Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)
Высший колледж информатики, электроники и менеджмента (ВКИЭМ)

Баранник В.Г., Истигечева Е.В.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Методические указания для выполнения лабораторных работ

Томск 2011

Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Системный анализ и принятие решений / Методические указания для выполнения лабораторных работ – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Высший колледж информатики, электроники и менеджмента, 2011. – 45 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа №1. Графическое решение задачи линейного программирования.

<u>Цель:</u> Рассмотреть методологию решения задач рационального ведения хозяйства по индивидуальному заданию – задача о смеси (коктейле).

<u>Задание</u>: Решить графически задачу линейного программирования на примере задачи о смеси:

1. Сформировать исходные данные для примера, используя цифровой код ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО.
2. Решить графически задачу №1 при максимизации целевой функции. Интерпретировать графически результат решения.
3. Внося по возможности минимально необходимые изменения в исходные данные примера, промоделировать другие возможные исходы в решении задачи линейного программирования. В итоге необходимо представить 3 дополнительных варианта записи условий задачи и их геометрическое отображение в пространстве E_2.

Ход работы:

1. Формируем исходные данные:

		X_1	X_2	*Условие*	*Примечание*
		1	*2*	*3*	*4*
Коэф. Цел.ф. целевой функции	*Z(X)*	*Ж/8*	*Д/5*	$\Rightarrow$	*Макси-мизировать*
Ограничение 1	$g_1(X)$	*А/1*	*Н/15*	$\leq$	*О/16*
Ограничение 2	$g_2(X)$	*В/3*	*А/1*	$\leq$	*О/16*
Ограничение 3	$g_3(X)$	*Л/13*	*Ь/20*	$\leq$	*Г/4*

$z(x) = 8x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max$

при условии ограничений и положительности ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 \leq 16 \\ 13x_1 + 20x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Для задач данного типа существует несколько вариантов:

A1. Решением является единственная точка.

A2. Существует бесконечное множество решений (целевая функция параллельна ограничивающему условию).

B1. Нет решений, т.к. целевая функция в случае максимизации не ограничена сверху.

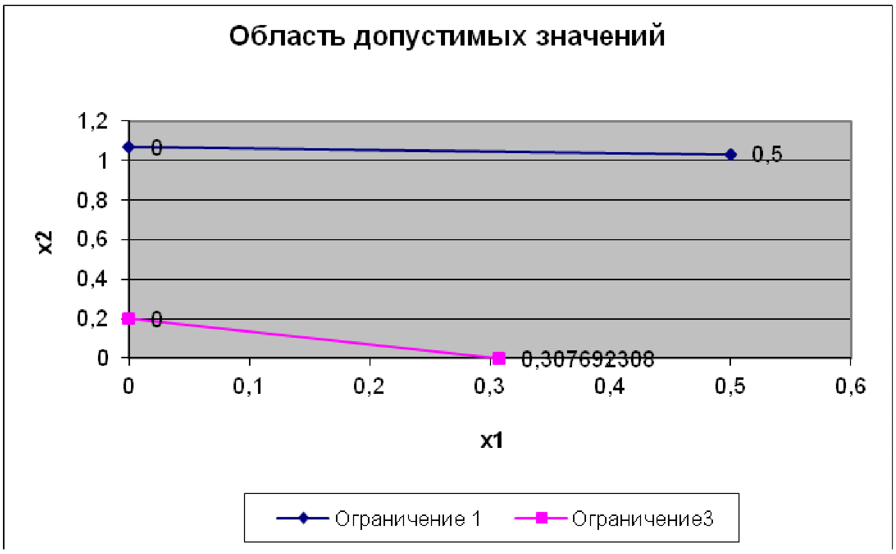
B2. Нет решений, т.к. область допустимых значений представляет собой пустое множество.

Вариант A1 (единственное решение)

Определим область допустимых значений, для чего в неравенствах системы ограничений и в условиях положительности переменных знаки неравенств заменим на знаки равенств.

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 = 16 \\ 3x_1 + x_2 = 16 \\ 13x_1 + 20x_2 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Область допустимых значений – замкнутая ограниченная выпуклая фигура. Исходя из условий ограничений и положительности переменных, полученная область имеет небольшую площадь и ограничена прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $13x_1 + 20x_2 = 4$. Эта область имеет форму треугольника с вершинами (0; 0), (0; 1/5) и (4/13 ; 0). Таким образом, на область допустимых значений влияет только третье ограничение, а первое и второе не имеют большого значения.



Для целевой функции найдём по две точки координат, для этого выразим одну переменную через другую: $x_2 = -8/5\ x_1$.

Целевая функция

X_1	X_2
0	0
5	-8

График функции $z(x) = 8x_1 + 5x_2$ представляет прямую, проходящую через начало координат, и при положительных значениях X_1 значения X_2 отрицательны. Но по условию задач обе переменные должны быть положительными. Для этого значения данной функции надо увеличивать на величину положительного свободного члена, то есть двигать вверх в направлении, перпендикулярном ей.

Для целевой функции найдём градиент, который будет показывать направление её движения:

$$\text{Grad}\,(Z(X)) = \left(\frac{dZ}{dX_1}; \frac{dZ}{dX_2}\right) = (8; 5).$$

Градиент целевой функции направлен в первую четверть координатной плоскости, в этом же направлении происходит увеличение целевой функции.

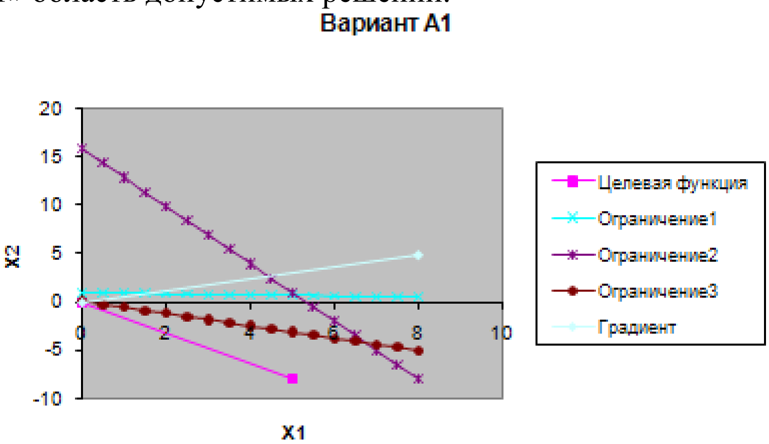
При условии максимизации целевой функции область допустимых значений имеет с ней единственную общую точку с координатами:

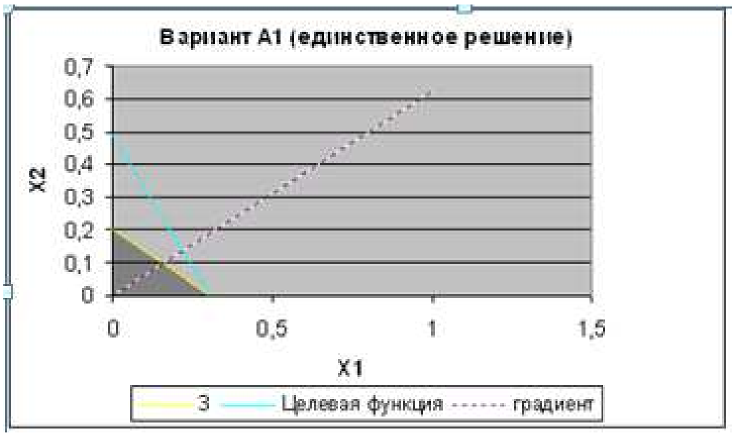
$$x_1 = 4/13,\ x_2 = 0$$

Для данных координат целевая функция принимает значение:

$$z(x)_{max} = 8*4/13 + 5*0 \approx 2{,}46$$

При дальнейшем движении в направлении указанным градиентом функции, целевая функция «покидает» область допустимых решений.





Вариант А2 (бесконечное множество решений).

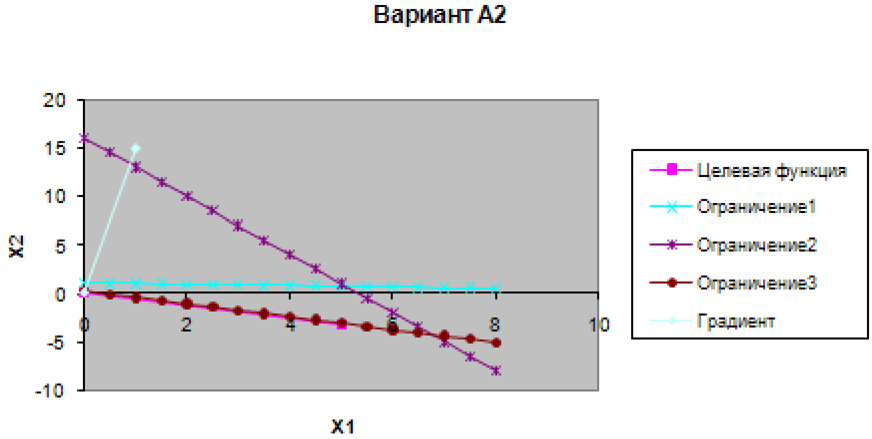
Изменим целевую функцию таким образом, чтобы прямая целевой функции была параллельна графику одного из ограничений. Так как в нашем случае на область допустимых значений при заданных неравенствах оказывает влияние только третье ограничение, то возьмем его коэффициенты для целевой функции.

$z(x) = 13x_1 + 20x_2 \Rightarrow max$, при условиях, что:

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 \leq 16 \\ 13x_1 + 20x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Grad}\,(Z(X)) = \left(\frac{dZ}{dX_1};\frac{dZ}{dX_2}\right) = (13;\,20).$$

Таким образом, при движении в направлении градиента целевая функция будет увеличиваться и в итоге совпадет с графиком третьего ограничения $13x_1 + 20x_2 \le 4$.



Вариант В1 (нет решений в случае неограниченности целевой функции).

Изменим ограничивающие условия, поменяв знаки в неравенствах на противоположные:

$z(x) = 8x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max$, при условиях, что:

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \ge 16 \\ 3x_1 + x_2 \ge 16 \\ 13x_1 + 20x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

При таких условиях область допустимых значений не является замкнутой, что приводит к неограниченности целевой функции. Вывод: нет решений.

Вариант В2 (нет решений в случае, когда область допустимых значений представляет собой пустое множество).

Рассмотрим другой вариант, когда нет решения условной оптимизации. Для этого изменим ограничивающие условия следующим образом:

$z(x) = 8x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max$, при условиях, что:

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \ge 16 \\ 3x_1 + x_2 \le 16 \\ 13x_1 + 20x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

При этих условиях система неравенств не имеет решения, в результате чего область допустимых значений принимает вид пустого множества.

Лабораторная работа №2. Графическое решение задачи линейного программирования. Первая геометрическая интерпретация в пространстве переменных для задачи использования технологий.

Цель: Решить графически задачу линейного программирования.
Задание:
1. Сформировать исходные данные для примера, используя цифровой код ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО.
2. Решить задачу планирования использования технологий графически, используя интерпретацию условий задачи в пространстве переменных, при максимизации и минимизации целевой функции Z(X) (Задача рационального ведения хозяйства, отвечающая на вопрос «Как? Каким образом?»)
3. Решить графически в пространстве переменных задачу №2 при максимизации целевой функции Z(x). Интерпретировать полученный результат решения.

