МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)
Кафедра моделирования и системного анализа (МиСА)

В.Г. Баранник, Е.В. Истигечева

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам

Томск 2014

Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Вычислительная математика / Методические рекомендации к лабораторным работам – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Кафедра моделирования и системного анализа, 2014. – 77 с.

Содержание

Лабораторная работа № 1. Математическая система Matlab

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов элементарные сведения, умения и навыки работы с математическим пакетом ***Matlab***.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполнить задание, соответствующее номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте его преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - исходные данные варианта;
   - последовательность действий для решения задачи;
   - результаты решения задачи.

Окна системы *Matlab*

Matlab (MATrix LABoratory) - интерактивный матрично-ориентированный пакет, предназначенный для выполнения научных и инженерных расчетов.

По умолчанию после запуска пакета *Matlab* на экране появляется комбинированное окно, включающее четыре наиболее важные панели (рис. 1.2):

◙ **Command Window** (Окно команд) - самая используемая панель. В ней набирают команды пользователя, подлежащие немедленному исполнению. Здесь же выдаются результаты выполненных команд.

◙ **Command History** (История команд) хранит все команды, набираемые пользователем, однако в отличие от содержимого Command Window (Окно команд) сюда не попадают сообщения системы и результаты вычислений.

◙ **Workspace** (Рабочее пространство) отображает текущий набор переменных, заведенных пользователем в командном окне.

◙ **Current Directory** (Текущий каталог) является аналогом известной программы Проводник, но имеет для MATLAB свое особое предназначение. Дело в том, что, кроме работы с математическими выражениями из командного окна, пользователь также может работать с файлами.

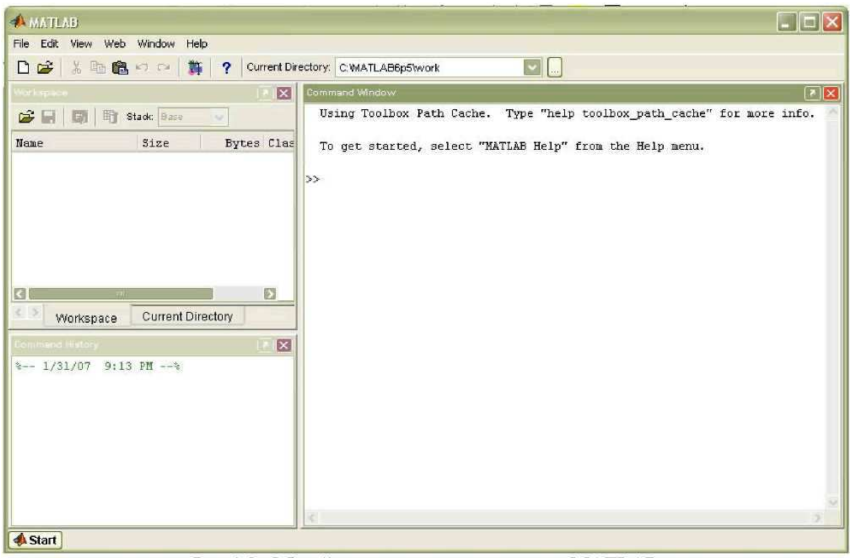

Рис.1.2. Общий вид главного окна пакета *Matlab*

Главное меню системы

Главное меню *Matlab* содержит следующие шесть пунктов:

◙ **File** (Файл) - работа с файлами;
◙ **Edit** (Правка) - редактирование;
◙ **View** (Вид) - управление окнами;
◙ **Web** - связь с фирмой-разработчиком через Интернет;
◙ **Window** (Окно) - связь с окнами системы;
◙ **Help** (Справка) - связь со справочной системой *Matlab*.

Меню **File** содержит следующие команды:

◙ New (Создать) предоставляет возможность создать новый объект, а именно:
◙◙ **M-File** (М-файл) - файл с расширением m, в который записываются программы;
◙◙ **Figure** (Фигура) - специальное окно для вывода графической информации;
◙◙ **Model** (Модель) - модель Simulink;
◙◙ GUI - графический интерфейс пользователя (Graphical User interface), используется для создания собственных приложений.
◙ **Open** (Открыть) позволяет выполнить открытие существующего объект посредством стандартного диалогового окна.
◙ **Close Current Directory** (Закрыть текущий каталог) закрывает окно текущего каталога.
◙ **Import Data** (Импортировать данные) производит импорт в среду *Matlab* разнородных данных (анимационные ролики, звуковые файлы, числовые данные в различных форматах и т. д.)
◙ **Save Workspace As** (Сохранить рабочую область как) выполняет сохранение рабочей области.
◙ **Set Path** (Задать путь) организует работу с путями доступа.
◙ **Preferences** (Настройка) изменяет некоторые свойства рабочей среды системы *Matlab*.
◙ **Page Setup** (Параметры страницы), **Print** (Печать), **Print Selection** (Печать выделенной области) служат для вывода информации на принтер, являются стандартными для многих пакетов.
◙**Exit MATLAB** (Выход) позволяет завершить работу с программой.

Меню **Edit** содержит следующие команды:

◙ **Undo** (Отменить), **Redo** (Повторить), **Cut** (Вырезать), Copy (Копировать), **Paste** (Вставить), **Select All** (Выделить все) и **Find** (Найти) полностью соответствуют своему стандартному предназначению.
◙ **Paste Special** (Специальная вставка) используется для обмена с внешними программами, числовыми данными посредством буфера обмена.
◙ **Clear Command Window** (Очистить окно команд) очищает командное окно.
◙ **Clear Command History** (Очистить историю команд) очищает окно предыстории.
◙ **Clear Workspace** (Очистить рабочую область) очищает рабочую область от хранящихся в ней переменных.

Меню **View** содержит следующие команды:

◙ **Desktop Layout** (Разметка рабочего стола) предоставляет возможности задать количество и расположение окон путем исполнения пунктов подменю.
◙ **Undock** (Отстыковать) позволяет сделать автономным (отделить от окна системы) выделенное в данный момент(активное) окно. После выбора данного пункта надпись

меняется на **Dock** (Пристыковать) с названием активного окна. Меняется также на противоположную и функция пункта меню. Теперь при его выборе автономное окно снова прикрепляется к общему окну системы.

◙ Следующая группа пунктов меню с названиями окон является группой переключателей. Каждый из этих пунктов может сделать видимым или невидимым соответствующее окно.

◙ **Current Directory Filter** (Фильтр текущего каталога) имеет подменю пунктов-переключателей. С помощью этих переключателей можно выводить в окно **Current Directory** (текущий каталог) определенные типы файлов.

◙ **Workspace View Options** (Параметры отображения рабочей области) позволяет менять состав информации о переменных в списке окна **Workspace** (Рабочая область). здесь можно также отсортировать список переменных по различным критериям.

Числа, переменные, функции

Числа в *Matlab* могут быть положительными и отрицательными, целыми и дробными, действительными и комплексными. Они могут представляться с фиксированной и плавающей точкой, с мантиссой и порядком.

Особенности представления чисел в *Matlab* :

♦ мнимая единица кодируется с помощью двух символов: i или j;

♦♦ целая часть числа от дробной отделяется точкой;

♦♦♦ отделение порядка числа от мантиссы осуществляется символом е.

Форматы чисел:

◙ format chort - короткое представление (5 знаков числа);

◙ format chort e - короткое представление в экспоненциальной форме (5знаков мантиссы, 3 знака порядка);

◙ format lonq - длинное представление числа (15 знаков);

◙ format lonq e - длинное представление в экспоненциальной форме (15 знаков мантиссы, 3 знака порядка).

Переменные - это символы, используемые для обозначения некоторых хранимых данных. Переменная имеет имя, называемое *идентификатором.* Имя переменной начинается с буквы и может состоять из букв и цифр и некоторых (допустимых) символов.

Константы - это численное значение уникального имени, имеющего математический смысл. Наиболее часто в *Matlab* используются следующие константы:

pi - число π;
inf - машинная бесконечность;
ans - имя переменной, хранящей результат вычисления;
NaN - нечисловой характер данных.

Элементарные функции:

◙ `abs(x)` - абсолютное значение *x*;

◙ `exp(x)` - экспоненциальная функция e^x;

◙ `log(x), log10(x), log2(x)` - логарифмы чисел с основанием *e*, 10, 2;

◙ `sqrt(x)` - корень квадратный из *x*;

◙ `sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x), csc(x)` - тригонометрические функции соответственно
sin x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x;

◙ asin(x), acos(x), atan(x), acot(x), asec(x), acsc(x) - обратные тригонометрические функции соответственно arcsin x, arcos x, arctg x, arcctg x, arcsec x, arccosec

◙ `sinh(x)`, `cosh(x)`, `tanh(x)`, `coth(x)`, `sech(x)`, `csch(x)` – гиперболические функции соответственно sh x, ch x, th x, cth x, sch x, csch x;

◙ `asinh(x)`, `acosh(x)`, `atanh(x)`, `acoth(x)`, `asech(x)`, `acsch(x)` - обратные гиперболические функции arsh x, arch x, arth x, arcth x, arsch x, arcsch x.

***Функцию пользователя* можно создать следующим образом**:

1. Вызов окна редактора m-файлов путем нажатия кнопки New M-File (Создать m-файл).
2. Ввод строки

```
function Z=expxp(x)
```

Ключевое слово `function` объявляет новую функцию, имя которой expxp, а ее параметр - x. Символ `Z` определяет значение функции при аргументе x.

3. Задание новой функции (функции пользователя). Пусть `Z=exp(x)/x`
4. Сохранение функции пользователя на диске. Для этого достаточно щелкнуть мышью по кнопке Save (Сохранить).
5. Закрытие окна редактора m-файлов. Функция пользователя `Z=exp(x)/x` создана.

Для вычисления функции при данном аргументе x достаточно набрать имя функции и значение аргумента в круглых скобках:

```
z=expxp(1).
```

На экране получим значение функции

```
z = 2.7183.
```

Визуализация вычислений

Система *Matlab* имеет богатые возможности графического представления информации. Она позволяет строить двумерные и трехмерные графики функций, заданных в аналитическом виде, в виде векторов и матриц, дает возможность построения множества функций на одном графике: позволяет представлять графики разными цветами, типами точек и линий и в различных системах координат.

Основными функциями двухмерной графики являются:

```
plot(x,y)
plot(x, y, s)
plot(x1, y1, s1, x2, y2, s2,  …, xn, yn, sn)
```

где:

`x` - аргумент функции, задаваемой в виде вектора;

`y` - функция, представленная в аналитическом виде или в виде вектора или матрицы;

`s` - вектор стилей графика; константа, определяющая цвет линий графика, тип точек и тип линий;

`x1, x2 , … ,, xn` - аргументы *n* функций, изображаемых на одном графике;

`y1, y2 , … ,, yn` - функции, изображаемые на одном графике.

В таблице 1.1 приведены стили графиков системы *Matlab*.

Таблица 1.1. Стили графиков

Тип точки		Цвет линии		Тип линии	
•	Точка	Y	Желтый	-	Сплошная
○	Окружность	M	Фиолетовый	:	Двойной пунктир
×	Крест	C	Голубой	-.	Штрих-пунктир

+	Плюс	R	Красный	---	Штриховая
*	Восьмиконечная снежинка	G	Зеленый		
S	Квадрат	B	Синий		
D	Ромб	W	Белый		
V ^ > <	Треугольник вверх, вниз, влево, вправо	К	Черный		
P	Пятиконечная звезда				
H	Шестиконечная звезда				

Рассмотрим пример построения графика функции $y = \sin x - e^{x}$.
В окне Command Window задается программа:

```
» x=-5:0.5:5;   %  задание промежутка [-5;5] с шагом 0,1
» y=sin(x).*exp(-x);  %  задание функции y
» plot(x,y, ['R','*','-.']) % выведение графика красного цвета(R)
% графика в виде снежинок (*), линии штрихпунктирные (-.)
» grid on   % задание сетки
```

График функции приведен на рис. 1.3.

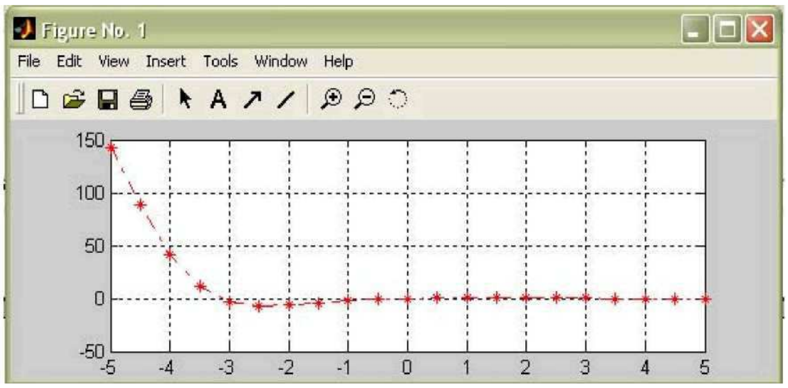

Рис.1.3. График функции ***y=smx-e***$^{'x}$.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Назови четыре основных окна. Какие функции они выполняют?
2. Аналогом какой известной программы является окно Current Directory?
3. Для чего предназначена система *Matlab* ?
4. Какие символы может содержать имя переменной?
5. Назовите наиболее используемые в *Matlab* константы?
6. Какие элементарные функции ты знаешь? Как они обозначаются в системе *Matlab* ?
7. Как создать функцию пользователя?
8. Перечислите основные функции двухмерной графики? Объясните параметры этих функций.

ЗАДАНИЕ

Создать функцию пользователя *y=f(x),* вычислить ее значение в точке x0 и простроить график.

Варианты заданий

№ варианта	Функция	x_0
1	$y=\frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}}-x$	5,5
2	$y=\frac{x^2-1}{\ln(x^2-1)}+x$	2,75
3	$y=shx+\sin x-1$	3,1
4	$y=\frac{1}{x(1-\ln x)}-2$	4,21
5	$y=\frac{2}{3}\sin^2 2x-\frac{3}{4}\cos^2 2x$	6,32
6	$y=\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}-1$	4,75
7	$y=e^x\sqrt[3]{x^2}-x-1$	2,35
8	$y=x^3\sqrt[3]{(1-x)^2}-1$	8,29
9	$y=e^{-x}\sqrt{1+x+x^2}-x^2$	4,56
10	$y=\sqrt{x}-1-\cos(0,5x)$	1,23
11	$y=x^2\ln(1+x^2)-x$	7,55
12	$y=e^{\sqrt{\sin x}}-1,5$	3,64

Лабораторная работа № 2. Погрешность функции

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполнить задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - исходные данные варианта;
   - решения задач;
   - результаты решений задач.

Пример 2.1.
Определить, какое равенство точнее: 9/11 = 0,818; √18 = 4,24.

Решение. Найдем значения данных выражений с большим числом десятичных знаков. Для этого выполним следующие действия:

```
» format long
» a1=9/11
a1=
0.81818181818182
» a2=sqrt(18)
a2 =
4.24264068711928
```

Затем вычислим предельные абсолютные погрешности:

```
» abs(a1-0.818)
ans =
1.818181818182829e-004
» abs(a2-4.24)
ans =
0.00264068711928
```

Округлим их с избытком:

$$\Delta a_1 = 0.00019, \quad \Delta a_2 = 0.0027.$$

Вычислим предельные относительные погрешности:

```
» 0.00019/0.818
ans =
    2.322738386308069e-004
    » 0.0027/4.24
ans =
    6.367924528301887e-004
```

Таким образом,

$$\delta a_1 = \frac{\Delta a_1}{a_1}$$

= 0.00019/0.818 = 0.00024 = 0.024% ;

$$\delta a_2 = \frac{\Delta a_2}{a_2}$$

= 0.0027/4.24 = 0.00064 = 0.064% .

Так как $\delta a_1 < \delta a_2$, то равенство 9/11 = 0,818 является более точным.

Пример 2.2.

Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:

2.3544;   δ = 0.2%.

Решение. Пусть $a = 2.3544$; $\delta a = 0.2\%$; тогда $\Delta a = a \bullet \delta a = 0.00471$.

В данном числе верными являются только три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти цифры: $a_1 = 2.35$ и при этом $\Delta_{окр} = 0{,}0044$.

Окончательно, $\Delta a_1 = \Delta a + \Delta_{окр} = 0.00471 + 0.0044 = 0.00911 < 0.01$.

Следовательно, в округленном числе 2,35 все три цифры также верны.

Пример 2.3.

Найти предельную абсолютную и относительную погрешности числа:

$a = 12.384$,

если оно имеет только верные цифры.

Решение. Так как по условию все пять цифр указанного числа являются верными, то

$\Delta a = 0{,}001$;

$\delta a = 0.001/12.384 = 0{,}0001 = 0{,}01\%$.

Пример 2.4.

Вычислить и определить погрешности результата

$$N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2},$$

где

$n = 3.0567(\pm 0{,}0001)$, $m = 5.72(\pm 0{,}02)$.

