

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой АОИ

_____ Ю.П. Ехлаков

«__» _____ 2015 г.

ТЕОРИЯ ИГР

**Методические указания к
лабораторным занятиям**

для студентов направления 080500.62

«Бизнес информатика»

Разработчик:

к.т.н., доцент каф. АОИ

_____ Н.Ю. Салмина

2015

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	3
2. Лабораторные работы	4
2.1. Лабораторная работа №1. Представление игр.....	4
2.2. Лабораторная работа №2. Решение антагонистических игр в матричной форме.....	12
2.3. Лабораторная работа №3. Решение антагонистических игры в позиционной форме.....	17
2.4. Лабораторная работа №4. Решение игр на единичном квадрате: вогнуто-выпуклые игры.....	25
2.5. Лабораторная работа №5. Решение игр на единичном квадрате: вогнутые/выпуклые игры	29
2.6. Лабораторная работа №6. Некооперативные игры	33
2.7. Лабораторная работа №7. Кооперативные игры с нетрансфербельными выигрышами.....	38
2.8. Лабораторная работа №8. Кооперативные классические игры...43	
2.9. Лабораторная работа №9. Игры с распределением затрат.....	53
3. Рекомендуемая литература.	58

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины – формирование у студентов профессиональных знаний и практических навыков по решению задач принятия решений в условиях противодействия, а также по решению задач кооперативного принятия решений; разработке и созданию игровых моделей с целью исследования сложных систем, решению экономических задач.

Связь дисциплины с другими учебными дисциплинами. Предшествующими дисциплинами, формирующими начальные знания, являются: "Линейная алгебра", "Теория вероятностей и математическая статистика", "Дискретная математика", "Математическая логика и теория алгоритмов", "Исследование операций".

В результате изучения дисциплины «Теория игр» студент должен уметь применять игровые модели в задачах принятия решений в условиях противодействия, кооперативного принятия решений; строить игровые модели; находить и интерпретировать решения с помощью построенных моделей. Студент должен иметь навыки использования различных методов математического моделирования сложных систем.

Изучение дисциплины рассчитано на один семестр и включает в себя: теоретический раздел (изучение теоретического материала); практический раздел (выполнение лабораторных и контрольных работ); итоговый контроль результата изучения дисциплины. Данное пособие содержит в себе методические указания и варианты заданий лабораторных занятий. В качестве итогового контроля изучения дисциплины является экзамен.

Для допуска к сдаче экзамена необходимо выполнить все лабораторные работы. Студент может получить оценку по экзамену автоматом (хорошо или отлично) в случае, если он набирает необходимое количество баллов по рейтингу. В случае, если студент не набирает необходимое количество баллов по рейтингу, экзамен сдается при наличии допуска.

Подробное положение о рейтинге находится в рабочей программе дисциплины, а также расположено на кафедральном учебном сервере.

2. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ.

2.1. Лабораторная работа №1. Представление игр.

Цель работы.

Изучение различных форм представления игр. Получение навыков представления игр в нормальной и позиционной (развернутой) формах. Проведение анализа различных игровых ситуаций.

Методические указания.

В данной лабораторной работе рассматривается представление игр в двух формах: нормальной и позиционной (развернутой).

Представление игры в нормальной форме.

Для представления игры в нормальной форме прежде всего необходимо определить чистые стратегии игроков. Чистая стратегия игрока – это правило его поведения от начала до конца игры. Особенно внимательно описывать чистые стратегии необходимо в многоходовых играх. Попробуйте сначала описать поведение игрока на качественном, словесном уровне. К стратегии игрока относятся только те действия, которые совершает сам игрок. Эти действия должны определяться однозначно: игрок всегда может выбрать ту или иную стратегию и придерживаться ее до конца игры. Он не может предсказать только последствия своих действий (в совокупности с действиями других игроков или случая), но свое поведение в той или иной ситуации он определяет до начала игры.

Для дальнейшего представления игры, например, построения платежной матрицы, старайтесь сразу записывать стратегии в компактной и удобной для интерпретации форме.

Например, пусть сначала игрок должен назвать число 1 или 2. На втором своем шаге он должен выбрать одно из двух чисел 3 или 4. Тогда у него получается четыре чистых стратегии, которые можно обозначить следующим образом: {13, 14, 23, 24}.

После определения чистых стратегий определяются функции выигрыша для каждого из игроков. Для игр двух лиц функции выигрыша удобно представлять в виде матриц. В антагонистических играх достаточно определить матрицу выигрыша первого игрока (для второго игрока элементы данной матрицы будут представлять проигрыши), которая называется платежной.

Если в игре присутствует случай (бросание монеты, выбор числа с какой-то вероятностью и т.д.), то выигрыши игроков обычно представляют в виде средних значений (с учетом вероятностей наступления раз-

личных событий). Если результатом игры является просто выигрыш или проигрыш игрока, то с учетом случайности наступления событий значениями функций выигрышей являются вероятности выигрыша/проигрыша игроков.

Представление игр в позиционной форме.

Многоходовые игры удобнее представлять в позиционной форме. Здесь игра представляется в виде графа и описывает всю последовательность ходов каждого из игроков, а также их информированность.

Начинать построение игры надо с определения множеств очередностей. Количество множеств очередностей равно количеству игроков. Если в игре присутствует случай, то появляется дополнительное множество очередностей, соответствующее ходам случая. Так как каждый игрок может ходить несколько раз, то и соответствующее множество очередностей может разбиваться на несколько ходов.

При отображении на графе альтернатив (ходов игроков), пометайте их в соответствии с действиями игроков. Каждая альтернатива соответствует определенному ходу/действию игрока.

Внимание! Так как каждая вершина графа принадлежит только одному множеству очередностей, то и дуги/альтернативы, выходящие из нее могут соответствовать действиями только одного игрока (в зависимости от того, какому множеству очередностей принадлежит вершина). Другими словами, из одной вершины не могут выходить дуги/альтернативы разных игроков.

Не забывайте пометать конечные вершины графа, указывая выигрыши игроков. Помните, конечные вершины могут быть помечены одним числом только в антагонистических играх: в этом случае указанное число означает выигрыш первого игрока (проигрыш второго). При этом отрицательное число означает, что в данной партии первый игрок проигрывает (второй, соответственно, выигрывает). Если игра не является антагонистической, то конечные вершины помечаются векторами, элементы которых указывают выигрыши каждого игрока.

После того, как вы построили граф игры, указав множества очередностей, альтернативы/ходы игроков и их выигрыши, необходимо обязательно указать информационные множества.

Важно! Без информационных множеств игра не считается представленной!

Информационные множества не указываются только в играх с полной информацией: здесь каждая вершина представляет отдельное информационное множество.

Информационные множества показывают информированность игроков. Чтобы корректно разбить множества очередностей на информа-

ционные множества, ответьте сначала на вопрос: какой информацией обладает каждый игрок, а какой не обладает? Если игрок не может различить, в какой из двух вершин множества очередностей он находится, то эти вершины принадлежат одному информационному множеству. Игрок может не обладать какой-либо информацией в силу следующих причин:

- он не знает о том, как сходил его соперник (ход соперника происходил в темную, либо одновременно с ходом рассматриваемого игрока);
- в игре присутствует случай, и игрок не знает результатов его хода;
- игрок представляет собой команду из нескольких человек и не знает о том, как повели себя его товарищи по команде.

Внимание! Если вершины принадлежат одному информационному множеству, то они должны иметь одинаковое количество альтернатив. Кроме того, они должны иметь одинаковые множества альтернатив (т.е. альтернативы должны быть помечены одинаково для всех вершин одного информационного множества).

Если у вас получается достаточно большой граф и на нем неудобно показывать информационные множества, то это можно сделать следующим образом. Пронумеровать вершины графа, а затем отдельно записать информационные множества игроков, указав номера вершин, которые входят в то или иное множество.

Пример выполнения работы.

а) представление игры в нормальной форме.

Дана антагонистическая игра (дуэль). Игроки продвигаются навстречу друг другу на 5 шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но во время игры он может выстрелить только один раз. Считается, что вероятность того, что игрок попадает в своего противника, если выстрелит, продвинувшись на k шагов, равна k/n ($k \leq n$).

Здесь стратегия игрока 1 (2) заключается в принятии решения стрелять на i -м (j -м) шаге. Пусть $i < j$ и игрок 1 принимает решение стрелять на i -м шаге, а игрок 2 – на j -м шаге. Тогда выигрыш a_{ij} игрока 1 определяется формулой

$$a_{ij} = \frac{i}{5} - \left(1 - \frac{i}{5}\right) \frac{j}{5} = \frac{n \left(-j \right) + ij}{n^2}.$$

Таким образом, выигрыш a_{ij} – это разность вероятностей пораже-

ния противника и собственной гибели в дуэли. В случае $i > j$ первым стреляет игрок 2 и $a_{ij} = -a_{ji}$. Если же $i = j$, то полагаем $a_{ij} = 0$. Тогда платежная матрица игры примет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3/25 & -7/25 & -11/25 & -15/25 \\ 3/25 & 0 & 1/25 & -2/25 & -5/25 \\ 7/25 & -1/25 & 0 & 7/25 & 5/25 \\ 11/25 & 2/25 & -7/25 & 0 & 15/25 \\ 15/25 & 5/25 & -5/25 & -15/25 & 0 \end{bmatrix}$$

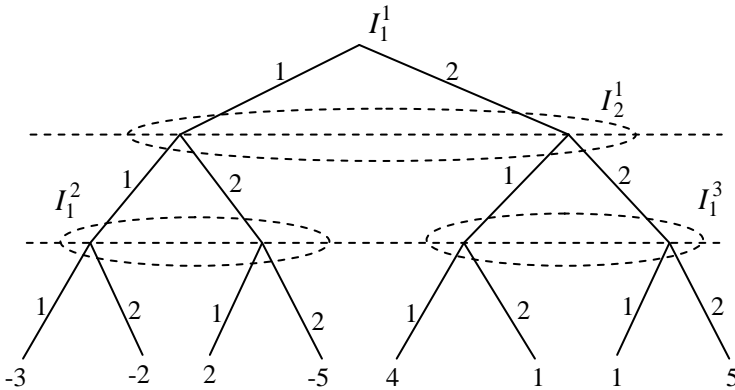
б) *представление игры в позиционной форме.*

Дана антагонистическая игра. Игрок 1 на первом ходу выбирает число из множества $\{1,2\}$. Второй ход делает игрок 2. Не зная хода игрока 1, он выбирает число из множества $\{1,2\}$. Третий ход опять делает игрок 1, не зная хода игрока 2, но помня свой выбор на первом ходу, он выбирает число из множества $\{1,2\}$. На этом игра прекращается, и игрок 1 получает выигрыш, который определен следующей функцией:

$$J(1,1,1) = -3, \quad J(1,1,2) = -2, \quad J(1,2,1) = 2, \quad J(1,2,2) = -5,$$

$$J(2,1,1) = 4, \quad J(2,1,2) = 1, \quad J(2,2,1) = 1, \quad J(2,2,2) = 5.$$

Данная игра может быть представлена следующим графом (игрок 1 имеет здесь три информационных множества, игрок 2 – одно):



Задание на моделирование.

1. В каждом варианте описаны две игры. Необходимо представить первую игру в нормальной форме: описать чистые стратегии игроков и записать матрицу полезности.

2. Вторую игру необходимо представить в позиционной (развернутой) форме.

Варианты заданий.

Вариант 1.

1) В эту игру играют два человека, каждый из них показывает один, два или три пальца и одновременно называет число пальцев, которое, по его мнению покажет противник. Если один из игроков указывает правильно, то он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником. Если угадывают оба игрока, или не угадывает ни один из них, то никто ничего не получает.

Можно!!2) Антагонистическая игра происходит следующим образом:

ход 1: игрок 1 выбирает одно из двух чисел 1, 2;

ход 2: бросается монета и, если выпадает герб, второму игроку сообщается о выборе первого игрока;

ход 3: игрок 2 выбирает одно из двух чисел 3, 4;

ход 4: с вероятностями 0.4, 0.2, 0.4 выбирается одно из трех чисел 1, 2, 3.

Числа, выбранные в первом, третьем и четвертом ходах, складываются и полученная сумма уплачивается вторым игроком первому, если она четная, и первым игроком - второму игроку, если она нечетная.

Вариант 2.

1) Два игрока имеют по две белых и по две красных фишки. Оба выкладывают на стол произвольное количество фишек (или ни одной). Функция выигрыша первого игрока (проигрыш другого) определяется по количеству выложенных белых и красных фишек:

$$J(x, y) = (-1)^{(x_1 + y_1)}(x_2 + y_2),$$

где x_1 , y_1 – количество белых фишек выложенных, соответственно, первым и вторым игроками;

x_2 , y_2 – количество красных фишек выложенных, соответственно, первым и вторым игроками.

!!!!2) Антагонистическая игра происходит за четыре хода:

1-й ход - первый игрок выбирает число из $\{1, 2, 3\}$ (X_1);

2-й ход - второй игрок выбирает число из $\{1, 2, 3\}$ (X_2);

3-й ход - первый игрок выбирает из оставшихся двух чисел (X_3),

4-й ход - второй игрок выбирает из оставшихся двух чисел (X_4).

