $(\overline{\mu}_1, ..., \overline{\mu}_n) \in R$.

<u>Аксиома 2</u> *(индивидуальная разумность).* Решение должно давать не меньше, чем гарантированный доход в точке *status quo*, даваемый защитными стратегиями при некооперативной игре: $\forall i \ \overline{\mu}_i \geq \mu_i^*$.

<u>Аксиома 3</u> *(симметрия).* Если множество K симметрично относительно биссектрисы первого квадранта, то есть $\forall \mu \in K$, если ν получено из μ путем перестановки координат, то и $\nu \in K$, и точка *status quo* симметрична: $\forall i, j \ \ \mu_i^* = \mu_j^*$, то и арбитражное решение симметрично: $\forall i, j \ \ \overline{\mu}_i = \overline{\mu}_j$.

<u>Аксиома 4</u> *(независимость от линейных преобразований).* Если платежное множество вместе с точкой *status quo* подвергнуть линейному преобразованию: $\mu'_i = \alpha_i \mu_i + \beta_i$, то новое арбитражное решение подвергнется такому же преобразованию: $\overline{\mu}'_i = \alpha_i \overline{\mu}_i + \beta_i$.

<u>Аксиома 5</u> *(независимость от посторонних альтернатив).* Если имеется платежное множество K и арбитражное решение $\overline{\mu} \in K$, и если это множество расширяется за счет введения множества новых точек S, то новое арбитражное решение должно либо остаться прежним, либо переместиться в множество S. Таким образом, новые возможности не должны менять порядка предпочтения старых.

Существует единственная арбитражная функция, которая удовлетворяет системе аксиом Нэша, и эта функция описывается следующим алгоритмом:

1) начало координат переносится в точку *status quo*: $\forall i\ \ \mu'_i = \mu_i - \mu_i^*$;

2) из точек переговорного множества R выбирается та, у которой максимально произведение координат: $\overline{\mu'} = \max\limits_R \prod\limits_i \mu'_i$;

3) производится обратное преобразование координат: $\forall i\ \ \overline{\mu}_i = \overline{\mu'}_i + \mu_i^*$.

Эта схема дает точку переговорного множества, которую нужно считать справедливым исходом в смысле выбранных аксиом справедливости.

Пример 4.4

Вернемся к примеру 4.1. Рассмотрим теперь кооперативный вариант этой задачи: будем считать, что муж и жена до принятия решения пытаются как-то договориться и найти компромиссное решение (что гораздо логичнее с точки зрения смысловой интерпретации).

Платежное множество кооперативной игры становится выпуклым и примет вид, приведенный на рис. 4.3. Жирной линией выделено переговорное множество R.

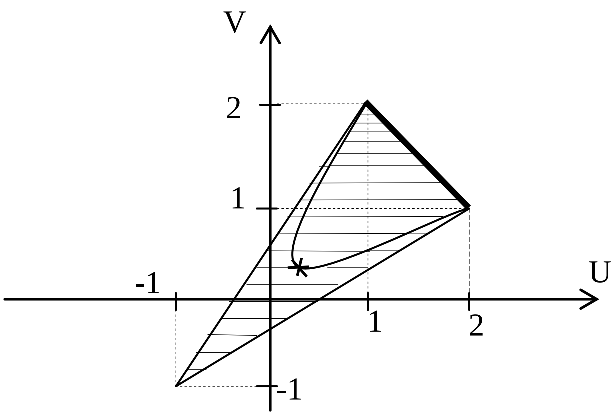

Рис. 4.3. Платежное множество игры

Так как рассматриваемое платежное множество симметрично относительно биссектрисы первого квадранта и точка *status quo* лежит на оси симметрии, то и искомое решение можно найти сразу, воспользовавшись аксиомами 1 и 3. Решение должно находиться на пересечении переговорного множества с биссектрисой: $(\overline{V},\overline{U}) = (1.5, 1.5)$.

Для нахождения совместной смешанной стратегии, которая приводит к этому исходу, необходимо решить систему трех линейных уравнений:

$$\overline{V} = 2Z_{11} - Z_{12} - Z_{21} + Z_{22} = 1.5$$

$$\overline{U} = Z_{11} - Z_{12} - Z_{21} + 2Z_{22} = 1.5$$

$$Z_{11} + Z_{12} + Z_{21} + Z_{22} = 1$$

Решая данную задачу с учетом положительности искомых переменных, получаем: $Z_{11} = 0.5, Z_{12} = Z_{21} = 0, Z_{22} = 0.5$ или $Z = \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix}$.

Как и следовало ожидать, наилучшим оказалось компромиссное решение, при котором супруги всегда проводят вечер вместе, с одинаковой вероятностью либо оставаясь дома, либо отправляясь в театр.

4.4. Классические кооперативные игры

4.4.1. Характеристическая функция игры

Рассмотрим игру N лиц $\Gamma = <\aleph_i, M_i,\ i \in N>$, с непротивоположными интересами, в которой выигрыши игроков трансферабельны. Пусть правилами разрешен сговор между любыми игроками и группами игроков. Тогда игру Γ можно рассматривать как кооперативную игру с трансферабельными выигрышами.

Здесь стратегии выбираются игроками совместно так, чтобы максимизировать общий доход. Основной вопрос заключается в том, как разделить общий доход между игроками. Поэтому кооперативная игра является игрой дележей.

Пример 4.5

Рассмотрим игру трех рабочих A, B, C. Пусть за одну смену A может заработать 10 единиц, B — 9 единиц, C — 3 единицы. Разрешено образование любой бригады из одного, двух или трех человек. Пусть заработки бригад: AB — 22, BC —15, AC — 17, ABC — 28 единиц. Как должны действовать рабочие, чтобы получить наибольшие заработки, и каковы размеры этих заработков?

Вектор заработков обозначим через $X = (x_1, x_2, x_3)$. Если игроки придут к согласию и создадут коалицию ABC, то они получат наибольший суммарный доход 28 единиц. Его можно разделить между рабочими различными способами, например (12, 11, 5). Очевидно, что против такого раздела не будет возражений как со стороны отдельных игроков: A:12>10, B:11>9, C:5>3, так и со стороны бригад: AB:12+11>22, BC:12+5$\geq$17. В этом смысле вектор X является устойчивым. Но можно предложить и другие варианты, например, такое разделение: (13, 11, 4) — лучше для A, хуже для C.

Отсюда возникает два вопроса: 1) как максимизировать совместный выигрыш; 2) как разделить его среди игроков.

В примере, чтобы выяснить, устраивает ли вектор X всех игроков, мы воспользовались величинами, оценивающими возможности коалиций. Такая величина в теории игр называется ***характеристической функцией*** (х.ф.) ***коалиции***.

Х.ф. показывает максимальную величину выигрыша, которую коалиция может себе гарантировать независимо от действий всех остальных игроков. Х.ф. коалиции S обозначим $v(S)$. Принято считать, что $v(\varnothing) = 0$, где $\varnothing$ — пустая коалиция. Х.ф. является функцией, зависящей от множества как от аргумента. Если функция множества v обладает свойством

$$v(S \bigcup R) \geq v(S) + v(R), \quad \forall S \bigcap R = \varnothing,$$

то говорят, что она супераддитивна. Другими словами, объединив свои усилия, две, не имеющие общих членов, коалиции смогут получить не меньше чем, оставаясь разделенными. Супераддитивность является определяющим условием образования больших коалиций и, в том числе, коалиции N.

