МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Томский государственный университет

систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

В.Г. Баранник, Е.В. Истигечева

ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ

Лабораторный практикум на MathCAD

Томск 2014

Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Пакеты прикладных программ/ Лабораторный практикум на MathCAD. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2014. – 78 с.

Лабораторный практикум включает первоначальное знакомство с системой MathCAD, шесть лабораторных работ, каждая из которых содержит краткое описание применяемого метода, варианты заданий и контрольные вопросы, а также фрагменты выполнения работ на MathCAD.

Цель лабораторного практикума - научить студентов второго курса пользоваться простейшими методами вычислений с использованием современных информационных технологий. Наиболее подходящей для этой цели является одна из самых мощных и эффективных математических систем - MathCAD, которая занимает особое место среди множества таких систем как Matlab, Maple, Mathematica и др.

MathCAD остается в настоящее время единственной системой, в которой описание решения математических задач задается с помощью привычных математических формул и знаков. MathCAD позволяет выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства научной графики.

СОДЕРЖАНИЕ

Общая часть

Одной из основных областей применения персонального компьютера (ПК) являются математические и научно-технические расчеты. Сложные вычислительные задачи, возникающие при моделировании технических устройств и процессов с применением ПК, можно разбить на ряд элементарных:

- вычисление интегралов;
- решение нелинейных и трансцендентых уравнений и систем уравнений;
- решение начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений и систем;
- др.

Для таких задач уже разработаны методы решения, созданы математические системы, доступные для изучения студентами во втором семестре первого курса Высшего колледжа информатики, электроники и менеджмента Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (ВКИЭМ ТУСУР).

В настоящее время ПК можно решать задачи научно-технических расчетов без применения какого-либо алгоритмического языка типа Паскаль, Си и др.

Интегрированные программные системы автоматизации математических расчетов (MatLab, Maple, Mathematica, MathCAD и др.) позволяют решать поставленные задачи на их входном языке, который максимально приближен к естественному математическому языку.

В MathCAD описание решения математических задач дается с помощью привычных математических формул и знаков. Такой же вид имеют и результаты вычислений.

Система MathCAD (Mathematical Computer Aided Design - Математическое проектирование с помощью ЭВМ) является уникальным программным средством как с точки зрения простоты управления, так и с точки зрения возможностей выражения в естественной форме алгоритмов вычислительной математики. Основная идея системы - предоставление пользователю возможности описывать на экране вычисления в форме, очень близкой к общепринятой математической нотации, применяемой при записи математических моделей и алгоритмов численного анализа. Например, формулы, представляемые в языках программирования, таких, как Бейсик или Паскаль, с помощью арифметических выражений, записываются на экране MathCAD так, как это нас учат делать в течение нескольких лет в школе. В этом смысле внешне экран MathCAD почти ничем не отличается от обычного листа бумаги, на котором записываются формулы и выкладки, сопровождаемые графиками и текстом. По существу же отличие в том, что формулы на экране MathCADa вычисляются. Причем при внесении изменений результаты и графики автоматически или по команде пользователя пересчитываются. Это как раз и делает MathCAD мощным инструментом в руках инженера и специалиста по прикладной математике, а также уникальным "наглядным пособием" и инструментальным средством для изучения методов и алгоритмов решения различных математических задач. Таким образом, достаточно написать формулу на экране вместо того, чтобы вычислять ее на калькуляторе или программировать с помощью алгоритмических языков. Это свойство MathCAD позволяет приступить к исследованию математических моделей технических систем либо алгоритмов численного анализа без затрат времени и энергии на изучение языков программирования, которые являются оправданными только для профессиональных программистов. Еще одним привлекательным качеством системы является простота управления построением графиков, которые также автоматически перестраиваются, отражая все изменения определяющих их значений и формул.

Так, что системы MathCAD вполне оправдывают аббревиатуру CAD, говорящую о ее принадлежности к сложным и продвинутым системам автоматизированного проектирования – САПР.

MathCAD своего рода САПР в математике.

К задачам, решаемым в системе MathCAD, можно отнести:

- подготовку научно-технических документов, содержащих текст, и формулы, записанные в привычной для специалистов форме;
- вычисление результатов математических операций, в которых участвуют числовые константы, переменные и размерные физические величины;
- операции с векторами и матрицами;
- решение уравнений и систем уравнений (неравенств);
- статистические расчеты и анализ данных;
- построение двумерных и трехмерных графиков;
- тождественные преобразования (в том числе упрощение), аналитическое решение уравнений и систем;
- дифференцирование и интегрирование, аналитическое и численное;
- решение дифференциальных уравнений;
- проведение серий расчетов с различными значениями начальных условий и других параметров.

Технология работы в системе MATHCAD проста и удобна в работе.

Система MathCAD существует в нескольких основных вариантах:

- MathCAD Standard - идеальная система для повседневных технических вычислений. Предназначена для массовой аудитории и широкого использования в учебном процессе;
- MathCAD Professional - промышленный стандарт прикладного использования математики в технических приложениях. Ориентирована на математиков и научных работников, проводящих сложные и трудоемкие расчеты.
- MathCAD Professional Academic - пакет программ для профессионального использования математического аппарата с электронными учебниками и ресурсами.

Система разработана фирмой MathSoft, Inc (Кембридж, штат Массачусетс, США), которая постоянно выпускает ее новые и новые версии.

Лабораторная работа №1. Основы работы с MathCAD

Пользовательский интерфейс системы создан так, что пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Windows-приложениями, может сразу начать работать с MathCAD.

Под интерфейсом понимается не только легкое управление системой, как с клавишного пульта, так и с помощью мыши, но и просто набор необходимых символов, формул, текстовых комментариев с последующим запуском документов (Worksheets) в реальном времени.

Запустив систему MathCAD из Windows, вы увидите на экране диалоговое окно, первоначально пустое (Рис.1.1).

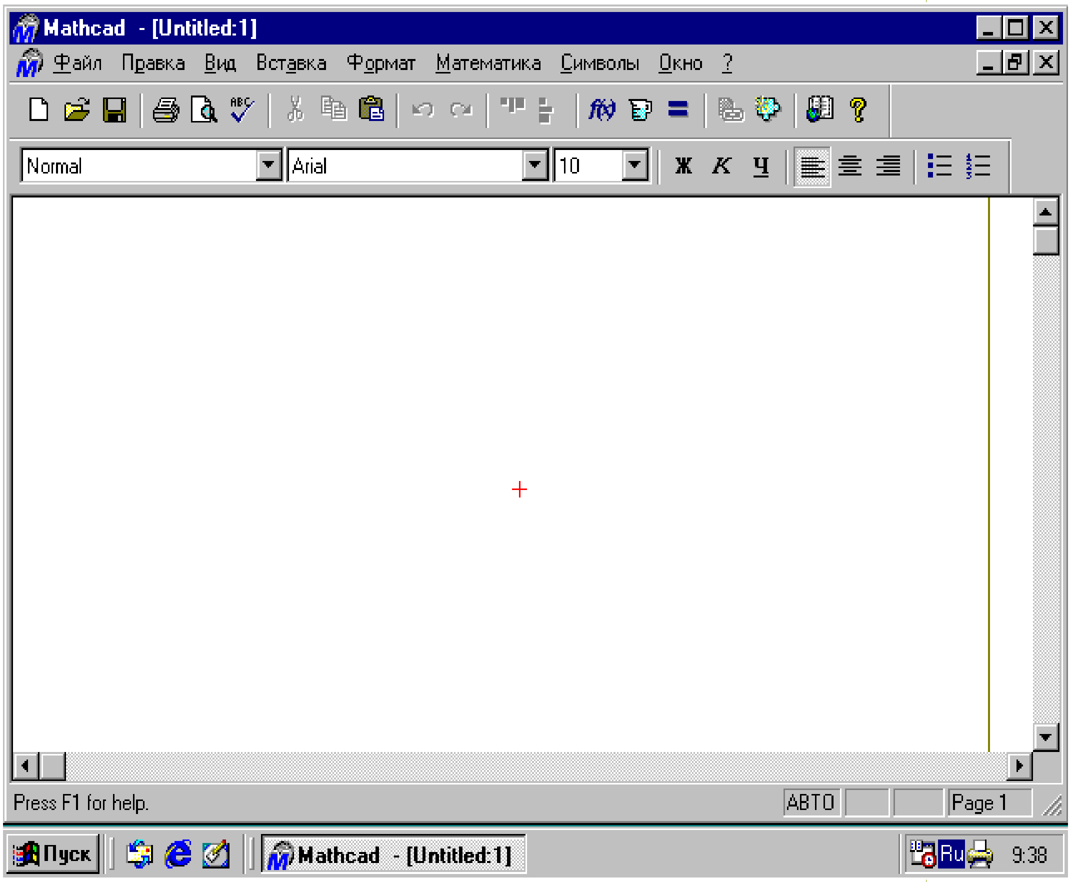


Рис.1.1

Над ним видна строка с основными элементами интерфейса. Опции главного меню, содержащиеся в этой строке, легко изучит самостоятельно; некоторые из них очень похожи на стандартные опции, принятые в текстовых редакторах Windows.

MathCAD работает с *документами*. С точки зрения пользователя, документ - это чистый лист бумаги, на котором можно размещать блоки трех основных типов: математические выражения, текстовые фрагменты и графические области.

Расположение нетекстовых блоков в документе имеет принципиальное значение - *слева направо и сверху вниз.*

Работа с документами MathCAD не требуют обязательного использования возможностей главного меню, так как основные из них дублируются кнопками быстрого управления, которые расположены в удобных перемещаемых с помощью мыши наборных панелях – палитрах. Наборные панели появляются в окне редактирования документов при активизации кнопок – пиктограмм. Они служат для вывода заготовок – шаблонов математических знаков (цифр, знаков арифметических операций, матриц, знаков интеграла, производных, приделов и др.). Указатель мыши подводим к “Вид” в главном меню, щелкаем левой кнопкой мыши; указатель подводим к “Панели инструментов” и щелкаем левой кнопкой мыши; Выпадает следующее меню. Указатель мыши подводим к “Математика” и щелкаем левой кнопкой мыши. Выпадают наборные панели. (Рис. 1.2)

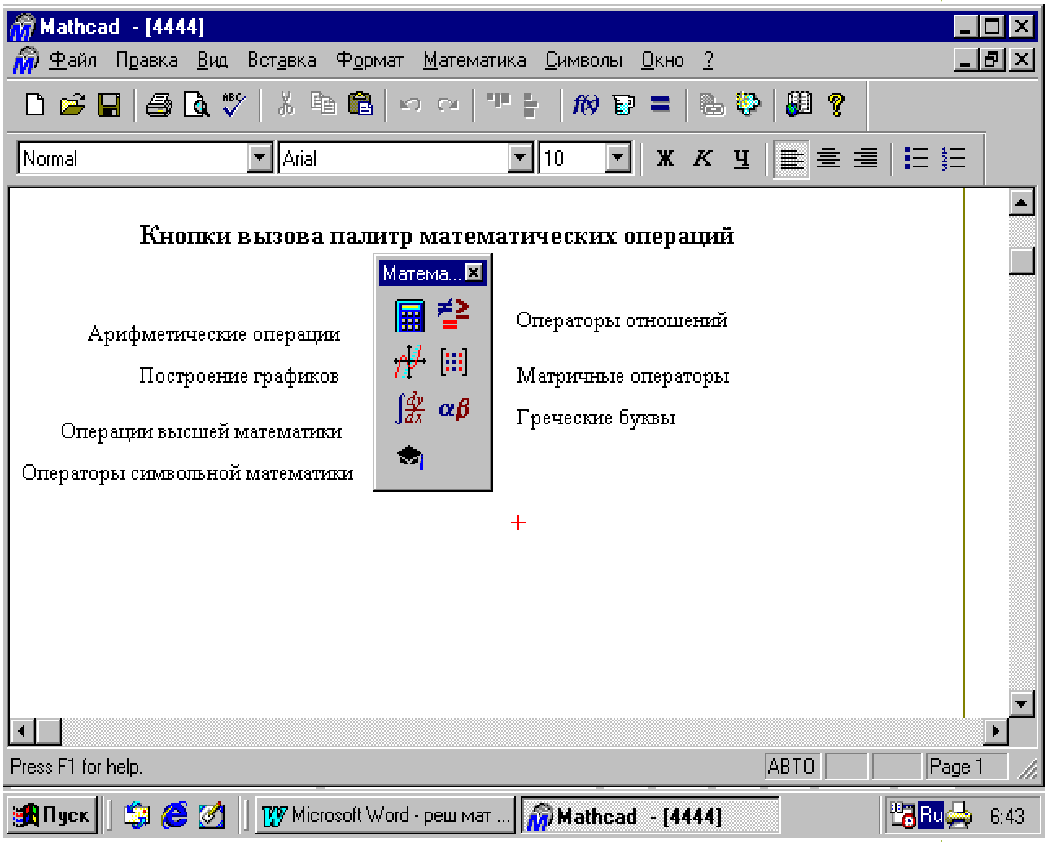


Рис.1.2

Математические выражения

К основным элементам математических выражений MathCAD относятся *типы данных*, *операторы*, *функции* и *управляющие структуры* (Приложение 1).

Операторы

Операторы - элементы MathCAD, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т.д.

Оператор определяет:

- действие, которое должно выполняться при наличии тех или иных значений операндов;
- сколько, где и какие операнды должны быть введены в оператор.

Операнд - число или выражение, на которое действует оператор. Например, в выражении **5! + 3** число **3** и выражение **5!** - операнды оператора + (плюс), а число **5** операнд оператора факториал (!). После указания *операндов* операторы становятся исполняемыми по документу блоками. В Приложении 2 данного пособия приведен список наиболее часто используемых операторов.

Типы данных

К *типам данных* относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Константами называют поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены.

Переменные являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Имена констант, переменных и иных объектов называют *идентификаторами*. Идентификаторы в MathCAD представляют собой набор латинских или греческих букв и цифр.

В MathCAD содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать *системными переменными*, имеющими предопределенные системой начальные значения (Приложение 2). Изменение значений системных переменных производят во вкладке **Встроенные переменные** диалогового окна **Math Options** команды **Математика □ Опции.**

Обычные переменные отличаются от системных тем, что они должны быть предварительно *определены* пользователем, т. е. им необходимо хотя бы однажды *присвоить значение*. В качестве *оператора присваивания* используется знак **:=**, тогда как знак = отведен для *вывода значения* константы или переменной.

Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора **:=**, вызывается нажатием клавиши **:** (двоеточие) на клавиатуре, такое присваивание называется *локальным*. До этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать. Однако с помощью знака ≡(клавиша ~ на клавиатуре) можно обеспечить *глобальное* присваивание (см. Пример 1 Рис. 1.3).

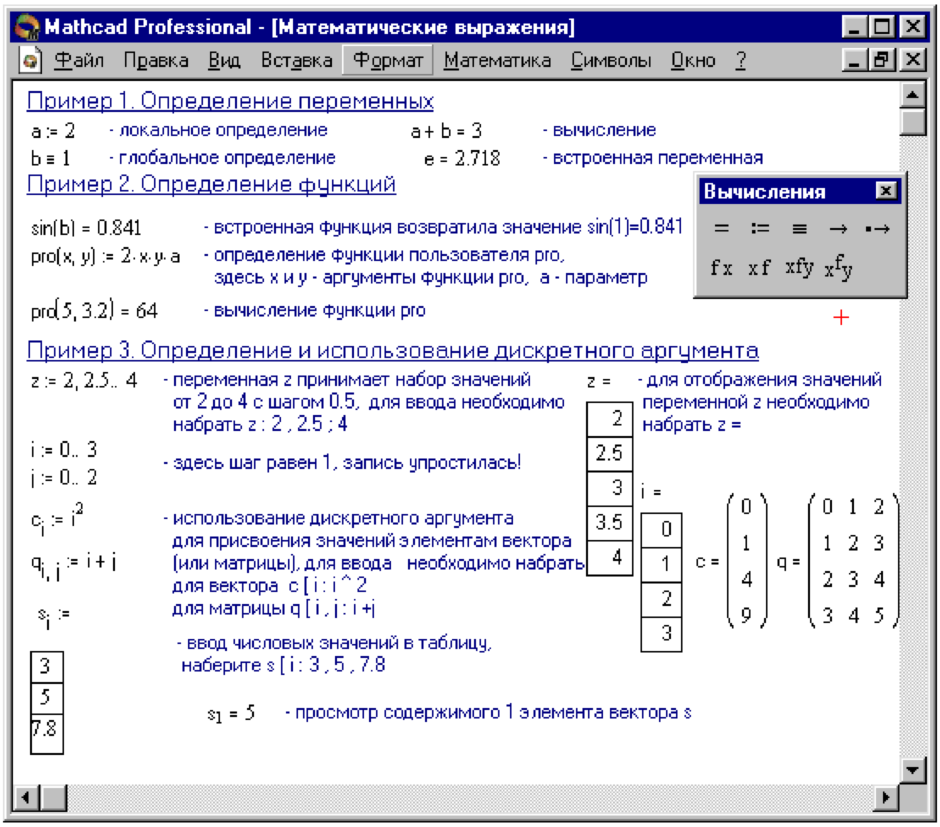


Рис.1.3.

MathCAD прочитывает весь документ дважды слева направо и сверху вниз. При первом проходе выполняются все действия, предписанные локальным оператором присваивания (**≡**), а при втором - производятся действия, предписанные локальным оператором присваивания (**:=**), и отображаются все необходимые результаты вычислений (=).

Существуют также жирный знак равенства **=** (комбинация клавиш **Ctrl +** =), который используется, например, как оператор приближенного равенства при решении систем уравнений, и символьный знак равенства □ (комбинация клавиш **Ctrl + .**).

Дискретные аргументы

Дискретные аргументы - особый класс переменных, который в пакете MathCAD зачастую заменяет **управляющие структуры**, называемые циклами (однако полноценной такая замена не является). Эти переменные имеют ряд фиксированных значений, либо целочисленных (1 способ), либо в виде чисел с определенным шагом, меняющихся от начального значения до конечного (2 способ).

1. *Name* := *Nbegin* .. *Nend*, где *Name* - имя переменной, *Nbegin* - ее начальное значение, *Nend* - конечное значение, **..** - символ, указывающий на изменение переменной в заданных пределах (вводится клавишей **;**). Если *Nbegin* < *Nend*, то шаг переменной будет равен +1, иначе -1.
2. *Name* := *Nbegin*, (*Nbegin* + *Step*) .. *Nend*

Здесь *Step* - заданный шаг изменения переменной (он должен быть положительным, если *Nbegin* < *Nend*, или отрицательным в обратном случае).

Дискретные аргументы значительно расширяют возможности MathCAD, позволяя выполнять многократные вычисления или циклы с повторяющимися вычислениями, формировать векторы и матрицы (Пример 3 Рис. 1).

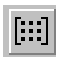
Массив

Массив - имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса. В пакете MathCAD используются массивы двух наиболее распространенных типов:

- одномерные (векторы);
- двумерные (матрицы).

Порядковый номер элемента, который является его адресом, называется *индексом*. Индексы могут иметь только целочисленные значения. Они могут начинаться с нуля или единицы, в соответствии со значением системной переменной **ORIGIN**.

Векторы и матрицы можно задавать различными способами:

- с помощью команды **Вставка** □ **Матрица**, или комбинации клавиш **Ctrl + M**, или щелчком на кнопке  панели **Матрица,** заполнив массив пустых полей для не слишком больших массивов;
- с использованием дискретного аргумента, когда имеется некоторая явная зависимость для вычисления элементов через их индексы (Пример 3 Рисунка 3).

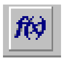
Функции

Функция - выражение, согласно которому проводятся некоторые вычисления с *аргументами* и определяется его числовое значение.

Следует особо отметить разницу между *аргументами* и *параметрами* функции. Переменные, указанные в скобках после имени функции, являются ее *аргументами* и заменяются при вычислении функции значениями из скобок. Переменные в правой части определения функции, не указанные скобках в левой части, являются *параметрами* и должны задаваться *до* определения функции.

Главным признаком функции является *возврат значения*, т.е. функция в ответ на обращение к ней по имени с указанием ее аргументов должна возвратить свое значение.
Функции в пакете MathCAD могут быть *встроенные*, т. е. заблаговременно введенные разработчиками, и *определенные пользователем*.

Способы вставки встроенной функции:

- Выбрать пункт меню **Вставка** **Функция**.
- Нажать комбинацию клавиш **Ctrl + E**.
- Щелкнуть на кнопке 

Текстовые фрагменты

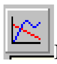
Текстовые фрагменты представляют собой куски текста, которые пользователь хотел бы видеть в своем документе. Существуют два вида текстовых фрагментов:

- *текстовая область* предназначена для небольших кусков текста - подписей, комментариев и т. п. Вставляется с помощью команды **Вставка** **Текстовая регион** или комбинации клавиш **Shift + "** (двойная кавычка);
- *текстовый абзац* применяется в том случае, если необходимо работать с абзацами или страницами. Вставляется с помощью комбинации клавиш **Shift + Enter**.

Графические области

Графические области делятся на три основных типа - двумерные графики, трехмерные графики и импортированные графические образы. Двумерные и трехмерные графики строятся самим MathCAD на основании обработанных данных.

Для создания **декартового графика**:

- Установить визир в пустом месте рабочего документа.
- Выбрать команду **Вставка** **График** **X-У график,** или нажать комбинацию клавиш **Shift + @,** или щелкнуть кнопку  панели **Графики**. Появится шаблон декартового графика.
- Введите в средней метке под осью X первую независимую переменную, через запятую - вторую и так до 10, например $x1$, $x2$, …
- Введите в средней метке слева от вертикальной оси Y первую независимую переменную, через запятую - вторую и т. д., например $y1(x1)$, $y2(x2)$, …, или соответствующие выражения.
- Щелкните за пределами области графика, что бы начать его построение.

Трехмерные, или **3D-графики**, отображают функции двух переменных вида $Z(X, Y)$. При построении трехмерных графиков в ранних версиях MathCAD поверхность нужно было определить математически (Рисунок 2, способ 2). Теперь применяют функцию MathCAD *CreateMesh.*

CreateMesh(*F* (или *G*, или *f*1, *f*2, *f*3), *x*0, *x*1, *y*0, *y*1, *xgrid*, *ygrid*, *fmap*)

Создает сетку на поверхности, определенной функцией *F*. *x*0, *x*1, *y*0, *y*1 - диапазон изменения переменных, *xgrid*, *ygrid* - размеры сетки переменных, *fmap* - функция отображения. Все параметры, за исключением *F*, - факультативные. Функция *CreateMesh* по умолчанию создает сетку на поверхности с диапазоном изменения переменных от -5 до 5 и с сеткой 2020 точек.

Пример использования функции *CreateMesh* для построения 3D-графиков приведен на Рис.1.4, способ 1. На Рис.1.4 построена одна и та же поверхность разными способами, с разным форматированием, причем изображены поверхности и под ними те же поверхности в виде контурного графика. Такое построение способно придать рисунку большую наглядность.

Нередко поверхности и пространственные кривые представляют в виде точек, кружочков или иных фигур. Такой график создается операцией **Вставка □ График □ 3D Точечный**, причем поверхность задается параметрически - с помощью трех матриц (*X*, *Y*, *Z*).