Оба игрока не обладают информацией о выборах противника.

Функция выигрыша первого игрока:

$$J = (-1)^{(X_1+X_2)} * ((X_1+X_2)-(X_3+X_4))$$

Вариант 3.

1) Две девочки прячут по выбору 0, 1 или 2 конфеты. Каждая из них пытается угадать общее число конфет, спрятанных ими, причем угадывают они одновременно. Угадавшая правильно получает от другой одну конфету. Если обе угадали, или не угадал никто, то считается ничья.

Будем считать, что девочки достаточно умны, чтобы не выбирать заведомо проигрышный вариант. Например, если первая девочка спрятала 1 конфету, то она никак не скажет, что вместе они спрятали 0 конфет, зная, что уже получается не меньше единицы.

????2) Бросается монета. Игрок 1, не зная, выпала ли монета гербом или решкой, выбирает одну из сторон монеты. Игрок 2, не зная исхода бросания монеты, но зная выбор игрока 1, выбирает одну из сторон монеты. Выигрыши игрока 1 в каждой ситуации следующие (игра антагонистическая):

$$J(\Gamma, \Gamma, \Gamma)=-2, \quad J(P, \Gamma, \Gamma)=6, \quad J(\Gamma, \Gamma, P)=-1, \quad J(P, \Gamma, P)=2,$$

$$J(\Gamma, P, \Gamma)=3, \quad J(P, P, \Gamma)=2, \quad J(\Gamma, P, P)=-4, \quad J(P, P, P)=6.$$

Вариант 4.

1) Полковник Блотто и его противник пытаются занять две позиции, распределив надлежащим образом свои силы. Все полки должны быть выставлены на позиции, причем может быть ситуация, когда на одной позиции выставлены все полки, а на другой – ни одного. Полковник имеет 4 полка, а его противник – три полка. Если на позиции у полковника Блотто полков больше, чем у его противника, то он получает все полки противника на этой позиции. Если на данной позиции у полковника меньше полков, то он теряет полки на этой позиции. Общий выигрыш равен сумме приобретенных/потерянных полков на обеих позициях.

НЕ знают!!!!2) Дана антагонистическая игра между игроками А и

В, в которой А – один человек, а В – команда из двух человек В1 и В2. Эти три человека изолированы друг от друга в отдельных комнатах и во время игры не могут общаться между собой. В начале игры судья входит в комнату, в которой находится А и предлагает ему выбрать одно из чисел {1, 2, 3, 4}. Затем судья обходит В1 и В2 и предлагает им выбрать по числу из множества {1, 2, 3}. При этом, игроки В1 и В2 знают, какое число выбрал игрок А (им сообщает об этом судья), но не знают, какое число выбрал его товарищ по команде. Если сумма всех выбранных чисел оказывается четной, выигрывает игрок А. Если сумма нечетная – выигрывает команда В. Сумма выигрыша определяется суммой выбранных чисел.

Вариант 5.

1) Два игрока одновременно называют по одному целому числу из диапазона [1,6]. Если разница между двумя названными числами оказывается четной, выигрывает первый игрок, если нечетной – выигрывает второй. Если игроки назвали одинаковые числа – ничья. Величина выигрыша при этом определяется по формуле:

$$J(x, y) = x + y + x \cdot y,$$

где x, y – числа, названные первым и вторым игроками, соответственно.

2) Судья сдает каждому из двух игроков по одной карте из множества {1, 2, 3}. Оба игрока видят свою карту, но не видят карту противника.

Начинает первый игрок. Он может сказать «пас» либо «вист». Затем второй игрок также говорит «пас» либо «вист». Если оба игрока вступают, то карты вскрываются, и игрок с более ценной картой получает 2 очка от противника. Если оба игрока пасуют, то аналогично: карты вскрываются, и игрок с более ценной картой получает 1 очко от противника. Если первый игрок сказал «вист», а второй – «пас», то первый игрок безусловно (карты не вскрываются), получает 1 очко. Если первый игрок сказал «пас», а второй – «вист», то первый игрок снова говорит «пас» либо «вист», и если он повторно спасовал, то 1 очко безусловно отдается второму игроку, а если повторно первый игрок сказал «вист», то карты вскрываются, и игрок с более ценной картой получает 2 очка от противника.

Вариант 6.

1) Двум мальчикам подарили по две конфеты – шоколадной и карамели. Они решили сыграть в следующую игру. Каждый из них прячет

по одной конфете, а потом пытается угадать, какую конфету спрятал противник. Если оба угадали, или оба не угадали, то каждый остается при своих (ничья). Если угадал только один из них, то он получает от противника спрятанную тем конфету. Мальчики оценивают конфеты следующим образом: шоколадная – 5 единиц, карамель – 1 единицу (оба предпочитают шоколад).

!!!!2) Игрок 1 имеет две, а игрок 2 - три фишки. Первым ходит игрок 1, откладывая произвольное количество фишек. Вторым ходит случай, в результате которого с вероятностью 0.7 откладывается одна фишка и с вероятностью 0.3 - ни одной. Третьим ходит игрок 2, откладывая произвольное количество фишек. Ни одна сторона не знает о выборе остальных. Если в результате количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1, в противном случае фишки выигрывает игрок 2. Построить развернутую форму игры.

Вариант 7.

1) Игроки 1 и 2 выбирают по числу из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, не зная, что выбирает другой. Игрок 1 выигрывает, если сумма выбранных чисел четная, и проигрывает игроку 2, если сумма нечетная. При этом сумма выигрыша определяется по формуле:

$$J(x, y) = (x + y) / 10,$$

где x, y – числа, выбранные, соответственно, 1-м и 2-м игроками.

2) Дана следующая антагонистическая игра: из чисел 1, 2, 3, 4 случайно (равновероятно) выбирается какое-нибудь одно, и двум игрокам предлагается указать верхнюю границу для выбранного числа. Игроки не знают, какое случайное число выбрано, и не знают о выборе противника. Если угадал лишь один из игроков, то он получает единицу от противника. Если угадали оба, то выигрывает тот, чья верхняя граница строго меньше, причем его выигрыш равен разности между указанными нижними границами. Во всех остальных случаях никто из игроков не получает ничего.

Вариант 8.

1) Два игрока имеют на руках по 5 карт: шестерку, семерку, даму, короля и туза. «Стоимость» дамы – 3 очка, короля – 4 очка, туза – 1 очко. Шестерка и семерка стоят по номиналу. По старшинству карты располагаются следующим образом: $6 < 7 < Д < К < Т$, но при этом $Т < 6$ (старшинство «по кругу»). Игроки одновременно выкладывают на стол по одной карте. Выигрывает тот, у кого карта старше, причем выигрыш

определяется суммой очков выложенных карт. Если оба игрока выложили на стол карты одинакового номинала, то никто из них ничего не выигрывает.

!!!!!!2) Дана следующая антагонистическая игра: из чисел 1, 2, 3, 4 случайно (равновероятно) выбирается какое-нибудь одно, и двум игрокам предлагается указать нижнюю границу для выбранного числа. Игроки не знают, какое случайное число выбрано, и не знают о выборе противника. Если угадал лишь один из игроков, то он получает единицу от противника. Если угадали оба, то выигрывает тот, чья нижняя граница строго больше, причем его выигрыш равен разности между указанными нижними границами. Во всех остальных случаях никто из игроков не получает ничего.

Вариант 9.

1) Играют два игрока. Первый игрок выбирает одно из чисел – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Второй игрок пытается угадать, какое из чисел выбрал первый игрок. Если второй угадывает, то он получает от первого 10 очков, если нет – то второй игрок платит первому разницу между выбранным и названным числами (абсолютную).

2) В игру играют три игрока. Каждый из них по очереди вслух называет одно из двух чисел: 1 или 5. Выигрыш игрока составляет абсолютную разницу между числом, которое он назвал, и суммой двух других названных чисел.

2.2. Лабораторная работа №2. Решение антагонистических игр в матричной форме.

Цель работы.

Изучение моделей принятия решений в конфликтных ситуациях для антагонистических игр в нормальной форме и решения их различными методами: аналитическим, итерационным и методом линейного программирования.

Методические указания.

В качестве инструментального средства для выполнения лабораторной работы используется автоматизированная система «Антагонистические игры» (файл Ant_games.exe).

Первоначально, до работы с системой, необходимо представить

игру в нормальной форме. Для этого внимательно прочитайте описание игры, определите количество чистых стратегий для каждого игрока. Помните, что любая чистая стратегия – это правило, определяющее поведение игрока от начала до конца игры. Особенно внимательно определяйте стратегии в многоходовых играх.

После того, как стратегии определены, строится платежная матрица игры. После этого матрица вводится через опцию меню «Ввод данных». Если выигрыши первого игрока можно записать в виде функции выигрыша (либо функция выигрыша сразу определена в варианте), то платежная матрица вводится формулой.

При вводе формулы нужно помнить следующее:

1) обязательно введите выражение “F(x)=”, либо просто не стирайте его с экрана. Примечание: не вводите “F(x,y)=”! Конечно, функция зависит от двух аргументов (стратегий первого и второго игроков) но в шаблоне распознавателя формул левая часть уравнения выглядит именно так, как она записана на экране по умолчанию;

2) все правое выражение заключается в скобки, все символы вводятся большими буквами; умножение обозначается через символ ‘*’, деление – через символ ‘/’, возведение в степень – через символ ‘^’, например, формула $(-1)^{x+y}(x+y)$ должна быть введена следующим образом:

$$F(x)=((-1)^(X+Y)*(X+Y))$$

3) под название встроенных функций отводится четыре позиции. Если функция обозначается тремя буквами, то четвертая позиция отделяется пробелом, например:

$$F(x)=(SIN (X+Y))$$

4) обращайтесь особое внимание на расстановку скобок в сложных функциях: скобки определяют приоритеты операций по стандартной схеме приоритетов.

Введенные вами данные можно запомнить в файл. При необходимости, записанные ранее в файл данные можно считать из файла.

Введенная вами платежная матрица может быть при необходимости сокращена, если вы воспользуетесь пунктом меню «Сокращение матрицы».

Внимание! Если вы сокращаете матрицу, обратите внимание на то, какие именно столбцы и строки будут сокращены. В окончательном варианте представления решения оптимальные стратегии должны быть даны для исходной (несокращенной матрицы)!

Пункт меню «Методы» позволит вам выбрать нужный метод для решения поставленной задачи. Решение может быть произведено одним из трех методов: аналитическим, итерационным, методом линейного

программирования (симплекс-метод).

Аналитический метод. Для решения задачи данным методом платежная матрица должна иметь размерность 2×2 . В случае, когда размерность матрицы больше, чем два на два, система предупреждает о некорректном вводе данных.

Итерационный метод. Для решения задачи методом итераций пользователь должен ввести либо точность вычисления, либо количество итераций. Для игр с плохой сходимостью при высокой точности может потребоваться очень большое количество итераций. Система предупреждает, что идет процесс расчета и предлагает немного подождать. При решении игры методом итераций необходимо:

- 1) определить требуемую точность вычислений и решить задачу методом итераций;
- 2) исследовать игру на сходимость: получить решение для разного количества итераций (например, для 50, 500, 1000, 5000 ...) и посмотреть, насколько изменяются результаты решения при различном количестве итераций: насколько быстро сходится игра.

После окончания работы метода итераций вы можете посмотреть результаты на экране, и/или записать данные в файл. В системе полную информацию с результатами решений можно посмотреть также, выбрав опцию меню «Результаты/Результат итерационного».

Метод линейного программирования (симплекс-метод). При выборе опции меню «Методы/Симплекс» ваша задача будет решаться двухэтапным симплекс-методом. После окончания работы метода на экран выдается сообщение об успешном завершении вычислений. Результаты расчетов по симплекс-методу вы можете посмотреть на экране, а также записать в файл. В системе полную информацию также можно посмотреть, выбрав опцию меню «Результат/Результат симплекс».

Внимание! Окончательное решение симплекс-метода содержит оптимальные планы, а не оптимальные стратегии игроков. Чтобы получить окончательное решение необходимо:

- 1) из окончательной симплекс-таблицы выбрать оптимальные стратегии игроков. Здесь задача решается для второго игрока, поэтому оптимальный план первого игрока определяется по дополнительным переменным из строки целевой функции, а оптимальный план второго игрока определяется по значениям основных переменных в базе. Будьте внимательны! При выборе значений основных переменных обращайте внимание на базис, который определяет порядок их расположения в таблице. Если какая-либо основная переменная в базе отсутствует, значит

- ее значение равно нулю;
- 2) определить цену игры, как обратное значение целевой функции ($-Z$);
 - 3) перейти от оптимальных планов к оптимальным стратегиям. Для этого необходимо умножить эти планы на цену игры;
 - 4) откорректировать при необходимости цену игры: в связи с тем, что для решения игры симплекс-методом, исходная матрица делается положительной, то и цена игры выдается увеличенной на соответствующее число. В результатах решения указывается число, на которое была увеличена цена игры.