Определение. Характеристической функцией кооперативной игры с транферабельными выигрышами называется функция v, определенная на множестве 2^N, ставящая в соответствие любой коалиции $S \in 2^N$ ее наибольший, уверенно получаемый выигрыш в данной игре и обладающая свойствами: $v(\varnothing) = 0; v(S \bigcup R) \ge v(S) + v(R),\ \forall S \bigcap R = \varnothing.$

Это общее определение х.ф. В зависимости от условий конкретной игры ее можно задать по-разному. Приведем самый распространенный вид.

Пусть в игре Γ образовалась коалиция $S < N$. То, что игроки из S действуют совместно, означает, что стратегиями этой коалиции являются всевозможные стратегии входящих в нее игроков, т.е. элементы множества $\aleph_s = \prod_{i \in S} \aleph_i$.

Цель коалиции S — подходящим выбором своей стратегии μ_s добиться возможно большего выигрыша

$$M_s(\mu_1, ..., \mu_n) = \sum_{i \in S} M_i(\mu_1, ..., \mu_n).$$

Поскольку этот выигрыш зависит и от поведения других игроков из множества $N \setminus S$, то при определении х.ф. коалиции S должен быть учтен и тот вариант, когда эти игроки составляют общую коалицию $N \setminus S$ против S. Тогда

$$v(S) = val\Gamma_{S/N \setminus S},$$

где $val\Gamma_{S/N\setminus S}$ — значение антагонистической игры $\Gamma_{S/N\setminus S}$, в которой функцией выигрыша первого игрока S, выступающего как максимизирующий игрок, является M_s; выигрышем второго игрока $N \setminus S$, выступающего как минимизирующий игрок, является $-M_s$. Таким образом,

$$val\Gamma_{S/N\setminus S} = \max_{\mu_S} \min_{\mu_{N\setminus S}} M_S(\mu_S, \mu_{N\setminus S}) = \min_{\mu_{N\setminus S}} \max_{\mu_S} M_S(\mu_S, \mu_{N\setminus S}).$$

Будем предполагать, что для любого S $val\Gamma_{S/N\setminus S}$ существует.

При этом функция $v(S)$ супераддитивна, и вычислена в предположении, что коалиции используют оптимальные (максиминные) стратегии. Дальнейшее исследование игры связано только с ее х.ф. Поэтому в дальнейшем будем задавать игру в новой форме:

$\Gamma = \langle N, v \rangle$ — игра в форме характеристической функции.

4.4.2. Принципы оптимальности в кооперативных играх

В отличие от антагонистических игр, в которых естественным и хорошо разработанным принципом оптимальности является принцип минимакса (основан на принципах осторожности и уравновешенности), в играх многих лиц нет единого принципа оптимальности. Это является следствием разнообразия и сложности природы игр со многими участниками. Здесь стратегии носят вспомогательный характер — они необходимы для вычисления х.ф. На первый план здесь выступает раздел дохода, т.е. умение торговаться. Поэтому принципы оптимальности в играх в форме х.ф. указывают на способы определения компромиссных дележей общих доходов.

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$. Поскольку х.ф. супераддитивна, то следует ожидать объединения всех игроков в одну большую коалицию N. Вопрос: при каких условиях игрок становится членом коалиции N. Естественно, при разделе общего дохода $v(N)$ ни один игрок не согласится получить меньше того дохода, который он может себе обеспечить, действуя в одиночку (максиминный критерий). Долю игрока i при разделе суммы $v(N)$ обозначим x_i.

Определение. Вектор $X = (x_1, ..., x_n)$ называется ***дележом*** в игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$, если его компоненты удовлетворяют следующим условиям:

1) $x_i \geq v\{i\}$ для всех $i \in N$;

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ (не так важно, как 1, но желательно).

Множество всех дележей в игре обозначим $E(v)$. Поскольку выигрыши в игре Г трансферабельны, то $E(v)$ бесконечно. $E(v)$ состоит из разных дележей, следовательно, у игроков имеется возможность выбора. Введем на $E(v)$ отношение предпочтения.

Определение. Пусть $x, y \in E(v)$. Говорят, что x ***доминирует*** y ***по коалиции*** S $(x \succ_s y)$, если:

1) $x_i > y_i \quad \forall i \in S,$

2) $\sum_{i \in S} x_i \le v(S).$

Говорят, что x ***доминирует*** y $(x > y)$, если существует хотя бы одна такая коалиция $S \subset N$, что $(x \succ_s y)$. Первое свойство показывает, что все члены коалиции S строго предпочитают x; второе свойство показывает, что коалиция может предпочитать только тот дележ, соответствующие компоненты которого она в силах гарантировать своим членам.

Пример 4.6. Сравнение дележей в кооперативной игре

Кооперативная игра трех лиц задана следующей х.ф.:

$v(1) = 0, v(2) = v(3) = 1, v(12) = 3, v(23) = 4, v(13) = 1, v(123) = 6$.

Рассмотрим несколько произвольных дележей:

$x = (2, 2, 2), y = (1, 1, 4), z = (4, 1, 1), w = (1{,}5;\ 3;\ 1{,}5)$.

Так как доминирование по одиночным и по максимальной коалициям невозможно, будем рассматривать возможность доминирования только по двойным коалициям.

Сравним дележи x и y. Здесь первое условие доминирования выполняется по коалиции $\{1, 2\}$: $2 > 1$ и $2 > 1$, но при этом не выполняется второе условие: $x_1 + x_2 = 4 > v(12) = 3$. Значит, дележи x и y не доминируют друг друга.

Теперь сравним дележи x и z. Здесь по коалиции $\{2, 3\}$ выполняется и первое и второе условие доминирования: $2 > 1$, $2 > 1$ и $x_2 + x_3 = 4 = v(23)$. Таким образом, дележ x доминирует дележ z по коалиции $\{2, 3\}$: $x \succ_{\{2,3\}} z$.

Больше в данном списке ни один дележ не доминирует другой, так как не выполняются либо первое, либо второе условие доминирования.

Замечание. Доминирование невозможно по следующим коалициям: из одного игрока (нарушается первое свойство дележа); из N игроков (нарушается второе свойство дележа — см. определение дележа).

Отношение доминирования по коалиции упорядочивает множество дележей относительно этой коалиции. Значит, для каждой коалиции существует свой порядок дележей по предпочтению. Какой дележ должен стать решением?

Самое простое — взять дележ, доминирующий все остальные дележи по всем коалициям. Однако такого дележа не бывает. Покажем это следующими рассуждениями: пусть x доминирует все дележи из $E(v) \setminus x$. Тогда для $\forall\, y \in E(v) \setminus x$ имеем:

1) $x_i > y_i \quad \forall\, i \in S$ и $\forall\, S \in 2^N$,

2) $\sum\limits_{i \in S} x_i \le v(S) \quad \forall\, S \in 2^N$.

Из первого условия следует, что $x_i > y_i, \forall i \in N \Rightarrow \sum\limits_{i \in N} x_i > \sum\limits_{i \in N} y_i = v(N)$, а это противоречит второму условию.

Тогда решением может быть недоминируемый дележ. Таких дележей может быть много. В совокупности они представляют одно из основных решений кооперативных игр.

4.4.3. С-ядро игры

Определение. Множество недоминируемых дележей называется ***с-ядром игры***.

Так как любой дележ из с-ядра недоминируем, то ни у кого из игроков (также и коалиций) не будет возражений против реализации этого дележа (хотя могут быть споры по выбору дележа из с-ядра, см. пример 4.5 с рабочими $X_1 = (12, 11, 5)$ и $X_2 = (13, 11, 4)$ — 1-й рабочий предпочел бы второй дележ, 3-й рабочий предпочел бы первый дележ).