Ход работы:

1. Формируем исходные данные:

		X_1	X_2	*Условие*	*План выпуска*
		Технология 1	*Технология 2*	*3*	*4*
Огр.1 Бензин	$g_1(X)$	*Ж/8*	*Д/5*	≥	*А/1*
Огр.2 керосин	$g_2(X)$	*Н/15*	*О/16*	≥	*В/3*
Огр.3 Диз.топливо	$g_3(X)$	*А/1*	*О/16*	≤	*Л/(13*20)*
Огр.4 Мазут	$g_4(X)$	*Ь/20*	*Г/4*	≤	*А/(1*30)*
Коэфф. ц. Ф-ии	$Z(X)$	*Г/3*	*Е/6*	⇒	*Макси-мизировать*

$z(x) = 3x_1 + 6x_2 \Rightarrow \max$, при условиях, что:

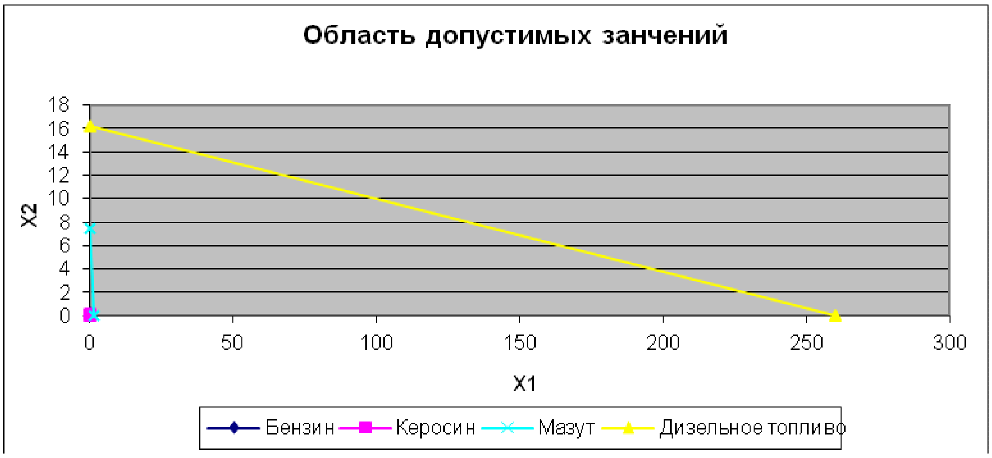
$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \geq 1 \\ 15x_1 + 16x_2 \geq 3 \\ x_1 + 16x_2 \leq 260 \\ 20x_1 + 4x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$x_2 \geq 0$

1. Определим область допустимых решений:

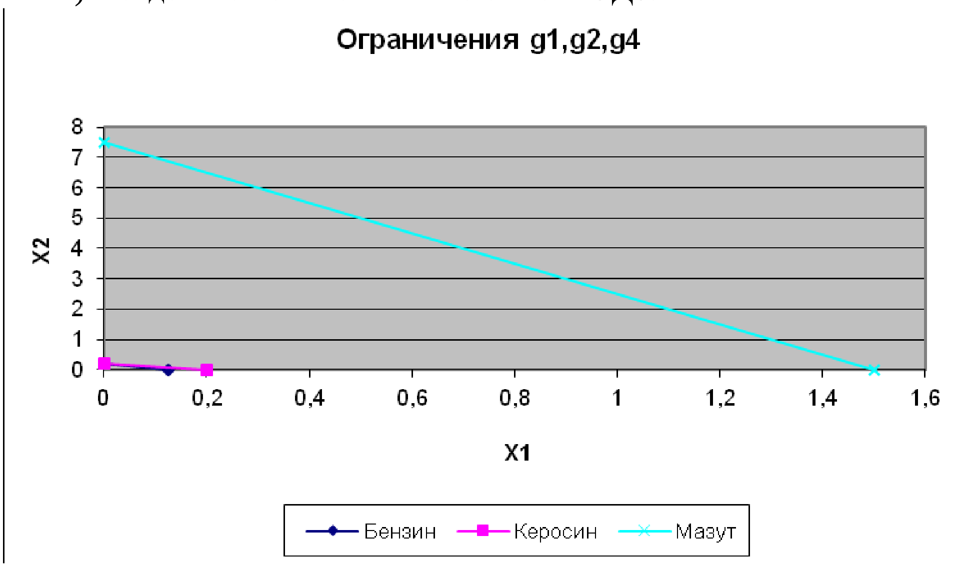
$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 1 \\ 15x_1 + 16x_2 = 3 \\ x_1 + 16x_2 = 260 \\ 20x_1 + 4x_2 = 30 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

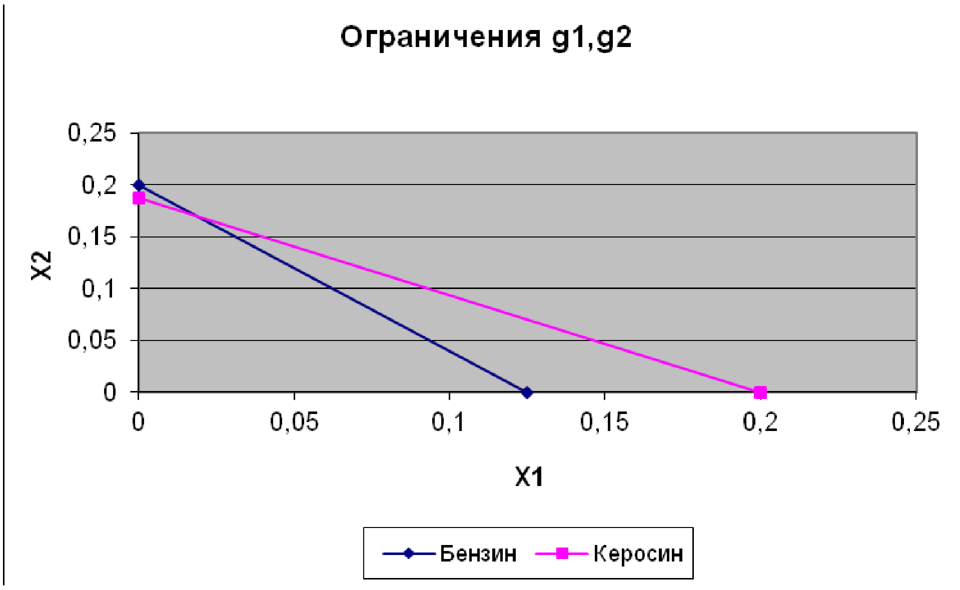
Бензин $g_1(x)$		Керосин $g_2(x)$		Дизельное топливо $g_3(x)$		Мазут $g_4(x)$	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	0,2	0	0,1875	0	16,25	0	7,5
0,125	0	0,2	0	260	0	1,5	0



Таким образом, область допустимых значений замкнута, ограничена и выпукла. Она представляет собой пятиугольник, ограниченный прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $8x_1 + 5x_2 = 1$ (бензин), $15x_1 + 16x_2 = 3$ (керосин) и $20x_1 + 4x_2 = 30$ (мазут).

Для наглядности на диаграмме не будем отражать график третьего ограничения (дизельного топлива) и отдельно покажем нижнюю часть ОДЗ.





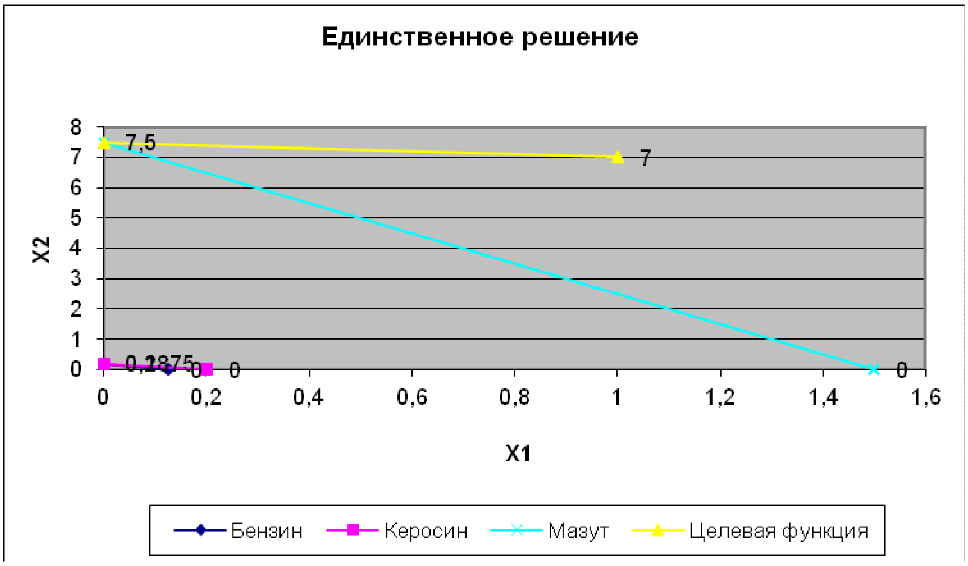
Градиент целевой функции определяется с помощью частных производных:

Grad (Z(X)) = $(\frac{dZ}{dX_1};\frac{dZ}{dX_2}) = (3; 6).$

Таким образом, градиент целевой функции направлен в первую четверть координатной плоскости, в этом же направлении происходит увеличение целевой функции.

При условии максимизации целевой функции область допустимых значений имеет с ней единственную общую точку с координатами:

$x_1 = 0,\ x_2 = 7{,}5$



$x_1 = 0,\ x_2 = 7{,}5$

Для данных координат целевая функция принимает значение:
$z(x)_{max} = 3*0+6*7{,}5 = 45$

При дальнейшем движении в направлении указанным градиентом функции, целевая функция «покидает» область допустимых решений.

<u>Вывод:</u> таким образом, поставленная нами в начале задача решена. Наша модель имеет решение и это решение единственное – X* (7,5 ;0; 45).

Лабораторная работа №3. Первая геометрическая интерпретация в пространстве переменных для задачи раскроя материала.

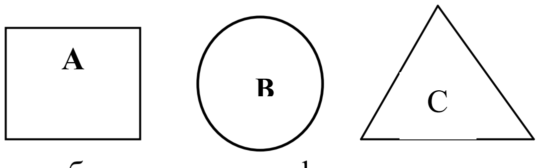
Задание: Решить графически задачу линейного программирования для индивидуального задания:

1. Сгенерировать исходные данные для формализованной записи условий задачи. Для исследуемой в индивидуальном задании задачи двумерного раскроя плоского материала (листа) необходимо предварительно определить следующее:
   - Ввести три типа заготовок (отдел главного конструктора), из которых собираются все выпускаемые фирмой изделия.
   - Разработать сборочные спецификации (отдел главного конструктора) для 3 - 5 выпускаемых фирмой изделий. Необходимо при этом выполнить следующее условие: каждая из деталей (A, B, C) должна входить по крайней не менее одного раза хотя бы в одно из выпускаемых изделий.
   - Сгенерировать производственную программу выпуска изделий (отдел маркетинга, планово-экономический отдел) для периода планирования.
   - Составить 5 технологических карт раскроя одноразмерного листового материала для получения заготовок ABC (отдел главного технолога). Карты раскроя листового материала изобразить схематично. Допускаются любые, непротиворечащие условиям задачи варианты.
   - Рассчитать (производственный отдел) задание на выпуск заготовок A, B, C. По данным спецификаций и плана выпуска изделия (Q) рассчитать производственное задание по каждой заготовке: N_A, N_B, N_C.
2. Записать математически в терминах линейного программирования задачу раскроя листового материала. Критерий эффективности – минимально необходимое число листов. Ограничивающие условия: обязательное выполнение (или частично перевыполнение) заданий по выпуску требуемых для сборки изделий заготовок N_A, N_B, N_C.
3. Решить графически задачу линейного программирования на основе геометрической интерпретации задачи в пространстве переменных, прокомментировать итоговые результаты решения. Для удобства решения следует привести задачу к размерности [m;2], отбросив 3 наиболее мягких столбца матрицы условий A задачи, соответствующее 3-м конкретным технологическим картам. После выполнения указанных действий необходимо решить задачу сокращенной размерности [3;2].

Ход работы.

1. Формируем исходные данные:

- Вводим три типа заготовок, из которых будут собираться все выпускаемые фирмой изделия.



- Разрабатываем сборочные спецификации для выпускаемых фирмой изделий. Зададим следующие сборочные спецификации изделий:

- изделие 1S: (3A; 2B; C);

- изделие 2S: (A; 3B; 2C);

- изделие 3S: (2A; B; 3C).

- Генерируем производственную программу выпуска изделий для периода планирования.