После проведения расчетов всеми указанными методами необходимо провести сравнительный анализ результатов. Прежде всего, определите, одинаковы ли оптимальные стратегии, полученные симплекс-методом и методом итераций. Различие между полученными стратегиями может быть:

а) незначительное, вызванное тем, что итерационный метод выдает решение лишь с какой-то точностью;

б) принципиальное, когда два метода дают абсолютно разные оптимальные стратегии.

Проанализируйте, какая ситуация сложилась в вашем случае. Если два решения принципиально различны, то ответьте на вопрос: какое из полученных решений удобнее применять на практике. Какое из решений лучше с точки зрения каждого игрока? Обоснуйте ваши рекомендации.

Пример выполнения работы.

Постановка задачи.

У каждого из игроков по две монеты, достоинством 1 рубль и 2 рубля. Оба одновременно выкладывают по одной из них на стол. Если достоинство монет совпадает, то выложенные деньги забирает первый игрок, если нет – то второй.

Построение модели.

Построим модель в нормальной (матричной) форме. Обозначим стратегии:

- a1 – первый игрок выложил 1 рубль;
- a2 – первый игрок выложил 2 рубля;
- b1 – второй игрок выложил 1 рубль;
- b2 – второй игрок выложил 2 рубля.

Если полезность исхода считать равной величине выигрыша (а это может быть и не так, может быть кому-то нравится сам процесс игры, а выигрыш его не волнует), то матрицы полезности будут равны:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Принимая во внимание, что мы рассматриваем антагонистическую игру, в которой выигрыш первого игрока является проигрышем второго, в качестве платежной матрицы выбираем матрицу полезности первого игрока.

Смешанные стратегии определяются здесь как $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$. Цена игры определяется по формуле:

$$V = \sum_{i,j} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j.$$

Решая задачу итеративным методом, нам необходимо вычислить эмпирические смешанные стратегии игроков и цену игры:

$$S_1 = (p_1, \dots, p_m), \quad S_2 = (g_1, \dots, g_n),$$

где S_i – эмпирическая смешанная стратегия i -го игрока;

p_i, g_j – относительная частота применения i -го и j -го хода, соответственно, первого и второго игроков.

$$V = (v_H + v_G) / 2,$$

где v_H – минимально накопленный выигрыш, разделенный на число партий;

v_G – максимально накопленный выигрыш, разделенный на число партий.

Решая задачу аналитическим методом, получим:

$$X = (0.667, 0.333), \quad Y = (0.500, 0.500), \quad V = 0.000.$$

Решая задачу итеративным методом (число итераций 100), получим: $S_1 = (0.670, 0.330)$, $S_2 = (0.500, 0.500)$, $V = 0.000$.

Решая задачу симплекс-методом, получаем следующие оптимальные планы игроков и значение целевой функции:

$$U^* = (0.333, 0.167), \quad W^* = (0.25, 0.25), \quad -Z = 0.5,$$

Кроме этого, указывается, что цена игры увеличена на 2, $V^* = 2$.

Переходим к смешанным стратегиям игроков:

$$X = (0.667, 0.333), \quad Y = (0.5, 0.5), \quad V = V^* - 2 = 0.$$

Все три метода дают одинаковое единственное решение.

Задание на моделирование.

1. В качестве исходных данных возьмите первую игру из Лабораторной работы №1 (ваш вариант), представленную вами в нормальной форме.

2. Решить игру методом линейного программирования.

3. Решить игру методом итераций. Первоначально попытаться решить игру, определяя точность расчета. После этого необходимо исследовать игру на сходимость, задавая различное количество итераций. Решение определить при максимально достигаемой точности.

4. Если это возможно, решить игру аналитическим методом.

5. Сравнить результаты, полученные после вычисления всеми тремя методами. Если различные методы привели к разным решениям, то необходимо проанализировать полученную ситуацию, дать рекомендации по возможности применения полученных решений.

3.3. Лабораторная работа №3. Решение антагонистических игр в позиционной форме.

Цель работы.

Изучение антагонистических игр, представленных в позиционной форме. Рассмотрение различных методов решения позиционных игр, включая игры с полной и неполной информацией.

Методические указания.

В данной лабораторной работе рассматривается решение антагонистических игр, представленных в позиционной форме. Существуют различные методы решения для позиционных игр с полной и неполной информацией. Если на графе не указаны информационные множества, то представленная игра является игрой с полной информацией.

Позиционные игры с полной информацией (когда каждый игрок в каждый момент обладает полной информацией о ходах противника и текущего состояния игры) решаются с помощью графического метода. В данном случае решение заключается в разметке графа с указанием цен подигр (выигрыша первого игрока в случае, если игра начинается с размечаемой вершины и дальше ведется оптимально обоими игроками до конца) и оптимальных ходов игроков. Помните, что разметка графа осуществляется снизу вверх. Оптимальный ход 1-го игрока определяется по максимальной цене из всех подигр нижнего уровня, оптимальный

ход 2-го игрока – по минимальной цене из всех подигр нижнего уровня. Данный класс игр всегда имеет решение в чистых стратегиях.

Позиционные игры с неполной информацией не имеют своих методов решения. В данном случае для нахождения решения необходимо перейти от развернутой формы игры к нормальной, а дальше использовать любой известный метод решения антагонистических игр.

Для перехода к нормальной форме игры необходимо сначала определить количество чистых стратегий для каждого игрока, и описать эти стратегии. Каждая чистая стратегия должна описывать правило поведения игрока для каждого информационного множества.

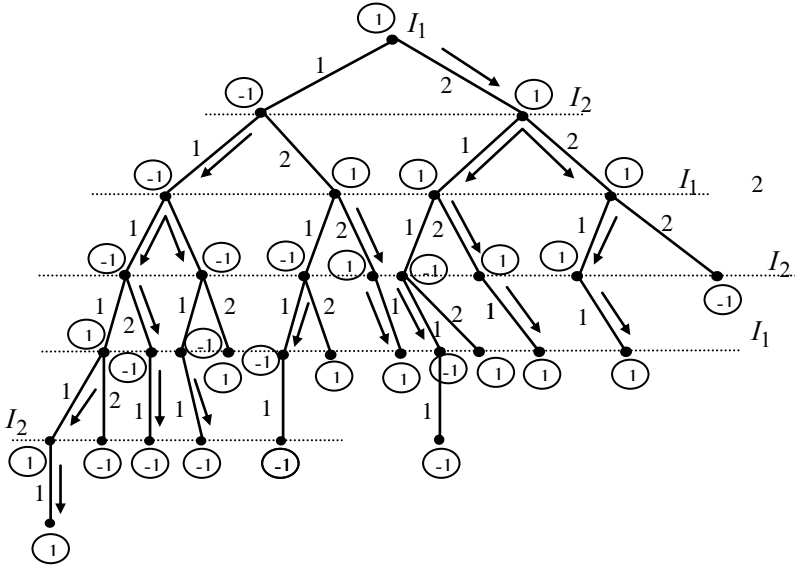
По описанным стратегиям и графу игры можно построить платежную матрицу: выбираем i -ю стратегию 1-го игрока и j -ю стратегию 2-го. Начинаем двигаться по графу в соответствии с выбранными стратегиями. Попадая в каждое новое информационное множество, смотрим, какую альтернативу предлагает выбрать рассматриваемая стратегия. По выбранной альтернативе продвигаемся к следующей вершине и попадаем в новое информационное множество. Таким образом, продвигаемся по графу до тех пор, пока не достигнем конечной вершины. Выигрыш, соответствующий достигнутой конечной вершине, является результатом данной партии и записывается в качестве элемента a_{ij} платежной матрицы.

Пример выполнения работы.

а) решение игры с полной информацией.

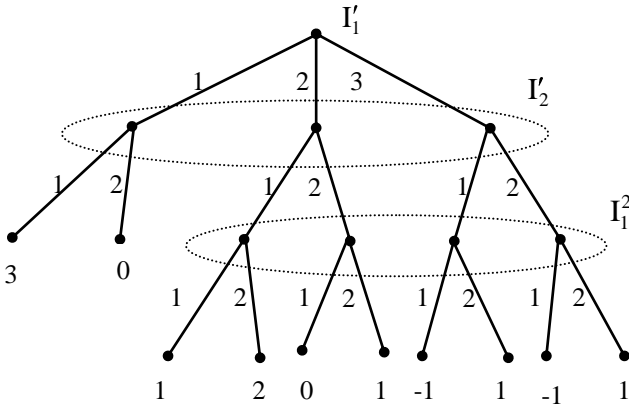
На столе лежат 6 спичек. Игроки берут спички по очереди, каждый может взять 1 или 2 спички. Тот, кто берет последнюю спичку, проигрывает 1 очко. Данная игра является игрой с полной информацией — каждый из игроков знает, в каком состоянии находится игра в данный момент времени. Каждое информационное множество содержит только одну вершину дерева, поэтому мы будем показывать только множества очередностей.

Введем следующие обозначения: возле каждой вершины будем ставить число в кружке, которое будет обозначать выигрыш первого игрока в случае, если игра начинается из данной вершины и далее ведется оптимально обоими игроками до конца; оптимальные альтернативы будем помечать стрелками. В результате число в кружке около исходной вершины даст нам цену игры, а расположение стрелок укажет оптимальные чистые стратегии игроков. Решение игры:



б) решение игры с неполной информацией.

Дана антагонистическая игра с неполной информацией в развернутой форме. Найти решение игры.



Определим чистые стратегии игроков. Первый игрок имеет два информационных множества, содержащих 3 и 2 альтернативы – 6 чистых стратегий. Второй игрок имеет одно информационное множество с двумя альтернативами – получаем 2 чистые стратегии.

Представим чистые стратегии игроков в виде двух таблиц (для первого и второго игроков). При описании чистой стратегии для каждого информационного множества игрока определяется альтернатива, которую он должен выбрать на данном ходе.

	I'_1	I_1^2
α_1	1	1
α_2	1	2
α_3	2	1
α_4	2	2
α_5	3	1
α_6	3	2

	I_1^2
β_1	1
β_2	2

Строим платежную матрицу игры:

	β_1	β_2
α_1	3	0
α_2	3	0
α_3	1	0
α_4	2	1
α_5	-1	-1
α_6	1	1

Данная игра имеет решение в чистых стратегиях:

Седловые точки a_{42}, a_{62} .

Оптимальные стратегии первого игрока: α_4, α_6 , оптимальная стратегия второго игрока: β_2 .

Цена игры: 1

Задание на моделирование.

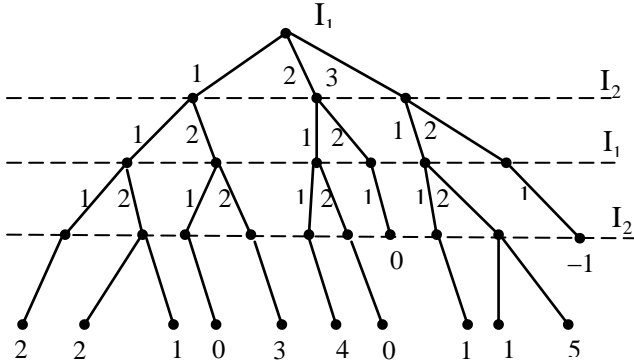
1. В каждом варианте представлены две игры.
2. Первая игра представлена в виде графа и является игрой с полной информацией. Необходимо решить игру графическим методом.
2. Вторая игра является игрой с неполной информацией. Необходимо перейти от позиционной формы к нормальной и решить игру ана-

литическим или симплекс-методом.

Варианты заданий.

Вариант 1.

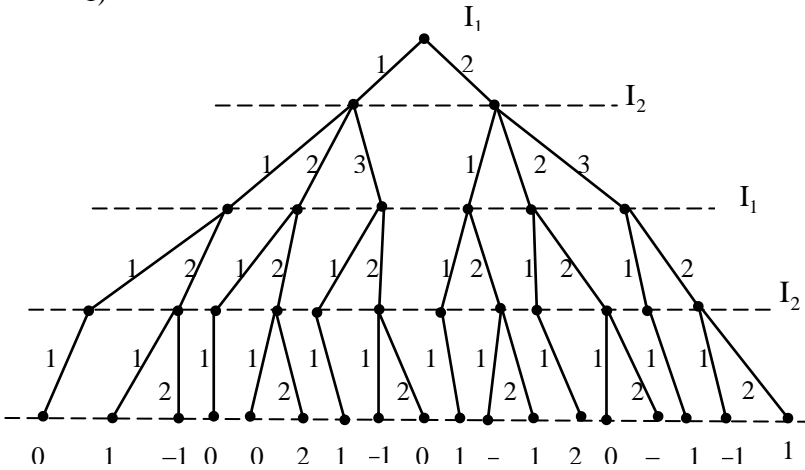
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 2.

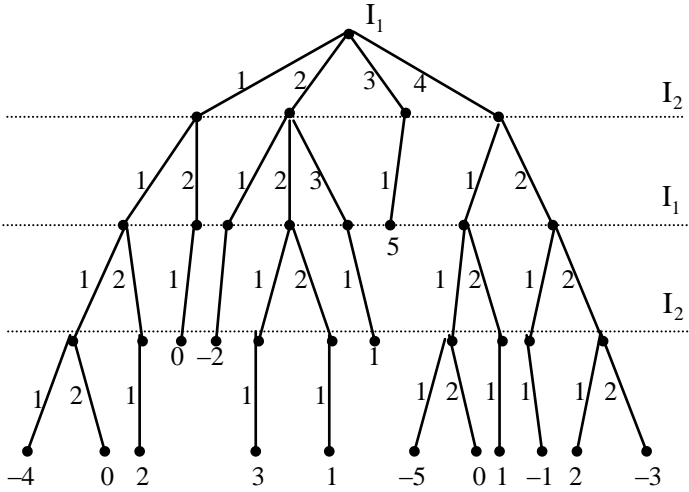
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 3.