Теорема. Для того, чтобы дележ $X \in E(v)$ принадлежал с-ядру, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции $S \in 2^N$ выполнялось одно из следующих двух эквивалентных условий:

1) для всех $S \subset N$: $v(S) \le \sum_{i \in S} x_i$,

2) для всех $S \subset N$: $\sum_{i \in S} x_i \le v(N) - v(N \setminus S)$.

Первое условие называется ***принципом отделения*** и гласит, что коалиция никогда не согласится получить прибыль меньше, чем она может заработать самостоятельно.

Второе условие называется ***принципом отсутствия субсидий*** и суть его в том, что никакая коалиция не должна получить больше, чем ее вклад в общую прибыль.

Следствие. С-ядро любой игры $\Gamma = < N, v >$ является замкнутым выпуклым многогранником. Из-за жесткости условия, определяющего с-ядро, оно часто бывает пустым.

Поэтому важной проблемой является существование ядра: *при каких условиях в данной кооперативной игре с-ядро не пусто*? Необходимым условием непустоты ядра в игре $\Gamma = <N, v>$ является свойство супераддитивности, т.е. должно выполняться условие:

$$\sum_{k=1}^{K} v(S_k) \le v(N),$$

где $S_1, ..., S_k$ — непересекающиеся коалиции, а $\bigcup_{k=1}^{K} S_k = N$.

В самом деле, если это условие не выполняется, то, складывая неравенства $\sum_{i \in S_k} x_i \ge v(S_k)$, получаем $\sum_{i \in N} x_i > v(N)$, что невозможно из определения дележа, следовательно, с-ядро пусто.

Но свойство супераддитивности не является достаточным.

Пример 4.7

Строительство соседними муниципалитетами совместной системы водоснабжения. Пусть у нас есть три города, которые при строительстве могут понести следующие затраты:

город A отдельно: 120, город B: 140, город C: 120,

коалиция $\{A, B\}$: 170, коалиция $\{B, C\}$: 190, коалиция $\{A, C\}$: 160, три города вместе: 265.

Рассмотрим сначала объединение двух городов — A и B. Экономия затрат от совместного производства равна $c(\{A\}) + c(\{B\}) - c(\{AB\}) = 90.$ Равное распределение этой экономии приводит к следующим затратам:

$$x_A = 120 - \frac{1}{2} \cdot 90 = 75, \ x_B = 140 - \frac{1}{2} \cdot 90 = 95.$$

Если участвуют все три города, общая экономия составит:

$$c(\{A\}) + c(\{B\}) + c(\{C\}) - c(\{ABC\}) = 115.$$

Распределим ее равным образом между игроками:

$$x_A = 120 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 81{,}7; \ x_B = 140 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 101{,}7; \quad x_C = 120 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 81{,}7.$$

Приемлемость такого распределения затрат проблематична. Общие затраты, получающиеся для коалиции AB, превосходят их затраты без города C:

$$81{,}7 + 101{,}7 > 170 = c(\{AB\}).$$

Таким образом, дележ $(81{,}7;\ 101{,}7;\ 81{,}7)$ не принадлежит с-ядру. А существует ли в этой игре с-ядро? Для существования ядра необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$x_1 + x_2 + x_3 = 265,$

$x_1 \le 120, x_2 \le 140, x_3 \le 120,$

$x_1 + x_2 \le 170,$

$x_2 + x_3 \le 190,$

$x_1 + x_3 \le 160.$

При этих ограничениях игра не имеет решения. Необходимо усилить свойство супераддитивности.

Примечание. Если в игре указаны не прибыли игроков, а их затраты, то х.ф. мы будем обозначать через $c(S)$, а при проверке условий меняются знаки сравнения. Так, принадлежность дележа с-ядру в этом случае будет определяться неравенством $c(S) \ge \sum_{i \in S} X_i$.

Будем называть коалицию собственной, если она не совпадает с максимальной коалицией N.

Определение. Для данного сообщества игроков N ***сбалансированное покрытие*** есть такое отображение δ из $2^N \setminus \{N\}$ (множества собственных коалиций) в $[0,\ 1]$, что $\sum_{S: i \in S} \delta_S = 1$ для всех игроков i, где суммирование ведется по всем собственным коалициям, содержащим игрока i.

Теорема. С-ядро игр с трансферабельными выигрышами не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия δ имеем

$$\sum_{\substack{S<N\\S\neq N}} \delta_S \cdot v(S) \le v(N) \qquad (*)$$

Если говорим о затратах $c(S)$, то неравенство будет

$$\sum_{\substack{S\subset N\\S\neq N}} \delta_S \cdot c(S) \ge c(N)$$

Данное условие означает, что кооперативная прибыль $v(S)$ собственных коалиций не должна быть слишком большой по сравнению с прибылью $v(N)$.

Сбалансированные покрытия образуют выпуклый многогранник. Поэтому условие (*) достаточно проверить для крайних точек этого многогранника. Если найти эти точки, то свойство сбалансированности может быть записано как конечная система линейных неравенств на v.

Рассмотрим игры с тремя игроками: $N = \{1, 2, 3\}$. Здесь сбалансированные покрытия образуют многогранник с пятью крайними точками:

1) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0;$

2) $\delta_{12} = \delta_3 = 1,\ \delta_1 = \delta_2 = \delta_{13} = \delta_{23} = 0;$

3) $\delta_1 = \delta_{23} = 1,\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_{13} = \delta_{12} = 0;$

4) $\delta_2 = \delta_{13} = 1,\ \delta_1 = \delta_3 = \delta_{12} = \delta_{23} = 0;$

5) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \frac{1}{2}.$

Тогда игра $< N, v >$ с тремя игроками имеет непустое с-ядро тогда и только тогда, когда

$v(1) + v(2) + v(3) \le v(N),$

$v(1) + v(23) \le v(N),$

$v(2) + v(13) \le v(N),$

$v(3) + v(12) \le v(N),$

$\frac{1}{2}\left(v(12) + v(23) + v(13)\right) \le v(N).$

Для кооперативной игры с четырьмя игроками с-ядро непусто тогда и только тогда, когда игра супераддитивна и выполняются семь дополнительных неравенств:

1) $\frac{1}{3}\left(v(123)+v(234)+v(134)+v(124)\right)\le v(N)$;

2) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(234)+v(14)\right)\le v(N)$;

3) $\frac{1}{2}\left(v(134)+v(234)+v(12)\right)\le v(N)$;

4) $\frac{1}{2}\left(v(124)+v(234)+v(13)\right)\le v(N)$;

5) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(134)+v(24)\right)\le v(N)$;

6) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(124)+v(34)\right)\le v(N)$;

7) $\frac{1}{2}\left(v(124)+v(134)+v(23)\right)\le v(N)$.

Вернемся *к примеру 4.7*. Проверим задачу на наличие с-ядра:

$120+140+120=380>265,$

$120+190=310>265,$

$140+160=300>265,$

$120+170=290>265,$

$\frac{1}{2}(170+190+160)=260<265.$

Последнее условие не выполняется, следовательно, с-ядра не существует.

Изменим начальные условия следующим образом: пусть $c(ABC)=255,$ тогда игра имеет с-ядро. Найдем с-ядро игры. Заменим переменные x_i (затраты) на экономию затрат: $y_i=c(i)-x_i$, тогда

$y_1+y_2+y_3=125,\ y_i\ge 0,\ i=1,2,3,$

$y_1+y_2\ge 90,$

$y_2+y_3\ge 70,$

$y_1+y_3\ge 80.$

На рис. 4.4 изображен симплекс $\{y_i \geq 0,\ y_1 + y_2 + y_3 = 125\}$, внутри которого три дополнительных ограничения выделяют треугольник (заштрихованная область) — с-ядро игры.

