Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Н. Ю. Салмина

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Часть II

Учебное пособие

Томск
«Эль Контент»
2013

УДК 519.866.5(075.8)
ББК 22.18я73
С 164

Рецензенты:
Тарасенко В. Ф., докт. техн. наук, профессор кафедры теоретической кибернетики Томского государственного университета;
Грибанова Е. Б., канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизированных систем управления ТУСУРа.

Салмина Н. Ю.

С 164 Моделирование систем : учебное пособие. В 2-х частях / Н. Ю. Салмина. — Томск : Эль Контент, 2013. — Ч. II. — 114 с.

ISBN 978-5-4332-0147-7

В настоящем учебном пособии изложены основные вопросы моделирования систем: классификация моделей, этапы моделирования. Рассматриваются задачи статистического моделирования, основные моменты планирования эксперимента и анализа результатов, а также некоторые вопросы теории массового обслуживания и теории игр. В качестве программного средства моделирования систем рассмотрен язык имитационного моделирования GPSS: синтаксис, особенности применения. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 231000 «Программная инженерия», и студентов родственных направлений.

УДК 519.866.5(075.8)
ББК 22.18я73

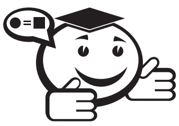
ISBN 978-5-4332-0147-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

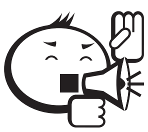
ВВЕДЕНИЕ

Соглашения, принятые в книге

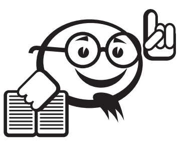
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



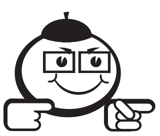
Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



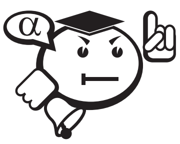
Эта пиктограмма означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



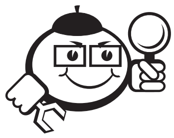
Эта пиктограмма означает теорему. Данный блок состоит из *Названия теоремы* (Слова Теорема и Номера теоремы) и Текста теоремы.



Эта пиктограмма означает лемму. Данный блок состоит из *Названия леммы* (Слова Лемма и Номера леммы) и Текста леммы.

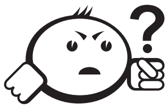


Эта пиктограмма означает аксиому. Данный блок состоит из *Названия аксиомы* (Слова Аксиома и Номера аксиомы) и Текста аксиомы.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Контрольные вопросы по главе

Глава 4

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1 Общие сведения о моделях массового обслуживания

При исследовании операций очень часто приходится сталкиваться с анализом работы систем, называемых системами массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, магазины, билетные кассы и т. п. Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания. В качестве каналов обслуживания могут фигурировать: линии связи, продавцы, лифты, автомашины и т. д.

Каждая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или требований), поступающих на СМО в случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается некоторое (случайное) время, после чего канал освобождается и готов к принятию следующей заявки.

Моделирование СМО заключается в сведении исходной системы к кибернетической модели. Модели массового обслуживания относятся к вероятностным кибернетическим моделям, в которых имеет место случайный характер изменения входных воздействий и параметров системы. Здесь, суммируя и усредняя по определенным законам отдельные случайные явления (поток пассажиров в аэропорту или метро), получают вполне определенные неслучайные значения параметров управления (например, необходимое число единиц транспорта). Результаты исследований, проводимых на модели, внедряются затем в реальную систему. Модель может быть одна и та же для разных исходных систем, будь то аэропорт или телефонная сеть большого города.

Задачи, связанные с работой систем массового обслуживания разного вида требований, возникают в разных областях техники, в организации производства и пр. Примерами систем и требований могут служить парикмахерская и клиенты, преподаватель и студенты, телефонная станция (как совокупность линий) и вызовы на разговор, ремонтная бригада вычислительного центра и отказы обслуживаемых ею машин. Моменты прибытия требований, как и длительности обслуживания, каждой заявки являются случайными. Поэтому основным математическим аппаратом для изучения функционирования таких систем является теория вероятностей.

Термин «массовый» предполагает многократную повторяемость ситуаций в том или ином смысле (много заявок, длительное функционирование системы и т. п.). Выводы и рекомендации, получаемые методами теории массового обслуживания, применимы лишь при наличии одного или нескольких из перечисленных факторов повторяемости. При этом необходимо учитывать, что поскольку поток заявок и продолжительность времени обслуживания носят случайный характер, то и прогноз относительно единичного события может быть только вероятностным.

Для оценки качества работы вероятностной модели вводят количественные показатели эффективности ее работы. Для СМО — это полная средняя стоимость в единицу времени:

$$\Gamma = C_1 \cdot \overline{\nu} + C_2 \cdot \overline{\rho},$$

где $\overline{\nu}$ — среднее число заявок в очереди; $\overline{\rho}$ — среднее число свободных обслуживающих приборов; C_1 — стоимость ожидания одной заявки в единицу времени; C_2 — стоимость простоя одного обслуживающего прибора в единицу времени.

Рассмотрим простейшую структурную схему СМО (рис. 4.1). Источник заявок формирует входной поток, задерживая на какой-то отрезок времени поступление заявки в его состав. Интервалы между заявками входного потока в общем случае неодинаковы: это случайные величины, которые определяются вероятностными законами входного потока. Заявки поступают на вход очереди, в котором реализуется заданный закон дисциплины очереди. Этот закон определяет порядок обслуживания входных заявок, который может быть детерминированным (первой обслуживается заявка, которая первой поступила) или случайным (закон Эрланга).

Рис. 4.1 – Простейшая структурная схема СМО

Канал обслуживания осуществляет обслуживание каждой заявки в соответствии с заданным детерминированным или случайным законом обслуживания. Выходной поток заявок отличается от входного в зависимости от законов дисциплины очереди и обслуживания.

В модели СМО все явления описываются с помощью событий, которые появляются в тот или иной момент времени (на временной оси). Для улучшения работы реальных систем необходимо получить какие-то определенные (детерминированные) характеристики работы системы (типа среднего времени ожидания или обслуживания) и на их основании выбрать новые режимы работы системы, т. е. по-другому распределить каналы обслуживания, режимы их работы, режим ожидания и т. д. Рекомендации должны носить детерминированный характер: «переместить N каналов обслуживания с одного потока заявок на другой», «добавить канал обслуживания», «изменить среднее время обслуживания».

Существует большое количество различных СМО. Перечислим основные классы СМО по разным основаниям [1]:

а) марковские и немарковские: в марковских СМО динамика описывается с помощью марковских процессов. Аналитическому исследованию поддаются только частные типы немарковских СМО — полумарковские, линейчатые и др.;

б) одноканальные и многоканальные (по числу каналов обслуживания, которые могут одновременно обслуживать входные заявки);

в) с отказами и без отказов (в зависимости от того, разрешается входной заявке ждать в очереди или нет; если разрешается — ограничена очередь по длине или времени, либо нет);

г) многофазные и однофазные: при последовательном процессе обслуживания заявки несколькими приборами;

д) открытые и замкнутые: обслуженная заявка либо покидает СМО, либо снова поступает на обслуживание;

е) одиночные и сети СМО: сложные комбинации всех рассмотренных выше СМО.

Первичной задачей, с которой должно начинаться каждое исследование СМО, является изучение того потока событий, который поступает на вход системы. Так, при организации работы телефонной станции необходимо учитывать особенности потока вызовов, поступающих от абонента на станцию. Наиболее часто рассматривается простейший поток случайных событий. Свойства потока, почему он является простым и некоторые другие модели потоков мы рассмотрим в дальнейшем.

Второй задачей при исследовании функционирования различных СМО является изучение дисциплины обслуживания. Здесь основной характеристикой является закон распределения времени обслуживания. Наиболее распространенной дисциплиной обслуживания является следующая: если в момент поступления заявки имеется хотя бы один свободный канал обслуживания, заявка немедленно начинает обслуживаться. Освободившийся канал немедленно приступает к обслуживанию очередной заявки, если имеется очередь. Каждая заявка обслуживается только одним каналом, и каждый канал в каждый момент времени обслуживает только одну заявку.

Исследование организации и продвижения очереди в системе является третьей задачей, рассматриваемой при изучении работы СМО. Очередь может быть ограничена максимальной длиной или временем пребывания в ней заявки. Вновь прибывшая заявка в зависимости от организации и назначения системы становится либо в конец очереди, либо в ее начало (стековый принцип организации очереди). При неоднородном потоке событий может вводиться приоритетное обслуживание. В этом случае заявки в очереди выстраиваются согласно приоритетам. В некоторых случаях (абсолютный приоритет) срочная заявка может прервать уже начатое обслуживание. Снятая заявка поступает в одну из очередей или теряется.

Так как исследование любой СМО начинается с рассмотрения потоков заявок, поступающих на вход СМО, на вход канала обслуживания и покидающих СМО, начнем описание моделей массового обслуживания с рассмотрения различных типов моделей потоков событий.

4.2 Модели потоков событий

. . . .

Потоком событий *называется последовательность событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени* $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ *В качестве событий могут выступать заявки, поступающие на вход СМО, поступление заявок на канал обслуживания и появление обслуженных заявок на выходе СМО.*

. . . .

Потоки событий обладают многообразными свойствами, которые позволяют выделять различные типы потоков.

. . . .

Регулярным потоком *называется поток, в котором события следуют одно за другим через одинаковые промежутки времени (детерминированная последовательность событий):*

$$\tau_i = t_i - t_{i-1} = T = \text{const}.$$

. . . .

. . . .

Рекуррентным потоком *является поток, для которого все функции распределения интервалов между заявками совпадают:* $F_i(\tau) = F(\tau)$.

. . . .

Физически рекуррентный поток представляет собой такую последовательность событий, для которой все интервалы между событиями как бы «ведут себя» одинаково, т. е. подчиняются одному и тому же закону распределения.

Если поток рекуррентный, то можно исследовать один какой-нибудь интервал. Будут получены статистические характеристики этого интервала, которые справедливы и для других интервалов. Термин *рекуррентность* означает в данном случае повторяемость (в статистическом смысле) свойств интервалов времени между заявками.

Для характеристики потоков очень часто вводят в рассмотрение вероятность появления числа событий в заданном интервале времени $\tau : P_n(\tau)$, где n — число событий, появляющихся на интервале τ.

Поток без последствия *характеризуется тем, что для двух непересекающихся интервалов времени* $\Delta t_1, \Delta t_2 > 0$, $t_2 \geqslant t_1 + \Delta t_1$ *вероятность появления числа событий* $P_{n2}(\Delta t_2)$ *на втором интервале не зависит от числа появления событий* n_1 *на первом интервале. Здесь отсутствует вероятностная зависимость последующего течения процесса от предыдущего.*

Например, поток покупателей, входящих в магазин, является потоком без последствия, а поток деталей, сходящих с конвейера, является потоком с последствием (детали выходят не чаще, чем через интервал $T_{\text{обсл}}$).

Поток стационарен*, если вероятность появления какого-то числа событий на интервале времени* τ *зависит только от длины этого интервала и не зависит от его расположения на оси времени. Для стационарного потока среднее число событий в единицу времени постоянно.*

Ординарным потоком *называется поток, для которого вероятность попадания на данный малый отрезок времени* Δt *двух и более требований пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания одного требования* $\big($*порядок малости* $\circ(\Delta t) : P_{>1}(\Delta t) = \circ(\Delta t)\big)$.

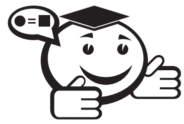
Так, поток клиентов в парикмахерскую — ординарный. Поток клиентов в бюро обмена жилплощади — неординарный, т. к. в зависимости от обмена могут одновременно приходить два, три и более клиента.

Интенсивностью *потока называется предел:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{>0}(t_0, \Delta t)}{\Delta t} = \lambda(t),$$

где $P_{>0}(t_0, \Delta t)$ — *вероятность того, что на интервале* $(t_0, t_0 + \Delta t)$ *появятся заявки.*

Для стационарного потока его интенсивность не зависит от времени и равна среднему числу событий в единицу времени: $\lambda(t) = \lambda$.



. . . .

Простейшим*, или* ***пуассоновским потоком*** *называется поток, обладающий тремя свойствами: ординарностью, отсутствием последействия и стационарностью.*

. . . .

Простейший поток занимает центральное место среди всех потоков: существует предельная теорема, согласно которой сумма большого числа независимых потоков с любым законом распределения приближается к простейшему потоку с ростом слагаемых потоков.

Пуассоновским поток называется потому, что подчиняется пуассоновскому закону распределения:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность потока; k — количество событий, появляющихся за время t.

Тогда вероятность появления одного события за малое время dt равна:

$$P_1(dt) = \lambda\, dt\, e^{-\lambda\, dt} \approx \lambda\, dt, \tag{4.1}$$

а вероятность того, что за малое время dt не появится ни одно событие, учитывая условие ординарности, равна

$$P_0(dt) = 1 - \lambda\, dt + \circ(dt) \cong 1 - \lambda\, dt. \tag{4.2}$$

Время между двумя последовательными наступлениями событий потока имеет экспоненциальную функцию распределения:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{или} \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Для показательного распределения

$$m_t = \delta_t = \frac{1}{\lambda},$$

где m_t — математическое ожидание, δ_t — среднеквадратическое отклонение интервалов времени, т. е. среднее время между наступлениями событий обратно пропорционально интенсивности потока.

Одним из примеров потока с ограниченным последействием являются *потоки Эрланга*, которые образуются из простейшего потока путем детерминированной выборки событий. Если исключить в простейшем потоке события через одно, то получится поток Эрланга второго порядка. Если в простейшем потоке сохранять каждое $(n + k)$-е событие и исключить $(k - 1)$ событий, получится поток Эрланга k-го порядка.

Функция распределения времени между событиями в потоке Эрланга k-го порядка:

$$f_k(t) = \frac{\lambda\,(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность простейшего потока событий.

Математическое ожидание и дисперсия для потока Эрланга k–го порядка:

$$m_k = \frac{k}{\lambda}, \quad D_k = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Плотность потока Эрланга k-го порядка будет обратна величине m_k: $\lambda_k = \frac{\lambda}{k}$.

Рассмотрим, как будет изменяться поток Эрланга k-го порядка при $k \to \infty$ и неизменной плотности потока. Для этого пронормируем временной интервал между событиями в потоке, разделив его на k. Для нормированного потока Эрланга получим следующие математическое ожидание и дисперсию:

$$\widetilde{m}_k = \frac{1}{\lambda}, \quad \widetilde{D} = \frac{D_k}{k^2} = \frac{1}{\lambda^2 k}.$$

Дисперсия для нормированного потока Эрланга неограниченно убывает с ростом k. Таким образом, при неограниченном увеличении k нормированный поток Эрланга приближается к регулярному потоку с постоянными интервалами времени между событиями, равными $\frac{1}{\lambda}$. Это свойство потока очень полезно на практике. Задаваясь различными k, можно получать любую степень последействия: от полного отсутствия последействия в случае простейшего потока ($k = 1$), до жесткой связи между моментами появления событий в случае регулярного потока ($k = \infty$). Очень часто реальный поток событий заменяют нормированным потоком Эрланга, подбирая k таким образом, чтобы математическое ожидание и дисперсия обоих потоков примерно совпадали.

4.3 Обзор методов решения задач массового обслуживания

Фундаментальным вероятностным понятием, используемым в теории массового обслуживания, является марковский процесс. Это процесс, дальнейшее поведение которого определяется только его состоянием в данный момент времени и не зависит от предыстории процесса. Состояние системы в общем случае характеризуется некоторым вектором. Чем меньше компонентов содержит вектор состояний, тем легче исследовать поведение процесса.

Наиболее просто обстоит дело с Марковскими СМО. В таких СМО на вход поступает простейший входной поток с интенсивностью λ и время обслуживания подчиняется показательному закону распределения с интенсивностью μ. В этом случае элементарные вероятности обслуживания одной из находящихся в системе заявок или прибытия еще одной заявки полностью определяются числом находящихся в системе заявок n (независимо от уже истекших времени обслуживания и интервала с момента поступления), и вектор состояний сводится к скаляру n.

Если в одноканальной системе одно из распределений не является показательным (например, времени обслуживания), его можно заменить распределением Эрланга с тем же средним $\bar{t}$ и близкой дисперсией δ^2. Подбор параметров производится по формулам:

$$k = \frac{\bar{t}^2}{\delta^2}; \quad \mu = \frac{\bar{t}}{\delta^2},$$

где $\bar{t}$ — средний интервал времени между заявками, μ — интенсивность рассматриваемого потока. Заметим, что k при этом должно быть целым (здесь округление происходит в ближайшую сторону).

После такой замены обслуживание представляется как последовательное прохождение k фаз, в каждой из которых его продолжительность подчиняется распределению $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Таким образом, в новой постановке мы имеем дело с марковским процессом, состояние которого характеризуется суммарным числом не пройденных фаз обслуживания, в котором поток заявок является простейшим с требованием объема k.

Для сокращенного наименования систем массового обслуживания будем использовать обозначения вида $A/B/n/m$, где A указывает распределение интервалов между событиями, B — распределение времени обслуживания, n — число каналов, m — количество мест в очереди. Показательное распределение обозначим буквой M, распределение Эрланга порядка k — E_k, постоянное время обслуживания или регулярный поток — D, распределение обслуживания общего, не конкретизируемого типа — G [9].

Если одно из распределений $A(\theta)$ или $B(\tau)$ отличается от показательного, то процесс уже не является марковским. Для предсказания его поведения необходимо ввести в вектор состояния дополнительный непрерывный параметр θ или τ — время, истекшее с момента прибытия последней заявки (начала очередного обслуживания).

Марковские процессы исследуются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, составленных для плотностей вероятностей состояний $\left\{P_n(t, dt)\right\}$. При $t \to \infty$ они обращаются в систему обыкновенных линейных уравнений для стационарных плотностей вероятностей, решение которой для простейших случаев затруднений не вызывает.

С помощью метода введения линейчатого марковского процесса могут быть решены задачи типа $M/G/1$, $E_r/G/1$.

Наиболее универсальным методом исследования систем массового обслуживания является статистическое моделирование процесса на ЭВМ. При этом в машине всегда воспроизводится марковский процесс с необходимым набором дискретных и непрерывных параметров. Усреднение результатов моделирования по времени функционирования модели позволяет получить искомые характеристики.

Благодаря возможности достаточно полного отражения реальности (например, многокаскадное обслуживание, неоднородные потоки и каналы, сложные системы приоритетов и дисциплины обслуживания и т. п.) статистическое моделирование удобно для исследования практических задач и проверки допущений, сделанных при аналитических выкладках. Недостатком моделирования является большой расход машинного времени (в особенности для оценки вероятностей редких событий) и трудность получения обобщающих рекомендаций.

4.4 Процесс обслуживания как марковский случайный процесс

Пусть система может находиться в состояниях E_n, где n — это целое положительное число. Состояние E_n означает, что в системе находится ровно n заявок. Обозначим вероятность нахождения системы в конкретном состоянии E_n в момент времени t через $P_n(t)$. Учитывая, что в любой момент времени система обязательно должна находиться в каком-то из состояний, причем в двух и более состояниях одновременно система находиться не может, для каждого момента времени t будет выполняться условие $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$.

Если переход из состояния E_n в $E_{n'}$ зависит только от этих состояний и не зависит от предыдущих E_i, то такая последовательность во времени будет марковским процессом. Таким образом, система с ожиданием в случае простейшего потока и показательного времени обслуживания представляет собой случайный процесс Маркова.

Каждой паре состояний E_n, $E_{n'}$ можно поставить в соответствие условную вероятность $P_{nn'}$ того, что система находится в состоянии n' в момент $t+1$ при условии, что в момент t она находилась в состоянии n. Тогда для вероятности $P_{n'}(t+1)$ можно записать:

$$P_{n'}(t+1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot P_{nn'}, \quad n' = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Это уравнение означает, что система может оказаться в состоянии n' путем одного из многих n несовместных переходов. Причем вероятность нахождения системы в состоянии n' при условии, что ранее система находилась в состоянии n, по формуле произведения вероятностей событий равна $P_n(t)P_{nn'}$.

Если $P_{nn'}$ равна нулю, то переход из состояния n в n' невозможен.

Соотношение (4.3) может быть записано в векторной форме:

$$P(t+1) = P(t) \cdot J, \tag{4.4}$$

где квадратная матрица J образована из элементов $P_{nn'}$, удовлетворяющих условиям: $0 \leqslant P_{nn'} \leqslant 1,\ \forall n, n'$; $\sum\limits_{n'} P_{nn'} = 1,\ \forall n$.

В Марковских СМО не только входной поток является простейшим. Поскольку время обслуживания заявок подчиняется экспоненциальному закону, то и выходной поток будет простейшим. Вспомним, что любой простейший поток обладает тремя свойствами: стационарности, ординарности и отсутствием последействия. Из условия ординарности входного и выходного потоков следует, что в каждый момент времени может прийти не более одной заявки и может покинуть систему не более одной заявки. Отсюда $P_{nn'} = 0,\ \forall\, |n - n'| > 1$.

Матрица, удовлетворяющая этим условиям, называется матрицей переходов, вероятности $P_{nn'}$ — вероятности перехода. Из (3.4) следует, что для однородной последовательности Маркова, определяемой как последовательность, для которой значения элементов матрицы J постоянны (не зависят от номеров состояний), имеем:

$$P(t+k) = P(t) \cdot J^k, \text{ в частности } P(t) = P(0) \cdot J^t,$$

т. е. марковская последовательность целиком определяется матрицей переходов J и начальными условиями $P_n(0)$.

Построим матрицу переходов для простейшего потока, поступающего на вход системы. Для простейшего потока нам известна вероятность того, что в момент времени не придет ни одна заявка (соотношение 4.2), и вероятность того, что в момент времени появится одна заявка (соотношение 4.1). Тогда матрица переходов примет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ . \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & \dots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1-\lambda\,dt & \lambda\,dt & 0 & 0 & \\ 0 & 1-\lambda\,dt & \lambda\,dt & 0 & \\ 0 & 0 & 1-\lambda\,dt & \lambda\,dt & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\,dt & \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ . \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

Построение аналитических моделей для любой СМО начинается с составления матрицы переходов, по которой строится система уравнений для вероятностей состояний системы (4.3). Затем указанная система преобразуется в систему дифференциальных уравнений, решая которую мы можем определить значения вероятностей $P_n(t)$для любого состояния системы в любой момент времени.

На основании известных вероятностей могут быть рассчитаны различные характеристики СМО, такие как среднее количество заявок в системе, среднее количество заявок в очереди, среднее число занятых каналов обслуживания, среднее время нахождения заявки в очереди и другие.

Ниже рассматриваются аналитические модели расчетов основных характеристик для различных типов СМО.

4.5 Расчет основных характеристик для различных типов СМО

4.5.1 Одноканальная СМО с ожиданием

Пусть имеется одноканальная система с простейшим потоком на входе с интенсивностью λ и экспоненциальным временем обслуживания с показателем $\mu\,(M/M/1/\infty)$. E_n — состояние системы, когда в ней находится n заявок. За момент времени dt может прийти одна заявка с вероятностью $P_1(dt) = \lambda\,dt$, ноль заявок с вероятностью $P_0(dt) = 1 - \lambda\,dt$, может быть обслужена одна заявка с вероятностью $\mu\,dt$ и не обслужена ни одна заявка с вероятностью $1 - \mu\,dt$. Матрица переходов J будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{J} = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ . \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & \dots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1-\lambda\,dt & \lambda\,dt & 0 & 0 & \\ \mu\,dt & 1-(\lambda+\mu)\,dt & \lambda\,dt & 0 & \\ 0 & \mu\,dt & 1-(\lambda+\mu)\,dt & \lambda\,dt & \dots \\ 0 & 0 & \mu\,dt & 1-(\lambda+\mu)\,dt & \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ . \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

Вероятность P_{00} определяется вероятностью отсутствия прихода заявок за время $dt\big(P_0(dt)\big)$. Вероятность $P_{n,n+1}$ определяется вероятностью прихода одной заявки $\big(P_1(dt)\big)$, а вероятность $P_{n,n-1}$ определяется вероятностью обслуживания одной заявки. Вероятность $P_{n,n}$ определяется вероятностью составного события: заявка не придет и не будет обслужена.

По данной матрице мы можем составить систему уравнений для вероятностей состояний системы:

$$
\begin{gathered}
P_0(t+1) = (1-\lambda\,dt)P_0(t) + \mu\,dt\,P_1(t),\\
P_1(t+1) = \lambda\,dt\,P_0(t) + \big(1-(\lambda+\mu)dt\big)P_1(t) + \mu\,dt\,P_2(t),\\
\ldots\\
P_n(t+1) = \lambda\,dt\,P_{n-1}(t) + \big(1-(\lambda+\mu)dt\big)P_n(t) + \mu\,dt\,P_{n+1}(t).
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

Более компактно матрицу перехода можно представить в виде графа переходов (рис. 4.2), в котором вершины означают состояния системы, а дуги — вероятности переходов.

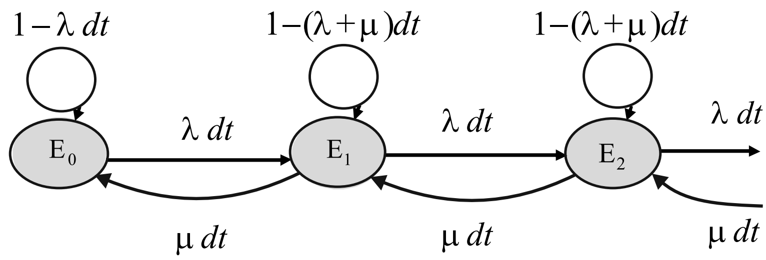


Рис. 4.2 – Граф переходов одноканальной СМО с бесконечной очередью

Из графа переходов могут быть получены дифференциальные уравнения для вероятностей состояний, которые называются уравнениями Колмогорова.

Общее правило составления уравнений Колмогорова: в левой части уравнения стоит производная вероятности i-го состояния; в правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го) состояния.

Из правила составлений и графа очевидно, что вероятности того, что система не изменит свое состояние (P_{nn}), не влияют на вероятности состояний (образуют в уравнениях пару слагаемых с противоположными знаками). Кроме того, при составлении уравнений нам нужны не вероятности, а только интенсивности переходов. В дальнейшем не будем на графе переходов указывать вероятности переходов P_{nn} и дуги будем представлять интенсивностями. На рис. 4.3 приведен граф переходов в упрощенном виде.

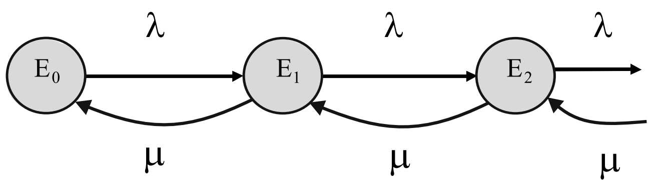


Рис. 4.3 – Упрощенный граф переходов одноканальной СМО с бесконечной очередью

Построим для приведенного графа систему уравнений Колмогорова:

$$
\begin{gathered}
\frac{P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \\
\frac{P_1(t)}{dt} = \lambda P_0 + \mu P_2 - (\lambda + \mu) P_1, \\
\ldots \\
\frac{P_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2} - (\lambda + \mu) P_n.
\end{gathered} \tag{4.6}
$$

Заметим, что эту же систему уравнений можно получить из системы (4.5) после некоторых преобразований. Процесс построения системы уравнений Колмогорова на основании графа переходов получается намного проще, чем вывод тех же уравнений из матрицы переходов. Поэтому в дальнейшем мы не будем больше рассматривать матрицы переходов, а остановимся только на построении графов.

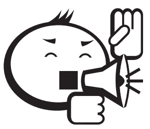
Уравнения (4.6) могут быть решены при начальных условиях:

$$P_{n0}(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad n \neq n_0$$

частотными методами с использованием преобразования Лапласса.

Чаще интересуются установившимся или стационарным режимом. Для стационарного режима, при $t \to \infty$ все средние характеристики системы перестают зависеть от времени и становятся константами (в том числе и вероятности состояний). В этом случае производные вероятностей состояний системы обращаются в ноль:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = 0.$$



Заметим, что для одноканальных СМО с неограниченной очередью стационарный режим существует только в том случае, если интенсивность входного потока строго меньше интенсивности обслуживания: $\frac{\lambda}{\mu} < 1$. Если указанное условие не выполняется, то со временем очередь растет до бесконечности, а вероятности состояний зависят от времени.

При стационарном режиме система дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных уравнений:

$$
\begin{gathered}
0 = -\lambda P_0 + \mu P_1, \\
0 = \lambda P_0 + \mu P_2 - (\lambda + \mu) P_1, \\
\ldots \\
0 = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2} - (\lambda + \mu) P_n,
\end{gathered}
$$

отсюда $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$, $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$, $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$.

Для того, чтобы рассчитать значения вероятностей, необходимо определить P_0, которое находится из условия $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$:

$$1 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}, \text{ или}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \psi,$$

$$P_n = (1 - \psi) \cdot \psi^n, \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{4.7}$$

Параметр $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$ выражает степень насыщения в системе и называется загрузкой или коэффициентом использования СМО. Для одноканальных СМО при $\psi > 1$ установившегося режима не существует, а очередь растет неограниченно.

Установившийся режим не зависит от начальных условий. Получим некоторые числовые характеристики установившегося режима, такие как среднее число заявок в системе, среднее число занятых каналов обслуживания и среднее число заявок в очереди. Эти характеристики находятся из вероятностей состояний системы как обычное среднее дискретной величины с известными вероятностями значений.

Среднее число заявок в системе для любой СМО будет определяться по формуле:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n. \tag{4.8}$$

Подставляя в формулу (4.8) уравнения вероятностей для рассматриваемой СМО (4.7), получаем:

$$\overline{n} = (1 - \psi) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \psi^n = \frac{\psi}{1 - \psi}. \tag{4.9}$$

Среднее число занятых каналов для данной СМО определяется как вероятность того, что канал занят:

$$\overline{z} = P_{n>0} = 1 - P_0 = \psi.$$

Среднее число заявок в очереди в общем случае находится как сумма произведений количества заявок в очереди на вероятности этих значений. При одном канале обслуживания, если в системе находится n заявок, то в очереди находится $(n - 1)$ заявка. С учетом полученных уравнений вероятностей (4.7) получаем:

$$\overline{\nu} = \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1) \cdot P_n = \frac{\psi^2}{1 - \psi}. \tag{4.10}$$

Заметим, что для количественных характеристик для любой СМО будет выполняться следующее соотношение:

$$\overline{n} = \overline{z} + \overline{v} \tag{4.11}$$

(заявка в системе находится либо в очереди, либо на обслуживании). Используя это соотношение, в любой СМО через вероятности достаточно определить две из трех указанных характеристик, а третью вычислить через две найденные.