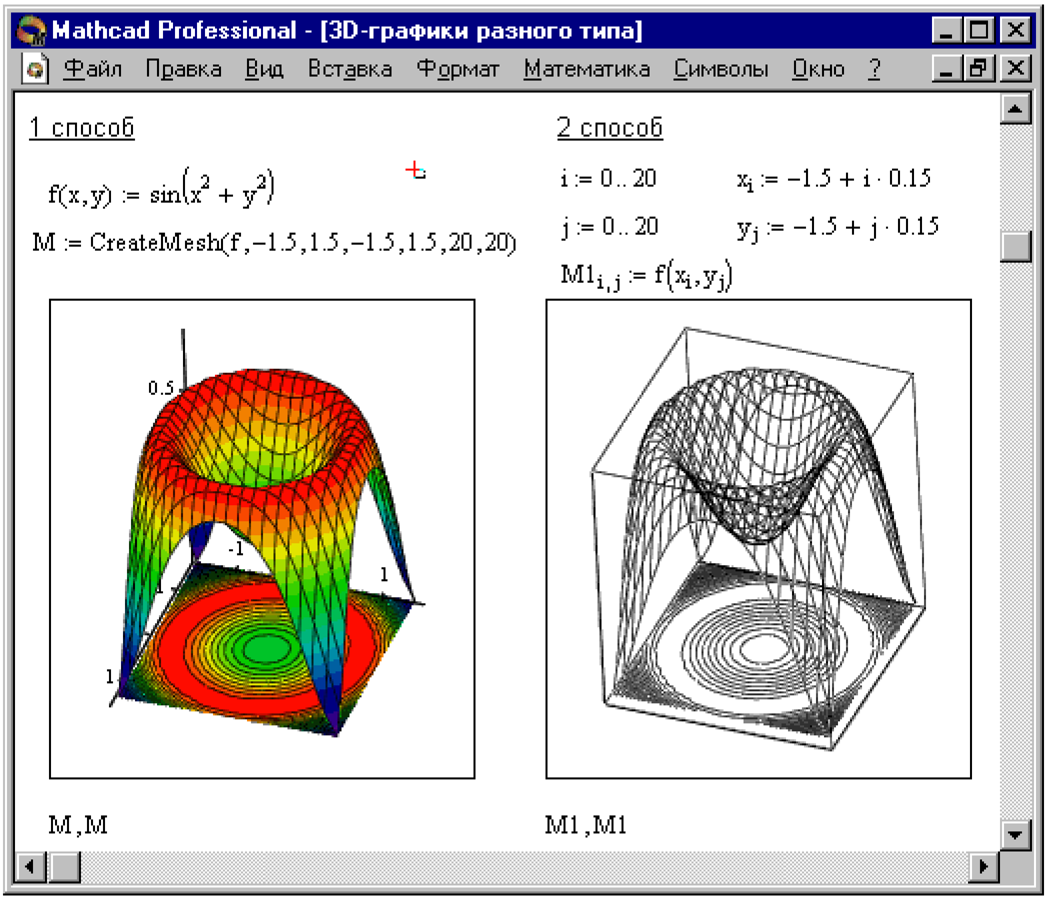


Рис. 1.4.

Для определения исходных данных для такого вида графиков используется функция *CreateSpace* (см. Рис.1.5, способ 1).

CreateSpace (*F* , *t*0, *t*1, *tgrid*, *fmap*)

Возвращает вложенный массив трех векторов, представляющих *x*-, *y*-, и *z*-координаты пространственной кривой, определенной функцией *F*. *t*0 и *t*1 - диапазон изменения переменной, *tgrid* - размер сетки переменной, *fmap* - функция отображения. Все параметры, за исключением *F*, - факультативные.

Построение пересекающихся фигур

Особый интерес представляет собой возможность построения на одном графике ряда разных фигур или поверхностей с автоматическим учетом их взаимного пересечения. Для этого надо раздельно задать матрицы соответствующих поверхностей и после вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы под ним с использованием в качестве разделителя запятой (Рис.1.6).

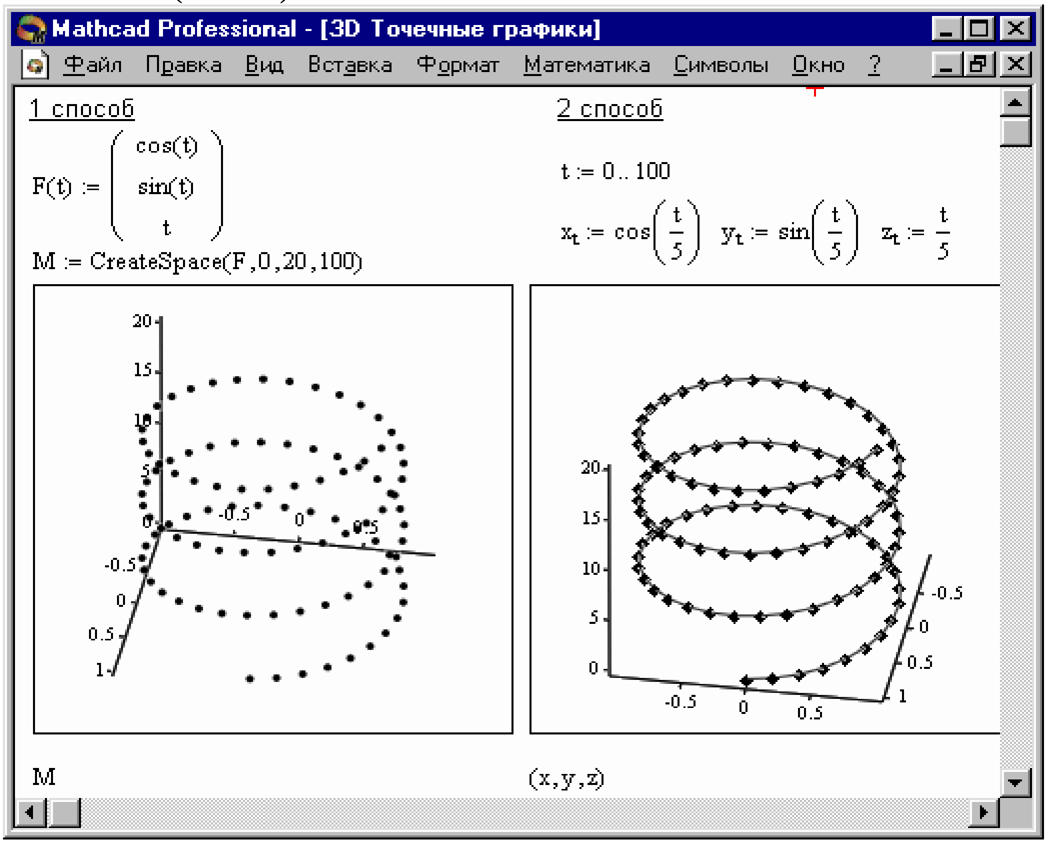


Рис.1.5.

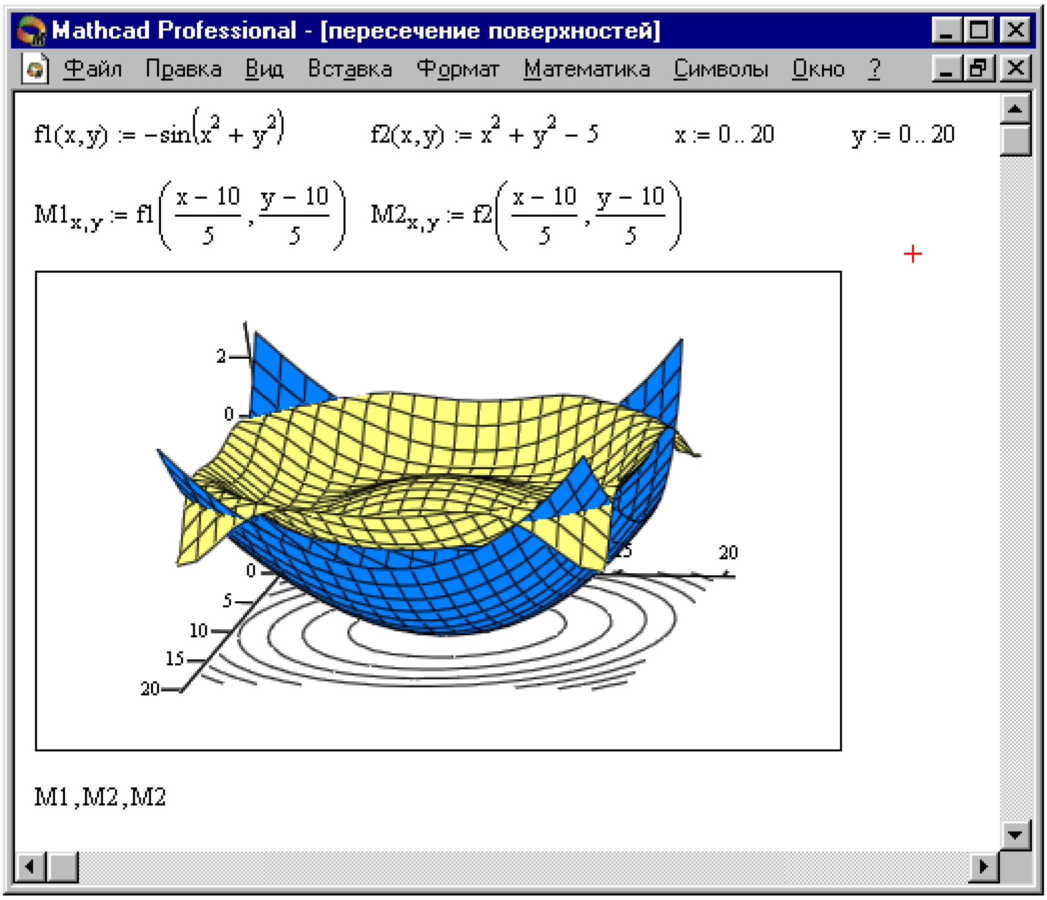


Рис.1.6.

Создание анимационного клипа

MathCAD имеет встроенную переменную FRAME, чье единственное назначение - управление *анимациями*:

- Создайте объект, чей вид зависит от FRAME.
- Убедитесь, что установлен режим автоматического расчета (**Математика** □ **Автоматическое Вычисление**).
- Выберите **Вид** □ **Анимация** для вызова одноименного диалогового окна.
- Заключите в выделяющий пунктирный прямоугольник часть рабочего документа, которую нужно анимировать.
- Установите нижние и верхние границы FRAME (поля **От:** и **До:**).
- В поле **Скорость** введите значение скорости воспроизведения (кадров/сек).
- Выберите **Анимация**. Сейчас анимация только создается.
- Сохраните анимацию как AVI файл (**Сохранить как**).
- Воспроизведите сохраненную анимацию **Вид** □ **Воспроизведение.**

Порядок выполнения лабораторной работы 1

Упражнение 1.

Войдите в MathCAD

1.Поиграйте красным крестиком на экране, переместите его курсором по экрану. Введите любой символ. Появится рамка - шаблон. Нажав на клавишу мыши, выделите участок с рамкой, нажмите кнопку с ножницами на панели инструментов. Шаблон исчезнет.

2.Рассмотрите в верхней части экрана меню с двумя группами команд.

Выведите панели инструментов. Для этого нажав мышью кнопку команды **View** (вид), выведите подменю с рядом подкоманд. Если около кнопок с надписями **Toolbar** (инструментальная панель), **Mathpallete** (математическая панель) и **Formatbar (**панель форматирования) не стоит галочка, нажмите на них и этим выведите на экран эти панели.

3. Освойте перемещение панелей по экрану и их преобразование в строки меню.

Упражнение 2. Элементарные вычисления в MathCAD

Все формулы в MathCAD набираются только в латинском алфавите, поэтому, прежде чем начинать работу, перейдите на английский язык.

1. Выведите показанную на рис.1.7 математическую панель (если она не выведена)

Рис.1.7. Математическая панель Маткада

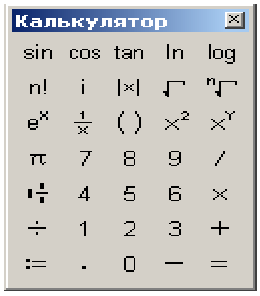


Рис.1.8. Панель калькулятора

Нажмите кнопку с изображением калькулятора. Появится показанная на рис.1.5 панель калькулятора. На ней имеется ряд кнопок, например, таких как

n!(факториал n),
тригонометрических функций (**tan, sin, cos**),
логарифмов (**ln, log**) ,
цифры и знаки =, +, -,
:= (присвоение).

Следует различать кнопки := (присвоение) и = (равно).

Здесь же находятся кнопки X^2, X^y , служащие для возведения в степень, кнопки вычисления корня, нахождения модуля.

Арифметические действия в MathCAD можно совершать, вводя знаки операций с клавиатуры или с панели калькулятора. Знак умножения в MathCAD - точка, но набирается он на клавиатуре знаком *. Деление набирается клавишей /,

Если в процессе решения задачи происходит нарушение грамматики MathCAD, то все содержание шаблона окрашивается в красный цвет и появляется разъяснение ошибки. К сожалению, часто на хорошем английском языке.

А) Вычислить 4! (факториал числа четыре).
Нажмем кнопку «n!». На экране, в том месте, где расположен крестик, появится шаблон: прямоугольная рамка, внутри которой расположен черный прямоугольник со знаком
«!». Подведя курсор к этому прямоугольнику, введем мышью или с клавиатуры число 4 и нажмем кнопку « = » на клавиатуре или на панели вычислений. Мгновенно высветится ответ. Зачерненная точка рядом с ответом служит для вставки размерности, пока мы ею не пользуемся.

Б) Вычислить логарифм натуральный от 25.
Аналогично предыдущему, нажмем на панели калькулятора кнопку «ln», внутри появившихся кнопок вставим число 25 и, нажав «=», получим ответ.
Аналогично вычисляются sin, cos, tg любого угла в радианах, десятичный логарифм log, модуль числа.

В) Вычислить e^{25} . Нажмем на панели калькулятор кнопку «e^x». В появившемся зачерненном прямоугольнике верхнего индекса наберем число 25, нажмем «=.»
Большую роль в наборе чисел играет расположение уголка. На экране – он голубого цвета. Например (Рис.1.9), если уголок расположен, как показано в левой части рисунка, то любые знаки операций (сложение, вычитание и т.п.) будут добавляться к показателю степени, если же уголок расположен, как показано в правой части рисунка, то они будут добавляться ко всему выражению**.**

Рис.1.9. Влияние расположения уголка на вычисления в MathCAD

Г) Вычислить два выражения:

$$e^{15} + \sqrt{47 + 56^6 + \sin(0.6)}$$

Выражения отличаются тем, что в первом случае корень извлекается из трех слагаемых, а во втором случае только из числа 47.

$$e^{15} + \sqrt{47} + 56^6 + \sin(0.6)$$

Для набора первого выражения наберем e^{15}, как это было объяснено в предыдущем примере и, добившись того, чтобы уголок обнимал всю степень, нажмем +. После этого нажмем кнопку $\sqrt{\blacksquare}$ калькулятора, введем число 47 , добьемся, чтобы уголок «обнимал» только число 47 и продолжим набор выражения. Для набора 56^6 наберем сначала 56, затем нажмем на панели калькулятор кнопку X^y и введем показатель степени 6.

При наборе второго выражения уголок после ввода числа 47 должен «обнимать» как число 47, так и корень. Остальной набор не отличается от первого примера.

Д) Вычислить $\dfrac{5*|-6|+4}{8^2}$ **дробь**

При решении задачи знак модуля вводится с панели калькулятора, а дробь – с кнопки клавиатуры / (нижний правый угол клавиатуры)

$$\frac{5\cdot|-6| + 4^5}{8^2} = 16.469$$

Упражнение 3. Вычислить:

$\sqrt{100} =$ |-10| = 10! = .

Это и все остальные задания снабдить комментариями, используя команду **Вставка ⇒ Текстовая область**.

Упражнение 4. Определить переменные: $a := 3.4$, $b := 6.22$, $c \equiv 0.149$ (причем переменную *c* - глобально) и выражения:

$$Z := \frac{2ab + \sqrt[3]{c}}{\sqrt{\left(a^2 + b^{a+c}\right)\cdot c}} \qquad N := e^{\sin c}\cos\frac{a}{b}.$$

- Вычислить выражения.
- С помощью команды **Формат⇒Результат⇒Формат чисел⇒Число знаков** изменить точность отображения результатов вычисления *глобально*.

Упражнение 5. Вычислить: $10x^2 - 5y^2$, при x=1,5 и y=-1,6.

Решение. На экране набираем; с клавиатуры набираем знак =, компьютер сам поставит знак :=.

x: =1.5 y: =-1.6

$10\cdot x^2 - 5\cdot y^2 =$

рядом со знаком равенства читаем ответ : 9.7.

Упражнение 6. Вычислите: $\dfrac{36^{-1/2}}{27^{1/3} - 81^{1/4}\cdot 5}$.

Решение. На экране набираем искомый пример. Ставим знак равенства и читаем ответ:

- 0. 014.

Вычисление функций

Все вычисления в MathCAD можно производить, набирая их на клавиатуре, или с помощью **окна встроенных функций**. Простые выражения типа вычисления функции набираются непосредственно на экране.

Упражнение 7. Вычислить функцию $y = 4x^2+5x+3$ для x=1,2,…..10.

Решение. Сначала (Рис.1.10) набирается диапазон значений *x* как x:=1,2..10. Тогда

$x := 1, 2 .. 5$

$y(x) := 4\cdot x^2 + 5\cdot x + 8$

x =	y(x) =
1	17
2	34
3	59
4	92
5	133

Рис.1.10. Вычисление многочлена

Здесь:

1) используется знак присвоения «:=» , а не знак « =» ,

2) набирается первое значение x, затем через запятую второе его значение, чем задается шаг вычислений, и, наконец, последнее значение.

Две точки между 2 и 10 набираются нажатием клавиши с русской буквой Ж клавиатуры или кнопки m..n панели матрицы.

Затем, опять-таки через знак присвоения, набирается выражение для y. Причем следует набирать y (x), а не просто y.

Маткад выполняет команды слева направо и сверху вниз. Поэтому выражение для y (x) должно быть расположено справа и несколько ниже выражения «x :=»

После этого следует набрать «x =» (равно, а не присвоить) и появится столбец со всеми значениями x. Так же после нажатия «y (x) =» (y(x) равно) появляется столбец вычисленных значений y(x). Построение диапазона изменения аргумента x называется РАНЖИРОВКОЙ.

Упражнение 8. Вычислить функцию:

$$y = 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 9x + 2$$

для всех значений *x* таких, что

$$x = 0,0.5,1,1.5......3$$

Пояснение. Читатель должен обратить внимание, что автор для повышения его внимания задал излишнее количество данных для ранжировки x. Необходимыми данными, которые и следует вводить, являются: первое значение, второе значение через запятую, последнее значение после двоеточия, вводимого, как указано выше.

Упражнение 9. Вычислить функцию двух переменных

$$z = 3x^2 +4y^2 + 8$$

для значений

$$x= 1,1.5,2.0,....5$$

и для значений

$$y = 0,0.5,1.0,....5$$

Пояснение. Задача решается аналогично предыдущим:

Сначала производится ранжировка обеих независимых переменных x и y.

Затем набирается выражение для функции «z(x,y):=»

После этого набирается «x =» , «y =» и «z(x,y) =»

Упражнение 10. Вывести на экран значение *системной константы* π и установить максимальный формат ее отображения *локально*.

Упражнение 11 . Выполнить следующие операции с комплексными числами:

$Z := -3 + 2i \quad |Z| = \quad Re(Z) = \quad Im(Z) = \quad arg(Z) =$

$\sqrt{Z} = \quad \sqrt{-5} = \quad 2 \cdot Z = \quad Z1 := 1 + 2i \quad Z2 := 3 + 4i$

$Z1 + Z2 = \quad Z1 - Z2 = \quad Z1 \cdot Z2 = \quad Z1/Z2 =$

Упражнение 12. Выполнить следующие операции:

$i := 1 .. 10 \qquad \sum_i i = \qquad \prod_i (i+1) = \qquad \int_0^{0.4} x^2 \cdot \lg(x+2)dx = \qquad \int_{0.8}^{1.2} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{(\sin 2x)^2} dx =$

$x := 2 \qquad \frac{d}{dx} x^5 = \qquad \frac{d}{dx} \sin(x) =$

Упражнение 13. Определить векторы *d*, *S* и *R* через дискретный аргумент *i*. Отобразить графически таблично заданные функции $S_i(d_i)$ и $R_i(d_i)$, используя команду **Вставка⇒График⇒X-Y Зависимость**. Чтобы оформить график, необходимо выполнить следующие команды:

i	d_i	S_i	R_i
0	0.5	3.3	2
1	1	5.9	3.9
2	1.5	7	4.5
3	2	6.3	3.7
4	2.5	4.2	1.2

- Щелкнуть левой клавишей мыши на графике, чтобы выделить его. Затем щелкнуть правой клавишей мыши, при этом появится контекстное меню в котором необходимо выбрать команду **Формат** (появится диалоговое окно **“Formatting Currently Selected X-Y Plot”).**
- Нанести линии сетки на график (**Оси X-Y ⇒Вспом. линии**) и отобразить легенду (**След⇒Скрыть легенду**)
- Отформатировать график так, чтобы в каждой узловой точке графика функции $S_i(d_i)$ стоял знак вида (**След⇒Символ⇒box**), а график функции $R_i(d_i)$ отобразить в виде гистограммы (**След⇒Тип⇒bar**).

Упражнение 14. Построить декартовы (**X-Y Зависимость**) и полярные (**Полярные Координаты**) графики следующих функций:

$X(\alpha) := \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

$Y(\alpha) := 1.5\cos(\alpha)^2 - 1$

$P(\alpha) := \cos(\alpha).$

Для этого необходимо определить α как дискретный аргумент на интервале от 0 до 2·π с шагом π/30.

Определить по графику **X-Y Зависимость** координаты любой из точек пересечения графиков $Y(\alpha)$ и $P(\alpha)$, для этого необходимо:

- Выделить график и выбрать из контекстного меню **Масштаб** (появится диалоговое окно **“X-Y Zoom”**) для увеличения части графика в области точки пересечения.
- На чертеже выделить пунктирным прямоугольником окрестность точки пересечения графиков $Y(\alpha)$ и $P(\alpha)$, которую нужно увеличить.
- Нажать кнопку **Масштаб+**, чтобы перерисовать график.
- Чтобы сделать это изображение постоянным, выбрать ОК.
- Выбрать из контекстного меню Трассировка (появится диалоговое окно “X-Y Trace”).
- Внутри чертежа нажать кнопку мыши и переместить указатель мыши на точку, чьи координаты нужно увидеть.
- Выбрать **Copy X** (или **Copy Y**), на свободном поле документа набрать *Xper* := (или *Yper* :=) и выбрать пункт меню **Правка⇒Вставка.**

Вычислить значения функций $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ при $\alpha := \pi/2$.