Решение. Имеем:

$n - 1 = 2{,}0567(\pm 0{,}0001)$;

$m + n = 3{,}0567(\pm 0{,}0001) + 5{,}72(\pm 0{,}02) = 8{,}7767(\pm 0{,}0201)$;

$m - n = 5{,}72(\pm 0{,}02) - 3{,}0567(\pm 0{,}0001) = 2{,}6633(\pm 0{,}0201)$,

$$N = \frac{2{,}0567 \cdot 8{,}7767}{2{,}6633^2} = 2.545 \approx 2.55;$$

$$\delta N = \frac{0{,}0001}{2{,}0567} + \frac{0{,}0201}{8{,}7767} + 2 \cdot \frac{0{,}0201}{2{,}6633} = 0{,}0175 = 1{,}75\%,$$

$\Delta N = 2.55 \cdot 0.0175 = 0.045$.

Ответ: $N \approx 2{,}55(\pm 0{,}045)$; $\delta N = 1.75\%$.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируются погрешности?
3. Что значит верная цифра?
4. Как распространяются абсолютная и относительная погрешности в арифметических действиях?
5. Как осуществить оценку погрешности значений элементарных функций?

ЗАДАНИЕ

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.
3. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности числа, если они имеют только верные цифры.
4. Вычислить и определить погрешности результата.

Варианты заданий

№ варианта	Задание
1	1) $\sqrt{44}=6{,}63;\ 19/41=0{,}463.$ 2) $2{,}8546;\ \delta=0{,}3\%.$ 3) $42{,}884.$ 4) $X=\left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, где $a=4{,}3(\pm0{,}05)$, $b=17{,}21(\pm0{,}02)$, $c=8{,}2(\pm0{,}05)$, $m=12{,}417(\pm0{,}003)$, $n=8{,}37(\pm0{,}005)$.
2	1) $\sqrt{30}=5{,}48;\ 7/15=0{,}467.$ 2) $6{,}4257(\pm0{,}0024).$ 3) $0{,}537.$ 4) $X=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, где $a=13{,}5(\pm0{,}02)$, $b=3{,}7(\pm0{,}02)$, $c=34{,}5(\pm0{,}02)$, $m=4{,}22(\pm0{,}004)$, $d=23{,}725(\pm0{,}005)$.
3	1) $\sqrt{10{,}5}=3{,}24;\ 4/17=0{,}235.$ 2) $0{,}5748(\pm0{,}0034).$ 3) $2{,}043.$ 4) $X=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, где $a=2{,}754(\pm0{,}001)$, $b=11{,}7(\pm0{,}04)$, $c=10{,}536(\pm0{,}002)$, $m=0{,}56(\pm0{,}005)$, $d=6{,}32(\pm0{,}008)$.

4	1) $\sqrt{10}=3{,}16;\ 15/7=2{,}14.$ 2) $0{,}34484;\ \delta=0{,}4\%.$ 3) $0{,}745.$ 4) $X=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, где $a=23{,}16(\pm0{,}02),\ b=8{,}23(\pm0{,}005),$ $c=145{,}5(\pm0{,}08), m=0{,}28(\pm0{,}006),\ d=28{,}6(\pm0{,}1).$
5	1) $\sqrt{4{,}8}=2{,}19;\ 6/7=0{,}857.$ 2) $10{,}8441;\ \delta=0{,}5\%.$ 3) $0{,}288.$ 4) $X=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, где $a=27{,}16(\pm0{,}006),\ b=5{,}03(\pm0{,}01),$ $c=3{,}6(\pm0{,}02), m=12{,}375(\pm0{,}004),\ n=86{,}2(\pm0{,}05).$
6	1) $\sqrt{6{,}8}=2{,}61;\ 12/11=1{,}091.$ 2) $0{,}12356(\pm0{,}00036).$ 3) $3{,}4453.$ 4) $X=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$, где $a=16{,}342(\pm0{,}001),\ b=2{,}5(\pm0{,}03),$ $c=38{,}17(\pm0{,}002), m=3{,}6(\pm0{,}04),\ d=9{,}14(\pm0{,}005).$
7	1) $\sqrt{22}=4{,}69;\ 2/21=0{,}095.$ 2) $24{,}5643;\ \delta=0{,}1\%.$ 3) $4{,}348.$ 4) $S=\dfrac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-d^4}$, где $D=36{,}5(\pm0{,}1),\ d=26{,}35(\pm0{,}005),$ $\pi=3{,}14.$
8	1) $\sqrt{9{,}8}=3{,}13;\ 23/15=1{,}53.$ 2) $8{,}3445(\pm0{,}0022).$ 3) $0{,}576.$ 4) $X=\dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$, где $a=9{,}542(\pm0{,}001),\ b=3{,}128(\pm0{,}002),$ $c=0{,}172(\pm0{,}001), m=2{,}8(\pm0{,}03),\ d=5{,}4(\pm0{,}02).$
9	1) $\sqrt{83}=9{,}11;\ 6/11=0{,}545.$ 2) $3{,}7834(\pm0{,}0041).$ 3) $0{,}678.$ 4) $y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, где $a=10{,}82(\pm0{,}03),\ b=2{,}786(\pm0{,}0006),$ $m=0{,}28(\pm0{,}006),\ n=14{,}7(\pm0{,}06).$
10	1) $\sqrt{52}=7{,}21;\ 17/19=0{,}895.$ 2) $7{,}521; \delta=0{,}12\%.$ 3) $0{,}0748.$ 4) $Q=\dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$, где $n=2{,}0435(\pm0{,}0001),\ x=4{,}2(\pm0{,}05),$ $y=0{,}82(\pm0{,}01).$
11	1) $\sqrt{44}=6{,}63;\ 21/29=0{,}723.$ 2) $13{,}6253(\pm0{,}0021).$ 3) $2{,}16.$ 4) $X=\left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, где $a=5{,}2(\pm0{,}04),\ b=15{,}32(\pm0{,}01),$ $c=7{,}5(\pm0{,}05), m=21{,}823(\pm0{,}002),\ n=7{,}56(\pm0{,}003).$
12	1) $\sqrt{27}=5{,}19;\ 50/19=2{,}63.$ 2) $0{,}85637; \delta=0{,}21\%.$ 3) $236{,}58.$ 4) $X=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, где $a=18{,}5(\pm0{,}03),\ b=5{,}6(\pm0{,}02),$ $c=26{,}3(\pm0{,}01), m=3{,}42(\pm0{,}003),\ d=14{,}782(\pm0{,}006).$

Лабораторная работа № 3. Отделение корней уравнений с одной переменной

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов знания об основных методах отделения корней уравнений с одной переменной, выработать умения и навыки использования этих методов при решении конкретных уравнений.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполнить задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - исходные данные варианта;
   - решение задачи;
   - результаты решения задачи.

Пример 3.1.

Отделить корни трансцендентного уравнения $x^2 - \sin x - 1 = 0$ графически.

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 3.1), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1.$

Листинг 3.1. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Постройте график функции $y = x^2 - \sin x - 1$ в промежутке [-2; 2] (рис.3.1), выполнив в командном окне пакета MATLAB следующую последовательность операторов:

```
» x=-2:0.1:2;
» plot(x, Fu(x)0; grid on
```

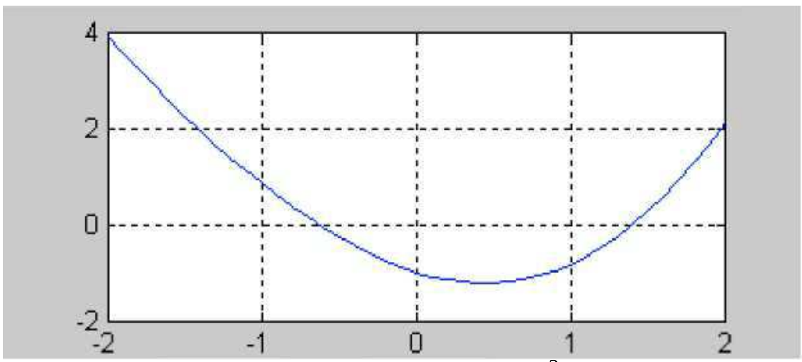

Рис. 3.1. График функции $y = x^2 - sinx - 1$

Из рисунка видно, что функция имеет два корня: $x_1 \in [-1; 0]$ и $x_2 \in [1; 2]$.

Пример 3.2.

Методом численного отделения уменьшить промежуток изоляции корня $x_2 \in [1; 2]$ уравнения $x^2 - \sin x - 1 = 0$ до промежутка длиной 0,1.

Решение.

1. Создайте файл ChislOtd.m (листинг 3.2), содержащий описание функции, уменьшающий промежуток изоляции корня методом численного отделения.

Листинг 3.2. Файл ChislOtd.m.

```
function ChislOtd(f,x1,x2,h);
a=x1;
b=x1+h;
while b<=x2
if feval(f,a)*feval(f,b)<=0 a b
end;
a=b;
b=b+h;
end;
```

2. Найдите новый промежуток изоляции корня:

```
» ChislOtd('Func',1,2,0.1)
a =
   1.4000
b =
   1.5000
```

Таким образом, новый промежуток изоляции корня [1,4; 1,5], при этом, 0.1 – длина нового промежутка изоляции корня уравнения.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что называется корнем уравнения?
2. Что значит решить уравнение?
3. Что значит отделить корень?
4. Какие существуют методы отделения корней?
5. Как находят границы расположения корней алгебраического уравнения?
6. Суть графического отделения корней уравнения.
7. Суть численного отделения корней уравнения.

ЗАДАНИЕ

1. Отделить корни трансцендентного уравнения графически.
2. Провести численное отделение корней.

Варианты заданий

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1	$\frac{x}{\ln^4(x-1)}=3$	7	$\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+x}}-1=0$
2	$\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}=1$	8	$2\ln x-\frac{1}{x}+0{,}5=0$
3	$\frac{\cos x}{1-\sin x}+1=0$	9	$\frac{x}{tgx}-2=0$
4	$\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}+0{,}5=0$	10	$x\cdot 2^{\sqrt{x}}=3$
5	$\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}-1=0$	11	$\frac{1-x}{\ln(x^2-1)}+1=0$
6	$\sqrt[3]{1-x^3}=x$	12	$e^{-x}=0{,}01+\sqrt{x}$

Лабораторная работа № 4. Определение корней уравнений с одной переменной

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о применении уравнений в различных областях деятельности, привить знания об основных этапах решения уравнения, выработать навыки использования различных методов для уточнения корня уравнения.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - исходные данные варианта;
   - решение задачи;
   - результаты решения задачи.

Пример 4.1.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом половинного деления с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.1), содержащий описание функции

$$y = x^2 - \sin x - 1$$

Листинг 4.1. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Создайте файл Div2.m (листинг 4.2), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом половинного деления.

Листинг 4.1. Файл Div2.m.

```
function Div2(f,x1,x2,esp);
% f - Имя m-файла, содержащего описание функции
% x1 - Левая граница отрезка, на котором производится поиск решения
% x2 - Левая граница отрезка, на котором производится поиск решения
% eps - Точность решения
L=x2-x1;
k  = 0 ;
% k - счетчик количества итераций
while L > esp
c = (x2 + x1)/2;
k = k + 1;
if feval(f, c)*feval(f, x1) < 0
% feval(f,c) - оператор вычисления в точке x=c значения
% функции, описание которой находится в соответствующем файле.
% Имя файла хранится в строковой переменной f
       x2=c;
else
x1=c;
end;
L=x2-x1;
end;
x=c
```

```
k
fx=feval(f,c)
% fx - значение невязки
3. Вычислите значение корня уравнения
» Div2('Func',1.4,1.5,0.001)
x =
   1.4102
k =
   7
fx=
   0.0014
```

Ответ: решение *x* =1,4102 получено за семь итераций с точностью 0,001. При этом значение невязки fx = 0,0014.

Пример 4.2.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом итераций с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.3), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1$

Листинг 4.3. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

3. Создайте файл Func1.m (листинг 4.4), содержащий описание функции `f1(x, m,f) = x-m-f(x).`

Листинг 4.4. Файл Func1.m.

```
function z=Func1(x,m,f)
z=x-m*feval(f,x);
```

3. Создайте файл Func2.m (листинг 4.5), содержащий описание функции

$$f2 = 1 - m \cdot f'(x).$$

Листинг 4.4. Файл Func2.m.

```
function z=Func2(x,m,f)
dx=10^-7; x1=x+dx;
tmp1=x-m*feval(f,x); tmp2=x1-m*feval(f,x1);
z=abs((tmp2-tmp1)/dx);
```

4. Постройте графики функций f1, f2 (рис. 4.1).

```
» x=1. 4:0.001:1.5;
» m=0.1;
» plot(x, Func1(x,m,' Func')) ;
» hold on
» plot(x,Func2(x,m,'Func'),'--'); grid on
```

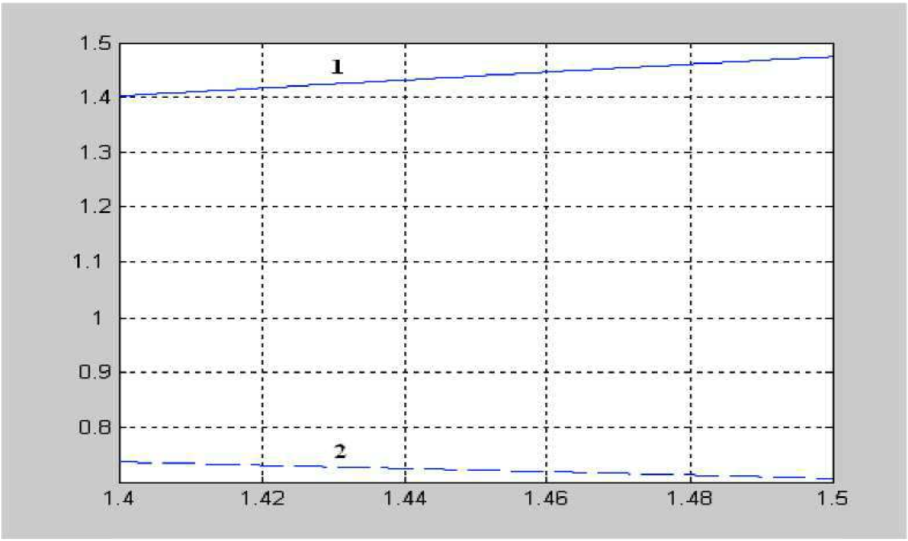

Рис. 4.1. Графики функций

$f(x) = x - mF(x)$ - **1** и $f'(x) = 1 - mF'(x)$ - **2.**

Из рис. 4.1 видно, что в промежутке [1,4; 1,5] функция удовлетворяет условиям теоремы: Пусть уравнение x = f(x) имеет единственный корень на отрезке [*a; b*] и выполнены условия:

1.f(x) определена и дифференцируема на [*a*; *b*].

2. $f(x) \in [a;\, b]$ для всех $x \in [a;\, b]$.

3. Существует такое действительное *q*, что $|f'(x)| \le q < 1$ для всех $x \in [a;\, b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a;\, b]$.

5.Создайте файл Iter.m (листинг 4.5), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом итераций.

Листинг 4.5. Файл Iter.m.

```
function Iter(f,x0,eps,m)
x1=Func1(x0,m,f);
k=1;
while abs(x1-x0)>eps
   x0=x1;
   x1=Func1(x0,m,f);
   k=k+1;
   end;
   x=x1
   k
   fx=feval(f,x1)
```

5. Вычислите значение корня уравнения:

```
» Iter('Func',1.4,0.001,0.1)
x =
   1.4076
k=
   5
fx=
   -0.0055
```

Ответ: решением уравнения будет число *x* =1.4076, полученное на 5 шаге. Значение невязки fx = -0.0055.

Пример 4.3.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом касательных с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1.Создайте файл Func.m (листинг 4.6), содержащий описание функции

$$y = x^2 - \sin x - 1$$

Листинг 4.6. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

3. Создайте файл Func1.m (листинг 4.7), содержащий описание первой производной функции

$$f'(x) = 2x - \cos x$$

Листинг 4.7. Файл Func1.m.

```
function z=Func1(x)
z=2*x-cos(x);
```

4. Создайте файл Func2.m (листинг 4.8), содержащий описание второй производной функции

$$f''(x) = 2 + \sin x.$$

Листинг 4.8. Файл Func2.m.

```
function z=Func2(x)
z=2+sin(x);
```

4. Создайте файл Nuton.m (листинг 4.9), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом касательных.