- для изделия 1S формируем производственную программу следующим образом:

$Q_{1S} = 100 + Ж*(-1)^{“Ж”} = 100 + 7*(-1)^{7} = 93$; где “Ж” – показатель степени (Фамилия);

- для изделия 2S – производственную программу:

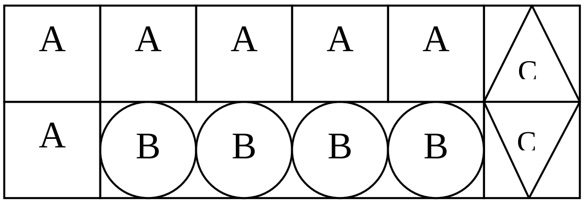
$Q_{2S} = 200 + О*(-1)^{“О”} = 200 + 16*(-1)^{16} = 216$; где “О” – показатель степени (Имя);

- для изделия 3S – производственную программу:

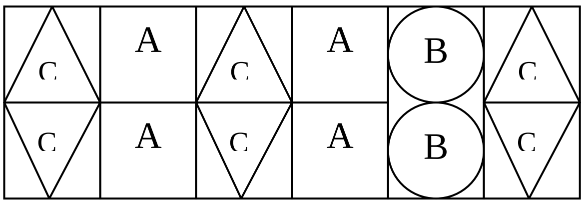
$Q_{3S} = 300 + Г*(-1)^{”Г”} = 300 + 3*(-1)^{3} = 297$; где “Г” – показатель степени (Отчество).

- Составляем 5 технологических карт раскроя одноразмерного листового материала для получения заготовок АВС (отдел главного технолога).

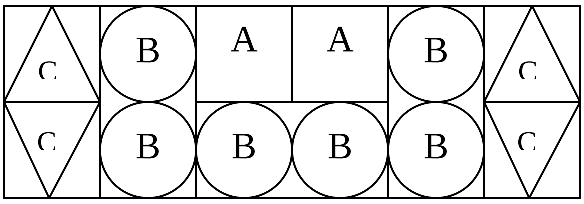
1) Карта раскроя 1 (6А; 4В; 2С)



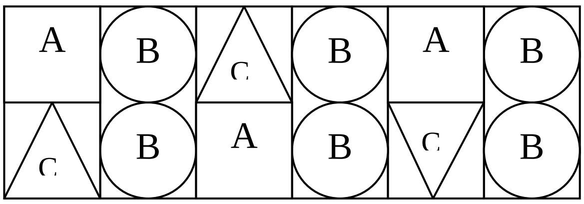
2) Карта раскроя 2 (4А; 2В; 6С)



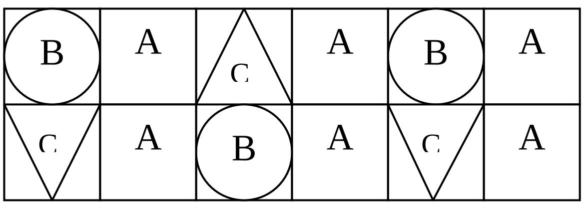
3) Карта раскроя 3 (2А; 6В; 4С)



4) Карта раскроя 4 (3А; 6В; 3С)



5) Карта раскроя 5 (6А; 3В; 3С)



- Рассчитываем задание на выпуск заготовок A, B, C (по данным спецификаций и плана выпуска изделия (Q): N_A, $N_{B,}$ N_C.

N_A = 93*3 + 216*1 + 297*2 = 1089 – такое количество заготовок А понадобится по плану.

N_B = 93*2 + 216*3 + 297*1 = 1131 – такое количество заготовок В понадобится по плану.

N_C = 93*1 + 216*2 + 297*3 = 1416 – такое количество заготовок С понадобится по плану.

2. Запишем математически в терминах линейного программирования задачу раскроя листового материала.

$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \min$, при условиях, что:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 1098 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 \geq 1131 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 1416 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, n. \end{cases}$$

Система ограничений представляет матрицу размерностью 3*5. Путем отбрасывания трех столбцов ее можно привести к размерности 3*2. Это необходимо, чтобы отразить область допустимых значений на плоскости (в двумерном пространстве). Критерием выбора наиболее жестких условий послужат задания на выпуск заготовок N_A, $N_{B,}$ N_C, т.е. определяем, что необходимо наибольшее количество заготовок С, меньше заготовок В и наименьшее количество заготовок А. Следовательно, откидываем наиболее мягкие условия, т.е. карты раскроя № 2, 4, 5.

Определим область допустимых решений:

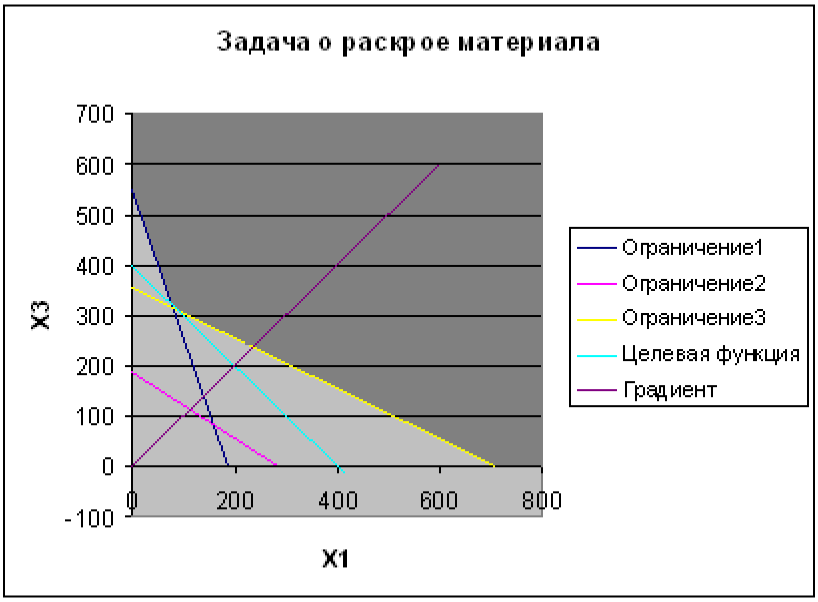
$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 = 1098\ (1) \\ 4x_1 + 6x_3 = 1131\ (2) \\ 2x_1 + 4x_3 = 1416\ (3) \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(1)		(2)		(3)	
x_1	x_3	x_1	x_3	x_1	x_3
0	549	0	188,5	0	354
183	0	282,75	0	708	0

Градиент целевой функции определяется с помощью частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 1\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = 1$$

Таким образом, градиент целевой функции направлен в первую четверть координатной плоскости, в этом же направлении происходит увеличение целевой функции.



Определим точки области допустимых решений:

1) (0; 549) – точка пересечения ограничения (1) и координатной оси X_3.
2) (78; 315) – точка пересечения ограничений (1) и (3).
3) (708; 0) – точка пересечения ограничений (3) и координатной осью X_1 .

Подставим координаты точек в целевую функцию:

1) z(x) = 0 + 549 = 549
2) z(x) = 78 + 315 = 393
3) z(x) = 708 + 0 = 708

При условии минимизации целевой функции область допустимых решений имеет с ней единственную общую точку с координатами:

$$X^* = (78; 315)$$

Для данных координат целевая функция принимает значение:

$$z(x^*)_{min} = 78 + 315 = 393.$$

Ответ: С точки зрения критерия эффективности (минимально необходимое число листов) получим, что для эффективной работы производства необходимо:

- по технологической карте 1 выкроить 78 листов.
- по технологической карте 3 выкроить 315 листов.

Таким образом мы нашли минимальное необходимое количество листов, равное 393 листам, для обеспечения эффективной работы производства изделий.

Лабораторная работа №4. Интерпретация задачи линейного программирования в пространстве условий.

<u>Задание: </u> Сформировать задачу раскроя материалов с матрицей условий размерностью [2;5]. Решить задачу линейного программирования геометрически в пространстве условий:

1. Сократить число условий № 3 до двух, т.е. записать задачу с матрицей А в форме [2;5].
2. Решить задачу ЛП геометрически в пространстве условий, для случая, когда уравнения ограничений записаны в канонической форме (равенство).
3. Найти решение задачи ЛП, построив проекции для двух возможных сечений конуса в пространстве U_3:
   - Проекция сечения конуса плоскостью $U_1 = b_1$
   - Проекция сечения конуса плоскостью $U_2 = b_2$. Полученные результаты сравнить
   - Найти качественное решение задачи ЛП при максимизации и минимизации целевой функции Z(x) , определить структуру опорного плана (базиса) на основе геометрического представления
   - Найти аналитически значения базисных переменных оптимального плана X* и целевой функции Z(X*) для случаев (max, min).
4. Решить задачу (max, min), когда ограничения записаны в форме неравенства(≤, ≥):
   - Привести задачу с условиями в форме (≤; ≥) к канонической форме
   - Для задачи с матрицей условий А [2;7] выполнить действия, аналогичные пункту 4.2
   - Сравнить полученные решения задач, по условиям пп.4.2. и 4.3, сделать выводы
   - Записать аналитически условия задачи раскроя материала и отобразить геометрически «в пространстве условий» U_3 варианты А1, А2, В1, В2.

Ход работы

Для решения № 4 воспользуемся данными задачи на раскрой материала из № 3. При этом из системы ограничений удалим одно из неравенств, например, первое, которое характеризует раскрой деталей А.

Вариант А1 –наличие решения

Целевая функция будет иметь вид:

$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \min$, при наличии следующих ограничений:

$$\begin{cases} U_1 = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 \geq 1131 \\ U_2 = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 1416 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, n. \end{cases}$$

1. Построим сечение плоскостью U1 = b1:

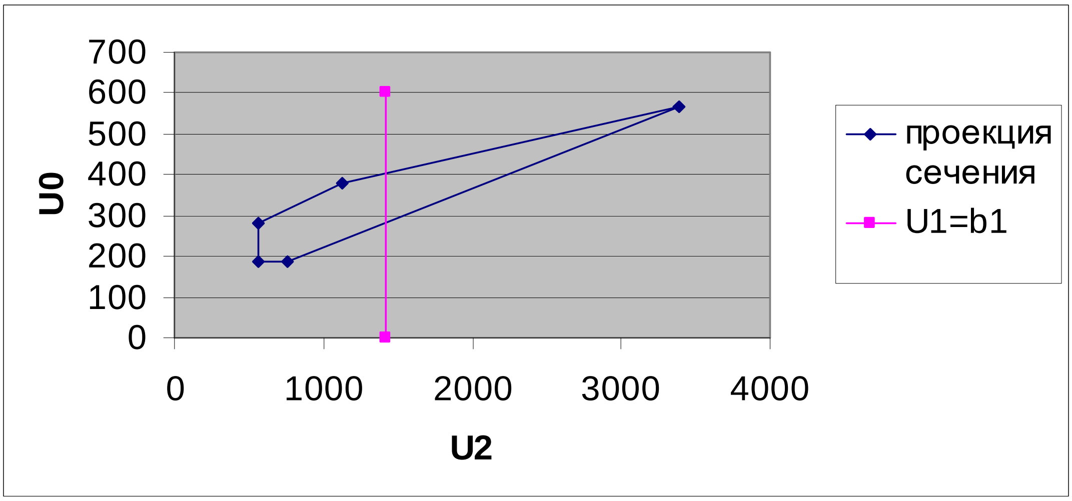
Находим точки встречи луча с секущей плоскостью U1 и U0 и заносим их в таблицу:

aj	U2	U0
a1	565,5	282,75
a5	1131	377
a2	3393	565,5
a3	754	188,5
a4	565,5	188,5

Построим прямую пересекающую плоскость:

U2	U0

1416	0
1416	600



Найдем точки q и Q:

	U0	U1	
q	1102	283,071	- точка минимума
Q	1102	400,75	- точка максимума

Решение задачи на мах (Q):

$$U1=2x_2+3x_5=1131$$
$$U2=6x_2+3x_5=1416$$

Решив систему, получаем:

$$X_2=71,25$$
$$X_5=329,5$$

Следовательно, Z(при X(max)) = 71,25 + 329,5 = 400,75 = Q(U3).