Упражнение 15. Используя команду **Вставка⇒Матрица** создать матрицу *Q* размером 6×6, заполнить ее произвольно и отобразить графически с помощью команды **Вставка⇒График⇒Поверхности**.

Упражнение 16. Построить график поверхности (**Поверхности**) и карту линий уровня (**Контурный**) для функции двух переменных
$X(t,\alpha) := t \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$, двумя способами:

1. С помощью функции *CreateMesh* (сетка размером 40 × 40, диапазон изменения *t* от –5 до 5, α - от 0 до 2·π).
2. Задав поверхность математически, для этого:

- Определить функцию $X(t,\alpha)$
- Задать на осях переменных *t* и α по 41 точке

i:=0..40 j:=0..40
для переменной t_i со значениями, изменяющимися от -5 до 5 с шагом 0.25 t_i := -5 + 0.25 · *i*, а для переменной α_j - от 0 до 2·π с шагом π/20 α_j := π/20 · *j*.

- Определить матрицу $M_{i\ j} := X(t_i,\alpha_j)$ и отобразить ее графически.

С помощью команды **Формат** контекстного меню вызвать диалоговое окно **"Формат 3-D графика"** и изменить:

- характеристики просмотра (**Общее⇒Вид⇒Вращение, Наклон**),
- цвета и линии поверхности (**Внешний Вид⇒Свойства линии, Свойства заливки**),
- параметры осей (**Оси**),
- вид заголовка графика (**Название**).

Упражнение 17. Отобразить графически пересечение поверхностей $f1(x,y) := \frac{(x+y)^2}{10}$ и $f2(x,y) := 5 \cdot \cos\left(\frac{x-y}{3}\right)$. Матрицы для построения поверхностей задать с помощью функции *CreateMesh*, значения факультативных параметров не указывать. Выполнить однотонную заливку для поверхностей, выбрав из контекстного меню команду **Формат**. Также из контекстного меню выбрать эффекты **Туман**, **Освещение, Перспектива**.

Упражнение 18. Используя переменную **FRAME** и команду **Вид ⇒ Анимация**, создать анимационные клипы с помощью данных приведенных в Таблице 1.

Таблица 1

№ варианта	Переменные и функции	FRAME	Тип графика
1	*x* := 0, 0.1 .. 30 *f*(*x*) := *x* + FRAME	от 0 до 20	График Полярные Координаты
2	*i* :=0 .. FRAME + 1 g_i :=0.5 · *i* · cos(*i*) h_i :=*i* · sin(*i*) k_i :=2 · *i*	от 0 до 50	3D точечный график границы на осях Min Max *x* - 50 50 *y* - 50 50 *z* 0 50 В метке для ввода матрицы укажите (*g*, *h*, *k*)

№ варианта	Переменные и функции	FRAME	Тип графика
3	$i := 0 .. 20$ $j := 0 .. 20$ $f(x,y) := \sin(x^2 + y^2 + FRAME)$ $x_i := -1.5 + 0.15 \cdot i$ $y_j := -1.5 + 0.15 \cdot j$ $M_{i,j} := f(x_i, y_j)$	от 0 до 50	График Поверхности В метке для ввода матрицы укажите *M*
4	$r := FRAME$ $R := 6$ $n := 0 .. 20$ $m := 0 .. 20$ $v_n := \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{r+1}$ $w_m := \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{r+1}$ $x_{m\ n} := (R + r \cdot \cos(v_n)) \cdot \cos(w_m)$ $y_{m\ n} := (R + r \cdot \cos(v_n)) \cdot \sin(w_m)$ $z_{m\ n} := r \cdot \sin(v_n)$	от 0 до 20	График Поверхности (границы на всех осях установить от -11 до 11) В метке для ввода матрицы укажите (*x*, *y*, *z*)

Контрольные вопросы

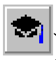
1. С помощью какого оператора можно вычислить выражение?
2. Как вставить текстовую область в документ MathCAD?
3. Чем отличается глобальное и локальное определение переменных?
4. Как изменить формат чисел для всего документа?
5. Как изменить формат чисел для отдельного выражения?
6. Какие системные переменные Вам известны? Как узнать и изменить их значение?
7. Какие виды функций в MathCAD Вам известны?
8. Как вставить встроенную функцию в документ MathCAD?
9. Какие операторы позволяют вычислить интеграл, производную, сумму, произведение?
10. Как определить дискретные переменные с произвольным шагом?
11. Как определить индексированную переменную?
12. Какие виды массивов в MathCAD Вам известны?
13. Какая переменная определяет нижнюю границу индексации элементов массива?
14. Опишите способы создания массивов в MathCAD.
15. Как просмотреть содержимое массива, определенного через дискретный аргумент?
16. Как построить графики: поверхности; полярный; декартовый?
17. Как построить несколько графиков в одной системе координат?
18. Как изменить масштаб графика?
19. Как определить координату точки на графике?
20. Как построить гистограмму?

Лабораторная работа №2. Символьные вычисления

Системы компьютерной алгебры снабжаются специальным процессором для выполнения аналитических (символьных) вычислений. Его основой является ядро, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления. Чем больше этих формул в ядре, тем надежней работа символьного процессора и тем вероятнее, что поставленная задача будет решена, если такое решение существует в принципе (что бывает далеко не всегда).

Ядро символьного процессора системы MathCAD - несколько упрощенный вариант ядра известной системы символьной математики Maple V фирмы Waterloo Maple Software, у которой фирма MathSoft (разработчик MathCAD) приобрела лицензию на его применение, благодаря чему MathCAD стала (начиная с версии 3. 0) системой символьной математики. Символьные вычисления выполняются столь же просто (для пользователя), как вычисление квадрата *x*.

Символьные операции можно выполнять двумя способами:

- Непосредственно в командном режиме (используя операции меню **Символы**);
- С помощью операторов символьного преобразования (используя **палитру инструментов Символы** ).

Выделение выражений для символьных вычисленийЧтобы символьные операции выполнялись, процессору необходимо указать, над каким выражением эти операции должны производиться, т. е. надо выделить выражение. Для ряда операций следует не только указать выражение, к которому они относятся, но и наметить переменную, относительно которой выполняется та или иная символьная операция. Само выражение в таком случае не выделяется.

Таким образом, для выполнения операций с символьным процессором нужно выделить объект (целое выражение или его часть) синими сплошными линиями.
Символьные операции разбиты на пять характерных разделов. Первыми идут наиболее часто используемые операции. Они могут выполняться с выражениями, содержащими комплексные числа или имеющими решения в комплексном виде.

Операции с выделенными выражениями

Если в документе есть выделенное выражение, то с ним можно выполнять различные операции, представленные ниже:

Расчеты - преобразовать выражение с выбором вида преобразований из подменю;
Символические [Shift] F9 - выполнить символьное преобразование выделенного выражения;
С плавающей запятой… - вычислить выделенное выражение в вещественных числах;
Комплексные - выполнить вычисления в комплексном виде;
Упростить - упростить выделенное выражение с выполнением таких операций, как сокращение подобных слагаемых, приведение к общему знаменателю, использование основных тригонометрических тождеств и т д.;
Расширить - раскрыть выражение [например, для $(X + Y)(X - Y)$ получаем $X^2 - Y^2$];
Фактор - разложить число или выражение на множители [например, $X^2 - Y^2$ даст $(X + Y)(X - Y)$];

Подобные - собрать слагаемые, подобные выделенному выражению, которое может быть отдельной переменной или функцией со своим аргументом (результатом будет выражение, полиномиальное относительно выбранного выражения);

Коэффициенты Полинома - по заданной переменной найти коэффициенты полинома, аппроксимирующего выражение, в котором эта переменная использована.

Операции с выделенными переменными

Для ряда операций надо знать, относительно какой переменной они выполняются. В этом случае необходимо выделить переменную, установив на ней маркер ввода. После этого становятся доступными следующие операции подменю **Переменные**:

Вычислить - найти значения выделенной переменной, при которых содержащее ее выражение становится равным нулю;

Замена - заменить указанную переменную содержимым буфера обмена;

Дифференциалы - дифференцировать выражение, содержащее выделенную переменную, по этой переменной (остальные переменные рассматриваются как константы);

Интеграция - интегрировать все выражение, содержащее переменную, по этой переменной;

Разложить на составляющие... - найти несколько членов разложения выражения в ряд Тейлора относительно выделенной переменной;

Преобразование в Частичные Доли - разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной.

Операции с выделенными матрицами

Операции с выделенными матрицами представлены позицией подменю **Матрицы**, которая имеет свое подменю со следующими операциями:

Транспонирование - получить транспонированную матрицу;

Инвертирование - создать обратную матрицу;

Определитель - вычислить детерминант (определитель) матрицы.

Результаты символьных операций с матрицами часто оказываются чрезмерно громоздкими и поэтому плохо обозримы.

Операции преобразования

В позиции **Преобразование** содержится раздел операций преобразования, создающий подменю со следующими возможностями:

Фурье - выполнить прямое преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

Фурье Обратное - выполнить обратное преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

Лапласа - выполнить прямое преобразование Лапласа относительно выделенной переменной (результат - функция переменной s);

Лапласа Обратное - выполнить обратное преобразование Лапласа относительно выделенной переменной (результат - функция переменной *t*); **Z** - выполнить прямое Z-преобразование выражения относительно выделенной переменной (результат - функция переменной *z*);

Обратное Z - выполнить обратное Z-преобразование относительно выделенной переменной (результат - функция переменной *n*) .

Стиль представления результатов вычислений

На наглядность вычислений влияет стиль представления их результатов. Следующая команда позволяет задать тот или иной стиль:

Стиль Вычислений... - задать вывод результата символьной операции под основным выражением, рядом с ним или вместо него (Рис.2.1).

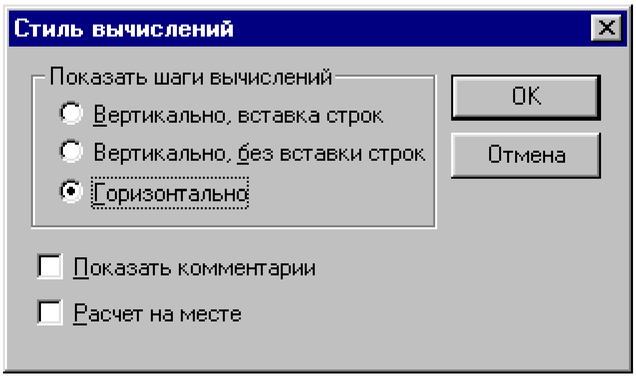


Рис.2.1.

Примеры символьных операций в командном режиме

Большинство символьных операций легко выполняются, так что ниже мы остановимся лишь на некоторых примерах. Символьная операция **Расчеты** обеспечивает работу с математическими выражениями, содержащими встроенные в систему функции и представленными в различном виде: полиномиальном, дробно-рациональном, в виде сумм и произведений, производных и интегралов и т. д. (Рис.2.2).

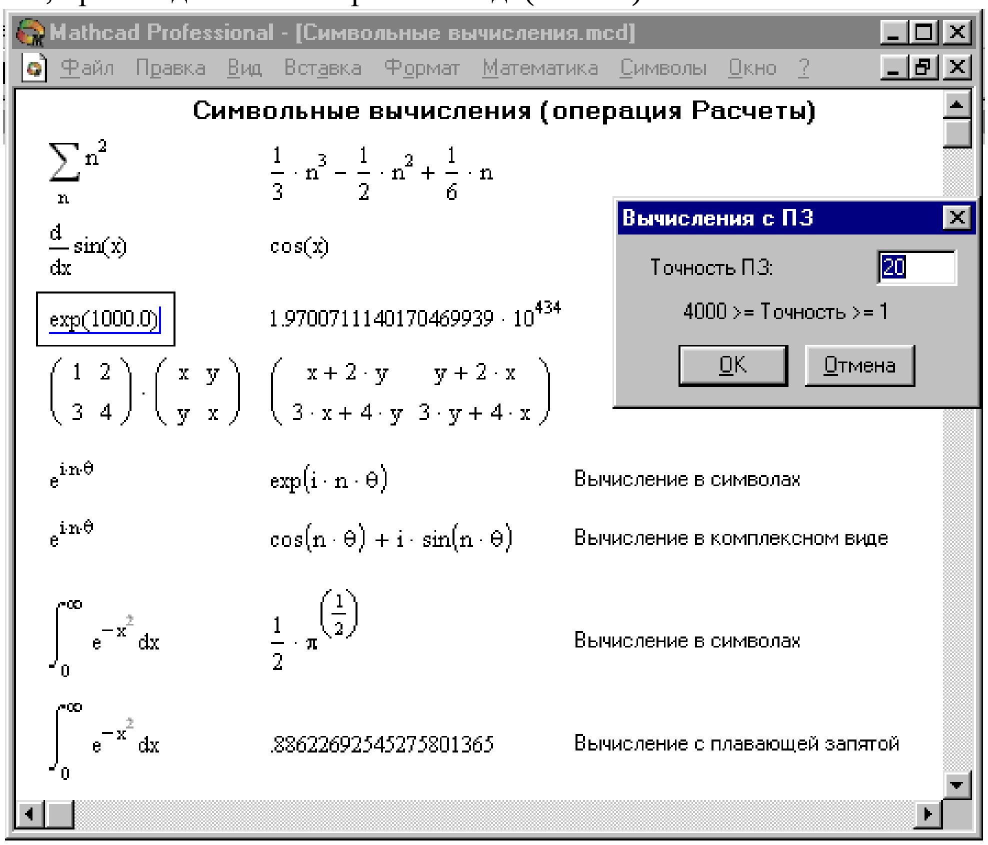


Рис.2.2.

Операция стремится произвести все возможные численные вычисления и представить выражение в наиболее простом виде. Она возможна над матрицами с символьными элементами. Производные и определенные интегралы, символьные значения которых вычисляются, должны быть представлены в своей естественной форме.

В MatCADпредусмотрена возможность выполнения численных вычислений с повышенной точностью - 20 знаков после запятой.

Для перехода в такой режим вычислений нужно числовые константы в вычисляемых объектах задавать с обязательным указанием десятичной точки, например 10.0 или 3.0, а не 10 или 3. Этот признак является указанием на проведение вычислений такого типа.

На Рис.2.2 показаны типовые примеры действия операции **Расчеты.**

Здесь слева показаны исходные выражения, подвергаемые символьным преобразованиям, а справа - результат этих преобразований.

Операция **Расчеты** одна из самых мощных.

Как видно из Рис.2.2., она позволяет в символьном виде вычислять суммы (и произведения) рядов, производные и неопределенные интегралы, выполнять символьные и численные операции с матрицами.

Эта операция содержит подменю.

Команда **Символические** тут наиболее важная. Назначение других команд очевидно: они нужны, если результат требуется получить в форме комплексного или действительного числа.

К примеру, если вы хотите вместо числа получить 3.141..., используйте команду **С плавающей запятой….** В режиме символьных вычислений результат может превосходить машинную бесконечность системы - см. пример на вычисление exp(1000.0) на Рис.2.2. При этом число точных значащих цифр результата практически не ограничено (или, точнее говоря, зависит от емкости ОЗУ).

Операция **Разложить на составляющие...** возвращает разложение в ряд Тейлора выражения относительно выделенной переменной с заданным по запросу числом членов ряда *n* (число определяется по степеням ряда).

По умолчанию задано $n = 6$.

В разложении указывается остаточная погрешность разложения. На Рис.2.3 представлено применение этой операции для разложения функции

$$\frac{\sin(x)}{x}.$$

Минимальная погрешность получается при малых *x* (см. графическое представление функции и ее ряда).

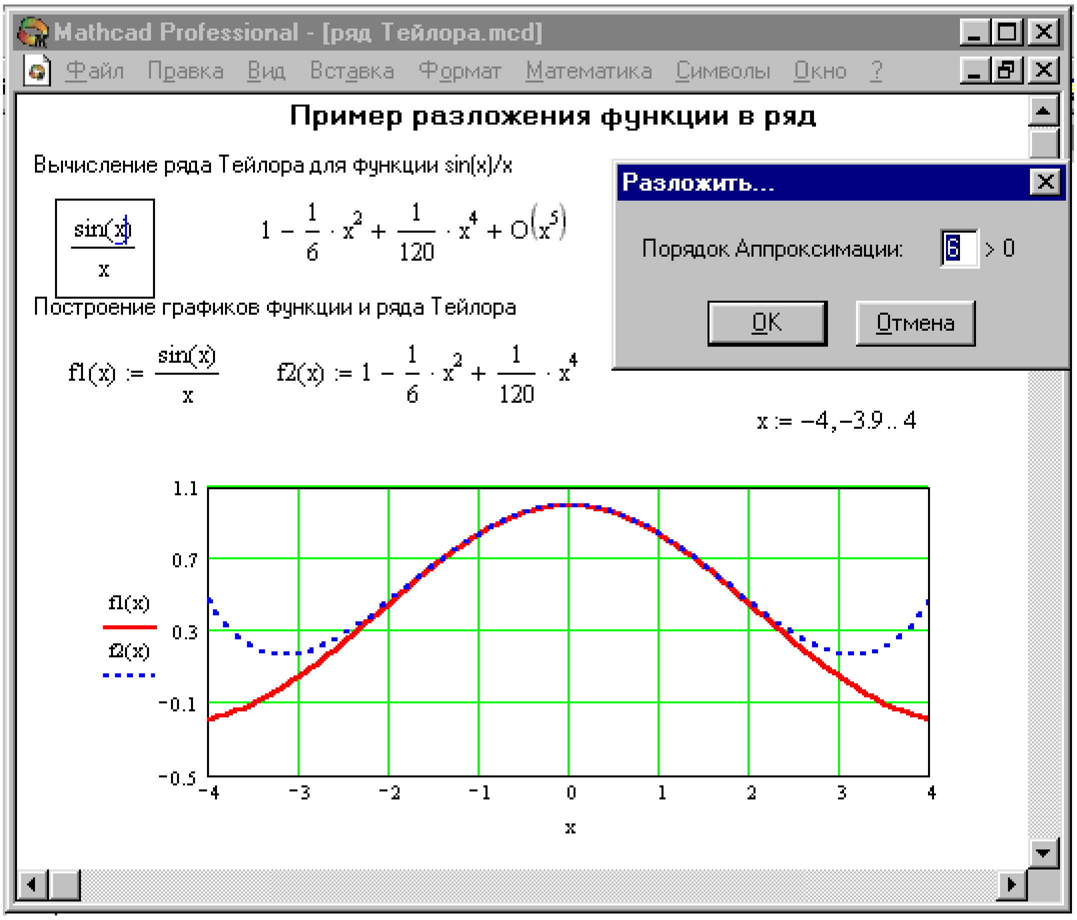


Рис.2.3.

Операторы вычисления пределов функций

Для вычисления пределов функций в систему введен символьный оператор limit.

Помимо ввода с наборной панели **Матанализ,** его в трех формах можно ввести нажатием следующих комбинаций клавиш:

[Ctrl] L - ввод шаблона оператора вычисления предела функции при *x*, стремящемся к заданному значению,

[Ctrl] A - ввод шаблона вычисления предела функции слева от заданной точки,

[Ctrl] B - ввод шаблона вычисления предела функции справа от заданной точки.

На Рис.2.4 показаны примеры вычисления пределов. При вычислении пределов нужно заполнить шаблоны, входящие в главный шаблон для вычисления пределов, а затем ввести функцию, имя переменной, по которой ищется предел, и значение переменной - аргумента функции.

Для получения результата установите после блока вычисления предела стрелку с острием, направленным вправо.

Предел (если он существует) будет вычислен и появится в шаблоне у острия стрелки.

Если функция не имеет предела, вместо результата появится надпись *Undefine*.

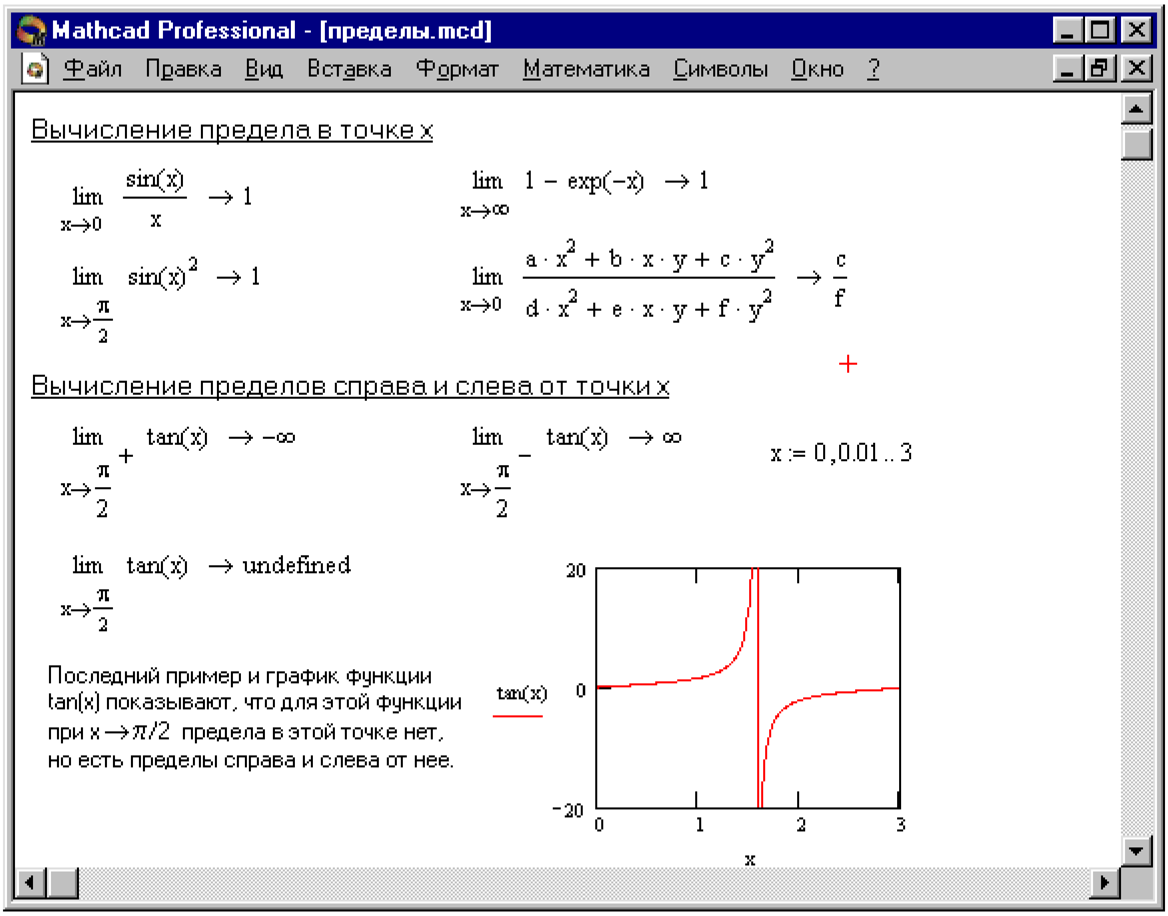


Рис.2.4.