Листинг 4.9. Файл Nuton.m.

```
function Nuton(f,f1,f2,a,b,eps)
if feval(f,a)*feval(f2,a)>0
   x0=a;
else
   x0=b;
end;
x1=x0-feval(f,x0)/feval(f1,x0);
k=1;
while abs(x1-x0)>eps
   x0=x1;
   x1=x0-feval(f,x0)/feval (f1,x0);
   k=k+1;
end;
x=x1
k
fx=feval(f,x1)
```

5. Вычислите значение корня уравнения:

```
» Nuton('Func','Func1','Func2', 1.4,1.5,0.001)
x =
   1.4096
k =
    3
f x =
     1.4191e-010
```

Ответ: решение x = 1.4096 получено за 3 итераций с точностью 0,001. При этом значение невязки fx =1.4191e-010.

Пример 4.4.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом секущих с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.10), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1$.

Листинг 4.10. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Создайте файл Func2.m (листинг 4.11), содержащий описание второй производной функции $f''(x) = 2 + \sin x$.

Листинг 4.11. Файл Func2.m.

```
function z=Func2(x)
z=2+sin(x);
```

3. Создайте файл Hord.m (листинг 4.12), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом хорд.

Листинг 4.12. Файл Hord.m.

```
function Hord(f,f2,a,b,eps)
if feval(f,a)*feval(f2,a)>0
xf=a;
x0=b;
else
xf=b;
x0=a;
end;
x1=x0-feval(f,x0)*(x0-xf)/(feval(f,x0)-feval(f,xf)); k=1;
while abs(x1-x0)>eps
x0=x1;
x1=x0-feval(f,x0)*(x0-xf)/(feval(f,x0)-feval(f,xf));
k=k+1;
end;
x=x1
k
fx=feval(f,x1)
```

4.Вычислите значение корня уравнения:

```
» Hord('Func','Func2',1.4,1.5,0.001)
x =
1.4096
k =
2
fx=
    -6.0203e-005
```

Ответ: численное значение корня *x*=1,4096 по методу хорд получено на втором шаге с точностью 0.001. При этом значение невязки fx =-6.0203e-005.

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений в среде *Matlab* осуществляется с использованием двух следующих встроенных функций:

solve('f(x) ', x) и fzero().

где:

'f (x)' - решаемое уравнение, записанное в одиночных кавычках;

x - искомое неизвестное.

Пример 4.5.
Пусть необходимо решить следующее уравнение:

$$x^2 - \sin x - 1 = 0.$$

Решение:
Программа решения уравнения имеет вид:

```
» solve('x^2-sin(x)-1=0', x)
```

После нажатия клавиши <Enter> получим следующее решение:

```
ans =
  1.409624
```

Функция fzero( ) имеет следующую реализацию:

```
[x,f,e_flag,inform]=fzero('f(x)',x0)
```

где:
x - искомое неизвестное;
f - значение невязки;
`e_flag` - переменная, знак которой свидетельствует о наличии корня на данном интервале (например, `e_flag` = l - корень существует);
`inform` - содержит три поля с именами:
- `iterations` (количество итераций),
- `funcCount` (количество обращений к функции f(x)),
- `algorithm` (наименование алгоритма, использованного для нахождения корня);

'f (x)' - решаемое уравнение, записанное в одиночных кавычках;
xo - начальное приближение или интервал поиска решения.

Пример 4.6.
Необходимо найти корни уравнения

$$y = x^2 - \sin x - 1,$$

если известно, что корни находятся в промежутках [-1, 0] и [1, 2].

Решение:

```
»[x,f,e_flag,inform]=fzero('x^2-sin(x)-1',[-1,0])
X =
-0.6367
f =
0
e_flag =
1
inform =
iterations: 8
funcCount:  8
algorithm:   'bisection,  interpolation'
»[x,f,e_flag,inform]=fzero('x^2-sin(x)-1',[1,2])
X =
  1.4096
f =
  -1.1102e-016
e_flag =
1
inform =
iterations: 10
funcCount:   10
algorithm:   'bisection,  interpolation'
```

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что называется корнем уравнения?
2. Что значит решить уравнение?
3. Каковы этапы решения уравнения с одной переменной?
4. Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной?
5. Суть метода половинного деления.
6. Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода.
7. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода.
8. Суть метода итерации.
9. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения x=f(x) на отрезке $[a,b]$, содержащего корень, методом простой итерации?
10. Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения x=f(x) методом хорд, касательных, итераций?
11. Записать формулу нахождения значений последовательности при решении уравнения методом хорд и методом касательных.
12. Как строится итерационная последовательность точек при решении уравнения методом простой итерации?

ЗАДАНИЕ

Используя варианты и результаты лабораторной работы №3 выполнить следующие задания:

1. Решить уравнение методами половинного деления, итераций, секущих и касательных с точностью 0,001.
2. Вывести на печать приближенное значение корня, количество итераций, значение невязки.
3. Провести сравнительную характеристику методов.
4. Решить уравнение в среде *Matlab* с помощью встроенных функций.

Лабораторная работа № 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о прямых и итерационных методах решения систем линейных уравнений, выработать умения составлять и применять алгоритмы и программы для решения систем уравнений, дать навыки в использовании программных средств для решения систем уравнений.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 5.1.
Найти решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33, \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43, \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

Решение.
Создать файл Exchange.m (листинг 5.1), содержащий описание функции, осуществляющей перестановку строк при обнаружении в текущей строке нулевого элемента на главной диагонали.

Листинг 5.1. Файл Exchange.m.
```
function z=Exchange(C,i)
k=i+1;
while C(k,i)==0
    k=k+1;
end;
for j=1:size(C,1)
    s=C(i,j);
    C(i,j)=C(k,j);
    C(k,j)=s;
end;
z=C;
```
2. Создать файл Simplex.m (листинг 5.2), содержащий описание функции, возвращающей расширенную матрицу системы к диагональному виду.

Листинг 5.2. Файл Simplex.m.
```
function z=Simplex(A,b)
N=size(A,1); % Определение числа уравнений системы
C=cat(2,A,b); % Создание расширенной матрицы системы
for i=1:N-1
    if C(i,i)==0
        C=Exchange(C,i);
    end;
    for j=0:N
```

```
        C(i,N+1-j)=C(i,N+1-j)/C(i,i);
    end;
    for m=i+1:N
        alpha=C(m,i);
        for j=i:N+1
            C(m,j)=C(m,j)-alpha*C(i,j);
        end;
    end;
end;
C(N,N+1)=C(N,N+1)/C(N,N);
C(N,N)=1;
z=C;
```

3. Создать файл Gauss.m (листинг 5.3), содержащий описание функции, возвращающей решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Листинг 5.3. Файл Gauss.m.

```
function z=Gauss(A,b)
C=Simplex(A,b);
N=size(A,1);
v(N)=C(N,N+1);
for j=1:N-1
    s=0;
    for k=0:j-1
        s=s+C(N-j,N-k)*v(N-k);
    end;
    v(N-j)=(C(N-j,N+1)-s)/C(N-j,N-j);
end;
z=v';
```

4. Задать матрицу системы линейных уравнений:

```
» A=[1.23,-3.25,-8.69;7.03,4.81,0.27;4.49,-7.55,12.51]
A =
    1.2300 -3.6900 -8.6900
    7.0300  4.8100  0.2700
    4.4900 -7.5500 12.5100
```

5. Задать вектор-столбец свободных членов:

```
» b=[10.33;-6.43;41.53]
b =
   10.3300
   -6.4300
   41.5300
```

6. Решить систему уравнений, использую функцию Gauss ( ):

```
» x=Gauss(A,b)
x =
    1.6468
  -3.7694
    0.4540
```

7. Проверить правильность решения системы линейных уравнений:

```
» A*x
ans =
     10.3300
     -6.4300
     41.5300
```

Ответ: решение системы методом Гаусса определяется вектор-столбцом как

$$x = \begin{pmatrix} 1,6467 \\ -3,7694 \\ 0,4540 \end{pmatrix}$$

Пример 5.2.
Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 1,23x_1 - 3,25x_2 - 8,69x_3 = 10,33, \\ 7,03x_1 + 4,81x_2 + 0,27x_3 = -6,43, \\ 4,49x_1 - 7,55x_2 + 12,51x_3 = 41,53. \end{cases}$$

методом итерации с точностью 0,001:

Решение:
Для начала преобразуем данную систему к виду пригодному для итерационного процесса:
1. Возьмем первым уравнением второе, третьим - третье, а вторым сумму первого и третьего уравнений:

$$\begin{cases} 7,03x_1 + 4,81x_2 + 0,27x_3 = -6,43, \\ 5,72x_1 - 10,8x_2 + 3,82x_3 = 51,86, \\ 4,49x_1 - 7,55x_2 + 12,51x_3 = 41,53. \end{cases}$$

2. Разделим каждое уравнение на диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 = -0,6842x_2 - 0,0384x_3 - 0,9146, \\ x_2 = 0,5296x_1 + 0,3537x_3 - 4,8018, \\ x_3 = -0,3589x_1 + 0,6035x_2 + 3,3197. \end{cases}$$

3. Создайте файл Iterac.m (листинг 5.4), содержащий описание функции, возвращающей решение системы линейных уравнений методом простой итерации.

Листинг 5.4. Файл Iterac.m.

```
function Iterac(C1,d1,eps)
N=size(C1,1);
R1=d1;
q1=R1;
q2=(C1*q1)+R1;
p=0;
s=0;
for i=1:N
    if abs(q2(i)-q1(i))>s
       s=abs(q2(i)-q1(i));
    end;
end;
while s>eps
     p=p+1;
     q1=q2;
     q2=(C1*q1)+R1;
     s=0;
     for i=1:N
     if abs(q2(i)-q1(i))>s
        s=abs(q2(i)-q1(i));
     end;
end;
```

```
end;
q2
(C1*q2)+R1-q2
p
abs(q2-q1)
```

4. Задайте матрицу системы, приведенной к виду, пригодному для метода простой итерации:

```
» A=[0,-0.6842,-0.0384;0.5296,0,0.3537;-0.3589,0.6035,0]
A =
       0       -0.6842  -0.0384
       0.5296   0         0.3537
      -0.3589   0.6035    0
```

5. Задайте вектор-столбец свободных членов:

```
» b=[-0.9146;-4.8018;3.3197]
b =
   -0.9146
   -4.8018
     3.3197
```

6. Найдите решение системы линейных уравнений:

```
» Iterac(A,b,0.001)
q2 =
    1.6469
  -3.7688
    0.4537
ans =
    1.0e-003 *

   -0.3175
   -0.3475
     0.4688
P=
   11
ans =
1.0e-003 *
0.5043
0.4768
0.2273
```

Ответ: решением системы является вектор-столбец

$$x = \begin{pmatrix} 1{,}6469 \\ -3{,}7688 \\ 0{,}4537 \end{pmatrix},$$

полученный на 11 шаге итерации.

Пример 5.3.

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Зейделя с точностью 0,001:

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33, \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43, \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

Решение:

1. Создать файл Zeidel.m (листинг 5.5), содержащий описание функции, выполняющей последовательно: а) приведение системы к нормальному виду; б) приведение нормальной системы к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя; в) реализацию итерационного процесса Зейделя.

Листинг 5.5 Файл Zeidel.m.

```
function Zeidel(A,b,eps);
N=size(A,1);
% Приведение системы к нормальному виду
C=A'*A;
D=A'*b;
% Приведение системы к виду, пригодному для итерационного процесса
for i=1:N
    D1(i)=D(i)/C(i,i);
    end;
    D1=D1'; % Транспонирование матрицы
    d1=D1;
    for i=1:N
        for j=1:N
              if i==j
                 C1(i,j)=0;
       else
            C1(i,j)=-C(i,j)/C(i,i);
       end;
    end;
end;
% Решение СЛАУ методом Зейделя
R1=d1;
q1=R1;
% Создание матрицы для хранения промежуточных данных
t=size(C1);
N=t(1,1);
q2=zeros(t(1,1),1);
% Цикл вычислений
p=0;
s=0;
for i=1:N
    if abs(q2(i)-q1(i))>s
       s=abs(q2(i)-q1(i));
    end;
end;
 while s>eps
       q2=q1;
       p=p+1;
       for f=1:N
           v=(C1*q1)+R1;
              x(f,1)=v(f,1);
           q1(f,1)=x(f,1);
       end;
s=0;
for i=1:N
if abs(q2(i)-q1(i))>s
   s=abs(q2(i)-q1(i));
end;
  end;
q1=x;
  end;
```

```
'Ответы:'
q2
'Проверка:'
A*q2
'число проходов:'
P
abs(q2-q1)
```

2. Задать значения коэффициентов при неизвестных исходной системы линейных уравнений и столбец свободных членов:

```
» A=[1.23,-3.25,-8.69;7.03,4.81,0.27;4.49,-7.55,12.51];
» b=[10.33;-6.43;41.53];
```

3. Вычислить решение системы линейных уравнений, используя функцию `Zeidel()`:

```
» Zeidel(A,b,0.001)
ans =
Ответы:
q2 =
     1.6461
    -3.7683
     0.4543

ans =
Проверка:
ans =
     10.3235
     -6.4304
     41.5255
ans =
число проходов:
P =
8
ans =
  1.0e-003 *
    0.4400
    0.5685
    0.2488
```

Ответ: решением системы трех линейных уравнений является вектор

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1{,}6461 \\ -3{,}7683 \\ 0{,}4543 \end{pmatrix},$$

найденный на восьмом шаге итерации.

Кроме того, встроенная функция `solve()`также позволяет определить решение систем линейных уравнений соответственно как

`solve ('f1', 'f2', …, 'fn', x1, x2 ,…, xn)`

где:

`'fi'` - *i-е* уравнение системы, $i=1,2, \dots,n;$

x_i - *i-е* неизвестное, $i=1, 2, \dots, n$.

Особенность применения функции `solve ()` в этом случае состоит в том, здесь в том, что включительно до момента ее активизации функции необходимо с помощью функции syms определить символьные переменные (см. Пример 5.4)

Пример 5.4.

Пусть необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33, \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43, \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

В этом случае программа решения системы уравнений имеет вид:

```
» syms x1 x2 x3;
» Y=solve('1.23*x1-3.25*x2-8.69*x3=10.33',
          '7.03*x1+4.81*x2+0.27*x3=-6.43',
          '4.49*x1-7.55*x2+12.51*x3=41.53')
```

Нажав клавишу <Enter> , можно получить ответ в следующем виде:

```
Y =
    x1:   [1x1 sym]
    x2:   [1x1 sym]
    x3:   [1x1 sym]
```

Программа задачу решила, но не выдала значения неизвестных (x_1, x_2, x) .

Для получения численных значений указанной тройки неизвестных (x_1, x_2, x), необходимо воспользоваться командой:

Y.k,

где k - имя неизвестного. В нашем случае решение будет иметь вид:

```
» Y.x1
ans =
       1.6467696870844978837212332256586
» Y.x2
ans =
    -3.7690989344414828576791743237764
» Y.x3
ans =
    0.45398138688708304769095896660916
```

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Какие методы относятся к прямым методам решения систем линейных уравнений?
2. Какие методы относятся к приближенным методам решения систем линейных уравнений?
3. В чем заключается суть метода Гаусса для решения систем линейных уравнений?
4. В чем заключается суть метода Жордана-Гаусса ?
5. В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений?
6. Как привести систему к виду с преобладающими диагональными коэффициентами?
7. В чем заключается суть метода Зейделя для решения систем уравнений?

ЗАДАНИЕ

Решить СЛАУ с точностью 0,001 методом Гаусса, методом простой итерации и методом Зейделя, а также провести сравнительную характеристику указанных методов.

Варианты заданий.