Решение задачи на min (q):

$$U1=2x_2+6x_3=1131$$
$$U2=6x_2+4x_3=1416$$

Решив систему, получаем:

$$X_2^*=141,8571$$
$$X_{3*}=141,2143$$

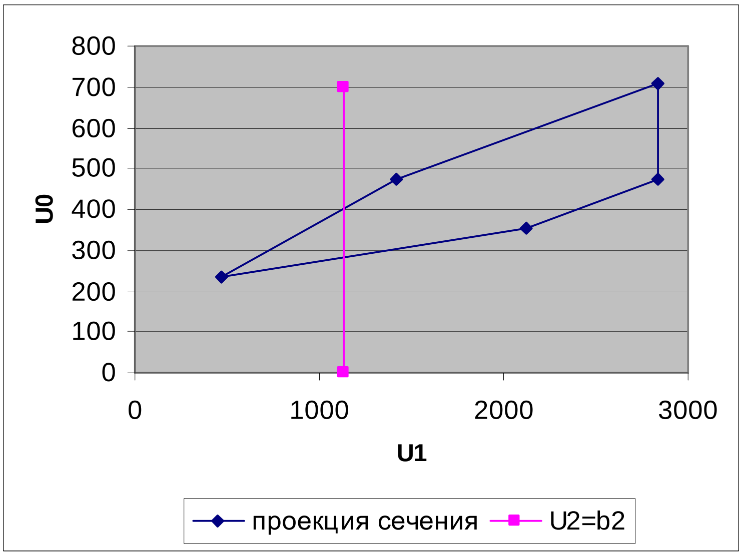
Следовательно, Z(при X(min)) = 141,8571 + 141,2143 = 283,07 = Q(U3).

2. Построим сечение плоскостью U2= б2:

Находим точки встречи луча с секущей плоскостью U1 и U0:

aj	U1	U0
a1	2832	708
a4	2832	472
a3	2124	354
a2	472	236
a5	1416	472

Построим прямую пересекающую плоскость:



Найдем точки q и Q:

	U0	U2	
q	283,07	1102	- точка минимума
Q	400,75	1102	- точка максимума

<u>Вывод:</u> способ нахождения значений Z(x) через разные сечения роли не играет, так как получаются идентичные значения. Таким образом, независимо от того, какое из сечений мы будем использовать, наша целевая функция достигнет максимума 400,07 и минимума 283,07.

Вариант А2 – бесконечное множество решений

В данном случае коэффициенты целевой функции должны совпадать с коэффициентам выражения U1 или U2. Конус представляет собой прямую, а целевая функция полностью совпадает с этой прямой.

Вариант В1 – неограниченность целевой функции

В данном случае, наша целевая функция неограниченна сверху (отсутствует Q). Тогда при построении сечения на одну из плоскостей получаем выпуклую область, в которой целевая функция достигает только минимальное значение.

Вариант В2 – несовместимость условий

В данном случае условие выполняется при:

Сечение U1=b1 - $\begin{cases} 0<U1<565{,}5 \\ U1>3393 \end{cases}$

Сечение U2=b2 - $\begin{cases} 0<U2<472 \\ U2>2832 \end{cases}$

Исходя из вышеперечисленных систем следует, что при построении сечения целевая функция находится вне замкнутой, выпуклой, ограниченной области D.

Лабораторная работа №5. Первая теорема двойственности.

Задание: Решить геометрически исходную задачу № 4 посредством интерпретации в пространстве переменных сопряженной к ней прямой задачи.

Ход работы.

Используем данные задачи из №4 для записи прямой задачи по отношению к исходной двойственной задаче размерности [m;n]=[2;5], представленной в следующей форме:

$L(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \Rightarrow \min$ при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \,/\, 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 3y_5 \geq 1131 \\ x_2 \,/\, 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 3y_5 \geq 1416 \\ y_i \geq 0,\ i = 1, 5. \end{cases}$$

Прямая задача будет иметь вид:

$Z(x) = 1131x_1+1416x_2 \Rightarrow \max$ при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 1 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2. \end{cases}$$

Решить геометрически полученную прямую задачу интерпретацией в пространстве переменных.

Определим область допустимых значений, для чего в неравенствах системы ограничений и в условиях положительности переменных знаки неравенств - заменим на знаки равенств.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 =1 \\ 6x_1 + 4x_2 =1 \\ 6x_1 + 3x_2 =1 \\ 3x_1 + 3x_2 =1 \\ X1=0 \\ X2=0 \end{cases}$$

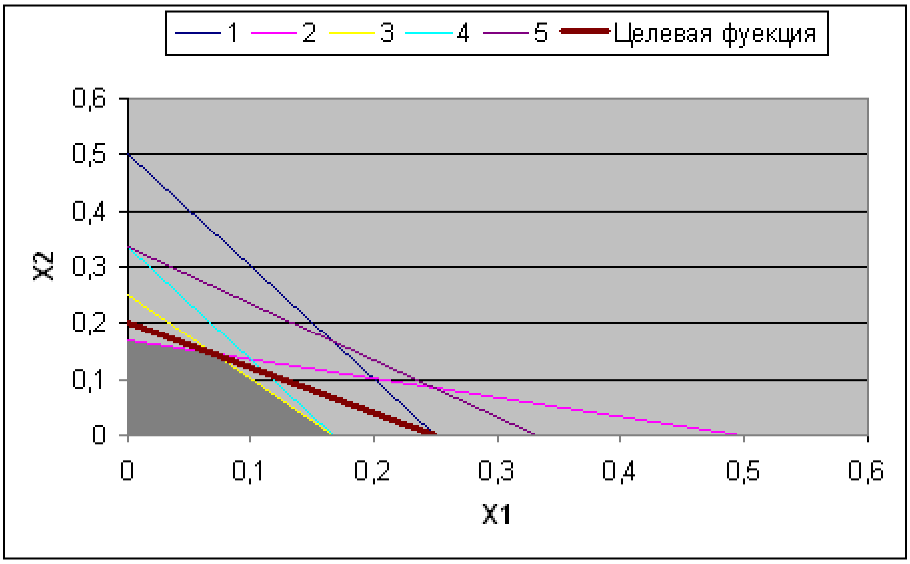
	x1	x2
1 ограничение	0	0,5
	0,25	0
2 ограничение	0	0,166667
	0,5	0
3 ограничение	0	0,25
	0,166667	0
4 ограничение	0	0,333333
	0,166667	0
5 ограничение	0	0,333333
	0,333333	0

Область допустимых значений – замкнутый ограниченный четырехугольник. Исходя из условий ограничений и положительности переменных, полученная область имеет небольшую площадь и ограничена прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $2x_1 + 6x_2 = 1$ и $6x_1 + 4x_2 = 1$.

При решении системы уравнений, состоящей из 2 и 3 ограничений, мы найдем единственную общую точку графика целевой функции с областью допустимых значений при соблюдении условий максимизации целевой функции: $x_1^* = 0{,}071429$, $x_2^* = 0{,}142857$.

Для данных координат целевая функция принимает значение:

$Z(x^*)_{max} = 1131*0{,}071429 + 1416*0{,}142857 = 283.07$



Чтобы убедиться в правильности действий 5.1.1 и 5.1.2, воспользуемся первой теоремой двойственности: на оптимальных планах прямой и двойственной задач значения целевых функций совпадают.

$Z(x^*) = L(y^*)$

В № 4 $L(y^*)_{min} = 141{,}8571 + 141{,}2143 = 283{,}07$, где $Y^* = (141{,}8571; 141{,}2143)$, что совпадает с полученным решением $Z(x^*)_{max} = 283.07$

Таким образом, первая теорема двойственности выполняется.

Решить геометрически исходную задачу № 1 путем интерпретации в пространстве условий сопряженной с ней двойственной задачи.

Записать сопряженную (двойственную) задачу к исходной задаче линейного программирования размерности [3;2] из № 1, имеющей следующий вид:

$Z(x) = 8x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max$ при условии ограничений:

$$\begin{cases} y_1 \,/\, x_1 + 15x_2 \le 16 \\ y_2 \,/\, 3x_1 + x_2 \le 16 \\ y_3 \,/\, 13x_1 + 20x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Сопряженная задача имеет вид:

$L(y) = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3 \Rightarrow \min$ при условии ограничений:

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 13y_3 \ge 8 \\ 15y_1 + y_2 + 20y_3 \ge 5 \\ y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим полученную сопряженную задачу геометрически, используя интерпретацию в пространстве условий.

$U0 = L(y) = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3 \Rightarrow \min$ при условии ограничений:

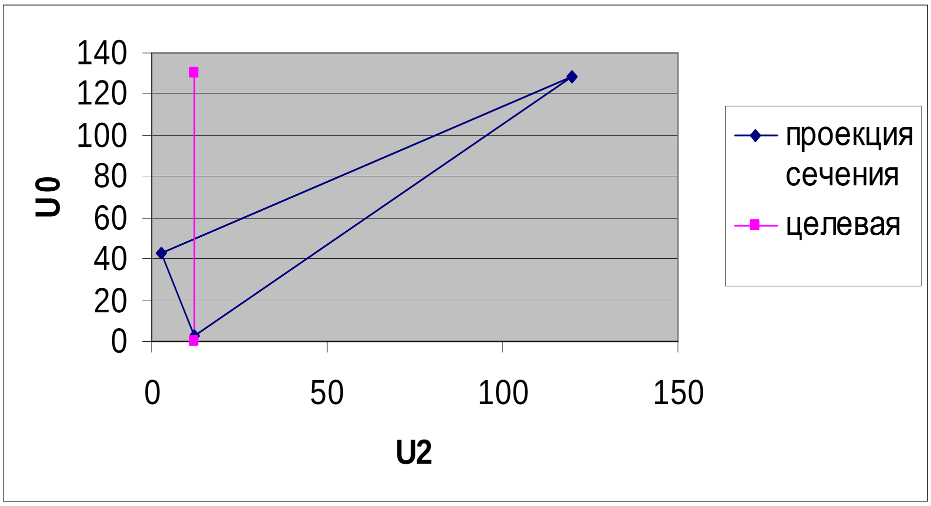
$$\begin{cases} U1 = y_1 + 3\,y_2 + 13\,y_3 \geq 8 \\ U2 = 15y_1 + y_2 + 20\,y_3 \geq 5 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим сечение плоскостью U1 = b1:

Находим точки встречи луча с секущей плоскостью U1 и U0 и заносим их в таблицу:

aj	U2	U0
a1	120	128
a2	2,667	42,66667
a3	12,31	2,461538

Построим прямую пересекающую плоскость:



Прямая проходит через одну из вершин проекции сечения. Эта точка и определяет минимальное значение U0, то есть целевой функции $L(y)_{min}$ = 2,461538.

Чтобы убедиться в правильности действий, воспользуемся первой теоремой двойственности: на оптимальных планах прямой и двойственной задач значения целевых функций совпадают.

$Z(x^*) = L(y^*)$

В № 1 $Z(x)_{max} = 8*4/13 + 5*0 \approx 2{,}46$, что совпадает с полученным решением $L(y^*)_{min}$ = 2,461538.

<u>Вывод</u>: используя теорию двойственности, мы нашли геометрическим путем оптимальное решение сопряженной задачи пары (прямой - двойственной). На основе полученных равных решений делаем о выполнении первой теоремы двойственности.

Лабораторная работа №6. Вторая теорема двойственности.

Задание: По известному из № 4 оптимальному решению исходной (двойственной) задачи линейного программирования на основе утверждений второй теоремы двойственности найти оптимальное решение сопряженной (прямой) задачи.

В качестве исходной взять задачу [2;5] № 4**,** для которой принять заданными оптимальный план $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*)$ и значение целевой функции $L_{min}(Y^*)$.

Ход работы.