Задание операторов пользователя

Еще одна экзотическая возможность, присущая новым версиям системы MathCAD, - задание новых операторов пользователя. Такой оператор задается практически так же, как функция пользователя, но вместо имени выбирается какой-либо подходящий знак. Например, можно задать оператор деления в виде:

$\div(A,B) := \frac{A}{B}$	$\div(6,2) = 3$	$6 \div 2 = 3$
задание нового оператора деления	применение функции деления	применение нового оператора деления.

При кажущейся простоте такого задания здесь есть проблемы. Встроенные в систему операторы нельзя переопределить. Поэтому набор доступных знаков для обозначения новых операторов ограничен. Нельзя задать новый оператор деления знаком / (он уже использован), но можно взять знак ÷ поскольку этот символ системой не используется.

Вторая проблема связана с вводом символа нового оператора - напрямую его ввести нельзя. Придется воспользоваться типовыми приемами ввода новых символов в документы Windows. Один из этих приемов - использование приложения, выдающего таблицу символов, с возможностью его экспорта из этой таблицы в документ другого приложения.

Можно также воспользоваться подходящим знаком из набора MATH SYMBOL, имеющегося в составе Шпаргалок, доступ к которым дает Ресурс Центр (**Ресурс Центр □ Справочный стол и краткое руководство □ Дополнительные математические символы**). На Рисунке 8 показан такой вариант задания нового оператора пользователя. Для перетаскивания знака можно скопировать его в буфер обмена с помощью операции **Копировать**, а затем ввести в документ, используя операцию **Вставка.**

После того как оператор задан, его можно использовать, как функцию и как оператор. Примеры показаны на Рис.2.5.

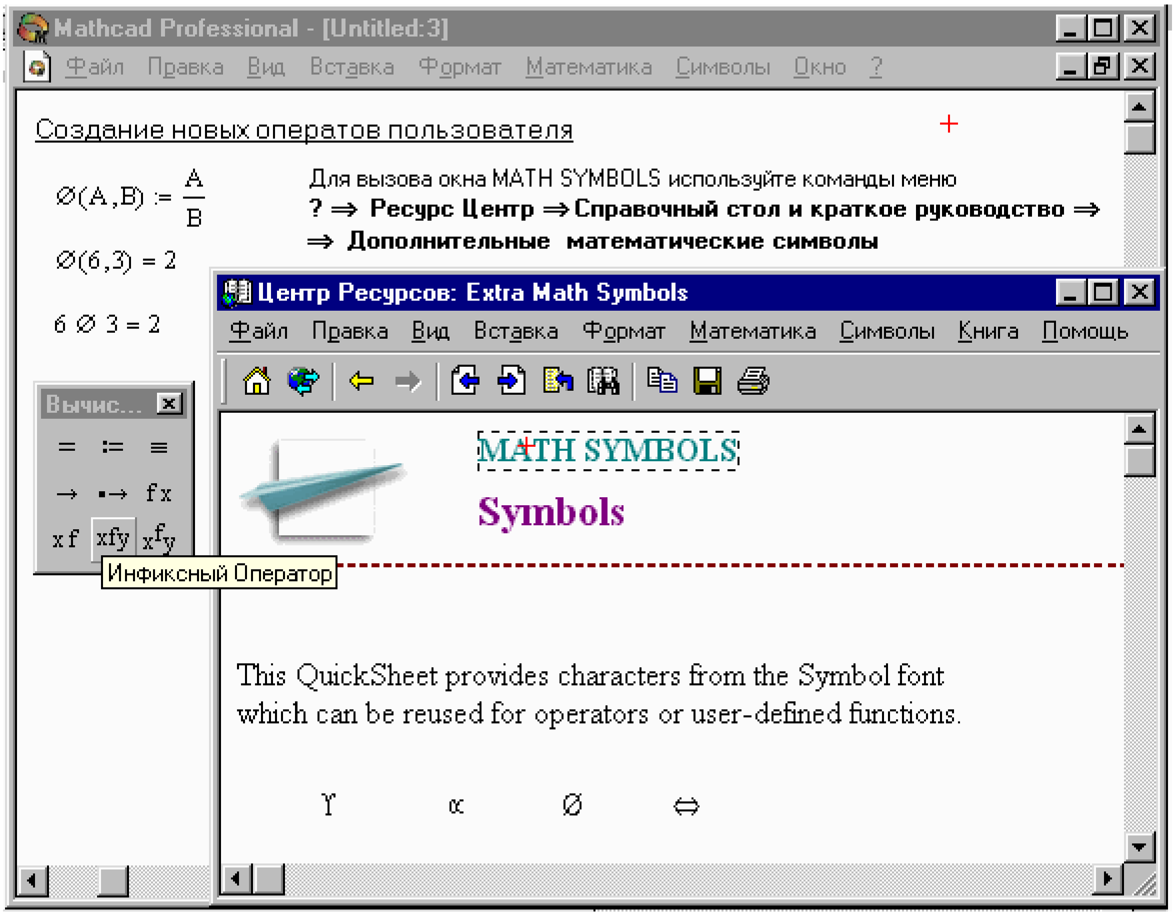


Рис.2.5.

Для применения нового оператора надо вывести его шаблон с помощью панели математических знаков (она также показана Рис.2.5).

В нашем случае следует нажать кнопку xfy этой панели - она выводит особый шаблон вида □ □ □ . Введите операнды, например 6 и 3 в крайние прямоугольники, а символ оператора - в средний. Поставив после этой конструкции знак равенства, увидите результат - число 2.

Можно задать и другие операторы, например, для работы с одним операндом. Так, вы можете задать оператор для пересчета значения температуры по шкале Цельсия, с тем чтобы определить соответствующее ему значение по шкале Фаренгейта, следующим образом

$$°C(x) := \frac{9}{5} \cdot x + 32 \qquad °F := 1$$

Затем, используя кнопку x f наборной панели символов отношения, можно выполнять операцию пересчета в виде.

$37\,°C = 98.6\,°F$

Есть области математики и физики, где задание новых операторов необходимо, поскольку является частью специфического языка их описания.

Порядок выполнения работы

Упражнение 1. Используя операцию **Символы □ Расчеты □ С плавающей запятой…**, представьте:

1. число □ в 7 позициях;
2. число 12, 345667 в 3 позициях.

Упражнение 2. Выведите следующие числа в комплексной форме, используя операцию **Расчеты □ Комплексные** меню **Символы**:

1. $\sqrt{-7}$;
2. tg (a $\sqrt{-3}$);
3. $e^{1+\frac{\pi}{4}i}$;
4. для выражения 3) последовательно выполните операции **Расчеты □ Комплексные** и **Упростить** меню **Символы.**

Упражнение 3. Для полинома $g(x)$ (см. Таблица 1) выполнить следующие действия:

1. разложить на множители, используя операцию **Символы □ Фактор;**
2. подставьте выражение $x = y + z$ в $g(x)$, используя операцию **Символы □ Переменные □ Замена** (предварительно скопировав подставляемое выражение в буфер обмена, выделив его и нажав комбинацию клавиш **Ctrl + C**);
3. используя операцию **Символы □ Расширить,** разложите по степеням выражение, полученное в 2)**;**
4. используя операцию **Символы □ Подобные,** сверните выражение, полученное в 3), по переменной *z***.**

Таблица 1

Варианты упражнения 3

№ варианта	g(x)	№ варианта	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x -140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 +36x^2 +70x+ 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x+ 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

Упражнение 4. Разложите выражения на элементарные дроби используя операцию **Символы □ Переменные □ Преобразование в частичные доли:**

$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}$; $\frac{3x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}$; $\frac{5x^2 - 4x + 16}{(x^2 - x + 1)^2 (x - 3)}$; $\frac{x + 1}{x(x - 1)^3}$.

Упражнение 5. Разложите выражения в ряд с заданной точностью, используя операцию **Символы □ Переменные □ Разложить на составляющие:**

1. ln (1 + x), $x_0 = 0$, порядок разложения 6;
2. sin $(x)^2$, $x_0 = 0$, порядок разложения 6.

Упражнение 6. Найти первообразную аналитически заданной функции $f(x)$ (Таблица 4), используя операцию **Символы Переменные Интеграция**.

Упражнение 7. Определить символьное значение первой и второй производных $f(x)$ (Таблица 4), используя команду **Символы Переменные Дифференциалы**.

Таблица 4

Варианты упражнений 6 и 7

№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$
1	$1/(\mathrm{tg}2x+1)$	**6**	$x^2 \ \mathrm{arctg}(x/3)$	**11**	$(2x+3)\sin x$
2	$\cos x/(2x+5)$	**7**	$e^{2x}\sin 3x$	**12**	$\cos 3x/(1-\cos 3x)^2$
3	$1/(x\sqrt{x^3+4})$	**8**	$\mathrm{ctg}2x/(\sin 2x)^2$	**13**	$1/(1+x+x^2)$
4	$\sin x/(1+\sin x)$	**9**	$(x+1)\sin x$	**14**	$(1+x)/(2+x)$
5	$x^2 \ \lg(x+2)$	**10**	$5x + x\lg x$	**15**	$\sqrt{1+e^{-x}}$

Упражнение 8.

1. Транспонируйте матрицу M

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ x & 2 & c \\ x^2 & 3 & d \end{pmatrix}$$

с помощью операции **Символы Матрицы Транспонирование.**

2. Инвертируйте матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 2 \end{pmatrix}$$

с помощью операции **Символы Матрицы Инвертирование.**

3. Вычислите определитель матрицы M

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ x & 2 & c \\ x^2 & 3 & d \end{pmatrix}$$

с помощью операции **Символы Матрицы Определитель**.

Упражнение 9. Вычислите пределы:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2\cdot x+5}{x^2+1} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\cdot\sin(x)-\cos(x)+\mathrm{ctg}(x)) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3}+1}\to 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\to-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{n\to\infty^-}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Упражнение 10. Задайте операторы пользователя:

1.Для пересчета единиц электрической энергии (кВт ч в Дж, эВ в Дж) если известно, что

1 кВт ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж;

1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж.

2.Для пересчета единиц магнитной индукции (Вб/см^2 в Т, Гс в Т) если известно, что

1 Вб/см^2 = $1 \cdot 10^4$ Т;

1 Гс = $1 \cdot 10^{-4}$ Т.

3.Для пересчета единиц мощности (эрг/с в Вт, кгс м/с в Вт) если известно, что

1 эрг/с = $1 \cdot 10^{-7}$ Вт;
1 кгс м/с = 9,80665 Вт.

Контрольные вопросы

1. Назовите способы выполнения символьных операций в MathCAD.
2. Что необходимо сделать с выражением перед применением символьных преобразований в командном режиме?
3. Перечислите символьные операции с выделенными выражениями.
4. Перечислите символьные операции с выделенными переменными.
5. Перечислите символьные операции с выделенными матрицами.
6. Перечислите символьные операции преобразования.
7. Какие параметры определяет стиль представления результатов вычислений и где он задается?
8. В каких случаях результат символьных преобразований помещается в буфер обмена?
9. Как символьно решить уравнение или систему уравнений в MathCAD? Какой знак равенства используется? Какой комбинацией клавиш вставляется в документ?
10. Назовите особенности использования символьного решения уравнений.
11. Каким образом можно вычислить предел в MathCAD?
12. Для чего необходимо задание операторов пользователя?
13. Как задать оператор пользователя?

Лабораторная работа №3. Решение уравнений средствами MathCAD

Известно, что многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Нельзя также построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Однако такие уравнения могут решаться численными методами с заданной точностью (не более значения заданного системной переменной **TOL**).

3.1. Решение нелинейных и трансцендентных уравнений с одной переменной

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (3.1)$$

где $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале:

$$a < x < b.$$

Всякое значение x^*, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, $f(x^*) \equiv 0$, называется корнем уравнения (1.1), а способ нахождения этого значения x^* и есть решение уравнения (3.1).

Найти корни уравнения вида (3.1) точно удается лишь в редких случаях. Кроме того, часто уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Разработаны методы численного решения уравнений вида (3.1), позволяющие отыскать приближенные значения корней этого уравнения.

При этом приходится решать две задачи:

- отделение корней, т. е. отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключен только один корень уравнения;
- вычисление корней с заданной точностью.

Воспользуемся известным результатом математического анализа: если непрерывная функция принимает на концах некоторого интервала значения разных знаков, то интервал содержит, по крайней мере, один корень уравнения.

Для выделения областей, содержащих один корень, можно использовать, например, графический способом, либо двигаясь вдоль области определения с некоторым шагом, проверять на концах интервалов условие смены знака функции.

Для решения второй задачи существует многочисленные методы:

- метод итераций;
- метод половинного деления;
- метод хорд;
- метод касательных;
- др. методы.

3.2. Уточнение корней методом половинного деления

В качестве начального приближения выбирается значение:

$$c = (a + b)/2,$$

затем исследуются значения функции на концах отрезков: $[a, c]$ и $[c, b]$.

Для продолжения вычислений выбирается тот отрезок, у которого значение функции на концах имеет противоположные знаки.

Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие:

$$|b-a|<\varepsilon.$$

где ε – заданная точность вычислений, например $\varepsilon = 10^{-5}$.

3.3. Уточнение корней методом простой итерации

Пусть корни отделены и $[a,b]$ содержит единственный корень. Уравнение (3.1) приводится к итерационному виду:

$$x = \varphi(x) \tag{3.2}$$

где функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется условие сходимости метода простой итерации как

$$|\varphi'(x)| < 1,\ x \in [a,b]. \tag{3.3}$$

Функцию $\varphi(x)$ можно подобрать, например, в следующем виде:

$$\varphi(x) = x + kf(x), \tag{3.4}$$

где k находится из условия

$$|\varphi'(k,x)| = |1 + kf'(x)| < 1,\ \ \forall x \in [a,b]. \tag{3.5}$$

Последнее условие гарантирует сходимость итерационной последовательности:

$$x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n \cdots \tag{3.6}$$

к искомому корню

$$x^* = \zeta. \tag{3.7}$$

Условием окончания счета будем считать выполнение неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon(1-q)}{q}\ ;\ q = max|\varphi'(x)| \tag{3.8}$$

3.4. Расчетная формула для метода хорд:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{(f(x_n) - f(x_0))}. \tag{3.9}$$

3.5. Расчетная формула для метода касательных:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.10}$$

3.6. Выбор начального приближения и условия завершения вычислений

Значение x_0 для метода хорд и начальная точка для метода касательных выбирается из условия выполнения неравенства:

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0. \tag{3.11}$$

В результате вычислений по этим формулам может быть получена последовательность приближенных значений корня

$$x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n \cdots. \tag{3.12}$$

Процесс вычислений заканчивается при выполнении условия:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon\ , \tag{3.13}$$

где ε – заданная точность вычислений, например $\varepsilon = 10^{-5}$.

В каждом случае на печать выводится количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу вычисления корня заданного уравнения, построение таблиц значений и графиков функций, а также отделение корней уравнения:

$$y = x - \sin(x) - 0{,}25. \tag{3.14}$$

В этом случае:

Отделяем корни графически:

$y(x) := x - \sin(x) - 0.25$

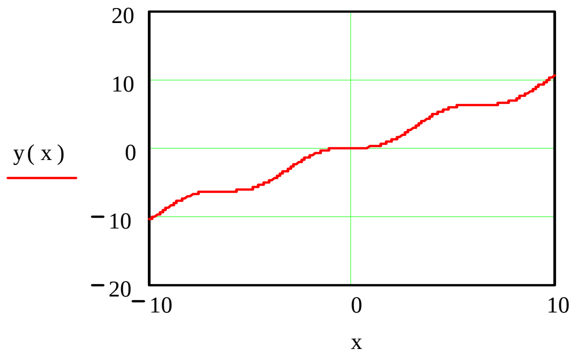


Рис.3.1.

Вычисляем значения аргумента и функции:

Набираем i, x_i F_i. Ниже, x= и рядом щелкаем мышью, набираем F= ,также рядом щелкаем мышью.

$i := 0..\ 10$ $\qquad x_i := -5 + i$ $\qquad F_i := y(x_i)$

x =

	0
0	-5
1	-4
2	-3
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4
10	5

F =

	0
0	-6.209
1	-5.007
2	-3.109
3	-1.341
4	-0.409
5	-0.25
6	-0.091
7	0.841
8	2.609
9	4.507
10	5.709

Решение уравнения с использованием операторов `given, find`

Given

$$x - \sin(x) - 0.25 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow 1.17122965250166599$$

Символьное решение:

$$x - \sin(x) - 0.25 \ \mathrm{solve}, x \rightarrow 1.17122965250166599$$

$i := 0..10$ $\quad x_0 := 1$ $\quad x_{i+1} := \sin(x_i) + 0.25$

$i := 0..10$ $\quad x_0 := 1$ $\quad x_{i+1} := x_i - \dfrac{\left[x_i - \left(\sin(x_i) + 0.25\right)\right]}{1 + \cos(x_i)}$

$i := 0..10$ $\quad x_0 := 1$ $\quad x_{i+1} := \dfrac{\left[x_0 \cdot \left(x_i - \sin(x_i) - 0.25\right) - x_i\left(x_0 - \sin(x_0) - 0.25\right)\right]}{\left(x_i - \sin(x_i) - 0.25\right) - \left(x_0 - \sin(x_0) - 0.25\right)}$

x =

	0
0	1
1	1.091471
2	1.137306
3	1.157505
4	1.165804
5	1.169105
6	1.170401
7	1.170907
8	1.171104
9	1.171181
10	1.171211
11	1.171222

x =

	0
0	1
1	1.059385
2	1.101462
3	1.129285
4	1.146676
5	1.157108
6	1.163197
7	1.16669
8	1.168674
9	1.169794
10	1.170424
11	1.170778

x =

	0
0	1
1	0
2	1.576998
3	1.126117
4	1.177917
5	1.170273
6	1.171367
7	1.17121
8	1.171232
9	1.171229
10	1.17123
11	1.17123

Слева решение методом итераций, посредине методом касательных, справа методом хорд.

3.7. Решение нелинейного уравнения применением функции `root`

Для простейших уравнений вида *f*(*x*) = 0 решение в MathCAD находится с помощью функции *root* (Рис.3.2).

`root( f(x1, x2, …), x1, a, b )`

Возвращает значение ***x*1**, принадлежащее отрезку **[*a, b*]**, при котором выражение или функция ***f*(*x*)** обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Аргументы:

***f*(*x*1, *x*2, …) -** функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение.

Выражение должно возвращать скалярные значения.

***x*1** - имя переменной, которая используется в выражении. Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение.

MathCAD использует его как начальное приближение при поиске корня.

a*, *b - необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем ***a*** < ***b***.

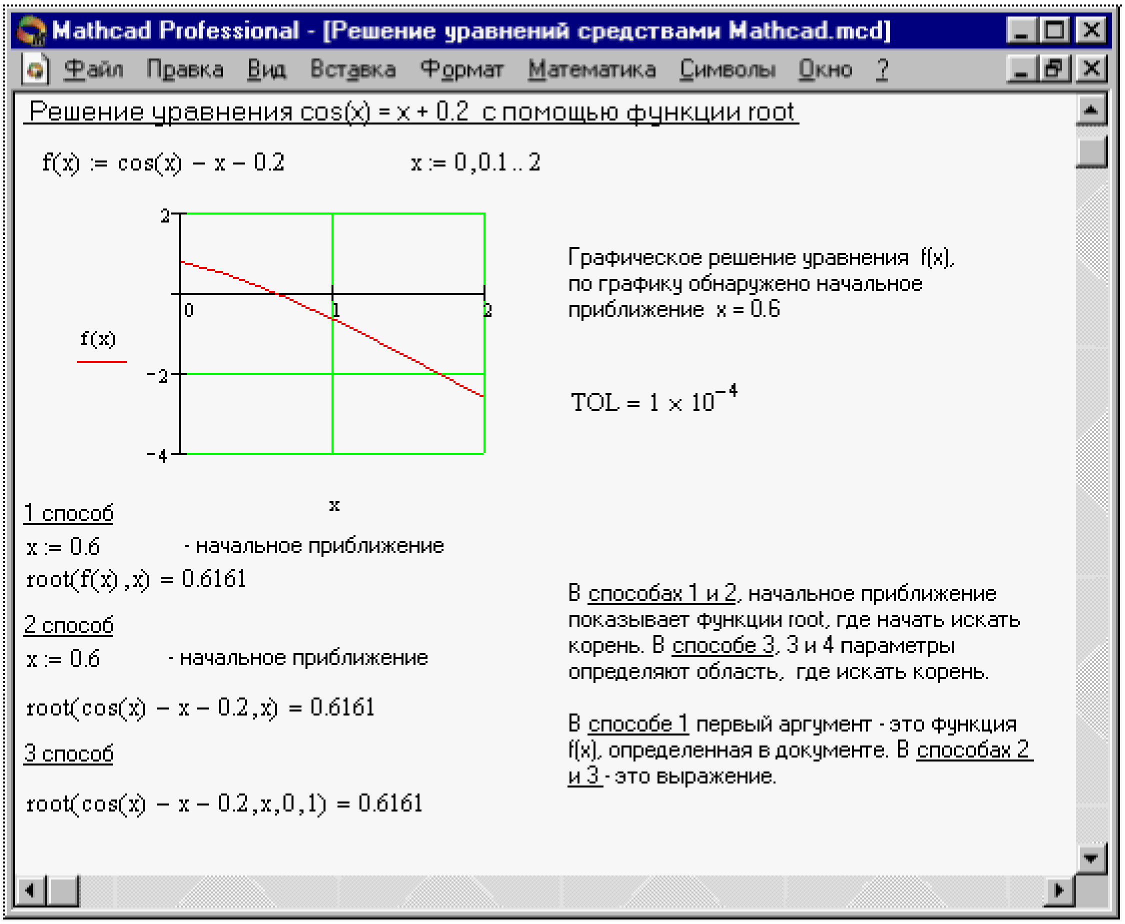


Рис. 3.2.

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть:

1. Известны из физического смысла задачи.
2. Известны из решения аналогичной задачи при других исходных данных.
3. Найдены графическим способом.

Наиболее распространен *графический способ* определения начальных приближений. Принимая во внимание, что действительные корни уравнения $f(x) = 0$ - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью Ox, или отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение $f(x) = 0$ *равносильным* ему уравнением:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример. Графически отделить корни уравнения:

$$x \lg x = 1.$$

Указанное уравнение удобно переписать в виде равенства:

$$\lg x = \frac{1}{x}.$$

Отсюда ясно, что корни уравнения (1) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень уравнения как $\xi \approx 2{,}5$ или определим его содержащий отрезок [2, 3].

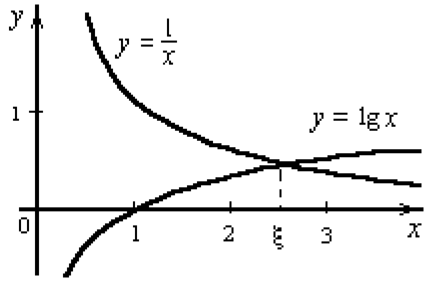


Рис.3.3.

Отсутствие сходимости функции root

Если после многих итераций MathCAD не находит подходящего приближения, то появится сообщение Can't converge to a solution. (отсутствует сходимость). Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- Уравнение не имеет корней.
- Корни уравнения расположены далеко от начального приближения.
- Выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями.
- Выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями.
- Выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, исследуйте график $f(x)$. Он поможет выяснить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет *root* сходиться.