№ варианта	Задание
1	$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4, \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5, \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3, \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7, \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5, \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6, \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8, \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7, \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7, \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4, \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7, \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5, \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5, \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4, \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4, \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1, \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1, \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9, \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10, \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20, \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5, \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2, \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7, \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 5{,}1x_4 = 6{,}01, \\ 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10, \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 35{,}8x_1 + 2{,}1x_2 - 34{,}5x_3 - 11{,}8x_4 = 0{,}5, \\ 27{,}1x_1 - 7{,}5x_2 + 11{,}7x_3 - 23{,}5x_4 = 12{,}8, \\ 11{,}7x_1 + 1{,}8x_2 - 6{,}5x_3 + 7{,}1x_4 = 1{,}7, \\ 6{,}3x_1 + 10x_2 + 7{,}1x_3 + 3{,}4x_4 = 20{,}8. \end{cases}$

Лабораторная работа № 6. Решение нелинейных уравнений и систем

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о методах решения систем нелинейных уравнений, привить умения составлять и применять алгоритмы для решения таких систем уравнений, выработать навыки в использовании программных средств для решения систем уравнений.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 6.1.
Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6, \\ 3x - \cos y = 0{,}9. \end{cases}$$

методом Ньютона с точностью 0,001:
Решение. Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6, \\ x = \dfrac{0{,}9+\cos y}{3}. \end{cases}$$

Отделение корней произведем графически:

```
» x1=-2:0.1:2;
» y1=sin(x1-0.6)-1.6;
» y2=-3:0.1:3;
» x2=(0.9+cos(y2))/3;
» plot(x1,  y1,   'R',   x2,  y2)
» grid on
```

Получим следующие графики:

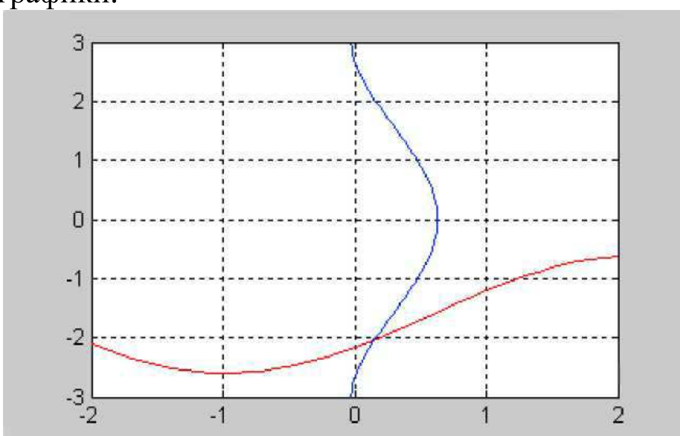

Рис. 6.1. Графики функций:
$\sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6$ (красная линия) и $3x - \cos y = 0{,}9$ (синяя линия)

Из графика видно, что система имеет одно решение, заключенное в области *D:*

$$0 < x < 0{,}5, \quad -2{,}5 < y < -1{,}5.$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} F(x,y) = \sin(x-0{,}6) - y - 1{,}6 = 0, \\ G(x,y) = 3x - \cos y - 0{,}9 = 0. \end{cases}$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = \cos(x-0{,}6), \\ G'_x(x,y) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_y(x,y) = -1, \\ G'_y(x,y) = \sin y. \end{cases}$$

Возьмем начальное приближение, например как

$$x_0 = 0{,}1, \; y_0 = -2.$$

1.Создайте файл F_6.m (листинг 6.1), содержащий описание функции:

$$F(x,y) = \sin(x-0{,}6) - y - 1{,}6 = 0.$$

Листинг 6.1. Файл F_6.m.

```
function z=F_6(x,y)
z=sin(x-0.6)-y-1.6;
```

2.Создайте файл G_6.m (листинг 6.2), содержащий описание функции:

$$G(x,y) = 3x - \cos y - 0{,}9 = 0$$

Листинг 6.2. Файл G_6.m.

```
function z=G_6(x,y)
z=3*x-cos(y)-0.9;
```

3. Создайте файл Fx_6.m (листинг 6.3), содержащий описание функции:

$$F'_x(x,y) = \cos(x-0{,}6)$$

Листинг 6.3. Файл Fx_6.m.

```
function z=Fx_6(x,y)
z=cos(x-0.6);
```

4.Создайте файл Fy_6.m (листинг 6.4), содержащий описание функции

$$F'_y(x,y) = -1$$

Листинг 6.4. Файл Fy_6.m.

```
function z=Fy_6(x,y)
z=-1;
```

5.Создайте файл Gx_6.m (листинг 6.5), содержащий описание функции:

$$\mathbf{G_x{}'(x,y) = 3.}$$

Листинг 6.5. Файл Gx_6.m.

```
function z=Gx_6(x,y)
z=3;
```

1. Создайте файл Gy_6.m (листинг 6.6), содержащий описание функции:

$$G'_y(x,y) = \sin y.$$

Листинг 6.6. Файл Gy_6.m.

```
function z=Gy_6(x,y)
z=sin(y);
```

7. Создайте файл SysNuton.m (листинг 6.7), содержащий описание функции, возвращающей решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона.

Листинг 6.7. Файл SysNuton.m.

```
function SysNuton(f,g,fx,fy,gx,gy,x0,y0,eps)
x1 = x0 +(feval(g,x0,y0)*feval(fy,x0,y0)-
feval(f,x0,y0)*feval(gy,x0,y0))/(feval(fx,x0,y0)*feval(gy,x0,y0)-
feval(fy,x0,y0)*feval(gx,x0,y0));
y1=y0+(feval(f,x0,y0)*feval(gx,x0,y0)-
feval(g,x0,y0)*feval(fx,x0,y0))/(feval(fx,x0,y0)*feval(gy,x0,y0)-
feval(fy,x0,y0)*feval(gx,x0,y0));
k = 1;
while abs(x1-x0)>eps & abs(y1-y0)>eps
    x0=x1;
    y0=y1;
    x1=x0+(feval(g,x0,y0)*feval(fy,x0,y0)-
feval(f,x0,y0)*feval(gy,x0,y0))/(feval(fx,x0,y0)*feval(gy,x0,y0)-
feval(fy,x0,y0)*feval(gx,x0,y0));
    y1=y0+(feval(f,x0,y0)*feval(gx,x0,y0)-
feval(g,x0,y0)*feval(fx,x0,y0))/(feval(fx,x0,y0)*feval(gy,
x0,y0)-feval(fy,x0,y0)*feval(gx,x0,y0));
    k=k+1;
end;
x=x1
y=y1
k
```

8. Найдите решение системы:

```
»
SysNuton('F_6','G_6','Fx_6','Fy_6','Gx_6','Gy_6',0.1,2,0.001)
x =
    0.1511
y =
   -2.0340
k =
    2
```

Таким образом, решение системы:

$$x = 0.1511,\ y = -2.0340$$

получено за две итерации.

Решение систем нелинейных уравнений в MATLAB осуществляется функцией fsolve(), которая имеет вид:

```
fsolve('file',x0)
```

где `file` - система уравнений, сохраненная в m-файле.

Пример 6.2.

Пусть содержимое файла имеет вид:

```
function F=myfun(x)
F=[sin(x(1)-0.6)-x(2)-1.6;3*x(1)-cos(x(2))-0.9]
```

Программа и результаты решения имеют вид:

```
» x0=[0.1;-2];
» x=fsolve('myfun' ,x0)
x =
     0.1511
     -2.0340
```

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1.Какие вы знаете методы решения систем нелинейных уравнений?
2.В чем заключается суть метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?
3.В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений?
4.В чем заключается суть методов спуска для решения систем нелинейных уравнений? Какие виды методов спуска вы знаете?

ЗАДАНИЕ

1. Отделить решение системы графически.
2. Решить систему методом Ньютона с точностью 0,001.

Варианты заданий

№ варианта	Задание
1	$\begin{cases} tg(xy+0{,}4)=x^2; \\ 0{,}6x^2+2y^2=1,\ x>0,\ y>0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}6x=0; \\ x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} tg(xy+0{,}1)=x^2; \\ x^2+2y^2=1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}2x=0{,}2; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} tg(xy+0{,}3)=x^2; \\ 0{,}9x^2+2y^2=1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}3x=0; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} tg\,xy=x^2; \\ 0{,}8x^2+2y^2=1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x=0{,}1; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$
9	$\begin{cases} tg\,xy=x^2; \\ 0{,}7x^2+2y^2=1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}2x=0{,}1; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$
11	$\begin{cases} tg(xy+0{,}2)=x^2; \\ 0{,}6x^2+2y^2=1. \end{cases}$
12	$\begin{cases} \sin(x+y)=1{,}5x-0{,}1; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Лабораторная работа № 7. Интерполирование функций и сплайн-аппроксимация

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представления о применении интерполирования функций для решения жизненных задач, привить умения составлять и применять интерполяционные формулы Лагранжа, многочлены Ньютона, сплайны и оценивать их погрешности, дать навыки в использовании программных средств для проверки полученных результатов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 7.1.
Рассмотрим функцию f(x), заданную таблично:

	y
0,43	1,6359
0,48	1,7323
0,55	1,8768
0,62	2,0304
0,7	2,2284
0,75	2,3597

Построить интерполяционный многочлен методом неопределенных коэффициентов и вычислить приближенное значение функции в точке x =0.53.

Решение.

1.Создайте файл Pol.m (листинг 7.1), содержащий описание функции, возвращающей значения полинома

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

Листинг 7.1. Файл Pol.m.

```
function z=Pol(a,x1)
M1=length(a);
s=0;
for i=1:M1
      s=s+a(i)*x1.^(M1-i);
   end;
end;
z=s;
```

2. Создайте файл Vandermond.m (листинг 7.2), содержащий описание функции,

возвращающей значения элементов матрицы Вандермонда.

Листинг 7.2. Файл Vandermond.m.

```
function z=Vandermond(x)
N=length(x);
z=ones(N,N);
for i=1:N
    for j=1:N
        z(i,j)=x(i).^(N-j);
    end;
end;
```

3. Задайте значения экспериментальных данных.

```
» x=[0.43;0.48;0.55;0.62;0.70;0.75]
x =
    0.4300
    0.4800
    0.5500
    0.6200
    0.7000
    0.7500
» y=[1.6359;1.7323;1.8768;2.0304;2.2284;2.3597]
y =
    1.6359
    1.7323
    1.8768
    2.0304
    2.2284
    2.3597
```

4. Вычислите значения элементов матрицы Вандермонда.

```
» M=Vandermond(x)
M=
```

0.0147	0 .0342	0. .0795	0. .1849	0 .0000	1 .000
0.0255	0 .0531	0. .1106	0. .2304	0 .4800	1 .000
0.0503	0 .0915	0. .1664	0. .3025	0 .0000	1 .000
0.0916	0 .1478	0. .2383	0. .3844	0 .0000	1 .000
0.1681	0 .2401	0. .3430	0. . 0 0	0 .7000	1 .000
0.2373	0 .3164	0. .4219	0. .5625	0 .0000	1 .000

5. Вычислите значения коэффициентов полинома.

a =

444.9904
-511.6367
291.7494
-80.6863
10.0997

Таким образом, полином имеет вид:

$$P_5(x) = -152{,}9063x^5 + 444{,}9904x^4 - 511{,}6367x^3 + 291{,}7494x^2 - 80{,}6863x + 10{,}0997$$

6. Вычислить значение полинома в заданной промежуточной точке Х=0,53.

```
» x1=0.53;
» y1=Pol(a,x1)
y1 =
    1.8349
```

7. Постройте график найденного полинома

```
» x1=0.43:0.01:0.75;
» y1=Pol(a,x1);
» plot (x1, y1)
```

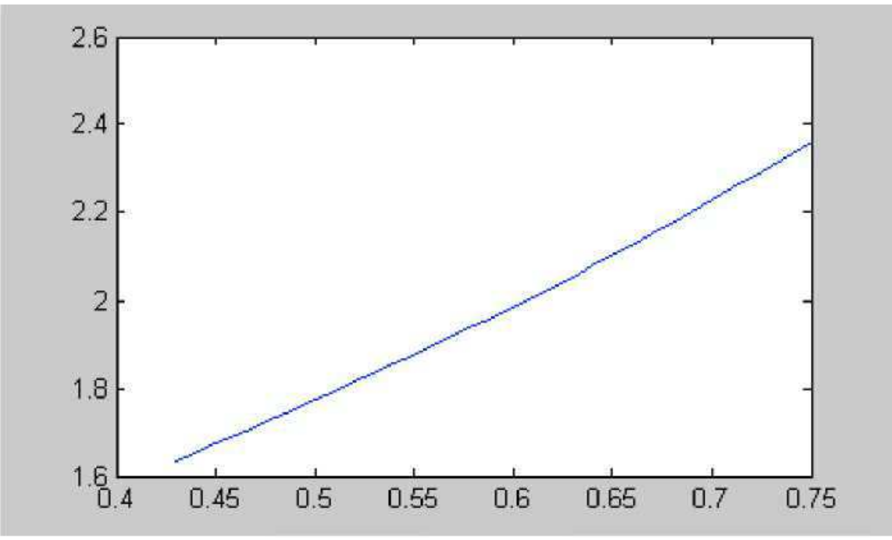

Рис. 7.1. График функции

$$y = -152{,}9063x^5 + 444{,}9904x^4 - 511{,}6367x^3 + 291{,}7494x^2 - 80{,}6863x + 10{,}0997$$

Аппроксимация полиномами в среде MATLAB осуществляется с помощью функции:
`polyfit(x,y,n)`

где:

x - вектор узлов интерполяции;

y - вектор значений функции в узлах интерполяции;

n - степень полинома.

Откликом при реализации функции `polyfit()` является вектор коэффициентов полинома.

Пример 7.2.

Выполните следующие действия:

```
» x= [0.43; 0.48; 0. 55; 0.62; 0.70; 0.75] ;
» y=[1.6359;1.7323;1.8768;2.0304;2.2284;2.3597];
» polyfit(x,y,5)
```

После нажатия клавиши <Enter> ответ получим в следующем виде:

```
ans =
 -152.9063 444.9904 -511.6367 291.7494 -80.6863  10.0997
```

Тогда функцией интерполяции будет следующий полином пятой степени:

$$P_5(x) = -152{,}9063x^5 + 444{,}9904x^4 - 511{,}6367x^3 + 291{,}7494x^2 - 80{,}6863x + 10{,}0997.$$

Решение совпадает с полученным в предыдущем примере.

Интерполяция кубическими сплайнами в среде MATLAB осуществляется с помощью функции `yi=spline(x, y, xi)`

где:

x - вектор узлов интерполяции;

y - вектор значений функции в узлах интерполяции;

xi - вектор аргументов функции *y=f(x)* из области ее определения, задаваемый пользователем.

Пример 7.3.

Найдем значение функции при x= 0.53, выполнив для этого следующие действия:

```
» x= [0.43; 0.48; 0. 55; 0.62; 0.70; 0.75];
» y=[1.6359;1.7323;1.8768;2.0304;2.2284;2.3597];
» xi=0.53;
» yi=spline(x,y,xi)
yi=
   1.8347
```

Построим график функции:

```
» xi=0.43:0.01:0.75;
» yi=spline(x,y,xi);
» plot (xi,yi )
```

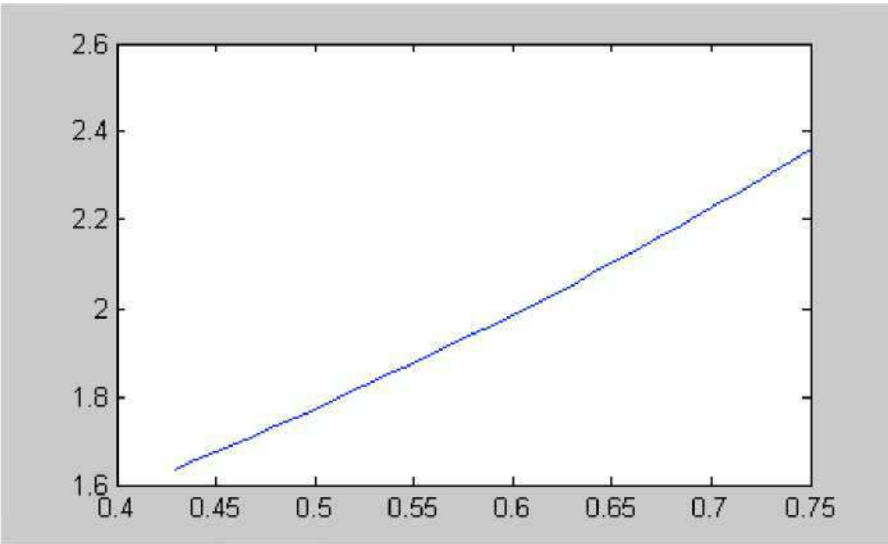

Рис. 7.2. График функции, значения которой найдены с помощью кубического сплайна.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что такое интерполяция?
2. Что такое узлы интерполяции?
3. В чем заключается задача отыскания интерполирующего многочлена?
4. Как построить интерполяционный многочлен Лагранжа?
5. Как определить погрешность метода интерполяции с помощью формулы Лагранжа?
6. Как образуются разделенные разности?
7. Как связаны разделенные разности и производная?
8. Что такое сплайн? Как происходит процесс интерполирования сплайнами?
9. Что такое конечная разность первого порядка? Как она находится?

10. Что такое конечная разность второго порядка? Как она находится?
11. Что такое конечная разность n-го порядка? Как она находится?
12. Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
13. Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
14. Как находится погрешность метода интерполирования с помощью формул Ньютона?
15. Что значит «интерполирование вперед», «интерполирование назад»?

ЗАДАНИЕ

1. Построить интерполяционный многочлен методом неопределенных коэффициентов.
2. Построить график интерполяционной функции.
3. Найти приближенные значения функции при данных промежуточных значениях аргумента.
4. Найти приближенные значения функции при данных промежуточных значениях аргумента с помощью кубического сплайна и визуализируйте результаты сплайн-интерполяции.