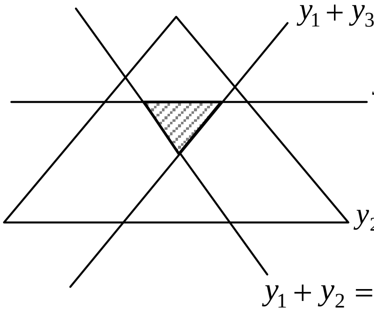

Рис. 4.4. Графическое изображение с-ядра игры

С-ядро игры — множество точек треугольника с вершинами $(55, 45, 25)$, $(45, 45, 35)$, $(55, 35, 35)$. Переходя к затратам, получаем:

$$(65, 95, 95),\ \ (75, 95, 85),\ \ (65, 105, 85).$$

Распределение затрат в центре ядра

$$X^* = (68,3; 98,3; 88,3).$$

Примечание: с-ядро игры не всегда представляет собой треугольник. В зависимости от того, как проходят ограничения внутри симплекс-треугольника, с-ядро может быть точкой (крайняя ситуация, когда все три ограничения пересекаются в одной точке), отрезком, треугольником, четырехугольником, пятиугольником или шестиугольником. При построении ограничений необходимо учитывать, что максимальное значение y_i принимает в соответствующей вершине, уменьшается в направлении основания симплекс-треугольника и на стороне, противоположной вершине y_i, принимает значение, равное нулю. Если в процессе нахождения с-ядра получается точка с отрицательной координатой, то это означает, что данная точка на самом деле находится за пределами симплекс-треугольника.

В связи с тем, что с-ядро часто бывает пустым, желательно определить решение игры с более слабыми требованиями.

Пример 4.8

Пусть три игрока поставлены перед необходимостью раздела дохода, равного единице.

Пусть при этом $v(1)=v(2)=v(3)=0,$

$$v(1,2)=v(1,3)=v(2,3)=v(1,2,3)=1.$$

Данная игра не имеет с-ядра $\left(\frac{1}{2}(v(1{,}2)+v(1{,}3)+v(2{,}3))\right)>1.$

Рассмотрим три вектора: $x=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\ y=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\ z=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$ где $x,\ y,\ z$ — дележи первого, второго и третьего игроков, соответственно.

Для каждого из них можно найти доминирующий его дележ. Например, для $x:\omega=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\ \omega\succ_{\{2,3\}}x.$

Но эти три дележа имеют следующие особенности:

1) ни один из этих трех дележей не доминирует другой;

2) любой дележ из $E(v),$ кроме $x,\ y,\ z$, доминируется одним из дележей $x,\ y,\ z$ (так, $y\succ_{\{1,3\}}\omega$).

Множество $\{\,x,\ y,\ z\,\}$ составляет решение этой игры, называемое решением Неймана-Моргенштерна.

Определение. Множество $L(v)\subset E(v)$ называется НМ-решением игры $\Gamma=<N,v>,$ если:

1) из $x,y\in L(v)$ следует, что x и y не доминируют друг друга;

2) если дележ $x\in L(v),$ то найдется такой дележ $y\in L(v),$ что $y\succ x.$

Общих теорем существования НМ-решения нет. Раньше считалось, что НМ-решение всегда не пусто. Но была найдена игра без НМ-решения.

Недостаток НМ-решения: может существовать несколько различных НМ-решений. Так, в примере 4.7, существует целое множество НМ-решений:

$$L(v) = \{(\varepsilon_1, 1 - c - \varepsilon_1, c) | 0 \le \varepsilon_1 \le 1 - c\} \text{ для } \forall c \in [0, \frac{1}{2}].$$

Неясно, какое НМ-решение должно быть выбрано. Если же НМ-решение выбрано, то какой из него выбрать дележ?

Заветная цель кооперативной теории игр состоит в построении универсальной концепции решения, выбирающей для каждой кооперативной игры единственное распределение полезностей. Конечно, единственной концепции решения не появилось, но тем не менее было открыто два известных значения, которые доказали свою применимость для широкого круга экономических моделей. Это — вектор Шепли и *N*-ядро, которые мы и рассмотрим ниже.

4.4.4. Вектор Шепли

Назовем величину $sc_i = c(N) - c(N \setminus i)$ сепарабельными затратами игрока i. Это — маргинальные затраты на обслуживание игрока i при условии, что все остальные игроки уже обслужены.

Вектор Шепли реализует идею распределения затрат (прибыли), основанную на маргинальных вкладах. Таким образом, доля затрат (доля прибыли) игрока вычисляется как средние маргинальные затраты (прибыль), добавляемые игроком к каждой коалиции остальных игроков.

Для того чтобы получить соответствующую формулу, представим, что игроки из N случайно упорядочены $(i_1, i_2, ..., i_n)$, причем вероятность каждого упорядочения одинакова. Игроку i вектор Шепли приписывает среднее его маргинальной прибыли $v(S \cup \{i\}) - v(S)$, взятое по всем коалициям $S \subset N \setminus i$, включая пустое множество. Вес коалиции S соответствует вероятности того, что в случайной очереди $(i_1, ..., i_n)$ перед игроком i стоят в точности игроки из S.

Непосредственное вычисление этой вероятности дает величину $s!(n-s-1)!/n!$, где s есть размер S.

Определение. Для игры $\Gamma = <N, v>$ ***вектор Шепли*** δ распределяет прибыль $V(N)$ максимальной коалиции следующим образом:

$$\forall i \ \ \delta_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset N \setminus i \\ |S| = s}} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right)$$

Очевидно, что для игр с распределением затрат вектор Шепли получается на основе аналогичной формулы, где v заменяется на c.

Заметим, что, так как вектор Шепли является дележом, то $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = v(N).$

Пример 4.9

Найдем вектор Шепли для игроков из примера 4.7.

$$\delta_1 = \frac{1}{3} v(1) + \frac{1}{6} \left[\left(v(12) - v(2) \right) + \left(v(13) - v(3) \right) \right] + \frac{1}{3} \left(v(N) - v(23) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{1}{6} \left[(170 - 140) + (160 - 120) \right] + \frac{1}{3} (255 - 190) = 73{,}3;$$

$\delta_2 = 98{,}3; \quad \delta_3 = 83{,}3.$

Заметим, что данный дележ лежит вне с-ядра $(\delta_1 + \delta_2 > 170)$.

Если игра $<N, v>$ супераддитивна, то вектор Шепли является индивидуально рациональным, т.е. игрок i получает по крайней мере доступную ему прибыль $v(i)$. Таким образом, при использовании вектора Шепли один игрок не может отделиться и высказывать возражения. Тем не менее, промежуточные коалиции могут иметь такую возможность, как было показано в примере 4.8.

Пример 4.10: экономика производства кукурузы в имении

Имеется $n+1$ игрок. Игроку 0 (землевладельцу) принадлежит земля, а игроки 1, 2, ..., n $-n$ одинаковых рабочих, которым принадлежит только их рабочая сила. Производственная функция показывает для каждого числа рабочих s количество кукурузы $f(s)$, которое они произведут, работая в имении. Функция f не убывает и $f(0)=0$. Без участия игрока 0 коалиция бесполезна и ничего не зарабатывает, при его участии количество произведенной продукции определяется числом рабочих: $v(S)=\begin{cases}0, \text{ при } 0\notin S,\\ f(s), \text{ при } 0\in S, |S|=s+1.\end{cases}$

Вектор Шепли отдает землевладельцу

$$\delta_o=\frac{1}{n+1}f(n)+\frac{1}{(n+1)\cdot n}\cdot f(n-1)\cdot n+\frac{2}{(n+1)n(n-1)}\cdot$$
$$\cdot f(n-2)\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\ldots=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f(i),$$

т.к. его маргинальный вклад равен $f(i)$, где i — число рабочих.