Рекомендации по использованию функции root

- Для изменения точности, с которой функция *root* ищет корень, нужно изменить значение системной переменной TOL. Если значение TOL увеличивается, функция *root* будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение TOL уменьшается, то функция *root* будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен. Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида TOL := 0.01. Чтобы изменить значение TOL для всего рабочего документа, выберите команду **Математика** □ **Параметры…** □ **Переменные** □ **Допуск сходимости (TOL)**.
- Если два корня расположены близко друг от друга, следует уменьшить TOL, чтобы различить их.
- Если функция $f(x)$ имеет малый наклон около искомого корня, функция *root*($f(x)$, x) может *сходиться* к значению r, отстоящему от корня достаточно далеко. В таких случаях для нахождения более точного значения корня необходимо уменьшить значение TOL. Другой вариант заключается в замене уравнения $f(x) = 0$ на $g(x) = 0$

$$g(x) = \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)}.$$

- Для выражения $f(x)$ с известным корнем a нахождение дополнительных корней $f(x)$ эквивалентно поиску корней уравнения $h(x) = f(x)/(x - a)$. Подобный прием полезен для нахождения корней, расположенных близко друг к другу. Проще искать корень выражения $h(x)$, чем пробовать искать другой корень уравнения $f(x) = 0$, выбирая различные начальные приближения.

3.8. Вычисление корней полинома применением функции `polyroots`

Для нахождения корней выражения, имеющего вид

$$v_n x^n + \ldots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

лучше использовать функцию *polyroots*, нежели *root*. В отличие от функции *root*, функция *polyroots* не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные (Рис.3.4).

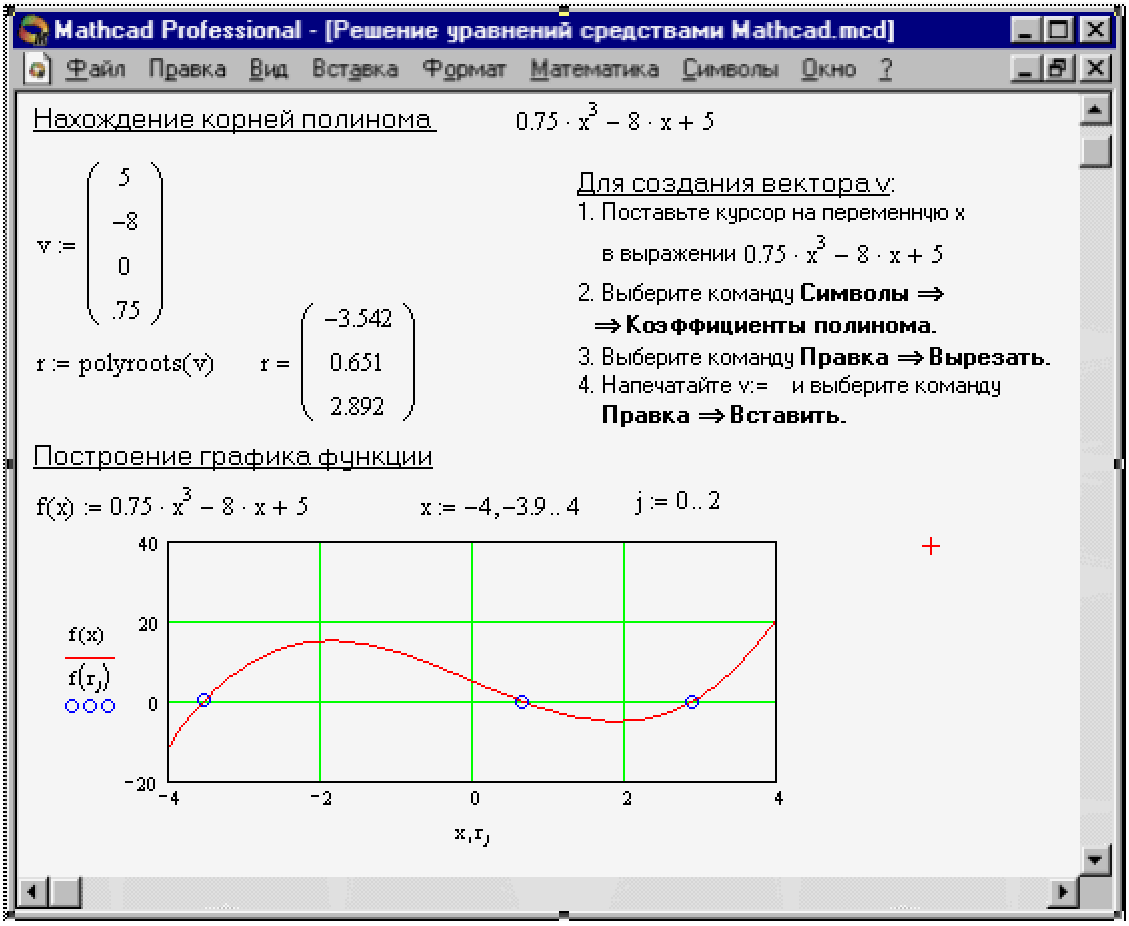


Рис.3.4.

Polyroots(*v*)

Возвращает корни полинома степени n. Коэффициенты полинома находятся в векторе $\boldsymbol{v}$ длины $n + 1$. Возвращает вектор длины n, состоящий из корней полинома.

Аргументы:

v - вектор, содержащий коэффициенты полинома.

Вектор ***v*** удобно создавать используя команду **Символы □ Коэффициенты полинома**. Рисунок 6 иллюстрирует определение корней полинома средствами MathCAD.

3.9. Решение систем нелинейных уравнений применением функции `Find`

MathCAD позволяет решать системы уравнений (максимальное число уравнений равно 50). Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующее:

- Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. MathCAD решает систему с помощью итерационных методов.
- Напечатать ключевое слово *Given*. Оно указывает MathCAD, что далее следует система уравнений.
- Введите уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте **[Ctrl]=** для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов <, >, ≤ и ≥.

Введите любое выражение, которое включает функцию *Find*, например:

`a:= Find(x, y)`

Функция `Find(z1, z2, . . .)`

Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Ключевое слово *Given*, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию *Find,* называют ***блоком решения уравнений***.

Следующие выражения недопустимы внутри блока решения:

- Ограничения со знаком ≠.
- Дискретный аргумент или выражения, содержащие дискретный аргумент в любой форме.
- Неравенства вида $a < b < c$.

Блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово *Given* и имя функции *Find*.

Функция, которая завершает блок решения уравнений, может быть использована аналогично любой другой функции. Можно произвести с ней следующие три действия:

- Можно вывести найденное решение, напечатав выражение вида:
- *Find*(*var*1, *var*2,…) =.
- Определить переменную с помощью функции *Find*:

  `a := Find(x)` - скаляр,

  `var := Find(var1, var2,…)` - вектор.

Это удобно сделать, если требуется использовать решение системы уравнений в другом месте рабочего документа.

Определить другую функцию с помощью `Find` как

`f(a, b, c, …) := Find(x, y, z, …).`

Эта конструкция удобна для многократного решения системы уравнений для различных значений некоторых параметров *a, b, c,…*, непосредственно входящих в систему уравнений.

Сообщение об ошибке [No solution was found. Try changing the guess value or the value of TOL or CTOL.] (Решение не найдено) при решении уравнений появляется, когда:

- Поставленная задача может не иметь решения.
- Для уравнения, которое не имеет вещественных решений, в качестве начального приближения взято вещественное число и наоборот.

- В процессе поиска решения последовательность приближений попала в точку локального минимума невязки. Для поиска искомого решения нужно задать различные начальные приближения.
- Возможно, поставленная задача не может быть решена с заданной точностью. Попробуйте увеличить значение TOL.

Пример 1 Рис.3.5 иллюстрирует решение системы уравнений в MathCAD.

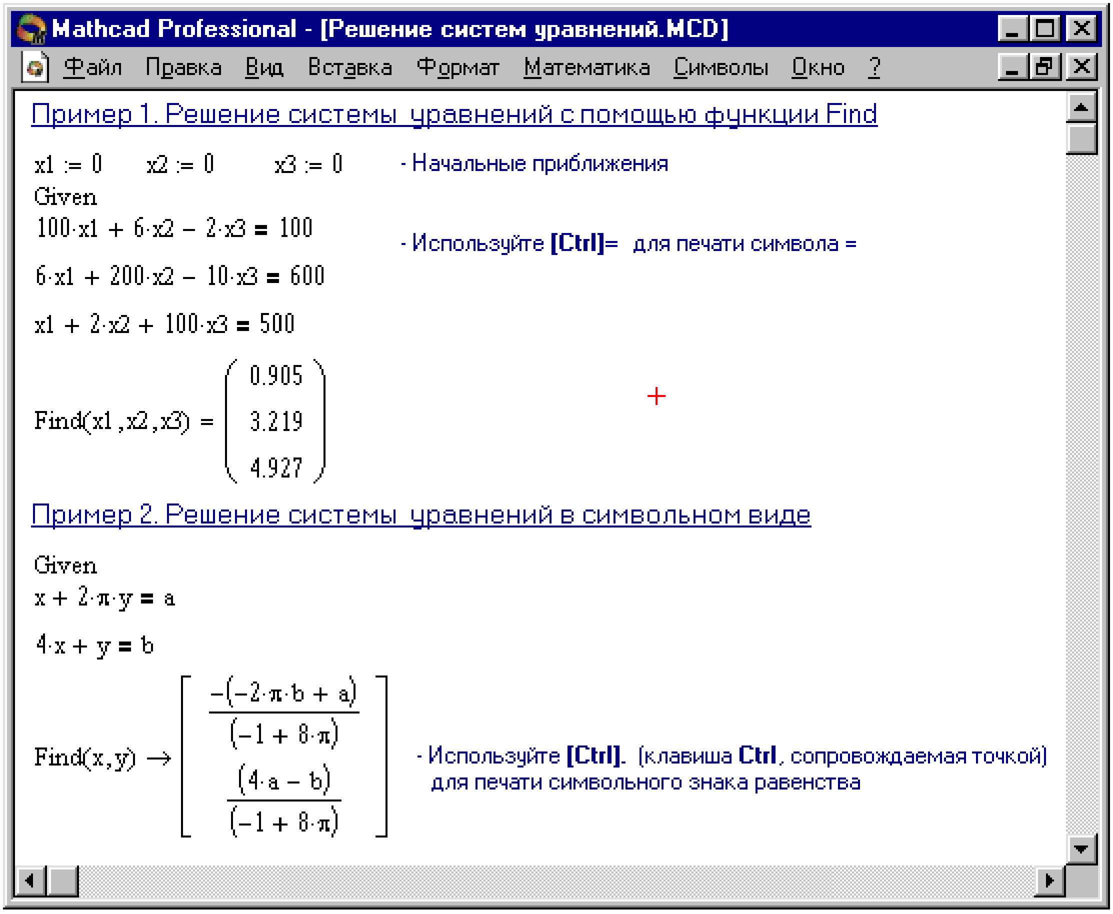


Рис. 3.5.

3.10. Приближенные решения уравнений применением функции `Minerr`

Функция *Minerr* очень похожа на функцию *Find* (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, *Minerr* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции *Minerr* такие же, как и функции *Find.*

Minerr(z1, z2, . . .)

Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Если *Minerr* используется в блоке решения уравнений, необходимо всегда включать дополнительную проверку достоверности результатов.

3.11. Символьное решение уравнений в MathCAD

В MathCAD можно быстро и точно найти численное значение корня с помощью функции *root*. Но имеются некоторые задачи, для которых возможности MathCAD позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде.

Решение уравнений в символьном виде позволяет найти точные или приближенные корни уравнения:

- Если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Поэтому вместо того, чтобы решать уравнение для каждого нового значения параметра, можно просто заменять его значение в найденном символьном решении.
- Если нужно найти все комплексные корни полинома со степенью меньше или равной 4, символьное решение даст их точные значения в одном векторе или в аналитическом или цифровом виде.

Команда **Символы □ Переменные □ Вычислить** позволяет решить уравнение относительно некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения.

Чтобы решить уравнение символьно необходимо:

- Напечатать выражение (для ввода знака равенства используйте комбинацию клавиш **[Ctrl]=**).
- <u>Выделить переменную</u>, относительно которой нужно решить уравнение, щелкнув на ней мышью.
- Выбрать пункт меню **Символы □ Переменные □ Вычислить**.

<u>Нет необходимости приравнивать выражение нулю</u>. Если MathCAD не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять выражение нулю.

Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

- Напечатать ключевое слово *Given*.
- Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова *Given*. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется **[Ctrl]=**.
- Напечатать функцию *Find*, соответствующую системе уравнений.
- Нажать **[Ctrl].** (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). MathCAD отобразит символьный знак равенства □ .
- Щелкнуть мышью на функции *Find*.

Рис.3.6 Пример 2 иллюстрирует символьное решение системы уравнений в MathCAD.

3.12. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Методы решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.15}$$

или в векторном виде

$$Ax = b \tag{3.16}$$

можно разделить на две основные группы:

- прямые методы;
- итерационные методы.

Здесь через $A, x,$ и b соответственно обозначены :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Матрица A, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками - коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении, называется *матрицей системы*; матрица-столбец b, элементами которой являются правые части уравнений системы, называется *матрицей правой части* или просто *правой частью системы*. Матрица-столбец x, элементы которой - искомые неизвестные, называется *решением системы*.

Если матрица A - неособенная, то есть $\det A \neq 0$ то система (3.15), или эквивалентное ей матричное уравнение (3.16), имеет единственное решение.

В самом деле, при условии $\det A \neq 0$ существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части уравнения (3.16) на матрицу A^{-1} получим:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$
$$x = A^{-1}b. \qquad (3.17)$$

Формула (3.17) порождает решение матричного уравнения (3.16) и оно единственно.

Прямые методы дают точное решение за конечное число операций. К прямым методам относятся, например:

- метод обратной матрицы;
- метод Крамера;
- метод Гаусса;
- др. методы.

Итерационные методы дают решение системы уравнений как предел последовательных приближений. Для итерационных методов необходимо выполнение условий сходимости и дополнительных преобразований системы в эквивалентную ей.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7,$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

3.13. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

В этом случае алгоритм вычислений состоит в следующем:

- установить режим автоматических вычислений;
- ввести матрицу системы и матрицу-столбец правых частей;
- вычислить решение системы по формуле

$$x = A^{-1}b.$$

- проверить правильность решения умножением матрицы исходной системы уравнений на вектор-столбец решения.

Выполнив указанные действия, можно получить следующее решение:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, искомое решение порождается следующим вектор-столбцом:

$$x = [\,1 \quad 0 \quad 2\,]^{T}.$$

3.14. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Комментарии. Функция ***augment(A,b)*** формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы справа столбца правых частей. Функция ***rref*** приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, выполняя прямой и обратный ходы гауссова исключения. Последний столбец содержит решение системы.

$$\mathrm{rref}(\mathrm{augment}(A, b)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, искомое решение порождается тем же вектор-столбцом: $x = [\,1 \quad 0 \quad 2\,]^{T}$.

3.15. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера состоит в следующем:

- Вычислить определитель матрицы A и обозначить его через D
- Определить матрицу $A1$, заменой первого столбца матрицы A, матрицей b и вычислить определитель матрицы $A1$ как $Dx1$.
- Определить матрицу $A2$, заменой второго столбца матрицы A, матрицей b и вычислить определитель матрицы $A2$ как $Dx2$.
- Определить матрицу $A3$, заменой третьего столбца матрицы A, матрицей b и вычислить определитель матрицы $A3$ как $Dx3$.
- Вычислить решение системы линейных уравнений как

$$x_1 = Dx1 / D; \quad x_2 = Dx2 / D; \quad x_3 = Dx3 / D.$$

Реализация указанного алгоритма на MathCAD порождает следующее решение:

$$D := |A| \qquad D = 9$$

$$DX1 := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad DX1 := |DX1| \qquad DX1 = 9$$

$$DX2 := \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad DX2 := |DX2| \qquad DX2 = 0$$

$$DX3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad DX3 := |DX3| \qquad DX3 = 18$$

$$x1 := \frac{DX1}{D} \quad x1 = 1 \qquad x2 := \frac{DX2}{D} \quad x2 = 0 \qquad x3 := \frac{DX3}{D} \quad x3 = 2$$

Как и следовало ожидать, искомое решение порождается тем же вектор-столбцом:

$$x = [\,1 \quad 0 \quad 2\,]^{T}.$$

3.16. Символьное решение систем линейных алгебраических уравнений

Фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями.

Given

$$x1 + 2\cdot x2 + 3\cdot x3 = 7$$

$$x1 - 3\cdot x2 + 2\cdot x3 = 5$$

$$x1 + x2 + x3 = 3$$

$$\text{Find}\,(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Здесь = - логическое равенство.

Легко видеть, что полученное решение в точности совпадает с предыдущим.

3.17. Решение системы линейных алгебраических уравнений применением функции `lsolve`

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*.

lsolve(*A*, *b*)

В этом случае возвращается вектор решения *x* такой, что

$$Ax = b.$$

На Рис.3.6 в качестве иллюстрации показано решение системы трех линейных уравнений относительно трех неизвестных.

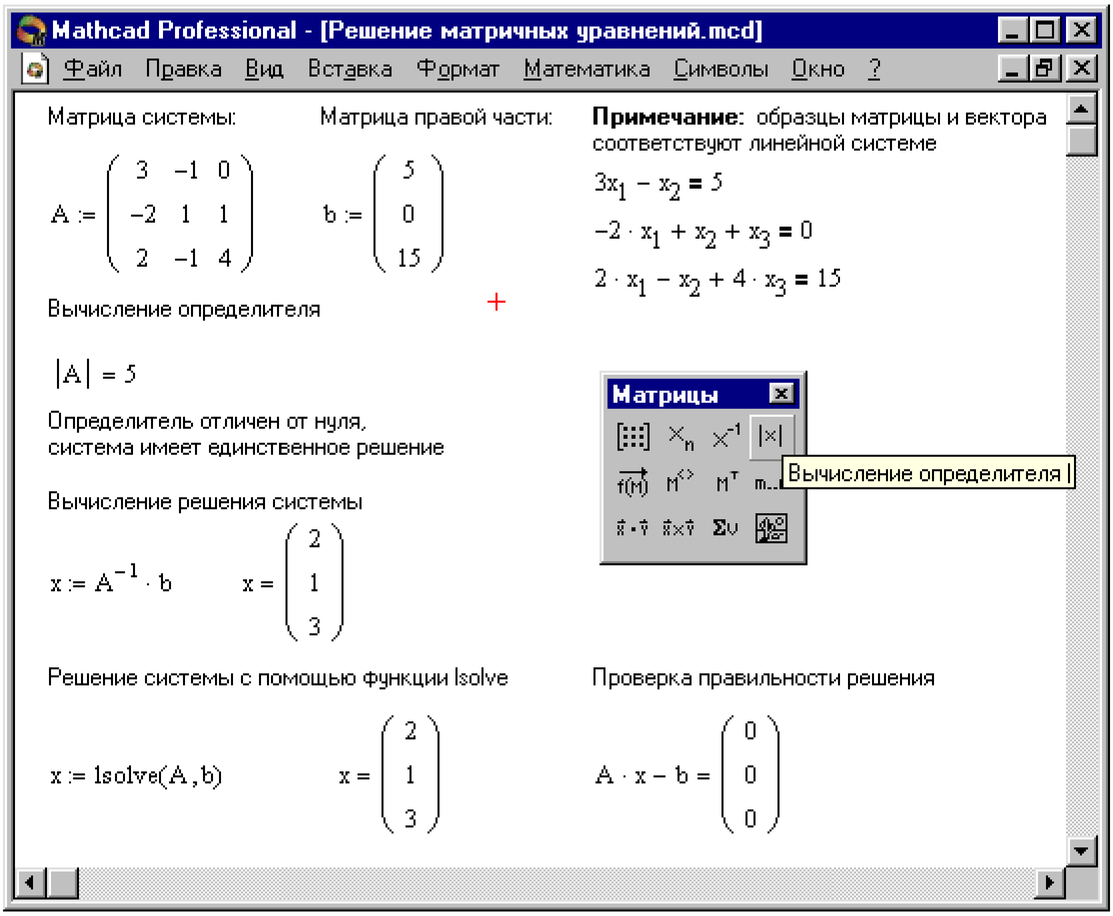


Рис.3.6.

Аналогично, для исследуемой системы уравнений реализация на MathCAD приводит к следующему решению:

$$x := \mathrm{lsolve}\ (A, b) \qquad\qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что и в этом случае полученное решение в точности совпадает со всеми предыдущими.

3.18. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций

Предполагается в дальнейшем, что матрица A квадратная и невырожденная. Предварительно систему (3.16) приводится к итерационному виду:

$$x = Cx + f \tag{3.18}$$

Известно, что для произвольного начального вектора x_0 итерационный процесс:

$$x^{n+1} = Cx^n + f \tag{3.19}$$

сходится, если выполнено одно из условий:

$$\text{а) } \sum_{j=1}^{n} \left| c_{i,j} \right| = \alpha < 1, \qquad 1 \le i \le n, \tag{3.20}$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^{n} \left| c_{i,j} \right| = \alpha < 1, \qquad 1 \le j \le n, \tag{3.21}$$

$$\text{в) } \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} = \alpha < 1. \tag{3.22}$$

Процесс вычислений заканчиваем при выполнении условия:

$$\rho_i (x^{k-1}, x^k) \le \varepsilon (1 - \alpha) / \alpha \tag{3.23}$$

где ε – заданная точность (например, $\varepsilon = 10^{-4}$);
ρ_i ($i=1,2,3$) – одна из метрик, определяемая левой частью (3.20) – (3.22), по которой была установлена сходимость.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций состоит в следующем:

1. Ввести матрицы C и d.
2. Преобразовать известными методами исходную систему

$$Cx = d$$

к виду

$$x = b + Ax.$$

3. Определить нулевое приближение решения.
4. Задать количество необходимых итераций.
5. Вычислить последовательные приближения.

$ORIGIN := 1$

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{bmatrix} \qquad d := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$i := 1..3 \qquad j := 1..3$

$$b_i := \frac{d_i}{C_{i,i}} \qquad A_{i,j} := \frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}} \qquad A_{i,i} := 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x^{\langle 1 \rangle} := b \qquad k := 2..10 \qquad x^{\langle k \rangle} := b + A \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1.92	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907
2	3	3.19	3.188	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189
3	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

$$X := x^{\langle 10 \rangle} \qquad X = \begin{bmatrix} 1.907 \\ 3.189 \\ 4.917 \end{bmatrix}$$

3.19. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что найдя какое-то значение для компоненты, мы на следующем шаге используем его для отыскания следующей компоненты. Вычисления ведутся по формуле

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{3.24}$$

Каждое из условий (3.20) − (3.22) является, при этом, достаточным для сходимости итерационного процесса по методу Зейделя. Практически же удобнее следующее преобразование, а именно, умножив слева обе части (3.19) на A^T и определи матрицу С и вектор *d* как

$$C = A^T A \qquad d = A^T b \tag{3.25}$$

получим эквивалентную ей систему:

$$Cx = d. \tag{3.26}$$

Разделив каждое полученное соотношение на c_{ii}, приведем систему к виду (3.24). Указанное преобразование гарантирует сходимость итерационного процесса.