Тогда среднее число заявок в очереди можно найти проще:

$$\overline{\nu} = \overline{n} - \overline{z} = \frac{\psi}{1-\psi} - \psi = \frac{\psi^2}{1-\psi}.$$

Пример 4.1

В магазин приходят покупатели в среднем каждые две минуты. Работает один продавец, который обслуживает покупателя в среднем 2,5 минуты. Время прихода и обслуживания подчиняется экспоненциальному закону.

Определить:

- *вероятность простоя продавца* $P_{\text{прост}}$*;*
- *вероятность занятости продавца* $P_{\text{зан}}$*;*
- *вероятность того, что в очереди ровно два покупателя* $P_{\text{оч-2}}$*;*
- *вероятность наличия очереди в магазине* $P_{\text{оч}}$.

Решение:

Определим сначала интенсивности входного потока и обслуживания:

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{прих}}} = 0{,}5\ \frac{\text{заявок}}{\text{мин}}, \qquad \mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = 4\ \frac{\text{заявок}}{\text{мин}}.$$

При данных характеристиках система не имеет стационарного режима $\left(\frac{\lambda}{\mu} > 1\right)$ и дальнейшие расчеты не имеют смысла.

Пусть новый продавец обслуживает покупателей в среднем 1,2 мин. Тогда $\psi = \lambda \cdot t_{\text{обсл}} = 0{,}6$ — система стационарна.

Продавец простаивает, если в магазине нет ни одного покупателя и $P_{\text{прост}} = P_0 = 1 - \psi = 0{,}4$. Продавец занят, если в магазине есть хотя бы один покупатель, тогда $P_{\text{зан}} = 1 - P_0 = \psi = 0{,}6$.

В очереди будет находиться ровно две заявки, если в магазине будет находиться три покупателя (два в очереди, один на обслуживании) и $P_{\text{оч-2}} = P_3 = P_0 \cdot \psi^3 \approx 0{,}086$.

Очередь образуется, если покупателей больше одного: $P_{\text{оч}} = P_{>1} = 1 - P_0 - P_1 = 0{,}36$.

4.5.2 Схема гибели и размножения

В общем случае для марковских систем с однотипными заявками можно построить общий граф переходов. Пример такого графа приведен на рис. 4.4.

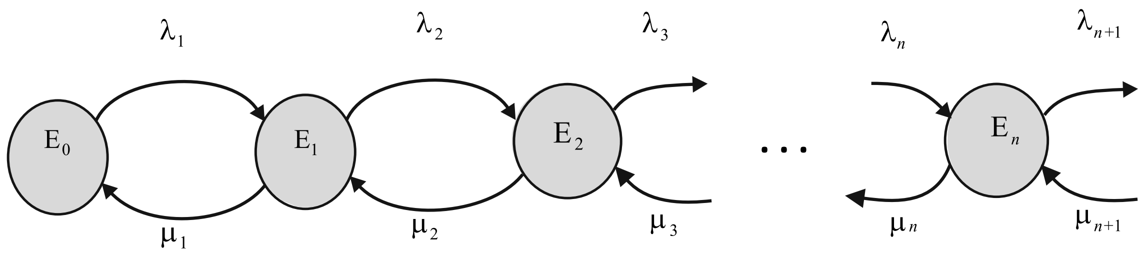


Рис. 4.4 – Граф переходов марковской СМО

Здесь каждое из средних состояний связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний. Такой граф называется схемой гибели и размножения [4]. Найдем один раз и навсегда для этой схемы вероятности состояний стационарного режима.

$$E_0\colon\ 0 = -\lambda P_0 + \mu_1 P_1 \text{ или } P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}P_0,$$

$$E_1\colon\ 0 = \lambda_1 P_0 + \mu_2 P_2 - (\lambda_2 + \mu_1)P_1, \text{ отсюда } P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}P_1$$

аналогично

$$E_n\colon\ 0 = \lambda_n P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} - (\lambda_{n+1} + \mu_n)\cdot P_n, \text{ отсюда } P_n = \frac{\lambda_n}{\mu_n}P_{n-1}.$$

Преобразуем:

$$P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}P_0; \quad P_2 = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\mu_2\mu_1}P_0;$$

$$P_n = \frac{\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_1}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1}P_0. \tag{4.12}$$

Таким образом, вероятность любого состояния системы можно записать сразу непосредственно по графу переходов следующим образом: вероятность равна произведению коэффициента на P_0. Коэффициент представляет собой отношение, в котором в числителе стоит произведение интенсивностей входящих потоков от нулевого до рассматриваемого состояния, в знаменателе — произведение интенсивностей выходящих потоков от данного состояния до нулевого.

Учитывая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, получаем P_0, как величину, обратную сумме коэффициентов:

$$P_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1\mu_2}{\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} + \ldots\right) = 1$$

$$\text{и } P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1\ldots\lambda_n}{\mu_1\ldots\mu_n}}. \tag{4.13}$$

Полученные формулы мы будем в дальнейшем использовать для расчета вероятностей состояний различных СМО.

4.5.3 Формула Литтла

Выведем еще одну важную формулу, связывающую (для стационарного режима) среднее число заявок $\overline{n}$ в системе и среднее время пребывания заявки $\overline{u}$ в системе [4]. Для любой СМО, если в системе установился стационарный режим, то среднее число заявок, прибывающих в СМО за единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Обозначим $X(t)$ — число заявок, прибывших в СМО до момента t, $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t. Обе функции случайны и меняются скачком (на единицу) в моменты прихода и ухода заявок. Примерный вид функций приведен на рис. 4.2.

Очевидно, что для любого момента t: $Z(t) = X(t) - Y(t)$ — число заявок, находящихся в СМО.

Рассмотрим большой интервал времени T и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\overline{n} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T Z(t)dt.$

Этот интеграл — площадь заштрихованной фигуры, которая состоит из прямоугольников в единицу высотой и с основанием, равным времени пребывания в системе соответствующей заявки (t_i) (рис. 4.5).

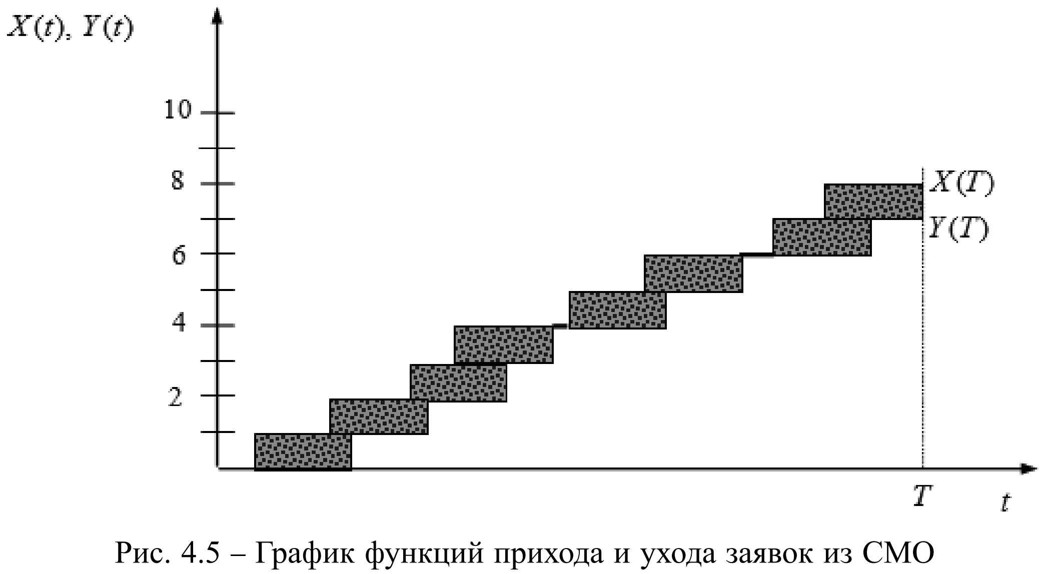


Рис. 4.5 – График функций прихода и ухода заявок из СМО

Тогда $\int\limits_0^T Z(t)dt = \sum\limits_i t_i$ и $\overline{n} = \frac{1}{T}\sum\limits_i t_i = \frac{1}{T\lambda}\sum\limits_i t_i \cdot \lambda$,

где $T\lambda$ — это *среднее число заявок, пришедших за время* T. Если разделить сумму всех времен t_i на среднее число заявок, то получим *среднее время пребывания заявки в системе* $(\overline{u})$: $\overline{u} = \frac{1}{T\lambda}\sum\limits_i t_i$, тогда $\overline{n} = \lambda\overline{u}$. Откуда получаем формулу Литтла:

$$\overline{u} = \frac{1}{\lambda}\overline{n} \qquad (4.14)$$

Для любой СМО среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.

Аналогично выводится формула, связывающая среднее число заявок в очереди и *среднее время пребывания заявки в очереди* ($\overline{\omega}$):

$$\overline{\omega} = \frac{1}{\lambda}\overline{\nu}. \qquad (4.15)$$

4.5.4 Одноканальная СМО с отказами

Рассмотрим простейшую задачу: СМО содержит один канал обслуживания; заявка, поступившая на вход системы и заставшая канал занятым, получает отказ. Граф переходов для данной СМО содержит всего две вершины (рис. 4.6), что соответствует двум возможным состояниям системы: канал свободен и канал занят:

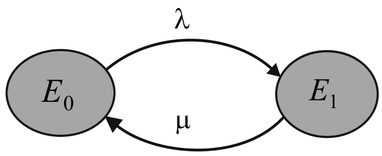


Рис. 4.6 – Граф переходов одноканальной СМО с отказами

Построим по данному графу уравнения Колмогорова:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \qquad \frac{dP_1}{dt} = -\mu P_1 + \lambda P_0.$$

Исходя из условия $P_0 + P_1 = 1$ и начальных условий $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$, получаем $P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$.

Для стационарного режима производные вероятностей обращаются в ноль. Решая систему линейных уравнений, получим:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \qquad P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Заметим, что данная СМО, как и любая СМО с ограниченной очередью, всегда имеет стационарный режим. Таким образом, даже при условии $\lambda > \mu$, мы можем пользоваться полученными уравнениями.

Определим некоторые дополнительные характеристики СМО.

Вероятность отказа: заявка получит отказ, если канал занят

$$P_{\text{отк}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Относительная пропускная способность *q равна среднему числу обслуженных заявок к общему числу поступивших заявок (показывает долю обслуженных заявок). Так как любая заявка либо должна быть обслужена, либо получает отказ, то сумма относительной пропускной способности и вероятности отказа всегда равна единице. Тогда для СМО любого типа должно выполняться:*

$$q = 1 - P_{\text{отк}}. \qquad (4.16)$$

Для одноканальной СМО с отказами получаем:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Абсолютная пропускная способность *A — число обслуженных заявок в единицу времени. Для стационарного режима среднее количество заявок, входящих в систему в единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих систему в единицу времени. Поэтому можно записать абсолютную пропускную способность как через входной поток, так и через выходной:*

$$A = \lambda q = \mu \bar{z}. \qquad (4.17)$$

Подставим в выражение значение относительной пропускной способности для рассматриваемой СМО:

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Так как в рассматриваемой системе очередь отсутствует, то *среднее число занятых каналов z* равно *среднему числу заявок в системе* — $\bar{z} = \bar{n} = P_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}.$

Среднее время, проведенное заявкой в системе $\bar{u}$, определяем по формуле Литтла (4.14):

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda}\bar{n} = \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

Пример 4.2

Имеется одна телефонная линия, по которой звонки поступают с интенсивностью в среднем 0,8 зв/мин. Среднее время телефонного разговора равно 1,5 мин. Если линия занята, то звонок получает отказ. Необходимо определить:

- *вероятность отказа $P_{\text{отк}}$;*
- *абсолютную пропускную способность A;*
- *среднее количество занятых каналов $\bar{z}$.*

Решение:

Так как СМО с отказами, то стационарный режим существует всегда.

$$\psi = \lambda \cdot t_{\text{обсл}} = 1{,}2, \quad \mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} \approx 0{,}667.$$

Заявка получает отказ, если линия занята, и $P_{\text{отк}} = P_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0{,}55$ (т. е. в среднем только 45% звонков получают обслуживание).

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - P_{\text{отк}}\right) = 0{,}36 \text{ зв/мин}.$$

$\bar{z} = \bar{n} = P_{\text{отк}} = 0{,}55$ — телефонная линия занята в среднем всего лишь 55% от общего времени.

. . . .

4.5.5 Одноканальная СМО с ограниченной очередью

Пусть длина очереди в одноканальной СМО ограничена числом m: $(M|M|1|m)$. Максимально в системе может находится $m + 1$ заявка: одна на обслуживании и m в очереди. Если все места в очереди заняты, то очередная пришедшая заявка получает отказ. Граф переходов для данного типа СМО приведен на рис. 4.7.

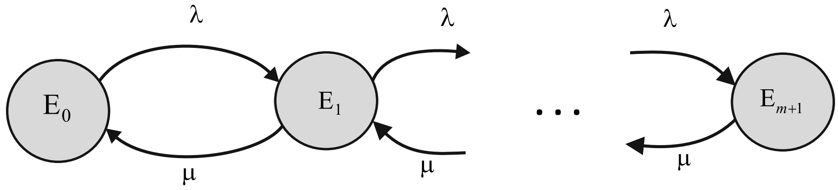


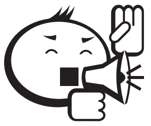
Рис. 4.7 – Граф переходов одноканальной СМО с ограниченной очередью

Построим по графу уравнения вероятностей состояний системы, используя формулы схемы гибели и размножения (4.12) и (4.13):

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot P_0 = \psi^n \cdot P_0,$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{m+1} \psi^n} = \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{m+2}}. \tag{4.18}$$

. . . .



Заметим, что данная СМО в силу ограниченности очереди всегда имеет стационарный режим. В такой системе может сложиться ситуация $\lambda = \mu$, отсюда $\psi = 1$. При таком значении коэффициента загрузки из формулы (4.18) мы получаем деление ноль на ноль, то есть неопределенность. В данной ситуации можно просто использовать формулу $P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{m+1} \psi^n}$, без дальнейших ее преобразований.

. . . .

Например, при $\psi = 1$ и $m = 3$, получаем $P_0 = \dfrac{1}{1+1+1+1+1} = 0{,}2$.

Определим некоторые числовые характеристики системы.

Среднее число занятых каналов: $\bar{z} = P_{n>0} = 1 - P_0 = \dfrac{\psi - \psi^{m+2}}{1 - \psi^{m+2}}$.

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{\nu} = \sum_{n=2}^{m+1}(n-1)\cdot P_n = \frac{\psi^2\left[1 - \psi^m(m+1-m\psi)\right]}{(1-\psi^{m+2})(1-\psi)}.$$

Среднее число заявок в системе: $\bar{n} = \bar{\nu} + \bar{z}$.

Заявка получает отказ, когда заняты все места в очереди, то есть в системе находится $(m+1)$ заявка: отсюда вероятность отказа равна:

$$P_{\text{отк}} = P_{m+1} = \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}}\cdot\psi^n.$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \psi^n\frac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}}.$$

4.5.6 Многоканальные СМО с ожиданием

Рассмотрим случай, в котором имеется s одинаковых каналов обслуживания $(M/M/S/\infty)$ с интенсивностью обслуживания μ каждого прибора, длина очереди неограниченна. При простейшем входном потоке и экспоненциальном времени обслуживания правило выбора канала не влияет на функционирование системы, т. е. на число заявок, находящихся в системе, на время ожидания.

Построим граф переходов (рис. 4.8).

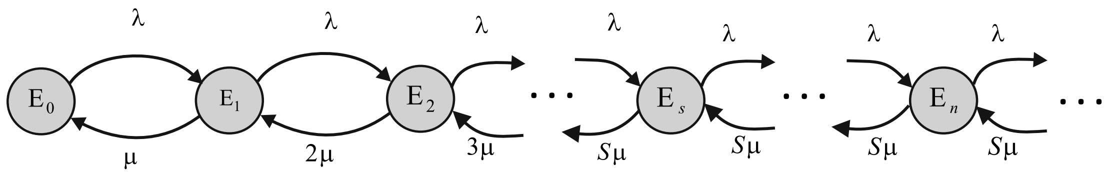


Рис. 4.8 – Граф переходов многоканальной СМО с ожиданием

Интенсивность обслуживания возрастает с ростом числа занятых каналов: если в системе находится одна заявка, то работает один канал обслуживания с интенсивностью μ. При наличии двух заявок в системе работает два канала обслуживания с интенсивностью 2μ и т. д. Как только все каналы оказываются занятыми заявками, интенсивность обслуживания в системе перестает расти и остается равной $S\mu$. Вновь пришедшие заявки становятся в очередь, ожидая освобождения какого-либо из каналов.

По графу строим уравнения вероятностей состояний, используя формулы схемы гибели и размножения (4.12) и (4.13):

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0, \quad P_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2\cdot 2}\cdot P_0,$$

$$\ldots$$

$$P_n = \frac{\psi^n}{n!}P_0, \quad \text{где } 0 \leqslant n < s,$$

$$P_s = \frac{\psi^s}{s!}P_0, \quad P_{s+1} = \frac{\psi^{s+1}}{s! \cdot s}P_0,$$

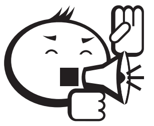
$$\ldots$$

$$P_n = \frac{\psi^n}{s! \cdot s^{n-s}} \cdot P_0, \quad \text{где } n \geqslant s.$$

Учитывая, что $\sum P_n = 1$,

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=2}^{s-1} \frac{\psi^n}{n!} + \sum\limits_{n=s}^{\infty} \frac{\psi^n}{s! \cdot s^{n-s}}} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^s}{s!(1 - \psi/s)}}.$$

Параметр ψ по-прежнему определяется как соотношение интенсивностей прихода и обслуживания заявок: $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$.



Заметим, что полученные формулы справедливы только для стационарного режима. Для того чтобы многоканальная система с бесконечной очередью имела стационарный режим, должно выполняться условие $\dfrac{\lambda}{\mu \cdot s} < 1$.

Получим основные характеристики системы. Для системы с бесконечной очередью любая заявка рано или поздно получит обслуживание (отказов не существует), поэтому:

$$P_{\text{отк}} = 0, \quad q = 1 - P_{\text{отк}} = 1.$$

Из условия, что относительная пропускная способность равна единице и формулы абсолютной пропускной способности (4.17) получим среднее число занятых каналов: $\bar{z} = \psi$.

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{\nu} = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n - s) \cdot P_n = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n - s) \frac{\psi^n}{s! s^{n-s}} \cdot P_0, \tag{4.19}$$

после преобразований: $\bar{\nu} = \dfrac{\psi^{s+1}}{(s-1)!\,(s-\psi)^2} \cdot P_0$.

Общее число заявок в системе: $\bar{n} = \bar{\nu} + \bar{z}$.

Среднее время пребывания в системе по формуле Литтла:

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\psi^s}{(s-1)!\,(s-\psi)^2}P_0 + 1\right].$$

4.5.7 Многоканальные СМО с отказами

Имеется s обслуживающих каналов, каждый из которых доступен, когда он свободен, для каждой из поступающих в систему заявок. Если при поступлении очередной заявки все каналы заняты, то заявка получает отказ и теряется ($M/M/S/0$). Граф переходов системы приведен на рис. 4.9.

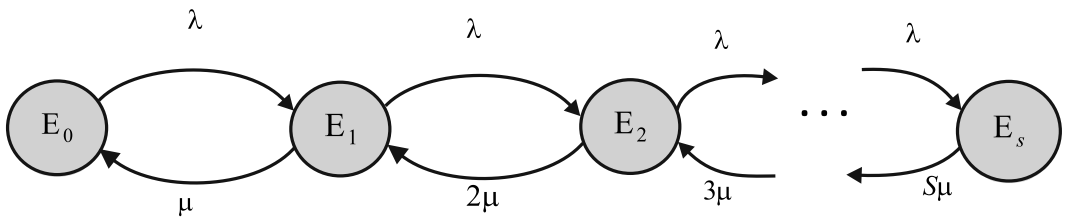


Рис. 4.9 – Граф переходов многоканальной СМО с отказами

Уравнения вероятностей состояний здесь такие же, как и для любой многоканальной СМО, только для условия $0 \leqslant n \leqslant s$:

$$P_n = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0, \quad P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{\psi^n}{n!}}.$$

Заявка получает отказ в том случае, если все каналы заняты, тогда вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P_s = \frac{\frac{\psi^s}{s!}}{\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{\psi^n}{n!}}.$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\psi^s}{s!} \cdot P_0.$$

Очередь в системе отсутствует, поэтому среднее число заявок в системе равно среднему числу занятых каналов. Учитывая, что $A = \lambda q = \mu \bar{z}$, среднее число занятых каналов равно:

$$\bar{z} = \bar{n} = \psi q = \psi \left(1 - \frac{\psi^s}{s!} \cdot P_0\right).$$

Среднее время, проводимое заявкой в системе:

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda}\bar{n} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{\psi^n}{s!} \cdot P_0\right).$$

Для многоканальной СМО с ограниченным числом мест m ($M/M/s/m$) максимальное количество заявок равно $m + s$. Уравнения вероятностей будут аналогичны многоканальной СМО с ожиданием. Изменится только выражение для вероятности нулевого состояния системы:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s-1} \frac{\psi^n}{n!} + \sum\limits_{n=s}^{s+m} \frac{\psi^n}{s! s^{n-s}}}.$$

Здесь заявка получит отказ только в том случае, когда в системе заняты все каналы обслуживания и все места в очереди ($s + m$ заявок). Тогда вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P_{s+m} = \frac{\psi^{s+m}}{s^m \cdot s!} \cdot P_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\psi^{s+m}}{s^m \cdot s!} \cdot P_0\right). \tag{4.20}$$

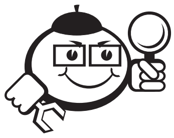
Среднее число занятых каналов обслуживания можно найти из формул (4.17) и (4.20):

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \psi \left(1 - \frac{\psi^{s+m}}{s^m \cdot s!} \cdot P_0\right).$$

Формула для среднего числа заявок в очереди аналогична соответствующей формуле для многоканальной СМО с ожиданием (4.18), только верхняя граница суммы теперь ограничена количеством каналов и мест в очереди:

$$\bar{\nu} = \sum_{n=s+1}^{s+m} (n - s) \cdot P_n.$$

Среднее число заявок в системе по-прежнему можно найти по формуле (4.11).



Пример 4.3

Рассмотрим пример 4.2 с тремя телефонными линиями и найдем те же характеристики для новой СМО. Теперь звонок получает отказ, только если заняты все три линии одновременно:

$$P_{\text{отк}} = P_3 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot \frac{1}{1 + \psi + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3!}} = 0{,}09.$$

Теперь только 9% заявок получают отказ, а 91% звонков достигают цели.

$$A = \lambda q = \lambda (1 - P_{\text{отк}}) = 0{,}728 \text{ зв/мин};$$

$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = 1{,}09$ — т. е. несмотря на то, что часть заявок все еще получают отказ, в среднем 2 линии простаивают. Такие, на первый взгляд, противоречивые данные объясняются тем, что время прихода и время обслуживания заявок являются случайными величинами и полученные данные описывают только средние характеристики системы.

4.5.8 Многоканальные СМО со взаимопомощью

Очень часто при наличии нескольких каналов обслуживания при поступлении заявки все каналы приступают к ее обслуживанию, если они свободны. При этом интенсивность обслуживания повышается в s раз: $\mu^* = s\mu$, где s — число каналов. После обслуживания заявки все s каналов освобождаются одновременно. Если поступает заявка при условии, что в системе уже находится одна заявка, то часть приборов обслуживает старую заявку, а остальные приступают к обслуживанию новой заявки.

Например: в системе ПВО при появлении вражеской цели-заявки все приборы слежения и уничтожения цели работают, как правило, по одной цели, увеличивая интенсивность обслуживания (уничтожения). С появлением второй цели-заявки часть приборов переключается на эту цель и т. д.

Для марковских систем не важно, как распределены каналы между заявками при условии участия всех приборов в обслуживании.

При поступлении заявки в систему, в которой каждый канал обслуживает отдельную заявку, она становится в очередь. Если канал освободился от обслуживания и в очереди нет заявок, он подключается к обслуживанию других заявок. Таким образом, при наличии в системе хотя бы одной заявки, все каналы обслуживания всегда заняты. Граф переходов показан на рис. 4.10.

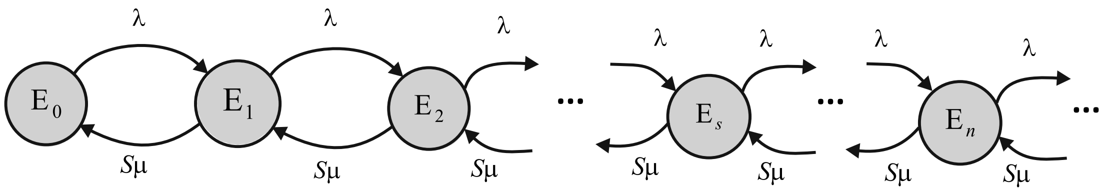


Рис. 4.10 – Граф переходов многоканальной СМО со взаимопомощью

Граф аналогичен графу одноканальной СМО с $\mu^* = s\mu$. Соответственно, $\psi^* = \dfrac{\lambda}{s\mu}$. Для стационарного режима должно выполняться условие $\dfrac{\lambda}{s\mu} < 1$. Тогда можно использовать все формулы для одноканальной СМО с ожиданием.

Уравнения вероятностей состояний:

$$P_n = (\psi^*)^n \cdot (1 - \psi^*), \quad P_0 = 1 - \psi^*.$$

Среднее количество заявок в системе: $\overline{n} = \dfrac{\psi^*}{1 - \psi^*}$.

Среднее количество занятых каналов может быть найдено через абсолютную пропускную способность по формуле (4.17). Учитывая, что для данной СМО относительная пропускная способность равна единице, получим: $\overline{z} = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu} = s \cdot \psi^*$.

Тогда среднее количество заявок в очереди можно получить по формуле (4.11).

Среднее время нахождения заявки в системе:

$$\overline{u} = \frac{1}{\lambda}\overline{n} = \frac{1}{\mu^*} \cdot \frac{1}{1 - \mu^*}.$$

Рассмотрим вариант СМО со взаимопомощью с отказами (рис. 4.11): при поступлении заявки в систему, где все каналы заняты, она получит отказ.

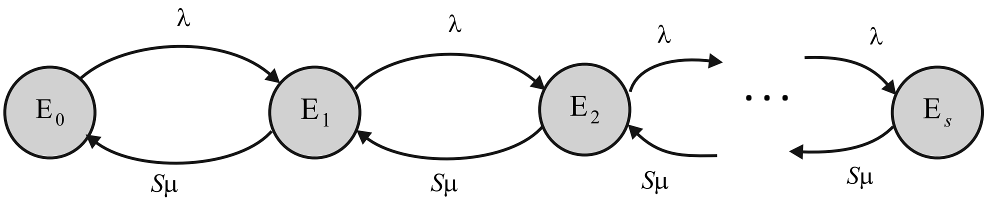


Рис. 4.11 – Граф переходов СМО со взаимопомощью с отказами

Данный граф равносилен одноканальной СМО с $\mu^* = s\mu$ и ограниченной очередью, с количеством мест, равным $(s - 1)$. Соответственно, уравнения вероятностей состояний:

$$P_n = (\psi^*)^n \cdot P_0, \quad P_0 = \frac{1-\psi^*}{1-(\psi^*)^{s+1}}.$$

Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = P_s = \dfrac{(\psi^*)^s \cdot (1-\psi^*)}{1-(\psi^*)^{s+1}}.$

Относительная пропускная способность:

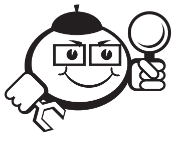
$$q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{1-(\psi^*)^s}{1-(\psi^*)^{s+1}}.$$

Среднее число заявок в системе:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{s} nP_n = \frac{1-\psi^*}{1-(\psi^*)^{s+1}} \sum_{n=0}^{s} n(\psi^*)^n = \psi^* \frac{1-(\psi^*)^s\left[s(1-\psi^*)+1\right]}{\left(1-(\psi^*)^{s+1}\right)(1-\psi^*)}.$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{z} = s \cdot (1 - P_0) = s \cdot \frac{\psi^* \cdot \left(1-(\psi^*)^s\right)}{1-(\psi^*)^{s+1}}.$$



Пример 4.4

На автомоечной станции трое рабочих обслуживают машины по следующему режиму: если все трое рабочих свободны, то очередную прибывшую машину они начинают обслуживать вместе. По прибытию очередной машины один из рабочих переключается на новый объект. Если каждый рабочий обслуживает отдельную машину, то очередной прибывший автомобиль получает отказ. В среднем машины подъезжают каждые 8 минут, один рабочий моет одну машину в среднем 20 минут. Определить: средний заработок рабочего в день (8 часов), если стоимость обслуживания одной машины равна 100 рублей, а на зарплату идет 10%.

Решение:

Данная СМО — система с взаимопомощью с отказами.

Основные характеристики СМО:

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{прих}}} = 0{,}125 \text{ маш/мин}, \quad \mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = 0{,}05 \text{ маш/мин}, \quad \psi^* = \frac{\lambda}{3\mu} \approx 0{,}83,$$

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - P_{\text{отк}}\right) = \lambda \frac{\left(\psi^*\right)^3\left(1 - \psi^*\right)}{1 - \left(\psi^*\right)^4} \approx 0{,}102 \text{ маш/мин} \approx 6 \text{ маш/час}.$$

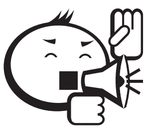
За 8 часов через станцию проходит в среднем $6 \cdot 8 = 48$ машин, на одного рабочего приходится 16 машин, следовательно, его средний заработок составляет $16 \cdot 100 \cdot 0{,}1 = 160$ рублей.

. . . .

4.5.9 Замкнутые СМО

Рассмотрим случай, когда количество заявок, обслуживаемых системой, ограничено. Например, процесс восстановления m единиц оборудования s ремонтными бригадами. Каждая единица оборудования работает в среднем $\bar{t}_{\text{раб}}$, после чего выходит из строя. Тогда интенсивность выхода из строя единицы оборудования $\lambda = 1/\bar{t}_{\text{раб}}$ (мы считаем, что время безотказной работы оборудования распределено по показательному закону). После ремонта единица оборудования вновь поступает на вход системы с интенсивностью λ (может снова выйти из строя).

. . . .



Заметим, что для данной СМО λ означает не интенсивность входного потока, а интенсивность прихода одной заявки.

. . . .

Если в некоторый момент времени ремонтируются или ожидают ремонта n единиц оборудования, а работают $m - n$, то интенсивность входного потока будет равна $(m - n)\lambda$.

Построим граф переходов для замкнутой СМО с одним каналом обслуживания и m заявками, циркулирующими в системе (рис. 4.12).