Поскольку все рабочие одинаковы, то они получают одинаковые доли:

$$\delta_i=\frac{1}{n}\left(f(n)-\delta_0\right)=\frac{1}{n}\left[f(n)-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}f(i)\right].$$

Пример 4.9 показывает, что вектор Шепли не удовлетворяет принципу отделения: существуют игры с непустым с-ядром, в которых вектор Шепли лежит вне ядра.

Выпуклые игры представляют собой важный класс игр, в которых с-ядро не пусто и содержит вектор Шепли. Более того, вектор расположен в центре ядра выпуклой игры. Игра является выпуклой, если имеет место возрастание доходов от кооперации: чем больше коалиция, к которой присоединяется игрок i, тем больше его маргинальный вклад.

Определение. Кооперативная игра $<N,v>$ является ***выпуклой***, если она удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств:

$\forall\, i \in N,\ \forall\, S, T \subset N \setminus \{i\}:$

$\{S \subset T\} \Rightarrow \{v(S \bigcup \{i\} - v(S) \le v(T \bigcup \{i\} - v(T)\},$

и/или $\forall\, S, T \subset N : v(S) + v(T) \le v(S \bigcup T) + v(S \bigcap T),$ где по соглашению $v(\varnothing) = 0.$

4.4.5. N-ядро игры

Вектор Шепли не всегда принадлежит c-ядру. Желательно иметь решение, которое бы принадлежало ядру, если c-ядро не пусто. N -ядро является таким значением кооперативной игры. Оно занимает центральное положение внутри c-ядра.

Рассмотрим понятие лексиминного порядка на множестве дележей из $E(v)$.

Определение. Говорят, что дележ x предпочтительнее y в смысле ***лексиминного порядка***, если существует целое число $k = 0, 1, \ldots, n-1,$ для которого выполнены условия

$$x_i^* = y_i^* \text{ для } i = 1, \ldots, k,\ x_{k+1}^* > y_{k+1}^*,$$

где x^*, y^* — дележи, упорядоченные по возрастанию.

Лексиминный порядок работает следующим образом: сначала сравниваются полезности «наиболее бедных» игроков в обоих дележах: если они совпадают, то сравниваются полезности «следующих по бедности» игроков и т.д.

Пример 4.11

Пусть необходимо сравнить два дележа в смысле лексиминного порядка:

$x = (1; 5; 4; 4; 7; 2; 2),$

$y = (6; 3; 3; 1; 2; 6; 4).$

Для этого сначала упорядочим дележи по возрастанию:

$x^* = (1; 2; 2; 4; 4; 5; 7),$

$y^* = (1; 2; 3; 3; 4; 6; 6),$

Проверяем: $x_1^* = y_1^*$; $x_2^* = y_2^*$; $x_3^* < y_3^*$, следовательно, y предпочтительнее x в смысле лексиминного порядка.

Теперь мы можем жать определение N-ядра игры

Определение. Дана игра $\Gamma = < N, v >$. Задано множество дележей $x \in E(v)$. Любому дележу x поставим в соответствие вектор $e(X) \in E^{2^N \setminus N}$: для всех собственных коалиций $S \subset N : c(x; S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S)$. На множестве $E(v)$ существует единственное распределение γ, такое, что для любого $x \in E(v)$. вектор $e(\gamma)$ предпочтительнее в смысле лексиминного порядка вектора $e(x)$. Дележ γ называют N-ядром игры.

При определении N-ядра благосостояние коалиции S измеряют с помощью эксцесса $e(x, S)$, который по сути есть сверхдоход коалиции S по сравнению с ее собственным возможным результатом. Эксцессы различных коалиций сравниваются следующим образом: в первую очередь рассматривается минимальная прибыль, которая максимизируется:

$$\min_{S \subset N} e(\gamma, S) \geq \min_{S \subset N} e(x, S) \quad \forall\, x \in E(v) \Leftrightarrow \min_{S \subset N} \left[\sum_{i \in S} \gamma_i - v(S) \right] =$$
$$= \max_{X \in E(v)} \left\{ \min_{S \subset N} \left[\sum_{i \in S} x_i - v(S) \right] \right\}.$$

Затем из полученного множества решений N-ядро выбирает такое распределение, при котором максимального значения достигает вторая по минимальности коалиционная прибыль. В конечном итоге такой процесс приводит к единственному распределению, которое и является N-ядром.

Если c-ядро пусто, то для супераддитивной игры N-ядро дает индивидуальную рациональность $(x_i \geq v(i),\ \forall i)$.

Пример 4.12

Возьмем игру из примера 4.10. Рассмотрим конкретный случай функции f для трех рабочих: $f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(3)=9$.

Отметим, что *N*-ядро дает равные доли прибыли для всех рабочих, поскольку все рабочие одинаковы. Следовательно, оно имеет вид

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=a;\ \gamma_0=b=f(3)-3a=9-3a\,.$$

Указанное выше распределение принадлежит с-ядру в том и только том случае, когда выполнено условие $0\le a\le f(n)/3=3$.

Действительно, ни один рабочий не получает отрицательную прибыль. Если же свести прибыль землевладельца к минимуму (нулевая прибыль), то максимально каждый рабочий может получить треть общих доходов.

Тогда задача нахождения N-ядра сводится к следующей:

$$\max_{0\le a\le 3}\ \min\ \{a, b, a+b-2, 2a+b-5\}.$$

Учитывая, что $b=9-3a$, получаем

$$\max_{0\le a\le 3}\ \min\ \{a, 9-3a, 7-2a, 4-a\}.$$

На рисунке 4.5 показан график всех четырех функций.

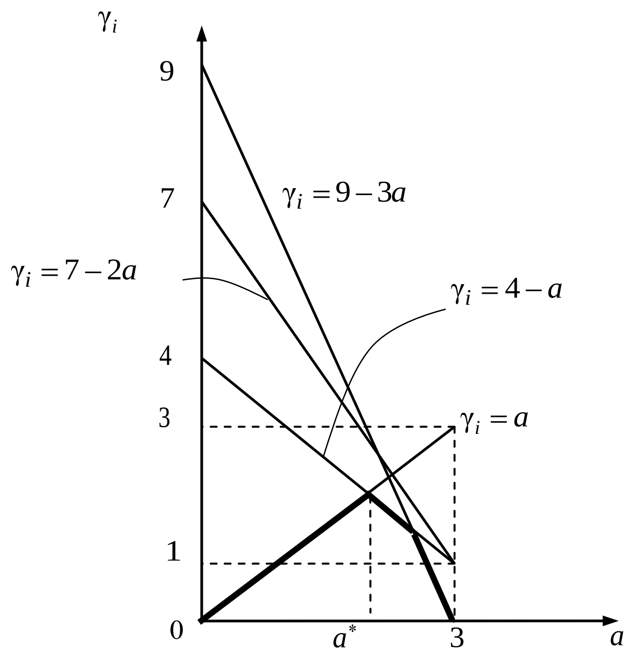

Рис.4.5. Графическое представление задачи нахождения *N*-ядра

Все возможные минимумы показаны на графике жирной ломаной линией. Максимум среди минимумов достигается в точке пересечения прямых a и $4-a$. Тогда $a = 4-a$, отсюда $a^* = 2$.

N-ядро: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2, \quad \gamma_0 = 9 - 3 \cdot 2 = 3,$ или $\gamma = (3, 2, 2, 2).$

Мы рассмотрели различные критерии и способы нахождения решений в кооперативных играх. Теория не может предложить однозначного решения, которое было бы наилучшим с точки зрения всех игроков. Она предлагает целый ряд решений, обосновывая выбор с той или иной точки зрения. Окончательное решение и выбор критерия всегда остается за самими игроками, и зависит от конкретных условий, в которых это решение принимается.