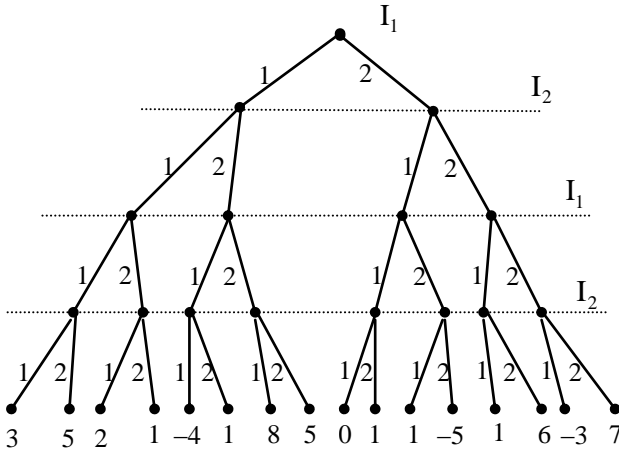
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 4.

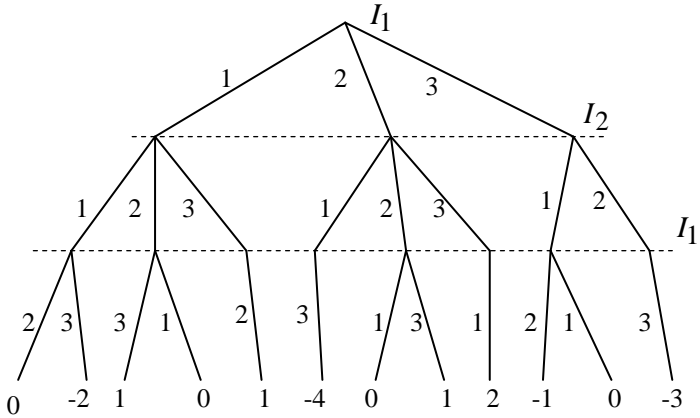
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 5.

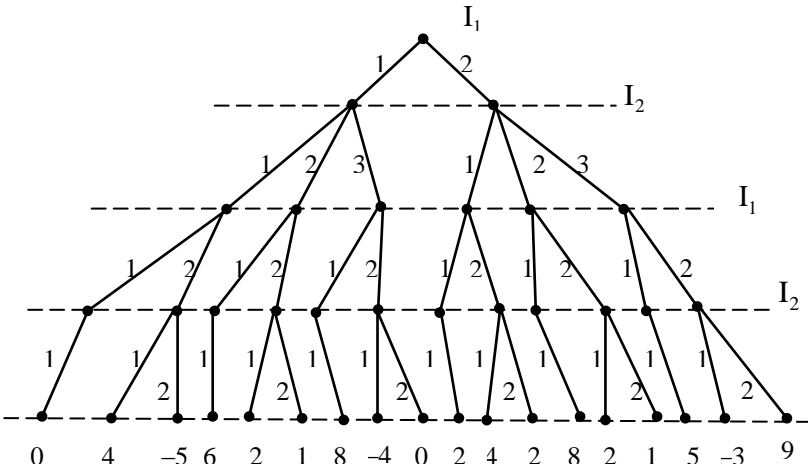
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 6.

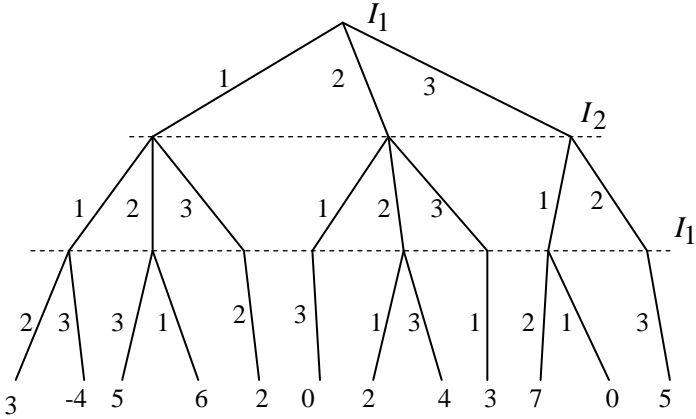
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 7.

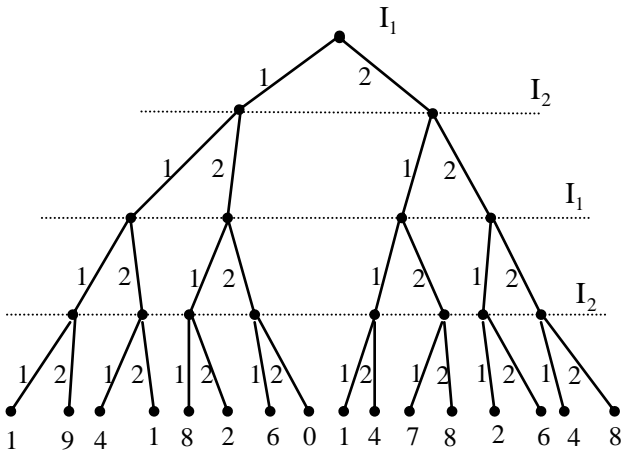
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 8.

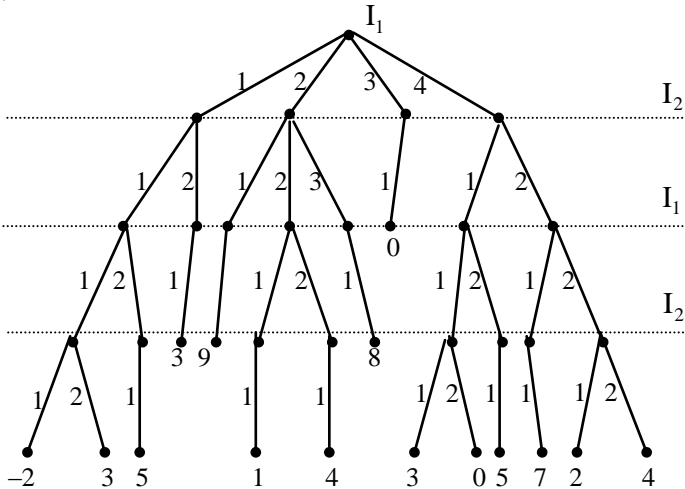
1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

Вариант 9.

1)



2) Возьмите вторую игру из Лабораторной работы №1.

3.4. Лабораторная работа №4. Решение вогнуто-выпуклых игр.***Цель работы.***

Изучение бесконечных антагонистических игр. Получение практических навыков решения игр на единичном квадрате, в частности, вогнуто-выпуклых игр.

Методические указания.

Играми на единичном квадрате являются бесконечные антагонистические игры, в которых оба игрока имеют континуум чистых стратегий. В зависимости от вида функции выигрыша игра может быть вогнутой, выпуклой или вогнуто-выпуклой.

Решение игры на единичном квадрате начинается с определения типа игры: относится ли игра к вогнуто-выпуклым или просто вогнутой/выпуклым играм. Тип игры определяется по вторым производным

функции выигрыша.

Помните, что игра является вогнутой, только если функция выигрыша вогнута на множестве стратегий первого игрока. Игра является выпуклой, только если функция выигрыша выпукла на множестве стратегий второго игрока.

После того, как определен тип игры, в соответствии с типом выбирается критерий, по которому будет находиться решение.

В данной лабораторной работе рассматриваются вогнуто-выпуклые игры. Для такого типа игр работают (и могут быть применены) оба критерия (минимаксный и максиминный). Для решения игры может быть выбран любой критерий, причем оба критерия должны привести к одному и тому же решению.

Совет: проанализируйте первые производные функции выигрыша, так как именно по ним определяется максимум и минимум. Первоначально можно взять тот критерий, по которому проще находить решение. Выбирайте минимаксный критерий, если проще выразить x через y (в производной по x); если проще выражается по производной y через x , то выбирайте максиминный критерий. Чтобы быть уверенным в правильности результата, необходимо для вогнуто-выпуклых игр найти оба решения (по обоим критериям). Если все верно, решения должны совпасть.

Пример выполнения работы.

Дана игра на единичном квадрате:

$$G = \langle [0,1], [-3,3], -3x^2 + y^2 - 5xy \rangle.$$

Определим вогнутость/выпуклость игры. Для этого найдем вторые производные функции выигрыша:

$$J'_x = -6x - 5y, \quad J''_{xx} = -6 < 0 \quad \text{— игра вогнута.}$$

$$J'_y = 2y - 5x, \quad J''_{yy} = 2 > 0 \quad \text{— игра выпукла.}$$

Для решения вогнуто-выпуклой игры мы можем выбрать любой из критериев. Первоначально выбираем максиминный критерий:

$$v = \max_x \min_y J(x, y).$$

Сначала ищем минимум по y , для этого приравняем первую производную функции выигрыша по y нулю и выражаем y через x :

$$J'_y = 2y - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2.5x$$

Подставим полученное выражение в нашу функцию выигрыша,

получаем:

$$-3x^2 + (2.5x)^2 - 5x(2.5x) = 3.25x^2 - 12.5x^2 = -9.25x^2$$

Полученная функция имеет максимум по x в точке 0 (функция убывает по x и достигает максимального значения при минимальном значении аргумента).

Тогда получаем следующие оптимальные стратегии игроков и цену игры:

$$x^* = 0, \quad y^* = 0, \quad v = 0.$$

Проверим правильность полученного решения, используя теперь минимаксный критерий:

$$v = \min_y \max_x J(x, y).$$

Максимум по x находим через первую производную функции выигрыша по x :

$$J'_x = -6x - 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{6}y.$$

Подставим полученное выражение в нашу функцию выигрыша, получаем:

$$-3\left(-\frac{5}{6}y\right)^2 + y^2 - 5\left(-\frac{5}{6}y\right)y = -\frac{25}{12}y^2 + y^2 + \frac{25}{6}y^2 = \frac{37}{12}y^2.$$

Данная функция возрастает по абсолютному значению y и достигает минимума в точке 0 (такой же результат можно получить приравняв первую производную нулю). Таким образом, получаем:

$$x^* = 0, \quad y^* = 0, \quad v = 0.$$

Оба решения совпали, значит мы верно определили оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Задание на моделирование.

1. Дана вогнуто-выпуклая игра. Найти решение игры.
2. Решение находить через оба критерия: минимаксный и максиминный.
3. Сравнить оба решения. Если оба варианта совпадают, то решение найдено верно.
4. В качестве решения должно быть представлено: две оптимальные чистые стратегии игроков и цена игры.

Варианты заданий.

№ варианта	Вогнуто-выпуклая игра
1	$\Gamma = \langle [0,1], [0,3], y^3 - 2x^2 + 2x - xy \rangle$
2	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], -x^2 + 4y^2 - 3xy + 2x \rangle$
3	$\Gamma = \langle [0,2], [0,3], -x^3 + y^2 + 3xy - y \rangle$
4	$\Gamma = \langle [0,1], [0,2], -4y + 3xy - x^2 + y^2 \rangle$
5	$\Gamma = \langle [1,2], [0,1], y^2 - 4x^2 - 5y + 4xy \rangle$
6	$\Gamma = \langle [2,4], [0,1], -x^3 - 2xy + x^2 + 4y^2 \rangle$
7	$\Gamma = \langle [0,1], [0,2], 2xy - 5x^2 + 4y^2 - 3y \rangle$
8	$\Gamma = \langle [-1,1], [-1,1], 3xy - x^2 + 2y^2 - 2y \rangle$
9	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], -xy - 5x^2 + y^2 + 5x \rangle$
10	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], -3xy + y^2 - 2x^2 + 2y \rangle$
11	$\Gamma = \langle [0,1], [0,2], -xy - x^2 + 5y^2 + 3x - 2y \rangle$
12	$\Gamma = \langle [0,2], [0,2], 2xy - 3x - 2y - x^2 + 2y^2 \rangle$
13	$\Gamma = \langle [-2,0], [0,1], 5x - 2xy - x^2 + y^2 \rangle$
14	$\Gamma = \langle [0,1], [-1,1], 2y^2 - 2x^2 - 5xy + 3x \rangle$
15	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], y^3 - 2xy - x^2 + 4x \rangle$
16	$\Gamma = \langle [-2,2], [-2,2], -3x - 3y + 5xy - x^2 + 2y^2 \rangle$
17	$\Gamma = \langle [0,1], [-2,2], -3x^2 + y^2 - xy + 4x \rangle$
18	$\Gamma = \langle [-2,2], [0,1], -2x^2 + 3y^2 + 2xy - 3y \rangle$
19	$\Gamma = \langle [0,2], [0,2], x + y - 2xy - x^2 + 2y^2 \rangle$
20	$\Gamma = \langle [-1,0], [-1,0], -x^2 + y^2 - xy + 4x \rangle$

3.5. Лабораторная работа №5. Решение вогнутых и выпуклых игр.