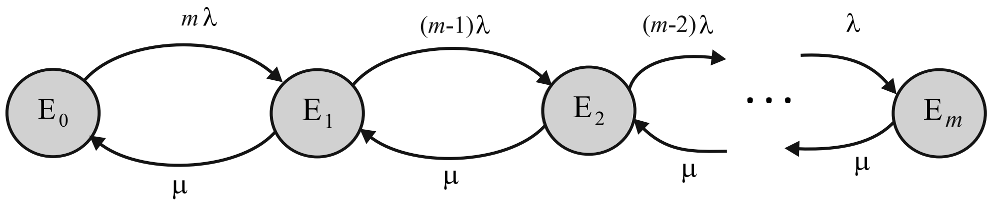


Рис. 4.12 – Граф переходов замкнутой одноканальной СМО

Используя схему гибели и размножений, построим уравнения вероятностей состояний:

$$P_1 = \frac{m\lambda}{\mu} P_0,$$

$$P_2 = \frac{m(m-1)\lambda^2}{\mu^2}P_0,$$

$$P_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\lambda^n}{\mu^n}P_0,$$

$$\text{или } P_n = \frac{m!}{(m-n)!}\psi^n P_0,$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{m}\frac{m!}{(m-n)!}\psi^n}.$$

Абсолютная пропускная способность A для данной СМО — это среднее количество неисправностей, устраняемых каналом обслуживания в единицу времени, и

$$A = P_{\text{зан}} \cdot \mu,$$

где $P_{\text{зан}}$ — вероятность занятости канала, или $\bar{z}$

$$\bar{z} = P_{\text{зан}} = 1 - P_0; \quad P_{\text{своб}} = P_0;$$

$$A = (1 - P_0)\mu.$$

Среднее число неисправных станков: $\bar{n} = \sum\limits_{n=0}^{m} n \cdot P_n$.

Попробуем найти более простой способ вычисления $\bar{n}$. В среднем $(m-\bar{n})$ заявок находится в рабочем состоянии, интенсивность потока неисправностей $(m-\bar{n})\lambda$. Все эти неисправности устраняются каналом обслуживания с интенсивностью $(1-P_0)\mu$. Тогда:

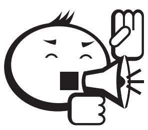
$$(m-\bar{n})\lambda = (1-P_0)\mu;$$

$$\bar{n} = m - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) = m - \frac{1-P_0}{\psi}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$\bar{\nu} = \bar{n} - \bar{z} = m - \frac{1-P_0}{\psi} - (1-P_0),$$

$$\bar{\nu} = m - (1-P_0)\left(1 + \frac{1}{\psi}\right).$$



Заметим, что для замкнутых СМО меняется формула Литтла. Теперь интенсивность входного потока не является постоянной и зависит от того, сколько заявок находится в системе. Средняя интенсивность входного потока равна $(m-\bar{n})\lambda$, тогда среднее время нахождения заявки в системе будет равно

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{(m-\bar{n})\lambda},$$

среднее время нахождения заявки в очереди

$$\overline{w} = \frac{\overline{v}}{(m - \overline{n})\lambda}.$$

. . . .

В замкнутых системах количество заявок всегда ограничено, и независимо от интенсивности канала обслуживания существует установившийся режим. Когда коэффициент занятости канала $k = \dfrac{\overline{n}}{m}$ близок к единице, возникает явление «скученности». В этом случае основная масса заявок сосредоточивается в накопителе и канале обслуживания СМО, и малая доля заявок находится вне системы.

Рассмотрим вариант замкнутой СМО для s каналов обслуживания (рис. 4.13).

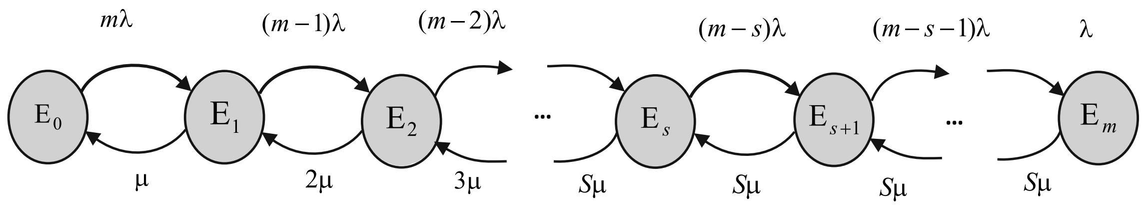


Рис. 4.13 – Граф переходов замкнутой многоканальной СМО

Уравнения вероятностей состояний:

$$P_1 = m\psi P_0,$$

$$P_2 = \frac{m(m-1)}{2!}\psi P_0,$$

$$\dots$$

$$P_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}\psi^n \cdot P_0, \text{ для } 0 < n < s$$

$$\text{или } P_n = C_m^n \psi^n P_0, \text{ для } 0 < n < s,$$

$$P_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{s!s^{n-s}}\psi^n P_0$$

$$\text{или } P_n = \frac{m!}{(m-n)!s!s^{n-s}}\psi^n P_0, \; s \leqslant n < m,$$

$$\text{откуда } P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} C_m^n \psi^n + \sum_{n=s}^{m} \frac{m!}{(m-n)!s!s^{n-s}}\psi^n\right]^{-1}.$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{z} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + S(P_s + P_{s+1} + \dots + P_m) =$$
$$= P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + S(1 - P_0 - P_1 - \dots - P_{s-1}).$$

Среднее число заявок, обслуживаемых каналами в единицу времени: $A = \overline{z} \cdot \mu$.

Среднее число заявок в системе:

$$(m - \bar{n})\lambda = \bar{z}\mu, \quad \bar{n} = m - \frac{\bar{z}}{\psi}.$$

Среднее число заявок в очереди: $\bar{\nu} = \bar{n} - \bar{z}$.

Пример 4.5

Один рабочий обслуживает три станка. Станок останавливается в среднем 2 раза в час, наладка станка занимает около 10 минут. Определить:

- *вероятность того, что рабочий занят* $P_{\text{зан}}$*;*
- *коэффициент занятости системы* k*.*

Решение:

Определим основные характеристики СМО (СМО является замкнутой):

$$m = 3,\ \lambda = 2,\ \mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = 6\ \frac{\text{стан}}{\text{час}},\ \psi = \frac{1}{3},$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^3}} \approx 0{,}346,$$

$$P_{\text{зан}} = 1 - P_0 = 0{,}654,$$

$$\bar{n} = 3 - \frac{0{,}654}{\frac{1}{3}} = 1{,}04,$$

$k = \dfrac{\bar{n}}{m} = 0{,}347$ — около 35% станков простаивают из-за поломок.

4.5.10 СМО с ограниченным временем ожидания

Рассмотрим вариант многоканальной СМО с ограниченным временем ожидания. Заявки, поступающие на вход системы и заставшие все каналы обслуживания занятыми, встают в очередь. По количеству мест очередь не имеет ограничений. Но заявка, простоявшая некоторое время в очереди и не получившая обслуживание, покидает очередь с интенсивностью ухода $\eta = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$ (например, покупателю надоело стоять в очереди в магазине и он уходит; позвонив по телефону и услышав «занято», человек какое-то время ждет, а затем бросает трубку и т. д.). Будем считать, что время ожидания распределено экспоненциально со средним $\bar{t}_{\text{ож}}$.

Граф переходов для данной системы приведен на рис. 4.14.

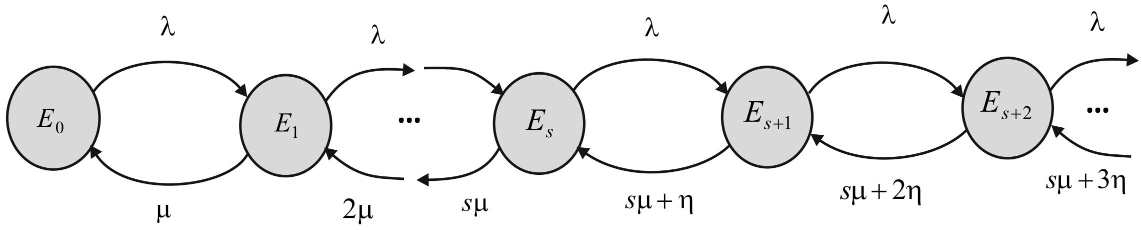


Рис. 4.14 – Граф переходов многоканальной СМО
с ограниченным временем ожидания

Уравнения вероятностей состояний:

$$P_n = \frac{\psi^n}{n!}P_0, \quad 0 \leqslant n < s,$$
$$P_n = \frac{\psi^s}{s!} \cdot \frac{\lambda^{n-s}}{(s\mu + \eta)(s\mu + 2\eta)\ldots\big(s\mu + (n-s)\eta\big)} \cdot P_0, \quad s \leqslant n,$$
$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^{n-s}}{(s\mu + \eta)\ldots\big(s\mu + (n-s)\eta\big)}\right]^{-1}.$$

Для данной СМО P_0 вычисляется приближенно (ряд не является геометрической прогрессией). Здесь стационарный режим существует всегда: ряд $(P_n,\, s \leqslant n)$ сходится. Вероятность отказа для данной системы не имеет смысла.

Среднее количество заявок в очереди: $\bar{\nu} = \sum\limits_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \cdot P_n$.

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda - \eta \cdot \bar{\nu}$, где $\eta \cdot \bar{\nu}$ — заявки, ушедшие из очереди в единицу времени.

Тогда относительная пропускная способность: $q = \dfrac{A}{\lambda} = 1 - \dfrac{\eta}{\lambda} \cdot \bar{\nu}$.

Среднее число занятых каналов можно определить двумя способами: через абсолютную пропускную способность

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \psi - \frac{\eta}{\mu}\bar{\nu}$$

или через понятие среднего

$$\bar{z} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \ldots + s\big(1 - P_0 - P_1 - \ldots - P_{s-1}\big).$$

Тогда среднее количество заявок в очереди можно найти по формуле:

$$\bar{\nu} = \frac{\psi - \bar{z}}{\eta} \cdot \mu.$$

4.5.11 Сети СМО

При исследовании различных объектов управления часто можно встретиться с прохождением заявок последовательно через несколько систем обслуживания. Например, технологический процесс обработки деталей содержит 2 стадии, на каждой из которых производится обработка деталей на соответствующей группе оборудования (рис. 4.15). После второй СМО производится технический контроль, и заявки либо проходят на дальнейшую обработку (с вероятностью θ), либо возвращаются на повторное выполнение операций (отбраковываются с вероятностью $1 - \theta$).

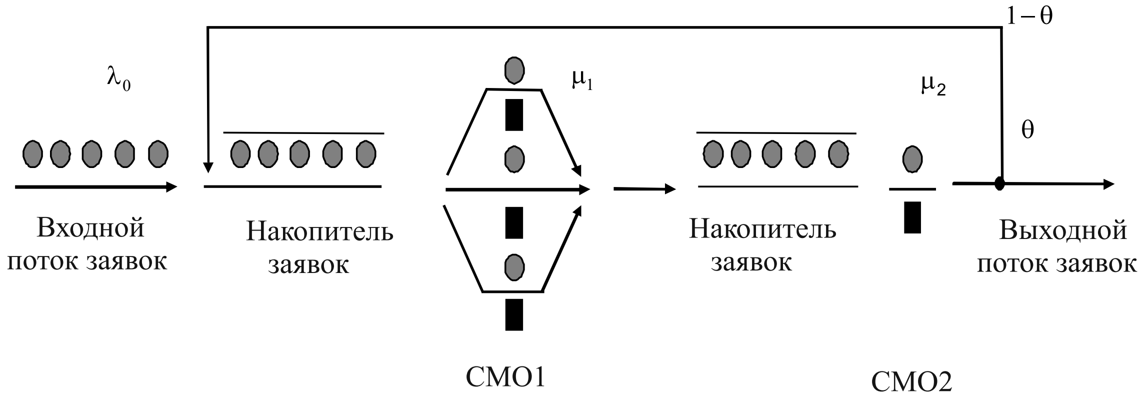


Рис. 4.15 – Пример сети СМО

В этом случае СМО образуют сеть, которая характеризуется связями между отдельными СМО и свойствами самих систем. Сеть СМО удобно представлять в виде графа передач (рис. 4.16), где вершины графа соответствуют СМО, дуги указывают возможности перехода заявки из одной СМО в другую, а числа в дугах — вероятности перехода. Источник заявок на графе используется для обозначения среды, находящейся вне сети: все заявки поступают на вход из источника и уходят из сети туда же.

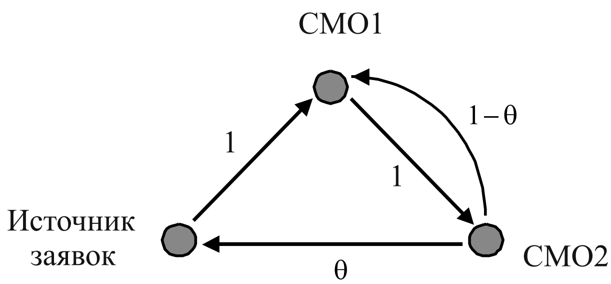


Рис. 4.16 – Граф передач

Рассмотрим сеть систем массового обслуживания, которая включает M СМО и один источник заявок. Заявки, выходящие из i-й системы $(i = 1, 2, \ldots, M)$, с постоянной вероятностью θ_{ij} поступают в систему j или покидают сеть $(j = 0)$. Из источника в j-ю систему заявки поступают с вероятностью θ_{0j}. Матрицу вероятностей поступления требований из одной системы в другую называют матрицей передач:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & \theta_{01} & \theta_{02} & \ldots & \theta_{0m} \\ \theta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{m0} & \theta_{m1} & \theta_{m2} & \ldots & \theta_{mm} \end{Vmatrix},$$

где $\theta_{00} = 0$ — циркулирование потока заявок в источнике,

$$0 \leqslant \theta_{ij} \leqslant 1, \ \forall_{i,j}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \theta_{ij} = 1.$$

Для графа передач, представленного на рис. 4.4, матрица передач будет следующей:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \theta & 1-\theta & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для определения характеристик сети СМО необходимо определить интенсивности потоков заявок в каждой системе, т. е. среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени в установившемся режиме λ_i. Среднее число заявок, покидающих систему, равно среднему числу поступающих заявок, и, следовательно,

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \theta_{ij}.$$

В матричной форме это выражение имеет вид:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{T}.$$

Интенсивности потоков заявок в СМО зависят от λ_0, следовательно, можно определить:

$$\lambda_i = \alpha_i \lambda_0, \ i = 1, \ 2, \ldots, m,$$

где λ_0 — интенсивность источника заявок (интенсивность потока, поступающего на вход сети).

Допустим, сеть замкнута, и в ней циркулирует конечное число заявок.

Тогда

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1m} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2m} \\ . & . & . & . \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & \ldots & \theta_{mm} \end{Vmatrix}.$$

Здесь интенсивности потоков определяются общим числом требований в сети. Выбрав некоторую СМО i_0 за базовую, можно определить $\lambda_i = \alpha_i^{(i_0)} \lambda_{i0}$.

Важной характеристикой сети СМО служит среднее время пребывания в ней заявки. Требования, поступающие из источника, α_j раз проходят через систему с номером j, прежде чем вернуться в источник. Следовательно, среднее время нахождения заявки в сети будет определяться по формуле

$$\overline{u} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \overline{u}_j,$$

где $\overline{u}_j$ — среднее время пребывания заявки в j-й СМО.

Аналогично рассчитывается и среднее время нахождения заявки в очередях сети:

$$\overline{w} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \overline{w}_j.$$

Количественные сетевые характеристики определяются путем обычного сложения. Так, среднее количество заявок в сети

$$\overline{n} = \sum_{j=1}^{M} \overline{n}_j,$$

среднее количество заявок в очередях сети

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{M} \overline{v}_j.$$

Сложность расчета сетей СМО заключается в том, что простейший поток заявок, поступающий в систему, на ее выходе в общем случае будет обладать последействием. А в этом случае нельзя применять рассмотренный выше аппарат анализа марковских СМО. Однако если на всех приборах сети длительность обслуживания распределена по показательному закону, то выходящие из СМО потоки заявок будут пуассоновскими. Такие сети называются показательными.

Для показательных сетей существует установившийся режим, если для каждой i-й СМО загрузка $\dfrac{\lambda_i}{s_i \cdot \mu_i} < 1$, и этот режим представляет собой суперпозицию установившихся режимов (одновременность) составляющих систем, рассматриваемых как взаимно независимые и нагруженные источниками с пуассоновскими потоками с интенсивностями λ_i. Таким образом, определив λ_i для каждой системы, можно рассчитывать характеристики каждой отдельной СМО по полученным ранее формулам (подразделы 3.5.1–3.5.10).

Состояния сети $E_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ можно задать вектором, каждая составляющая которого представляет собой число требований в соответствующей СМО: $n_{(t)} = \left\{ n_1^{(t)}, n_2^{(t)}, \ldots, n_m^{(t)} \right\}$.

Вероятность этих состояний сети в установившемся режиме обозначим $P_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$. Для разомкнутых показательных сетей

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_m} = P_{n_1}^{(1)} \cdot P_{n_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot P_{n_m}^{(m)} = \prod_{i=1}^{m} P_{n_i}^{(i)}$$

система нагружена пуассоновским источником с интенсивностью λ_i.

Пример 4.6

Рассмотрим описанный в этом разделе процесс обработки деталей. Пусть вероятность отбраковки равна 0,2. На первой стадии обработки работают 3 человека, каждый с интенсивностью 5 заявок/мин, на второй стадии занят 1 человек, который обрабатывает 15 деталей в минуту. Интенсивность прихода деталей в цех равен 5 заявок/мин. Определить среднее время обработки деталей.

Решение:

Рассчитаем интенсивности входных потоков для первой и второй СМО.

Матрица передач: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \end{vmatrix}$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} \lambda_0 = 0{,}8\lambda_2, \\ \lambda_1 = \lambda_0 + 0{,}2\lambda_2, \\ \lambda_2 = \lambda. \end{cases}$

Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{0{,}8}\lambda_0 = 6{,}25$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$; $\psi_1 = 1{,}24$; $\psi_2 = 0{,}413$.

Сеть стационарна, т. к. $\dfrac{\psi_1}{3} < 1$ и $\dfrac{\psi_2}{1} < 1$.

При расчете характеристик учитываем, что первая СМО — многоканальная с ожиданием (очередь неограниченна), а вторая СМО — одноканальная с ожиданием. Формулы для расчетов берем соответственно каждой СМО.

$$P_{01} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s-1}\dfrac{\psi_2^n}{n!} + \dfrac{\psi_2^s}{s_2!\left(1 - \dfrac{\psi_2}{s}\right)}} = \frac{1}{1 + 1{,}24 + \dfrac{1{,}24^2}{2} + \dfrac{1{,}24^3}{3!\left(1 - \dfrac{1{,}24}{3}\right)}} = 0{,}282;$$

$$P_{02} = 1 - \psi_2 = 0{,}587;$$

$$\overline{n}_1 = \overline{\nu}_1 + z_1 = \frac{\psi_2^{s+1}}{(s_2 - 1)!(s_2 - \psi_2)^2} \cdot P_0 + \psi_2 = \frac{1{,}24^4}{2!(3 - 1{,}24)^2} \cdot 0{,}282 + 1{,}24 = 1{,}35;$$

$$\overline{n}_2 = \frac{\psi_1}{1 - \psi_1} = 0{,}7;$$

$$\overline{u}_1 = \frac{\overline{n}_1}{\lambda_1} = 0{,}216; \quad \overline{u}_2 = \frac{\overline{n}_2}{\lambda_2} = 0{,}1127;$$

$$\overline{n} = \overline{n}_1 + \overline{n}_2 = 1{,}35 + 0{,}7 = 2{,}05;$$

$$\overline{u} = \alpha_1 \cdot \overline{u}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{u}_2 = 1{,}25\,(0{,}216 + 0{,}1127) = 0{,}41 \text{ мин.}$$

. . . .

4.6 Исследование немарковских СМО

Не все СМО поддаются аналитическим расчетам. Это справедливо для большинства немарковских систем. Кроме того, даже для некоторых типов марковских СМО расчеты могут быть очень громоздкими и сложными. В этих случаях для получения основных характеристик СМО можно использовать имитационное моделирование систем, например с использованием языка моделирования GPSS.

Язык позволяет очень легко строить модели, получать требуемые результаты и проводить их анализ. Модель может быть легко изменена, что позволяет быстро подбирать для СМО наилучшие характеристики и структуру. Описание языка GPSS приведено в первой части учебного пособия курса.

Контрольные вопросы по главе 4

1. Что такое простейший поток событий?
2. Какие условия должны выполняться, чтобы СМО была марковской?
3. Как строится матрица переходов? Граф переходов?
4. При каких условиях СМО нестационарна?
5. Для каких СМО можно пользоваться схемой гибели и размножения?
6. Что такое абсолютная и относительная пропускная способность?
7. В каком случае вероятность отказа равна нулю (для каких СМО)?
8. Как определяется интенсивность входного потока заявок для замкнутых СМО?

Глава 5

ТЕОРИЯ ИГР

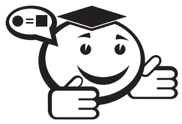
5.1 Определение и классификация игр

Теория игр находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких, как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство и т. д. Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т. е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. При этом каждая сторона вынуждена принимать решения в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект (игрок) располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он может находиться, о множестве решений (стратегий), которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Неопределенность, как правило, является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы [5].

Основные идеи и термины теории игр заимствованы из классических (салонных) игр, таких как карты, домино, шахматы и т. д. Классическая салонная игра начинается из начальной позиции и состоит из последовательности шагов игры, а каждый шаг включает последовательность ходов (выборов) игроков, причем игрок делает выбор из множества альтернатив. Если каждый игрок в каждый момент времени знает все предыдущие ходы (выборы) игроков, то такая игра называется игрой с полной информацией. В играх с неполной информацией игрок не в состоянии определить, какой ход сделает противник, либо принимает решение, не зная, в каком состоянии находится игра.

В реальной игре каждый игрок, в зависимости от опыта и квалификации интуитивно стремится придерживаться такой стратегии, которая обеспечивает ему максимально возможный выигрыш (минимальный проигрыш).

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.



__Игрой__ называется математическая модель конфликтной ситуации [6]:

$$\Gamma = \langle U_i, J_i, \ i \in N \rangle,$$

где U_i — множество стратегий i-го игрока; J_i — функция выигрыша i-го игрока; N — множество игроков.

Игровой смысл модели заключается в том, что функция выигрыша i-го игрока зависит не только от стратегии U_i этого игрока, но от стратегий всех остальных игроков: $J_i = J_i(U_1, \ldots, U_i, \ldots, U_n)$.

Игры, как и все задачи исследования операций, бывают статическими и динамическими. Мы будем рассматривать только статические игры (U_i, J_i не зависят от времени). Класс статических игр по различным признакам подразделяется на подклассы.

В зависимости от *количества игроков* все игры делятся на *игры двух лиц* и *игры многих лиц*. Игры двух лиц разделяются на антагонистические (игры со строгим соперничеством) и неантагонистические.

Игры двух лиц называют *антагонистическими*, если игроки преследуют противоположные цели. Здесь всегда выполняется условие $J_2 = -J_1$ (все, что выигрывает один игрок, проигрывает другой, и наоборот). Антагонистическую игру можно задать тройкой $\Gamma = \langle U_1, U_2, J \rangle$, где J — функция выигрыша первого игрока. В такой игре сумма выигрышей игроков всегда равна нулю. Антагонистические игры иногда называют играми с нулевой суммой либо играми двух лиц со строгим соперничеством.

В *неантагонистических* играх двух лиц интересы игроков не противоположны: оба игрока могут быть в проигрыше, в выигрыше, один игрок может проигрывать или выигрывать больше другого. Здесь необходимо задавать функции выигрыша для обоих игроков, и игра задается четверкой $\Gamma = \langle U_1, U_2, J_1, J_2 \rangle$.

Игры многих лиц подразделяются на бескоалиционные и коалиционные. В *бескоалиционных* играх целью каждого игрока является максимизация индивидуального выигрыша (минимизация проигрыша). *Коалиционные* игры — это игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрыша коллектива (коалиции). В свою очередь, бескоалиционные игры подразделяются на кооперативные и некооперативные. В *некооперативных* играх каждый игрок действует сам по себе, не вступая ни в какие соглашения с другими игроками. В *кооперативных* играх игроки могут объединяться в группы — коалиции — с целью максимизации суммарного выигрыша, который впоследствии делится между членами коалиции по соглашению.

В зависимости от *используемых стратегий* происходит деление на *конечные* и *бесконечные* игры. Если множества стратегий всех игроков конечны, то игра —

конечная. Если множество стратегий хотя бы одного игрока бесконечно, то игра называется бесконечной.

Вид функции выигрышей определяет *игры с непрерывными функциями выигрышей* и *игры с дискретными функциями выигрышей*. Для класса игр с непрерывными функциями выигрышей можно рассматривать в зависимости от вида функции выпуклые, вогнутые, выпукло-вогнутые игры.

Конечной целью исследования любой игры является нахождение оптимальных стратегий игроков и их выигрышей. *Множество оптимальных стратегий игроков и вектора выигрышей называется оптимальным решением игры*.

Оптимальность обычно понимают в смысле максимизации дохода, минимизации затрат, наискорейшего достижения цели и т. д. Но в конфликтной ситуации участник не может односторонне максимизировать свой выигрыш, т. к. он зависит и от поведения других сторон. Кроме того, оптимальные стратегии необходимо найти для *всех* игроков, с точки зрения игры все участвующие стороны равноправны. Поэтому понятие оптимальности здесь очень тонко, в связи с чем и возникают следующие три основные проблемы:

1) необходимость выбора принципа оптимальности перед началом игры. То есть необходимо ответить на вопрос: «В чем состоит оптимальность поведения?»;
2) необходимость выяснения вопроса, реализуем ли выбранный принцип оптимальности. Существуют ли оптимальные, в смысле выбранного принципа, решения? Важной задачей исследования игры является установление необходимых и достаточных условий существования оптимальных стратегий в широких классах игр;
3) поиск оптимальных решений, если они существуют. Во-первых, необходимо выяснить, по каким признакам отличаются оптимальные стратегии от остальных; во-вторых, разработать эффективные методы решений.

В общем случае для каждого класса игр существуют некоторые общие принципы оптимальности («разумного» поведения). Знакомство с этими принципами дает возможность лицу, принимающему решение, обосновать свой выбор, основываясь не на интуиции, а на строгих расчетах. В данной главе рассматриваются некоторые общие вопросы теории игр: представление игр в различных формах; принципы оптимальности в антагонистических и неантагонистических играх; методы нахождения решений.

5.2 Формы представления игр

Поскольку в статических играх выбор стратегии производится один единственный раз, то можно считать, что игроки делают свои выборы до начала игры. Для многоходовых игр под стратегией будем понимать правило поведения игрока от начала до конца игры. Конечно, в таких играх, как шахматы, шашки, в некоторых карточных играх число возможных ходов настолько велико, что нельзя заранее запланировать свои действия. Но поскольку в таких играх число различных ситуаций все же конечно, то можно абстрагироваться от практических затруднений и считать, что игрок еще до начала игры решает, как ему действовать в тех или иных ситуациях.

Существуют реальные конфликты, в которых участники делают свои ходы одновременно и независимо друг от друга. Если ходы выполняются не одновременно, то действия первых участников могут быть известны или неизвестны последним участникам. Если в игре участвует случай (раздача карт, бросание кубика и т. д.), то игроки могут иметь или не иметь информацию о результатах его действия. Все это учитывается в математических моделях представления игр.

В зависимости от цели исследования любую игру можно рассматривать в *развернутой (позиционной)* или в *нормальной (частный случай — матричной)* формах. В развернутой форме лучше раскрывается последовательность событий, она более наглядна для многоходовых игр. Здесь показываются очередности ходов игроков, их информированность и выигрыши. Недостатком этой формы представления является сложность нахождения решения. Нормальная форма игры менее наглядна, зато большинство эффективных методов нахождения решений разработано именно для этой формы.

Развернутая форма представляет игру в виде дерева, имеющего следующую структуру [7]:

1) начальная точка — исходная позиция игры;
2) ребра, исходящие из одной и той же вершины, называются альтернативами и нумеруются либо помечаются в соответствии с ходами игроков; ребро соответствует ходу игрока;
3) вершины, имеющие хотя бы одну альтернативу, называются промежуточными; каждая промежуточная позиция соответствует какому-то состоянию игры;
4) вершины, не имеющие ни одной альтернативы, называются конечными и означают конец игры; возле каждой конечной вершины записывается вектор $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$, определяющий выигрыши игроков в данной позиции;
5) множество всех промежуточных вершин (включая начало дерева) разбивается на $N + 1$ множеств $I_0, I_1, \ldots, I_N$ (N — количество игроков), называемых множествами очередностей; в множестве I_i ходит i-й игрок, I_0 — очередь хода случая;
6) каждое множество очередностей I_i разбивается на подмножества I_i^k, называемые информационными множествами, отражающими информированность игрока: игрок знает, в каком информационном множестве он находится, но не знает, в какой именно вершине; следовательно, вершины одного и того же информационного множества имеют одинаковое число альтернатив; если каждое информационное множество игрока содержит только одну вершину дерева, то говорят, что игрок имеет полную информацию (т. е. игрок всегда знает, кто, когда и как ходил); игра имеет полную информацию, если в ней каждый игрок имеет полную информацию;
7) путь от начала дерева до любой конечной позиции называется партией; каждая партия содержит не больше одной вершины в каждом информационном множестве.

Рассмотрим примеры представления игры в позиционной форме.

Пример 5.1

Пусть игрок 1 имеет 2, а игрок 2 — 3 фишки. Независимо и тайно друг от друга они откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1, в противном случае фишки достаются игроку 2.

Решение:

Эта игра с неполной информацией. Фактически игроки делают ходы одновременно и не знают о действиях противника. Их незнание показывается информационным множеством, а игру можно представить двумя способами (рис. 5.1).

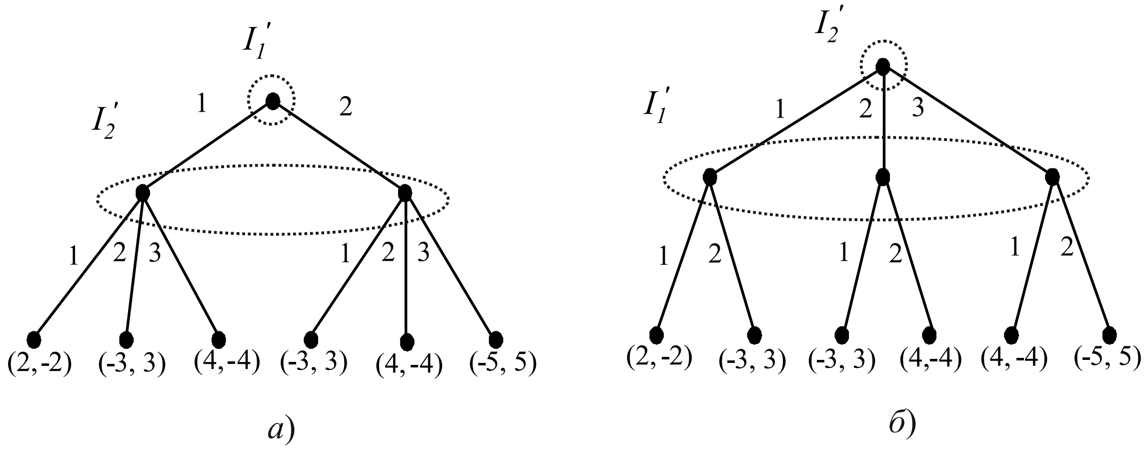


Рис. 5.1 – Представление игры с фишками в позиционной форме: *а*) — 1-й способ; *б*) — 2-й способ

Так как данная игра является антагонистической, то можно указывать выигрыш только первого игрока.