Селекторы N-ядра

Заметим, что *N*-ядро демонстрирует эгалитарный подход к эксцессам различных коалиций и не учитывает размер коалиции, которой достается прибыль. Одна единица прибыли для отдельного агента расценивается так же, как и одна единица для коалиции $N-1$. Можно учитывать средний эксцесс (в расчете на одного члена коалиции):

$$\bar{e}(x,S) = \frac{1}{|S|} e(x,S) .$$

Такой подход дает пропорциональное *N*-ядро, которое принадлежит с-ядру, если последнее не пусто.

Серьезный недостаток *N*-ядра — немонотонность по отношению к доходу максимальной коалиции. Может случиться так, что прибыль *v(N),* доступная максимальной коалиции, возрастет при сохранении прибыли всех остальных коалиций, а доля прибыли некоторых агентов при этом уменьшится. Если какие-то игроки страдают в результате улучшений, то они могут отказаться от участия и тем самым сделать невозможным улучшение ситуации.

Л е м м а . Если N состоит из девяти или более агентов, то можно найти две такие игры $< N, v >$ и $< N, w >$, что

$$v(N) < w(N) \quad и \quad v(S) = w(S) \quad \text{для всех } S \subset N,$$

и тем не менее, если мы обозначим через γ и μ соответственно их N-ядра, то для некоторого агента i возможно неравенство $\mu_i < \gamma_i$.

Эта трудность устраняется, если мы используем пропорциональное N-ядро. Другими словами, N-ядро со средним эксцессом монотонно относительно дохода максимальной коалиции. Хотя заметим, что и для него не выполняется коалиционная монотонность (если увеличивается прибыль $v(S)$, то это не приводит к увеличению доли прибыли для каждого $i \in S$ при $N \geq 5$, что было бы желательно).

4.5. Коллективное принятие решений

4.5.1. Модель распределения затрат

Для наглядного примера применения теории игр на практике, в данном разделе рассмотрим две модели кооперативного принятия решений: модель распределения затрат и модель производства общественного продукта. Две эти модели относятся к классу классических кооперативных игр.

В процессе рассмотрения этих моделей игроков будем чаще называть ***агентами*** в силу сложившейся терминологии в задачах подобного типа.

Первой рассмотрим простейшую задачу — задачу распределения затрат. При рассмотрении такой задачи лучше всего иметь в виду производство неделимого общественного продукта, например, строительство объекта коллективного пользования. Проблема заключается в распределении затрат на строительство между агентами. В качестве исходных данных выступают общие затраты на строительство и доходы, которые каждый агент извлекает из этого объекта.

Опишем модель, используемую для решения указанной задачи.

Модель распределения затрат

Задача: ассигнование на производство неделимого общественного продукта. Такой коллективный объект (например, мост) стоит $c > 0$ и приносит доход каждому из его пользователей $b_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n$. Предполагаем, что сооружение объекта эффективно: $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq c$. Как должны быть распределены затраты?

Представим сначала данную задачу в виде кооперативной игры. Здесь коалиция может получить некоторую прибыль за счет строительства объекта и покрытия полных затрат на него. Тогда прибыль коалиции S (характеристическая функция коалиции) будет определяться следующим образом:

$$v(S) = \left(\sum_{i \in S} b_i - c\right)^{+} \text{ при обозначении } z^{+} = \max(z, 0).$$

Таким образом, максимальная прибыль, которую может получить коалиция определяется как суммарные доходы игроков из этой коалиции минус затраты на содержание объекта. В случае, если затраты превышают суммарные доходы коалиции, ее х.ф. приравнивается нулю (никто не будет работать в убыток).

Одной из фундаментальных идей, рассматриваемых при кооперативном принятии решений, является равное распределение дохода от кооперации. Этот подход получил название ***эгалитаризма***. Эгалитарная идея может применяться двумя способами: уравнивание долей затрат и уравнивание чистой экономии на затратах. В случае решения с равномерным распределением затрат для каждого агента затраты определяются следующим образом: $x_i = c/n$. При выборе решения с равной прибылью каждому агенту i определяются затраты в размере $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)/n$ (т. е. $b_i - x_i = b_j - x_j$ для всех i, j). Недостаток равномерного распределения затрат состоит в том, что какой-то агент, возможно, будет вынужден заплатить больше своего полного дохода $(b_i < x_i = c/n)$, либо, при равной прибыли кто-то может получить субсидию за потребление продукта, т. е. за него будут платить другие агенты: $b_i < \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)\Big/ n$ или $x_i < 0$.

Необходимость установления ограничений на доли затрат соответствует понятию с-ядра в кооперативной игре, описывающей полные затраты коалиций.

Предположим, что суммарные доходы агентов превышают стоимость коллективного объекта: $\sum_{i=1}^{n} b_i > c.$ Вектор затрат $(x_1,...,x_n)$ проходит тест на отделение тогда и только тогда, когда вектор прибылей $(b_1 - x_1,...,b_n - x_n)$ принадлежит с-ядру игры:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ и для всех $S \subset N$:

$$\sum_{i\in S} (b_i - x_i) \geq \left[\sum_{i\in S} b_i - c\right]^{+} \Leftrightarrow \sum_{i\in S} x_i \leq \min\left\{c, \sum_{i\in S} b_i\right\},$$

отсюда $x_i \leq b_i$, $x_i \geq 0$.

Другими словами, вектор затрат $(x_1,...,x_n)$ принадлежит с-ядру игры тогда и только тогда, когда $\forall i \;\; 0 \leq x_i \leq b_i$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = c.$

Рассмотрим решение этой задачи на примере нахождения N-ядра и вектора Шепли.

Нахождение N-ядра игры.

Рассмотрим сначала случай, когда затраты на общественный продукт настолько малы, что каждый отдельный агент мог бы произвести его за свой счет: $0 \leq c \leq \min_i b_i$. Тогда игра с затратами записывается в виде $v(S) = \sum_{i\in S} b_i - c \;\; \forall S \subseteq N.$ В этом случае ее значение соответствует равномерному распределению затрат $x_i = c/n \;\; \forall i$. Такое решение дают и вектор Шепли и N-ядро.

Пусть теперь затраты настолько велики, что производство общественного продукта является эффективным только в том случае, если его потребляют все агенты: $\forall i \;\; \sum_{j\neq i} b_j \leq c \leq \sum_{i=1}^{n} b_i$. Тогда характеристическая функция игры будет следующей: $v(S)=0\ \forall S\subset N,\ v(N)=\sum_N b_i - c$. Таким образом, любое решение (вектор Шепли и N-ядро) будет уравнивать доли прибыли $v(N)$ согласно методу равной прибыли: $b_i - x_i = b_j - x_j$ для всех i, j.

Эти два крайних поведения — равномерное распределение затрат, если затраты достаточно малы, и равная прибыль, если затраты достаточно велики, — имеют хороший содержательный смысл. Пусть b_i — заявка кредитора на некоторое наследство, равное e, где $e<\sum_{i=1}^{n} b_i$. Если суммарные затраты кредиторов превышают величину наследства, то возникнет дефицит: $c=\sum b_i - e.$ Здесь дефицит представляет собой затраты, сумма которых распределяется между кредиторами по договоренности перед ликвидацией наследства. Если дефицит очень мал (относительно каждой заявки), то каждый знает, что его заявка будет почти выполнена, и его внимание сфокусируется на дефиците, что приведет к уравниванию затрат. С другой стороны, если стоимость наследства очень мала (меньше любой заявки), то часть заявки сверх e становится бессмысленной, что ставит всех агентов в равные условия, предполагая равномерное распределение e, т. е. равную прибыль.