Цель работы.

Изучение бесконечных антагонистических игр. Получение практических навыков решения игр на единичном квадрате следующих типов: вогнутых, выпуклых игр.

Методические указания.

Играми на единичном квадрате являются бесконечные антагонистические игры, в которых оба игрока имеют континуум чистых стратегий. В зависимости от вида функции выигрыша игра может быть вогнутой, выпуклой или вогнуто-выпуклой.

Решение игры на единичном квадрате начинается с определения типа игры: относится ли игра к вогнуто-выпуклым или просто вогнутым/выпуклым играм. Тип игры определяется по вторым производным функции выигрыша.

Помните, что игра является вогнутой, только если функция выигрыша вогнута на множестве стратегий первого игрока. Игра является выпуклой, только если функция выигрыша выпукла на множестве стратегий второго игрока.

После того, как определен тип игры, в соответствии с типом выбирается критерий, по которому будет находиться решение.

В данной лабораторной работе рассматривается решение вогнутых и выпуклых игр. Сначала необходимо определить, к какому типу относится игра, заданная в вашем варианте. Внимательно выбирайте критерий для решения! Для этих типов игр может применяться только один из двух указанных критериев, в зависимости от типа. Теперь решение в чистых стратегиях обязательно существует только для первого или второго игрока. Для второго/первого игрока в общем случае решение существует в смешанных стратегиях, хотя в частном случае может получиться и решение в чистых стратегиях.

Задания подобраны таким образом, что если игра выпукла, то функция выигрыша выпукла и по первому игроку, и, наоборот, если игра вогнута, то функция выигрыша вогнута и по второму игроку. В этих случаях для игрока, у которого решение находится в смешанных стратегиях, максимум/минимум достигается либо на одном, либо на другом граничном значении множества чистых стратегий.

Внимание! При нахождении цены игры и оптимальной чистой стратегии первого/второго игрока в вогнутой/выпуклой игре не ищите

пересечение функций в граничных точках второго/первого игрока! На заданном отрезке множества чистых стратегий функции могут и не пересекаться. Более того, функции могут пересекаться внутри указанного отрезка, но точка пересечения может не являться искомым решением. При поиске решения мы ищем максимум среди всех минимумов (или минимум среди всех максимумов для выпуклой игры). Для удобства нахождения решения постройте график двух функций на множестве допустимых стратегий.

Если множество существенных стратегий содержит только одну стратегию, то соответствующий игрок вместо смешанной будет иметь чистую стратегию.

Проверьте полученный результат! Для проверки можно подставить полученные оптимальные стратегии в функцию выигрыша – должны получиться цена игры.

Пример выполнения работы.

Дана игра на единичном квадрате:

$$\Gamma = \langle [0,1], [0,3], -3x^2 - y^2 + 5xy \rangle.$$

Определим вогнутость/выпуклость игры. Для этого найдем вторые производные функции выигрыша:

$$J'_x = -6x + 5y, \quad J''_{xx} = -6 < 0 \text{ – игра вогнута.}$$

$$J'_y = -2y + 5x, \quad J''_{yy} = -2 < 0 \text{ – игра не выпукла.}$$

Для решения вогнутой игры выбираем максиминный критерий:

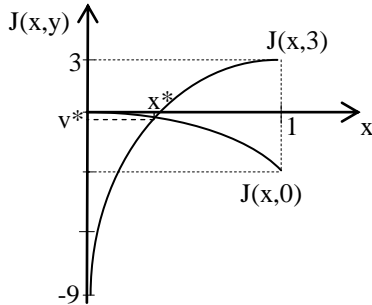
$$v = \max_x \min_y J(x, y).$$

Сначала ищем минимум по y : так как функция выигрыша вогнута по y , то минимум достигается на какой-то из границ множества допустимых стратегий: либо при $y = 0$, либо при $y = 3$.

Рассмотрим соответствующие функции:

$$J(x, 0) = -3x^2, \quad J(x, 3) = -3x^2 - 9 + 15x.$$

Для нахождения максимума среди всех минимумов построим график указанных двух функций:



Из графика видно, что максимум из всех минимумов здесь находится в точке пересечения двух функций, тогда оптимальная чистая стратегия первого игрока и цена игры:

$$-3x^2 = -3x^2 - 9 + 15x \Rightarrow x^* = 9/15 = 0.6, \quad v^* = -1.08.$$

Найдем существенные стратегии второго игрока:

$$-3 \cdot (0.6)^2 - y^2 + 5 \cdot 0.6 \cdot y = -1.08 - y^2 + 3y = -1.08 \Rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = 3$$

Находим значения первых производных:

$$J'_x(x^*, y_1) = -6 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0 = -3.6, \quad J'_x(x^*, y_2) = -3.6 + 5 \cdot 3 = 11.4.$$

Теперь находим вероятности, решая уравнение:

$$-3.6 \cdot \alpha + 11.4(1 - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.76.$$

Теперь мы можем записать полученное решение:

$$x^* = 0.6, \quad v^* = -1.08, \quad Q^* = (0.76|_{y=0}, 0.24|_{y=3})$$

Задание на моделирование.

1. Дана игра на единичном квадрате. Необходимо определить, является ли игра вогнутой или выпуклой.

2. Выбрать критерий для нахождения решения в соответствии с типом игры.

3. Найти решение игры. В качестве решения должно быть представлено: оптимальная чистая стратегия первого игрока (игра вогнута) либо второго игрока (игра выпукла), оптимальная смешанная либо чистая стратегия для второго или первого игрока, соответственно, и цена игры.

Варианты заданий.

№ варианта	Игра на единичном квадрате
1	$\Gamma = \langle [2,4], [0,1], x^3 - xy - x^2 + 5y^2 \rangle$
2	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], -xy + 5x^2 + y^2 \rangle$
3	$\Gamma = \langle [-1,1], [-1,1], 3xy - x^2 - 2y^2 \rangle$
4	$\Gamma = \langle [0,1], [0,3], xy - 5x^2 - 5y^2 \rangle$
5	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], 3xy - y^2 - 2x^2 \rangle$
6	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], y^3 - 2xy + x^2 + 0.5x \rangle$
7	$\Gamma = \langle [-2,1], [-1,1], 3xy - x^2 - 3y^2 \rangle$
8	$\Gamma = \langle [0,1], [0,2], -xy + x^2 + 5y^2 \rangle$
9	$\Gamma = \langle [0,2], [0,2], 2xy - x + y - x^2 - 2y^2 \rangle$
10	$\Gamma = \langle [-2,0], [0,1], 5x - 2xy + x^2 + y^2 \rangle$
11	$\Gamma = \langle [0,1], [-1,1], 2y^2 + 2x^2 - 5xy \rangle$
12	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x \rangle$
13	$\Gamma = \langle [0,2], [0,3], -x^3 - y^2 + 2xy + 3y \rangle$
14	$\Gamma = \langle [0,1], [-1,1], x^3 + y^2 - 5x + 2xy \rangle$
15	$\Gamma = \langle [0,4], [0,1], 2xy + 2y^2 - 5x + x^2 \rangle$
16	$\Gamma = \langle [1,2], [-1,1], -x^2 - 4y^2 + 3xy + 2x \rangle$
17	$\Gamma = \langle [0,1], [0,2], 4y + 3xy - x^2 - y^2 \rangle$
18	$\Gamma = \langle [1,2], [0,1], y^2 + 4x^2 - 5y - 4xy \rangle$
19	$\Gamma = \langle [0,1], [0,3], y^3 + 2x^2 - 2x - xy \rangle$
20	$\Gamma = \langle [0,1], [0,1], 3xy - y^3 - x^3 \rangle$

2.6. Лабораторная работа №6. Некооперативные игры.

Цель работы.

Изучение способов представления и методов решения некооперативных игр.

Методические указания.

В лабораторной работе рассматриваются некооперативные игры двух лиц. В некооперативных играх, в отличие от антагонистических, интересы игроков не прямо противоположны, они могут пересекаться, частично совпадать. Здесь игроки одновременно могут быть в выигрыше или проигрыше. В связи с этим для каждого игрока должна быть определена своя функция выигрыша. При участии в игре только двух игроков функции выигрыша могут быть заданы в виде матриц.

Для построения матриц выигрышей сначала определите чистые стратегии игроков, а затем уже записывайте матрицы.

В качестве решения вы должны определить оптимальные стратегии игроков и их гарантированные выигрыши. Кроме того, необходимо найти точку status quo.

В связи с тем, что равновесная ситуация (точка Нэша) не всегда определяется однозначно, а кроме того, существуют сложности с ее нахождением, примем в качестве принципа оптимальности защитные стратегии игроков. Для нахождения защитных стратегий и гарантированных выигрышей игроков воспользуйтесь автоматизированной системой «Моделирование конфликтных ситуаций», рассмотренной в первой лабораторной работе. Можно воспользоваться только симплекс-методом: он дает точное решение, в отличие от итеративного, и может быть использован для матриц любой размерности, в отличие от аналитического.

Внимание! Система «Моделирование конфликтных ситуаций» рассчитана на решение антагонистических игр. Поэтому здесь стратегии максимизирующего игрока (для которого элементы матрицы являются выигрышами) всегда расположены по строкам. Учитывайте это при построении матрицы выигрыша для второго игрока. В результате решения игры по каждой матрице мы получаем по две оптимальные стратегии. Нам же в результате необходимы только две из них. Внимательно определяйте, какую из двух оптимальных стратегий по каждой матрице вам необходимо выбрать.

Цены двух игр являются гарантированными выигрышами игроков. Не забывайте корректировать цены, если в матрицах выигрышей при-

существуют отрицательные элементы.

Принимая во внимание, что при использовании защитных стратегий обоими игроками, выигрыши игроков могут увеличиться по сравнению с гарантированным выигрышем, необходимо определить точку status quo. Для двух игроков эта точка представляет собой вектор из двух элементов, значения которых соответствуют выигрышам игроков, если они оба применяют свои защитные стратегии.

По результатам всех проведенных вычислений необходимо провести анализ полученного решения.

Пример выполнения работы.

Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут остаться дома и смотреть по телевизору футбольный матч, а могут пойти в театр. Причем муж больше заинтересован остаться дома, и от этого он получает удовлетворение, равное 3, а жена – 1. При посещении театра они получают, соответственно, 2 и 3. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по –1. Будем считать, что никакой сговор между ними невозможен.

Так как это игра 2-х лиц, то мы можем представить ее в матричной форме, задав две матрицы выигрыша:

$$J_M = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad J_{Ж} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для нахождения решения воспользуемся симплекс-методом. Решая задачу по первой матрице (выигрыш мужа), получаем следующие оптимальные планы игроков и значение целевой функции:

$$U^* = (0.25, 0.333), \quad W^* = (0.25, 0.333), \quad -Z = 0.5833.$$

Кроме этого, указывается, что цена игры увеличена на 1, $V^* = 1.7143$.

Нас интересует оптимальный план только первого игрока (мужа) и его гарантированный выигрыш, получаем:

$$X = (0.429, 0.571), \quad V = V^* - 1 = 0.7143.$$

Для того, чтобы найти оптимальную стратегию жены, воспользуемся тем же симплекс-методом. Так как в системе все методы предназначены для нахождения решения в антагонистических играх, то стратегии максимизирующего игрока (для которого элементы матрицы являются выигрышами) всегда расположены по строкам. транспонируем матрицу выигрыша жены (в нашем случае получим такую же) и находим оптимальные планы:

$$U^* = (0.5, 0.25), \quad W^* = (0.5, 0.25), \quad -Z = 0.75.$$

При этом цена игры увеличена на 1, $V^* = 1.33333$.

Нас опять интересует план только первого игрока (стратегии жены расположены по строкам) и его гарантированный выигрыш:

$$Y = (2/3, 1/3), \quad U = V^* - 1 = 0.3333.$$

Для окончательного решения нам необходимо найти точку status quo и сравнить ее с гарантированными выигрышами игроков.

$$v = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot J_M(x_i, y_j) = 0.715,$$

$$u = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot J_{ж}(x_i, y_j) = 0.333.$$

Мы получили оптимальные стратегии игроков $X = (0.429, 0.571)$, $Y = (2/3, 1/3)$, используя которые они получают (точка status quo): $(u, v) = (0.715, 0.3333)$.

В данном случае точка status quo совпала с гарантированными выигрышами игроков (различие по первому игроку, судя по всему, вызвано погрешностями вычислений).

Задание на моделирование.

1. В каждом варианте описана некооперативная игра двух лиц. Необходимо представить игру в нормальной форме: описать чистые стратегии игроков и записать матрицы выигрышей для каждого из игроков.

2. Решить игру: для этого с помощью метода линейного программирования необходимо найти гарантированные выигрыши для каждого игрока и защитные стратегии.

3. Найти точку status quo.

4. Сравнить гарантированные выигрыши игроков и точку status quo. Ответить на вопрос, увеличились ли выигрыши игроков в точке status quo по сравнению с гарантированными выигрышами.

5. В качестве решения представить две оптимальные стратегии и точку status quo.

Варианты заданий.

Вариант 1.