Пример 5.2

Пусть двое игроков имеют по 2 шара, которые они должны разложить в две урны. Сначала свои шары раскладывает игрок 1, затем — игрок 2. Игрок 2 знает, как сходил игрок 1. До игроков в одну из урн кладется 1 шар, причем ни 1-й, ни 2-й игрок не знают — в какую именно. Если количество шаров в урне оказывается четным, то их забирает 1-й игрок, иначе — 2-й. Выигрывает тот игрок, у кого в результате оказывается больше шаров. Так как игра антагонистическая, будем указывать выигрыш только 1-го игрока.

Решение:

Здесь ходы игроков помечены двумя цифрами: первая цифра — количество шаров, положенных в 1-ю урну; вторая цифра — количество шаров, положенных игроком во 2-ю урну (рис. 5.2).

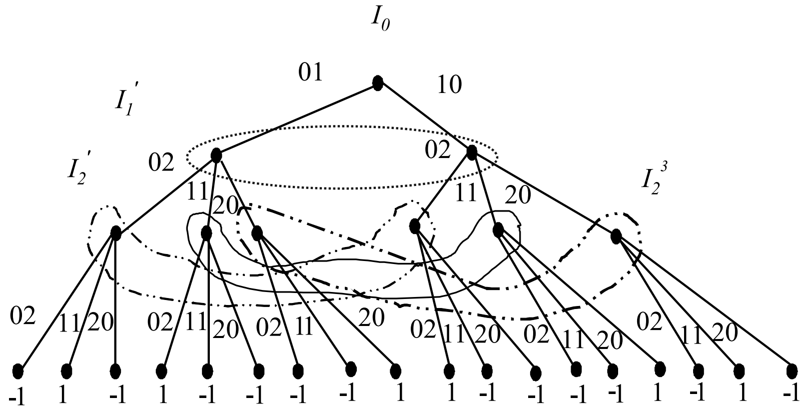


Рис. 5.2 – Позиционная форма игры с шарами

Пример 5.3

Два игрока по очереди называют числа из множества $\{1, 2, 3, 4\}$*, при этом числа не могут повторяться. Игра ведется до тех пор, пока не будут названы все четыре числа. В результате игрок 1 выигрывает* $x1 + x4 - x2 \cdot x3$ *очков, игрок 2 выигрывает* $x2 + x1 - x3 - x4$ *очков, где* x_i *— число, названное на i-ом шаге.*

Решение:

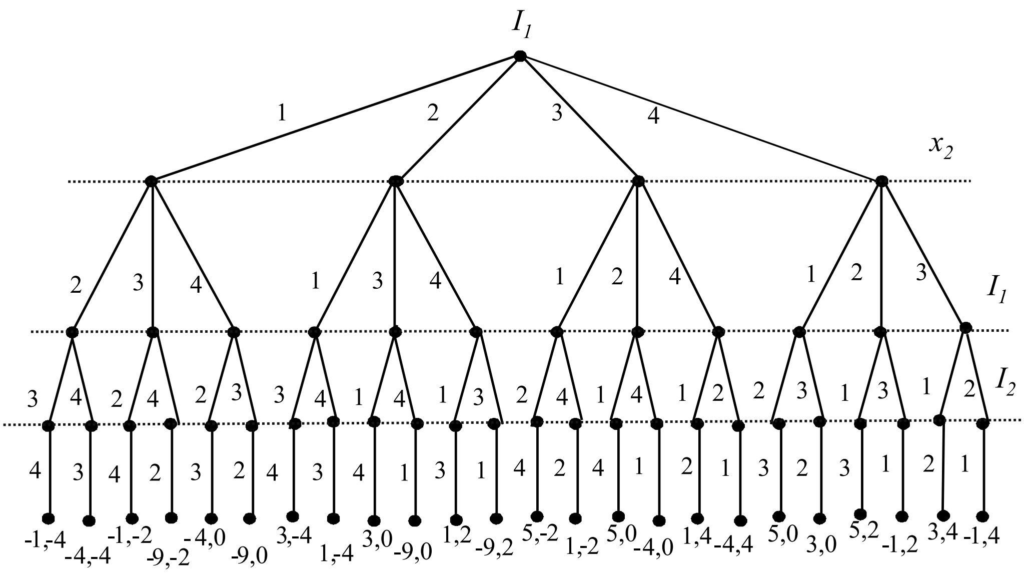


Рис. 5.3 – Позиционная форма представления игры с числами

Данная игра — это игра с полной информацией: в каждый момент времени каждый игрок имеет полную информацию о ходе игры. Так как здесь каждая вершина дерева является отдельным информационным множеством, то мы пометим только множества очередностей (рис. 5.3).

Нормальная форма игры N лиц — это совокупность $2N$ элементов

$$\Gamma = \langle U_1, \ldots, U_N, J_1, \ldots, J_N \rangle.$$

Таким образом, нормальная форма игры представляется в виде математической модели, в которой перечисляются множества стратегий для каждого игрока и описываются функции выигрышей игроков.

Если игра является конечной игрой 2-х лиц, то чаще она записывается в виде двух матриц, в которых строки соответствуют выборам 1-го игрока, а столбцы — выборам 2-го игрока. Причем для антагонистических игр можно записывать только матрицу выигрыша 1-го игрока.

Пример 5.4

Представить игру с фишками (пример 5.1) в нормальной форме.

Решение:

$\Gamma = \langle U_1 = \{1, 2\}, U_2 = \{1, 2, 3\}, J_1 = (-1)^{U_1+U_2}.(U_1 + U_2), J_2 = (-1)^{U_1+U_2+1}.(U_1 + U_2)\rangle.$

Здесь четное/нечетное количество отложенных фишек записывается в функции выигрышей через степень (-1).

Либо эту же игру можно представить в матричной форме: по строкам располагаем стратегии первого игрока, по столбцам — стратегии второго игрока. В результате получаем следующею матрицу размерностью два на три:

	1	2	3
1	2	−3	4
2	−3	4	−5

Пример 5.5

Представить игру с шарами (пример 5.2) в нормальной форме.

Решение:

Здесь у каждого из игроков по три стратегии:

1) оба шара складываются в первую урну;
2) шары раскладываются по разным урнам;
3) оба шара складываются во вторую урну.

В нормальной форме игры, где присутствует случай, величина выигрыша обычно задается в виде вероятности выигрыша. Тогда наша игра в матричной форме примет вид:

	02	11	20
02	0	0	−1
11	0	−1	0
20	−1	0	0

5.3 Антагонистические игры

5.3.1 Конечные игры

Решение игр в чистых стратегиях

Имеется два игрока. Пусть первый игрок имеет m возможных стратегий $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, второй — n стратегий $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Если первый игрок использует стратегию α_i, а второй — β_j, то первый игрок получает выигрыш в размере a_{ij}, или, по-другому, второй игрок платит первому a_{ij}. Матрица $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ называется *платежной матрицей*. Задача теории игр состоит в том, чтобы рекомендовать каждому из игроков выбрать стратегию, которую в некотором смысле следует считать наилучшей.

Какие же стратегии можно считать наилучшими в антагонистической игре? Для определения оптимальных стратегий рассмотрим *два основополагающих принципа* — осторожности и уравновешенности.

Следуя принципу *осторожности*, каждый игрок, памятуя о том, что перед ним разумный и злонамеренный противник, должен выбирать свои действия, исходя из самого неблагоприятного для него ответа партнера, и играть с гарантией. Таким образом, принцип осторожности приводит к *максиминному* (по полезности) критерию оптимальности для первого игрока и *минимаксному* (по потерям) критерию для второго игрока.

Стратегия α', максимизирующая гарантированный выигрыш 1-го игрока, т. е. выбранная в соответствии с максиминным критерием $\min\limits_j a_{ij} \to \max\limits_{\alpha_i}$, и стратегия β', минимизирующая гарантированный проигрыш 2-го игрока, т. е. выбранная в соответствии с минимаксным критерием $\max\limits_i a_{ij} \to \min\limits_{\beta_j}$, образуют ***защитную пару стратегий***.

Таким образом, применяя защитные стратегии, оба игрока из всех наихудших вариантов выбирают наилучший. Применяя защитную стратегию α', 1-й игрок, независимо от действий второго игрока, обеспечивает себе выигрыш не меньше, чем $V_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Это число называется *нижней ценой игры*. Аналогично, применяя стратегию β', 2-й игрок может быть уверен, что он проиграет не более, чем $V_2 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. Величина V_2 называется *верхней ценой игры*.

Рассмотрим нахождение защитных стратегий на двух примерах.

Пример 5.6

У каждого из игроков по две монеты: 1 коп и 2 коп. Оба одновременно выкладывают по одной из них на стол. Если достоинства монет совпадают, то выложенные деньги забирает первый игрок, если нет, то второй.

Решение:

У каждого игрока по две стратегии: 1-я — игрок выложил монету достоинством 1 коп., 2-я — игрок выложил монету в 2 коп. Платежная матрица

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для первого игрока гарантированный выигрыш при выборе стратегии α_1 равен $\min\limits_j a_{1j} = -1$; при выборе стратегии α_2 — $\min\limits_j a_{2j} = -2$.

Следовательно, защитная стратегия 1-го игрока $\alpha' = \alpha_1$, и нижняя цена игры $V_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = -1$.

Аналогично для второго игрока $\beta' = \beta_1$, и верхняя цена игры $V_2 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 1$. Здесь нижняя и верхняя цены игры не совпадают: $V_1 \neq V_2$.

Пример 5.7

Пусть у каждого игрока на руках имеются по 3 карты. У первого — валет, девятка, десятка, у второго — шестерка, восьмерка, дама. Игроки одновременно открывают по одной карте. Тот, у кого карта старше, получает выигрыш, равный сумме очков на обеих картах (валет считается старше десятки, но его стоимость — 2 очка, дамы — 3 очка).

Решение:

Обозначим стратегии игроков:

- α_1 — валет, α_2 — 9, α_3 — 10;
- β_1 — 6, β_2 — 8, β_3 — дама.

Платежная матрица:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 15 & 17 & -12 \\ 16 & 18 & -13 \end{vmatrix}.$$

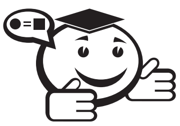
Здесь защитная пара стратегий (α_1, β_3). При этом нижняя цена игры $V_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = -5$, верхняя цена игры $V_2 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = -5$, т. е. $V_1 = V_2$.

....

Защитные стратегии есть всегда, более того, их может быть несколько. Можно ли пару защитных стратегий считать решением игры? Нет, нельзя. Сам по себе принцип осторожности еще недостаточен для выбора оптимальной стратегии, если он не сочетается с другим принципом — уравновешенности. Покажем это на рассмотренных выше примерах.

Вернемся к примеру 5.6 и предположим, что игроки решили воспользоваться защитными стратегиями. Итак, 1-й игрок собрался применить α_1. Тогда второй, глядя на платежную матрицу, может рассуждать так: «Мой противник, зная теорию, очевидно, захочет воспользоваться α_1. При этом он думает, что я тоже применю β_1, и надеется получить выигрыш $a_{11} = 1$. А я тем временем применю β_2, и он получит $a_{12} = -1$». В это время 1-й игрок думает: «Если я приму теоретическую α_1, то мой противник может меня обмануть и выбрать β_2. Но я это разгадал и иду α_2, тогда я получу $a_{22} = 2$». 2-й игрок может разгадать цепочку рассуждений 1-го игрока и снова вернуться к β_1, и так до бесконечности. Складывается ситуация, когда каждый из игроков, подозревая противника, испытывает соблазн отойти от своей защитной стратегии. Такое свойство называется *неуравновешенностью* защитных стратегий.

Другая ситуация складывается в игре с отгадыванием карт. Здесь отклонение от защитной стратегии не имеет смысла, т. к. если 2-й игрок применит β_3, то 1-му нет смысла отклоняться от α_1 и наоборот.

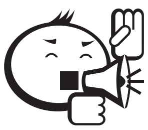


....

*Говорят, что пара стратегий $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$ **уравновешена**, если для $\forall i, j\ a_{ij*} \leqslant a_{i*j*} \leqslant a_{i*j}$.*

....

Если один из игроков использует стратегию уравновешенной пары, то второму ничего не остается, как воспользоваться второй стратегией из этой пары.



....

При этом требование уравновешенности является более сильным, чем требование осторожности: *уравновешенная пара стратегий, если она существует, является защитной, но не наоборот.*

....

Теперь мы можем дать определение решения игры.

Решением *игры* ***в чистых стратегиях*** *называется уравновешенная пара* (α_{i*}, β_{j*}) *чистых стратегий. Число* $V = \alpha_{i*j*}$, *которое представляет собой выигрыш первого игрока при условии, что оба игрока используют оптимальные стратегии, называется* ***ценой*** *игры. Если* $V = 0$, *то игра называется* ***справедливой***.

Не всякая игра имеет решение в чистых стратегиях (пример с монетами). Встает вопрос — как определить, имеет ли игра решение, а если имеет, то как найти решение. Другими словами, необходимо найти элемент матрицы α_{i*j*}, который является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце, а именно — седловую точку.

Определить существование седловой точки в платежной матрице можно непосредственно, проверяя каждый элемент матрицы, является ли он седловым. Однако этот путь весьма трудоемок, желательно иметь более простой критерий существования седловой точки. Приведем теорему, позволяющую значительно уменьшить число операций при проверке существования седловой точки (здесь и далее мы будем давать только формулировки теорем; при желании читатель может ознакомиться с их доказательствами по источникам, приведенным в списке литературы).

Игра с платежной матрицей $\|a_{ij}\|$ имеет седловую точку тогда и только тогда, когда $V_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = V_2$, т. е. когда нижняя цена игры равна верхней.

Данная теорема указывает путь нахождения седловой точки и соответственно — решения игры.

Вопрос о неоднозначности решений решается следующей теоремой.

Если $(\alpha_{i1}, \beta_{j1})$ и $(\alpha_{i2}, \beta_{j2})$ — уравновешенные пары стратегий, то пары $(\alpha_{i1}, \beta_{j2})$ и $(\alpha_{i2}, \beta_{j1})$ — также уравновешены, причем $\alpha_{i1j1} = \alpha_{i2j2} = \alpha_{i1j2} = \alpha_{i2j1}$.

Пример 5.8

Антагонистическая игра задана в виде следующей платежной матрицы:

A =

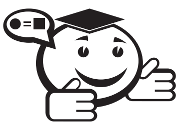
2	2	3	4
2	0	4	3
4	2	3	3
3	1	0	2

В данной игре имеется две седловые точки: a_{12} и a_{32} и соответственно две уравновешенных пары стратегий: (α_1, β_2) и (α_3, β_2). Таким образом, 2-й игрок имеет одну оптимальную стратегию β_2, а 1-й игрок — две: α_1 и α_3.

. . . .

Решение игр в смешанных стратегиях

Для игр, которые не имеют уравновешенных пар, любая теория, рекомендующая в качестве решения чистые стратегии, окажется нежизнеспособной, т. к. для любого игрока сразу же возникает желание отклониться от решения. В такой ситуации необходимо стремиться засекретить выбор стратегии, наилучший способ для этого — случай. Устанавливается вероятность выбора для каждой чистой стратегии, и решение принимается в соответствии с вероятностным распределением.



. . . .

Смешанной стратегией *называется распределение вероятностей на заданном множестве чистых стратегий. Другими словами, это совокупность чисел* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *где* $x_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$, *соответствующих решениям* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

. . . .

Очевидно, любая чистая стратегия α_i — частный случай смешанной, в которой все вероятности, кроме одной, соответствующей α_i, равны нулю, а эта равна единице.

Применение смешанной стратегии на практике заключается в следующем: в каждой партии игрок выбирает свою чистую стратегию случайным образом, в соответствии с вероятностным распределением X, и получает выигрыш, соответствующий его выбранной чистой стратегии и выбранной стратегии противника. В результате нескольких сыгранных партий можно оценить средний выигрыш игрока.

Оценка полезности смешанных стратегий ведется по математическому ожиданию выигрыша: если в игре с платежной матрицей $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ первый игрок использует смешанную стратегию $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а второй — чистую стратегию β_j, то математическое ожидание выигрыша первого игрока будет равно $M(X, \beta_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \cdot a_{ij}$.

Если первый игрок выбирает чистую стратегию α_i, а второй — смешанную стратегию $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то средний выигрыш первого игрока будет равен $M(\alpha_i, Y) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \cdot a_{ij}$.

Если оба игрока применяют смешанные стратегии X и Y, то средний выигрыш первого игрока (он же средний проигрыш второго) будет представляться:

$$M(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot M(\alpha_i, Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot M(X, \beta_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j.$$

Когда целесообразно применение смешанных стратегий? Наверное, если игра проводится всего один раз и ставки велики, предпочтительнее использовать чистую защитную стратегию. Если же игра повторяется многократно и выигрыши накапливаются, то средний выигрыш приобретает практический смысл. В дальнейшем будем предполагать, что мы находимся в ситуации многократного повторения игры, и если некоторая смешанная стратегия обеспечивает нам увеличение выигрыша в среднем по сравнению с чистой стратегией, то мы принимаем ее. Покажем, что, используя смешанные стратегии, можно повысить свой гарантированный выигрыш.

Пример 5.9

Вспомним игру с отгадыванием монет (пример 5.6). Защитная чистая стратегия первого игрока в данной игре — α_1, нижняя цена игры — $V_1 = -1$. Применим произвольную смешанную стратегию, например — $X = (1/2, 1/2)$. Тогда средний выигрыш первого игрока против чистых стратегий второго составит

$$M(X, \beta_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}; \quad M(X, \beta_2) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда видно, что наименьший (т. е. гарантированный) выигрыш первого игрока против любой чистой стратегии второго:

$$\min\left\{M(X, \beta_1), M(X, \beta_2)\right\} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом мы повысили гарантированный выигрыш игрока на $1/2$ по сравнению с наилучшей чистой стратегией. Можно предположить, что, подбирая оптимальным способом вероятности (x_1, x_2), удастся еще повысить гарантированный средний выигрыш.

Смешанная стратегия $X' = (x'_1, \ldots, x'_m)$, максимизирующая средний гарантированный выигрыш первого игрока, т. е. выбранная в соответствии с максиминным критерием $\min\limits_j M(X, \beta_j) \to \max\limits_X$, называется ***защитной смешанной стратегией*** *первого игрока.*

Смешанная стратегия $Y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$, минимизирующая средний гарантированный проигрыш второго игрока, т. е. выбранная в соответствии с минимаксным критерием $\max\limits_i M(\alpha_i, Y) \to \min\limits_Y$, называется ***защитной смешанной стратегией*** *второго игрока.*

Достигаемый при использовании защитной стратегии X' максимум гарантированного выигрыша первого игрока $V_1 = \max\limits_X \min\limits_j M(X, \beta_j)$ называется ***нижней ценой игры****, а достигаемый при использовании Y' минимум гарантированного проигрыша $V_2 = \min\limits_Y \max\limits_i M(\alpha_i, Y)$ соответственно* ***верхней ценой игры****.*

Защитные смешанные стратегии существуют всегда. Их можно искать различными способами. Для простых игр размером $2 \times n$ или $m \times 2$ можно применять *графический метод*.

Пусть задана игра $2 \times n$ с платежной матрицей

	β_1	β_2	$\dots$	β_n
α_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
α_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}

Смешанная стратегия 1-го игрока представляет собой совокупность двух чисел x_1, x_2, в сумме дающих единицу, или $X = (x, 1 - x)$. Отложим на оси абсцисс единичный отрезок для представления смешанной стратегии 1-го игрока. На концах отрезка — два перпендикуляра, на которых будем откладывать выигрыши 1-го игрока, когда он использует чистые стратегии α_1 и α_2 (рис. 5.4).

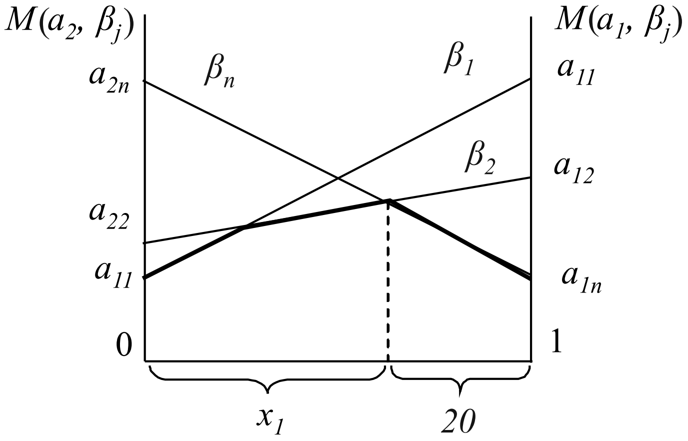


Рис. 5.4 – Графический метод нахождения защитных смешанных стратегий

Пусть второй игрок выбрал β_1. Тогда, если первый игрок выберет стратегию α_1, то его выигрыш составит a_{11}, если выберет стратегию α_2 — выигрыш составит a_{21}. Соединив эти две точки, мы получаем график зависимости среднего выигрыша первого игрока от его смешанной стратегии $M(X, \beta_1)$.

Аналогично строим графики для $\beta_2, \dots, \beta_n$. Далее, исходя из определения защитной смешанной стратегии, мы для каждого x, т. е. для каждой точки единичного отрезка на оси абсцисс, находим $\min M(X, \beta_j)$, т. е. нижнюю границу множества прямых (на графике это жирная ломанная кривая). Та точка отрезка, при которой нижняя граница достигает максимума, соответствует искомой смешанной защитной стратегии X'; высота максимума дает при этом значение нижней цены игры.

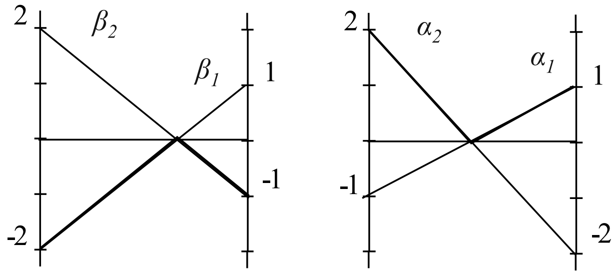
Аналогично находится решение для второго игрока в играх $m \times 2$, но здесь необходимо искать минимум верхней границы.

Пример 5.10

Найдем пару защитных смешанных стратегий в игре с отгадыванием монетки. Здесь графическим методом можно найти стратегии и для 1-го и для 2-го игрока (рис. 5.5). Платежная матрица:

	β_1	β_2
α_1	1	−1
α_2	−2	2

Точка пересечения двух прямых для первого игрока: $2 - 3x = -2 + 3x$, решая, получаем: $x = \frac{2}{3}$, отсюда смешанная стратегия первого игрока $X' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



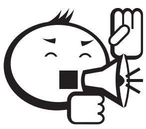
а) *б*)

Рис. 5.5 – Графическое представление смешанных стратегий:
а) — 1-го игрока; *б*) — 2-го игрока

Для второго игрока: $2 - 4y = -1 + 2y$, $y = \frac{1}{2}$, $Y' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Нижняя и верхняя цены игры $V_1 = V_2 = 0$.

. . . .



. . . .

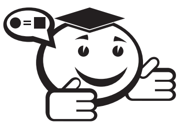
Защитные смешанные стратегии игроков являются защитными не только против любой *чистой* стратегии противника, но и против *любой смешанной*:

$$\min_Y M(X, Y) \to \max_X;$$
$$\max_X M(X, Y) \to \min_Y,$$

причем это будут те же самые стратегии X', Y'.

. . . .

Рассмотрим понятие уравновешенности для смешанных стратегий.



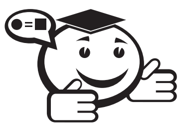
. . . .

Пара (X^*, Y^*) *смешанных стратегий называется* ***уравновешенной****, если для любых* X, Y

$$M(X, Y^*) \leqslant M(X^*, Y^*) \leqslant M(X^*, Y).$$

. . . .

Из уравновешенности пары стратегий следует их защитность, т. е. уравновешенная пара стратегий всегда является защитной.

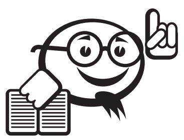


Решением игры всмешанных *стратегиях называется* ***уравновешенная пара*** *(X^*, Y^*) стратегий. Число $V = M(X^*, Y^*)$, которое представляет собой выигрыш 1-го игрока при условии, что оба игрока используют оптимальные стратегии, называется* ***ценой игры***.

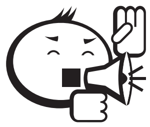
Если $V = 0$, то игра называется ***справедливой***.

Заметим, что если игра имеет решение в чистых стратегиях, то оно будет также решением и в классе смешанных стратегий. Более того, если рассматривать $M(X, Y)$ как функцию двух векторных аргументов, то уравновешенную пару (X^*, Y^*) можно понимать как седловую точку этой функции.

Теперь необходимо выяснить, всегда ли игра имеет решение в смешанных стратегиях и как это решение находить?



Основная теорема теории матричных игр, *теорема о минимаксе*, гласит, что *любая конечная игра двух лиц со строгим соперничеством имеет решение в смешанных стратегиях*.



Таким образом, уравновешенная пара смешанных стратегий существует всегда. Более того, *для смешанных стратегий защитные стратегии всегда являются и уравновешенными*. Следовательно, найдя пару защитных смешанных стратегий, мы найдем решение игры.

Обратимся теперь к практическим вопросам отыскания решения. Один из способов — это графический метод для игр $2\times n$ или $m\times 2$. Для игр большей размерности графический метод неприменим, здесь нужны более универсальные численные методы. Самым мощным и распространенным из них является метод, основанный на сведении игры к задаче линейного программирования.

Метод линейного программирования

Пусть 1-й игрок задался целью выиграть не менее V_1 единиц при любой стратегии противника, причем V_1 должно быть максимальным. Тогда его задача состоит в нахождении такого вектора (смешанной стратегии) $X = (x_1, \ldots, x_m)$, для которого выполнялось бы:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant V_1 \to \max,\ j = \overline{1, n};$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Можно считать все $a_{ij} \geqslant 0$, в противном случае можно добиться этого, прибавив ко всем элементам матрицы положительную константу. Такая прибавка никак не влияет на стратегии игроков. У игроков с положительной платежной матрицей нижняя цена игры V_1 также положительна. Тогда мы можем перейти к новым переменным $u_i = x_i/V_1$, а задача первого игрока сведется к нахождению вектора $U = (u_1, \ldots, u_m)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{1}{V_1} \to \min;$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant 1,\ j = \overline{1, n};$$
$$u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Мы получили задачу линейного программирования с m переменными, n ограничениями, единичными коэффициентами линейной формы и единичным вектором ограничений.

Аналогично, если 2-й игрок задался целью проиграть не более V_2 единиц и это число он желает минимизировать, то он должен найти такой вектор $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, для которого

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \leqslant V_2 \to \min,\ j = \overline{1, m};$$
$$y_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Переходя к переменной $\omega_j = y_j/V_2$, получаем задачу 2-го игрока как задачу максимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = \frac{1}{V_2} \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \omega_j \leqslant 1,\ i = \overline{1, m},$$
$$\omega_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Сопоставляя задачи первого и второго игроков, можно заметить, что они образуют двойственную пару задач линейного программирования (число переменных одной задачи равно числу ограничений другой, вектор ограничений и вектор линейной формы поменялись местами, матрица условий одна и та же, а направления оптимизации линейных форм противоположны).

Самые общие свойства решений двойственной пары задач устанавливаются двумя фундаментальными теоремами:

Первая теорема двойственности. Если одна из задач двойственной пары имеет решение, то и другая имеет решение, причем экстремальные значения линейных форм равны.

В нашем случае это означает, что $V_1 = V_2 = V$ — экстремальные значения линейных форм обратно пропорциональны цене игры $\frac{1}{V}$.

Вторая теорема двойственности. Для оптимальных планов прямой и двойственной задач в каждой паре двойственных условий одно свободное, а другое — связанное.

Это означает, что если $X^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — оптимальные смешанные стратегии 1-го и 2-го игроков, то для них имеют место соотношения:

1) если $x_i^* > 0$, то для этого i $\sum\limits_j a_{ij} \cdot y_j^* = V$;
2) если $x_i^* = 0$, то для этого i $\sum\limits_j a_{ij} \cdot y_j^* < V$;
3) если $y_j^* > 0$, то для этого j $\sum\limits_i a_{ij} \cdot x_i^* = V$;
4) если $y_j^* = 0$, то для этого j $\sum\limits_i a_{ij} \cdot x_i^* > V$.

Эти свойства оптимальных стратегий могут быть использованы для аналитического нахождения решения в играх 2×2.

Для решения задач линейного программирования существует много вычислительных методов, и прежде всего симплекс-метод.

Пример 5.11

Найти решение в игре с платежной матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Преобразуем матрицу таким образом, чтобы все ее элементы стали неотрицательными (добавим двойку ко всем элементам матрицы):

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Задачи первого и второго игроков запишутся следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
u_1 + u_2 + u_3 \to \min, & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \to \max, \\
2u_1 + 4u_2 \geqslant 1, & 2\omega_1 + 5\omega_2 + 3\omega_4 \leqslant 1, \\
5u_1 + u_2 + 3u_3 \geqslant 1, & 4\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 + \omega_4 \leqslant 1, \\
3u_2 + 2u_3 \geqslant 1, & 3\omega_2 + 2\omega_3 + 4\omega_4 \leqslant 1, \\
3u_1 + u_2 + 4u_3 \geqslant 1,\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_3 \geqslant 0. & \omega_1 \geqslant 0,\ \omega_2 \geqslant 0,\ \omega_3 \geqslant 0,\ \omega_4 \geqslant 0.
\end{array}$$

Здесь удобнее решать вторую задачу, т. к. при приведении ее к канонической форме матрица условий будет содержать единичную положительную подматрицу. Введем три дополнительные переменные ω_5, ω_6, ω_7, и, поменяв знаки у коэффициентов целевой функции, заменим минимизацией $\left(L = -\dfrac{1}{V}\right)$:

$$\begin{aligned}
&L = -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 \to \min, \\
&2\omega_1 + 5\omega_2 + 3\omega_4 + \omega_5 = 1, \\
&4\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 + \omega_4 + \omega_6 = 1, \\
&3\omega_2 + 2\omega_3 + 4\omega_4 + \omega_7 = 1,\ \omega_1 \geqslant 0, \ldots, \omega_7 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Для удобства представим решение в виде таблиц, где направляющий элемент подчеркивается.