Исходная двойственная задача из № 4 имеет следующий вид:

$L(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$ => min при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \,/\, 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 3y_5 \geq 1131 \\ x_2 \,/\, 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 3y_5 \geq 1416 \\ y_i \geq 0,\ i = 1, 5. \end{cases}$$

Для этой задачи было найдено оптимальное решение и значение целевой функции:

Y_2^*=141,8571

Y_{3*}=141,2143

$L_{min}(Y^*) =$ 141,8571 + 141,2143 = 283,07

Сопряженная прямая задача будет иметь следующий вид:

$Z(x) = 1131x_1+1416x_2$ => max при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 1 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2. \end{cases}$$

По результатам анализа выполнения ограничений

$a_{11}y_1^*+a_{12}y_2^*+a_{13}y_3^*+a_{14}y_4^*+a_{15}y_5^* \geq C_1$

$a_{21}y_1^*+a_{22}y_2^*+a_{23}y_3^*+a_{24}y_4^*+a_{25}y_5^* \geq C_2$

исходной задачи для сопряженных пар двойственных условий определить качественно структуру оптимального плана X^* для сопряженной (прямой) задачи, т.е. выделить базисные переменные.

Проверим условия для двойственной задачи:

Y_2^*=141,8571

Y_{3*}=141,2143

Следовательно:

$$\begin{cases} 4*0 + 2*141{,}8571 + 6*141{,}2143 + 6*0 + 3*0 = 1131 \\ 2*0 + 6*141{,}8571 + 4*141{,}2143 + 3*0 + 3*0 = 1416 \end{cases}$$

По утверждениям второй теоремы двойственности найти значения базисных переменных для вектора X^* на основе совместного решения выделенных уравнений из системы

$\Sigma a_{ij}\, x_i^* \leq b_j$, j=1,2,3,4,5.

Равенства выполняются, следовательно x_1 и x_2 составляют базис для прямой задачи. А также $Y_2>0$ и $Y_3>0$.

По 3^0 формуле из второй теоремы двойственности:

$$\begin{cases} Y_i^* > 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{\ *} = b_i \end{cases}$$

Определяем, что 2 и 3 ограничения – базис.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \le 1 \\ 6x_1 + 4x_2 \le 1 \end{cases}$$

Отсюда $x_1^* = 0{,}071429$, $x_2^* = 0{,}142857$

Проверить правильность вычисления оптимального опорного плана X^* по первой теореме двойственности.

Подставив найденные значения базисных переменных для вектора X^* в целевую функцию прямой задачи, получим:

$Z(x) = 1131 * 0{,}071429 + 1416 * 0{,}142857 = 283.0714$.

По известному оптимальному решению исходной (прямой) задачи линейного программирования на основе утверждений второй теоремы двойственности найти оптимальное решение сопряженной (двойственной) задачи

В качестве исходной взять задачу № 1 (либо № 2) размерностью [3;2], для которой принять заданными оптимальный план

$X^* = (x_1^*,\ x_2^*)$ и значение целевой функции $Z_{max}(X^*)$.

Исходная прямая задача имеет вид:

$Z(x) = 8x_1 + 5x_2 \Rightarrow max$ при условии ограничений:

$$\begin{cases} y_1 \ /\ x_1 + 15x_2 \le 16 \\ y_2 \ /\ 3x_1 + x_2 \le 16 \\ y_3 \ /\ 13x_1 + 20x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для этой задачи было найдено оптимальное решение и значение целевой функции:

$$\begin{cases} x_1^* = 0{,}3077 \\ x_2^* = 0 \\ Z(x)_{max} = 8*0{,}3077 + 5*0 \approx 2{,}46 \end{cases}$$

Сопряженная двойственная задача:

$L(y) = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3 \Rightarrow min$ при условии ограничений:

$$\begin{cases} y_1 + 3\,y_2 + 13\,y_3 \ge 8 \\ 15y_1 + y_2 + 20\,y_3 \ge 5 \\ y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

По результатам анализа выполнения ограничений

$a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* \le b_1$;

$a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* \le b_2$;

$a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* \le b_3$;

$x_1^* \ge 0,\ x_2^* \ge 0$

сопряженных пар двойственных условий определить качественно структуру оптимального плана прямой задачи Y^*, т.е. определить структуру базиса.

$$\begin{cases} 0{,}3077 + 15*0 \le 16 & 0{,}3077 \le 16 \\ 3*0{,}3077 + 0 \le 16 & 0{,}923 \le 16 \\ 13*0{,}3077 + 20*0 \le 4 & 4=4 \text{ в базисе} \end{cases}$$

Таким образом, в базис входит только одна переменная y_3.

По утверждениям второй теоремы двойственности найти опорный план Y^* на основе совместного решения выбранных уравнений из системы

$$\Sigma a_{ij}\, y_i^{\,*} = C_i,\ i=1,2.\ \ j\ 13\, y_3^{\,*} = 8 \ \Rightarrow y_3^{\,*} = 0{,}61538$$

Проверить правильность вычисления оптимального опорного плана Y^* по первой теореме двойственности.

Подставив найденное значение базисной переменной в целевую функцию прямой задачи, получим:

$L(y_3^*) = 16*0 +16*0 + 4*\ 0.61538 = 2{,}461538$, что совпадает со значением целевой функции прямой задачи.

Лабораторная работа №7. Метод Жордановых исключений.

Задание: В качестве исходной возьмите задачу линейного программирования размерностью [2;5], сформированную по ФИО студента в соответствии с правилами для № 3. Оба ограничения задать в виде **«$\geq$».**

Решить задачу линейного программирования произвольным перебором базисов (например, в лексикографическом порядке перебора номеров базисных переменных для смежных базисов).

Примечание: Значения базисных переменных вычислять с помощью процедуры Жордановых исключений по крайней мере для первых двух возможных базисов.

Прокомментировать решение задачи (п. 7.2), полученное перебором всех возможных базисов, а также сравнить с решением задачи для № 3.

Ход работы.

Для решения данной задачи берем начальные условия из № 3.

$Z(x) = x_1 + x_4 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \min$

при наличии следующих ограничений:

$U_1 = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 \geq 1131$
$U_2 = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 1416$
$x_j \geq 0,\ j = 1, n.$

Решим данную задачу методом Жордановых исключений. Для этого составляем таблицу:

Базис	Значение базисных компонент				Значение целевой функции	Допустимость решения
[1,2]	X1=	197,7	X2=	170,1	367,8	допустимый
[1,3]	X1=	-993	X3=	850,5	-	недопустимый
[1,4]	X1=	-5103/0	X4=	3402/0	-	недопустимый
[1,5]	X1=	-142,5	X5=	567	-	недопустимый
[2,3]	X2=	141,8571	X3=	141,2143	283,0714286	допустимый
[2,4]	X2=	170,1	X4=	131,8	301,9	допустимый
[2,5]	X2=	71,25	X5=	329,5	400,75	допустимый
[3,4]	X3=	850,5	X4=	-662	-	недопустимый
[3,5]	X3=	-142,5	X5=	662	-	недопустимый
[4,5]	X4=	-95	X5=	567	-	недопустимый

Рассмотрим на примере базис [1,2] и базис [1,3].

1) [1,2] – базис, следовательно x_1 и x_2 – базисные переменные

Произведем над первым уравнением элементарные преобразования таким образом, чтобы удалить переменную x_1 и коэффициент перед x_2 был равен 1. Для этого второе условие умножим на два и вычтем из него первое, а затем разделим на 10.

$0x_1+10x_2+2x_3+0x_4+3x_5 = 1701$ /10

$x_2+0,2x_3+0,3x_5 = 170,1$

$10x_1+0x_2+14x_3+15x_4+6x_5 = 1977$ /10

$x_1+1,4x_3+1,5x_4+0,6x_5 = 197,7$

Данное решение является допустимым, так как x_1 и x_2 принимают неотрицательные значения. Следовательно, значение целевой функции будет равно:

$1*170,1+1*197,7 = 368,7$

Полученные данные заносим в таблицу.

2) [1,3] – базис, следовательно x_1 и x_3 – базисные переменные

Произведем над первым уравнением такие же элементарные преобразования как и в случае 1.1, а со вторым - таким образом, чтобы удалить переменную x_3 и коэффициент перед x_1 был равен 1. Для этого второе условие умножим на 1,5 и вычтем из него первое, а затем разделим на -1.

$0x_1+10x_2+2x_3+0x_4+3x_5 = 1701$ /2

$5x_2+x_3+1,5x_5 = 850,5$

$-1x_1+7x_2+0x_3-1,5x_4+1,5x_5 = 993$ /(-1)

$X_1-7x_2+1,5x_4-1,5x_5 = - 993$

Данное решение не является допустимым, так как x_1 принимает отрицательное значение. Полученные данные заносим в таблицу.

В результате заполнения из таблицы мы видим, что

Zmax (X) = 400,75

Zmin (X) = 283,07

Полученные значения при этом совпадают с решением из №4.

Лабораторная работа №8. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом.

Задание:

1. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования № 3 размерностью [2;7] при заданном начальном опорном плане.

В общем виде исследуемую задачу записать в форме

$Z(X)=C_1x_1+ C_2x_2+ C_3x_3+ C_4x_4 + C_5x_5 \Rightarrow \max$

при условиях

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+ a_{15}x_5 +x_6 \quad =b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+ a_{15}x_5 \quad +x_7=b_2$

$x_j \geq 0, j=\overline{1,6}$

Примечание. Значения для параметров задачи C_j , j=1,…,4; $A=//a_{ij}//_{2 \times 5}$, b_i, i=1,…,2 взять из задания № 3.

2. Решить задачу линейного программирования, содержащую начальный опорный план ($A_{s1}=A_6$; $A_{s2}=A_7$). Результаты решения занести в симплекс-таблицу.

Примечание. Для первых двух итераций симплекс-метода дать подробный протокол решения, включающий дополнительно к основной симплекс-таблице комментарий в текстовой форме для обоснования выполненных действий.

3. Сравнить решение задачи симплекс-методом с ранее полученными решениями этой задачи в других лабораторных работах.

Ход работы.

1. В общем виде исследуемая задача имеет вид:

$$\begin{cases} z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \max, \text{ при наличии следующих ограничений:} \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 + x_6 \quad =1131 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 + \quad + x_7 =1416 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 7. \end{cases}$$

2. Составим и заполним симплекс-таблицу.

Обозначение симплекс таблиц:

1-ый столбец (N) – номер строк;

2-ой столбец (Cx) – в нем указываются коэффициенты Csi линейной формы при базисных переменных в целевой функции;

3-ий столбец (Bx) – содержит векторы базиса Asi;

4-ый столбец A_0 – в нем выписаны базисные компоненты Xio опорного плана;

(m + 1)-ая строка таблицы заполняется оценками Δl_j векторов условий Aj относительно базиса.

5-12-ые столбцы – матрица коэффициентов в системе условий

0			Cj	1	1	1	1	1	0	0	Q	
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7		
1	0	A6	1131	4	2	6	6	3	1	0	282,75	Ar
2	0	A7	1416	2	6	4	3	3	0	1	708	
(m	+	1)	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0		
				Ak								

Порядок выполнения.

Заполнение m+1 строки производится по формуле:

$$\Delta j = Zj - Cj, \text{ где } Zj = \sum_{i=1}^{m} Csi * Xij$$

Csi – коэффициент целевой функции при базисной переменной,

Xij – коэффициент разложения, который находится перед переменной Xj в уравнении i.

$Z^{(0)}= 0*1131 +0*1416 - 0 = 0$

$\Delta 1 = 0*4 +0*2 -1 = -1.$

$\Delta 2 = 0*2 +0*6 -1 = -1$

Аналогично остальные Δj получаются равными -1.

Так как все оценки одинаковые, то в качестве наименьшей выбираем любую, например первую, то есть на следующей итерации мы вводим базисную переменную Ak - X_1. Чтобы узнать вместо какой, в столбце Q производим вычисления по формуле: A_{0i}/A_{1i} , и выбираем из полученных значений наименьшее.

Qmin =282,75 => выводимая базисная переменная Ar – X_6, направляющий коэффициент 5.

Затем делаем пересчет всех коэффициентов таким образом, чтобы в первой строке коэффициент перед новой базисной переменной X_1был равен 1, а во второй – 0. Для этого первую строку делим на 4, а потом из второй вычитаем полученную первую, умноженную на 2. Аналогично, как и в первой таблице, производится пересчет оценок (см. п.1). В результате получаем новую симплекс-таблице на итерации 1.