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя по форме ничем не отличается от предыдущего и состоит в следующем:

1. Ввести матрицы C и d.
2. Преобразовать известными методами исходную систему

$$Cx = d$$

к виду

$$x = b + Ax.$$

3. Определить нулевое приближение решения.
4. Задать количество необходимых итераций.
5. Вычислить последовательные приближения.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{bmatrix} \qquad d := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$i := 1..3 \qquad b_i := \frac{d_i}{C_{i,i}} \qquad i := 2..3 \qquad j := 1..2$$

$$A1_{i,j} := \frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}} \qquad A2_{j,i} := \frac{-C_{j,i}}{C_{j,j}}$$

$$A1_{i,i} := 0 \quad A1_{j,i} := 0 \quad A2_{i,i} := 0 \quad A2_{i,j} := 0 \quad A := A1 + A2$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & 0 & 0 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^{\langle 1 \rangle} := b \qquad y^{\langle 1 \rangle} := b \qquad k := 2..10$$

$$x^{\langle k \rangle} := b + A2 \cdot x^{\langle k-1 \rangle} \qquad x^{\langle k \rangle} := x^{\langle k \rangle} + A1 \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$$

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1.92	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905
2	3	3.19	3.192	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193
3	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

3.20. Порядок выполнения работы

Упражнение 1. Построить график функции $f(x)$ (Таблица 3.1) и приблизительно определить один из корней уравнения. Решить уравнение $f(x)= 0$ с точностью □ $= 10^{-4}$ с помощью встроенной функции MathCAD *root*;

Таблица 3.1

№	$f(x)$	№	$f(x)$

варианта		варианта	
1	$e^{x-1}-x^3-x$ $x\in[0,1]$	**9**	$0.25x^3+x-2$ $x\in[0,2]$
2	$x-\dfrac{1}{3+\sin(3.6x)}$ $x\in[0,1]$	**10**	$\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-x$ $x\in[2,3]$
3	$\arccos x-\sqrt{1-0.3x^3}$ $x\in[0,1]$	**11**	$3x-4\ln x-5$ $x\in[2,4]$
4	$\sqrt{1-0.4x^2}-\arcsin x$ $x\in[0,1]$	**12**	$e^x-e^{-x}-2$ $x\in[0,1]$
5	$3x-14+e^x-e^{-x}$ $x\in[1,3]$	**13**	$\sqrt{1-x}-\operatorname{tg} x$ $x\in[0,1]$
6	$\sqrt{2x^2+1.2}-\cos x-1$ $x\in[0,1]$	**14**	$1-x+\sin x-\ln(1+x)$ $x\in[0,2]$
7	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)-2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}$ $x\in[1,2]$	**15**	$x^5-x-0{,}2$ $x\in[1,2]$
8	$0.1x^2-x\ln x$ $x\in[1,2]$		

Упражнение 2. Выполнить отделение корней: графически и по программе (точность $\varepsilon=10^{-1}$). Индивидуальные задания приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

1. $x+x\ln(x+0.5)-0.5=0$
2. $x2^x-1=0$
3. $x^3-2x^2+x-3=0$
4. $x^3+12x-2=0$
5. $5x-8\ln(x)-8=0$
6. $x-\sin(x)-0.25=0$
7. $x^3-6x^2+20=0$
8. $5x^3+10x^2+5x-1=0$
9. $0.1x^2-x\ln(x)=0$
10. $x^4+0.5x^3-4x^2-3x-0.5=0$

Упражнение 3. Для полинома $g(x)$ выполнить следующие действия (см. Таблица 3.3):

1. с помощью команды **Символы** → **Коэффициенты полинома** создать вектор V, содержащий коэффициенты полинома;
2. решить уравнение $g(x)$ = 0 с помощью функции *polyroots*;
3. решить уравнение символьно, используя команду **Символы** → **Переменные** → **Вычислить**.

Таблица 3.3

№ варианта	$g(x)$	№ варианта	$g(x)$
1	$x^4-2x^3+x^2-12x+20$	**9**	$x^4+x^3-17x^2-45x-100$
2	$x^4+6x^3+x^2-4x-60$	**10**	$x^4-5x^3+x^2-15x+50$
3	$x^4-14x^2-40x-75$	**11**	$x^4-4x^3-2x^2-20x+25$
4	$x^4-x^3+x^2-11x+10$	**12**	$x^4+5x^3+7x^2+7x-20$
5	$x^4-x^3-29x^2-71x-140$	**13**	$x^4-7x^3+7x^2-5x+100$

6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

Упражнение 4. Решить систему линейных уравнений (Таблица 3.4):

1) используя функцию *Find*;
2) матричным способом и используя функцию *lsolve*.

Таблица 3.4

№ варианта	Система линейных уравнений	№ варианта	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$		

Упражнение 5. Решить методом Гаусса системы линейных алгебраических уравнений, указанные в Таблице 3.5

Таблица 3.5

№	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	b_{1i}

вар.				
1	0.35 0.12 - 0.13	0.12 0.71 0.15	- 0.13 0.15 0.63	0.10 0.26 0.38
2	0.71 0.10 - 0.10	0.10 0.34 0.64	0.12 - 0.04 0.56	0.29 0.32 - 0.10
3	0.34 - 0.04 0.06	- 0.04 0.44 0.56	0.10 - 0.12 0.39	0.33 - 0.05 0.28
4	0.10 - 0.04 - 0.43	- 0.04 0.34 0.05	- 0.63 0.05 0.13	- 0.15 0.31 0.37
5	0.63 0.05 0.15	0.05 0.34 0.10	0.15 0.10 0.71	0.34 0.32 0.42
6	1.20 - 0.50 - 0.30	- 0.20 1.70 0.10	0.30 - 1.60 - 1.50	- 0.60 0.30 0.40
7	0.30 - 0.10 - 1.50	1.20 - 0.20 - 0.30	- 0.20 1.60 0.10	- 0.60 0.30 0.70
8	0.20 0.58 0.05	0.44 - 0.29 0.34	0.91 0.05 0.10	0.74 0.02 0.32
9	6.36 7.42 1.77	1.75 19.03 0.42	1.0 1.75 6.36	41.70 49.49 27.67
10	3.11 - 1.65 0.60	- 1.66 3.15 0.78	- 0.60 - 0.78 - 2.97	- 0.92 2.57 1.65

Комментарий. Контроль выполняемых вычислений является важным элементом решения любой вычислительной задачи. Для контроля прямого хода пользуются контрольными суммами, которые представляют собой суммы коэффициентов при неизвестных и свободного члена для каждого уравнения заданной системы.

Для контроля вычислений в основной части схемы единственного деления (столбцы коэффициентов при неизвестных и свободных членов) над контрольными суммами выполняют те же действия, что и над остальными элементами той же строки. При отсутствии вычислительных ошибок контрольная сумма для каждой строки в пределах влияниях погрешностей округления и их накопления должна совпадать со строчной суммой - вторым столбцом контроля. Строчные суммы представляют собой суммы всех элементов из основной части этой строки.

Упражнение 6. Преобразовать нелинейные уравнения системы из Таблицы 3.6 к виду

$$f_1(x) = y$$

и

$$f_2(y) = x.$$

Построить их графики и определить начальное приближение решения. Решить систему нелинейных уравнений с помощью функции *Minerr*.

Таблица 3.6

№ варианта	Система нелинейных уравнений	№ варианта	Система нелинейных уравнений
1	$\begin{cases}\sin x + 2y = 2,\\ \cos(y-1) + x = 0{,}7.\end{cases}$	**9**	$\begin{cases}\sin y + x = -0{,}4,\\ 2y - \cos(x+1) = 0.\end{cases}$
2	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5) - y = 1,\\ \cos(y-2) + x = 0.\end{cases}$	**10**	$\begin{cases}\sin(x+2) - y = 1{,}5,\\ \cos(y-2) + x = 0{,}5.\end{cases}$
3	$\begin{cases}\cos x + y = 1{,}5,\\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1.\end{cases}$	**11**	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) - y = 2,\\ \sin y - 2x = 1.\end{cases}$
4	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8,\\ \sin y - 2x = 1{,}6.\end{cases}$	**12**	$\begin{cases}\cos(x-2) + y = 0,\\ \sin(y+0{,}5) - x = 1.\end{cases}$
5	$\begin{cases}\sin(x-1) = 1.3 - y,\\ x - \sin(y+1) = 0.8.\end{cases}$	**13**	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 1,\\ \sin(y+0{,}5) - x = 1.\end{cases}$
6	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 1,\\ \sin y - 2x = 2.\end{cases}$	**14**	$\begin{cases}\sin(x) - 2y = 1,\\ \cos(y+0{,}5) - x = 2.\end{cases}$
7	$\begin{cases}-\sin(x+1) + y = 0{,}8,\\ \sin(y-1) + x = 1{,}3.\end{cases}$	**15**	$\begin{cases}2y - \sin(x-0{,}5) = 1,\\ \cos(y) + x = 1{,}5.\end{cases}$
8	$\begin{cases}\sin(x) - 2y = 1,\\ \sin(y-1) + x = 1{,}3.\end{cases}$		

Упражнение 7. Символьно решить системы уравнений:

$$\begin{cases}3x + 4\,\pi\, y = a,\\ 2x + y = b.\end{cases} \qquad \begin{cases}2\,y - \pi\, z = a,\\ \pi\, z - z = b,\\ 3\,y + x = c.\end{cases}$$

3.21.Контрольные вопросы

1. Назовите способы нахождения начального приближения.
2. Какие функции для решения одного уравнения в MathCAD вы знаете? В чем их отличие?
3. Какие аргументы функции *root* не обязательны?
4. В каких случаях MathCAD не может найти корень уравнения?
5. Какая системная переменная отвечает за точность вычислений?
6. Как изменить точность, с которой функция *root* ищет корень?
7. Как системная переменная TOL влияет на решение уравнения с помощью функции root?
8. Назовите функции для решения систем уравнений в MathCAD и особенности их применения.
9. Опишите структуру блока решения уравнений.
10. Какой знак равенства используется в блоке решения? Какой комбинацией клавиш вставляется в документ?
11. Какие выражения не допустимы внутри блока решения уравнения?
12. Опишите способы использования функции *Find*.
13. В каких случаях MathCAD не может найти решение системы уравнений?
14. Дайте сравнительную характеристику функциям *Find* и *Minerr*.
15. Какие уравнения называются матричными?
16. Как решать матричные уравнения? Назовите способы решения матричных уравнений.
17. Этапы решения уравнения с одной неизвестной.

18. Способы отделения корней.
19. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений?
20. Дать словесное описание алгоритма метода половинного деления.
21. Необходимые условия сходимости метода половинного деления.
22. Условие окончания счета метода простой итерации. Погрешность метода.
23. Словесное описание алгоритма метода хорд. Графическое представление метода. Вычисление погрешности.
24. Словесное описание алгоритма метода касательных (Ньютона). Графическое представление метода. Условие выбора начальной точки.
25. К какому типу - прямому или итерационному - относится метод Гаусса?
26. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
27. Как организуется, контроль над вычислениями в прямом и обратном ходе?
28. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений?
29. Как формулируется достаточные условия сходимости итерационного процесса?
30. Как эти условия связаны с выбором метрики пространства?
31. В чем отличие итерационного процесса метода Зейделя от аналогичного процесса метода простой итерации?

Лабораторная работа №4. Интерполирование функций

4.1. Постановка задачи интерполирования функций

Пусть функция $f(x)$ задана таблично, либо вычисление ее требует громоздких выкладок. Заменим приближенно функцию $f(x)$ на какую-либо функцию $F(x)$, так, чтобы отклонение $f(x)$ от $F(x)$ было в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется аппроксимацией функции $f(x)$, а функция $F(x)$ – аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требование строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_i $(i = 0, 1, 2,...n)$, т. е.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1,..., F(x_n) = y_n. \tag{4.1}$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), точки $x_0, x_1, \cdots x_n$ – узлами интерполяции.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента x. В этом случае шаг таблицы $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2,...)$ является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул (как, впрочем, и вычисление по этим формулам) заметно упрощается.

4.2. Порядок выполнения работы

Задание 1. По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа (4.2) и построить график $L_2(x)$. Исходные данные берутся из таблицы 4.1.

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \tag{4.2}$$

Таблица 4.1.

№	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
1	2	3	5	4	1	7
2	4	2	3	5	2	8
3	0	2	3	-1	-4	2
4	7	9	13	2	-2	3
5	-3	-1	3	7	-1	4
6	1	2	4	-3	-7	2
7	-2	-1	2	4	9	1
8	2	4	5	9	-3	6
9	-4	-2	0	2	8	5
10	-1	1.5	3	4	-7	1
11	2	4	7	-1	-6	3
12	-9	-7	-4	3	-3	4

13	0	1	4	7	-1	8
14	8	5	0	9	2	4
15	-7	-5	-4	4	-4	5

Задание 2. Вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента (a) с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа (4.3) и оценить погрешность интерполяции. Для выполнения задания исходные данные берутся из таблицы 4.2, 4.3 или 4.4.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (4.3)$$

Для погрешности $R_n(x)$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|, \qquad x \in [x_o, x_n] \qquad (4.4)$$

где $M_{n+1} = \max|f^{(n+1)}(x)|$.

Таблица 4.2

№ варианта	Значение аргумента (a)	№ таблицы
1	-2.0	4.3
2	3.77	4.4
3	0.55	4.3
4	4.83	4.4
5	3.5	4.3
6	5.1	4.4
7	1.75	4.3
8	4.2	4.4
9	-1.55	4.3
10	6.76	4.4

Таблица 4.3

x	-3.2	-0.8	0.4	2.8	4.0	6.4	7.6
$f(x) = 2.1\sin(0.37x)$	-1.94	-0.61	0.31	1.81	2.09	1.47	0.68

Таблица 4.4

x	1.3	2.1	3.7	4.5	6.1	7.7	8.5
$f(x) = \lg(x)/x + x^2$	1.777	4.563	13.84	20.39	37.34	59.41	72.4

Таблица 4.5

x	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x) = \cos(x)$	0.995	0.988	0.980	0.969	0.955	0.939	0.921

Таблица 4.6

x	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$f(x)=\sin(x)$	0.605	0.644	0.681	0.71	0.75	0.783	0.813

Задание 3. Уплотнить часть таблицы заданной на отрезке $[a,b]$ функции, используя интерполяционный многочлен Ньютона (4.5) и оценить погрешность интерполяции D (формула (4.6)). Таблицу 4.7 конечных разностей просчитать вручную на отрезке $[a,b]$ с шагом h. Для выполнения задания исходные данные берутся из таблиц 4.8, 4.5 и 4.6.

$$P_2(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0, \tag{4.5}$$

где $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

$$D\approx\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}f'''(\xi)\quad, \tag{4.6}$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i\,(i=\overline{0,n})$ и x.

Формула (4.5) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Если вычисляемое значение переменной ближе к концу отрезка $[a;b]$, то применяют вторую формулу Ньютона – интерполирование назад (формула (4.6)).

$$P_n(x)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} \tag{4.6}$$

где

$$t=\frac{x-x_n}{h}\ \text{ и }\ D=\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}f'''(\xi).$$

Таблица 4.7

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	$\Delta y_0=y_1-y_0$	$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$	$\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$
$x_1=x_0+h$	y_1	$\Delta y_1=y_2-y_1$	$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1$	
$x_2=x_1+h$	y_2	$\Delta y_2=y_3-y_2$		
$x_3=x_2+h$	y_3			

Таблица 4.8

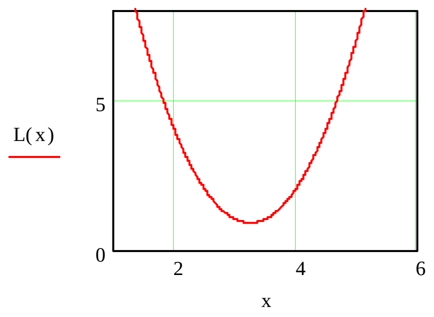
№	a	b	h_0	h	№ таблицы
1	0.65	0.80	0.05	0.01	3.6
2	0.25	0.40	0.05	0.025	3.5
3	0.75	0.90	0.05	0.01	3.6
4	0.70	0.85	0.05	0.025	3.6

5	0.80	0.95	0.05	0.025	3.6
6	0.1	0.25	0.05	0.025	3.5
7	0.15	0.3	0.05	0.025	3.5
8	0.7	0.85	0.05	0.025	3.6
9	0.2	0.35	0.05	0.01	3.5
10	0.80	0.95	0.05	0.01	3.6

Примерный фрагмент выполнения работы

$x0 := 2 \quad x1 := 3 \quad x2 := 5 \quad y0 := 4 \quad y1 := 1 \quad y2 := 7$

$$L(x) := \left[\frac{y0\cdot(x-x1)\cdot((x-x2))}{(x0-x1)\cdot(x0-x2)} + \frac{y1\cdot(x-x0)\cdot((x-x2))}{(x1-x0)\cdot(x1-x2)} + \frac{y2\cdot(x-x0)\cdot((x-x1))}{(x2-x0)\cdot(x2-x1)}\right]$$



$x0 := 2 \quad x1 := 3 \quad x2 := 5 \quad y0 := 4 \quad y1 := 1 \quad y2 := 7$

$$L(x) := \left[\frac{4\cdot(x-3)\cdot((x-5))}{(2-3)\cdot(2-5)} + \frac{1\cdot(x-2)\cdot((x-5))}{(3-2)\cdot(3-5)} + \frac{7\cdot(x-2)\cdot((x-3))}{(5-2)\cdot(5-3)}\right]$$

$2\cdot x^2 - 13\cdot x + 22$

4.3. Контрольные вопросы

1. В чем особенность приближения таблично заданной функции методом интерполирования?
2. Как обосновывается существование и единственность интерполяционного многочлена?
3. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?
4. Как строятся интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона?
5. В чем особенности этих двух способов интерполяции?
6. Как производится оценка погрешности метода интерполяции многочленом Лагранжа?
7. Как используется метод интерполирования для уточнения таблиц функций?
8. В чем отличие между первой и второй интерполяционными формулами Ньютона?

Лабораторная работа №5. Приближенное вычисление интегралов

5.1.Постановка задачи приближенного интегрирования функций

Геометрический смысл определенного интеграла функции f(x) заключается в площади фигуры, образованной этой функцией и осью OX.

Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют квадратурными формулами.

5.2.Приближенное вычисление интеграла функции методом прямоугольников

Самый простой способ вычислить определенный интеграл от "хорошей" (т.е. гладкой, неосциллирующей, без особенностей) функции - применить формулу прямоугольников. С помощью указанной формулы площадь искомой фигуры вычисляется как сумма элементарных прямоугольников, множеством которых заменяется подынтегральная функция f(x). Иллюстрация метода прямоугольников приведена на Рис.5.1:

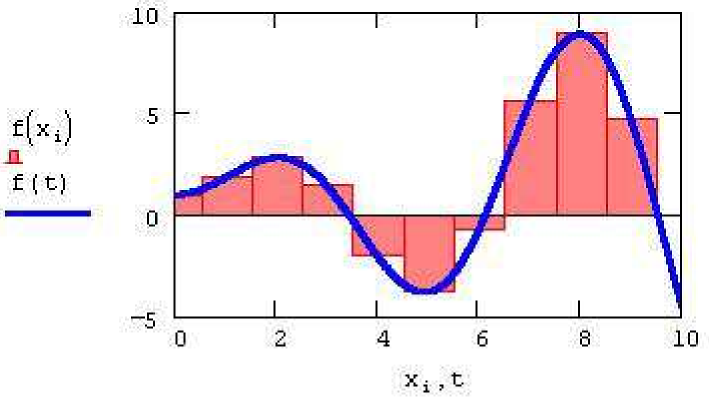


Рис.5.1.

Для вычисления интеграла интервал интегрирования [a, b] разбивается на n отрезков и на каждом из полученных отрезков функция f(x) заменяется прямоугольником шириной:

$$h := \frac{b - a}{N}$$

и высотой $f(x_i)$. При этом точка x_i может выбираться, к примеру, как начало каждого элементарного отрезка, либо как его центр. Как несложно убедиться, формулы прямоугольников для этих двух случаев запишутся в виде:

$$Rect1 := h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$$

- формула прямоугольников 1

$$Rect2 := h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

- формула прямоугольников 2

Вторая формула дает намного лучшую точность интегрирования, из-за чего первая практически никогда не применяется.

5.3.Приближенное вычисление интеграла функции методом трапеций

Альтернативный вариант - замена f(x) ломаной линией (с вершинами в концах элементарных отрезков, на которые разбивается интервал интегрирования), т.е. аппроксимация искомого интеграла множеством элементарных трапеций. Формула трапеций такова:

$$Trapz := h \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

Очевидно, что при стремлении $h \to 0$, множество прямоугольников (или трапеций) стремится к искомой фигуре, образованной подынтегральной функцией, а численный результат - к истинному значению интеграла. Можно показать, что формулы прямоугольников обеспечивают второй порядок аппроксимации интеграла, т.е. погрешность его вычисления пропорциональна h^2, а формула трапеций – h^3. Результат зависимости от числа n погрешности вычислений интеграла от тестовой функции по трем формулам численного интегрирования показан на Рис.5.2:

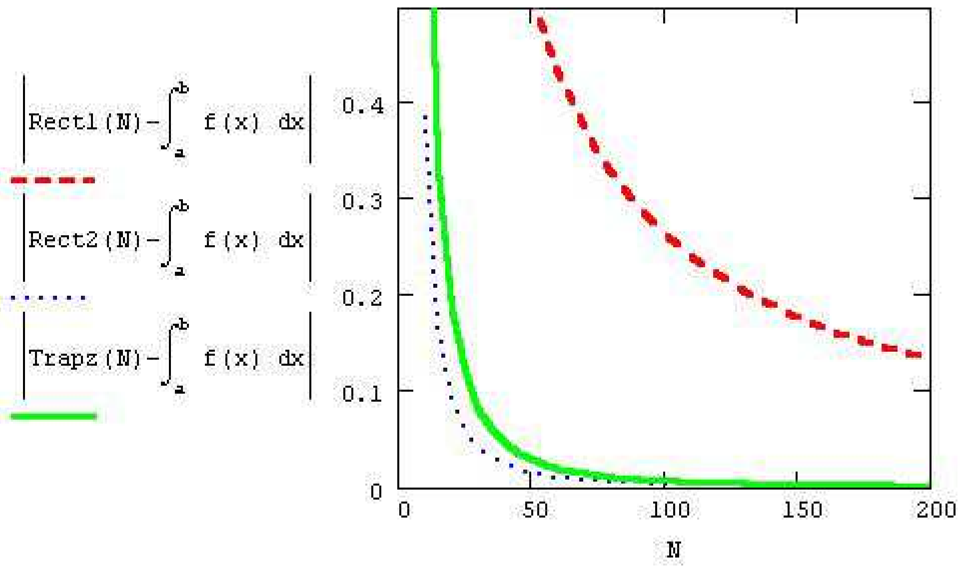


Рис.5.2.