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_5	1	2	5	0	3	1	0	0
ω_6	1	$\underline{4}$	1	3	1	0	1	0
ω_7	1	0	3	2	4	0	0	1
L	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Первый шаг

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_5	1/2	0	$\underline{\mathbf{9/2}}$	$-3/2$	5/2	1	$-1/2$	0
ω_1	1/4	1	1/4	3/4	1/4	0	1/4	0
ω_7	1	0	3	2	4	0	0	1
L	$-1/4$	0	$-3/4$	$-1/4$	$-3/4$	0	1/4	0

Второй шаг

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_2	1/9	0	1	$-1/3$	5/9	2/9	$-1/9$	0
ω_1	2/9	1	0	5/6	1/9	$-1/18$	5/18	0
ω_7	2/3	0	0	$\underline{3}$	7/3	$-2/3$	1/3	1
L	$-1/3$	0	0	$-1/2$	$-1/3$	1/4	1/4	0

Третий шаг

Базис	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_2	5/27							
ω_1	1/27							
ω_3	2/9	0	0	1	7/9	−2/9	1/9	1/3
L	−4/9	0	0	0	1/18	1/18	4/18	3/18

Поскольку в последней таблице все элементы последней строки положительны, то возрастание переменных $\omega_1 \div \omega_7$ не приведет к уменьшению L, следовательно, это окончательное решение. Достигнутый минимум $L^* = -4/9$. Оптимальный план второго игрока выбираем из базиса. У второго игрока четыре стратегии, но четвертая переменная отсутствует в базисе, поэтому ее значение приравнивается нулю. Получаем вектор: $W^* = (1/27, 5/27, 2/9, 0)$.

Оптимальный план первого игрока находится в последней строке результирующей симплексной таблицы на месте дополнительных переменных: $U^* = (1/18, 4/18, 3/18)$.

Осталось перейти от оптимальных планов U^*, W^* к оптимальным стратегиям игроков. Для этого нужно умножить эти планы на цену игры:

$$V = -\frac{1}{L^*} = \frac{9}{4},$$

$$X^* = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right), \quad Y^* = \left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Скорректируем цену игры (для матрицы с отрицательными элементами):

$$V = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}.$$

. . . .

Аналитическое решение игр 2×2

В простейшем случае, когда игра имеет минимальный размер 2×2, ее можно решить аналитически. Пусть платежная матрица $A = \|a_{ij}\|_{2\times 2}$ не имеет седловой точки. Тогда решение есть только в смешанных стратегиях, причем $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, $y_1^* > 0$, $y_2^* > 0$. Согласно второй теореме двойственности получаем:

$$a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = V,$$
$$a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = V,$$
$$a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = V,$$
$$a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = V.$$

Мы получили четыре уравнения и пять неизвестных. Для нахождения решения добавим условие нормировки:

$$x_1^* + x_2^* = 1, \quad y_1^* + y_2^* = 1.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{c}, \quad y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{c},$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{c}, \quad y_{21}^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{c},$$

$$V = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{c},$$

где $c = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$.

Таким образом, используя полученные уравнения, любую игру размерностью 2×2 можно решить аналитическим методом.

Итеративный метод решения игр

Рассмотренные до сих пор методы решения игр относятся к разряду конечных, дающих точное решение за конечное число шагов. Наряду с ними существует целый класс итеративных методов, в принципе бесконечных, но позволяющих за некоторое число итераций получить сколь угодно точное приближенное решение.

Один из таких методов — метод *фиктивной партии* или метод «вилки», предложенный Брауном. Разыгрывается фиктивная последовательность партий, в которой каждый из игроков, отправляясь от некоторой исходной стратегии и наблюдая за поведением своего противника, от партии к партии корректирует свою стратегию, обучаясь на прошлом опыте. Алгоритм обучения выбирается таким образом, чтобы обеспечить сходимость к решению.

Основную роль здесь играет понятие эмпирической смешанной стратегии. Допустим, что сыграно N партий, в которых первый игрок k_1 раз применил чистую стратегию α_1, k_2 раз — чистую стратегию α_2, и т. д., k_m раз — чистую стратегию α_m. Тогда можно сказать, что игрок применил эмпирическую смешанную стратегию $\widehat{X} = \left(\frac{k_1}{N}, \frac{k_2}{N}, \ldots, \frac{k_m}{N}\right)$.

Аналогично вводим понятие эмпирической смешанной стратегии для второго игрока.

Последовательность фиктивных партий разворачивается следующим образом.

1-я партия. Первый игрок выбирает любую чистую стратегию $\alpha^{(1)}$, второй — $\beta^{(1)}$. Число сыгранных партий $N = 1$. Эмпирическая смешанная стратегия первого игрока:

$$\widehat{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha_m \end{pmatrix}, \\ 0, \ldots, 1, \ldots, 0$$

Второго игрока:

$$\widehat{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta_1, \ldots, \beta^{(1)}, \ldots, \beta_n \end{pmatrix}. \\ 0, \ldots, 1, \ldots, 0$$

N-я партия. К началу N-й партии каждый из игроков, наблюдая за своим противником на протяжении прошедших $(N - 1)$ партий, знает эмпирические смешанные стратегии:

$$\widehat{X}^{(N-1)} = \left(\widehat{x}_1^{N-1}, \ldots, \widehat{x}_m^{N-1}\right), \quad \widehat{Y}^{(N-1)} = \left(\widehat{y}_1^{N-1}, \ldots, \widehat{y}_n^{N-1}\right).$$

Первый игрок, используя эмпирическую смешанную стратегию противника как статистическую оценку его смешанной стратегии, выбирает свою чистую $\alpha^{(N)}$ так, чтобы максимизировать математическое ожидание выигрыша в этой партии:

$$M\left(\alpha_i, \widehat{Y}^{(N-1)}\right) \to \max_{\alpha_i}.$$

Обозначим значение достигаемого при этом максимума через $\widehat{V}_2^{(N)} = \max_i M\left(\alpha_i, \widehat{Y}^{(N-1)}\right)$.

Аналогично для 2-го игрока достигаемое минимальное значение проигрыша $\widehat{V}_1^{(N)} = \min\limits_j M\left(\widehat{X}^{(N-1)}, \beta_j\right)$.

С учетом выбранных чистых стратегий $\alpha^{(N)}$ и $\beta^{(N)}$ корректируются эмпирические смешанные стратегии:

$$\widehat{X}^{(N)} = \frac{1}{N}\alpha^{(N)} + \frac{(N-1)}{N} \cdot \widehat{X}^{(N-1)},$$

$$\widehat{Y}^{(N)} = \frac{1}{N}\beta^{(N)} + \frac{(N-1)}{N} \cdot \widehat{Y}^{(N-1)},$$

и последовательность фиктивных партий продолжается. Числа $\widehat{V}_1^{(N)}$ и $\widehat{V}_2^{(N)}$, полученные в N-й партии, берут «в вилку» цену игры:

$$\widehat{V}_1^{(N)} \leqslant V \leqslant \widehat{V}_2^{(N)}.$$

Более того, независимо от выбора начальных стратегий $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$, будет выполняться условие $\lim\limits_{N\to\infty} \widehat{V}_1^{(N)} = V = \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{V}_2^{(N)}$.

Отсюда $\lim\limits_{N\to\infty} \widehat{X}^{(N)} = X^*$, $\lim\limits_{N\to\infty} \widehat{Y}^{(N)} = Y^*$.

На практике выгодно брать не последние значения $\widehat{V}_1^{(N)}$, $\widehat{V}_2^{(N)}$, а наилучшие из всех промежуточных:

$$\widehat{V}_1 = \max_N V_1^{(N)}, \quad \widehat{V}_2 = \min_N V_2^{(N)}.$$

Игра обычно ведется до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\widehat{V}_2^{(N)} - \widehat{V}_1^{(N)} < \varepsilon_1,$$

где ε_1 — заданная точность.

Пример 5.12

Решить игру с платежной матрицей $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение:

Приведем решение в виде таблицы 5.1. Жирным шрифтом отметим достигаемые в каждой партии максимумы и минимумы ожидаемых выигрышей; если экстремумов несколько, то выбирается любой.

Таблица 5.1

№	$M(\alpha_i, \widehat{Y}^{(N-1)})$		$M(\widehat{X}^{(N-1)}, \beta_j)$			$\alpha^{(N)}$	$\beta^{(N)}$	$\widehat{V}_1^{(N)}$	$\widehat{V}_2^{(N)}$	$\widehat{X}^{(N)}$		$\widehat{Y}^{(N)}$		
	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3					X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
1	—	—	—	—	—	α_1	β_1	—	—	1	0	1	0	0
2	1	**2**	1	**−2**	3	α_2	β_2	**−2**	**2**	1/2	1/2	1/2	1/2	0
3	1/2	5/2	3/2	1/2	3/2	α_2	β_2	1/2	5/2	1/3	2/3	1/3	2/3	0
4	−1	**8/3**	5/3	4/3	**1**	α_2	β_3	1	**8/3**	1/4	**3/4**	1/4	1/2	1/4
5	0	**2**	7/4	7/4	**3/4**	α_2	β_3	**3/4**	**2**	1/5	4/5	1/5	2/5	2/5
6	3/5	**8/5**	9/5	2	3/5	α_2	β_3	3/5	**8/5**	1/6	5/6	1/6	2/6	3/6
7	1	**4/3**	11/6	13/6	1/2	α_2	β_3	1/2	**4/3**	1/7	6/7	1/7	2/7	4/7
8	**9/7**	8/7	13/7	16/7	**3/7**	α_1	β_3	**3/7**	**9/7**	1/4	**3/4**	1/8	1/4	5/8
9	**6/4**	1	7/4	7/4	**3/4**	α_1	β_3	**3/4**	**6/4**	1/3	2/3	1/9	2/9	6/9
10	**5/3**	8/9	5/3	4/3	**1**	α_1	β_3	**1**	**5/3**	2/5	3/5	1/10	2/10	7/10

1-я итерация — игроки еще ничего не знают о ходах друг друга, поэтому выбирают стратегии произвольно — в качестве $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$ возьмем α_1, β_1.

2-я итерация — первый игрок смотрит, как перед этим сходил второй: тот выбрал первую стратегию. Тогда первый игрок видит, что если он возьмет свою 1-ю стратегию, а второй тоже первую — первый получит 1. Если первый возьмет 2-ю стратегию, то он получит 2. Из двух вариантов он выбирает максимум — для этого он должен выбрать α_2 и получить $V_2^{(N)} = 2$. В результате по двум итерациям первый игрок 1 раз выбрал 1-ю стратегию, 1 раз — 2-ю. Получилась смешанная стратегия (1/2, 1/2). Для второго игрока рассуждения аналогичные, только он выбирает ту стратегию, которая дает минимум его проигрыша.

3-я итерация: 1-й игрок смотрит на предыдущую стратегию второго игрока: (1/2, 1/2, 0). Если 1-й выберет свою первую стратегию, а 2-й будет применять (1/2, 1/2, 0), то выигрыш 1-го игрока составит −1/2 (средний выигрыш определяется по формуле со стр. 143). Если 1-й выберет вторую стратегию, его выигрыш составит 5/2. Из двух вариантов он выбирает тот, который максимизирует его выигрыш, то есть α_2. По результатам 3-х итераций: 1 раз выбрана 1-я стратегия, 2 раза — 2-я. Получаем смешанную стратегию (1/3, 2/3). Для второго игрока рассуждения аналогичны, только он смотрит на предыдущую смешанную стратегию 1-го и выбирает минимум.

Дальнейшие итерации проходят аналогично. После десяти итераций мы можем приблизительно сказать, что оптимальные стратегии игроков равны

$$X^* \cong \widehat{X}^{(10)} \cong \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right); \quad Y^* \cong \widehat{Y}^{(10)} \cong \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}\right).$$

Цена игры лежит в пределах: $\max \widehat{V}_1 = 1 \leqslant V \leqslant \dfrac{9}{7} = \min \widehat{V}_2$.

Сокращение размерности платежной матрицы

Трудоемкость всех рассмотренных численных методов решения игр существенно зависит от размеров платежной матрицы. Встает вопрос — нельзя ли сократить размеры матрицы без потери информации, относящейся к решению. В некоторых случаях можно, основываясь на понятии *доминирования* стратегий.

*Пусть в игре с платежной матрицей $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ найдутся две стратегии первого игрока $\alpha_{i'}$ и $\alpha_{i''}$, для которых при всех j $a_{i'j} \geqslant a_{i''j}$, т. е. i'-я строка поэлементно больше или равна i''-й. Тогда говорят, что **i'-я стратегия доминирует i''-ю**.*

*Если в игре с платежной матрицей найдутся две стратегии второго игрока $\beta_{j'}$ и $\beta_{i''}$, для которых $\forall i$ $a_{ij'} \leqslant a_{ij''}$, т. е. j'-й столбец поэлементно меньше или равен j''-му, то говорят, что **j'-я стратегия второго игрока доминирует j''-ю**.*

Доминируемая стратегия при любом ответе противника хуже доминирующей, поэтому первому игроку совершенно неразумно когда-либо использовать стратегию α_i'', и соответствующая строка может быть вычеркнута из A.

Аналогично, второму игроку никогда не выгодно применять доминируемую стратегию β_j'', и столбец, соответствующий данной стратегии, также можно вычеркнуть, уменьшая размерность платежной матрицы.

Заметим, что вычеркивание стратегий — это итерационный процесс: после того как вычеркнуты доминируемые строки, а затем столбцы, необходимо снова просмотреть строки на предмет доминирования и т. д., пока вычеркиваются столбцы и строки.

Пример 5.13

Рассмотрим игру

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 5 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & \cancel{4} & 2 & \cancel{7} \\ 1 & \cancel{2} & 5 & \cancel{5} \\ 5 & \cancel{6} & 4 & \cancel{6} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} \\ 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

В результате сокращения мы получили матрицу 2×2, которую можно решить даже аналитически.

Игры в позиционной форме

При решении игр, представленных в позиционной форме, принципиальное значение имеет информированность игроков. В общем случае решение игры в позиционной форме сводится к переходу к нормальной форме, а затем игра решается любым из рассмотренных ранее методов. В частном случае для игр с полной информацией существуют методы, позволяющие находить решение без перехода к нормальной форме.

Рассмотрим сначала первый подход. Для перехода от позиционной к нормальной форме необходимо описать чистые стратегии игроков. Имея перед собой дерево игры, каждый из игроков, по крайней мере в принципе, может составить для себя совокупность инструкций следующего вида: «если я буду находиться в 1-ом информационном множестве, то мне следует сделать такой-то выбор, если во 2-ом — то такой-то. . .» и далее для каждого информационного множества.

Чистой стратегией *i-го игрока называется правило, ставящее в соответствие каждому информационному множеству этого игрока определенный выбор (альтернативу) хода в этом информационном множестве.*

Иными словами, одна чистая стратегия игрока дает ему правило поведения во всех информационных множествах. Тогда, если у игрока имеется z информационных множеств и количество альтернатив в k-ом множестве равно m_k, то общее число вариантов выбора поведения (число возможных чистых стратегий) определяется произведением:

$$M = \prod_{k=1}^{z} m_k.$$

Отсюда видно, что непосредственное перечисление чистых стратегий возможно лишь для самых простых игр, для сколько-нибудь сложных реальных игр (например, шахмат) число возможных чистых стратегий оказывается хоть и конечным, но очень большим. Тем не менее для игр с неполной информацией переход к нормальной форме является единственным способом решения.

Пример 5.14

Рассмотрим простую игру в позиционной форме и перечислим для нее все возможные чистые стратегии игроков (рис. 5.6).

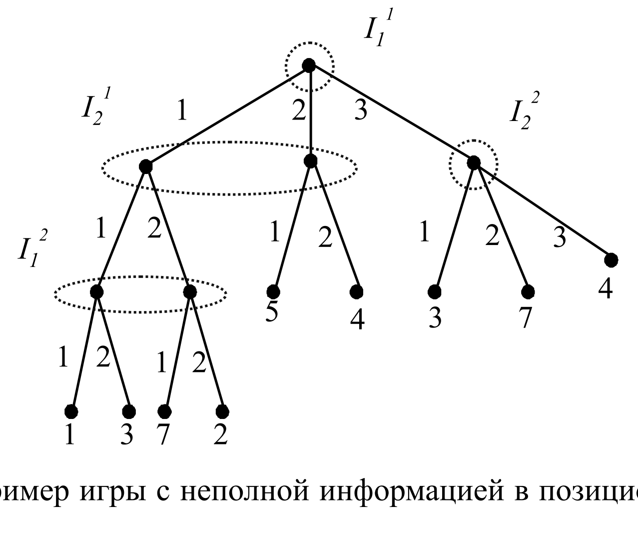


Рис. 5.6 – Пример игры с неполной информацией в позиционной форме

Здесь у первого игрока два информационных множества — I_1^1 и I_1^2, в 1-ом — 3 альтернативы, во 2-ом — 2 альтернативы. Общее число чистых стратегий равно 6. Аналогично, у 2-го игрока возможны 6 чистых стратегий. Перечислим стратегии игроков:

	I_1^1	I_1^2
α_1	1	1
α_2	1	2
α_3	2	1
α_4	2	2
α_5	3	1
α_6	3	2

	I_2^1	I_2^2
β_1	1	1
β_2	1	2
β_3	1	3
β_4	2	1
β_5	2	2
β_6	2	3

Теперь мы можем построить платежную матрицу игры, а затем попытаемся ее сократить.

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	1	~~1~~	~~1~~	7	~~7~~	~~7~~
α_2	~~3~~	~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~
α_3	5	~~5~~	~~5~~	4	~~4~~	~~4~~
α_4	~~5~~	~~5~~	~~5~~	~~4~~	~~4~~	~~4~~
α_5	3	~~7~~	~~4~~	3	~~7~~	~~4~~
α_6	~~3~~	~~7~~	~~4~~	~~3~~	~~7~~	~~4~~

$\Rightarrow$

	β_1	β_4
α_1	1	7
α_3	5	4
α_5	~~3~~	~~3~~

$\Rightarrow$

	β_1	β_4
α_1	1	7
α_3	5	4

В результате мы получили матрицу размером 2×2, которую можно решить аналитическим методом:

$$x_1 = \frac{4-5}{-7} = \frac{1}{7}; \quad x_2 = \frac{1-7}{-7} = \frac{6}{7}; \quad y_1 = \frac{4-7}{-7} = \frac{3}{7}; \quad y_2 = \frac{1-5}{-7} = \frac{4}{7}; \quad V = \frac{31}{7}.$$

Результирующие смешанные стратегии должны быть записаны для исходной матрицы, и, соответственно, имеют размерность 6 и 6. Вычеркнутые стратегии никогда не применяются игроками, поэтому вероятность их выбора равна нулю:

$$X^* = \left(\frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7}, 0, 0, 0\right); \quad Y^* = \left(\frac{3}{7}, 0, \ 0, \frac{4}{7}, 0, 0\right).$$

Дадим интерпретацию полученных стратегий: первый игрок в информационном множестве I_1^1 должен с вероятностью $\frac{1}{7}$ выбирать 1-ю альтернативу, а с вероятностью $\frac{6}{7}$ — 2-ю, в информационном множестве I_1^2 — всегда выбирать 1-ю альтернативу. Второй игрок в информационном множестве I_2^1 с вероятностью $\frac{3}{7}$ должен выбирать 1-ю альтернативу, с вероятностью $\frac{4}{7}$ — 2-ю, во множестве I_2^2 — всегда 1-ю.

. . . .

Рассмотрим пример игры с полной информацией.

Пример 5.15

На столе лежат 6 спичек. Игроки берут спички по очереди, каждый может взять 1 или 2 спички. Тот, кто берет последнюю спичку, проигрывает 1 очко. Игра с полной информацией — каждый из игроков знает, в каком состоянии находится игра в данный момент времени. Каждое информационное множество содержит только одну вершину дерева, поэтому мы будем показывать только множества очередностей (рис. 5.7).

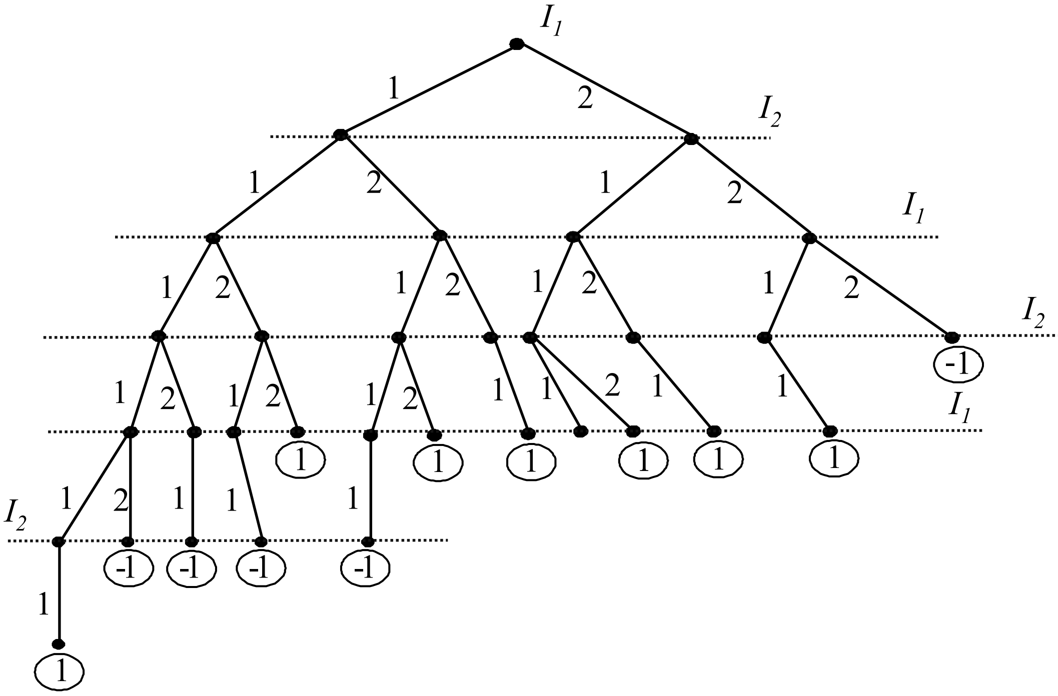


Рис. 5.7 – Представление игры со спичками в позиционной форме

В этой игре у первого игрока $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 64$ чистых стратегий, у второго игрока — тоже 64. Чтобы перейти к нормальной форме, необходимо построить матрицу 64×64.

Процесс построения матриц большой размерности слишком трудоемок. Существует более простой метод решения игры, который позволяет найти оптимальные стратегии и цену игры без перехода к нормальной форме — это *графический метод решения игры с полной информацией*.

Рассмотрим этот метод на примере игры в 6 спичек. Введем следующие обозначения: возле каждой вершины будем ставить число в кружке, которое будет обозначать выигрыш 1-го игрока в случае, если игра начинается из данной вершины и далее ведется оптимально обоими игроками до конца; оптимальные альтернативы будем помечать стрелками. Алгоритм решения состоит в разметке дерева снизу-вверх: 1-й игрок из нескольких возможных решений всегда выбирает максимальное, 2-й — минимальное. В процессе разметки дерева мы поднимемся до начальной вершины. Число в кружке около этой вершины даст нам цену игры, а расположение стрелок укажет оптимальные чистые стратегии игроков. Решение приведено на рис. 5.8.

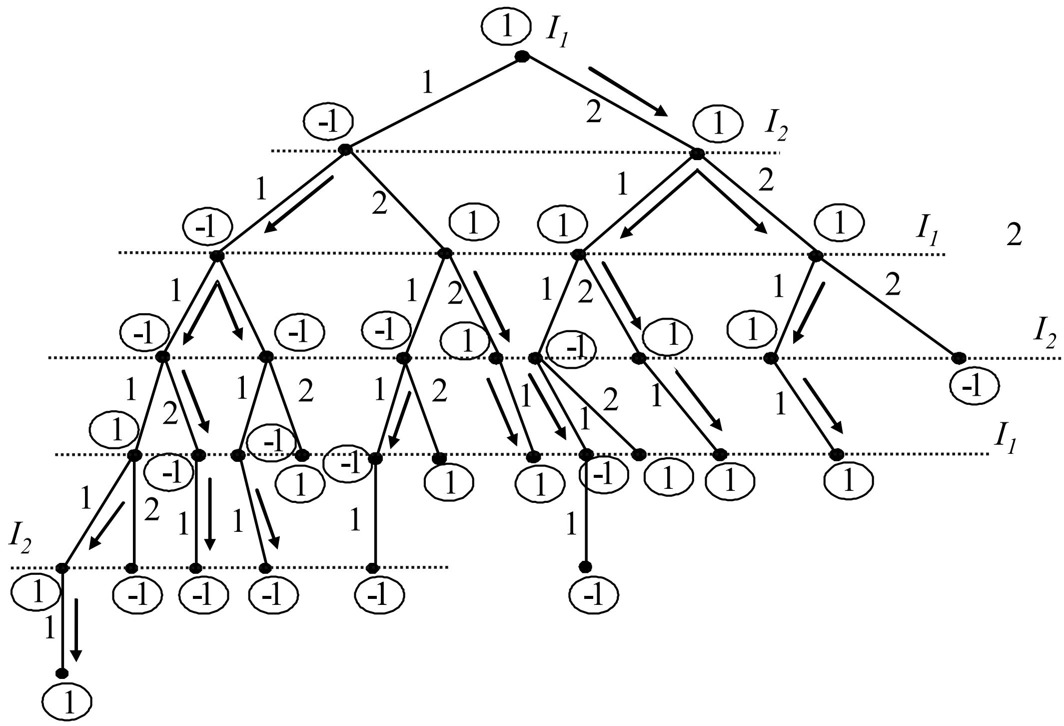


Рис. 5.8 – Графический метод решения игры в позиционной форме

Описанный алгоритм пригоден для решения любых игр с полной информацией, заданных в позиционной форме. Причем из самого способа построения видно, что в результате решения всегда получаются оптимальные чистые стратегии игроков, следовательно, все игры с полной информацией имеют решение в чистых стратегиях.

5.3.2 Бесконечные антагонистические игры

Бесконечные игры

Будем рассматривать бесконечные антагонистические игры в нормальной форме:

$$\Gamma = \langle X, Y, J \rangle,$$

где X, Y — множество чистых стратегий первого и второго игроков, соответственно, и хотя бы одно из них бесконечно; J — функция выигрыша первого игрока. Ввиду бесконечности X и Y невозможно выписать все выигрыши игрока в виде матрицы.

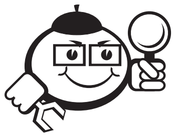
Игра состоит в выборе первым игроком чистой стратегии $x \in X$, а вторым игроком — стратегии $y \in Y$, после чего первый игрок получает выигрыш $J(x, y)$, а второй игрок — $-J(x, y)$. Как и во всех антагонистических играх, принципом оптимальности в бесконечных антагонистических играх является принцип минимакса:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} J(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} J(x, y).$$

Стратегии x^* и y^*, на которых достигаются максимум и минимум, называются оптимальными чистыми стратегиями. Они, как и в матричных играх, являются уравновешенными и удовлетворяют неравенству:

$$J(x, y^*) \leqslant J(x^*, y^*) \leqslant J(x^*, y),$$

а значение $V = J(x^*, y^*)$ является ценой игры.



Пример 5.16

Рассмотрим бесконечную игру. Пусть каждый игрок выбирает произвольное число из сегмента [−1, 1]. Если сумма выбранных чисел оказывается положительной, то ее выигрывает игрок 1, в противном случае эту сумму выигрывает игрок 2.

Решение:

Запишем игру в нормальной форме:

$$\Gamma = \langle [-1, 1], [-1, 1], x + y \rangle.$$

Найдем решение по максиминному и минимаксному критериям:

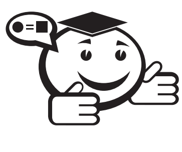
$$V_1 = \max_{x \in [-1, 1]} \left[\min_{y \in [-1, 1]} (x + y) \right] = \max_{x \in [-1, 1]} (x - 1) = 0,$$

$$V_2 = \min_{y \in [-1, 1]} \left[\max_{x \in [-1, 1]} (x + y) \right] = \min_{y \in [-1, 1]} (1 + y) = 0,$$

т. е. цена игры $V = 0$, а оптимальные чистые стратегии: $x^* = 1$, $y^* = -1$.

Изменим условия рассмотренного примера таким образом, чтобы границы −1 и 1 не входили в множество стратегий игроков: $\Gamma = \langle (-1, 1), (-1, 1), x + y \rangle$.

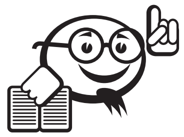
Такая игра не имеет седловых точек, т. к. числа −1 и 1, на которых достигаются максимум и минимум, не входят во множество стратегий игроков. Другими словами, минимум и максимум не достигаются, т. к. множество (−1, 1) не компактно. Между тем ясно, что игрок 1 может выбрать число x^ε, сколь угодно близкое к единице $(1 - x^\varepsilon = \varepsilon)$, и добиться выигрыша, сколь угодно близкого к цене игры $V = 0$. Аналогично, второй игрок может выбрать y^ε, близкое к минус единице $(1 + y^\varepsilon = \varepsilon)$, и добиться проигрыша, близкого к $V = 0$. Выбранные числа x^ε и y^ε называются ε-*оптимальными стратегиями*, а предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(x^\varepsilon + y^\varepsilon) = 0$ — ценой игры.



Пара чистых стратегий $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ называется ***ε-седловой точкой****, если для любых стратегий $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство $J(x, y^\varepsilon) - \varepsilon \leqslant J(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leqslant J(x^\varepsilon, y) + \varepsilon$, где x^ε, y^ε —* ***ε-оптимальные стратегии****.*

Смысл ε-оптимальности состоит в том, что отклонение игрока от ε-оптимальной стратегии может увеличить его выигрыш разве лишь на ε.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в игре Γ существует ε-седловая точка $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$. Тогда существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = V$, который будем называть ценой игры.



Теорема существования. Для того чтобы в бесконечной антагонистической игре при любом $\varepsilon > 0$ существовали ε-оптимальные стратегии и цена игры, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} J(x, y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} J(x, y) = V.$$

Смешанное расширение бесконечной игры

Существуют бесконечные антагонистические игры, не имеющие даже ε-оптимальных стратегий. В данном классе игр, как и в матричных играх, оптимальные чистые стратегии существуют не всегда. Введение смешанных стратегий в бесконечных играх не столь удачно, как в матричных, однако и здесь класс игр, имеющих оптимальные смешанные стратегии, достаточно широк.