1			Cj	1	1	1	1	1	0	0	Q	
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7		
1	1	A1	282,75	1	0,5	1,5	1,5	0,75	0,25	0	565,5	
2	0	A7	850,5	0	5	1	0	1,5	-0,5	1	170,1	Ar
(m	+	1)	282,75	0	-0,5	0,5	0,5	-0,25	0,25	0		
					Ak							

Теперь среди оценок выбираем наименьшую отрицательную -0,5 и проводим аналогичные действия, описанные в пунктах 2 и 3.

Действия с 1 по 4 продолжаем до тех пор, пока в строке m + 1 не окажется ни одной отрицательной оценки.

2			Cj	1	1	1	1	1	0	0	Q
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
1	1	A1	197,7	1	0	1,4	1,5	0,6	0,3	-0,1	329,5
2	1	A2	170,1	0	1	0,2	0	0,3	-0,1	0,2	567
(m	+	1)	367,8	0	0	0,6	0,5	-0,1	0,2	0,1	

3			Cj	1	1	1	1	1	0	0	Q
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
1	1	A5	329,5	1,66	0	2,33	2,5	1	0,5	-0,16667	
2	1	A2	71,25	-0,5	1	-0,5	-0,75	0	-0,25	0,25	
(m	+	1)	400,75	0,166	0	0,83	0,75	0	0,25	0,083333	

Как видно, на третьей итерации все оценки положительные, следовательно, опорный план оптимален и максимальное значение целевой функции 400,75, что совпадает с ранее полученным решением.

Лабораторная работа №9. Способы построения начального опорного плана для симплекс-метода.

<u>Задание:</u> Решить симплекс-методом в два этапа задачу линейного программирования № 3 (раскрой материалов):

Ход работы.

Представим условия в удобной для решения форме:

Целевая функция:

$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} U1 = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 >= 1131 \\ U2 = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 >= 1416 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 7. \end{cases}$$

Так как ограничения заданы в виде неравенства, а симплекс-метод работает для жестких ограничений, то необходимо перейти к равенствам, задав при этом начальный опорный план:

$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 1131$

$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1416$

Решаем задачу симплекс-методом для полученного на предыдущем этапе начального опорного плана:

Формулы для расчета:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{2} C_{s_i} x_{ij} - C_j .$$

Определяем, какая переменная войдет в базис по формуле: $\Delta_k = \max\limits_{\{\Delta_j > 0\}} \{\Delta_j\}.$

Определяем, какая базисная переменная выйдет из базиса по следующей формуле: $\Theta_r = \min\limits_{\{x_{ik} > 0\}} \left\{ \frac{A_{i0}}{x_{ik}} \right\}.$

Симплекс-метод:

			Cj	-1	-1	-1	-1	-1	-100	-100	Q
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
1	-100	A6	1131	4	2	6	6	3	1	0	188,5
2	-100	A7	1416	2	6	4	3	3	0	1	354
(m	+	1)	0	-599	-799	-999	-899	-599	0	0	

Итерация 1.

			Cj	-1	-1	-1	-1	-1	-100	-100	Q
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
1	-1	A3	188,5	0,666	0,333	1	1	0,5	0,166667	0	565,5
2	-100	A7	662	-0,666	4,66	0	-1	1	-0,66667	1	141,8571
(m	+	1)	-66388,5	67	-466	0	100	-99,5	166,5	0	

Итерация 2.

			Cj	-1	-1	-1	-1	-1	-100	-100
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1	-1	A3	141,21	0,71	0	1	1,07	0,43	0,21	-0,07
2	-1	A2	141,86	-0,14	1	0	-0,21	0,21	-0,14	0,21
(m	+	1)	-283,07	0,43	0	0	0,14	0,36	99,93	99,86

Таким образом, минимальное значение целевой функции равно **283,07**

М –метод

			Cj	0	0	0	0	0	-1	-1	Q
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
1	-1	A6	1131	4	2	6	6	3	1	0	188,5
2	-1	A7	1416	2	6	4	3	3	0	1	354
(m	+	1)	0	-6	-8	-10	-9	-6	0	0	

Итерация 1.

			Cj	0	0	0	0	0	-1	-1	Q
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	
1	0	A3	188,5	0,666667	0,333333	1	1	0,5	0,166667	0	565,5
2	-1	A7	662	-0,666667	4,666667	0	-1	1	-0,666667	1	141,8571
(m	+	1)	-662	0,666667	-4,666667	0	1	-1	1,666667	0	

Итерация 2.

			Cj	0	0	0	0	0	-1	-1
N	Cx	Bx	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1	0	A3	141,21	0,71	0	1	1,07	0,43	0,21	-0,07
2	0	A2	141,86	-0,14	1	0	-0,21	0,21	-0,14	0,21
(m	+	1)	0	0	0	0	0	0	1	1

$z(x_{min}) = 141,21 + 141,86 = 283,07$

Т.о. используя оба метода, получены одинаковые результаты:

Целевая функция $Z(x_{min}) \approx 283,07$

Количество итераций в обоих методах одинаковое.

Лабораторная работа №10. Транспортная задача.

<u>Задание</u>: Необходимо найти план развозки продукции, минимизируя суммарные транспортные издержки, при условии: полностью используется производственная мощность пунктов производства и каждый пункт потребления в полном объеме удовлетворяет свои потребности.

X_{ij} – количество однородной продукции, которую надо перевозить из пункта A_i в B_j

Критерии:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} CijXij \Rightarrow \min \quad (1)$$

При условии:

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = Ai, i = \overline{1,m} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} Xij = Bj, \; j = \overline{1,n} \quad (3)$$

$$Xij \ge 0, \; j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m} \quad (4)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости транспортной задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} Ai = \sum_{j=1}^{n} Bj \quad (*)$$

Ход работы:

Методы построения начального опорного плана:

1. Метод северо-западного угла
2. Метод минимального элемента

Запишем начальные условия транспортной задачи в виде таблицы:

A_i \ B_j	1	2	3	4	a_i
1	8	5	1	15	16
2	3	1	16	13	30
3	4	1	4	6	15
b_j	15	1	5	2	23 \ 61

Условие (*) не выполняется, так как производство > потребления. Следовательно, необходимо ввести дополнительный пункт потребления, причем транспортные издержки должны быть выгодными для потребителя, то есть минимальными, например 1.

A_i \ B_j	1	2	3	4	5	a_i
1	1	8	5	1	15	16
2	1	3	1	16	13	30
3	1	4	1	4	6	15
b_j	38	15	1	5	2	61 \ 61

Для построения начального опорного плана воспользуемся двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшего элемента.

Метод северо-западного угла

16	0	0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	0
22	**8**	0	0	0	30	30	8	0	0	0	0	0
0	**7**	**1**	**5**	**2**	15	15	15	15	8	7	2	0
38	15	1	5	2	*61*							
22	15	1	5	2		*45*						
0	15	1	5	2			*23*					

0	7	1	5	2	*15*
0	0	1	5	2	*8*
0	0	0	5	2	*7*
0	0	0	0	2	*2*
0	0	0	0	0	*0*

R=n+m-1=7; 7 элементов => матрица невырожденная.

Z(x)=1*16 + 1*22 + 3*8 + 4*7 + 1*1 + 4*5 + 6*2 = **123**

Главным недостатком этого метода является то, что он совершенно не учитывает транспортные издержки.

Метод минимального элемента

$A_i \backslash B_j$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	a_i
1	$1^{(1)}$	8	5	1	15	16
2	$1^{(2)}$	$3^{(4)}$	$1^{(3)}$	16	13	30
3	1	$4^{(5)}$	1	$4^{(6)}$	$6^{(7)}$	15
b_j	38	15	1	5	2	61 \ 61

16/16	0	0	0	0	16/16	0	0	0	0	0	0	0
22/-12	**7/8**	**1/4**	0	0	30/0	30/0	8/12	7/8	0	0	0	0
0	**8/-4**	0	**5/4**	**2/0**	15/0	15/0	15/0	15/0	15/0	7/4	2/0	0
38/4	15/4	1/4	5/4	2/0	61							
22/-12	15/4	1/4	5/4	2/0		45						
0	15/4	1/4	5/4	2/0			23					
0	15/4	0	5/4	2/0				22				
0	8/-4	0	5/4	2/0					15			
0	0	0	5/4	2/0						7		
0	0	0	0	2/0							2	
0	0	0	0	0								0

R=n+m-1=7; 7 элементов => матрица невырожденная.

Z(x)= 1*16 + 1*22 + 3*7 + 4*8 + 1*1 + 4*5 + 6*2 = 124.

Лабораторная работа №11. Метод потенциалов.

Задание: Решить транспортную задачу методом потенциалов, взяв в качестве исходного начальный опорный план, полученный методом северо-западного угла (№ 10). Решить транспортную задачу методом потенциалов, взяв в качестве начального опорного план задачи, полученный методом минимального элемента (№ 10). Сравнить результаты двух прогонов метода потенциалов.

Ход работы.

В качестве исходного плана взял опорный план, полученный методом северо-западного угла.

Исходные данные (взяты из № 10):

A_i \ B_j	1	2	3	4	5	a_i
1	1	8	5	1	15	16
2	1	3	1	16	13	30
3	1	4	1	4	6	15
b_j	38	15	1	5	2	61 \ 61

В качестве исходного плана возьмем опорный план, полученный методом северо-западного угла (№10):

16	0	0	0	0	16
22	**8**	0	0	0	30
0	**7**	**1**	**5**	**2**	15
38	15	1	5	2	*61/61*

Решаем транспортную задачу методом потенциалов.

План не вырожденный, так как он имеет 3+5-1=7 базисных компонент.

Итерация 1:

На первом шаге данной итерации проверяем оптимальность опорного плана. Для этого определяем все потенциалы пунктов производства и потребления. Примем $U_1 = 0$. Дальше действуем по схеме, чтобы в пересечении не нулевые переменные (они выделены синим цветом) были: $U_i + V_j = C_{ij}$. Затем в оставшиеся клетки записываем значения не базисных компонент по предыдущей формуле $U_i + V_j = C_{ij}$. А дальше сравниваем полученные значения небазисных компонент с полученными значениями, они должны быть $U_i + V_j \le C_{ij}$

1					0
1	3				0
	4	1	4	6	1
1	3	0	3	5	**Vj / Ui**

В следующую таблицу запишем разность $C_{ij} - (U_i + V_j)$, которая должна быть либо равна, либо больше нуля, то есть $C_{ij} = U_i + V_j \ge 0$. Если данное неравенство выполнится, то план оптимален.

0	5	5	-2	10	0
0	0	1	13	8	0
-1	0	0	0	0	1
1	3	0	3	5	**Vj / Ui**

Так как есть значения меньше 0, следовательно, план не оптимален.

Находим C_{ij}, которая вводится в базис по следующей формуле: $C_{i_0 j_0} = \min\limits_{C_{ij}<0}\{C_{ij}\}$. В данном случае $C_{i_0 j_0} = -2$, $i_0 = 1$, $j_0 = 4$.

Определяем, какая коммуникация выводится из базиса:

Для этого определяем переход:

16			**X**	
22	**8**			
	7	**1**	**5**	**2**

Осуществляем переход к новому базису: Для этого из базиса выбирается минимальное из значений переходных значений, которые стоят в нечетных позициях: 5. И осуществляем переход в четных значениях прибавляя данное значение, а в нечетных отнимая.

Получим новый базис (закрашенные клетки):

11			**5**	
27	**3**			
	12	**1**		**2**

Переходим на следующую итерацию.

<u>Итерация 2:</u>

1			1		0
1	3				0
	4	1		6	1
1	3	0	1	5	**Vj / Ui**

Таблица разности $C_{ij} - (U_i + V_j)$.

0	5	5	0	10
0	0	1	15	8
-1	0	0	2	0

Так как есть $C_{ij} - U_i - V_j < 0$, то план не оптимален.

Это отрицательное число единственное -1.