В нижеприведенной лемме приводится явная формула N-ядра для случая трех и более агентов в играх с распределением затрат.

Л е м м а . N-ядро игры $v(S)=\left[\sum_{i\in S} b_i - c\right]^+$ может быть вычислено из решения следующих уравнений относительно неизвестного $\lambda\ge 0$ и соответствует следующим долям затрат:

если $c\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$, то

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\lambda,\frac{b_i}{2}\right\}=c\right\}\Rightarrow\left\{x_i=\min\left\{\lambda,\frac{b_i}{2}\right\}\ \forall i\right\},$$

если $c \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$, то

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c\right\} \Rightarrow \left\{x_i = b_i - \min\left\{\lambda, \frac{b_i}{2}\right\}\ \forall i\right\}.$$

Другими словами, если затраты составляют меньше половины общих доходов, то N-ядро уравнивает затраты игроков, но так, что затраты каждого отдельного игрока не могут превышать половину его дохода. Если затраты превышают половину общих доходов, то N-ядро уравнивает прибыль, но при этом прибыль отдельного игрока не может превышать половину его дохода.

Пример 4.13. Задача распределения наследства

Умирает человек, у него остается три жены, претензии которых на наследство мужа составляют, соответственно, 100, 200 и 300. Рассмотрим несколько вариантов суммы наследства e:

а) $e = 100$. Общие затраты $c = b_1 + b_2 + b_3 - e = 500 > \frac{1}{2}600$.

В данном случае наследство делится поровну, и доля каждой жены составит 33,3;

б) $e = 200$. Здесь затраты также превышают половину возможных доходов. Равное распределение прибыли дает 66,6 каждой жене, что превышает половину ожидаемых доходов первой жены. Тогда первая жена получит 50 $\left(\min\left(200/3, 50\right) = 50\right)$, а оставшиеся две — по 75 $\left(\min\left(150/2, 100\right) = 75\right)$;

в) $e = 400$. В данном случае затраты составляют меньше половины возможных доходов и должны быть распределены поровну. Но равное распределение дает 66,6 каждой жене, что превышает половину ожидаемых затрат первой жены. С учетом ограничений $\left(x_i \leq \frac{b_i}{2}\right)$ получаем следующее распределение затрат: $x_1 = 50, x_2 = x_3 = 75$. Доли наследства соответственно составят 50, 125 и 225.

Нахождение вектора Шепли.

Вектор Шепли в играх с затратами не имеет такой простой формулы, как *N*-ядро. Тем не менее его обычная интерпретация как среднего маргинальных вкладов приводит к следующей ситуации. Агенты пытаются скрыться от сборщика налогов. Он «ловит» их одного за другим в случайном порядке (все порядки равновероятны), пытаясь набрать требуемую сумму налогов (затрат — в терминах нашей задачи). «Пойманные» агенты платят налоги в размере полной суммы своих доходов, до тех пор пока затраты не будут покрыты. В интерпретации с банкротством получается симметричная история: агенты «бегут» в банк и получают наследство в размере своих претензий в соответствии с заявкой (по принципу «кто первый пришел, тот первый и обслуживается»), пока наследство полностью не исчерпается.

Пример 4.13. Продолжение

Найдем вектор Шепли для задачи, рассмотренной в примере 4.13. Пусть $e = 200$, следовательно, $c = 400$. Тогда агент произведет выплаты в размере от своего дохода, если он будет «пойман» первым или вторым, и ничего не заплатит, если будет «пойман» последним. Таким образом, его доля затрат равна:

$$x_1 = \frac{1}{3}\cdot 100 + \frac{1}{6}(100 + 100) = 66{,}67.$$

Далее, агент 2 должен заплатить 200, если «пойман» первым, 200 или 100 (третья жена покроет 300 единиц расходов) с равной вероятностью, если «пойман» вторым, и ничего, если «пойман» последним. Значит, его доля равна:

$$x_2 = \frac{1}{3}\cdot 200 + \frac{1}{6}(200 + 100) = 116{,}67.$$

Доля затрат третьего агента определяется аналогично: он должен заплатить 300, если будет «пойман» первым, 300 или 200 с равной вероятностью, если «пойман» вторым, и 100, если «пойман» третьим (в его случае первые два агента все еще не покрывают требуемую сумму затрат). Тогда его доля затрат получается следующей:

$$x_3 = \frac{1}{3}\cdot 300 + \frac{1}{6}(300 + 200) + \frac{1}{3}\cdot 100 = 216{,}67.$$

Следовательно, наследство (претензии каждой жены минус ее затраты) делится так: $\left(33\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}\right)$.

Аналогично можно рассчитать вектор Шепли по прибыли (проведите расчеты самостоятельно — Вы должны получить тот же самый результат).

4.5.2. Модель производства общественного продукта

Задача: в рассматриваемом производстве общественного продукта выделяется два объекта: собственно общественный продукт, потребляемый всеми агентами, и деньги, являющиеся личной собственностью каждого агента. Затраты на производство y единиц общественного продукта составляют $c(y)$ единиц денег. Функция c не убывает, и $c(0) = 0$.

Имеется n агентов. Вначале запас агента i составляет w_i единиц денег, и никакого общественного продукта не производится $(y = 0)$. Конечное распределение соответствует некоторым вкладам денег (например, агент i внес x_i денег) и производству y единиц общественного продукта. Здесь общие затраты на производство общественного продукта должны равняться суммарному количеству денег, внесенных всеми агентами: $\sum_{i=1}^{n} x_i = c(y)$. Предпочтения агента i описываются некоей функцией полезности $u_i(w_i - x_i, y)$.

Заметим, что в модели с общественным продуктом агенты могут свободно обмениваться деньгами. В допустимом распределении затрат на производство общественного продукта $(x_1,...,x_n; y)$ может быть $x_i < 0$ (агент i получает платеж в размере x_i) или $x_i > w_i$ (его доля затрат превышает начальный запас).

Представим данную задачу в виде кооперативной игры.

Предположим, что все агенты совместно владеют технологией производства. Это означает, что любая коалиция может распоряжаться технологией по своему усмотрению, т. е. производить любое количество продукта при условии, что полностью покрыты расходы.

Тогда характеристическая функция коалиции определяется через нахождение максимума прибыли при условии ее неотрицательности. Так, в случае квазилинейных полезностей, которые описываются уравнением $u_i = b_i(y) + (w_i - x_i)$, где $b_i(y)$ — денежный эквивалент y единиц общественного продукта, х.ф. коалиции будет описана следующим образом:

$$v(S) = \max\left\{\max_y \sum_{i\in S} \left(b_i(y) + w_i\right) - c(y),\ 0\right\},\ \text{где } c(y) = \sum_{i\in S} x_i\ .$$

Ядро в задаче производства общественного продукта

С-ядро игры определяется, как и раньше: распределение $(x_1, ..., x_n; y)$ принадлежит ядру, если никакая коалиция S не может отделиться и улучшить благосостояние своих членов. При этом должны выполняться следующие два условия: $\forall i\ \ x_i > 0$ (иначе коалиция $N \setminus \{i\}$ предпочтет обойтись без агента i и сэкономить x_i денег и $u_i(w_i - x_i, y) > u_i(w_i, 0)$ (иначе агент i предпочтет отделиться и не производить общественный продукт).