Бесконечное множество стратегий бывает двух видов: дискретным (стратегии игрока изолированы друг от друга) и непрерывным (т. е. для любого малого $\delta > 0$ δ-окрестность любой стратегии содержит другие стратегии). В случае дискретного множества стратегий обычно предполагается, что оно счетно. Смешанные стратегии и ожидаемый выигрыш определяются как в матричных играх, с той лишь разницей, что количество компонент смешанной стратегии и количество слагаемых в формуле математического ожидания — бесконечное множество. В таких играх множество смешанных стратегий некомпактны, т. е. максимум и минимум не будут существовать.

Мы будем рассматривать игры только с непрерывными множествами стратегий. В непрерывных множествах X, Y мы не можем определить смешанные стратегии, как раньше: вероятность выбора чистой стратегии x/y может быть равна нулю для всех $x \in X/y \in Y$.

Теперь задание смешанной стратегии игрока будет состоять в указании тех вероятностей, с которыми выбираются чистые стратегии игроков из тех или иных подмножеств множества стратегий. Другими словами, смешанная стратегия игрока 1(2) есть вероятностное распределение на множестве $2^x(2^y)$, где через 2^x обозначено множество всех подмножеств множества X. Дадим строгое определение смешанных стратегий.

*Система F подмножеств Ω называется σ-**алгеброй**, если она является алгеброй и, кроме того, выполнено следующее свойство:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F,\ \forall A_i \in F.$$

*Система G подмножеств Ω называется **алгеброй**, если*

$$\Omega \in G,$$

$$\forall A, B \in G \to A \bigcup B \in G, \quad A \bigcap B \in G,$$
$$\forall A \in G \to \overline{A} \in G.$$

Пусть A — некоторая σ-алгебра на 2^x; B — некоторая σ-алгебра на 2^y; $\aleph$ (каппа) и Z — множества всех вероятностных мер на A и B соответственно, т. е.

$$\aleph = \left\{\mu \,|\, \mu(\varnothing) = 0,\ \mu(X) = 1,\ 0 \leqslant \mu(C) \leqslant 1,\ \forall C \in A\right\};$$
$$Z = \left\{\nu \,|\, (\varnothing) = 0,\ \nu(Y) = 1,\ 0 \leqslant \nu(D) \leqslant 1,\ \forall D \in B\right\}.$$

*Любые вероятностные меры $\mu \in \aleph$ и $\nu \in Z$ называются **смешанными стратегиями игроков**. Множества $\aleph$ и Z суть множества смешанных стратегий игроков.*

Пусть функция выигрыша J измерима относительно σ-алгебры $A \times B$. Тогда существует двойной интеграл $M(\mu, \nu) = \int\limits_X \int\limits_Y J(x, y) d\mu\, d\nu$, представляющий собой математическое ожидание выигрыша $J(x, y)$ по мерам μ, ν.

Смешанным расширением игры Γ называется игра $\widetilde{\Gamma} = \langle \aleph, Z, M \rangle$, где $M(\mu, \nu)$ — функция выигрыша первого игрока.

Поведение игроков в смешанном расширении $\widetilde{\Gamma}$ можно комментировать следующим образом: игрок 1, независимо от выбора противника, выбирает вероятностную меру $\mu \in \aleph$ и реализует в соответствии с этой мерой случайный выбор чистой стратегии $x \in X$. Далее первый игрок получает выигрыш $J(x, y)$.

*Пара смешанных стратегий (μ^*, ν^*) называется **седловой точкой в игре** $\widetilde{\Gamma}$, если для всех вероятностных мер $\mu \in \aleph$, $\nu \in Z$*

$$M(\mu, \nu^*) \leqslant M(\mu^*, \nu^*) \leqslant M(\mu^*, \nu).$$

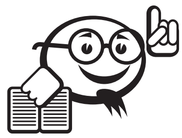
Стратегии μ^* *и* ν^* *называются* ***оптимальными****, а величина*

$$M(\mu^*, \nu^*) = \max_{\mu}\min_{\nu} M(\mu, \nu) = \min_{\nu}\max_{\mu} M(\mu, \nu)$$

называется ***ценой игры****.*

Соответственно определяются и ε-*оптимальные стратегии* μ^ε и ν^ε, и здесь $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M(\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon) = M(\mu^*, \nu^*)$.

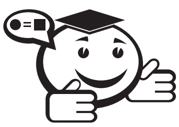
Далее рассмотрим вопрос существования оптимальных смешанных стратегий.



Пусть в игре Γ пространства X и Y компактны, а функция J непрерывна на $X \times Y$. Тогда в игре Γ существуют оптимальные смешанные стратегии и цена игры.

В настоящее время теоремы существования доказаны для весьма широких классов бесконечных игр.

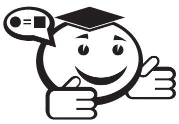
Игры на единичном квадрате



Два множества ***эквивалентны****, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Понятие эквивалентности применимо как к конечным, так и к бесконечным множествам.*

Для двух эквивалентных бесконечных множеств говорят, что они имеют ***одинаковую мощность****. Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел между 0 и 1, говорят, что они имеют* ***мощность континуума****.*

Обширный класс бесконечных игр составляют игры, в которых каждый игрок имеет континуум чистых стратегий. В таких играх множество стратегий игрока можно сопоставить с множеством точек действительных чисел интервала [0, 1]. Здесь чистой стратегией 1/2 игрока будет любое действительное число из этого интервала: $x/y \in [0, 1]$. Поэтому говорят, что $J(x, y)$ определена на единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.



Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют континуум чистых стратегий, называются ***играми на единичном квадрате****.*

Как и прежде, смешанная стратегия игрока есть вероятностная мера на σ-алгебре над множеством [0, 1]. В играх на единичном квадрате будем обозначать: x, y — чистые стратегии, а F, Q — смешанные стратегии игроков. Если первый игрок использует чистую стратегию x, а второй игрок — смешанную стратегию Q, то ожидаемый выигрыш первого игрока будет определяться по формуле:

$E(x, Q) = \int\limits_0^1 J(x, y)\, dQ(y)$. Аналогично, если первый игрок использует смешанную стратегию F, а второй — чистую стратегию y, то ожидаемый выигрыш первого игрока: $E(F, y) = \int\limits_0^1 J(x, y)\, dF(x)$.

Если оба игрока применяют смешанные стратегии, то ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$E(F, Q) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 J(x, y)\, dF(x)\, dQ(y).$$

Так как сегмент [0, 1] компактен, то, если функция выигрыша $J(x, y)$ непрерывна по обеим переменным, игра *обладает седловой точкой в смешанных стратегиях*.

Единых методов решения бесконечных игр нет. Попытка решения таких игр приводит к успеху лишь в отдельных случаях. В непрерывных играх на единичном квадрате решение в явном виде можно находить при функции выигрыша, выпуклой по стратегии второго игрока и вогнутой по стратегии первого игрока.

Вспомним понятия о выпуклых функциях.

*Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на $[a, b]$. Говорят, что $f(x)$ **выпукла**, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство:*

$$f\left[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\right] \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

*$F(x)$ **строго выпукла**, если при $x_1 \neq x_2$ и $\lambda \in [0, 1]$ следует строгое неравенство.*

При противоположном неравенстве $f(x)$ вогнута.

Любая точка графика выпуклой функции находится не выше отрезка, соединяющего концы любой точки графика, содержащей эту точку (рис. 5.9).

Пусть $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ и $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. По аналогии можно написать $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

При непрерывной f и при $n \to \infty$ для выпуклой функции получаем:

$$f\left(\int\limits_a^b x\, dF(x)\right) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\, dF(x).$$

Если $f(x)$ имеет вторую производную, то ее выпуклость (вогнутость) равносильна неравенству: $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \geqslant 0$ $\left(\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \leqslant 0\right)$.

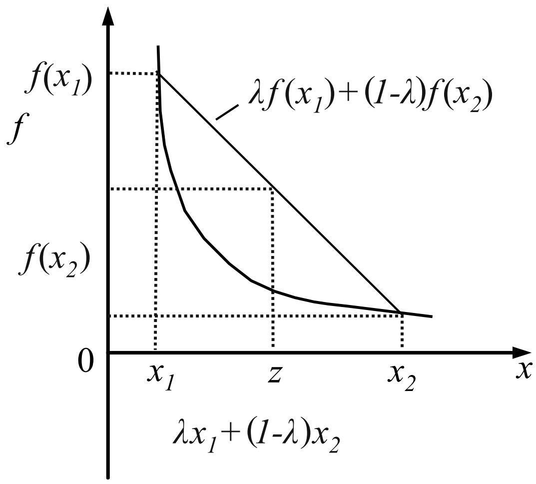
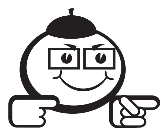


Рис. 5.9 – Геометрическое представление выпуклой функции

В случае строгого неравенства имеем строгую выпуклость/вогнутость.

Допустим, что функция выигрыша $J(x, y)$ выпукла по y и имеет вторую производную по y. Тогда для любой функции распределения $F(x)$ функция $E(F, y)$ также строго выпукла по y (при неотрицательности $F(x)$):

$$\frac{d^2E(F, y)}{dy^2} = \int_0^1 \frac{d^2J(x, y)}{dy^2}\, dF(x) > 0.$$

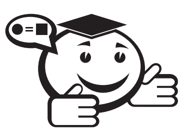


Лемма. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и строго выпукла (строго вогнута). Тогда она достигает своего минимума (максимума) на $[a, b]$ один раз.

Следствие 1. Множество точек минимума/максимума не строго выпуклой/ не строго вогнутой функции является сегментом.

Следствие 2. Выпуклая/вогнутая функция имеет график, состоящий не более чем из двух монотонных частей. Если их две, то убывание/возрастание предшествует возрастанию/убыванию.

Выпуклые/вогнутые игры



Непрерывная ***игра*** *на единичном квадрате называется* ***выпуклой (вогнутой)****, если $J(x, y)$ выпукла по y (вогнута по x). Если имеет место строгая выпуклость по y|строгая вогнутость по x, то говорят о* ***строго выпуклой (вогнутой)*** *игре. Говорят, что непрерывная игра на единичном квадрате* ***вогнуто-выпукла****, если ее функция выигрыша вогнута по x при каждом значении y и выпукла по y при каждом значении x.*

В выпуклой игре у второго (минимизирующего) игрока имеется чистая оптимальная стратегия. В вогнутой игре у первого (максимизирующего) игрока имеется чистая оптимальная стратегия.

Теорема (следствие). В вогнуто-выпуклой игре существует седловая точка в чистых стратегиях.

В строго выпуклой/вогнутой игре второй/первый игрок имеет единственную оптимальную стратегию, которая является чистой (в строго вогнуто-выпуклой игре существует единственная седловая точка в чистых стратегиях).

Пример 5.17

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle [0,\ 1],\ [0,\ 1],\ -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y \rangle$.

Решение:

Поскольку функция выигрыша непрерывна по обоим параметрам, то игра является непрерывной на единичном квадрате. Проверим игру на выпуклость/вогнутость.

$$J'_x = -4x + 3y - 1, \quad J''_{xx} = -4 < 0,$$
$$J'_y = 2y + 3x - 2, \quad J''_{yy} = 2 > 0.$$

Игра строго вогнуто-выпукла. Для решения необходимо найти x^*, максимизирующую $J(x, y)$ на $[0, 1]$, и y^*, минимизирующую $J(x, y)$ на $[0, 1]$. Так как игра имеет решение в чистых стратегиях, мы можем воспользоваться любым из двух критериев: $\min_y \max_x J(x, y) = \max_x \min_y J(x, y)$.

Возьмем минимаксный критерий: $V = \min_y \max_x J(x, y)$. Для нахождения максимума по x возьмем первую производную $J'_x = -4x + 3y - 1 = 0$, отсюда получим $x = (3y - 1)/4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Здесь x является стратегией только при $\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1$, т. к. при $y < \frac{1}{3} x < 0$.

Тогда

$$x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 1/3, \\ (3y\text{-}1)/4, & \text{если } 1/3 < y \leqslant 1. \end{cases}$$

$$V = \min_{0\leqslant y\leqslant 1} J(x, y) =$$

$$= \min\left\{\min_{0\leqslant y\leqslant 1/3}(y^2-2y),\ \min_{1/3<y\leqslant 1}\left[-2\frac{(3y-1)^2}{4^2}+y^2+3y\left(\frac{3y-1}{4}\right)-\frac{3y-1}{4}-2y\right]\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{0\leqslant y\leqslant 1/3}(y^2-2y),\ \min_{1/3<y\leqslant 1}\left(\frac{17}{8}y^2-\frac{11}{4}y+\frac{1}{8}\right)\right\}.$$

Найдем минимумы двух полученных функций через первые производные.

Производная первой функции: $2y-2=0$, $y=1$, т. к. здесь $0\leqslant y\leqslant \frac{1}{3}$, то $y=\frac{1}{3}$, $V'=-\frac{5}{9}$.

Для второй функции: $\frac{17}{4}y-\frac{11}{4}=0$, $y=\frac{11}{17}$, $V''=-\frac{13}{17}$.

$V=\min\left\{-\frac{5}{9}\Big|_{y=\frac{1}{3}},\ -\frac{13}{17}\Big|_{y=\frac{11}{17}}\right\}=-\frac{13}{17}$, отсюда

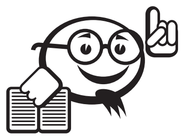
$$y^*=\frac{11}{17},\quad V=-\frac{13}{17},\quad x^*=\frac{3\cdot\frac{11}{17}-1}{4}=\frac{4}{17}.$$

Заметим, что взяв изначально для нахождения решения другой критерий: $V=\max_x\min_y J(x, y)$, мы получим тот же самый результат.

. . . .

Рассмотрим теперь нахождение решений в выпуклых и вогнутых играх.

. . . .

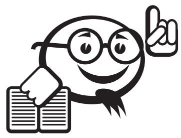


Значение *выпуклой/вогнутой игры* определяется формулой

$$V=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}J(x, y)/V=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}J(x, y).$$

. . . .

. . . .



Чистая оптимальная стратегия y^*/x^* второго/первого игрока есть решение уравнения:

$$V=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}J(x, y)/V=\min_{0\leqslant y\leqslant 1}J(x, y).$$

. . . .

Пусть (F^*, y^*) — седловая точка в выпуклой игре.

Тогда для всех $x\in[0, 1]$ $J(x, y^*)\leqslant E(F^*, y^*)=V$.

Разобьем все стратегии первого игрока следующим образом: пусть

$$X_1=\left\{x\in[0, 1]\,|\,J(x, y^*)=V\right\},\quad X_2=\left\{x\in[0, 1]\,|\,J(x, y^*)<V\right\}.$$

Очевидно, $X_1 \cup X_2 = [0,\ 1]$. Для точек из X_2 имеем:

$$\int_0^1 J(x, y^*)\, dF^*(x) < \int_0^1 V\, dF^*(x)$$

или (из определения выигрыша)

$$E(F^*,\ y^*) < V = E(F^*,\ y^*).$$

Содержательный смысл полученного противоречия таков, что оптимальная стратегия первого игрока смешивает только точки из множества X_1, и не использует точки из множества X_2. Поэтому чистые стратегии из X_1 называются *существенными стратегиями* первого игрока.

Пусть в выпуклой игре функция выигрыша $J(x,\ y)$ дифференцируема по y, а y^* — чистая оптимальная стратегия 2-го игрока. Тогда:

1) если $y^* = 1$, то среди оптимальных стратегий 1-го игрока существует чистая стратегия x', такая, что $x' \in X_1$, $J'_y(x',\ 1) \leqslant 0$;
2) если $y^* = 0$, то среди оптимальных стратегий 1-го игрока существует чистая стратегия x'', такая, что $x'' \in X_1$, $J'_y(x'',\ 0) \geqslant 0$;
3) если $0 < y^* < 1$, то среди оптимальных смешанных стратегий 1-го игрока существует такая, которая является смесью существенных стратегий x', x'', и для них выполняются неравенства $J'_y(x',\ y^*) \geqslant 0$, $J'_y(x'',\ y^*) \leqslant 0$. При этом стратегии употребляются с вероятностями α и $1-\alpha$ соответственно, где α — решение уравнения:

$$\alpha J'_y(x',\ y^*) + (1-\alpha) J'_y(x'',\ y^*) = 0.$$

Оптимальную стратегию в этом случае будем обозначать:

$$F^* = (\,\alpha|_{x'},\ 1-\alpha|_{x'}\,).$$

Пример 5.18

Дана игра на единичном квадрате

$$\Gamma = \langle [0,\ 1],\ [0,\ 1],\ y^3 - 3xy + x^3 \rangle.$$

Решение:

В данной игре функция выигрыша непрерывна по обеим переменным, поэтому игра имеет решение. Найдем производные функции по обеим переменным для определения выпуклости или вогнутости игры:

$J'_x = -3y + 3x^2, \quad J''_{xx} = 6x \geqslant 0,$

$J'_y = -3y^2 + 3x, \quad J''_{yy} = 6y \geqslant 0$ — игра выпукла.

Решение будем находить по формуле $V = \min\limits_y \max\limits_x \left(y^2 - 3xy + x^3\right)$.

Так как функция выпукла по x, то имеется единственный минимум по x на данном отрезке. Тогда максимум по x достигается либо при $x = 0$, либо при $x = 1$ (в зависимости от y). Рассмотрим графики функций $J(0, y) = y^3$, $J(1, y) = y^3 - 3y + 1$ (рис. 5.10).

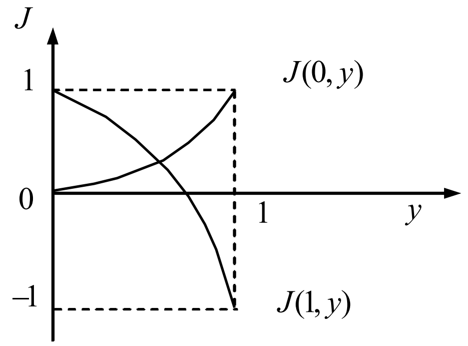


Рис. 5.10 – Графики функции выигрыша при граничных значениях x

Функции пересекаются в точке $y = \frac{1}{3}$.

Из графика видно, что

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} J(x, y) = \begin{cases} \mathrm{J(1,\ y)}, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{3}; \\ \mathrm{J(0,\ y)}, & \text{при } \frac{1}{3} < y \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тогда минимум из всех максимумов достигается в точке пересечения:

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} J(x, y) = \frac{1}{27} \text{ при } y = \frac{1}{3}.$$

Мы нашли цену игры и оптимальную стратегию второго игрока: $V = \frac{1}{27}$, $y^* = \frac{1}{3}$.

Необходимо найти оптимальную стратегию первого игрока F^*. Так как $0 < y^* < 1$, то F^* — это смесь двух существенных стратегий. Найдем эти стратегии.

$$J(x, y^*) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right) \cdot x + x^3 = \frac{1}{27}; \quad -x + x^3 = 0.$$

$x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$ ($x_3 = -1$ не является стратегией).

Таким образом, оптимальное поведение 1-го игрока состоит в смешивании своих крайних стратегий.

Найдем вероятность выбора первой стратегии α. Должно выполняться условие: $J'_y(x', y^*) \geqslant 0$, $J'_y(x'', y^*) \leqslant 0$.

$$J'_y(x_1, y^*) = \left.\frac{dy^3}{dy}\right|_{y=\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0 \text{ (коэффициент при } \alpha).$$

$$J'_y(x_2, y^*) = \left.\frac{\alpha(y^3 - 3y + 1)}{\alpha y}\right|_{y=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3} < 0 \text{ (коэффициент при } 1 - \alpha).$$

Решаем уравнение: $\frac{1}{3} - \frac{8}{3}(1 - \alpha) = 0$; $\alpha = \frac{8}{9}$, отсюда оптимальная стратегия первого игрока $F^* = \left(\left.\frac{8}{9}\right|_{x=0}, \left.\frac{1}{9}\right|_{x=1}\right)$.

. . . .

Заметим, что не существует единого подхода к решению выпуклых и вогнутых игр. Основная трудность — определение поведения функции J, зависящей от двух переменных. Один из вариантов примерного порядка решения выпуклых/вогнутых игр можно посмотреть в [7].

Пример 5.19

Решить игру $\Gamma = \left\langle [0, 1], [0, 1], \sin\frac{\pi(x+y)}{2} \right\rangle$. *Функция непрерывна.*

Решение:

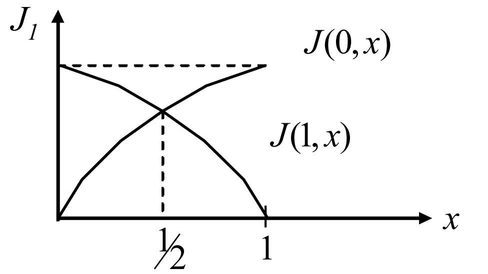


Рис. 5.11 – График функции выигрыша при граничных значениях y

Здесь $\frac{d^2J(x, y)}{dx^2} = -\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi(x+y)}{2} \leqslant 0$ — игра вогнута и решение будем находить по минимаксному критерию:

$$V = \max_x \min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Из графика (рис. 5.11)

$$\min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ (y = 0), \\ \sin\frac{\pi(x+1)}{2}, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1\ (y = 1). \end{cases}$$

$$V = \max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant 1/2}\sin\frac{\pi x}{2},\ \max_{1/2\leqslant x\leqslant 1}\sin\frac{\pi(x+1)}{2}\right\} = \max\left\{\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|_{x=\frac{1}{2}},\ \left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|_{x=\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мы нашли цену игры и оптимальную стратегию первого игрока: $V = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x^* = \dfrac{1}{2}$.

Найдем существенные стратегии: $\sin\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}+y\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y' = 0$, $y'' = 1$.

Так как

$$J'_x(x,\,0)\big|_{x=1/2} = \pi/2\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 0,$$

$$J'_x(x,\,1)\big|_{x=1/2} = \pi/2\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} < 0,$$

то $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\beta - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}(1-\beta) = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{1}{2} : Q^* = \left(\left.\dfrac{1}{2}\right|_{y=0},\ \left.\dfrac{1}{2}\right|_{y=1}\right)$.

. . . .

5.4 Игры многих лиц

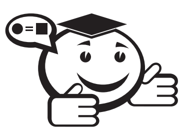
5.4.1 Общие понятия

Нормальная форма игры N лиц:

$$\Gamma = \langle X_i, J_i,\ i\in N\rangle,$$

где N — количество игроков; X_i — множество стратегий i-го игрока; J_i — функция выигрыша i-го игрока.

В ситуации $(x_1,\ldots,x_n)$ i-й игрок получает величину $J_i(x_1,\ldots,x_n)$. По-прежнему цель каждого игрока — максимизировать свой выигрыш.



Любое подмножество S множества N называется ***коалицией****. Коалиция может состоять из одного игрока или быть пустой. Множество всех возможных коалиций равно 2^N.*

Важное отличие игр многих лиц от антагонистических заключается в возможности сообщения и сговора между игроками, т. е. в образовании коалиций. В этом смысле игры многих лиц можно классифицировать по ограничениям, налагаемым правилами игры на образование коалиций. Выделим три подхода к задаче ограничения сговора [6].

1. Реальные условия таковы, что игроки не могут или не хотят сообщаться между собой, не вступают ни в какие сговоры. Такие игры называются *бескоалиционными или некооперативными играми*.
2. Наложены некоторые ограничения на сговор. Подобная реальная обстановка приводит к образованию непересекающихся коалиций, причем внутри коалиции имеет место полное сотрудничество, а между ними — либо полное безразличие, либо конкуренция, либо антагонизм. Такое разбиение игроков на коалиции называется *коалиционной структурой*, а *игры — играми в условиях коалиционного разбиения*.
3. Допускается любой логически возможный сговор между всеми игроками. Такая свобода сотрудничества приводит в большинстве случаев к объединению всех игроков в одну большую коалицию, если, конечно, в максимальной коалиции каждый игрок получает доход больший, чем в любой другой коалиции. Это класс *кооперативных игр*.

В случае наличия сговора в играх многих лиц большое значение имеет делимость (трансферабельность) или неделимость (нетрансферабельность) выигрышей. В первом случае игроки в состоянии сравнивать свои выигрыши, имеют возможность делить общий доход и передавать, если это необходимо, часть своего выигрыша другим игрокам, т. е. производить *побочные платежи*. Кооперативные игры с делимыми выигрышами называются *классическими кооперативными играми* или *кооперативными играми с трансферабельными выигрышами*. В играх с неделимыми выигрышами (например, моральные выигрыши) побочные платежи не имеют места. Результат совместных действий игроков будет выражаться не общей суммой доходов, как в классических кооперативных играх, а некоторым множеством *векторов выигрышей*, соответствующие компоненты которых могут быть гарантированы членам этой коалиции. Такие игры называются *кооперативными играми без побочных платежей* или*кооперативными играми с нетрасферабельными выигрышами*.

Исследование игр тем сложнее, чем больше в них игроков. В настоящее время наиболее полно исследованы игры 2-х, 3-х и 4-х лиц. Мы рассмотрим лишь основные вопросы теории игр многих лиц.

5.4.2 Конечные бескоалиционные игры

Рассмотрим бескоалиционную игру, где множества стратегий игроков X_i, $i = 1,\ldots, n$ конечны. Под смешанной стратегией игрока будем понимать, как и раньше, вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий. Пусть $X_i = (x_i^1,\ldots, x_i^{m_i})$. Тогда смешанная стратегия i-го игрока есть вектор $\mu_i = (\mu_i^1,\ldots,\mu_i^{m_i})$, где для любого j $0 \leqslant \mu_i^j \leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^{m_i} \mu_i^j = 1$. Множество смешанных стратегий i-го игрока будем обозначать через $\aleph_i$. Если все игроки применяют свои смешанные стратегии, то их ожидаемые выигрыши вычисляются как математическое ожидание:

$$M_i\left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right) = \sum_{j_1=1}^{m_1}\ldots\sum_{j_n=1}^{m_n} J_i\left(x_1^{j_1},\ldots,x_n^{j_n}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\mu_k^{j_k},\ i = \overline{1,\,n}.$$

Для $\forall i$ в ситуации $\left(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, x_i^j, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_n\right)$

$$M_i\left(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, x_i^j, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_n\right) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{j_{i-1}=1}^{m_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{m_{i+1}} \ldots \sum_{j_n}^{m_n} J_i\left(x_1^{j_1}, \ldots, x_n^{j_n}\right) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \mu_k^{j_k}.$$

Вектор выигрышей $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ можно представить точкой в многомерном пространстве. Когда игроки перебирают свои всевозможные смешанные стратегии μ_i, точка $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ пробегает некоторое множество K, называемое ***платежным множеством****, со следующими свойствами:*

1. *Каждому вектору $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ смешанных стратегий соответствует единственная точка из K.*
2. *Каждой точке платежного множества соответствует по крайней мере один вектор смешанных стратегий. Таких векторов может быть и несколько, но они эквивалентны в том смысле, что обеспечивают одинаковые средние выигрыши. Имея в виду такое однозначное соответствие между выигрышами и стратегиями, будем условно называть вектора $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ в пространстве выигрышей стратегиями.*
3. *Множество K в общем случае не является выпуклым.*

Пример 5.20

Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут остаться дома и смотреть по телевизору футбольный матч, а могут пойти в театр. Причем муж больше заинтересован остаться дома, и от этого он получает удовлетворение, равное 2, а жена — 1. При посещении театра они получают соответственно 1 и 2. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по −1. Будем считать, что никакой сговор между ними невозможен. Так как эта игра 2-х лиц, то мы можем представить ее в матричной форме, но, в отличие от антагонистических игр, теперь нужно задать две матрицы выигрыша:

$$J_м = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad J_ж = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Обозначим выигрыши первого и второго игроков через V и U соответственно.

Смешанная стратегия 1-го игрока — $(\mu_1,\ 1-\mu_1)$, 2-го — $(\mu_2,\ 1-\mu_2)$. Тогда:

$$\begin{aligned} V(\mu_1,\mu_2) &= 2\mu_1\mu_2 - \mu_1(1-\mu_2) - (1-\mu_1)\mu_2 + (1-\mu_1)(1-\mu_2) = \\ &= 5\mu_1\mu_2 - 2(\mu_1+\mu_2) + 1, \\ U(\mu_1,\mu_2) &= \mu_1\mu_2 - \mu_1(1-\mu_2) - (1-\mu_1)\mu_2 + 2(1-\mu_1)(1-\mu_2) = \\ &= 5\mu_1\mu_2 - 3(\mu_1+\mu_2) + 2. \end{aligned}$$

Платежное множество есть область значений функций V и U, когда аргументы пробегают область определения $0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant \mu_2 \leqslant 1$. Для данной задачи после некоторых преобразований получим следующий вид платежного множества (заштрихованная фигура на рис. 5.12).

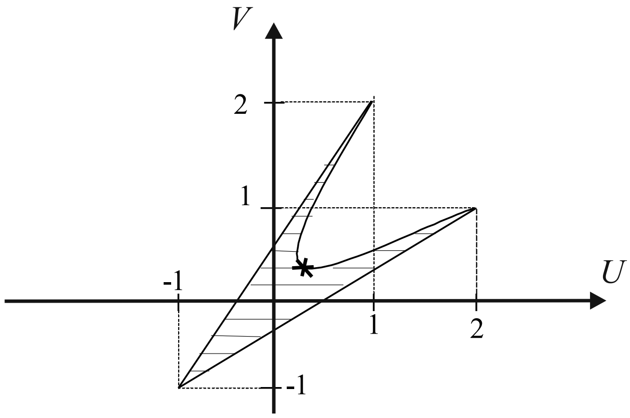


Рис. 5.12 – Платежное множество игры

. . . .

Рассмотрим вопрос решения в некооперативных играх.

Поскольку выигрыш игрока зависит от поведения всех его партнеров, то при выборе своей стратегии он должен учитывать все возможные ситуации. Наихудшим для i-го игрока является тот случай, когда все остальные игроки пойдут против него. Тогда он может гарантировать лишь величину (принцип осторожности):

$$V(i) = \max_{x_i}\min_{x_1}\ldots\max_{x_{i-1}}\max_{x_{i+1}}\ldots\max_{x_4} J_i(x_1,\ldots,x_n).$$

Если все игроки будут применять свои защитные стратегии, то мы получим ситуацию $(V_1^*,\ldots,V_N^*)$, которая называется точкой *status quo*.

Но, по определению, в бескоалиционной игре каждый игрок имеет свою цель — максимизировать свой выигрыш, а заданная ситуация возможна либо при $J_i = -J_j\ \forall j \in N\backslash i$, либо при $J_i = -\sum\limits_{j\in N\backslash i} J_j$. Очевидно, что первое равенство не будет выполняться для всех i одновременно, а в случае второго равенства бескоалиционную игру можно заменить на N антагонистических игр. В остальных случаях игроку, видимо, нет надобности придерживаться максиминной стратегии. В чем же состоит принцип оптимального действия игрока в бескоалиционной игре? Вспомним принцип равновесия и рассмотрим его для игр многих лиц, некооперативный вариант.