Составляем переход:

11			**5**	
27	**3**			
X	**12**	**1**		**2**

Получаем новый базис:

11			**5**	
15	**15**			
12		**1**		**2**

Итерация 3:

1			1		0
1	3				0
1		1		6	0
1	3	1	1	6	**Vj / Ui**

Таблица разности $C_{ij} - U_i - V_j$.

0	5	4	**0**	9
0	**0**	0	15	7
0	1	**0**	3	**0**

Так как $C_{ij} - U_i - V_j \geq 0$, то данный план оптимален.

Целевая функция равна:

Z(x) = 11*1 + 5*1 + 15*1 + 15*3 + 12*1 + 1*1 + 2*6 = 101

В качестве исходного плана взяла опорный план, полученный методом минимального элемента (№10):

16	0	0	0	0
22	**7**	**1**	0	0
0	**8**	0	**5**	**2**

Итерация 1:

1					0
1	3	1			0
	4		4	6	1
1	3	1	3	5	

Таблица разности $C_{ij} - U_i - V_j$.

0	5	4	-2	10
0	0	0	13	8
-1	0	-1	0	0

Так как есть $C_{ij} - U_i - V_j < 0$, то план не оптимален.

Составляем переход:

16			**X**	
22	**7**	**1**		
	8		**5**	**2**

Получаем новый базис:

11			**5**	
27	**2**	**1**		
	13			**2**

Переходим на следующую итерацию.

Итерация 2:

1			1		0
1	3	1			0
	4			6	1
1	3	1	1	5	

Таблица разности $C_{ij} - U_i - V_j$.

0	5	4	0	10
0	0	0	15	8
-1	0	-1	2	0

Так как есть $C_{ij} - U_i - V_j < 0$, то план не оптимален.

Составляем переход:

11			**5**	
27	**2**	**1**		
X	**13**			**2**

Получаем новый базис:

11			**5**	
14	**15**	**1**		
13				**2**

Переходим на следующую итерацию.

Итерация 3:

1			1		0
1	3	1			0
1				6	0
1	3	1	1	6	

Таблица разности $C_{ij} - U_i - V_j$.

0	5	4	**0**	9
0	**0**	**0**	15	7
0	1	0	3	**0**

Так как $C_{ij} - U_i - V_j \geq 0$, то данный план оптимален.

Целевая функция равна:

Z(x) = 11*1 + 14*1 + 13*1 + 15*3 + 1*1 + 5*1 + 2*6 = 101

Вывод: Как и ожидалось в обоих случаях один и тот же оптимальный план.

Лабораторная работа №12. Задача о назначениях (выбора).

<u>Задание</u>: Решить задачу о назначениях по алгоритму Флада для венгерского метода при максимизации целевой функции. Решить задачу о назначениях по предлагаемым условиям индивидуального задания. Сформировать исходные данные для примера. Решить задачу № 12 на минимум. Указать оптимальное назначение. Решить задачу № 12 на максимум. Указать оптимальное назначение.

Ход работы:

Формируем исходные данные:

		Бабушка	*Дедушка*	*МАТЬ*	*ОТЕЦ*	*СЫН*	*ДОЧЬ*
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
МАГАЗИН	*1*	*Ж/8*	*Д/5*	*А/1*	*Н/15*	*О/16*	*В/3*
ОБЕД	*2*	*А/1*	*О/16*	*Л/13*	*Ь/30*	*Г/4*	*А/1*
ПОСУДА	*3*	*Г/4*	*Е/6*	*Н/15*	*Н/15*	*А/1*	*Д/5*
УБОРКА	*4*	*Ь/30*	*Е/6*	*В/3*	*Н/15*	*А/1*	*Ж/8*
стирка	*5*	*Д/5*	*А/1*	*Н/15*	*О/16*	*В/3*	*А/1*
глажка	*6*	*О/16*	*Л/13*	*Ь/30*	*Г/14*	*А/1*	*Г/4*

При этом выдвигаем условия:

*Для любого $B_i, i = \overline{1,6}$ должно быть выбрано единственное значение;

*Для любого $A_j, j = \overline{1,6}$ должно быть выбрано единственное значение;

Решаем задачу о назначениях (выбора) на минимум:

Подготовительный этап.

Находим минимумы по строкам.

	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**Минимум по строкам**
B_1	8	5	1	15	16	3	1
B_2	1	16	13	30	4	1	1
B_3	4	6	15	15	1	5	1
B_4	30	6	3	15	1	8	1
B_5	5	1	15	16	3	1	1
B_6	16	13	30	14	1	4	1

Отнимаем от каждого значения матрицы соответствующий строке минимум. Найдем минимумы по столбцам.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	7	4	0	14	15	2
B_2	0	15	12	29	3	0
B_3	3	5	14	14	0	4
B_4	29	5	2	14	0	7
B_5	4	0	14	15	2	0
B_6	15	12	29	13	0	3
Минимум по столбцам	0	0	0	13	0	0

Отнимаем от каждого значения матрицы соответствующий столбцу минимум.
Подготовительный этап закончен.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	7	4	**0**	1	15	2
B_2	**0**	15	12	16	3	**0**
B_3	3	5	14	1	**0**	4
B_4	29	5	2	1	**0**	7
B_5	4	**0**	14	2	2	**0**
B_6	15	12	29	**0**	**0**	3

Итерации венгерского метода (алгоритм Флада).
Проверка плана на оптимальность.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	7	4	**0***	1	15	2
B_2	**0***	15	12	16	3	**0**
B_3	3	5	14	1	**0***	4
B_4	29	5	2	1	**0**	7
B_5	4	**0***	14	2	2	**0**
B_6	15	12	29	**0***	**0**	3

План не оптимален, так как число независимых нулей не равно рангу матрицы 6. Дополнительные нули надо искать в области невыделенных элементов матрицы. Для этого среди невыделенных элементов ищем минимальный: $Q_{ij} = \min C_{ij} = 2$. После этого производим пересчет матрицы по формуле:

$C_{ij}' = C_{ij} - Q_{ij}$ для невыделенных элементов,
$C_{ij}' = C_{ij} + Q_{ij}$ для элементов на пересечении,
$C_{ij}' = C_{ij}$ для остальных элементов.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	5	2	**0***	1	15	**0**
B_2	**0***	15	14	18	5	**0**
B_3	1	2	14	1	**0**	2
B_4	27	3	2	1	**0***	5
B_5	4	**0***	16	4	4	**0**
B_6	13	10	29	**0***	**0**	1

План не оптимален, поэтому опять производим пересчет матрицы.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	5	2	**0***	2	16	**0**

B_2	**0**	15	14	19	6	**0***
B_3	**0***	1	13	1	**0**	1
B_4	26	2	1	1	**0***	4
B_5	4	**0***	16	5	5	**0**
B_6	12	9	28	**0***	**0**	**0**

План оптимален, так как число независимых нулей равно рангу матрицы 6.

	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
B_1			1			
B_2						1
B_3	4					
B_4					1	
B_5		1				
B_6				14		

Zmin(x) = 4 +1 +1 +1 +1 + 14 = 22.

Решаем задачу о назначениях (выбора) на максимум:
Подготовительный этап:

Находим максимумы по строкам:

	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**Максимум по строкам**
B_1	8	5	1	15	16	3	16
B_2	1	16	13	30	4	1	30
B_3	4	6	15	15	1	5	15
B_4	30	6	3	15	1	8	30
B_5	5	1	15	16	3	1	16
B_6	16	13	30	14	1	4	30

Отнимаем от каждого значения матрицы соответствующий строке максимум. Найдем максимумы по столбцам

	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
B_1	-8	-11	-15	-1	0	-13
B_2	-29	-14	-17	0	-26	-29
B_3	-11	-9	0	0	-14	-10
B_4	0	-24	-27	-15	-29	-22
B_5	-11	-15	-1	0	-13	-15
B_6	-14	-17	0	-16	-29	-26
Минимум по столбцам	0	-9	0	0	0	-10

Отнимаем от каждого значения матрицы соответствующий столбцу максимум

	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
B_1	-8	-2	-15	-1	0	-3
B_2	-29	-5	-17	0	-26	-19
B_3	-11	0	0	0	-14	0
B_4	0	-15	-27	-15	-29	-12
B_5	-11	-6	-1	0	-13	-5

B_6	-14	-8	0	-16	-29	-16

Итерации венгерского метода (алгоритм Флада).
Проверка плана на оптимальность.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	-8	-2	-15	-1	**0***	-3
B_2	-29	-5	-17	**0***	-26	-19
B_3	-11	**0***	**0**	**0**	-14	**0**
B_4	**0***	-15	-27	-15	-29	-12
B_5	-11	-6	-1	**0**	-13	-5
B_6	-14	-8	**0***	-16	-29	-16

План не оптимален, так как число независимых нулей не равен рангу матрицы. Переходим к новому плану. Находим минимальный элемент среди невыделенных элементов. Данных элемент равен -19. Строим новый план:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1	-8	17	-15	-1	**0***	16
B_2	-29	14	-17	**0**	-26	**0***
B_3	-30	**0***	-19	-19	-33	**0**
B_4	**0***	4	-27	-15	-29	7
B_5	-11	13	-1	**0***	-13	14
B_6	-14	11	**0***	-16	-29	3

Это оптимальный план, так как число независимых нулей равен рангу матрицы: 6.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
B_1					16	
B_2						1
B_3		6				
B_4	30					
B_5				16		
B_6			30			

Zmax(x) = 30 + 6 + 30 + 16 + 16 + 1 = 99

Лабораторная работа №13. Задача о коммивояжере.

Ход работы:

Формируем исходные данные:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	***Ж/8***	***Д/5***	***А/1***	***Н/15***	***О/16***	***В/3***
2	***А/1***	***О/16***	***Л/13***	***Ь/30***	***Г/4***	***А/1***
3	***Г/4***	***Е/6***	***Н/15***	***Н/15***	***А/1***	***Д/5***
4	***Ь/30***	***Е/6***	***В/3***	***Н/15***	***А/1***	***Ж/8***
5	***Д/5***	***А/1***	***Н/15***	***О/16***	***В/3***	***А/1***
6	***О/16***	***Л/13***	***Ь/30***	***Г/14***	***А/1***	***Г/4***

Решаем задачу при минимизации транспортных расходов:

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	1	15	16	3
2	1	∞	13	30	4	1
3	4	6	∞	15	1	5
4	30	6	3	∞	1	8
5	5	1	15	16	∞	1
6	16	13	30	4	1	∞

1) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min$;

2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$;

3) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$;

4) $x_{ij} = \{0;1\}$;

5) $U_i - U_j + N \cdot X_{ij} \le N-1$, $i, j = 1..N, i \ne j$.

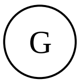
Решаем данную задачу с помощью алгоритма, построенного по схеме ветвей и границ.

Находим минимумы по строчкам и сумму этих минимумов.

	1	2	3	4	5	6	1
1	∞	5	1	15	16	3	1
2	1	∞	13	30	4	1	1
3	4	6	∞	15	1	5	1
4	30	6	3	∞	1	8	1
5	5	1	15	16	∞	1	1
6	16	13	30	4	1	∞	1
							6

Вычитаем из каждой ячейки минимум по соответствующей строчке и находим минимумы по столбцам.

	1	2	3	4	5	6	
1	∞	4	0	14	15	2	
2	0	∞	12	29	5	0	
3	3	5	∞	14	0	4	
4	29	5	2	∞	0	7	
5	4	0	14	15	∞	0	
6	15	12	29	3	0	∞	
	0	0	0	3	0	0	3

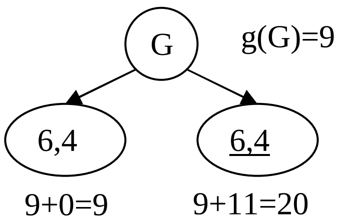


g(G)=6+3=9

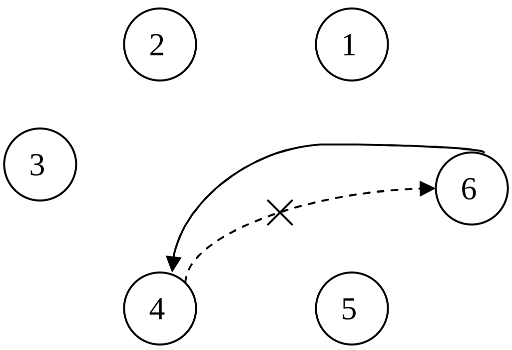
Вычитаем из каждой ячейки минимум по соответствующему столбцу.