Варианты заданий

1		2		3	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1,415	0,8886	0,101	1,2618	0,15	0,8607
1,420	0,8900	0,106	1,2764	0,20	0,8187
1,425	0,8906	0,111	1,2912	0,25	0,7788
1,430	0,8917	0,116	1,3061	0,30	0,7408
1,435	0,8927	0,121	0,3213	0,35	0,7046
1,440	0,8940	0,126	1,3366	0,40	0,6703
1,445	0,8947	0,131	1,3521	0,45	0,6376
1,450	0,8957	0,136	1,3677	0,50	0,6065
1,455	0,8967	0,141	1,3836	0,55	0,5769
1,460	0,8977	0,146	1,3995	0,60	0,5488
1,465	0,8986	0,151	1,4157	0,65	0,5220
в точке x =1.4161		в точке x = 0.1026		в точке x = 0.7250	
4		5		6	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,180	5,6154	3,50	33,115	0,115	8,6572
0,185	5,4669	3,55	34,813	0,120	8,2932
0,190	5,3263	3,60	36,598	0,125	7,9582
0,195	5,1930	3,65	38,474	0,130	7,6489
0,200	5,0664	3,70	40,447	0,135	7,3623
0,205	4,9461	3,75	42,521	0,140	7,0961
0,210	4,8317	3,80	44,701	0,145	6,8481
0,215	4,7226	3,85	46,993	0,150	6,6165
0,220	4,6185	3,90	49,402	0,155	6,3998
0,225	4,5191	3,95	51,935	0,160	6,1965
0,230	4,4242	4,00	54,598	0,165	6,0055

в точке x =0,175		в точке x =3.475		в точке x = 0.1745	
7		8		9	
x	y	x	y	x	y
1,340	4,2556	0,01	0,9918	0,15	4,481
1,345	4,3532	0,06	0,9519	0,16	4,953
1,350	4,4552	0,11	0,9136	0,17	5,473
1,355	4,5618	0,16	0,8769	0,18	6,049
1,360	4,6734	0,21	0,8416	0,19	6,685
1,365	4,7903	0,26	0,8077	0,20	7,389
1,370	4,9130	0,31	0,7753	0,21	8,166
1,375	5,0419	0,36	0,7441	0,22	9,025
1,380	5,1774	0,41	0,7141	0,23	9,974
1,385	5,3201	0,46	0,6854	0,24	11,023
1,390	5,4706	0,51	0,6579	0,25	12,182
в точке x =1.3921		в точке x = 0.492		в точке x = 0.2444	
10		11		12	
x	y	x	y	x	y
0,45	20,194	1,345	4,3532	0,130	7,6489
0,46	19,613	1,350	4,4552	0,135	7,3623
0,47	18,942	1,355	4,5618	0,140	7,0961
0,48	18,174	1,360	4,6734	0,145	6,8481
0,49	17,301	1,365	4,7903	0,150	6,6165
0,50	16,312	1,370	4,9130	0,155	6,3998
0,51	15,198	1,375	5,0419	0,160	6,1965
0,52	13,948	1,380	5,1774	0,165	6,0055
0,53	12,550	1,385	5,3201	0,170	5,8255
0,54	10,993	1,390	5,4706	0,175	5,6558
0,55	9,264	1,395	5,6296	0,180	5,4954
в точке x = 0.445		в точке x = 1.374		в точке x = 0.158	

Лабораторная работа № 8. Численное дифференцирование

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представления о численном дифференцировании, привить умения составлять и применять формулы численного дифференцирования, оценивать их погрешности, дать навыки в использовании программных средств для проверки полученных результатов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - исходные данные варианта;
   - решение задачи;
   - результаты решения задачи.

Пример 8.1.
Рассмотрим функцию f(x), заданную таблично:

x	y
0,43	1,6359
0,48	1,7323
0,55	1,8768
0,62	2,0304
0,7	2,2284
0,75	2,3597

Интерполяционный многочлен имеет вид:

$$P_5(x) = -154{,}9063x^5 + 444{,}9904x^4 - 511{,}6367x^3 + 291{,}7494x^2 - 80{,}6863x + 10{,}0997.$$

Вычислим значения производной этой функции на отрезке [0.43; 0.75]:

```
» dx=0.01;
» x=0.43:dx:0.75;
» yf=-154.9063*x.^5+444.9904*x.^4-511.6367*x.^3+291.7494*x.^2-
80.6863*x+10.099;
» N=length(x);
» m=1:N-1;
» df(m)=(yf(m+1)-yf(m))/dx;
» plot(df)
```

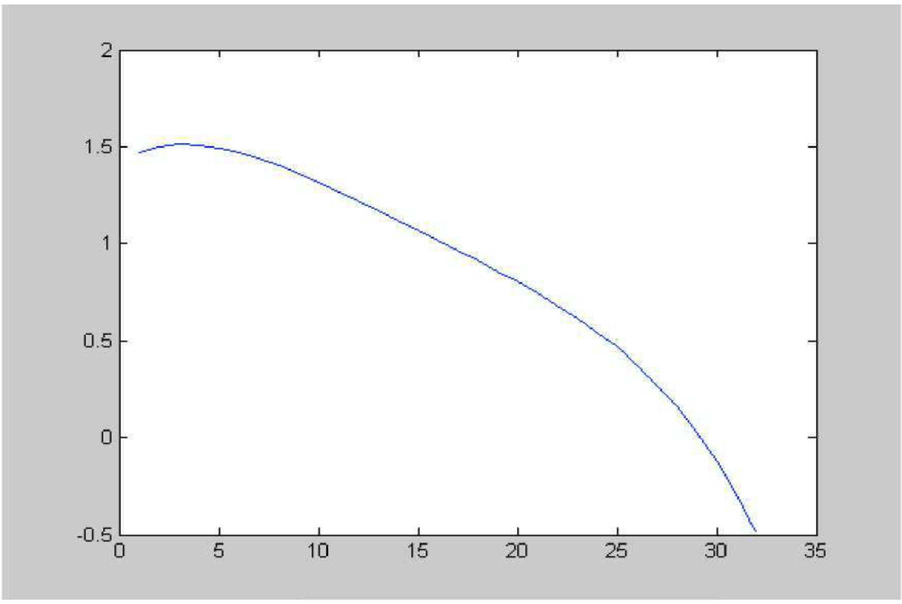

Рис. 8.1. График производной функции

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Дайте определение производной функции.
2. Как выглядит приближенная формула численного дифференцирования?
3. Что такое аппроксимация?
4. Интерполяционная формула Лагранжа для равноотстоящих узлов.
5. Формула численного дифференцирования на основе интерполяционной формулы Лагранжа.
6. Формула для оценки погрешности численного дифференцирования по формуле Лагранжа.
7. Формула численного дифференцирования на основе интерполяционных формул Ньютона.
8. Формула для оценки погрешности численного дифференцирования по формуле Ньютона.
9. Как влияет на точность численного дифференцирования величина шага h?

ЗАДАНИЕ

1. Построить интерполяционный многочлен. Использовать варианты и результаты лабораторной № 7.
2. Найти приближенные значения производной функции на интервале интерполирования.
3. Построить график производной функции.

Лабораторная работа № 9. Приближенное вычисление определенных интегралов

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомится с численными методами вычисления определенных интегралов, научится решать задачи с использованием формулы Симпсона, трапеций, правых и левых прямоугольников, а также вычислений с использованием метода Монте-Карло.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
    - титульный лист;
    - исходные данные варианта;
    - решение задачи;
    - результаты решения задачи.

Пример 9.1.
Вычислить интеграл

$$\int_3^5 \ln x dx$$

методом левых и правых прямоугольников, трапеций и Симпсона.
Решение:
В командном окне программы MATLAB наберем следующую последовательность операторов:

```
» f=inline('reallog(x)'); % задание подынтегральной функции
» a=3;
» b=5;
» N=100;
» i=1:N;
» dx=(b-a)/(N-l);  % шаг интегрирования
» x=a:dx:b;        % вычисление координат узлов сетки
» y=feva1(f,x);    % вычисление значений функции в узлах сетки
% вычисление интеграла методом правых прямоугольников
» m=2:N;
» y1(m-1)=y(m);
» Fr = sum(y1)*dx
Fr =
    2.7565
% вычисление интеграла методом левых прямоугольников
» m=1:N-1;
» y1(m)=y(m);
» Fl=sum(y1)*dx
Fl =
    2.7462
% вычисление интеграла методом трапеций
» s=0;
» for i=2:N-1
s = s+y(i);
end;
» Ft=(0.5*y(1)+s+0.5*y(N))*dx
Ft =
```

```
    2.7513
% вычисление интеграла методом Симпсона
» s=0;
» for i=2:N-1
if i-2*ceil(i/2)==0 k=4;
else
end;
s=s+k*y(i);
end;
» Fs=(y(1)+s+y(N))*dx/3
Fs =
    2.7405
```

Пример 9.2.

Вычислить интеграл $\int_3^5 \ln x dx$ методом Монте-Карло.

Решение:

Значение интеграла можно вычислить или по первой формуле:

$$F_{M-K} = \frac{n}{N} \cdot S, \tag{9.1}$$

или по второй формуле :

$$F_{M-K} = (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), \tag{9.2}$$

где n - число точек, удовлетворяющих условию:

$$y_i \le f(x_i),$$

N – полное количество точек,
S - площадь прямоугольника;
x_i - последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения на отрезке [a, b].
В командном окне программы *Matlab* введем следующее:

```
» f=inline(' reallog(x) ') ;
» a=3;     % задание координат вершин прямоугольника
» b=5;
» Ymin=0;
» Ymax=feval(f,b);
» N=1000;       % генерация случайных координат
» x=a+(b-a)*rand(N,1);
» y=Ymin+(Ymax-Ymin)*rand(N,1);
» s=0;     % подсчет числа точек, попавших под график функции
» for i=1:N
       if y(i)<=feval(f,x(i))
       s=s+1;
   end;
end;
» Fmk=s*(b-a)*(Ymax-Ymin)/N % вычисление значения интеграла
Fmk =
     2.7425
% вычисление интеграла в соответствии с (9.2)
» F=feval(f,x);
» Fmk=(b-a)*sum(F)/N
Fmk =
```

```
     2.7463
```

Вычисление интеграла в системе *Matlab* осуществляется с помощью следующих функций:

`quad ('fun',a,b,tol)` - возвращает значение интеграла от функции fun на интервале [a, b] с заданной относительной погрешностью tol (по умолчанию tol=10-^{3}), при вычислении используется адаптивный метод Симпсона;

`int(y(x),a,b)` - возвращает значение интеграла от функции $y(x)$ на интервале [a, b] аналитическими методами (если границы не задавать, то вычисляет неопределенный интеграл).

Пример 9.3. Пусть необходимо вычислить определенный интеграл

$$\int_{3}^{5} \ln x dx .$$

Вычисление указанного интеграла, например, с помощью функции `quad` состоит в следующем:

```
» y='log(x)';
» quad(y,3,5)
```

После нажатия клавиши <Enter> получим следующее решение:

```
ans =
     2.7514
```

Вычисление указанного интеграла с помощью функции `int` состоит в следующем:

```
» syms x;        %определение символьных переменных
» y=log(x);       % ввод подынтегрального выражения
» int(y,3,5)
ans =
     5*log(5)-2-3*log(3)
```

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. В каком случае используется численное интегрирование?
2. Постановка задачи численного интегрирования.
3. Какие существуют методы интегрирования функций?
4. Графическая интерпретация метода трапеций.
5. Как оценить погрешность метода трапеций?
6. Графическая интерпретация метода Симпсона.
7. Как оценить погрешность метода Симпсона?
8. Графическая интерпретация метода прямоугольников.
9. Как оценить погрешность метода прямоугольников?
10. Чем отличаются формулы метода трапеций и метода Симпсона?
11. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага h?
12. Чем отличается вычисление погрешности метода трапеций и Симпсона?
13. Основная идея метода Монте-Карло? 14. Графическая интерпретация метода Монте-Карло.

ЗАДАНИЕ

Найти приближенное значение интеграла заданной функции f(x) на отрезке [*a*, *b*] по формулам прямоугольников, трапеции, Симпсона, Монте-Карло при делении отрезка на 2000 равных частей, произвести оценку погрешности методов интегрирования и сравнить точность полученных результатов: составить функцию, возвращающую значение интеграла на основе формулы метода Монте-Карло. Сравнить результаты, полученные разными методами.

Варианты заданий

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sqrt{1+\cos^2 x}$	[0; 3]	7	$x^2 tg\left(\frac{x}{2}\right)$	[1,5;2,5]
2	$\sin(2x^2+1)$	[0; 1]	8	$\frac{e^x}{x}$	[1; 7]
3	$(x+1.9)\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	[1; 2]	9	$\frac{1}{x^2+1}$	[0; 1]
4	$\frac{1}{x}\ln(x+2)$	[2; 3]	10	$\sqrt{4+x^4}$	[0; 3]
5	$x^2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$	[2; 3]	11	$\sqrt{1+\cos^2 x}$	[0; π]
6	$3x+\ln x$	[1; 2]	12	$e^x\sin(x^2)$	[0; 5]

Лабораторная работа № 10. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомится с численными методами вычисления кратных интегралов, научится решать задачи с использованием метода Монте-Карло.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
   - титульный лист;
   - исходные данные варианта;
   - решение задачи;
   - результаты решения задачи.

Пример 10.1.
Вычислить методом Монте-Карло двойной интеграл

$$\iint\limits_D \sqrt{x+y}\,dxdy\,,$$

где область D ограничена линиями (рис. 10.1):

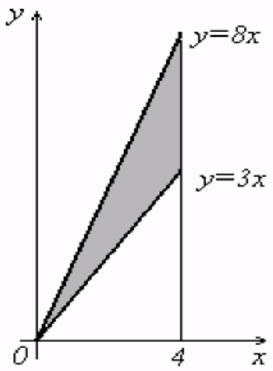

Рис. 10.1. Область D ={ $x=0, x=4,\ \ y=3x,\ \ y=8x$ }

Решение:
Записав данный двойной интеграл в виде повторного, имеем

$$I=\int_0^4 dx\int_{3x}^{8x}\sqrt{x+y}\,dy$$

Здесь

$$a=0,\ b=4,\ \varphi_1(x)=3x,\ \varphi_2(x)=8x;$$

далее,

$$\varphi_1(x)\ge 0,\ \varphi_2(x)=\le 32\,,$$

поэтому

$$c = 0;\quad d = 32.$$

1.Создайте файл F_10.m (листинг 10.1), содержащий описание функции

$$F(x,y)=\sqrt{x+y}$$

Листинг 10.1. Файл F_10.m.
```
function z=F_10(x,y)
z=sqrt(x+y);
```

2. Создайте файл G1_10.m (листинг 10.2), содержащий описание функции

$$\varphi_1(x) = 3x\,.$$

Листинг 10.2. Файл G1_10.m.
```
function z=G1_10(x)
z=3*x;
```

3.Создайте файл G2_10.m (листинг 10.3), содержащий описание функции

$$\varphi_2(x) = 8x$$

Листинг 10.3. Файл G2_10.m.
```
function z=G2_10(x)
z=8*x;
```

4. Создайте файл KrInt.m (листинг 10.4), содержащий описание функции, вычисляющей двойной интеграл методом Монте-Карло по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{N}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)$$

Листинг 10.4. Файл KrInt.m.
```
function z=KrInt(f,a,b,c,d,g1,g2,N)
S=0;
for i=1:N
    x=a+(b-a)*rand(1);
    y=c+(d-c)*rand(1);
    ng=feval(g1,x);
    vg=feval(g2,x);
      if (y<=vg) & (y>=ng)
        S=S+feval(f,x,y);
     end
end
z=(b-a)*(d-c)*S/N;
```

5. Вычислите интеграл:
```
» I=KrInt('F_10',0,4,0,32,'G1_10','G2_10',1000)
I =
163.4583
```
Таким образом, $I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x}^{8x} \sqrt{x+y}dy \approx 163{,}4583$.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. В каком случае используется численное интегрирование?
2. Постановка задачи численного интегрирования.
3. Какие существуют методы вычисления кратных интегралов?
4. Основная идея метода Монте-Карло.
5. Аналог формул прямоугольников.
6. Аналог формулы трапеций.
7. Аналог формул Симпсона.

ЗАДАНИЕ

Вычислить двойной интеграл I по области *D* методом Монте-Карло.

Варианты заданий.