5.4.Приближенное вычисление интеграла функции методом Симпсона

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа $L_n(x)$; для интеграла имеем приближенное равенство (5.1). Предполагается, что отрезок $[a,b]$ разбит на n частей точками (узлами) x_i, наличие которых подразумевается при построении многочлена $L_n(x)$. Для равноотстоящих узлов:

$$x_i = x_0 + ih,\ h = \frac{b-a}{n},\ x_0 = a,\ x_n = b. \tag{5.1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)\ dx \qquad (5.2)$$

При определенных допущениях получаем формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}), \qquad (5.3)$$

где y_i – значения функции в узлах интерполяции.

Имеем следующую оценку погрешности метода интегрирования по формуле трапеций (5.3):

$$|R_n| \le M\,\frac{|b-a|\cdot h^2}{12},\ \text{где}\ M = \max\left|f^{(2)}(x)\right|,\ x \in [a,b]. \qquad (5.4)$$

Во многих случаях более точной оказывается формула Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + ... + 2y_{2m-1}). \qquad (5.5)$$

Для формулы Симпсона имеем следующую оценку погрешности:

$$|R_n| \le M\,\frac{|b-a|\cdot h^4}{180},\ \text{где}\ M = \max\left|f^{(4)}(x)\right|,\ x \in [a,b]. \qquad (5.6)$$

5.5.Приближенное вычисление интеграла функции в MathCAD

Фрагмент документа MathCAD вычисления интеграла от заданной функции на отрезке $[a, b]$ по формуле трапеций и прямым способом.

$a := 0 \qquad b := 1 \qquad n := 10 \qquad h := \frac{(b - a)}{n}$

$i := 0\,..\,10 \qquad x_0 := a \qquad x_i := x_0 + i \cdot h$

$y := 0.37 \cdot e^{\sin(x)}$

$$s := h \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right)$$

$s = 0.604$

$$\int_0^1 0.37\ e^{\sin(x)}\,dx = 0.604$$

5.6. Порядок выполнения работы

Задание 1. Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке $[a,b]$ по формуле трапеций с шагом $h = 0.1$ и $h = 0.05$. Сравнить результаты. Оценить точность по формуле (5.3). Сравнить результаты. Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5.1.

Задание 2. Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке $[a,b]$ по формуле Симпсона методом повторного счета с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5.1.

Таблица 5.1

N	Функция	a	b
1	$0.37e^{\sin x}$	0	1
2	$0.5x + x\ln x$	1	2
3	$(x+1.9)\sin(x/3)$	1	2
4	$\frac{1}{x}\ln(x+2)$	2	3
5	$\frac{3\cos x}{2x+1.7}$	0	1
6	$(2x+0.6)\cos(x/2)$	1	2
7	$2.6x^2\ln x$	1.2	2.2
8	$(x^2+1)\sin(x-0.5)$	1	2
9	$x^2\cos(x/4)$	2	3
10	$\frac{\sin(0.2x-3)}{x^2+1}$	3	4

5.7. Контрольные вопросы

1. Каковы преимущества формулы парабол по сравнению с формулой трапеций и следствием чего являются эти преимущества?
2. Верны ли формулы (4.2), (4.4) для неравноотстоящих узлов?
3. В каких случаях приближенные формулы трапеций и парабол оказываются точными?
4. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага?
5. Каким способом можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?
6. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?

Лабораторная работа №6. Численное решение дифференциальных уравнений

6.1. Основные понятия и определения

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \tag{6.1}$$

Требуется найти на отрезке $[a,b]$ решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y(a) = y_0 \tag{6.2}$$

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности выполнены. Для решения используем метод Эйлера (метод первого порядка точности, расчетные формулы (6.3)) и метод Рунге-Кутта (метод четвертого порядка точности, расчетные формулы (6.4)) с шагом *h* и *2h*. Отметим, что результаты могут сильно отличаться, ввиду того, что метод Эйлера, имея только первый порядок точности, используется, как правило, для оценочных расчетов. Ориентировочную оценку погрешности метода Рунге-Кутта ε вычислить по формуле (6.5) [2].

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{6.3}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \tag{6.4}$$

где *h* – шаг дискретизации;

$$k_1 = hf(x_i, y_i),\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

$$\varepsilon = \frac{|y_{2h} - y_h|}{15} \tag{6.5}$$

Кроме того, в MathCAD имеется тринадцать встроенных функций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений различными методами. Большинство из них требуют предварительного представления дифференциального уравнения в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка.

6.2. Решение дифференциальных уравнений с помощью функции odesolve

Функция
odesolve(x, b) позволяет решать уравнение без его преобразования.
Здесь
x – переменная интегрирования,
b – верхняя граница изменения аргумента.
Нижняя граница равна нулю.

Задача 1. Используя встроенную функцию **odesolve** решить в MathCAD следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с нулевыми начальными условиями:

$$100y`` + 10(y`)^2 + 101y = 50(\frac{\sin x}{4})$$

На рис. 1. показано это решение

Итак, для решения с использованием этой функции нужно:

1. Ввести директиву **given**
2. Набрать дифференциальное уравнение. Знак производной набирается клавишей Ё английской клавиатуры, знак «=» - с логической панели,
3. набрать начальные условия,
4. набрать функцию **odesolve**,
5. сформировать график,
6. Нажать клавишу F9.

Given

$$100y''(x) + 10y'(x)^2 + 101y(x) = 50\cdot\left(\frac{\sin(x)}{4}\right) \qquad y'(0) = 0 \qquad y(0) = 0$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 200) \qquad x := 0, 0.05 .. 200$$

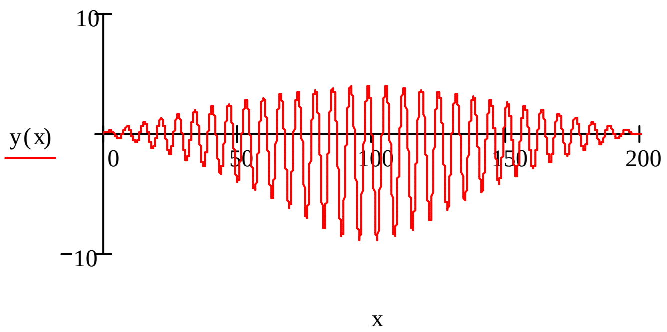


Рис.6.1. Решение в MathCAD обыкновенного дифференциального уравнения с помощью встроенной функции odesolve

Используя функцию odesolve, можно решать и системы дифференциальных уравнений первого порядка. На рис.6.2 приведено решение системы двух уравнений. Из рисунка видно, что в функцию odesolve помимо прежних данных вводится вектор имен решаемых функций

Given

$$5u'(x) + w'(x)\cdot u(x) + u(x) + 5\cdot x^3 = 0$$
$$4w'(x) + 9u(x) + 5w(x) - 7\cdot x^2 = 0$$

$$u(0) = 0 \qquad w(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, x, 10\right] \qquad x := 0, 0.1 .. 20$$

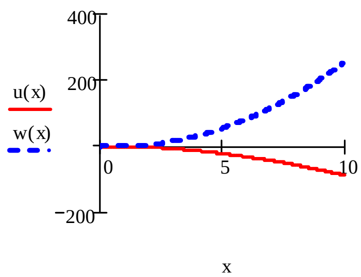


Рис.6.2.Решение системы уравнений первого порядка.

Недостатком этой функции является фиксированная нижняя граница аргумента

6.3.Решение дифференциальных уравнений с помощью функции `rkfixed`

Среди встроенных функций MathCAD для решения дифференциальных уравнений есть функция их решения методом Рунге – Кутты с постоянным фиксированным шагом. Она имеет вид:

rkfixed(v,x_0,x_k,n,F)

Здесь

v – начальные условия, записанные в виде вектора,

x_0,x_k – начальное и конечное значения аргумента,

n – число шагов,

F – правые части системы, записанные в виде вектора.

Уравнения порядка выше первого требуется преобразовывать в систему первого порядка. Разберем сначала, как это делается применительно к пакету MathCAD.

Любое обыкновенное дифференциальное уравнение выше первого порядка может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, число которых равно порядку преобразуемого уравнения. Покажем это на примере дифференциального уравнения третьего порядка.

Дано

$$ay'''+by''+cy'+dy=f(x) . \qquad (6.6)$$

Введем подстановки:

$$y'' = y_0, \qquad (6.7)$$

$$y' = y_1, \qquad (6.8)$$

$$y = y_2. \qquad (6.9)$$

Тогда уравнение (6.6) запишется в виде:

$$ay_0'+by_0+cy_1+dy_2=f(x) . \qquad (6.10)$$

Это первое уравнение первого порядка будущей системы.

Продифференцируем уравнение (6.8). Получим

$$y''=y_1'. \qquad (6.11)$$

Левые части уравнений (6.7) и (6.9) равны. Следовательно, равны и их правые части. Отсюда

$$y_1'=y_0. \qquad (6.12)$$

Продифференцируем уравнение (6.9). Получим

$$y'=y_2'. \qquad (6.13)$$

Левые части уравнений (6.8) и (6.13) равны, следовательно, равны и их правые части. Тогда

$$y_2'=y_1. \qquad (6.14)$$

Мы получили систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &ay_0'+by_0+cy_1+dy_2=f(x) \\ &y_1'=y_0 \\ &y_2'=y_1 \end{aligned} \qquad (6.15)$$

Разрешив первое уравнение относительно производной, окончательно получим:

$$\begin{aligned} &y_0'=-by_0/a-cy_1/a-dy_2/a+f(x)/a \\ &y_1'=y_0 \\ &y_2'=y_1 \end{aligned} \qquad (6.16)$$

В качестве иллюстрационного примера рассмотрим метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом применительно к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt}+1.33\frac{dy}{dt}+1.667y=0$$

при заданных начальных условиях

$$t_0 = 0,\ y(0) = 1,\ \frac{dy}{dt} = 0$$

и заданном конце вычислений:

$$t_k = 13.$$

Проведя преобразование в систему уравнений первого порядка, получим:

$$\frac{dy}{dt} = -1.33y_0 - 1.667y_1$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_0.$$

Начальные условия примут вид:

$$y_0(0) = 0,\ y_1(0) = 1.$$

Записав правые части и начальные условия в виде векторов, получим

$$f(t, y) = \begin{bmatrix} -1.33y_0 - 1.66y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

где f(t, y) – это вектор правых частей системы.

При его формировании надо обратить внимание на следующее:

1.Вместо буквы f можно использовать любую другую букву. Но тогда и во встроенной функции нужно, естественно, использовать ту же букву.

2.Внутри скобок первое имя (в нашем случае t) является именем аргумента, по которому происходит интегрирование дифференциального уравнения. Т. е. опять - таки это может быть и другая буква.

3.Вторая буква внутри скобок – это вектор имен зависимых переменных. Им эти имена полностью определяются. Если принято имя *y*, то именами переменных должны являться y_0, y_1, y_2 и т.д.,

причем первое уравнение – это dy_0/dt =……,

второе уравнение – это dy_1/dt = ……

и т.д.

На рис.6.3 приведено решение этой системы.

Ответ получен в виде вектора и в виде графика. В первой строке этого вектора показаны номера переменных: z_0 это время, z_1 - производная y_0, z_2 - сама функция y. Выведены только первые 11 значений вектора ответа.

Начальные условия заданы встроенным вектором v.

Ранжировка j := 0..1000 относится не к функции rkfixed , а к графику. Для встроенной функции число точек решения задано числом 1000 внутри нее.

Внутри функции указано время интегрирования 0 –13 .

По оси абсцисс графика отложен первый столбец матрицы ответов $z_{j,0}$ - аргумент (в нашей задаче – время t), где j =0..1000.

По оси ординат отложена переменная $z_{j,2}$

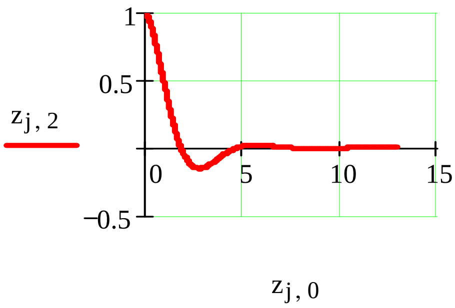
$$F(t, y) := \begin{pmatrix} -1.333 \cdot y_0 - 1.667 \cdot y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 13, 1000, F\right]$$

$$j := 0 .. 1000$$

$z =$

	0	1	2
0	0	0	1
1	0.013	-0.021	1
2	0.026	-0.043	0.999
3	0.039	-0.063	0.999
4	0.052	-0.084	0.998
5	0.065	-0.104	0.997
6	0.078	-0.123	0.995
7	0.091	-0.143	0.993
8	0.104	-0.161	0.991
9	0.117	-0.18	0.989
10	0.13	-0.198	0.987
11	0.143	-0.216	0.984
12	0.156	-0.233	0.981
13	0.169	-0.25	0.978
14	0.182	-0.267	0.975
15	0.195	-0.283	0.971



и

Рис.6.3. Решение дифференциального уравнения с помощью функции rkfixed.

6.4. Построение фазовых портретов

Фазовым портретом называется график функции в координатах y`(y). Фазовые портреты используются в теории автоматического управления для определения переходных процессов в автоматических системах.

Построим фазовый портрет для дифференциального уравнения второго порядка, записанного в форме:

$$T^2 y`` + 2T\xi y` + y = 0$$

:

$$y(0) = 0$$

$$y`(0) = 1$$

Здесь T- постоянная времени, ξ – коэффициент затухания.

Решаются три одинаковых дифференциальных уравнения с одинаковыми начальными условиями, но с разными коэффициентами затухания.

$T := 10$ $\xi := 0$

$$f1(t, y1) := \begin{pmatrix} \dfrac{-2\xi \cdot T \cdot y1_0 - y1_1}{T^2} \\ y1_0 \end{pmatrix} \qquad z1 := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 100, 1000, f1\right]$$

$\xi := 0.1$

$$f2(t, y2) := \begin{pmatrix} \dfrac{-2\xi \cdot T \cdot y2_0 - y2_1}{T^2} \\ y2_0 \end{pmatrix} \qquad z2 := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 100, 1000, f2\right]$$

$\xi := -0.1$

$$f3(t, y3) := \begin{pmatrix} \dfrac{-2\xi \cdot T \cdot y3_0 - y3_1}{T^2} \\ y3_0 \end{pmatrix} \qquad z3 := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 100, 1000, f3\right]$$

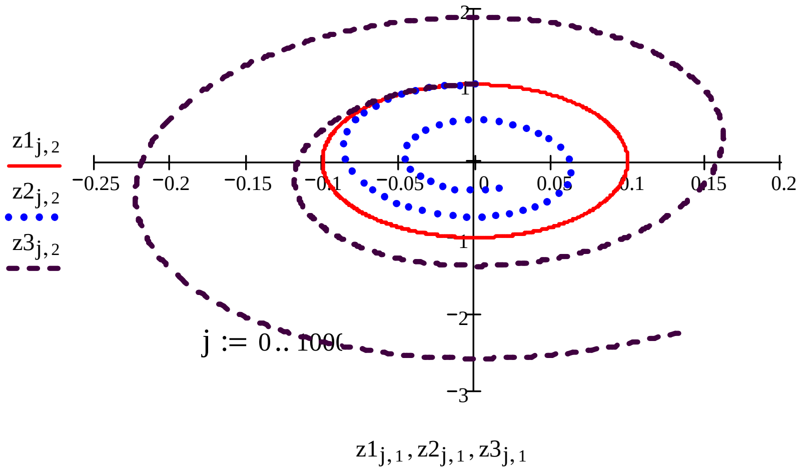


Рис.6.4. Фазовые портреты

Все три решения начинаются в одной точке (0,1). Но первая сплошная кривая при $\xi=0$ – эллипс, характеризует консервативную систему, незатухающие гармонические колебания.

Вторая пунктирная кривая при $\xi=0.1$ – затухающая кривая, характеризует затухающие колебания, такая система является устойчивой (это характерно для всех $0 < \xi < 1$).

Третья кривая пунктиром – при $\xi = -0.1$ характеризует неустойчивую колебательную систему.

Возможно решение тем же методом с автоматическим выбором шага. Для этого служит функция

rkadapt(y, x1, x2, n points, D).

6.5. Решение дифференциальных уравнений методом Буль-Штейера

Электронный учебник по MathCAD утверждает, что численный метод Буль – Штейера дает более точное решение, чем метод Рунге Кутта. Ниже на рис.5 приведено решение этим методом нелинейной системы второго порядка:

с начальными условиями

$$x_0(0) = 50 \qquad \frac{dx_0}{dt} = x_0(0.01x_1 - 1)$$

$$x_1(0) = 2000 \qquad \frac{dx_1}{dt} = -0.01x_0x_1$$

Из рисунка видно, что последовательность решения не отличается от последовательности решения методом Рунге-Кутта.

$$f(t, x) := \begin{bmatrix} x_0 \cdot (0.01 \cdot x_1 - 1) \\ -0.01 \cdot x_0 \cdot x_1 \end{bmatrix} \qquad j := 0 .. 100 \qquad z := \mathrm{Bulstoer}\left[\begin{pmatrix} 50 \\ 2000 \end{pmatrix}, 0, 13, 1000, f\right]$$

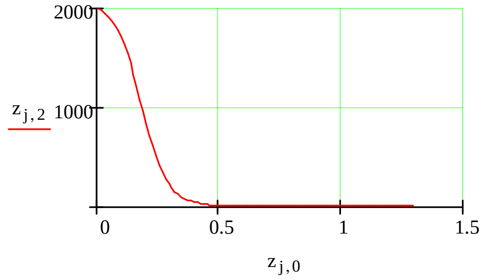


Рис.6.5.Решение дифференциального уравнения
методом Буль - Штейера

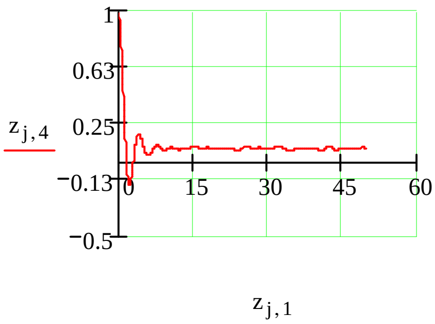
6.6. Дифференциальные уравнения со случайной составляющей

MathCAD позволяет решать дифференциальные уравнения, коэффициенты которого являются случайными функциями. При этом, конечно, каждая реализация решения будет отличаться от предыдущей.

Ниже, на рис.6.6 показано решение уравнения третьего порядка, свободный член которого реализуется функцией **rnd** –возвращающей равномерно распределенную случайную величину в пределах 0 – 1.

$j := 1..1024$

$$z := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, 0, 50, 1024, f\right] \qquad f(t,y) := \begin{pmatrix}-3\cdot y_1 - 5y_2 - 6y_3 + \mathrm{rnd}(1)\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$



z =

	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	0.049	-0.249	$-6.172\cdot10^{-3}$	1
3	0.098	-0.455	-0.023	0.999
4	0.146	-0.629	-0.05	0.997
5	0.195	-0.768	-0.084	0.994
6	0.244	-0.88	-0.125	0.989
7	0.293	-0.969	-0.17	0.982
8	0.342	-1.052	-0.219	0.972
9	0.391	-1.092	-0.272	0.961
10	0.439	-1.112	-0.326	0.946
11	0.488	-1.114	-0.38	0.929
12	0.537	-1.097	-0.434	0.909
13	0.586	-1.071	-0.487	0.886
14	0.635	-1.015	-0.538	0.861
15	0.684	-0.964	-0.587	0.834
16	0.732	-0.891	-0.632	0.804

Рис.6.6. Решение дифференциального уравнения со случайными параметрами

6.7. Решение линейных дифференциальных уравнений высших порядков

Дифференциальное уравнение порядка *n*

$$a_n \frac{d^n y}{dx_n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^n} + ...a_1\frac{dy}{dx} + a_0 = f(x)$$

называется линейным, если все его коэффициенты a_n(n =0,1,…) являются числами или функциями аргумента x.

Дифференциальное уравнение называется нелинейным, если хотя бы один из этих коэффициентов зависит от искомой функции *y*, или ее производных.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y`(0) = 1$$

При заданных параметрах Т и ξ указанное дифференциальное уравнение является линейным с постоянными коэффициентами. В теории автоматического управления линейное уравнение, записанное в такой форме, называется типовым динамическим звеном второго порядка.

При Т= 10 исследуем влияние на решение изменения численного значения коэффициента ξ**,** определенного в диапазоне как

ξ ={ - 0.5, 0, 0.5, 5 }

Убедимся, что

при **ξ =5** решение - монотонно затухающая кривая,

при ξ =0 решение - чистая синусоида,

при ξ = -5 решение - монотонно расходящаяся кривая.

при ξ = -0,5 решение расходящаяся синусоида;

при ξ =0,5 - решение затухающее колебательное,

Следовательно, если данным дифференциальным. уравнением описывается какая - либо реальная система (а это бывает сплошь и рядом), то при **ξ= 0,-0.5, -5** система неработоспособна, т.к. является **неустойчивой.**

Коэффициент ξ в данном уравнении называют коэффициентом затухания.

При ξ = 0.5 исследуем теперь влияние на решение изменения численного значения величины коэффициента Т, определенного в диапазоне как

Т= { 1, 5, 10, 25 }.

Убедимся, что увеличение Т ведет к увеличению запаздывания системы. Коэффициент Т называют **линейным запаздыванием.**

Если в любом дифференциальном уравнении и правая часть равна 0 и заданы нулевые начальные условия, то его решение будет также тождественно равно 0. Начальные условия и правая часть являются **возмущениями.**

При Т= 10, ξ = 0.5 исследуем влияние на решение изменения численного значения величины начальных условий (возмущений), определенных в диапазоне как

y_0 = {10, 100}.

Мы видим, что в этом случае характер решения не изменился, устойчивая система продолжает оставаться устойчивой при увеличении возмущений.

Пример решения линейного уравнения. Задано одно и то же уравнение, но разные начальные условия (различное возмущение).

$3d^2y/dt^2 +0,8dy/dt +6y=0$
$t_0 =0, y_0= 10 , dy/dt_{t=0} =0$

$3d^2z/dt^2 +0,8dz/dt +6z=0$
$t_0 =0, z_0 =100, dz/dt_{t=0} =0$

$j := 0..1000$

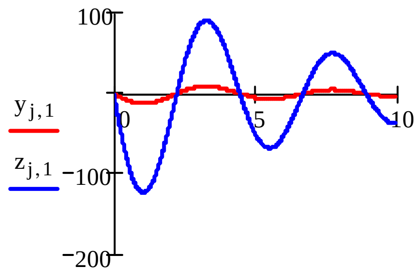


Рис.6.7. Влияние начальных условий на решение линейного дифференциального уравнения.

Легко видеть, что характер решения не изменился. В обоих случаях - затухающие колебания с одинаковой частотой.

6.8. Решение нелинейных дифференциальных уравнений

Опыт показывает, что решение дифференциальных уравнений в численном виде приводит к тому, что студенты не понимают принципиального отличия нелинейных систем от линейных.

Аналитическое решение подчеркивает это различие, а численное решение – стирает.