	1	2	3	4	5	6
1	∞	4	0(4)	11	15	2
2	0(3)	∞	12	26	5	0(0)
3	3	5	∞	11	0(3)	4
4	29	5	2	∞	0(2)	7∞
5	4	0(4)	14	12	∞	0(0)
6	15	12	29	0(11)	0(0)	∞

Подсчитываем оценку для нулей как сумма минимумов соответствующих строк и столбцов и находим элемент с максимальной оценкой. Строим для него ветвь.



Показываем маршрут:



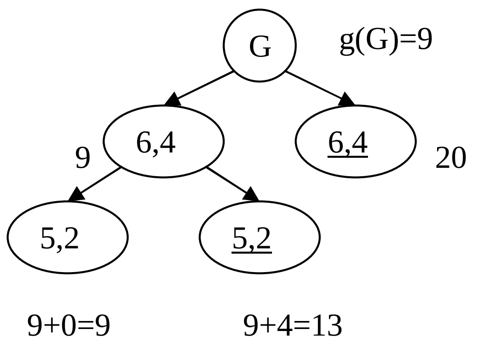
Перерисовываем матрицу перед этим вычеркнув 6 строку и 4 столбец.
Затем находим минимальные по строчкам и столбцам.

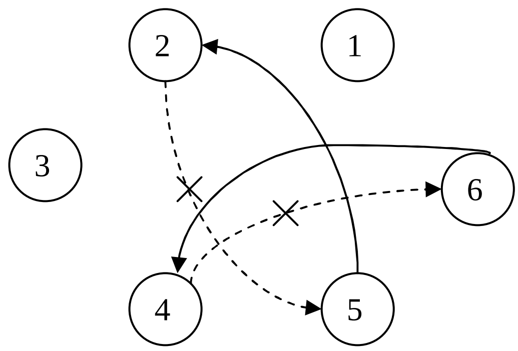
	1	2	3	5	6	
1	∞	4	0	15	2	0
2	0	∞	12	5	0	0
3	3	5	∞	0	4	0
4	29	5	2	0	∞	0
5	4	0	14	∞	0	0
	0	0	0	0	0	

Вычитаем соответственно строки и столбцы.

	1	2	3	5	6
1	∞	4	0(4)	15	2
2	0(3)	∞	12	5∞	0(0)
3	3	5	∞	0(3)	4
4	29	5	2	0(2)	∞
5	4	0(4)	14	∞	0(0)

Строим ветвь и маршрут:





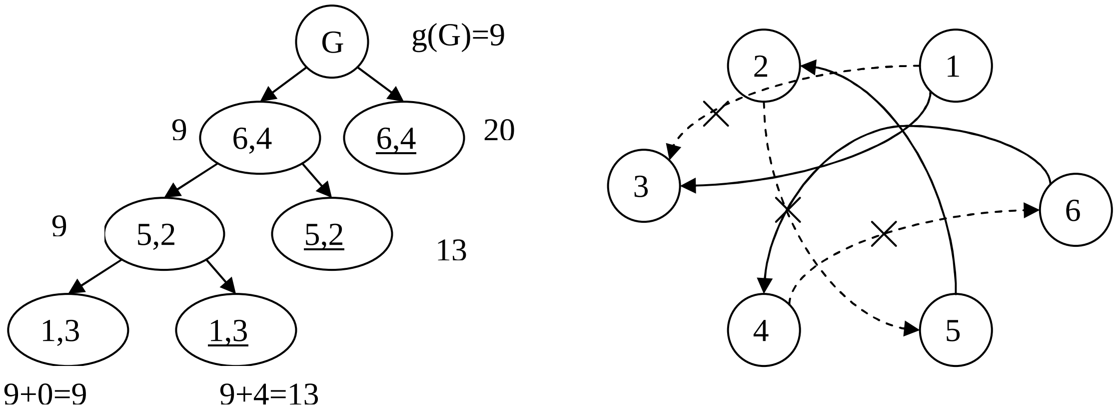
Перерисовываем матрицу перед этим вычеркнув 5 строку и 2 столбец.
Затем находим минимальные по строчкам и столбцам и вычитаем.

	1	3	5	6	
1	∞	0	15	2	0
2	0	12	∞	0	0
3	3	∞	0	4	0
4	29	2	0	∞	0
	0	0	0	0	

Определяем элемент с наибольшей оценкой.

	1	3	5	6
1	∞	0(4)	15	2(2)
2	0(3)	12	∞	0(0)
3	3∞	∞	0(3)	4
4	29	2	0(2)	∞

Строим ветвь и маршрут:

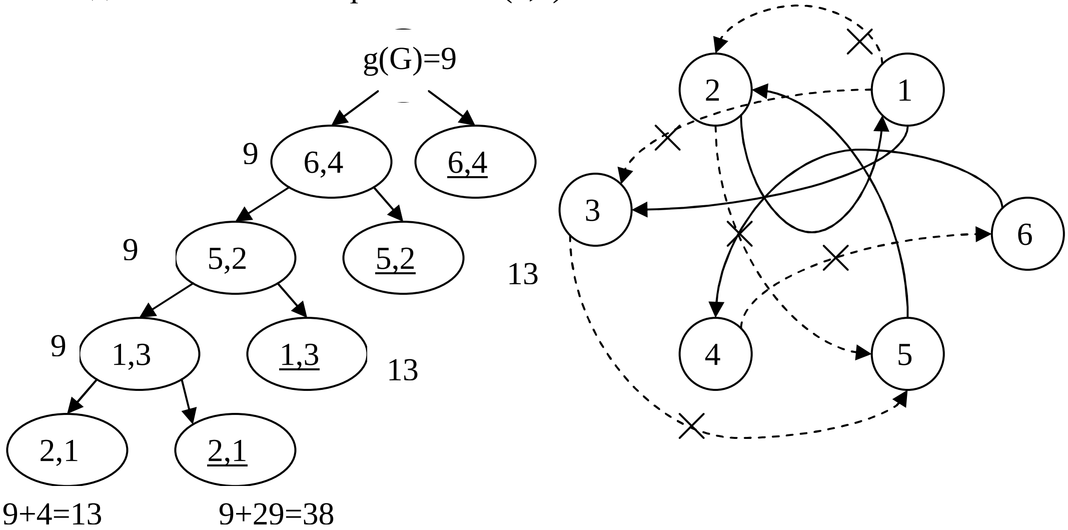


Перерисовываем матрицу перед этим вычеркнув 1 строку и 3 столбец.

Затем находим минимальные элементы по строчкам и столбцам (все нули) и вычитаем. Получаем:

	1	5	6
2	0(29)	∞	0(4)
3	∞	0(4) ∞	4
4	29	0(29)	∞

Ставим дополнительное ограничение (3,5).



Перерисовываем матрицу перед этим вычеркнув 2 строку и 1 столбец.

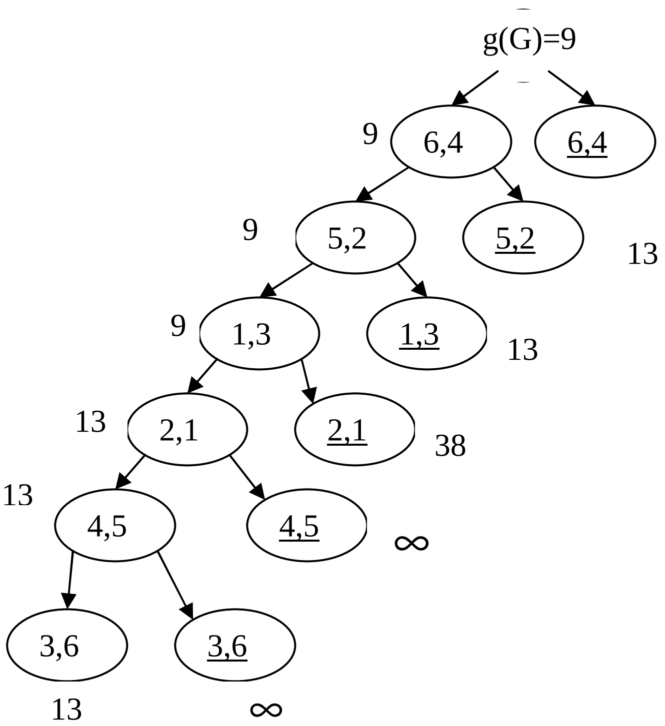
Затем находим минимальные элементы по строчкам и вычитаем.

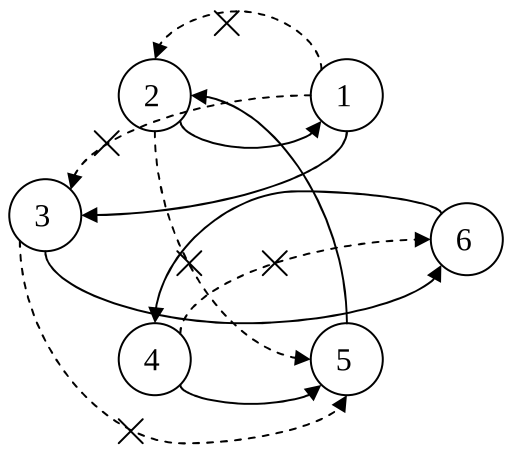
	5	6	
3	∞	4	4
4	0	∞	0

Затем минимальные элементы по столбцам (все нули). Получаем:

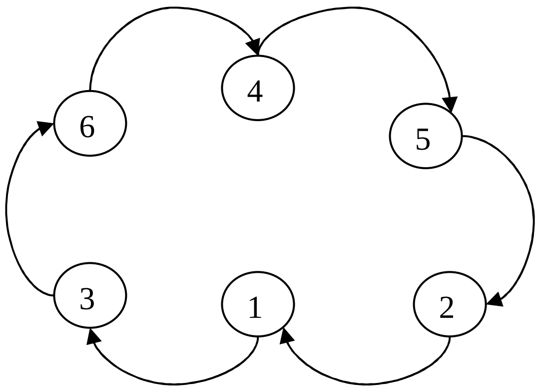
	5	6
3	∞	0(0)
4	0(0)	∞

Из оставшихся 2-х вариантов выбираем любой, так как они имеют одинаковые оценки. Возьмем коммуникацию (4,5). А затем последний вариант (3,6). Получаем:





План маршрута:



Z* = 13 – рекорд, лучший из просмотренных решений. Осуществив процесс обратного хода, мы убедились, что полученный нами рекорд является наименьшим либо равен некоторым из оценок элементов. Однако из расчетов оценок на предыдущих этапах видно, что, если бы мы пошли по другой ветви, начиная с уровня, где рекорд равен оценке (13), то последующие оценки все равно были бы больше.

Литература

1. Шумский, Алексей Анатольевич. Основы системного анализа: Учебное пособие / А. А. Шумский, А. А. Шелупанов ; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем. - 2-е изд., перераб. и доп. - Томск: Спектр, 2007. - 218[2] с. (103 экз. в библ.)

2. Силич Мария Петровна. Системотехника: учебное пособие / М. П. Силич, Е. Н. Рыбалка ; ред. М. П. Силич; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. - Томск: ТУСУР, 2007. - 242[1] с. : ил., табл. - (Приоритетные национальные проекты. Образование). - Библиогр.: с. 241-242. (100 экз. в библ.)

3. Турунтаев Леонид Петрович. Оптимизация и математические методы принятия решений: учебное пособие: в 2 ч. / Л. П. Турунтаев; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра автоматизации обработки информации. - Томск: ТМЦДО, 2010 - . Ч. 1. - Томск: ТМЦДО, 2010. - 210 с. (13 экз. в библ.)