№ варианта	Задания	
	I	D
1	$\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$	$x=1, x=3,\ y=x^2,\ y=x+x^2$
2	$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$	$x=0, x=4,\ y=1,\ y=5$
3	$\iint\limits_D (xy+3\sqrt{y})dxdy$	$x=0, x=2,\ y=1,\ y=9$
4	$\iint\limits_D \left(\frac{x}{2}+y\right)dxdy$	$x=2, x=4,\ y=\frac{x^2}{2},\ y=2x$
5	$\iint\limits_D \sqrt{x+y+1}dxdy$	$x=0, x=4,\ y=1,\ y=7$
6	$\iint\limits_D \frac{\cos y}{x} dxdy$	$x=0.2, x=1,\ y=0,\ y=x$
7	$\iint\limits_D (x-y)dxdy$	$y=2-x^2,\ y=2x-1$
8	$\iint\limits_D (x+2y)dxdy$	$x=2, x=3,\ y=x,\ y=2x$
9	$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$	$x=y, x=0,\ y=1,\ y=2$
10	$\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)dxdy$	$x=0,\ x=y^2,\ y=2$
11	$\iint\limits_D (x+y+3)dxdy$	$x+y=2, x=0,\ y=0$
12	$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$	$y=x^2,\ y^2=x$

Лабораторная работа № 11. Методы обработки экспериментальных данных

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о подходе к решению задачи о среднеквадратичном приближении функции, заданной таблично; привить знания о методах аппроксимации элементарными функциями; выработать навыки работы в среде программы *Matlab* .

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 11.1.
Найти уравнение линейной и гиперболической регрессий для функции, заданной таблично:

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3.5	1.5	2

Решение:
а) Вычислить коэффициенты *a* и *b* уравнения линейной регрессии можно, воспользовавшись системой:

$$\begin{cases} M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy}, \\ M_x \cdot a + b = M_y; \end{cases} \qquad (11.1)$$

где

$$\begin{cases} M_{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum x_i^2, \\ M_x = \dfrac{1}{n}\sum x_i, \\ M_{xy} = \dfrac{1}{n}\sum x_i y_i, \\ M_y = \dfrac{1}{n}\sum y_i; \end{cases} \qquad (11.2)$$

В этом случае неизвестные коэффициенты *a* и *b* определяются решением системы уравнений (11.1) в следующем виде:

$$a = \frac{M_{xy} - M_x \cdot M_y}{M_{x^2} - M_x^{\ 2}}, \quad b = \frac{M_{x^2} M_y - M_x \cdot M_{xy}}{M_{x^2} - M_x^{\ 2}}. \qquad (11.3)$$

В командном окне программы *Matlab* наберем следующую последовательность операторов:

```
» x=[1;2;3;4;5];    % задание исходных данных
```

```
» y=[4;5;3.5;1.5;2];
» x2=[x.^2];
» xy=[x.*y];
» Mx=1/6*sum(x);       % вычисление элементов матриц M и d
» My=1/6*sum(y);
» Mx2=1/6*sum(x2);
» Mxy=1/6*sum(xy);
» м(1,1)=Mx2;          % задание матрицы M
» M(1,2)=Mx;
» M(2,1)=Mx;
» M(2,2)=1;
» d(l,l)=Mxy;          % задание матрицы d
» d(2,1)=My;
» coeff=MA-i*d         % решение системы линейных уравнений (11.1)
Coeff =
    0.0286
    2.5952
» a=(мху-мх*му)/(мх2-мхЛ2)% вычисление коэффициентов на основе (11.3)
a=
    0.0286
» b=(Mx2*My-Mx*Mxy)/(Mx2-MxЛ2)
b =
    2.5952
% вычисление суммы квадратов отклонений
» y1=a*x+b;
» e2=(y-y1).^2;
» S=sum(e2)
S =
   10.0840
% построение графика полученной функции и исходных данных »
plot(x,y1,x,y,'*')
```

Получили уравнение линейной регрессии У=0,0286Х+2,5952, сумму квадратов отклоненийS=10,084 и график (рис 11.1).

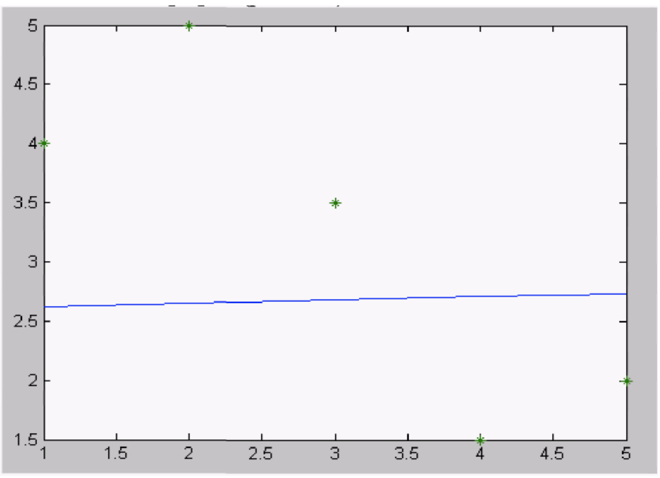

Рис. 11.1. Исходные данные и график для линейной функции

Для нахождения гиперболической регрессии воспользуемся заменой:

$$u = \frac{1}{x}$$

и рассмотрим таблицу

U	u_1	u_2	...	u_n
y	y_1	y_2	...	y_n

для функции $F(u,a,b) = au+b$.
В командном окне программы *Matlab* введем следующее:

```
» x=[1;2;3;4;5];
» u=(1./x);% введение замены переменной x
» y=[4;5;3.5;1.5;2];
» u2=[u.^2];
» uy=[u.*y];
» Mu=1/6*sum(u);
» My=1/6*sum(y);
» Mu2=1/6*sum(u2);
» Muy=1/6*sum(uy);
» M(1,1)=Mu2;
» M(1,2)=Mu;
» M(2,1)=Mu;
» M(2,2)=1;
» d(1,1)=Muy;
» d(2,1)=My;
» Coeff=M^-1*d
Coeff =
       3.9564
       1.1610
» a=(Muy-Mu*My)/(Mu2-Mu^2)
a =
   3.9564
» b=(Mu2*My-Mu*Muy)/(Mu2-Mu^2)
b=
  1.1610
» y2=a1./x+b1
» e2=(y-y2).^2
» S=sum(e2)
S =
   6.1769
» plot(x,y2,x,y,'*')
```

Следовательно, уравнение гиперболической регрессии определяется как

$$y=3{,}9564/x+1{,}1610,$$

сумма квадратов отклонений как

S=6.1769

и график функции регрессии имеет следующий вид (рис 11.2.):

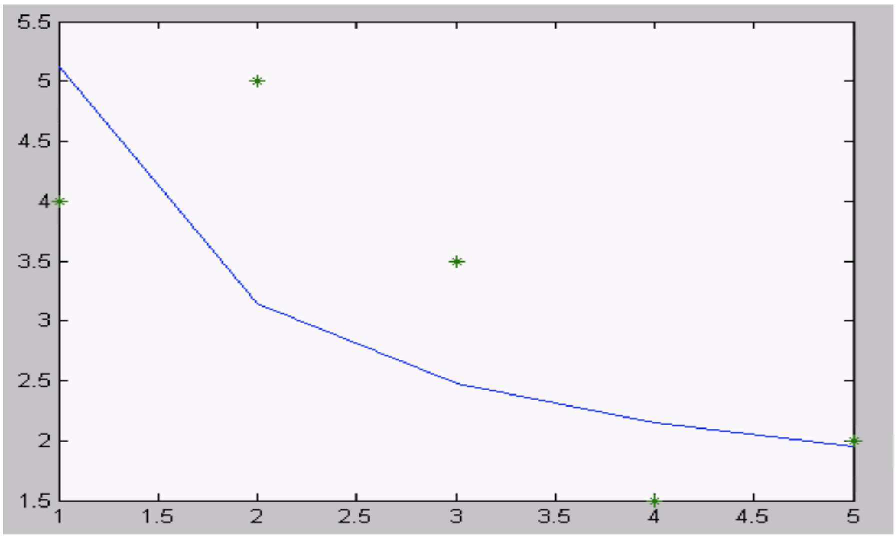

Рис.11.2. Исходные данные и график
для гиперболической функции

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Общая постановка задачи нахождения приближающей функции.
2. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов?
3. Какие функции могут быть использованы в качестве приближающих?
4. Как находятся отклонения измеренных значений Y от вычисленных по формуле приближающей функции?
5. Как найти приближающую функцию в виде линейной функции:

$$F(x,a,b)=ax+b?$$

6. Как найти приближающую функцию в виде квадратичной функции:

$$F(x,a,b,c)=ax^2+bx+c?$$

7. Как привести показательную, степенную, логарифмическую функции к линейной?
8. Как функция трех переменных может принимать наименьшее значение?
9. Что такое коэффициент корреляции и как он находится?
10. Каковы границы значения коэффициента корреляции и что они показывают?
11. Что такое отклонение?
12. Как можно определить правильность вида выбранной функции.

ЗАДАНИЕ

1. Используя данные таблицы и применяя стандартные замены переменных, найти уравнения следующих видов регрессий:
   - линейной,
   - гиперболической,
   - степенной,
   - показательной,
   - логарифмической.

2. Сравнить качество полученных приближений путем сравнения их отклонений.

3. Построить графики получившихся зависимостей и табличных значений аргументов и функции.

Варианты заданий

№	Задание								
1	*x*	1,20	1,57	1,94	2,31	2,68	3,05	3,42	3,79
	y	2,56	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
2	*x*	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,89	6,70	7,53
	y	0,63	1,11	1,42	1,96	2,30	2,89	3,29	3,87
3	*x*	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,60
	y	2,25	2,83	3,44	4,51	5,29	6,55	8,01	10,04
4	*x*	1,00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,29	4,84	5,48
	y	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
5	*x*	5,89	3,84	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91
	y	79,31	57,43	60,66	90,55	92,12	71,30	70,50	91,25
6	*x*	2,91	2,94	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96
	y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,19	70,24	63,23	66,48
7	*x*	1,23	1,79	2,24	2,76	3,20	3,68	4,16	4,64
	y	2,10	2,84	3,21	3,96	4,86	6,06	7,47	9,25
8	*x*	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,60
	y	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,89	6,70	7,53
9	*x*	2,56	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
	y	0,63	1,11	1,42	1,96	2,30	2,89	3,29	3,87
10	*x*	79,31	57,43	60,66	90,55	92,12	71,30	70,50	91,25
	y	5,89	3,84	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91
11	*x*	2,10	2,84	3,21	3,96	4,86	6,06	7,47	9,25
	y	1,00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,29	4,84	5,48
12	*x*	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
	y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,19	70,24	63,23	66,48

Лабораторная работа № 12. Решение задачи Коши методами Эйлера и Рунге-Кутта для дифференциальных уравнений первого порядка

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представления о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать задачу Коши для дифференциальных уравнений:

$$y' = f(x, y)$$

на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y_0 = f(x_0)$ методом Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса; развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 13.1.
Методом Эйлера найти значения решения задачи Коши для дифференциального уравнения:

$$y' = x + cos(y/\pi);\ \ y(1{,}7)=5.3$$

с шагом $h = 0.1$ на отрезке

$$[1{,}7;\ 2{,}7].$$

Решение.
1. Создайте файл Eiler_13.m (листинг 13.1), содержащий описание функции, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Эйлера.

Листинг 13.1. Файл Eiler_13.m

```
function[X,Y]=Eiler_13(y0,x0,x1,h)
N=(x1-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:N
    x(i+1)=x(1)+h*i;
    y(i+1)=y(i)+h*F13(x(i),y(i));
    end;
X=x;
Y=y;
function z=F13(x,y)
z=x+cos(y./pi);
```

2. Выполнить следующую последовательность команд:

```
» h=0.1; % шаг
» xO=1.7; % левая граница отрезка интегрирования
» xl=2.7; % правая граница отрезка интегрирования
» y0=5.3; % начальное условие
% нахождение численного решения задачи Коши
```

```
» [X,Y]=Eiler_13(y0,x0,x1,h);
» i=1:length(X);
% вычисление значений точного решения
» Z(i)=y0+1/2*X(i).^2+pi *sin(Y(i)/pi);
% визуализация точного, численного решения и разности между ними (рис. 13.1)
» plot(X,Z,X,Y,'*', X,abs(Z-Y),'.')
```

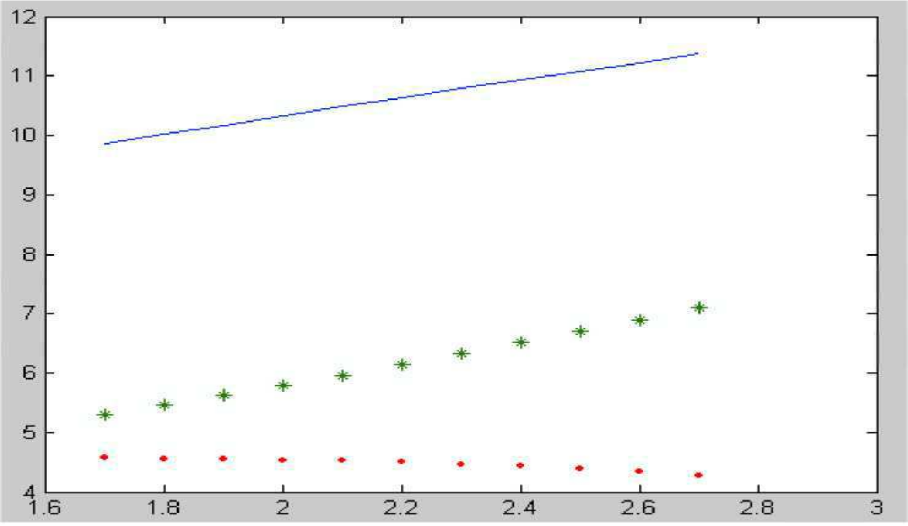

Рис. 13.1. Визуализация точного(-), численного (*) решения и разности(.) между точным и численным решением, полученным методом Эйлера

Пример 13.2.

Найдите решение дифференциального уравнения первого порядка с указанным начальным условием на заданном отрезке Рунге-Кутта:

$$y' = x + \cos(x/\pi),\ \ y(1.7) = 5.3,\ [1.7;2.7],\ \ h = 0.1.$$

Решение.

1. Создайте файл RungeKutt_13.m (листинг 13.2), содержащий описание функции, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Листинг 13.2. Файл RungeKutt_13.m

```
Function [X,Y]= RungeKutt(y0,x0,x1,h)
N=(x1-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=2:N+1
    x(i)=x(1)+h*(i-1);
    k1=h*F(x(i-1),y(i-1));
    k2=h*F(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k1/2);
    k3=h*F(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k2/2);
    k4=h*F(x(i-1)+h,y(i-1)+k3);
    y(i)=y(i-1)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end;
X=x;
Y=y;
function z=F(x,y)
z=x+cos(y./pi);
```

2. Выполнить следующую последовательность команд:

```
» h=0.1;  % шаг
» x0=1.7; % левая граница отрезка интегрирования
```

```
» xl=2.7; % правая граница отрезка интегрирования
» y0=5.3; % начальное условие
% нахождение численного решения задачи Коши
» [X,Y]=RungeKutt_13(y0,x0,x1,h);
» i=1:length(X);
% вычисление значений точного решения
» Z(i)=y0+1/2*x(i).^2+pi *sin(Y(i)/pi);
% визуализация точного, численного решения и разности между
% численным и точным решениями (рис. 13.2)
» plot(X,Z,X,Y,'*',X,abs(z-Y),'.')
```

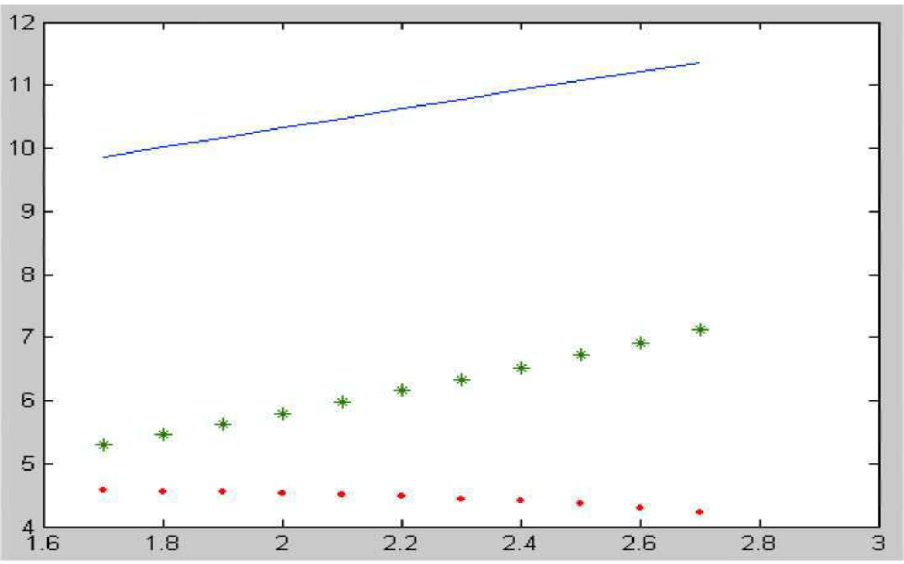

Рис. 13.2. Визуализация точного(-), численного (*) решения и разности(.) между точным и численным решением, полученным методом Рунге-Кутта

Пример 13.3.