Два человека пытаются купить на аукционе одну вещь, за которую они могут предложить 2, 4, 6 или 8 долларов. Позже эту вещь можно

продать за 14 долларов и получить соответствующую прибыль. оба устанавливают свою цену тайно друг от друга, при этом каждый из них должен внести аванс в половину от назначенной суммы. Если кто-то назвал цену выше другого, то он получает вещь, доплатив назначенную сумму. Второму при этом возвращается аванс (т.е. он остается при своих начальных условиях). Если же оба назвали одинаковую сумму, то выплаченные авансы отчисляются в пользу аукциона, а вещь с продажи в этот день снимается (игроки могут попытаться судьбу в другой день).

Вариант 2.

Дети и родители решают, где им провести выходной день: они могут поехать за город на природу, пойти в луна-парк, или съездить в гости к бабушке. Дети и родители принимают решение независимо друг от друга. Дети больше всего хотели бы сходить в луна-парк (5 ед.), чуть меньше – побывать у бабушки (4 ед.) и еще меньше - съездить на природу (3 ед.). Родители же, напротив, больше всего хотели бы побывать на природе (5 ед.), меньше – побывать у бабушки (4 ед.) и меньше – в луна-парке (2 ед.). Если дети и родители не договорятся, то выходной будет испорчен, все останутся дома, и полезности такого исхода будут для детей – -1 ед., а для взрослых – 0 ед.

Вариант 3.

Два военных союзника проводят операцию по захвату вражеской территории. Каждый из союзников может выставить 1, 2, 3 или 4 полка. В зависимости от количества выставленных полков союзник несет потери 0.1, 0.2, 0.2 и 0.3, соответственно. При этом прибыль от военной операции составляет i/N , где i – количество выставленных игроком полков, а N – общее количество полков, выставленных от обоих союзников.

Вариант 4.

Два мальчика играли в комнате и разбили вазу. Родители хотят узнать, кто из них это сделал. Каждый из мальчиков может: 1) ничего не сказать, 2) признаться, что это сделал он, 3) указать на приятеля. Если оба укажут на себя (признаются), то их ждет самое мягкое наказание – лишение сладкого на 1 день (т.к. родители не смогут определить, кто же это сделал на самом деле). Если оба ничего не скажут, то их лишат сладкого на 3 дня. Если признается только один из них, то независимо от поведения другого (промолчит он или укажет на приятеля), виновного ждет наказание в 5 дней. Самое тяжелое наказание их ждет, если они покажут друг на друга – 7 дней.

Как вести себя детям, если их спрашивают о случившемся по отдельности.

Вариант 5.

Некий продукт производится двумя производителями. производственные возможности конкурентов ограничены тремя состояниями: 10 тыс. единиц продукта в месяц, 15 тыс. и 20 тыс. При этом рыночная цена продукта определяется общим объемом его производства:

Общий объем производства (тыс.ед.)	20	25	30	35	40
Стоимость (тыс.ед.)	3	2.5	2	1.5	1

Найти наилучшие варианты поведения для предпринимателей.

Вариант 6.

Два лица, подозреваемые в преступлении, арестованы и заключены в отдельные камеры. Оба они могут сознаться в содеянном или нет. Если они оба не сознаются, то судья, сформулировав соответствующим образом обвинение, присудит каждому из них по два года. Если оба сознаются, то наказание будет 3 года. Если признается только один из них, то признавшийся получает 3 месяца, а не признавшийся – 8 лет. Как вести себя заключенным?

Вариант 7.

Два знакомых решают провести совместно торговую операцию. Каждый из них может выделить сумму в 100, 200 или 300 тыс. рублей. Причем доля его прибыли прямо пропорциональна доле его денег в общей сумме. Закупочная стоимость продукта – 1 тыс.руб./штука. Но продажная стоимость товара зависит от объема партии:

Всего куплено товара (штук)	200	300	400	500	600
Продажная стоимость (тыс.руб.)	3	2.5	2	1.6	1.2

Как должен поступить каждый из них, чтобы максимизировать свою прибыль?

Вариант 8.

Два предпринимателя для совместного дела должны выделить суммы в 1, 2, 3 или 4 млн. долларов. При этом чистая прибыль для каждого из них составит:

$$J(i, j) = \begin{cases} 10 \cdot j / N, & i > j \\ 10 \cdot i / N, & i \leq j \end{cases}$$

где $N = i + j$, а i, j – количество миллионов, выделенных 1-м и 2-м предпринимателями, соответственно.

Вариант 9.

Муж с женой решают, где им провести отпуск: они могут поехать к родителям мужа, к родителям жены или пойти в турпоход. Жена больше всего хочет поехать к своим родителям (3 ед.), меньше – к родителям мужа (2 ед.) и еще меньше – идти в турпоход (1 ед.). Муж, напротив, предпочел бы турпоход (3 ед.), и ему все равно к каким родителям ехать (1 ед.). При этом, если они не договорятся и проведут отпуск отдельно, то оба не получают никакого удовольствия (0 ед.).

Вариант 10.

Некий продукт производится двумя производителями. производственные возможности 1-го конкурента ограничены тремя состояниями: 10 тыс. Единиц продукта в месяц, 15 тыс. и 20 тыс., а второго – четырьмя состояниями – 15, 20, 25 и 30 тыс. ед. продукта/месяц. При этом рыночная цена продукта определяется общим объемом его производства:

Общий объем производства (тыс.ед.)	25	30	35	40	45	50
Стоимость (тыс.ед.)	3	2.4	2	1.6	1.2	1

2.7. Лабораторная работа №7. Кооперативные игры с нетрансферабельными выигрышами.

Цель работы.

Изучение кооперативных игр с нетрансферабельными выигрышами. Получение практических навыков их решения. Изучение арбитражной схемы Нэша.

Методические указания

В данной лабораторной работе рассматривается кооперативная игра с нетрансферабельными выигрышами двух лиц в нормальной форме. Необходимо найти решение игры. В качестве решения будем рассматривать: переговорное множество (множество решений, оптимальных по Парето) и арбитражное решение Нэша.

Сначала необходимо определить точку status quo, для этого найдем защитные стратегии игроков. Защитные стратегии можно находить с помощью любого известного нам метода. Разница по сравнению с антагонистическим вариантом заключается в том, что выигрыш каждого игрока рассчитывается по своей платежной матрице и поэтому защитная стратегия второго игрока тоже максиминная, а не минимаксная, как была раньше. Поэтому, прежде чем находить защитную стратегию для

второго игрока, рекомендуется транспонировать матрицу: будет удобнее находить решение.

Следующий шаг определения решения – построение платежного множества: множество всех векторов выигрышей игроков. Для построения платежного множества можно воспользоваться MatКадом, либо построить его вручную. Помните, что в кооперативной игре платежное множество всегда выпукло.

Северо-восточная граница платежного множества – это переговорное множество, или множество решений, оптимальных по Парето.

После нахождения точки status quo, построения переговорного и платежного множеств, можно находить арбитражное решение Нэша. Для этого воспользуйтесь соответствующим алгоритмом.

Кроме арбитражного решения Нэша (вектора выигрышей игроков) необходимо определить хотя бы одну пару смешанных стратегий, соответствующих найденному вектору выигрышей.

Пример выполнения работы

Рассмотрим следующую кооперативную игру с нетрансферабельными выигрышами:

Супруги должны решить, как им провести свободный вечер: они могут остаться дома и смотреть по телевизору футбольный матч, а могут пойти в театр. Причем муж больше заинтересован остаться дома, и от этого он получает удовлетворение, равное 2, а жена — 1. При посещении театра они получают, соответственно, 1 и 2. В случае разногласия вечер испорчен и супруги получают по -1 .

Будем считать, что муж и жена до принятия решения пытаются как-то договориться и найти компромиссное решение.

Так как эта игра 2-х лиц, то мы можем представить ее в матричной форме, но, в отличие от антагонистических игр, теперь нужно задать две матрицы выигрыша. У каждого из игроков по две стратегии: остаться дома или пойти в театр. Матрицы выигрышей примут следующий вид:

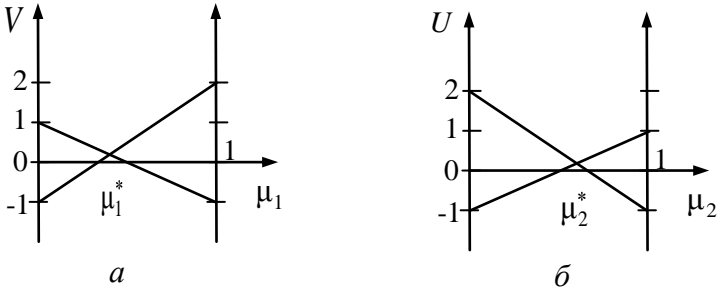
$$J_{\text{м}} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad J_{\text{ж}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обозначим выигрыши первого и второго игроков через V и U соответственно. Смешанная стратегия 1-го игрока — $(\mu_1, 1 - \mu_1)$, 2-го — $(\mu_2, 1 - \mu_2)$. Тогда

$$V(\mu_1, \mu_2) = 2\mu_1\mu_2 - \mu_1(1 - \mu_2) - (1 - \mu_1)\mu_2 + (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) = 5\mu_1\mu_2 - 2(\mu_1 + \mu_2) + 1,$$

$$U(\mu_1, \mu_2) = \mu_1\mu_2 - \mu_1(1-\mu_2) - (1-\mu_1)\mu_2 + 2(1-\mu_1)(1-\mu_2) = 5\mu_1\mu_2 - 3(\mu_1 + \mu_2) + 2.$$

Для поиска защитных стратегий воспользуемся графическим методом:



Поиск защитных стратегий:

a — для 1-го игрока; b — для 2-го игрока

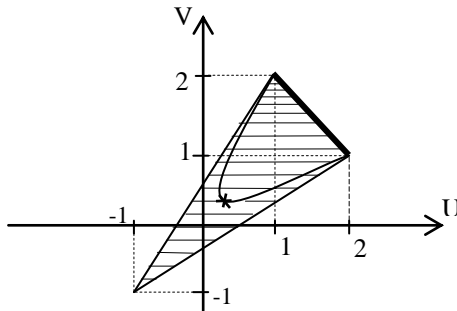
$$1 - 2\mu_1 = -1 + 3\mu_1, \quad \mu_1 = \frac{2}{5}, \quad \mu_1^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right);$$

$$2 - 3\mu_2 = -1 + 2\mu_2, \quad \mu_2 = \frac{3}{5}, \quad \mu_2^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right);$$

$$V^* = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + 1 = \frac{1}{5}, \quad U^* = \frac{1}{5}.$$

Вектор выигрышей игроков (V^*, U^*) — это точка status quo

Платежное множество кооперативной игры становится выпуклым и примет следующий вид:



Жирной линией здесь выделено переговорное множество R , точка status quo отмечена на рисунке звездочкой.

Так как рассматриваемое платежное множество симметрично относительно биссектрисы первого квадранта и точка status quo лежит на оси симметрии, то и искомое решение можно найти сразу, воспользовавшись аксиомами 1 и 3. Решение должно находиться на пересечении переговорного множества с биссектрисой: $\langle \bar{U}, \bar{V} \rangle = \langle 0.5, 1.5 \rangle$.

Для нахождения совместной смешанной стратегии, которая приводит к этому исходу, необходимо решить систему трех линейных уравнений:

$$\bar{V} = 2Z_{11} - Z_{12} - Z_{21} + Z_{22} = 1.5$$

$$\bar{U} = Z_{11} - Z_{12} - Z_{21} + 2Z_{22} = 1.5$$

$$Z_{11} + Z_{12} + Z_{21} + Z_{22} = 1$$

Решая данную задачу с учетом положительности искомых переменных, получаем следующую совместную стратегию:

$$Z_{11} = 0.5, Z_{12} = Z_{21} = 0, Z_{22} = 0.5 \text{ или в матричном виде } Z = \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, наилучшим оказалось компромиссное решение, при котором супруги всегда проводят вечер вместе, с одинаковой вероятностью либо оставаясь дома, либо отправляясь в театр.

Задание на моделирование:

1. Дана игра двух лиц в нормальной (матричной) форме.
2. Определить защитные стратегии игроков, точку status quo.
3. Построить платежное множество игры, определить переговорное множество.
4. Перенести начало координат в точку status quo.
5. Найти точку переговорного множества с максимальным произведением координат.
6. Произвести обратное преобразование координат: определить вектор выигрыша, наилучший с точки зрения решения по Нэшу.
7. Определить хотя бы одну пару стратегий, соответствующую найденному вектору выигрышей.

Варианты заданий.

Вариант 1.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вариант 2.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вариант 3.

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вариант 4.

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вариант 5.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Вариант 6.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Вариант 7.

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.8. Лабораторная работа №8. Классические кооперативные игры.

Цель работы.

Изучение способов представления классических кооперативных игр, переходов от одной формы представления к другой; изучение методов решения указанных игр по различным критериям оптимальности с проведением сравнительного анализа полученных решений.

Методические указания

В данной лабораторной работе рассматривается классическая кооперативная игра трех лиц в нормальной форме. Необходимо найти решение игры. В качестве решения будем рассматривать: S -ядро игры, вектор Шепли, N -ядро игры.