Пример 4.14. Модель производства общественного продукта с квазилинейными предпочтениями

Технология производства имеет при всех y вид $c(y) = \frac{3}{2}y$. Есть два агента с квазилинейными предпочтениями $u_i = b_i(y) - x_i$ (будем считать начальный запас денег нулевым), где

$$b_1(y) = \ln(1 + y); \quad b_2(y) = 2\sqrt{y}.$$

При определении характеристических функций коалиций необходимо учитывать, что предложенные функции прибыли коалиций строго вогнуты и их единственные максимумы находятся через первые производные. В результате получаем следующую характеристическую функцию игры:

$$v(1)=\max_{y\geq 0}\left(\ln(1+y)-\frac{3}{2}y\right)=0 \quad (\text{при } y=0);$$

$$v(2)=\max_{y\geq 0}\left(2\sqrt{y}-\frac{3}{2}y\right)=0{,}67 \quad (\text{при } y=0{,}44);$$

$$v(12)=\max_{y\geq 0}\left(\ln(1+y)+2\sqrt{y}-\frac{3}{2}y\right)=1{,}19 \quad (\text{при } y^*=1).$$

Распределения из c-ядра произвольным образом делят кооперативную прибыль $v(12)-v(1)-v(2)=0{,}53$ между двумя агентами.

При $y^*=1$ общие затраты составят $c(y^*)=1{,}5.$

В одной крайней точке c-ядра вся кооперативная прибыль достается первому агенту, что приводит к следующим прибылям u_1, u_2 и долям затрат x_1, x_2:

$$u_1=b_1(y^*)-x_1=0{,}53 \quad \Rightarrow \quad x_1=0{,}16;$$

$$u_2=b_2(y^*)-x_2=0{,}67 \quad \Rightarrow \quad x_2=1{,}34.$$

В другой крайней точке вся кооперативная прибыль достается второму агенту со следующими прибылями u'_1, u'_2 и долями затрат x'_1, x'_2:

$$u'_1=b_1(y^*)-x'_1=0 \quad \Rightarrow \quad x'_1=0{,}69;$$

$$u'_2=b_2(y^*)-x'_2=1{,}19 \quad \Rightarrow \quad x'_2=0{,}81.$$

Таким образом, c-ядро игры составит:

по прибыли $(0{,}53;\ 0{,}67)$, $(0;\ 1{,}19)$;

по затратам: $(0{,}16;\ 1{,}34)$, $(0{,}69;\ 0{,}81)$.

Тогда *N*-ядро (которое является центром c-ядра) мы можем найти как среднее по двум точкам. По прибыли *N*-ядро будет $\gamma=(0.265,\ 0.93)$, по затратам оно составит $x=(0.425,\ 1.075)$.

Определим теперь вектор Шепли (по прибыли) через характеристическую функцию игры:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot (1.19 - 0.67) = 0.265,\ \sigma_2 = \frac{1}{2}\cdot 0.53 + \frac{1}{2}\cdot (1.19 - 0) = 0.93.$$

Заметим, что мы получили однозначное решение – вектор Шепли и N-ядро совпали.

Вопросы для самопроверки

1. Что является коалицией в кооперативных играх?
2. В чем разница между кооперативными и некооперативными играми?
3. Каков принцип оптимальности в некооперативных играх?
4. В чем заключается оптимальность по Парето?
5. Поясните смысл характеристической функции.
6. Что является решением кооперативной игры с нетрансферабельными выигрышами?
7. Опишите достоинства и недостатки вектора Шелли и N -ядра.
8. Какие принципы оптимальности рассматриваются в кооперативных играх?

Заключение

В данном учебном пособии изложены основные понятия и результаты теории игр. Несмотря на наличие богатой монографической и специальной литературы по теории игр, учебных пособий, посвященных этому разделу математики, сравнительно немного. Автор попытался изложить основные вопросы теории в наиболее простой и наглядной форме.

На самом деле, даже рассмотренные классы игровых моделей не охвачены в полной мере по их существующему многообразию. Так, за пределами пособия остались дифференциальные антагонистические игры, многошаговые игры с бесконечным числом альтернатив, дифференциальные игры многих лиц. Тем не менее, автор попытался отразить большинство современных направлений теории игр, в том числе и на многочисленных примерах экономических задач.

Автор надеется, что данный в пособии материал позволит читателю применять свои знания на практике, а при необходимости, в дальнейшем изучить недостающие разделы самостоятельно.

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.

2. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций: Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.

3. Данилов Н.Н. Игровые модели принятия решений. — Кемерово, 1981.

4. Гладких Б.А. Лекции по исследованию операций. — Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1979.

5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. – 464 с.

Глоссарий

Антагонистическая игра — игра двух лиц, в которой игроки преследуют противоположные цели: все, что выигрывает один игрок, проигрывает другой, и наоборот.

Вектор Шепли – дележ, являющийся решением кооперативной игры, который реализует идею распределения прибыли, основанную на маргинальных вкладах. Доля прибыли игрока вычисляется как средние маргинальные прибыли, добавляемые игроком к каждой коалиции остальных игроков.

Вогнутая игра – игра на единичном квадрате, в которой функция выигрыша первого игрока вогнута по x (множеству стратегий первого игрока).

Вогнуто-выпуклая игра – игра на единичном квадрате, в которой функция выигрыша первого игрока вогнута по x (множеству стратегий первого игрока) при каждом значении y и выпукла по y (множеству стратегий второго игрока) при каждом значении x.

Выпуклая игра – игра на единичном квадрате, в которой функция выигрыша первого игрока выпукла по y (множеству стратегий второго игрока).

Дележ – вектор выигрышей игроков в кооперативной игре.

Игра на единичном квадрате – антагонистическая игра, в которой оба игрока имеют континуум чистых стратегий.

Игра с неполной информацией – игра, в которой игрок не в состоянии определить, какой ход сделает противник, либо принимает решение, не зная, в каком состоянии находится игра.

Игра с полной информацией – игра, в которой каждый игрок в каждый момент времени знает все предыдущие ходы (выборы) игроков.

Защитная пара стратегий в антагонистической игре – стратегия первого игрока, максимизирующая его гарантированный выигрыш, и стратегия второго игрока, минимизирующая его гарантированный проигрыш.

Коалиция – совокупность игроков в игре многих лиц, объединенная по некоторому принципу (например, целью).

Коалиционные игры — это игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрыша коллектива (коалиции).

Кооперативные игры — это игры, в которых игроки могут объединяться в группы — коалиции с целью максимизации суммарного выигрыша, который впоследствии делится между членами коалиции по соглашению

Некооперативные игры — игры, в которых каждый игрок действует сам по себе, не вступая ни в какие соглашения с другими игроками.

Оптимальное решение игры — множество оптимальных стратегий игроков и вектора выигрышей.

Платежная матрица – матрица выигрышей первого игрока в антагонистической игре.

Смешанной стратегией в конечной игре двух лиц называется распределение вероятностей на заданном множестве чистых стратегий.

Совместная чистая стратегия игроков — множество чистых стратегий, которое игроки обязуются использовать совместно.

Совместная смешанная стратегия игроков есть распределение вероятностей на множестве их совместных чистых стратегий.

С-ядро игры – множество недоминируемых дележей в кооперативной игре.

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т.е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах.

Характеристическая функция коалиции – максимальная величина выигрыша коалиции, которую коалиция может себе гарантировать независимо от действий всех остальных игроков.

Характеристическая функция кооперативной игры - функция, определенная на множестве всех коалиций, ставящая в соответствие любой коалиции ее наибольший, уверенно получаемый выигрыш в данной игре.

Цена игры – выигрыш первого игрока в антагонистической игре при условии, что оба игрока используют оптимальные стратегии.

Чистой стратегией игрока называется правило, ставящее в соответствие каждому информационному множеству этого игрока определенный выбор (альтернативу) хода в этом информационном множестве.