Методом Адамса найти значения дифференциального уравнения

$$y' = x + \cos(y/\pi)$$

на отрезке

$$[1{,}7;\ 2{,}7],$$

для которого

$$y(1{,}7) = 5{,}3,$$

приняв

$$h = 0{,}1.$$

Решение.

1. Создайте файл RungeKutt_13_3.m (листинг 13.3), содержащий описание функции, вычисляющей первые три значения функции методом Рунге-Кутты.

Листинг 13.3. Файл RungeKutt_13_3.m

```
function [X,Y]= RungeKutt_13_3(y0,x0,h,N)
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=2:N
    x(i)=x(1)+h*(i-1);
    k1=h*F(x(i-1),y(i-1));
    k2=h*F(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k1/2);
    k3=h*F(x(i-1)+h/2,y(i-1)+k2/2);
    k4=h*F(x(i-1)+h,y(i-1)+k3);
    y(i)=y(i-1)+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end;
X=x;
```

```
Y=y;
function  z=F(x,y)
z=x+cos(y./pi);
```

2. Создайте файл Adams_13.m (листинг 13.4), содержащий описание функции, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Адамса.

Листинг 13.4. Файл Adams_13.m

```
function [y,X,Y]= Adams_13(X,Y,h,N)
b=N-1; %4
c=N-2; %3
d=N-3; %2
a=N-4; %1
for i=a:b
    q(i)=h*Y(i);
end;
for i=a:c
    dq(i)=q(i+1)-q(i);
end;
d2q(a)=dq(d)-dq(a);
d2q(d)=dq(c)-dq(d);
d3q(a)=dq(d)-d2q(a);
dy=q(b)+1/2*dq(c)+5/12*d2q(d)+3/8*d3q(a);
y=Y(b)+dy;
X(N)=X(1)+h*(N-1);
Y(N)=y;
```

3. В командном окне программы MATLAB наберем следующую последовательность операторов для вычисления первых трех значений функции:

```
» h=0.1;  % шаг
» x0=1.7; % начальные условия
» y0=5.3;
» N=4;    % длина матрицы
» [X,Y]=RungeKutt_13_3(y0,x0,h,N);
» X
X =
    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000
» Y
Y =
    5.3000    5.4609    5.6266    5.7972
```

4.Для вычисления значений функции методом Адамса выполнить следующую последовательность команд:

```
» [y,X,Y]=Adams_13(X,Y,h,5)
y =
    6.3916  X
=
    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000    2.1000
Y =
    5.3000    5.4609    5.6266    5.7972    6.3916
» [y,X,Y]=Adams_13(X,Y,h,6)
y =
    7.0844
X =
    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000    2.1000    2.2000
Y =
    5.3000    5.4609    5.6266    5.7972    6.3916    7.0844
```

```
» [y,X,Y]=Adams_13(X,Y,h,7)
y =
    7.8380
X =
    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000    2.1000    2.2000    2.3000
Y =
    5.3000    5.4609    5.6266    5.7972    6.3916    7.0844    7.8380
```

Постепенно увеличивая длину матрицы, получим:

```
»  [y,X,Y]=Adams_13(X,Y,h,11) % итоговые значения функции
y  =
   11.8213
X  =
  Columns 1 through 7
    1.7000    1.8000    1.9000    2.0000    2.1000    2.2000    2.3000
  Columns 8 through 11
    2.4000    2.5000    2.6000    2.7000
Y =
  Columns 1 through 7
    5.3000    5.4609    5.6266    5.7972    6.3916    7.0844    7.8380
  Columns 8 through 11
    8.6843    9.6249   10.6666   11.8213
```

5. Для получения графического решения задачи Коши выполните следующую последовательность действий:

```
» i=1:length(X);
» Z(i)=y0+1/2*X(i).^2+pi*sin(Y(i)/pi);
%визуализация точного, численного решения и разности между ними(рис.13.3)
» plot(X,Z,X,Y,'*',X,abs(Z-Y),'.')
```

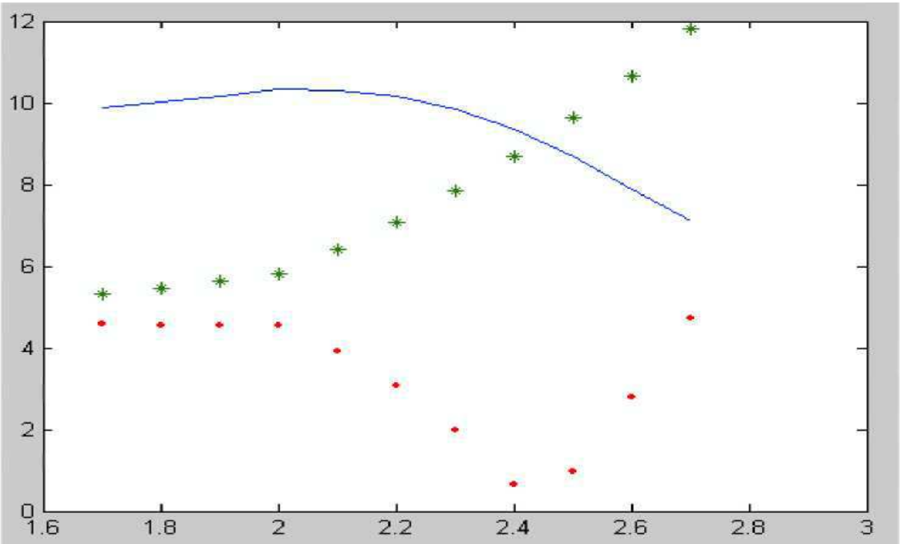

Рис. 13.3. Визуализация точного (-), численного (*) решения и разности (.) между точным и численным решением, полученным методом Адамса

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1.Что значит - решить задачу Коши для дифференциальных уравнений первого порядка?
2. Графическая интерпретация численного решения дифференциального уравнения.
3. Какие существуют методы решения дифференциального уравнения в зависимости от формы представления решения?
4. В чем заключается суть принципа сжимающих отображений?
5. В чем заключается суть метода ломанных Эйлера?
6. Применение каких формул позволяет получить значения искомой функции по методу Эйлера?
7. Графическая интерпретация метода Эйлера и усовершенствованного метода Эйлера. В чем их отличие?
8. В чем заключается суть метода Рунге-Кутты?
9. Как определить количество верных цифр в числе, являющемся решением дифференциального уравнения методам Эйлера, усовершенствованного метода Эйлера, Рунге-Кутты?

ЗАДАНИЕ

1. Найдите решения дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x0) = y0$$

на промежутке $[a, b]$ с шагом h = 0,1:
   а) методом Эйлера;
   б) методом Рунге-Кутта;
   в) методом Адамса.
2. Построить графики функции.
3. Сравнить результаты и сделать вывод.

Варианты заданий

№ варианта	$F(x,y,y')=0$	$y(x_0)=y_0$	$[a, b]$
1	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8)=2,6$	[1,8; 2,8]
2	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6)=0,8$	[0,6; 1,6]
3	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1)=2,5$	[2,1; 3,1]
4	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5)=0,6$	[0,5; 1,5]
5	$y' = x + \cos\frac{y}{2,25}$	$y_0(1,4)=2,2$	[1,4; 2,4]
6	$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7)=5,3$	[1,7; 2,7]
7	$y' = x + \cos\frac{y}{e}$	$y_0(1,4)=2,5$	[1,4; 2,4]
8	$y' = x + \cos\frac{y}{3}$	$y_0(1,6)=4,6$	[1,6; 2,6]

9	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8)=2,6$	[1,8; 2,8]
10	$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7)=5,3$	[1,7; 2,7]
11	$y' = x + \cos\frac{y}{1,25}$	$y_0(0,4)=0,8$	[0,4; 1,4]
12	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(1,2)=1,4$	[1,2; 2,2]

Лабораторная работа № 13. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представления о применении систем дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать задачу Коши для систем дифференциальных уравнений методом Эйлера, Рунге-Кутты; развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 14.1.
Решить методом Эйлера систему

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$$

при данных начальных условиях

$$t_0 = 0,\ x_0 = -\frac{3}{17},\ y_0 = \frac{4}{17}.$$

Решение.
Сначала приведем систему к нормальному виду, т.е. к виду, разрешенному относительно производных

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$$

1. Создайте файл Eiler_14.m (листинг 14.1), содержащий описание функции, возвращающей решение системы дифференциальных уравнений методом Эйлера.

Листинг 14.1. Файл Eiler_14.m
```
function [T,X,Y] =Eiler_14(t0,t1,x0,y0,N)
dt=(t1-t0)/N;
t(1)=t0;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:N
t(i+1)=t(1)+dt*i;
x(i+1)=x(i)+dt*F1_14(t(i),x(i),y(i));
y(i+1)=y(i)+dt*F2_14(t(i),x(i),y(i));
end;
T=t;
X=x;
Y=y;
```

```
function z=F1_14(t,x,y)
z=-3*y + cos(t)-exp(t);
function z=F2_14(t,x,y)
z=4*y-cos(t)+2*exp(t);
```

3.Выполнить следующую последовательность команд:

```
» [T,X,Y]=Eiler_14(0,5,-3/17,4/17,50);
» plot(T,X,['R','*'],T,Y,['B','>'])
```

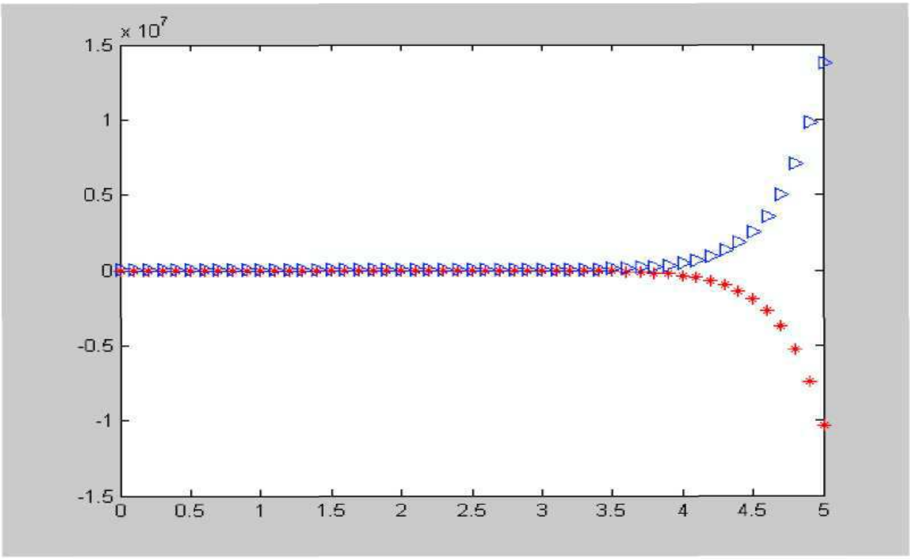

Рис. 14.1. Визуализация численного решения, полученного методом Эйлера

Пример 14.2.
Решить систему

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$$

методом Рунге-Кутта при заданных начальных условиях:

$$t_0 = 0,\ x_0 = -\frac{3}{17},\ y_0 = \frac{4}{17}.$$

Решение.
1. Создайте файл RungeKutta_14.m (листинг 14.2), содержащий описание функции, возвращающей решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

Листинг 14.2. Файл RungeKutta_14.m

```
Function [T,X,Y]=RungeKutta_14(t0,t1,x0,y0,N)
dt=(t1-t0)/N;
t(1)=t0;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:N
t(i+1)=t(1)+dt*i;
kx1=dt* F1_14(t(i),x(i),y(i));
ky1=dt* F2_14(t(i),x(i),y(i));
kx2=dt*F1_14(t(i)+dt/2,x(i)+kx1/2,y(i)+ky1/2);
ky2=dt*F2_14(t(i)+dt/2,x(i)+kx1/2,y(i)+ky1/2);
kx3=dt*F1_14(t(i)+dt/2,x(i)+kx2/2,y(i)+ky2/2);
```

```
ky3=dt*F2_14(t(i)+dt/2,x(i)+kx2/2,y(i)+ky2/2);
kx4=dt*F1_14(t(i)+dt,x(i)+kx3,y(i)+ky3);
ky4=dt*F2_14(t(i)+dt,x(i)+kx3,y(i)+ky3);
x(i+1)=x(i)+1/6*(kx1+2*kx2+2*kx3+kx4);
y(i+1)=y(i)+1/6*(ky1+2*ky2+2*ky3+ky4);
end;
T=t;
X=x;
Y=y;
function z=F1_14(t,x,y)
z=-3*y + cos(t)-exp(t);
function z=F2_14(t,x,y)
z=4*y-cos(t)+2*exp(t);
```

3. Выполнить следующую последовательность команд:

```
» [T,X,Y]= RungeKutta_14(0,5,-3/17,4/17,50);
» plot(T,X,['R','*'],T,Y,['B','>'])
```

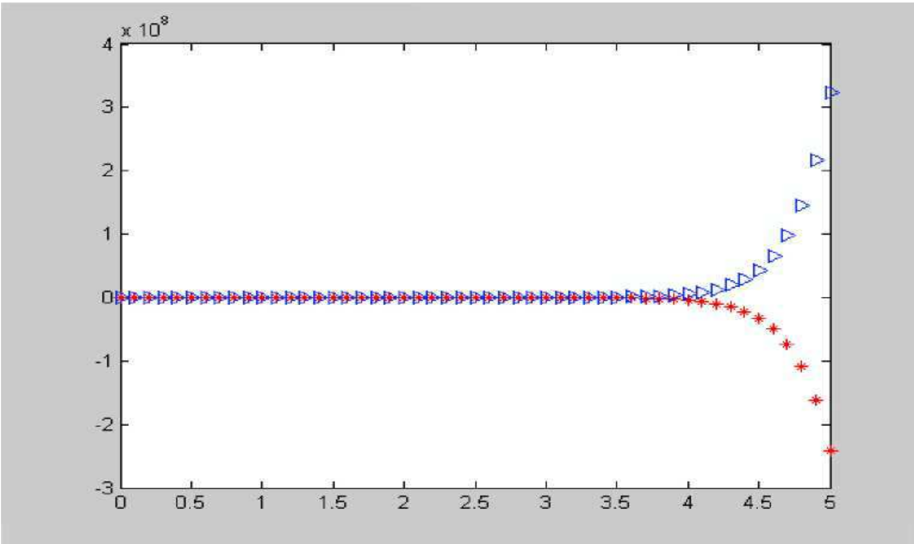

Рис. 14.2. Визуализация численного решения, полученного Методом Рунге-Кутты

Пример 14.3.

Решить систему:

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$$

при данных начальных условиях:

$$t_0 = 0,\ x_0 = -\frac{3}{17},\ y_0 = \frac{4}{17},$$

с использованием функции ode ().

Решение.

1. Создать m-файл функции вычисления правых частей дифференциальных уравнений. Пусть имя файла - `sisdu.m`, тогда функция может иметь следующий вид:

```
function z=sisdu(t,y)
z1=-3*y(2)+cos(t)-exp(t);
```

```
z2=4*y(2)-cos(t)+2*exp(t);
z=[z1;z2];
```

2. Выполнить следующие действия:

```
» t0=0;tf=5;y0=[-3/17,4/17];
» [t,y]=ode23('sisdu',t0,tf,y0);
» plot(t,y)
```

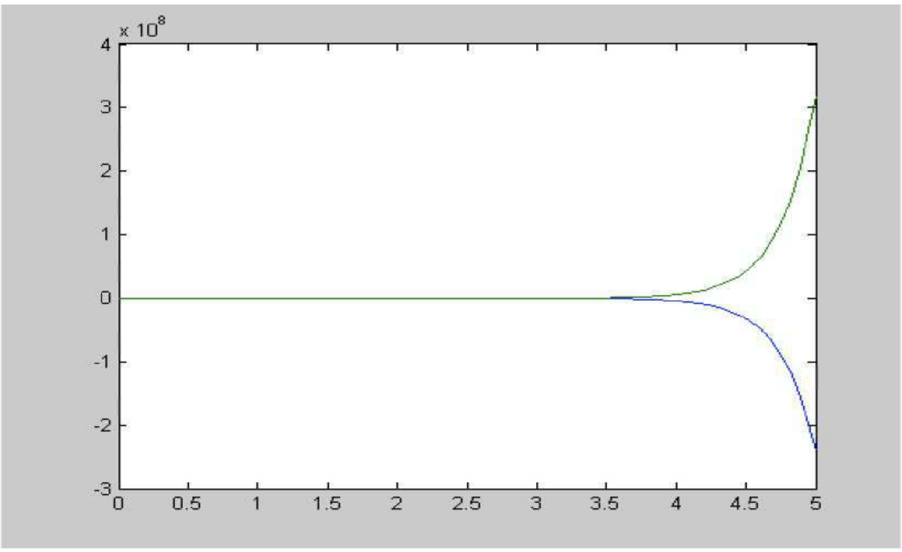

Рис. 14.3. Визуализация численного решения, полученного с помощью функции ode23.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что значит - решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений?
2. Какие существуют методы решения систем дифференциальных уравнений?
3. Применение каких формул позволяет получить решение системы дифференциальных уравнений по методу Эйлера?
4. Применение каких формул позволяет получить решение системы дифференциальных уравнений по методу Рунге-Кутты?