Для упрощения многих расчетов и проверки правильности выполнения задания используйте программу «Принятие кооперативных решений» (файл «Коопер_игры.exe»)

Для нахождения решения прежде всего необходимо перейти от нормальной формы игры к форме характеристической функции.

Для определения характеристических функций коалиций необходимо решить 6 антагонистических игр. Характеристическая функция коалиции $V(S)$ определяется как цена антагонистической игры, где в качестве первого (максимизирующего) игрока выступает коалиция S , а в качестве второго (минимизирующего) игрока выступает коалиция N/S . Здесь множество чистых стратегий коалиции S – это множество всех совместных чистых стратегий игроков данной коалиции. Причем элементами платежной матрицы являются суммарные выигрыши игроков из коалиции S .

Характеристическая функция максимальной коалиции N определяется как максимальное значение функции выигрыша всех трех игроков, определенной на множестве всех возможных стратегий.

Программа позволяет либо ввести характеристическую функцию игры (если вы определили ее самостоятельно), либо рассчитать в программе.

Для расчета характеристической функции вы должны задать количество стратегий для каждого игрока и запомнить размерность. После этого вы должны ввести числовые значения стратегий игроков. Затем вы вводите формулу для расчета характеристической функции какой-либо коалиции (правила записи формулы такие же, как и в Лабораторной работе «Решение антагонистических игр в матричной форме»). В

правой стороне окна есть помощь по вводу формул.

Внимание!!! Формулы для двойных и тройной коалиций вы должны получить сами путем сложения функций выигрышей тех игроков, которые входят в рассматриваемую коалицию!

После определения формулы вы должны определить коалиции: в левом поле указывается коалиция, для которой определяется характеристическая функция, в правом – коалиция из оставшихся игроков. Затем вы нажимаете кнопку «Рассчитать» и получаете платежную матрицу, а в нижней строке появляется значение характеристической функции соответствующей коалиции.

Для получения характеристической функции игры вы должны повторить процесс ввода формулы, коалиций и расчета.

Когда вся нижняя строка будет заполнена (определена вся характеристическая функция игры), необходимо нажать кнопку «Записать», и только после этого выходить из данного окна и переходить к следующим этапам выполнения работы.

После представления игры в форме характеристической функции необходимо определить С-ядро игры (если оно существует).

При выборе меню «С-ядро» открывается окно для определения С-ядра. Сначала вам необходимо перейти к новым переменным (отражающим прибыль от кооперации) – для этого задайте новые ограничения и нажмите кнопку «**Рисовать**».

Если новые ограничения введены верно, будет нарисовано С-ядро игры, в противном случае система выдает сообщение об ошибке. Графическое изображение С-ядра поможет вам в определении количества точек (вершин с-ядра), а также в их расположении на симплексе-треугольнике.

После этого вы должны определить и ввести координаты нарисованного многоугольника. При вводе координат вершины можно вводить в любой последовательности. Если координаты введены правильно, то после нажатия кнопки «Проверить» будет выдано следующее окно. Здесь вы должны перейти к исходным переменным (проделать обратные преобразования) и записать окончательный вариант С-ядра.

После проверки правильности определения решения необходимо проверить игру на выпуклость и определить N-ядро игры.

Если игра не выпукла, то необходимо указать ВСЕ не выполняющиеся условия (по увеличению маргинальных вкладов игрока) для ВСЕХ игроков. Вводите не выполняющиеся ограничения до тех пор, пока программа не перестанет предлагать ввести еще не указанные не выполняющиеся условия.

N-ядро игры определяется как центр С-ядра: для его определения

просто сложите значение каждой координаты по всем точкам и разделите на количество точек. **Внимание!!!** Если какое-то ограничение проходит через вершину симплекс-треугольника, то эта точка (вершина) должна учитываться в N-ядре 2 раза!

Кроме указанных решений необходимо найти вектор Шепли.

После нахождения всех решений необходимо найти вектора эксцессов для вектора Шепли и N-ядра.

После проведения всех необходимых вычислений и нахождения всех решений нажмите кнопку «Все выполнено» - вам будет выдан итоговый отчет, включающий все найденные вами решения.

После нахождения всех решений сравните и проанализируйте результаты. Дайте рекомендации по их дальнейшему применению. Выберите решение, лучшее с вашей точки зрения, обоснуйте.

Пример выполнения работы.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$x = (0, 2, 5), \quad y = (1, 3), \quad z = (1, 2, 4),$$

$$J_1 = x^2 - 2xz + zy, \quad J_2 = -y^2 - 2xy + xz + 5, \quad J_3 = z^2 - zy + xy$$

Чтобы перейти от нормальной формы игры к форме игры в виде характеристической функции необходимо решить 6 антагонистических игр.

$V(\{x\})$ находится как цена антагонистической игры, где X играет против коалиции $\{y, z\}$, а функция выигрыша равна J_1 и будет введена следующим образом: $(X * X - 2 * (X * Z) + Z * Y)$. После нажатия кнопки «Рассчитать» выдается платежная матрица и в нижней строке появляется значение характеристической функции игрока X : $V_x = 2.5$

$V(\{y\})$ находится из антагонистической игры Y против $\{x, z\}$.

$$V(y)=1$$

$V(\{z\})$ находится из антагонистической игры Z против $\{x, y\}$.

$$V(z)=4$$

$V(\{xy\})$ находится из антагонистической игры $\{xy\}$ против Z .

Функция выигрыша равна $J_1 + J_2$ и будет введена следующим образом: $(X * X + Y * Y - X * Z + Z * Y - 2 * (X * Y) + 5)$.

$$V(xy)=17$$

$V(\{xz\})$ находится из антагонистической игры $\{xz\}$ против Y .

$$V(xz)=21$$

$V(\{yz\})$ находится из антагонистической игры $\{yz\}$ против X .

$$V(yz)=18$$

$V(\{xyz\})$ находится как максимум функции

$$J_1 + J_2 + J_3 = x^2 + y^2 + z^2 - xz - xy + 5.$$

и равен 30. Таким образом, характеристическая функция игры:

$$V_x = 2.5; V_y = 1; V_z = 4; V_{xy} = 17; V_{xz} = 21; V_{yz} = 18; V_{xyz} = 30.$$

Переходим к определению С-ядра игры.

Переход к новым переменным даст следующие ограничения:

$$a + b + c = 22.5$$

$$a + b \geq 13.5$$

$$a + c \geq 14.5$$

$$b + c \geq 13.$$

Здесь ядро игры является треугольником и на графике отобразиться следующий рисунок:



Определим координаты вершин треугольника. Вершина 1 является пересечением прямых $a + c = 14.5$ и $a + b = 13.5$. Получаем систему уравнений

$$a + b + c = 22.5$$

$$a + b = 13.5$$

$$a + c = 14.5.$$

Отсюда $a = 5.5, b = 8, c = 9$.

Вершина 2 является пересечением прямых $b + c = 13$ и $a + b = 13.5$. Решая систему уравнений получаем точку $(9.5; 4; 9)$.

Вершина 3 является пересечением прямых $b + c = 13$ и $a + c = 14.5$. Решая систему уравнений получаем точку (9.5; 8; 5).

Переходим к переменным x , y , z и получаем S -ядро игры, которое описывается тремя граничными точками:

(8, 9, 13),

(12, 5, 13),

(12, 9, 9).

Проверим выпуклость игры по первому игроку.

$$V_x - V(\{0\}) \leq \begin{bmatrix} V_{xy} - V_y \\ V_{xz} - V_z \end{bmatrix} \leq V_{xyz} - V_{yz} \rightarrow 2.5 < \begin{bmatrix} 17-1 \\ 21-4 \end{bmatrix} < 30-18$$

— условие не выполняется ($17-1=16 > 30-18=12$), следовательно, игра не выпукла.

Проверяем выпуклость по второму игроку:

$$V_y - V(\{0\}) \leq \begin{bmatrix} V_{xy} - V_x \\ V_{yz} - V_z \end{bmatrix} \leq V_{xyz} - V_{xz} \rightarrow 1 < \begin{bmatrix} 17-2.5 \\ 18-4 \end{bmatrix} < 30-21$$

– не выполняется условие ($17-2.5=14.5 > 30-21=9$).

Проверяем выпуклость по третьему игроку:

$$V_z - V(\{0\}) \leq \begin{bmatrix} V_{xz} - V_x \\ V_{yz} - V_y \end{bmatrix} \leq V_{xyz} - V_{xy} \rightarrow 4 < \begin{bmatrix} 21-2.5 \\ 18-1 \end{bmatrix} < 30-17$$

– не выполняются условия ($21-2.5=18.5 > 30-17=13$ и $18-1=17 > 30-17=13$).

Определим N -ядро игры, как центр s -ядра:

$$x: \frac{1}{3}(8+12+12) = 10\frac{2}{3};$$

$$y: \frac{1}{3}(9+5+9) = 7\frac{2}{3};$$

$$z: \frac{1}{3}(13+13+9) = 11\frac{2}{3}.$$

Теперь вычислим вектор Шепли:

$$\sigma_x = \frac{1}{3} 2.5 - 0 + \frac{1}{6} 17 - 1 + 21 - 4 + \frac{1}{3} 30 - 18 = 10\frac{1}{3};$$

$$\sigma_y = \frac{1}{3} 1 - 0 + \frac{1}{6} 17 - 2.5 + 18 - 4 + \frac{1}{3} 30 - 21 = 8\frac{1}{12};$$

$$\sigma_z = \frac{1}{3} 4 - 0 + \frac{1}{6} 21 - 2.5 + 18 - 1 + \frac{1}{3} 30 - 17 = 11\frac{7}{12}.$$

Примечание: числа можно вводить, округляя до второго знака после запятой. Так, вектор Шепли будет выглядеть: (10.33, 8.08, 11.58)

Переходим к расчету векторов эксцессов.

Вектор эксцессов для вектора Шепли: (7.83, 7.08, 7.58, 1.41, 0.91, 1.66)

Вектор эксцессов для N-ядра: (8.17, 6.67, 7.67, 1.34, 1.34, 1.34)

После нажатия кнопки «Все выполнено», получаем:

Итоговый отчет							
Характеристическая функция:	Vx: 2,5	Vy: 1	Vz: 4	Vxy: 17	Vxz: 21	Vyz: 18	Vxyz: 30
S-ядро:	x:	y:	z:	x:	y:	z:	
	5,5	8	9				
	9,5	4	9				
	9,5	8	5				
Вектор Шепли:	Gx: 10,33	Gy: 8,08	Gz: 11,58				
N-ядро:	x: 10,67	y: 7,67	z: 11,67				
Вектор эксцессов для вектора Шепли:	x: 7,83	y: 7,08	z: 7,58	xy: 1,41	xz: 0,91	yz: 1,66	
Вектор эксцессов для N-ядра:		x: 8,17	y: 6,67	z: 7,67	xy: 1,34	xz: 1,34	yz: 1,34
Игра не выпукла							<input type="button" value="Выход"/>

Выводы по работе: из полученных двух решений можно предложить в качестве окончательного решения N-ядро. Можно объяснить наш выбор тем, что для двух игроков (X и Z) N-ядро предлагает хоть немного, но все же большую величину выигрыша. И если поставить выбор решения на голосование, то большинством голосов будет выбрано именно N-ядро.

Задание на моделирование:

- Дана игра трех лиц в нормальной форме. Необходимо перейти к форме игры в виде характеристической функции.
- Определить, имеет ли игра S-ядро. Если имеет, то найти S-ядро игры.
- Проверить, является ли игра выпуклой.
- Найти вектор Шепли.
- Найти N-ядро игры.
- Определить вектора эксцессов для найденных решений
- Сравнить все полученные решения. Указать наилучшее решение с Вашей точки зрения.

Варианты заданий.