Пусть дана бескоалиционная игра. Ситуация $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, *где* $x_i^* \in X_i$, $i = \overline{1, n}$, *называется* ***равновесной****, если для всех* $i = \overline{1, n}$ $J_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) \geqslant J_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$ *для любого* $x_i \in X_i$. *Другое название равновесной ситуации —* ***точка Нэша****.*

В смешанных стратегиях ситуация равновесия определяется аналогично. Более того, существует теорема, гласящая, что любая бескоалиционная игра n лиц имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. В ситуации равновесия ни один игрок не заинтересован в отклонении от своей стратегии, если остальные игроки придерживаются стратегий, соответствующих данной равновесной ситуации.

Но для данного класса игр выбор равновесных стратегий в качестве оптимальных довольно спорен. Во-первых, в отличие от антагонистических игр, равновесные стратегии могут не быть защитными, а защитные не обязательно являются уравновешенными (т. е. принципы осторожности и уравновешенности вступают в противоречие, а также затрудняются методы поиска равновесных стратегий). Во-вторых, игра может иметь несколько ситуаций равновесия. Причем, в отличие от антагонистических игр, они не обладают свойствами эквивалентности и взаимозаменяемости, что приводит к неопределенности (неясно, какая из ситуаций равновесия будет реализована) и, как следствие, к разным результатам.

Пример 5.21

Рассмотрим задачу из примера 5.20, и найдем для нее сначала защитные стратегии.

Защитные стратегии игроков можно находить с помощью любого известного нам метода. Разница по сравнению с антагонистическим вариантом заключается в том, что выигрыш каждого игрока рассчитывается по своей платежной матрице и поэтому защитная стратегия второго игрока тоже максиминная, а не минимаксная, как была раньше. Для поиска воспользуемся графическим методом (рис. 5.13).

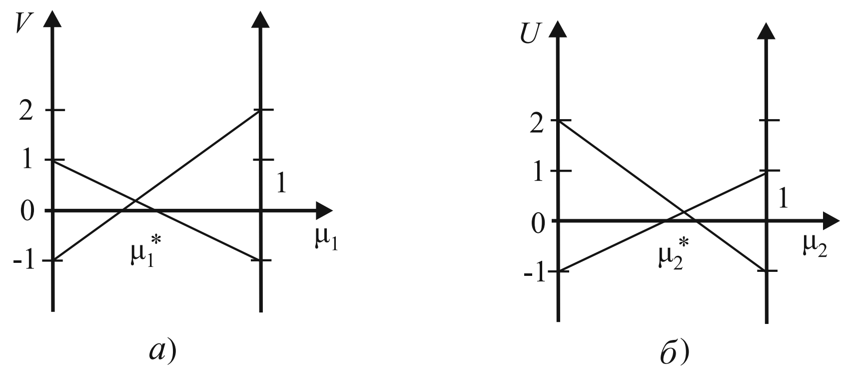


Рис. 5.13 – Поиск защитных стратегий: *а*) — для 1-го игрока; *б*) — для 2-го игрока

$$1 - 2\mu_1 = -1 + 3\mu_1, \quad \mu_1 = \frac{2}{5}, \quad \mu_1^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right);$$
$$2 - 3\mu_1 = -1 + 2\mu_2, \quad \mu_2 = \frac{3}{5}, \quad \mu_2^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right);$$
$$V^* = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + 1 = \frac{1}{5}, \quad U^* = \frac{1}{5}.$$

(V^*, U^*) — точка status quo (на рис. 4.1 она показана звездочкой).

Для этой игры можно указать, по крайней мере, три равновесных ситуации:

1) $\mu_1' = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right)$, $\mu_2' = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $V' = \frac{1}{5}$, $U' = \frac{1}{5}$;

2) $\mu_1'' = (1, 0)$, $\mu_2'' = (1, 0)$, $V'' = 2$, $U'' = 1$;

3) $\mu_1''' = (0, 1)$, $\mu_2''' = (0, 1)$, $V''' = 1$, $U''' = 2$.

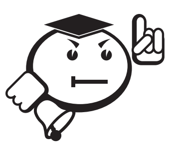
Их уравновешенность можно проверить прямой проверкой. Например, для третьей ситуации:

$$U(\mu_1, \mu_2''') = 5 \cdot \mu_1 \cdot 0 - 3(\mu_1 + 0) + 2 = 2 - 3\mu_1 \text{— максимум достигается при } \mu_1''' = 0.$$
$$V(\mu_1''', \mu_2) = 5 \cdot 0 \cdot \mu_2 - 3(0 + \mu_2) + 1 = 1 - 3\mu_2 \text{— максимум достигается при } \mu_2''' = 0.$$

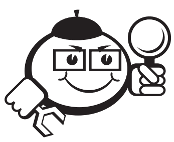
Так как игра некооперативная и игроки не могут договориться о совместном использовании стратегий, первый игрок, наверное, захочет воспользоваться стратегией μ_1'' и получить выигрыш $V'' = 2$, а второй — стратегией μ_2''' и получить выигрыш $U''' = 2$. В результате, при (μ_1'', μ_2''') получаем вектор выигрышей $U = -1$, $V = -1$, т. е. вместо того чтобы получить по 2, оба игрока получат по -1.

. . . .

Таким образом, ввиду противоречивости принципа равновесия, не удается сформулировать непротиворечивого понятия решения. Можно только порекомендовать считать решением бескоалиционных игр пару защитных стратегий.



Если все игроки будут применять свои защитные стратегии, то в некоторых случаях они могут получить даже больше, чем гарантированный выигрыш.



Пример 5.22

Пусть задана следующая бескоалиционная игра трех лиц:

$$X_1 = \{0, 2\}, X_2 = \{1, 2, 3\}, X_3 = \{0, 3, 4\}, J_1 = J_2 = J_3 = x + y + z.$$

Решение:

Здесь защитная стратегия первого игрока $x_1^* = 2$, при этом гарантированный выигрыш $V_1 = 3$. Защитные стратегии второго и третьего игроков соответственно $x_2^* = 3$ и $x_3^* = 4$, гарантированные выигрыши — $V_2 = 3$, $V_3 = 5$. При этом точка *status quo* $(V_1^*, V_2^*, V_3^*) = (9, 9, 9)$.

Таким образом, применяя свои защитные стратегии, игроки получат максимальные выигрыши.

. . . .

5.4.3 Кооперативные игры без побочных платежей

В кооперативных играх без побочных платежей предполагается, что игроки могут сообщаться в процессе игры и принимать согласованные действия, используя совместные стратегии.

. . . .

Будем называть ***совместной чистой стратегией*** *множество чистых стратегий, которое игроки обязуются использовать совместно.*

. . . .

. . . .

Тогда ***совместная смешанная стратегия*** *игроков $\mu_s \in \aleph_s$ есть распределение вероятностей на множестве их совместных чистых стратегий. Множество совместных смешанных стратегий коалиции S определяется как $\aleph_S = \prod\limits_{i \in S} \aleph_i$.*

. . . .

Для случая двух игроков удобно представлять совместную смешанную стратегию в виде матрицы:

$$Z = \|Z_{ij}\|_{m \times n},$$

где m, n — количество стратегий 1-го и 2-го игроков соответственно; $Z_{ij} \geqslant 0$, $\sum\limits_i \sum\limits_j Z_{ij} = 1$.

Применяя совместные смешанные стратегии, игроки расширяют платежное множество, введенное в некооперативном варианте игры. Новое множество будет выпуклым и представляет собой выпуклую оболочку платежного множества некооперативной игры.

Задача игроков состоит в выборе наилучшей совместной стратегии. То есть они должны выбрать такую точку совместного платежного множества, которая была бы наилучшей для обоих игроков.

Пусть имеются два вектора смешанных стратегий μ' и μ''. В платежном множестве им соответствуют точки $(M_1', \ldots, M_n')$ и $(M_1'', \ldots, M_n'')$.

Говорят, что стратегия μ' доминирует стратегию μ'', если $\forall i \; M_i' \geqslant M_i''$.

Всем игрокам выгодно отказаться от доминируемых стратегий. Этот отказ приводит к тому, что разумными являются только стратегии, лежащие на «северовосточной» границе платежного множества. Эти стратегии образуют *переговорное множество*, или *множество Парето*. Приведем строгое определение оптимальности по Парето.

Ситуация μ^* называется оптимальной по Парето, если для любой совместной смешанной стратегии $\mu \in \aleph$ либо $M(\mu^*) = M(\mu)$, либо $M_i(\mu^*) > M_i(\mu)$, хотя бы для одного $i = 1, n$. Или для $\forall\ i\ M_i(\mu^*) \geqslant M_i(\mu)$.

Множество оптимальных по Парето ситуаций обозначим $\aleph^R$. Множество $R = \left\{M(\mu^*)\,|\,\mu^* \in \aleph^R\right\}$ называется ***множеством Парето****, или* ***переговорным множеством****.*

Переговорное множество обладает тем свойством, что принадлежащие ему точки уже не доминируют друг друга. Любой вектор из R таков, что увеличение выигрыша одного игрока невозможно без уменьшения выигрыша другого игрока (здесь интересы игроков в некотором роде антагонистические), т. е. для дальнейшего решения игрокам необходимо вступить в переговоры.

Некоторые авторы считают, что само переговорное множество является решением. При этом анализ игры заканчивается, а выбор конкретной точки остается на совести игроков. Другой подход основан на понятии справедливого решения: игроки до начала игры договариваются о некоторых принципах (аксиомах) справедливости. Эти принципы сообщаются некоему незаинтересованному лицу (арбитру), основываясь на которых он выбирает конкретную точку переговорного множества.

Рассмотрим один из вариантов арбитражного решения.

Арбитражная схема Нэша

Для того чтобы вынести решение в конкретной игре, арбитру должны быть известны: вид платежного множества K в данной игре; точка *status quo* $(\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*) \in K$.

Задача построения арбитражной схемы состоит в выборе функции, которая давала бы решение $(\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n) = f\left[K, (\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)\right]$ и при этом удовлетворяла бы заданным аксиомам справедливости:

Аксиома 1 (оптимальность по Парето). Арбитражное решение должно принадлежать переговорному множеству: $(\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n) \in R$.

Аксиома 2 (индивидуальная разумность). Решение должно давать не меньше, чем гарантированный доход в точке *status quo*, даваемый защитными стратегиями при некооперативной игре: $\forall i\ \overline{\mu}_i \geqslant \mu_i^*$.

Аксиома 3 (симметрия). Если множество K симметрично относительно биссектрисы первого квадранта, то есть $\forall \mu \in K$, если ν получено из μ путем перестановки координат, то и $\nu \in K$, и точка *status quo* симметрична: $\forall i, j\ \mu_i^* = \mu_j^*$, то и арбитражное решение симметрично: $\forall i, j\ \overline{\mu}_i = \overline{\mu}_j$.

Аксиома 4 (независимость от линейных преобразований). Если платежное множество вместе с точкой *status quo* подвергнуть линейному преобразованию: $\mu_i' = \alpha_i \mu_i + \beta_i$, то новое арбитражное решение подвергнется такому же преобразованию: $\overline{\mu'}_i = \alpha_i \overline{\mu}_i + \beta_i$.

Аксиома 5 (независимость от посторонних альтернатив). Если имеется платежное множество K и арбитражное решение $\overline{\mu} \in K$, и если это множество расширяется за счет введения множества новых точек S, то новое арбитражное решение должно либо остаться прежним, либо переместиться в множество S. Таким образом, новые возможности не должны менять порядка предпочтения старых.

Существует единственная арбитражная функция, которая удовлетворяет системе аксиом Нэша, и эта функция описывается следующим алгоритмом:

1) начало координат переносится в точку *status quo*: $\forall i\ \mu_i' = \mu_i - \mu_i^*$;
2) из точек переговорного множества R выбирается та, у которой максимально произведение координат: $\overline{\mu'} = \max\limits_R \prod\limits_i \mu_i'$;
3) производится обратное преобразование координат: $\forall i\ \overline{\mu}_i = \overline{\mu'}_i + \mu_i^*$.

Эта схема дает точку переговорного множества, которую нужно считать справедливым исходом в смысле выбранных аксиом справедливости.

Пример 5.23

Вернемся к примеру 5.20. Рассмотрим теперь кооперативный вариант этой задачи: будем считать, что муж и жена до принятия решения пытаются как-то договориться и найти компромиссное решение (что гораздо логичнее с точки зрения смысловой интерпретации).

Платежное множество кооперативной игры становится выпуклым и примет вид, приведенный на рис. 5.14. Жирной линией выделено переговорное множество R.

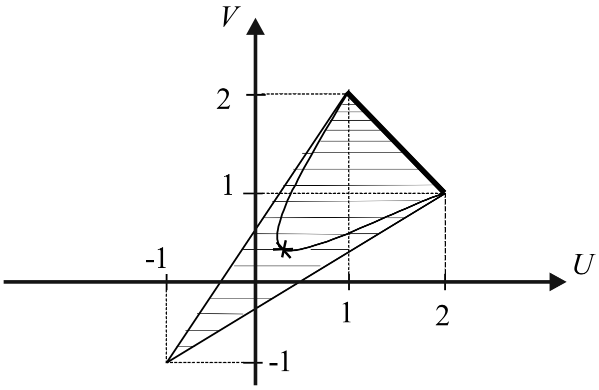


Рис. 5.14 – Платежное множество игры

Решение:

Так как рассматриваемое платежное множество симметрично относительно биссектрисы первого квадранта и точка *status quo* лежит на оси симметрии, то и искомое решение можно найти сразу, воспользовавшись аксиомами 1 и 3. Решение должно находиться на пересечении переговорного множества с биссектрисой: $\left(\overline{V}, \overline{U}\right) = (1.5, 1.5)$.

Для нахождения совместной смешанной стратегии, которая приводит к этому исходу, необходимо решить систему трех линейных уравнений:

$$\overline{V} = 2Z_{11} - Z_{12} - Z_{21} + Z_{22} = 1.5;$$
$$\overline{U} = Z_{11} - Z_{12} - Z_{21} + 2Z_{22} = 1.5;$$
$$Z_{11} + Z_{12} + Z_{21} + Z_{22} = 1;$$

Решая данную задачу с учетом положительности искомых переменных, получаем: $Z_{11} = 0.5$, $Z_{12} = Z_{21} = 0$, $Z_{22} = 0.5$ или $Z = \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix}$.

Как и следовало ожидать, наилучшим оказалось компромиссное решение, при котором супруги всегда проводят вечер вместе, с одинаковой вероятностью либо оставаясь дома, либо отправляясь в театр.

. . . .

5.4.4 Классические кооперативные игры

Характеристическая функция игры

Рассмотрим игру N лиц $\Gamma = \langle \aleph_i, M_i, \ i \in N \rangle$ с непротивоположными интересами, в которой выигрыши игроков трансферабельны. Пусть правилами разрешен сговор между любыми игроками и группами игроков. Тогда игру Г можно рассматривать как кооперативную игру с трансферабельными выигрышами.

Здесь стратегии выбираются игроками совместно так, чтобы максимизировать общий доход. Основной вопрос заключается в том, как разделить общий доход между игроками. Поэтому кооперативная игра является игрой дележей.

Пример 5.24

Рассмотрим игру трех рабочих A, B, C. Пусть за одну смену A может заработать 10 единиц, B — 9 единиц, C — 3 единицы. Разрешено образование любой бригады из одного, двух или трех человек. Пусть заработки бригад: AB — 22, BC — 15, AC — 17, ABC — 28 единиц. Как должны действовать рабочие, чтобы получить наибольшие заработки, и каковы размеры этих заработков?

Решение:

Вектор заработков обозначим через $X = (x_1, x_2, x_3)$. Если игроки придут к согласию и создадут коалицию ABC, то они получат наибольший суммарный доход 28 единиц. Его можно разделить между рабочими различными способами, например $(12, 11, 5)$. Очевидно, что против такого раздела не будет возражений как со стороны отдельных игроков: A: $12 > 10$, B: $11 > 9$, C: $5 > 3$, так и со стороны бригад: AB: $12 + 11 > 22$, BC: $12 + 5 \geqslant 17$. В этом смысле вектор X является устойчивым. Но можно предложить и другие варианты, например такое разделение: $(13, 11, 4)$ — лучше для A, хуже для C.

Отсюда возникает два вопроса:

1) как максимизировать совместный выигрыш;
2) как разделить его среди игроков.

В примере, чтобы выяснить, устраивает ли вектор X всех игроков, мы воспользовались величинами, оценивающими возможности коалиций. Такая величина в теории игр называется *характеристической функцией* (х. ф.) *коалиции*.

Х. ф. показывает максимальную величину выигрыша, которую коалиция может себе гарантировать независимо от действий всех остальных игроков. Х. ф. коалиции S обозначим $v(S)$. Принято считать, что $v(\varnothing) = 0$, где $\varnothing$ — пустая коалиция. Х. ф. является функцией, зависящей от множества как от аргумента. Если функция множества v обладает свойством

$$v(S \cup R) \geqslant v(S) + v(R), \ \forall S \cap R = \varnothing,$$

то говорят, что она супераддитивна. Другими словами, объединив свои усилия, две не имеющие общих членов коалиции смогут получить не меньше, чем оставаясь разделенными. Супераддитивность является определяющим условием образования больших коалиций, в том числе коалиции N.

Характеристической функцией кооперативной игры с транферабельными выигрышами *называется функция v, определенная на множестве 2^N, ставящая в соответствие любой коалиции $S \in 2^N$ ее наибольший, уверенно получаемый выигрыш в данной игре и обладающая свойствами: $v(\varnothing) = 0$; $v(S \cup R) \geqslant v(S) + v(R)$, $\forall S \cap R = \varnothing$.*

Это общее определение х. ф. В зависимости от условий конкретной игры ее можно задать по-разному. Приведем самый распространенный вид.

Пусть в игре Γ образовалась коалиция $S < N$. То, что игроки из S действуют совместно, означает, что стратегиями этой коалиции являются всевозможные стратегии входящих в нее игроков, т. е. элементы множества $\aleph_s = \prod_{i \in S} \aleph_i$.

Цель коалиции S — подходящим выбором своей стратегии μ_s добиться возможно большего выигрыша:

$$M_s(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i \in S} M_i(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Поскольку этот выигрыш зависит и от поведения других игроков из множества $N \backslash S$, то при определении х. ф. коалиции S должен быть учтен и тот вариант, когда эти игроки составляют общую коалицию $N \backslash S$ против S. Тогда

$$v(S) = \mathrm{val}\, \Gamma_{S/N \backslash S},$$

где $\mathrm{val}\, \Gamma_{S/N \backslash S}$ — значение антагонистической игры $\Gamma_{S/N \backslash S}$, в которой функцией выигрыша первого игрока S, выступающего как максимизирующий игрок, является M_s; выигрышем второго игрока $N \backslash S$, выступающего как минимизирующий игрок, является $-M_s$. Таким образом:

$$\mathrm{val}\, \Gamma_{S/N \backslash S} = \max_{\mu_S} \min_{\mu_{N \backslash S}} M_S\left(\mu_S, \mu_{N \backslash S}\right) = \min_{\mu_{N \backslash S}} \max_{\mu_S} M_S\left(\mu_S, \mu_{N \backslash S}\right).$$

Будем предполагать, что для любого S $\mathrm{val}\, \Gamma_{S/N \backslash S}$ существует.

При этом функция $v(S)$ супераддитивна, и вычислена в предположении, что коалиции используют оптимальные (максиминные) стратегии. Дальнейшее исследование игры связано только с ее х. ф. Поэтому в дальнейшем будем задавать игру в новой форме:

$$\Gamma = \langle N, v \rangle \text{ — игра в форме характеристической функции.}$$

Принципы оптимальности в кооперативных играх

В отличие от антагонистических игр, в которых естественным и хорошо разработанным принципом оптимальности является принцип минимакса (основан на принципах осторожности и уравновешенности), в играх многих лиц нет единого принципа оптимальности. Это является следствием разнообразия и сложности природы игр со многими участниками. Здесь стратегии носят вспомогательный характер — они необходимы для вычисления х. ф. На первый план здесь выступает раздел дохода, т. е. умение торговаться. Поэтому принципы оптимальности в играх в форме х. ф. указывают на способы определения компромиссных дележей общих доходов.

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$. Поскольку х. ф. супераддитивна, то следует ожидать объединения всех игроков в одну большую коалицию N. Вопрос: при каких условиях игрок становится членом коалиции N. Естественно, при разделе общего дохода $v(N)$ ни один игрок не согласится получить меньше того дохода, который он может себе обеспечить, действуя в одиночку (максиминный критерий). Долю игрока i при разделе суммы $v(N)$ обозначим x_i.

*Вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$ называется **дележом** в игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$, если его компоненты удовлетворяют следующим условиям:*

1) $x_i \geqslant v\{i\}$ *для всех* $i \in N$;
2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ *(не так важно, как 1, но желательно).*

Множество всех дележей в игре обозначим $E(v)$. Поскольку выигрыши в игре Γ трансферабельны, то $E(v)$ бесконечно. $E(v)$ состоит из разных дележей, следовательно, у игроков имеется возможность выбора. Введем на $E(v)$ отношение предпочтения.

*Пусть x, $y \in E(v)$. Говорят, что x **доминирует** y **по коалиции** S ($x \succ_s y$), если:*

1) $x_i > y_i \ \forall i \in S$,
2) $\sum_{i \in S} x_i \leqslant v(S)$.

*Говорят, что x **доминирует** y ($x \succ y$), если существует хотя бы одна такая коалиция $S \subset N$, что ($x \succ_S y$). Первое свойство показывает, что все члены коалиции S строго предпочитают x; второе свойство показывает, что коалиция может предпочитать только тот дележ, соответствующие компоненты которого она в силах гарантировать своим членам.*

Пример 5.25

Сравнение дележей в кооперативной игре

Кооперативная игра трех лиц задана следующей х. ф.:

$$v(1) = 0, \quad v(2) = v(3) = 1, \quad v(12) = 3, \quad v(23) = 4, \quad v(13) = 1, \quad v(123) = 6.$$

Решение:

Рассмотрим несколько произвольных дележей:

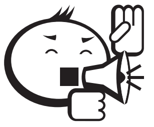
$$x = (2, 2, 2), \quad y = (1, 1, 4), \quad z = (4, 1, 1), \quad w = (1.5; 3; 1.5).$$

Так как доминирование по одиночным и по максимальной коалициям невозможно, будем рассматривать возможность доминирования только по двойным коалициям.

Сравним дележи x и y. Здесь первое условие доминирования выполняется по коалиции $\{1, 2\}$: $2 > 1$ и $2 > 1$, но при этом не выполняется второе условие: $x_1 + x_2 = 4 > v(12) = 3$. Значит, дележи x и y не доминируют друг друга.

Теперь сравним дележи x и z. Здесь по коалиции $\{2, 3\}$ выполняются и первое, и второе условия доминирования: $2 > 1$, $2 > 1$ и $x_2 + x_3 = 4 = v(23)$. Таким образом, дележ x доминирует дележ z по коалиции $\{2, 3\}$: $x \succ_{\{2,3\}} z$.

Больше в данном списке ни один дележ не доминирует другой, так как не выполняются либо первое, либо второе условие доминирования.



Доминирование невозможно по следующим коалициям: из одного игрока (нарушается первое свойство дележа); из N игроков (нарушается второе свойство дележа — см. определение дележа).

Отношение доминирования по коалиции упорядочивает множество дележей относительно этой коалиции. Значит, для каждой коалиции существует свой порядок дележей по предпочтению. Какой дележ должен стать решением?

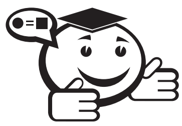
Самое простое — взять дележ, доминирующий все остальные дележи по всем коалициям. Однако такого дележа не бывает. Покажем это следующими рассуждениями: пусть x доминирует все дележи из $E(v)\backslash x$. Тогда для $\forall y \in E(v)\backslash x$ имеем:

1) $x_i > y_i \ \forall i \in S$ и $\forall S \in 2^N$,
2) $\sum\limits_{i \in S} x_i \leqslant v(S) \ \forall S \in 2^N$.

Из первого условия следует, что $x_i > y_i$, $\forall i \in N \Rightarrow \sum\limits_{i \in N} x_i > \sum\limits_{i \in N} y_i = v(N)$, а это противоречит второму условию.

Тогда решением может быть недоминируемый дележ. Таких дележей может быть много. В совокупности они представляют одно из основных решений кооперативных игр.

С-ядро игры



Множество недоминируемых дележей называется ***с-ядром игры***.

Так как любой дележ из с-ядра недоминируем, то ни у кого из игроков (также и коалиций) не будет возражений против реализации этого дележа (хотя могут быть споры по выбору дележа из с-ядра, см. пример 4.5 с рабочими $X_1 = (12, 11, 5)$ и $X_2 = (13, 11, 4)$ — 1-й рабочий предпочел бы второй дележ, 3-й рабочий предпочел бы первый дележ).

Для того чтобы дележ $X \in E(v)$ принадлежал с-ядру, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции $S \in 2^N$ выполнялось одно из следующих двух эквивалентных условий:

1) для всех $S \subset N$: $v(S) \leqslant \sum\limits_{i \in S} x_i$,
2) для всех $S \subset N$: $\sum\limits_{i \in S} x_i \leqslant v(N) - v(N \backslash S)$.

Первое условие называется *принципом отделения* и гласит, что коалиция никогда не согласится получить прибыль меньше, чем она может заработать самостоятельно.

Второе условие называется *принципом отсутствия субсидий*, и суть его в том, что никакая коалиция не должна получить больше, чем ее вклад в общую прибыль.

Следствие. С-ядро любой игры $\Gamma = \langle N, v \rangle$ является замкнутым выпуклым многогранником. Из-за жесткости условия, определяющего с-ядро, оно часто бывает пустым.

Поэтому важной проблемой является существование ядра: *при каких условиях в данной кооперативной игре с-ядро не пусто*?

Необходимым условием непустоты ядра в игре $\Gamma = \langle N, v \rangle$ является свойство супераддитивности, т. е. должно выполняться условие:

$$\sum_{k=1}^{K} v(S_k) \leqslant v(N),$$

где $S_1, \ldots, S_k$ — непересекающиеся коалиции, а $\bigcup\limits_{k=1}^{K} S_k = N$.

В самом деле, если это условие не выполняется, то, складывая неравенства $\sum\limits_{i \in S_k} x_i \geqslant v(S_k)$, получаем $\sum\limits_{i \in N} x_i > v(N)$, что невозможно из определения дележа, следовательно, с-ядро пусто.

Но свойство супераддитивности не является достаточным.

Пример 5.26

Строительство соседними муниципалитетами совместной системы водоснабжения. Пусть у нас есть три города, которые при строительстве могут понести следующие затраты:

- *город A отдельно: 120, город B: 140, город C: 120,*
- *коалиция $\{A, B\}$: 170, коалиция $\{B, C\}$: 190, коалиция $\{A, C\}$: 160, три города вместе: 265.*

Решение:

Рассмотрим сначала объединение двух городов — A и B. Экономия затрат от совместного производства равна $c(\{A\}) + c(\{B\}) - c(\{AB\}) = 90$. Равное распределение этой экономии приводит к следующим затратам:

$$x_A = 120 - \frac{1}{2} \cdot 90 = 75, \quad x_B = 140 - \frac{1}{2} \cdot 90 = 95.$$

Если участвуют все три города, общая экономия составит:

$$c\big(\{A\}\big) + c\big(\{B\}\big) + c\big(\{C\}\big) - c\big(\{ABC\}\big) = 115.$$

Распределим ее равным образом между игроками:

$$x_A = 120 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 81.7; \quad x_B = 140 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 101.7; \quad x_C = 120 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 81.7.$$

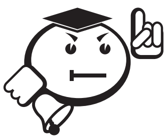
Приемлемость такого распределения затрат проблематична. Общие затраты, получающиеся для коалиции AB, превосходят их затраты без города C:

$$81.7 + 101.7 > 170 = c\big(\{AB\}\big).$$

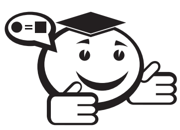
Таким образом, дележ $(81.7;\ 101.7;\ 81.7)$ не принадлежит с-ядру. А существует ли в этой игре с-ядро? Для существования ядра необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 265,\\
&x_1 \leqslant 120,\ x_2 \leqslant 140,\ x_3 \leqslant 120,\\
&x_1 + x_2 \leqslant 170,\\
&x_2 + x_3 \leqslant 190,\\
&x_1 + x_3 \leqslant 160.
\end{aligned}$$

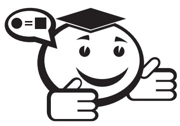
При этих ограничениях игра не имеет решения. Необходимо усилить свойство супераддитивности.



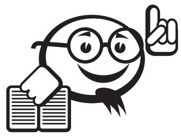
Если в игре указаны не прибыли игроков, а их затраты, то х. ф. мы будем обозначать через $c(S)$, а при проверке условий меняются знаки сравнения. Так, принадлежность дележа с-ядру в этом случае будет определяться неравенством $c(S) \geqslant \sum\limits_{i \in S} X_i$.



Будем называть коалицию ***собственной****, если она не совпадает с максимальной коалицией* N.



Для данного сообщества игроков N ***сбалансированное покрытие*** *есть такое отображение* δ *из* $2^N \setminus \{N\}$ *(множества собственных коалиций) в* $[0, 1]$*, что* $\sum\limits_{S:\, i \in S} \delta_S = 1$ *для всех игроков* i*, где суммирование ведется по всем собственным коалициям, содержащим игрока* i*.*



С-ядро игр с трансферабельными выигрышами не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия δ имеем:

$$\sum_{\substack{S<N\\ S\neq N}} \delta_S \cdot v(S) \leqslant v(N). \tag{5.1}$$

Если говорим о затратах $c(S)$, то неравенство будет:

$$\sum_{\substack{S\subset N\\ S\neq N}} \delta_S \cdot c(S) \geqslant c(N).$$

Данное условие означает, что кооперативная прибыль $v(S)$ собственных коалиций не должна быть слишком большой по сравнению с прибылью $v(N)$.

Сбалансированные покрытия образуют выпуклый многогранник. Поэтому условие (5.1) достаточно проверить для крайних точек этого многогранника. Если найти эти точки, то свойство сбалансированности может быть записано как конечная система линейных неравенств на v.

Рассмотрим игры с тремя игроками: $N = \{1, 2, 3\}$. Здесь сбалансированные покрытия образуют многогранник с пятью крайними точками:

1) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$;
2) $\delta_{12} = \delta_3 = 1,\ \delta_1 = \delta_2 = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$;
3) $\delta_1 = \delta_{23} = 1,\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_{13} = \delta_{12} = 0$;
4) $\delta_2 = \delta_{13} = 1,\ \delta_1 = \delta_3 = \delta_{12} = \delta_{23} = 0$;
5) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 1/2$.