Если решение линейных дифференциальных уравнений полностью определяется параметрами (коэффициентами) этих уравнений, то решение нелинейных уравнений зависит также и от величины возмущений.

Пример решения нелинейного уравнения

Рассмотрим решение двух одинаковых нелинейных дифференциальных уравнений с различными начальными условиями.

$d^2y/dt^2 +1,53\ dy/dt *y +0,16y=0$
$t_0 =0, y_0 =0,5 \quad , dy/dt_{t=0} =0$

$d^2z/dt^2 +1,53dz/dt*z +0,16z =0$
$t_0=0 , z_0 =3 , \ dz/dt_{t=0} =0$.

На рис.2 показаны решения обоих уравнений.

$$f(t,y) := \begin{pmatrix} -1.53 y_0 \cdot y_1 - 0.16 y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad F(t,z) := \begin{pmatrix} -1.53 z_0 \cdot z_1 - 0.16 z_1 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$y := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, 0, 100, 1000, f\right] \qquad z := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, 0, 100, 1000, F\right]$$

$$j := 0..1000$$

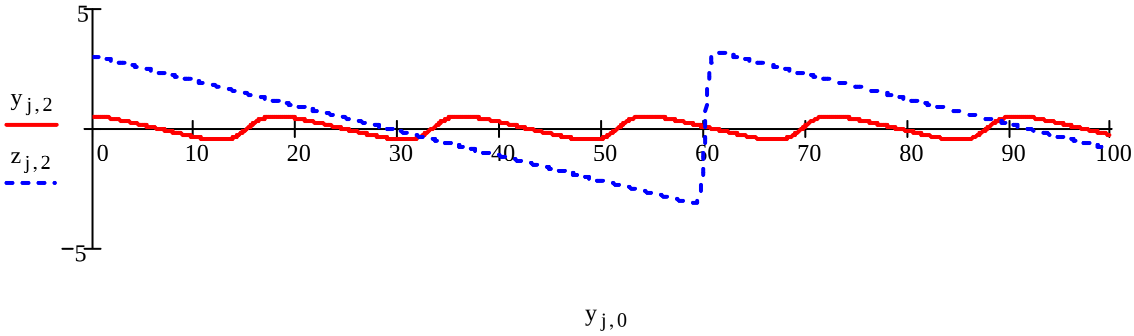


Рис.6.8. Влияние начальных условий на
решение нелинейного дифференциального уравнения.

Вывод: При изменении начальных условий изменилась форма кривой и период колебаний.

6.9. Символьное решение линейных дифференциальных уравнений

Символьное решение линейных дифференциальных уравнений проводится классическим способом, через решение характеристического уравнения с последующим определением констант методом вариации постоянных.

Разберем символьное решение следующего линейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$0.01\frac{d^3y}{dt^3} + 0.1\frac{d^2y}{dt^2} + 0.1\frac{dy}{dt} + 0.01 = 7 \qquad y(0) = 8.1, \quad y`(0) = 0, \quad y``(0) = 0$$

Его характеристическое уравнение:

$$0.01s^3 + 0.1s^2 + 0.1s + 0.01 = 0$$

Мы решаем его символьно

$$0.01 \cdot s^3 + 0.1 \cdot s^2 + 0.1 \cdot s + 0.01 \text{ solve}, s \rightarrow \begin{pmatrix} -1. \\ -8.8874821936960610302 \\ -.1125178063039389697 \end{pmatrix}$$

Однако полученные корни имеют слишком много знаков. Для уменьшения числа значащих цифр найдем эти корни с одновременным переводом их с помощью оператора float (плавающая точка) в форму с плавающей точкой.

$$0.01 \cdot s^3 + 0.1 \cdot s^2 + 0.1 \cdot s + 0.01 \;\Bigg|\; \begin{matrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1. \\ -8.89 \\ -.113 \end{pmatrix}$$

Поставив float 3 , мы ограничились тремя значащими знаками. Установка двух операторов производится автоматически нажатием последовательно двух кнопок на панели символьных вычислений.

Отсюда частные решения имеют вид:

$y1(t) := \exp(-t) \qquad y2(t) := \exp(-8.89 \cdot t) \qquad y3(t) := \exp(-0.113 \cdot t)$

и общее решение равно

$$y = C1\ e^{-8.89t} + C2\ e^{-t} + C3\ e^{-0.113t}$$

Решая систему алгебраических уравнений, определяем C1,C2,C3.

given

$$C1 \cdot y1(t) + C2 \cdot y2(t) + C3 \cdot y3(t) = 0$$

$$C1 \cdot \frac{d}{dt} y1(t) + C2 \cdot \frac{d}{dt} y2(t) + C3 \cdot \frac{d}{dt} y3(t) = 0$$

$$C1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y1(t) + C2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y2(t) + C3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y3(t) = 7$$

$$\text{find}(C1, C2, C3)\ \text{float}, 3 \ \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-1.00}{\left[e^{(-.100e\text{-}2) \cdot t}\right]^{1000}} \\ \dfrac{.101}{\left[e^{(-.100e\text{-}2) \cdot t}\right]^{8890}} \\ \dfrac{.899}{\left[e^{(-.100e\text{-}2) \cdot t}\right]^{113}} \end{bmatrix}$$

Используя оператор simplify(упростить. Соответствующая кнопка символьной панели), упрощаем найденное решение

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-1.00}{\left[e^{(-.100e\text{-}2) \cdot t}\right]^{1000}} \\ \dfrac{.101}{\left[e^{(-.100e\text{-}2) \cdot t}\right]^{8890}} \\ \dfrac{.899}{\left[e^{(-.100e\text{-}2) \cdot t}\right]^{113}} \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-1.) \cdot e^{t} \\ .101 \cdot e^{8.89 \cdot t} \\ .899 \cdot e^{.113 \cdot t} \end{bmatrix}$$

Интегрируем

$$\int -e^{t}\, dt\ \text{float}, 3 \ \rightarrow (-1.) \cdot e^{t}$$

$$\int 0.101 e^{8.89 \cdot t}\, dt\ \text{float}, 3 \ \rightarrow .114e\text{-}1 \cdot e^{8.89 \cdot t}$$

$$\int .899 \cdot e^{.113 \cdot t}\, dt \text{ float}, 3 \ \rightarrow 7.96 \cdot e^{.113 \cdot t}$$

Прибавляем постоянные интегрирования

$$\begin{bmatrix} (-1.) \cdot e^{t} \\ .114\text{e-}1 \cdot e^{8.89 \cdot t} \\ 7.96 \cdot e^{.113 \cdot t} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} C11 \\ C12 \\ C13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (-1.) \cdot e^{t} + C11 \\ .114\text{e-}1 \cdot e^{8.89 \cdot t} + C12 \\ 7.96 \cdot e^{.113 \cdot t} + C13 \end{bmatrix}$$

Формируем общее решение

$$\begin{pmatrix} y1(t) \\ y2(t) \\ y3(t) \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{bmatrix} (-1.) \cdot e^{t} + C11 \\ .114\text{e-}1 e^{8.89 t} + C12 \\ 7.96 e^{.113 t} + C13 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow .200\text{e-}3 \left[.349\text{e}5 e^{t} + .500\text{e}4 C11 + .500\text{e}4 e^{(-7.89) \cdot t} \cdot C12 + .500\text{e}4 e^{.887 \cdot t} \cdot C13 \right] \cdot e^{(-1.) \cdot t}$$

Для определения констант дифференцируем два раза с упрощением

$$\frac{d}{dt}\left[.200\text{e-}3 \left[.349\text{e}5 e^{t} + .500\text{e}4 C11 + .500\text{e}4 e^{(-7.89) \cdot t} \cdot C12 + .500\text{e}4 e^{.887 \cdot t} \cdot C13 \right] \cdot e^{(-1.) \cdot t} \right] \Bigg| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow (-8.89) \cdot e^{(-8.89) \cdot t} \cdot C12 - .113 e^{(-.113) \cdot t} \cdot C13 - 1. \cdot e^{(-1.) \cdot t} \cdot C1$$

Приравнивая нулю время t, составляем уравнения для определения констант

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[.200\text{e-}3 \left[.349\text{e}5 e^{t} + .500\text{e}4 C11 + .500\text{e}4 e^{(-7.89) \cdot t} \cdot C12 + .500\text{e}4 e^{.887 \cdot t} \cdot C13 \right] \cdot e^{(-1.) \cdot t} \right] \Bigg| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow 79.0 e^{(-8.89) \cdot t} \cdot C12 + .128\text{e-}1 e^{(-.113) \cdot t} \cdot C13 + e^{(-1.) \cdot t} \cdot C1$$

given

$$C11 + C12 + C13 = 8.1$$
$$-8.89 C12 - 0.113 C13 - C11 = 0$$

$$-79 \cdot C12 + 0.128 C13 + C11 = 0$$

$$\text{find}(C11, C12, C13) \text{ float}, 3 \ \rightarrow \begin{pmatrix} -1.05 \\ .156\text{e-}2 \\ 9.15 \end{pmatrix}$$

Общее решение принимает вид:

$$y(t) := 200\text{e-}3 \left[.349\text{e}5 e^{t} + .500\text{e}4 (-1.05) + .500\text{e}4 e^{(-7.89) \cdot t} \cdot 0.00156 + .500\text{e}4 e^{.887 \cdot t} \cdot 9.15 \right] \cdot e^{(-1.) \cdot t}$$

Упрощаем выражение:

$$y(t) \ \Bigg| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow .400\text{e-}1 \cdot \left[.175\text{e}6 e^{t} - .263\text{e}5 + 39. \cdot e^{(-7.89) \cdot t} + .229\text{e}6 e^{.887 \cdot t} \right] \cdot e^{(-1.) \cdot t}$$

Окончательное выражение для общего решения:

$$y(t) := .400\text{e-}1 \cdot \left[.175\text{e}6 e^{t} - .263\text{e}5 + 39. \cdot e^{(-7.89) \cdot t} + .229\text{e}6 e^{.887 \cdot t} \right] \cdot e^{(-1.) \cdot t}$$

Строим график:

t := 0.. 100

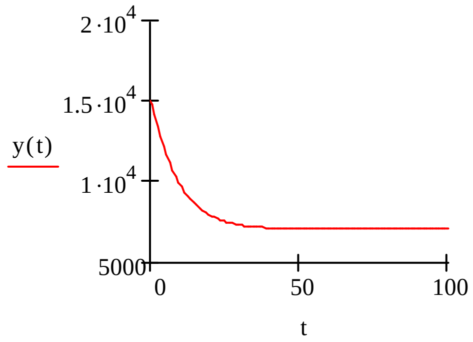


Рис.6.9.

6.10. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Краевая задача решается в MathCAD методом пристрелки с помощью встроенной функции **sbval**. Эта функция на основании заданных конечных условий вычисляет начальные условия. После этого задача сводится к задаче Коши и ее можно решить, используя известную функцию **rkfixed.**

Функция **sbval** имеет вид:

sbval(v,x1,x2,f,load,score).

Здесь: **v**-вектор незаданных начальных условий, т.е. тех начальных условий, вместо которых заданы конечные условия. Обычно выбираем все компоненты v, равными 1;

x1, x2- начальное и конечное значения аргумента, т.е. интервал решения дифференциального уравнения;

f(x,y)- векторная функция, содержащая правые части дифференциального уравнения , та же, что используется при решении дифференциального уравнения с помощью **rkfixed**;

load(x_1,v) -вектор всех начальных условий. Сюда помещаются все заданные начальные условия, а вместо незаданных помещаются компоненты вектора v;

score(x2, y)- вектор конечных условий, в который помещаются разности между текущими значениями тех переменных, для которых заданы конечные условия, и их численными значениями.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим однородное дифференциальное уравнение пятого порядка

$$\frac{d^5 y}{dx^5} + y = 0$$

Задан интервал решения: 0, 1.

Для уравнения пятого порядка должны быть заданы пять граничных условий.

Заданы начальные условия y(0)=0 , $dy/dx_{\,x=0}$ =7

и конечные условия y(1) = 1 , $dy/dx_{\,x=1}$ = 10 , $d2y/dx^2_{\,x=1}$ = 5 .

Сформируем для трех не заданных начальных условий вектор v ,присвоив всем его элементам единичные значения

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Сформируем вектор f(x,y). Для этого введем подстановки:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y_0$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = y_1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2$$
$$\frac{dy}{dx} = y_3$$
$$y = y_4$$

Вместо одного уравнения пятого порядка мы имеем теперь систему из пяти уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_0}{dx} + y_4 = 0$$
$$\frac{dy_1}{dx} = y_0$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1$$
$$\frac{dy_3}{dx} = y_2$$
$$\frac{dy_4}{dx} = y_3$$

Разрешив первое уравнение этой системы относительно производной, получим :

$$\frac{dy_0}{dx} = -y_4$$
$$\frac{dy_1}{dx} = y_0$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1$$
$$\frac{dy_3}{dx} = y_2$$
$$\frac{dy_4}{dx} = y_3$$

$$xn := 0 \qquad xk := 1 \qquad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad load(xn, v) := \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad score(xk, y) := \begin{pmatrix} y_2 - 5 \\ y_3 - 10 \\ y_4 - 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$f(t,y)=\begin{bmatrix}-y_4\\ y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

Сформируем вектор

$$load(xn,v)=\begin{bmatrix}0\\ 7\\ v_0\\ v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

Здесь xn - начальное значение x, а вектор заполняется следующим образом: была проведена подстановка

$$\frac{d^4y}{dx^4}=y_0$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=y_1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=y_2$$
$$\frac{dy}{dx}=y_3$$
$$y=y_4$$

После которой вектор переменных приобрел следующий вид:

$$\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}$$

С учетом подстановки нам заданы $y_0 = 0$ и $y_1=7$. Остальные начальные условия неизвестны и мы заполняем их вектором v.

Сформируем вектор score(xk,y) для заданных конечных условий:

$$score(xk,y)=\begin{bmatrix}y_0-1\\ y_1-10\\ y_2-5\end{bmatrix}$$

Вектор включает те переменные, для которых заданы конечные значения.

Все вышеперечисленные действия были произведены в MathCAD, и было получено искомое решение, приведенное на Рис.6.10.

$$xn := 0 \qquad xk := 1 \qquad score(xk,y) := \begin{pmatrix}y_2-5\\ y_3-10\\ y_4-1\end{pmatrix} \qquad load(xn,v) := \begin{pmatrix}v_0\\ v_1\\ v_2\\ 7\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x,y) := \begin{pmatrix} -y_4 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad S := \mathrm{sbval}(v, 0, 1, f, \mathrm{load}, \mathrm{score})$$

$$y := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -516.257 \\ 348.107 \\ -85.014 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, xn, xk, 1000, f\right] \qquad j := 0..100($$

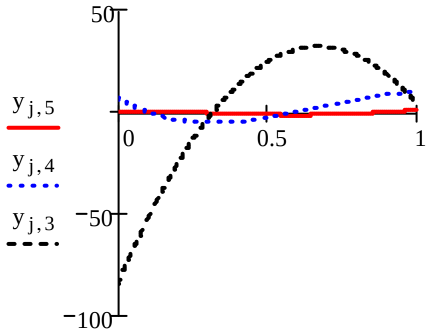


Рис.6.10. Решение краевой задачи в MathCAD.

Функция sbval вычисляет неизвестные начальные условия, а мы затем вводим их в функцию rkfixed и получаем решение.

На графиках приведены те кривые, для которых заданы конечные условия, чтобы можно было убедиться в их выполнении, а именно $y_3(x)$, $y_4(x)$, $y_5(x)$.

Ниже приведены вычисленные начальные и конечные значения переменных. Весь диапазон решения разбит нами на 1000 точек (j=0..1000), поэтому $y_{0,0}$ - это начальное, а $y_{1000,0}$ - конечное значения y_0. То же относится к другим переменным.

$$y_{0,5} = 0 \qquad y_{1000,5} = 1 \qquad y_{0,4} = 7 \qquad y_{1000,4} = 10 \qquad y_{1000,3} = 5$$

Как видим, вычисленные значения совпадают с заданными.

6.11. Решение линейных уравнений с переменными коэффициентами

В качестве иллюстративного примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами следующего вида:

$$y'' + xy' + x^2 y = x$$

В таких уравнениях коэффициенты при переменной являются функцией независимой переменной - аргумента, в нашем случае x.

Задан интервал вычислений 0<= x <=5, заданы конечные условия y(5) =2, $y'(5) = 3$.

Нестационарные дифференциальные уравнения относятся к классу линейных, однако их аналитическое решение обычно затруднено, и их проще решать численно.

Перейдя к системе дифференциальных уравнений первого порядка, имеем (проделать самостоятельно):

$$y_0' = -xy_0 - x^2 y_1 + x$$
$$y_1' = y_0$$

Далее составляем все необходимые функции, как показано на Рис.6.11 и проводим решение.

$xn := 0$ $\quad xk := 5$ $\quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad load(xn, v) := v$ $\quad score(xk, y) := \begin{pmatrix} y_0 - 3 \\ y_1 - 2 \end{pmatrix}$

$f(x, y) := \begin{pmatrix} -x \cdot y_0 - x^2 \cdot y_1 + x \\ y_0 \end{pmatrix}$ $\quad s := sbval(v, xn, xk, f, load, score)$ $\quad s =$

$y := rkfixed(s, xn, xk, 1000, f)$ $\quad j := 0..1000$

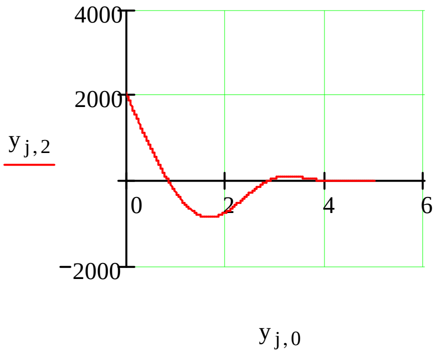


Рис.6.11. Решение краевой задачи для нестационарного дифференциального уравнения

Это уравнение является сложным для компьютера, что видно из длительности его решения.

Проверим вычисление крайних точек:

$y_{0,2} = 2.073 \times 10^3$ $\quad y_{1000,2} = 2$ $\quad y_{0,1} = -2.673 \times 10^3$ $\quad y_{1000,1} = 3$

Как видим, конечные значения совпали с заданными.

6.12. Порядок выполнения работы

Задача 1. Используя функцию odesolve, решить самостоятельно приведенные ниже дифференциальные уравнения. Построить графики решения:

$$y`` + 5y` + 10y = 5x \qquad y``` + 50y`` + y`y + 9y = 0$$
$$y`(0) = 0 \qquad y``(0) = 2$$
$$y(0) = 0 \qquad y`(0) = 0$$
$$y(0) = 8$$

Задача 2. Решить в MathCAD дифференциальное уравнение второго порядка

$$T^2\, d^2 y/dt^2 + \xi\, T\, dy/dt + y = 0$$

при начальных условиях $t_0 = 0$, $y(t_0) = 1$, $dy/dt\ (t_0) = 0$ и заданных значениях параметров $T=10$, $\xi = 0.5$.

Задача 3. Решить в MathCAD самостоятельно следующие дифференциальные уравнения:

$3d^2y/dx^2 + 5\ dy/dx + 6\ y = 0 \quad x_0 = 0,\ y(x_0) = 2,\ dy/dx\ (x_0) = 0.\quad x_{лон} = 20,\ n = 500.$

$5d^3y/dt^3 + 9\ d^2y/dt^2 – 2dy/dt + 8y = 1/(t+1).\ y(0)=0,\ y`(0)=1,\ y``(0)=0.$

Задача 4. Решить самостоятельно приведенные ниже системы уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
&y`(x) + y(x)z(x) + 8x = 0\\
&z`(x) + 8z(x) - 10 = 0\\
&y(0) = 1\\
&z(0) = 5
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&u`(t)w(t) + u(t) - 3t = 0\\
&w`(t) - w(t) + t^2 = 0\\
&u(0) = 0\\
&w(0) = 0
\end{aligned}
$$

Задача 5. Решить линейное дифференциальное уравнение :

$$
\begin{aligned}
&T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = 0\\
&y(0) = 0\\
&y`(0) = 1
\end{aligned}
$$

для T=10 и ξ = -2, -0.5, 0, 0.5, 5.

Убедиться, что:
При ξ = -2 решение – расходящийся апериодический процесс;
при ξ = -0.5 – решение – расходящийся периодический процесс;
при ξ =0 – решение незатухающие гармонические колебания;
при ξ= +0.5 – решение затухающие колебания;
при ξ = +5 – решение апериодический сходящийся процесс.

Задача 6. Решить линейное дифференциальное уравнение :

$$
\begin{aligned}
&T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy}{dt} + y = 0\\
&y(0) = 0\\
&y`(0) = 1
\end{aligned}
$$

для ξ = 2 и T = 0.5, 5, 10.

Убедиться, что увеличение коэффициента линейного запаздывания T приводит к уменьшению наклона решения - экспоненты .

Задача 7. Используя функцию odesolve, решить самостоятельно приведенные ниже дифференциальные уравнения. Построить графики решения:

$$
\begin{aligned}
&y`` + 5y` + 10y = 5x\\
&y`(0) = 0\\
&y(0) = 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&y``` + 50y`` + y`y + 9y = 0\\
&y``(0) = 2\\
&y`(0) = 0\\
&y(0) = 8
\end{aligned}
$$

Задача 8. Решить в MathCAD дифференциальное уравнение второго порядка

$$T^2\ d^2\ y/dt^2 + \xi\ T\ dy/dt + y = 0$$

при начальных условиях $t_0 = 0$, $y(t_0) = 1$, $dy/dt\ (t_0) = 0$ и заданных значениях параметров $T=10$, $\xi = 0.5$.

Задача 9. Решить в MathCAD самостоятельно следующие дифференциальные уравнения:
$3d^2y/dx^2 + 5\ dy/dx + 6\ y = 0$ $x_0 = 0$, $y(x_0) = 2$, $dy/dx\ (x_0) = 0$. $x_{лон} = 20$, $n=500$.

$5d^3y/dt^3 + 9\ d^2y/dt^2 - 2dy/dt + 8y = 1/(t+1)$. $y(0)=0$, $y`(0)=1$, $y``(0)=0$.

Задача 10. Решить самостоятельно приведенные ниже системы уравнений первого порядка

$$y`(x) + y(x)z(x) + 8x = 0$$
$$z`(x) + 8z(x) - 10 = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$z(0) = 5$$

$$u`(t)w(t) + u(t) - 3t = 0$$
$$w`(t) - w(t) + t^2 = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$w(0) = 0$$

Задача 11. Так как алгебраические уравнения с буквенными коэффициентами выше третьей степени символьно не решаются в MathCAD, то и линейные дифференциальные уравнения с буквенными коэффициентами выше третьего порядка решены быть не могут.
УТОЧНИТЬ.

6.13. Контрольные вопросы

1. Проверить для дифференциального уравнения условия теоремы существования и единственности.
2. На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
4. Каков геометрический смысл решения дифференциального уравнения методом Эйлера?
5. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутта?
6. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта?
7. Как вычислить погрешность по заданной формуле, используя метод двойного пересчета?