Вариант 1.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,4), Y = (1,3), Z = (0,2,4),$$

$$J_1 = 2ZX - ZY, J_2 = X + Y + Z, J_3 = 2ZX - ZY.$$

Вариант 2.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,4), Y = (1,2,3), Z = (1,3,5),$$

$$J_1 = 3X - 4Y + ZX, J_2 = XY - ZX + ZY, J_3 = 2Z - XY + XZ$$

Вариант 3.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (1,2), Y = (1,2), Z = (2,3),$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = 2 \cdot (-1)^{X+Y} \cdot (X + Y) + 3Z.$$

Вариант 4.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (1,3,5), Y = (1,4), Z = (1,6),$$

$$J_1 = XY + Z - XZ, J_2 = YZ + X - XY, J_3 = XZ + Y - YZ.$$

Вариант 5.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,2,5), Y = (1,4), Z = (1,2,4),$$

$$J_1 = X^2 - XZ + ZY, J_2 = Y^2 - XY + 2YZ + 3, J_3 = Z^2 - ZY + 2XY$$

Вариант 6.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (1,5), Y = (2,4,6), Z = (1,2,3),$$

$$J_1 = XYZ - YZ + Y - Z, J_2 = XYZ - XZ + X - Z,$$

$$J_3 = XYZ - XY + X - Y.$$

Вариант 7.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (1,4), Y = (0,5), Z = (2,3),$$

$$J_1 = (-1)^{X+Z}(X+Y+Z) + X, J_2 = (-1)^{X+Y}(X+Y+Z) + Y, \\ J_3 = (-1)^{Y+Z}(X+Y+Z) + Z.$$

Вариант 8.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,1,3), Y = (2,4), Z = (1,3,5),$$

$$J_1 = 2(X+Y) - XZ, J_2 = 6Y - X - YZ, J_3 = 4(X+Z) - YZ.$$

Вариант 9.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,1,4), Y = (0,5), Z = (2,4),$$

$$J_1 = (-1)^{X+Z}(X+Y) + 2X, J_2 = (-1)^{X+Y}(Y+Z) + 3Y,$$

$$J_3 = XYZ - XY.$$

Вариант 10.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (1,2,3), Y = (0,1,2), Z = (1,2,3),$$

$$J_1 = (-1)^{Y+X}(Y+X) + 2Z, J_2 = (-1)^{Y+Z}(Y+Z) + 2X,$$

$$J_3 = (-1)^{X+Z}(X+Z) + 2Y.$$

Вариант 11.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,4), Y = (2,3), Z = (6),$$

$$J_1 = 4X - 2YX + ZX, \quad J_2 = (-1)^{X+Y}(Y - 2Z),$$

$$J_3 = (-1)^{X+Y}(YX) + 2ZY.$$

Вариант 12.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = (0,2,5), Y = (3), Z = (2,4),$$

$$J_1 = X^2 - 2XZ + ZY, \quad J_2 = Y^2 - 2XY + XZ + 5,$$

$$J_3 = Z^2 - ZY + XY.$$

Вариант 13.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = \langle 2, 3 \rangle, Y = \langle 2 \rangle, Z = \langle 2 \rangle,$$

$$J_1 = 2X - Y + Z, \quad J_2 = 2Y + Z, \quad J_3 = X - Y + 3Z.$$

Вариант 14.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = \langle 3 \rangle, Y = \langle 4 \rangle, Z = \langle 2 \rangle,$$

$$J_1 = (-1)^{Y+X} (Y + X) + 2Z, J_2 = (-1)^{Y+Z} (Y + Z) + 2X,$$

$$J_3 = (-1)^{X+Z} (X + Z) + 2Y.$$

Вариант 15.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = \langle 4 \rangle, Y = \langle 2, 3 \rangle, Z = \langle 3, 5 \rangle,$$

$$J_1 = 3X - YX + ZX, \quad J_2 = XY - ZX + ZY,$$

$$J_3 = 2Z - XY + XZ$$

Вариант 16.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = \langle 3, 4 \rangle, Y = \langle 5 \rangle, Z = \langle 2, 3 \rangle,$$

$$J_1 = 3X - XY + Y, \quad J_2 = 3Y - YZ + Z, \quad J_3 = 3Z - ZX + X.$$

Вариант 17.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = \langle 4 \rangle, Y = \langle 2, 3 \rangle, Z = \langle 4, 6 \rangle,$$

$$J_1 = 4X - 2YX + ZX, \quad J_2 = XY - ZX + ZY,$$

$$J_3 = 2Z - 3XY + XZ.$$

Вариант 18.

Кооперативная игра трех лиц задана в нормальной форме:

$$X = \langle 1, 3 \rangle, Y = \langle 2, 4 \rangle, Z = \langle 3, 5 \rangle,$$

$$J_1 = 2 \langle X + Y \rangle XZ, \quad J_2 = 6Y - X - YZ,$$

$$J_3 = 4 \langle X + Y \rangle YZ + XZ.$$

2.9. Лабораторная работа №9. Игры с распределением затрат.

Цель работы.

Изучение механизмов коллективного принятия решений, связанных с распределением затрат на производство неделимого коллективного продукта; изучение способов нахождения решений в данных задачах по различным критериям оптимальности с проведением сравнительного анализа полученных решений.

Методические указания.

В данной лабораторной работе рассматриваются основные методы решения задач с распределением затрат на производство неделимого общественного продукта. В качестве возможных решений рассматриваются: подушный, пропорциональный и уровневый налоги, а также вектор Шепли и N-ядро. Для каждого из этих решений определяются вектор затрат и вектор прибыли.

Подушный налог предлагает делить затраты поровну между агентами, но при этом затраты не должны превышать возможные доходы агентов от использования общественного продукта.

Уровневый налог, напротив, предлагает поровну делить между агентами кооперативную прибыль (разность между суммарными доходами агентов и стоимостью коллективного объекта). На прибыль также налагаются ограничения: для каждого агента индивидуальная прибыль не должна превышать его дохода.

Помните, что для каждого агента сумма его затрат и его прибыли должна равняться его личным доходам. Таким образом, если мы определили вектор затрат, то вектор прибыли определяется как разность вектора доходов и вектора затрат. Аналогично, если первоначально мы определяем вектор прибыли, то вектор затрат находим из разности вектора доходов и вектора прибыли.

При определении *вектора Шепли* выбирайте наиболее удобную траекторию нахождения решения: если стоимость объекта велика (превышает половину общих доходов), то проще и быстрее находить вектор Шепли по прибыли; если стоимость объекта низка, то проще находить решение по затратам. Если вам сложно находить вектор Шепли по интерпретации (затраты – сборщик налогов, прибыль – банк), то его всегда можно найти традиционным способом. Для этого необходимо построить характеристическую функцию игры по формуле

$$v(S) = \left[\sum_{i \in S} b_i - c \right]^+$$
, после чего вектор Шепли рассчитывается обыч-

ным способом по формуле, приведенной в определении вектора.

При нахождении *N-ядра* прежде всего необходимо определить ситуацию с затратами: велики они или нет. Если стоимость коллективного объекта превышает половину общих доходов, то *N-ядро*, так же как и уровневый налог, предлагает поровну разделить прибыль. Но! В отличие от уровневого налога ограничения на прибыль здесь более жесткие: в *N-ядре* каждый агент не должен получить прибыль больше, чем половина его индивидуального дохода. Если стоимость коллективного объекта меньше половины общих доходов, то *N-ядро*, так же как и подушный налог, предлагает поровну разделить затраты. В этом случае затраты также не могут превышать половину индивидуальных доходов агентов.

Совет: для удобства нахождения *N-ядра* запишите вспомогательный вектор, элементами которого будут являться половины доходов агентов.

Внимание! Проверяйте каждое найденное решение: элементы любого найденного вектора затрат (прибыли) в сумме должны равняться стоимости коллективного объекта (прибыли от эксплуатации этого объекта). Если заданное условие не выполняется, ищите ошибку в решении! Для вектора Шепли находите решение в простых дробях: если при проверке равенство не будет выполняться, то это точно ошибка в нахождении решения (при переходе к десятичным числам возможна еще ошибка округления).

После нахождения всех решений, сведите их в таблицу:

	Вектор прибыли	Вектор затрат
Подушный налог		
Пропорциональный налог		
Уровневый налог		
Вектор Шепли		
<i>N-ядро</i>		

Пример выполнения работы.

Имеется пять агентов, для которых известно, что от использования коллективного объекта они могут получить доходы, соответственно, 8, 10, 12, 20 и 32. Необходимо определить, каким образом должны быть распределены затраты между агентами, если стоимость коллективного объекта равна 32.

Найдем различные варианты распределения затрат.

Подушный налог предлагает нам поровну поделить затраты между агентами. Получаем: $\frac{32}{5} = 6.4$.

Тогда вектор затрат будет $x = \langle 6.4, 6.4, 6.4, 6.4, 6.4 \rangle$,

Вектор прибыли: $y = \langle 6, 3.6, 5.6, 13.6, 25.6 \rangle$.

Пропорциональный налог определяет затраты пропорционально доходам агентов: $x_i = c \cdot \frac{b_i}{\sum_j b_j}$.

Тогда вектор затрат: $x = \langle 1.122, 3.9, 4.683, 7.805, 12.488 \rangle$.

Вектор прибыли: $y = \langle 4.878, 6.1, 7.317, 12.195, 19.512 \rangle$.

Уровневый налог предлагает равномерно распределять между агентами прибыль. В нашем случае суммарные доходы агентов равны 82, соответственно, прибыль равна $e = 82 - 32 = 50$.

Если мы попытаемся распределить прибыль поровну $\frac{50}{5} = 10$, то первые два агента получают прибыль, превышающую их доходы. Это недопустимо, поэтому установим их прибыль равной доходам: $y_1 = 8$, $y_2 = 10$. У нас еще остается $50 - 18 = 32$ единицы прибыли, которую попытаемся равномерно распределить между оставшимися тремя агентами: $\frac{32}{3} = 10.667$.

Получаем вектор прибыли: $y = \langle 8, 10, 10.667, 10.667, 10.667 \rangle$.

Тогда вектор затрат: $x = \langle 0, 0, 1.333, 9.333, 21.333 \rangle$.

Вектор Шепли в данном случае проще находить через затраты:

$$x_1 = \frac{1}{5} \cdot 8 + \frac{1}{20} \langle +8+8 \rangle + \frac{1}{30} \langle +2 \rangle = \frac{94}{30},$$

$$x_2 = \frac{1}{5} \cdot 10 + \frac{1}{20} \langle 0+10+10 \rangle + \frac{1}{30} \langle 0+4 \rangle = \frac{119}{30},$$

$$x_3 = \frac{1}{5} \cdot 12 + \frac{1}{20} \langle 2+12+12 \rangle + \frac{1}{30} \langle 2+4+2 \rangle = \frac{144}{30},$$

$$x_4 = \frac{1}{5} \cdot 20 + \frac{1}{20} \langle 0+20+20 \rangle + \frac{1}{30} \langle 4+12+10 \rangle + \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{249}{30},$$

$$x_5 = \frac{1}{5} \cdot 32 + \frac{1}{20} (4+22+20+12) - \frac{1}{30} (4+12+4+10+2) - \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{354}{30}.$$

Полученный вектор Шепли по затратам:

$$x = \left(\frac{94}{30}, \frac{119}{30}, \frac{144}{30}, \frac{249}{30}, \frac{354}{30} \right).$$

Тогда вектор Шепли по прибыли: $y = \left(\frac{146}{30}, \frac{181}{30}, \frac{216}{30}, \frac{351}{30}, \frac{606}{30} \right).$

Для нахождения N -ядра определим прежде всего ситуацию: в нашем случае затраты составляют меньше половины доходов, поэтому будем распределять поровну затраты, но при этом они не должны превышать половину доходов каждого игрока. При распределении затрат поровну получаем: $\frac{32}{5} = 6.4$. Первый агент не должен платить больше половины своего дохода, поэтому $x_1 = 4$. Оставшиеся 28 единиц затрат попытаемся снова поделить поровну между агентами: $\frac{28}{4} = 7$ – эта величина превышает половину доходов второго и третьего агентов, поэтому устанавливаем $x_2 = 5$, $x_3 = 6$.

Осталось распределить $32 - 4 - 5 - 6 = 17$ единиц затрат. поделим их поровну между оставшимися двумя агентами: $\frac{17}{2} = 8.5$.

Получаем вектор затрат: $x = (4, 5, 6, 8.5, 8.5)$.

Тогда вектор прибыли будет: $y = (4, 5, 6, 11.5, 23.5)$.

Задание на моделирование.

Рассматривается модель распределения затрат с пятью агентами. Известны доходы агентов b_i от использования коллективного объекта. Даны два варианта стоимости коллективного объекта c . Для каждого варианта необходимо определить (по затратам и по прибыли):

- 1) подушный налог;
- 2) пропорциональный налог;
- 3) уровневый налог;
- 4) вектор Шепли;
- 5) N -ядро.

Сравнить и проанализировать полученные результаты. Ответьте на вопрос: какое распределение затрат, с Вашей точки зрения, наиболее

справедливо.

Варианты заданий.

№ варианта	Доходы агентов					Стоимость коллективного объекта c	
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	а)	б)
1	12	14	20	24	40	40	68
2	5	8	8	25	28	28	42
3	10	14	30	34	50	54	75
4	4	5	6	12	14	21	36
5	20	22	24	30	34	42	86
6	6	8	16	24	34	40	54
7	2	6	12	22	46	30	56
8	10	14	28	35	42	84	100
9	12	24	46	50	54	76	120
10	5	15	25	40	45	54	95
11	11	21	30	38	45	101	130
12	7	9	16	35	45	65	95
13	4	12	16	34	46	52	84
14	20	24	34	36	68	88	146
15	4	16	34	36	54	44	96
16	5	12	15	35	45	56	85
17	6	14	24	26	42	42	94
18	14	16	34	36	44	70	100
19	4	8	14	22	24	20	42
20	2	5	5	12	16	12	32

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Салмина Н.Ю. Теория игр: Учебное пособие. – Томск:ТУСУР, ФДО, 2012. – 107 с. – <http://fdo.tusur.ru/study/library/>
2. Салмина Н.Ю. Моделирование систем. Учебное пособие для вузов. – Томск: ТУСУР, 2002. – 197 с. – 22 экз. (ГРИФ)
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998.
4. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
5. Кузин Л.Т. Основы кибернетики: В 2-х т. – М.: Энергия, 1980.
6. Данилов Н.Н. Игровые модели принятия решений. – Кемерово, 1981.
7. Гладких Б.А. Лекции по исследованию операций. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1979.