Тогда игра $\langle N, v\rangle$ с тремя игроками имеет непустое с-ядро тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned}
&v(1) + v(2) + v(3) \leqslant v(N),\\
&v(1) + v(23) \leqslant v(N),\\
&v(2) + v(13) \leqslant v(N),\\
&v(3) + v(12) \leqslant v(N),\\
&\frac{1}{2}\Big(v(12) + v(23) + v(13) \leqslant v(N)\Big).
\end{aligned}$$

Для кооперативной игры с четырьмя игроками с-ядро непусто тогда и только тогда, когда игра супераддитивна и выполняются семь дополнительных неравенств:

1) $\frac{1}{3}\big(v(123) + v(234) + v(134) + v(124)\big) \leqslant v(N)$;
2) $\frac{1}{2}\big(v(123) + v(234) + v(14)\big) \leqslant v(N)$;
3) $\frac{1}{2}\big(v(134) + v(234) + v(12)\big) \leqslant v(N)$;

4) $\frac{1}{2}\left(v(124)+v(234)+v(13)\right)\leqslant v(N)$;

5) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(134)+v(24)\right)\leqslant v(N)$;

6) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(124)+v(34)\right)\leqslant v(N)$;

7) $\frac{1}{2}\left(v(124)+v(134)+v(23)\right)\leqslant v(N)$.

Пример 5.27

Вернемся к примеру 5.26. Проверим задачу на наличие c-ядра:

$$\begin{aligned}
&120+140+120=380>265,\\
&120+190=310>265,\\
&140+160=300>265,\\
&120+170=290>265,\\
&\frac{1}{2}(170+190+160)=260<265.
\end{aligned}$$

Последнее условие не выполняется, следовательно, c-ядра не существует.

Изменим начальные условия следующим образом: пусть $c(ABC)=255$, тогда игра имеет c-ядро. Найдем c-ядро игры. Заменим переменные x_i (затраты) на экономию затрат: $y_i=c(i)-x_i$, тогда:

$$\begin{aligned}
&y_1+y_2+y_3=125,\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,\\
&y_1+y_2\geqslant 90,\\
&y_2+y_3\geqslant 70,\\
&y_1+y_3\geqslant 80.
\end{aligned}$$

На рис. 5.15 изображен симплекс $\{y_i\geqslant 0,\ y_1+y_2+y_3=125\}$, внутри которого три дополнительных ограничения выделяют треугольник (заштрихованная область) — c-ядро игры.

C-ядро игры — множество точек треугольника с вершинами $(55, 45, 25)$, $(45, 45, 35)$, $(55, 35, 35)$. Переходя к затратам, получаем:

$$(65, 95, 95),\quad (75, 95, 85),\quad (65, 105, 85).$$

Распределение затрат в центре ядра:

$$X^*=(68.3;\ 98.3;\ 88.3).$$

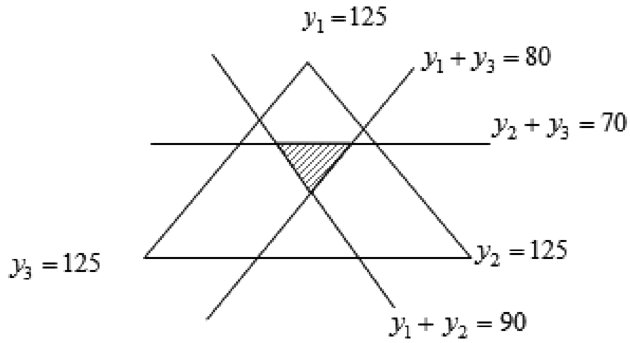


Рис. 5.15 – Графическое изображение с-ядра игры

С-ядро игры не всегда представляет собой треугольник. В зависимости от того, как проходят ограничения внутри симплекс-треугольника, с-ядро может быть точкой (крайняя ситуация, когда все три ограничения пересекаются в одной точке), отрезком, треугольником, четырехугольником, пятиугольником или шестиугольником. При построении ограничений необходимо учитывать, что максимальное значение y_i принимает в соответствующей вершине, уменьшается в направлении основания симплекс-треугольника и на стороне, противоположной вершине y_i, принимает значение, равное нулю. Если в процессе нахождения с-ядра получается точка с отрицательной координатой, то это означает, что данная точка на самом деле находится за пределами симплекс-треугольника.

В связи с тем, что с-ядро часто бывает пустым, желательно определить решение игры с более слабыми требованиями.

Пример 5.28

Пусть три игрока поставлены перед необходимостью раздела дохода, равного единице.

Пусть при этом

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad (1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1.$$

Решение:

Данная игра не имеет с-ядра: $\left(\frac{1}{2}\left(v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3)\right)\right) > 1.$

Рассмотрим три вектора: $x = (1/2, 1/2, 0)$, $y = (1/2, 0, 1/2)$, $z = (0, 1/2, 1/2)$, где x, y, z — дележи первого, второго и третьего игроков соответственно.

Для каждого из них можно найти доминирующий его дележ. Например, для x: $\omega = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\omega \succ_{\{2,3\}} x$.

Но эти три дележа имеют следующие особенности:

1) ни один из этих трех дележей не доминирует другой;
2) любой дележ из $E(v)$, кроме x, y, z, доминируется одним из дележей x, y, z (так, $y \succ_{\{1,3\}} \omega$).

. . . .

Множество $\{x, y, z\}$ составляет решение этой игры, называемое решением Неймана—Моргенштерна.

. . . .

Множество $L(v) \subset E(v)$ называется ***НМ-решением игры*** $\Gamma = \langle N, v\rangle$, *если:*

1) *из $x, y \in L(v)$ следует, что и не доминируют друг друга;*
2) *если дележ $x \in L(v)$, то найдется такой дележ $y \in L(v)$, что $y \succ x$.*

. . . .

Общих теорем существования НМ-решения нет. Раньше считалось, что НМ-решение всегда не пусто. Но была найдена игра без НМ-решения.

Недостаток НМ-решения: может существовать несколько различных НМ-решений. Так, в примере 4.7, существует целое множество НМ-решений:

$$L(v) = \left\{(\varepsilon_1,\ 1 - c - \varepsilon_1,\ c) \middle| 0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 1 - c\right\} \text{ для } \forall c \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Неясно, какое НМ-решение должно быть выбрано. Если же НМ-решение выбрано, то какой из него выбрать дележ?

Заветная цель кооперативной теории игр состоит в построении универсальной концепции решения, выбирающей для каждой кооперативной игры единственное распределение полезностей. Конечно, единственной концепции решения не появилось, но тем не менее было открыто два известных значения, которые доказали свою применимость для широкого круга экономических моделей. Это — вектор Шепли и N-ядро, которые мы и рассмотрим ниже.

Вектор Шепли

Назовем величину $sc_i = c(N) - c(N \backslash i)$ сепарабельными затратами игрока i. Это — маргинальные затраты на обслуживание игрока i при условии, что все остальные игроки уже обслужены.

Вектор Шепли реализует идею распределения затрат (прибыли), основанную на маргинальных вкладах. Таким образом, доля затрат (доля прибыли) игрока вычисляется как средние маргинальные затраты (прибыль), добавляемые игроком к каждой коалиции остальных игроков.

Для того чтобы получить соответствующую формулу, представим, что игроки из N случайно упорядочены $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, причем вероятность каждого упорядочения одинакова. Игроку i вектор Шепли приписывает среднее его маргинальной прибыли $v\big(Sv\{i\}\big) - v(S)$, взятое по всем коалициям $S \subset N\backslash i$, включая пустое множество. Вес коалиции S соответствует вероятности того, что в случайной очереди $(i_1, \ldots, i_n)$ перед игроком i стоят в точности игроки из S. Непосредственное вычисление этой вероятности дает величину $s!(n-s-1)!/n!$, где s есть размер S.

Для игры $\Gamma = \langle N,\ v\rangle$ ***вектор Шепли*** δ *распределяет прибыль* $V(N)$ *максимальной коалиции следующим образом:*

$$\forall i\ \delta_i = \sum_{0\leqslant s\leqslant n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S\subset N\backslash i\\ |S|=s}} \Big(v\big(S\cup\{i\}\big) - v(S)\Big).$$

Очевидно, что для игр с распределением затрат вектор Шепли получается на основе аналогичной формулы, где v заменяется на c.

Заметим, что, так как вектор Шепли является дележом, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i = v(N)$.

Пример 5.29

Найдем вектор Шепли для игроков из примера 5.26:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{6}\Big[\big(v(12)-v(2)\big) + \big(v(13)-v(3)\big)\Big] + \frac{1}{3}\big(v(N)-v(23)\big) = \\ &= \frac{1}{3}\cdot 120 + \frac{1}{6}\big[(170-140)+(160-120)\big] + \frac{1}{3}(255-190) = 73.3;\\ \delta_2 &= 98.3; \quad \delta_3 = 83.3.\end{aligned}$$

Заметим, что данный дележ лежит вне с-ядра $(\delta_1 + \delta_2 > 170)$.

Если игра $\langle N, v\rangle$ супераддитивна, то вектор Шепли является индивидуально рациональным, т. е. игрок i получает, по крайней мере, доступную ему прибыль $v(i)$. Таким образом, при использовании вектора Шепли один игрок не может отделиться и высказывать возражения. Тем не менее промежуточные коалиции могут иметь такую возможность, как было показано в примере 5.29.

Пример 5.30

Экономика производства кукурузы в имении

Имеется $n + 1$ игрок. Игроку 0 (землевладельцу) принадлежит земля, а игроки $1, 2, \ldots, n$ — n одинаковых рабочих, которым принадлежит только их рабочая сила. Производственная функция показывает для каждого числа рабочих s количество кукурузы $f(s)$, которое они произведут, работая в имении. Функция f не убывает, и $f(0) = 0$. Без участия игрока 0 коалиция бесполезна и ничего не зарабатывает, при его участии количество произведенной продукции определяется числом рабочих:

$$v(S) = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \notin S, \\ f(s), \text{ при } 0 \in \mathrm{S}, \ |S| = s + 1. \end{cases}$$

Вектор Шепли отдает землевладельцу:

$$\delta_0 = \frac{1}{n+1} f(n) + \frac{1}{(n+1)\cdot n} \cdot f(n-1) \cdot n + \frac{2}{(n+1)n(n-1)} \times$$
$$\times f(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \ldots = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} f(i),$$

т. к. его маргинальный вклад равен $f(i)$, где i — число рабочих.

Поскольку все рабочие одинаковы, то они получают одинаковые доли:

$$\delta_i = \frac{1}{n}\big(f(n) - \delta_0\big) = \frac{1}{n}\left[f(n) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} f(i)\right].$$

Пример 5.30 показывает, что вектор Шепли не удовлетворяет принципу отделения: существуют игры с непустым с-ядром, в которых вектор Шепли лежит вне ядра.

Выпуклые игры представляют собой важный класс игр, в которых с-ядро не пусто и содержит вектор Шепли. Более того, вектор расположен в центре ядра выпуклой игры. Игра является выпуклой, если имеет место возрастание доходов от кооперации: чем больше коалиция, к которой присоединяется игрок i, тем больше его маргинальный вклад.

---

*Кооперативная игра $\langle N, v\rangle$ является **выпуклой**, если она удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств:*

$$\forall i \in N, \forall S, T \subset N \backslash \{i\} : \{S \subset T\} \Rightarrow \Big\{v\big(S \cup \{i\} - v(S) \leqslant v\big(T \cup \{i\} - v(T)\Big\},$$

и/или $\forall S, T \subset N : v(S) + v(T) \leqslant v(S \cup T) + v(S \cap T)$, где по соглашению $v(\varnothing) = 0$.

N-ядро игры

Вектор Шепли не всегда принадлежит с-ядру. Желательно иметь решение, которое бы принадлежало ядру, если с-ядро не пусто. N-ядро является таким значением кооперативной игры. Оно занимает центральное положение внутри с-ядра.

Рассмотрим понятие лексиминного порядка на множестве дележей из $E(v)$.

Говорят, что дележ x предпочтительнее y в смысле ***лексиминного порядка****, если существует целое число $k = 0, 1, \ldots, n-1$, для которого выполнены условия:*

$$x_i^* = y_i^* \text{ для } i = 1, \ldots, k, \quad x_{k+1}^* > y_{k+1}^*,$$

где x^*, y^* — дележи, упорядоченные по возрастанию.

Лексиминный порядок работает следующим образом: сначала сравниваются полезности «наиболее бедных» игроков в обоих дележах: если они совпадают, то сравниваются полезности «следующих по бедности» игроков и т. д.

Пример 5.31

Пусть необходимо сравнить два дележа в смысле лексиминного порядка:

$$x = (1;\ 5;\ 4;\ 4;\ 7;\ 2;\ 2),$$
$$y = (6;\ 3;\ 3;\ 1;\ 2;\ 6;\ 4).$$

Для этого сначала упорядочим дележи по возрастанию:

$$x^* = (1;\ 2;\ 2;\ 4;\ 4;\ 5;\ 7),$$
$$y^* = (1;\ 2;\ 3;\ 3;\ 4;\ 6;\ 6).$$

Проверяем: $x_1^* = y_1^*$; $x_2^* = y_2^*$; $x_3^* < y_3^*$, следовательно, y предпочтительнее x в смысле лексиминного порядка.

Теперь мы можем ждать определение N-ядра игры.

Дана игра $\Gamma = \langle N, v\rangle$. Задано множество дележей $x \in E(v)$. Любому дележу x поставим в соответствие вектор $e(X) \in E^{2^N \setminus N}$: для всех собственных коалиций $S \subset N : c(x; S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S)$. На множестве $E(v)$ существует единственное распределение γ, такое, что для любого $x \in E(v)$ вектор $e(\gamma)$ предпочтительнее в смысле лексиминного порядка вектора $e(x)$. Дележ γ называют ***N-ядром игры****.*

При определении N-ядра благосостояние коалиции S измеряют с помощью эксцесса $e(x, S)$, который по сути есть сверхдоход коалиции S по сравнению с ее собственным возможным результатом. Эксцессы различных коалиций сравниваются следующим образом: в первую очередь рассматривается минимальная прибыль, которая максимизируется:

$$\min_{S\subset N} e(\gamma, S) \geqslant \min_{S\subset N} e(x, S) \quad \forall x \in E(v) \Leftrightarrow \min_{S\subset N}\left[\sum_{i\in S}\gamma_i - v(S)\right] =$$

$$= \max_{X\in E(v)}\left\{\min_{S\subset N}\left[\sum_{i\in S}x_i - v(S)\right]\right\}.$$

Затем из полученного множества решений N-ядро выбирает такое распределение, при котором максимального значения достигает вторая по минимальности коалиционная прибыль. В конечном итоге такой процесс приводит к единственному распределению, которое и является N-ядром.

Если с-ядро пусто, то для супераддитивной игры N-ядро дает индивидуальную рациональность $(\gamma_i \geqslant v(i),\ \forall i)$.

Пример 5.32

Возьмем игру из примера 5.30. Рассмотрим конкретный случай функции f для трех рабочих: $f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 9$.

Отметим, что N-ядро дает равные доли прибыли для всех рабочих, поскольку все рабочие одинаковы. Следовательно, оно имеет вид:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = a; \quad \gamma_0 = b = f(3) - 3a = 9 - 3a.$$

Указанное выше распределение принадлежит с-ядру в том и только том случае, когда выполнено условие $0 \leqslant a \leqslant f(n)/3 = 3$.

Действительно, ни один рабочий не получает отрицательную прибыль. Если же свести прибыль землевладельца к минимуму (нулевая прибыль), то максимально каждый рабочий может получить треть общих доходов.

Тогда задача нахождения N-ядра сводится к следующей:

$$\max_{0\leqslant a\leqslant 3}\min\{a,\ b,\ a + b - 2,\ 2a + b - 5\}.$$

Учитывая, что $b = 9 - 3a$, получаем:

$$\max_{0\leqslant a\leqslant 3}\min\{a,\ 9 - 3a,\ 7 - 2a,\ 4 - a\}.$$

На рисунке 5.16 показан график всех четырех функций.

Все возможные минимумы показаны на графике жирной ломаной линией. Максимум среди минимумов достигается в точке пересечения прямых a и $4 - a$. Тогда $a = 4 - a$, отсюда $a^* = 2$.

N-ядро: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2$, $\gamma_0 = 9 - 3 \cdot 2 = 3$, или $\gamma = (3, 2, 2, 2)$.

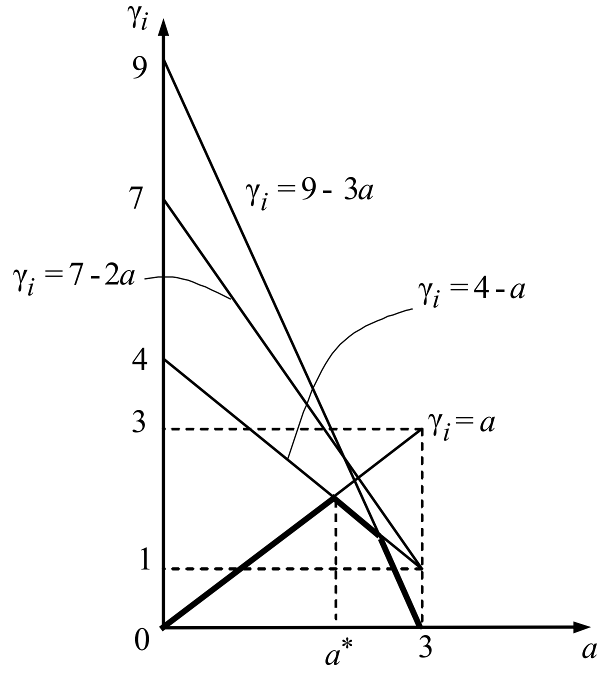


Рис. 5.16 – Графическое представление задачи нахождения N-ядра

. . . .

Мы рассмотрели различные критерии и способы нахождения решений в кооперативных играх. Теория не может предложить однозначного решения, которое было бы наилучшим с точки зрения всех игроков. Она предлагает целый ряд решений, обосновывая выбор с той или иной точки зрения. Окончательное решение и выбор критерия всегда остается за самими игроками и зависит от конкретных условий, в которых это решение принимается.

Селекторы N-ядра

Заметим, что N-ядро демонстрирует эгалитарный подход к эксцессам различных коалиций и не учитывает размер коалиции, которой достается прибыль. Одна единица прибыли для отдельного агента расценивается так же, как и одна единица для коалиции $N - 1$. Можно учитывать средний эксцесс (в расчете на одного члена коалиции):

$$\bar{e}(x, S) = \frac{1}{|S|} e(x, S).$$

Такой подход дает пропорциональное N-ядро, которое принадлежит с-ядру, если последнее не пусто.

Серьезный недостаток N-ядра — немонотонность по отношению к доходу максимальной коалиции. Может случиться так, что прибыль $v(N)$, доступная максимальной коалиции, возрастет при сохранении прибыли всех остальных коалиций, а доля прибыли некоторых агентов при этом уменьшится. Если какие-то игроки страдают в результате улучшений, то они могут отказаться от участия и тем самым сделать невозможным улучшение ситуации.

Если N состоит из девяти или более агентов, то можно найти две такие игры $\langle N, v\rangle$ и $\langle N, w\rangle$, что

$$v(N) < w(N) \text{ и } v(S) = w(S) \text{ для всех } S \subset N,$$

и тем не менее если мы обозначим через γ и μ соответственно их N-ядра, то для некоторого агента i возможно неравенство $\mu_i < \gamma_i$.

Эта трудность устраняется, если мы используем пропорциональное N-ядро. Другими словами, N-ядро со средним эксцессом монотонно относительно дохода максимальной коалиции. Хотя заметим, что и для него не выполняется коалиционная монотонность (если увеличивается прибыль $v(S)$, то это не приводит к увеличению доли прибыли для каждого $i \in S$ при $N \geqslant 5$, что было бы желательно).

Контрольные вопросы по главе 5

1. Что является конечной целью любой игры?
2. Какие формы представления игр вы знаете?
3. В каком случае используется нормальная форма игры?
4. Когда игра имеет полную информацию?
5. Какая игра называется антагонистической?
6. Что является решением антагонистической игры?
7. Какие игры называются играми на единичном квадрате?
8. Как решаются игры, представленные в позиционной форме?
9. Что понимается под оптимальностью в вогнуто-выпуклых играх?
10. Что такое платежная матрица?
11. Что является коалицией в кооперативных играх?
12. В чем разница между кооперативными и некооперативными играми?
13. Каков принцип оптимальности в некооперативных играх?
14. В чем заключается оптимальность по Парето?
15. Поясните смысл характеристической функции.
16. Что является решением кооперативной игры с нетрансферабельными выигрышами?
17. Опишите достоинства и недостатки вектора Шелли и N-ядра.
18. Какие принципы оптимальности рассматриваются в кооперативных играх?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии рассмотрены основные понятия моделирования систем, а также основные задачи и этапы компьютерного моделирования. Большое внимание уделено рассмотрению вопросов моделирования случайных процессов (стохастических систем).

Сегодня понятия «моделирование» и «компьютерное моделирование» практически неразличимы просто в силу того, что сам процесс построения моделей связан с построением алгоритмов и соответственно написанием программ. Именно поэтому в данном учебном пособии одна из глав посвящена рассмотрению одного из наиболее распространенных языков моделирования GPSS.

При моделировании реальных процессов, протекающих в сложных системах, большое внимание уделяется вопросам проверки адекватности моделей, получения с помощью построенных моделей оценок характеристик систем. Для решения указанных задач необходимо проводить эксперимент с моделью, в связи с чем в пособии рассматриваются некоторые вопросы планирования эксперимента и анализа полученных результатов.

В пособии также рассмотрены два класса кибернетических моделей: модели массового обслуживания и игровые модели. Несмотря на наличие богатой монографической и специальной литературы по теории массового обслуживания и теории игр, учебных пособий, посвященных этим разделам математики, сравнительно немного. Автор попытался изложить основные вопросы теории в наиболее простой и наглядной форме.

При написании данного учебного пособия автором не ставилась задача рассмотреть все классы существующих кибернетических моделей. Даже рассмотренные классы моделей не охвачены в полной мере по их существующему многообразию. Тем не менее автор попытался отразить основные вопросы и большинство современных направлений теории массового обслуживания и теории игр, в том числе и на многочисленных примерах.

Искусство моделирования до сих пор является во многом интуитивным процессом и зависит от знаний и умений исследователя. Для построения качественной и эффективной модели исследователь должен обладать знаниями о предметной области, различных методах математики и кибернетических моделях.

Автор надеется, что данный в пособии материал позволит читателю применять свои знания на практике, а при необходимости, в дальнейшем изучить недостающие методы и модели самостоятельно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кузин Л. Т. Основы кибернетики : в 2 т. / Л. Т. Кузин. — М. : Энергия, 1980.

[2] Советов Б. Я. Моделирование систем : учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — М. : Высш. шк., 2005. — 342 с.

[3] Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — М. : Высш. шк., 1987.

[4] Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Сов. радио, 1972.

[5] Петросян Л. А. Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М. : Высш. шк.; Книжный дом «Университет», 1998.

[6] Данилов Н. Н. Игровые модели принятия решений / Н. Н. Данилов. — Кемерово, 1981.

[7] Гладких Б. А. Лекции по исследованию операций / Б. А. Гладких. — Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 1979.

[8] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели / Э. Мулен. — М. : Мир, 1991.

ГЛОССАРИЙ

Абсолютная пропускная способность — характеристика СМО, которая показывает число обслуженных заявок в единицу времени. Для стационарного режима среднее количество заявок, входящих в систему в единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих систему в единицу времени.

Антагонистическая игра — игра двух лиц, в которой игроки преследуют противоположные цели: все, что выигрывает один игрок, проигрывает другой, и наоборот.

Вектор выигрышей — вектор, элементами которого являются выигрыши игроков в одной из возможных игровых ситуаций.

Вектор Шепли — дележ, являющийся решением кооперативной игры, который реализует идею распределения прибыли, основанную на маргинальных вкладах. Доля прибыли игрока вычисляется как средние маргинальные прибыли, добавляемые игроком к каждой коалиции остальных игроков.

Вогнутая игра — игра на единичном квадрате, в которой функция выигрыша первого игрока вогнута по x (множеству стратегий первого игрока).

Вогнуто-выпуклая игра — игра на единичном квадрате, в которой функция выигрыша первого игрока вогнута по x (множеству стратегий первого игрока) при каждом значении y и выпукла по y (множеству стратегий второго игрока) при каждом значении x.

Выпуклая игра — игра на единичном квадрате, в которой функция выигрыша первого игрока выпукла по y (множеству стратегий второго игрока).

Граф передач — граф сети СМО, вершины которого соответствуют отдельным СМО, дуги указывают возможности перехода заявки из одной СМО в другую, а числа в дугах — вероятности перехода. Нулевая вершина графа представляет источник заявок и используется для обозначения среды, находящейся вне сети: все заявки поступают на вход из источника и уходят из сети туда же.

Граф переходов — граф, в котором вершины означают состояния системы массового обслуживания, а дуги — вероятности переходов системы из одного состояния в другое.

Дележ — вектор выигрышей игроков в кооперативной игре.

Защитная пара стратегий в антагонистической игре — стратегия первого игрока, максимизирующая его гарантированный выигрыш, и стратегия второго игрока, минимизирующая его гарантированный проигрыш.

Игра на единичном квадрате — антагонистическая игра, в которой оба игрока имеют континуум чистых стратегий.

Игра с неполной информацией — игра, в которой игрок не в состоянии определить, какой ход сделает противник, либо принимает решение, не зная, в каком состоянии находится игра.

Игра с полной информацией — игра, в которой каждый игрок в каждый момент времени знает все предыдущие ходы (выборы) игроков.

Интенсивность потока — это предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{>0}(t_0, \Delta t)}{\Delta t} = \lambda(t),$$

где $P_{>0}(t_0, \Delta t)$ — вероятность того, что на интервале $(t_0, t_0 + \Delta t)$ появятся заявки.

Для стационарного потока его интенсивность не зависит от времени и равна среднему числу событий в единицу времени: $\lambda(t) = \lambda$.

Коалиция — совокупность игроков в игре многих лиц, объединенная по некоторому принципу (например, целью).

Коалиционные игры — это игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрыша коллектива (коалиции).

Кооперативные игры — это игры, в которых игроки могут объединяться в группы — коалиции с целью максимизации суммарного выигрыша, который впоследствии делится между членами коалиции по соглашению

Марковская СМО — система массового обслуживания, в которой протекают Марковские процессы. В Марковской СМО входной поток является простейшим, а время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону.

Матрица передач — матрица, характеризующая работу сети СМО, элементами которой являются вероятности поступления требований из одной системы в другую.

Матрица переходов — матрица, элементами которой являются вероятности переходов из одного состояния СМО в другое.

Некооперативные игры — игры, в которых каждый игрок действует сам по себе, не вступая ни в какие соглашения с другими игроками.

Оптимальное решение игры — множество оптимальных стратегий игроков и вектора выигрышей.

Ординарный поток — поток, для которого вероятность попадания на данный малый отрезок времени Δt двух и более требований пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания одного требования (имеет порядок малости $\circ(\Delta t) : P_{>1}(\Delta t) = \circ(\Delta t)$).

Относительная пропускная способность — характеристика СМО, которая показывает долю обслуженных заявок от общего числа заявок, пришедших в систему.

Платежная матрица — матрица выигрышей первого игрока в антагонистической игре.

Платежное множество — множество всех возможных векторов выигрышей игроков в игре многих лиц, когда игроки перебирают свои всевозможные смешанные стратегии.

Поток без последствия — поток, в котором отсутствует вероятностная зависимость последующего течения процесса от предыдущего. Характеризуется тем, что для двух непересекающихся интервалов времени Δt_1, $\Delta t_2 > 0$, $t_2 \geqslant t_1 + \Delta t_1$ вероятность появления числа событий $P_{n2}(\Delta t_2)$ на втором интервале не зависит от числа появления событий n_1 на первом интервале.

Поток событий — последовательность событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

Поток Эрланга — поток с ограниченным последействием, который образуется из простейшего потока путем детерминированной выборки событий.

Простейший (пуассоновский) поток — поток, обладающий тремя свойствами: ординарностью, отсутствием последействия и стационарностью. Время между двумя последовательными наступлениями событий потока имеет экспоненциальную функцию распределения.

Регулярный поток — поток, в котором события следуют одно за другим через одинаковые промежутки времени (детерминированная последовательность событий): $\tau_i = t_i - t_{i-1} = T = \text{const}$.

Рекуррентный поток — поток, для которого все функции распределения интервалов между заявками совпадают: $F_i(\tau) = F(\tau)$.

С-ядро игры — множество недоминируемых дележей в кооперативной игре.

Система массового обслуживания (СМО) — система, предназначенная для обслуживания потока заявок, поступающих на вход системы в случайные моменты времени. Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания. Обслуживание заявки продолжается некоторое (случайное) время, после чего канал освобождается и готов к принятию следующей заявки.

Смешанной стратегией в конечной игре двух лиц называется распределение вероятностей на заданном множестве чистых стратегий.

Совместная смешанная стратегия игроков есть распределение вероятностей на множестве их совместных чистых стратегий.

Совместная чистая стратегия игроков — множество чистых стратегий, которое игроки обязуются использовать совместно.

Стационарный поток — это поток для которого вероятность появления какого-то числа событий на интервале времени τ зависит только от длины этого интервала и не зависит от его расположения на оси времени. Для стационарного потока среднее число событий в единицу времени постоянно.

Стационарный режим — режим работы системы массового обслуживания, для которого выполняются следующие условия: при $t \to \infty$ все средние характеристики системы перестают зависеть от времени и становятся константами (в том числе и вероятности состояний). В этом случае производные вероятностей состояний системы обращаются в ноль.

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т. е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах.

Точка Нэша — ситуация равновесия в бескоалиционной игре. В ситуации равновесия ни один игрок не заинтересован в отклонении от своей стратегии, если остальные игроки придерживаются стратегий, соответствующих данной равновесной ситуации.

Характеристическая функция коалиции — максимальная величина выигрыша коалиции, которую коалиция может себе гарантировать независимо от действий всех остальных игроков.

Характеристическая функция кооперативной игры — функция, определенная на множестве всех коалиций, ставящая в соответствие любой коалиции ее наибольший, уверенно получаемый выигрыш в данной игре.

Цена игры — выигрыш первого игрока в антагонистической игре при условии, что оба игрока используют оптимальные стратегии.

Чистая стратегия игрока — правило, ставящее в соответствие каждому информационному множеству этого игрока определенный выбор (альтернативу) хода в этом информационном множестве.

Учебное издание

Салмина Нина Юрьевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ. ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.
Компьютерная верстка Насынова Н. Е.

Подписано в печать 31.12.13. Формат 60х84/8.
Усл. печ. л. 13,49. Тираж 100 экз. Заказ

Издано в ООО «Эль Контент»
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17
Отпечатано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40
Тел. (3822) 533018.