ЗАДАНИЕ

1. Найдите решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -aP_1(t) + mP_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = aP_1(t) - (a-m)P_2(t) + 2mP_3(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = aP_2(t) - (a-m)P_3(t) + 3mP_4(t), \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = aP_3(t) - 3mP_4(t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $P1(0)=1, P_2(0)=P_3(0)=P_4(0)=0$ на промежутке [0, 1] с шагом h=0,01:

   а) методом Эйлера;
   б) методом Рунге-Кутта;

2. Построить графики функций.
3. Сравнить результаты и сделать вывод.

Варианты заданий

№ варианта		
	a	m
1	0.1	1,2
2	0.2	1,5
3	0,3	1,7
4	0,4	1,9
5	0,5	2
6	0,6	1,9
7	0,7	2,3
8	0,8	2,7
9	0,9	3
10	0.1	1,5
11	0,2	1,1
12	0,3	2

Лабораторная работа № 14. Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений высших порядков

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представления о применении дифференциальных уравнений высших порядков в различных областях; привить умения решать задачу Коши для дифференциальных уравнений высших порядков с помощью прикладных программ; развить навыки проверки полученных результатов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 1.1.
Решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - 2y' - y = 6xe^x$$

при данных начальных условиях

$$y(0) = y'(0) = 1$$

Решение:
Сначала приведем дифференциальное уравнение к системе:

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = 6xe^x + 2y_1 + y. \end{cases}$$

1. Создать m-файл функции вычисления правых частей дифференциальных уравнений. Пусть имя файла - sisdu.m, тогда функция может иметь следующий вид:

```
function z=sisdu_15(x,y)
z1=y(2);
z2=6*x*exp(x)+2*y(2)+y(1);
z=[z1;z2];
```

2.Выполнить следующие действия:

```
» plot(x,y(:,1))
» x0=0;xf=10;y0=[0,0];
» [x,y]=ode23('sisdu_15',x0,xf,y0);
» plot(x,y(:,1))
```

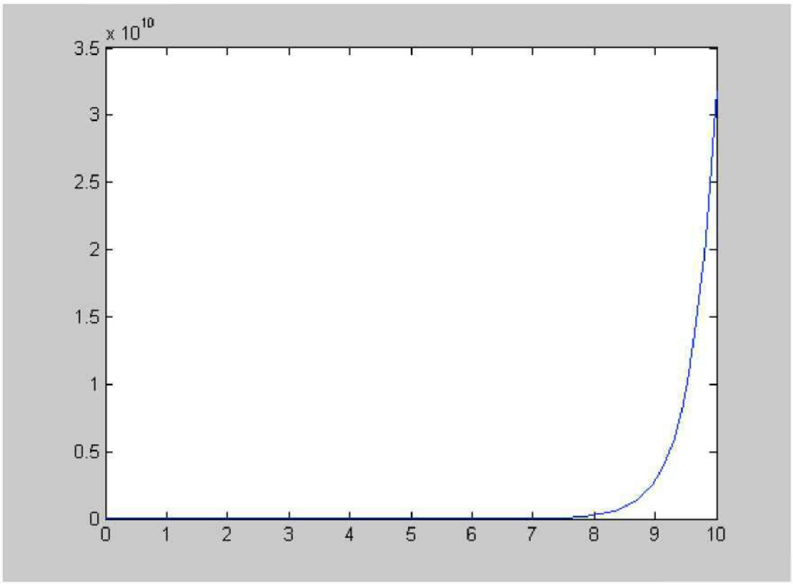

Рис. 15.1. Визуализация численного решения, полученного с помощью функции ode23.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что значит - решить задачу Коши для дифференциальных уравнений высших порядков?
2. Как привести дифференциальное уравнение *m-го* порядка к системе?

ЗАДАНИЕ

1. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям на промежутке [0, 10] с шагом h=0,01.
2. Построить графики функций.

Варианты заданий

№ варианта	Задания	
	Уравнения	Начальные условия
1	$y'' + y = 4xe^x$	$y(0) = -2,\ y'(0) = 0$
2	$y'' + y = 4\sin x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
3	$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$	$y(0) = \frac{26}{5},\ y'(0) = \frac{39}{5}$
4	$y'' - 2y' - 3y = 48x^2e^x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{3}{2}$
5	$y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$	$y(0) = -1,\ y'(0) = 1$
6	$y'' - y = 2e^x - x^2$	$y(0) = 2,\ y'(0) = 1$
7	$y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x$	$y(0) = y'(0) = 0$
8	$y'' + 9y = 6\cos 3x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
9	$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
10	$4y'' + y = ctg\frac{x}{2}$	$y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = \frac{1}{2}$
11	$y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$	$y(0) = 2,\ y'(0) = 3$
12	$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$	$y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}$

Лабораторная работа № 15. Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о применении дифференциальных уравнений в частных производных в различных областях физики и техники; выработать навыки решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом сеток.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 16.1.
Используя метод сеток, решить уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа):

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

при заданных начальных условиях:

$$u(x;0)=3x(1-x)+0.12;\ \ u(0;\ t)=2(t+0.06);\ \ u(0.6;\ t)=0.84,$$

где $x \in [0;\ 0.6]$.

Решение найти при h=0,1 для t [0; 0.01]с четырьмя десятичными знаками, считая £ = 1/6 .

Решение.
1.В командном окне *Matlab* наберем следующую последовательность операторов:

```
» h=0.1; s=1/6;
» k=h^2*s
k =
    0.0017
» Nx = 0.6/h+l   % число узлов координатной сетки
Nx =
    7.0000
» Nt = 0.01/k+l  % число шагов по времени
Nt =
    7.0000
» for i=1:Nx+1 % задание пространственно-временной сетки
      x(i)=(i-1)*h;
  end;
» x
x =
   0  0.1000   0.2000   0.3000   0.4000   0.5000  0.6000
» for i=1:Nt+1
       t(i)=(i-1)*k;
   end;
» t
```

```
t =
   0   0.0017  0.0033   0.0050   0.0067   0.0083 0.0100
% задание начальных и граничных условий
» for i=1:Nx+1
      tab(1,i)=(3*x(i)*(1-x(i)))+0.12;
   end;
» for j=1:Nt+1
        tab(j,1)=2*(t(j)+0.06);
        tab(j,7)=0.84;
   end;
% матрица краевых условий
» tab
tab =
0.1200   0.3900   0.6000   0.7500   0.8400   0.8700   0.8400
0.1233        0        0        0        0        0   0.8400
0.1267        0        0        0        0        0   0.8400
0.1300        0        0        0        0        0   0.8400
0.1333        0        0        0        0        0   0.8400
0.1367        0        0        0        0        0   0.8400
0.1400        0        0        0        0        0   0.8400
% заполнение оставшейся части матрицы
» for j=2:Nt+1
      for i=2:Nx
          tab(j,i)=1/6*(tab(j-1,i-1)+4*tab(j-1,i)+tab(j-1,i+1));
       end;
  end;
» tab
tab =
0.1200   0.3900   0.6000   0.7500   0.8400   0.8700   0.8400
0.1233   0.3800   0.5900   0.7400   0.8300   0.8600   0.8400
0.1267   0.3722   0.5800   0.7300   0.8200   0.8517   0.8400
0.1300   0.3659   0.5704   0.7200   0.8103   0.8444   0.8400
0.1333   0.3607   0.5612   0.7101   0.8009   0.8380   0.8400
0.1367   0.3562   0.5526   0.7004   0.7920   0.8322   0.8400
0.1400   0.3524   0.5445   0.6911   0.7834   0.8268   0.8400
% визуализация численного решения (рис 16.1)
» surf(tab)
```

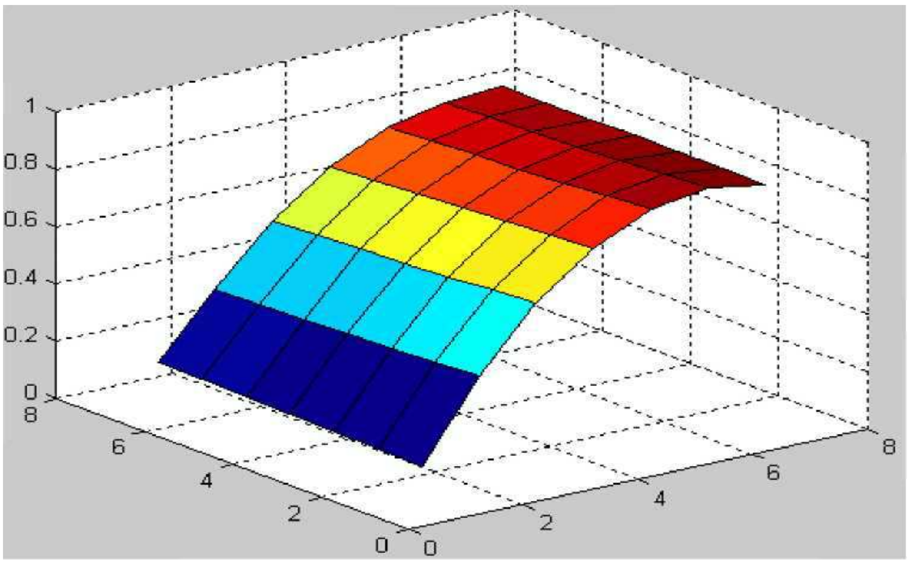

Рис. 16.1. Графическое решение уравнения теплопроводности

ПРИМЕРНЫ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Уравнения какого вида называются дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП), и что является решением УЧП?
2. Какое УЧП называется линейным?
3. Назовите основные типы линейных ДУ с постоянными коэффициентами, и условие, в зависимости от которого происходит эта классификация.
4. Назовите и запишите примеры простейших УЧП эллиптического и параболического типов.
5. Что значит решить задачу Коши для УЧП?
6. Что является начальными и краевыми условиями для УЧП?
7. Что значит решить краевую и смешанную задачи для УЧП?
8. Какая задача носит название «Задачи Дирихле» для уравнения Лапласа, и что значит решить эту задачу?
9. Какие функции называются гармоническими в теории УЧП?
10. Какие методы численного решения УЧП?
11. В чем состоит суть метода конечных разностей (сеток)?
12. Какие точки называются внутренними, граничными I и II рода при решении ДУ методом сеток?
13. В чем заключается суть решения задачи Дирихле методом сеток?
14. По какой формуле находятся значения функции во внутренних узлах и внешних (граничных) при решении задачи Дирихле методом сеток?
15. За счет чего происходит грубое приближение искомых значений при решении задачи Дирихле методом сеток?
16. Как строится решения задачи Дирихле методом сеток?
17. Что значит решить уравнение теплопроводности методом сеток?
18. Алгоритм решения уравнения теплопроводности методом сеток.

ЗАДАНИЕ

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

при заданных начальных и краевых условиях:

$$u(x;\,0) = \mathrm{f}(x),$$
$$u(0;\,\mathrm{t}) = \varphi(\mathrm{t})$$
$$u(0.6;\,\mathrm{t}) = \psi(t),$$

где x [0; 0.6]. Решение найти при h=0,1 для t[0; 0.01] с четырьмя десятичными знаками, считая δ = 1/6.

Варианты заданий:

№ варианта	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
1	$\cos(2x)$	$1-6t$	0,3624
2	$x(x+1)$	$2t+0{,}96$	0,9600
3	$1{,}3+\ln(x+0{,}4)$	$0{,}8+t$	1,2
4	$\sin(2x)$	$2t$	0,932
5	$3x(2-x)$	$t+2{,}52$	2,52
6	$\sin(0{,}55x+0{,}33)$	$t+0{,}33$	0,354
7	$2x(1-x)+0{,}22$	$0{,}2+t$	0,68
8	$2x(x+0{,}2)+0{,}4$	$2t+0{,}4$	1,36
9	$\ln(x+0{,}26)+1$	$0{,}415+t$	0,9345
10	$(x-0{,}2)(x+1)+0{,}2$	$6t$	0,84
11	$\sin(x+0{,}02)$	$3t+0{,}02$	0,581
12	$2\cos(x+0{,}55)$	$0{,}8179+3t$	1,705

Лабораторная работа № 16. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера II рода

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление об интегральных уравнениях, выработать умения применять квадратурные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, составлять и применять алгоритмы и программы для их решения, дать навыки в использовании программных средств для решения интегральных уравнений.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Пример 16.1.
Найти в пакете *Matlab* решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$x(t)=\int_1^2 \frac{x(s)ds}{\sqrt{t+s^2}}+\sqrt{t+1}-\sqrt{t+9}+t.$$

Решение:
1. Создайте файл Q16.m (листинг 16.1), содержащий описание функции, возвращающей значения функции $Q(t, s)$.

Листинг 16.1. Файл Q16.m
```
function z=Q16(t,s)
z=1./sqrt(t+s.^2);
```

2. Создайте файл F16.m (листинг 16.2), содержащий описание функции, возвращающей значения функции *f(t).*

Листинг 16.2. Файл F16.m
```
function z=F17(t)
z=sqrt(t+1)-sqrt(t+9)+t;
```

3. Создайте файл Solve_Q16.m (листинг 16.3), содержащей описание функции, возвращающей решение интегрального уравнения.

Листинг 16.3. Файл Solve_Q16.m
```
function [X,Y]=Solve_Q16(a1,b1,N,Lambda)
% задание временной сетки
h=(b1-a1)/(N-1);
i=1: N;
t(i)=a1+h*(i-1);
s=t;
%задание коэффициентов квадратурной формулы методом трапеций
A(1)=0.5;
m=2:N-1;
A(m)=1;
A(N)=0.5;
%вычисление значений функции Q(t,s) в узлах сетки
```

```
for i=1:N
    for j=1:N
        q(i,j)=Q16(t(i),s(j));
    end;
end;
%вычисление значений функции f(t)в узлах временной сетки
F=F17(t);
for i=1:N
    for j=1:N
        if i==j
            M(i,j)=1-Lambda*A(i)*q(i,j)*h;
        else
            M(i,j)=-Lambda*A(i)*q(i,j)*h;
        end;
     end;
end;
%нахождение решения интегрального уравнения
X=t;
y=m^-1*f';
```

4. Выполнить следующую последовательность команд:

```
» a1=1;
» b1=2;
» N=300;
» Lambda=1;
» [X,Y]=Solve_Q16 (a1, b1,N,Lambda);
» plot(X,Y)
```

Получим следующий график:

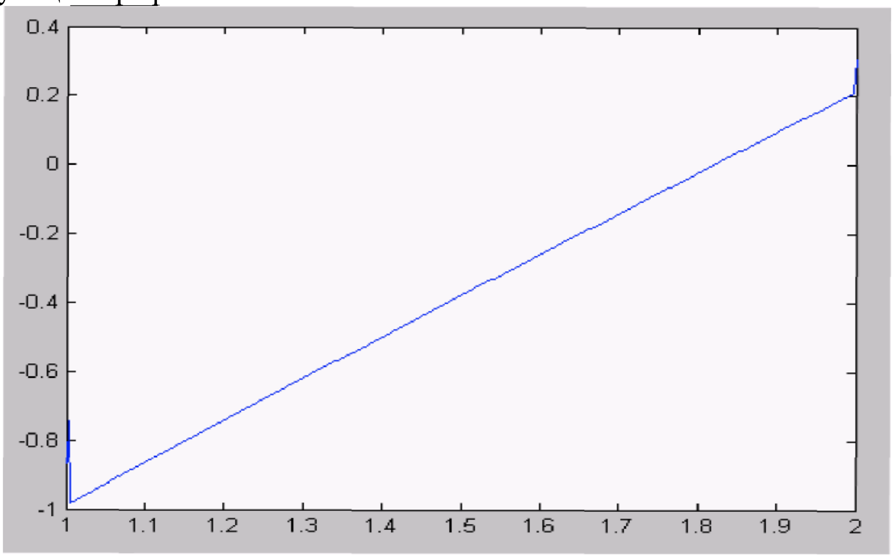

Рис. 16.1. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма

$$x(t)=\int_1^3 \frac{x(s)ds}{\sqrt{t+s^2}}+\sqrt{t+1}-\sqrt{t+9}+t$$

Пример 16.2.

Найти в пакете MATLAB решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$x(t)=\int_0^t t\sin^2(ts^3)x(s)ds+t^2-\frac{1}{4}tg(t^4).$$

Решение:

1. Создайте файл Q16_2.m (листинг 16.4), содержащий описание функции, возвращающей значения подынтегральной функции.

Листинг 16.4. Файл Q16_2.m

```
function z=Q16_2(t,s)
z=t*sin(t*s.^3).^2;
```

2. Создайте файл F16_2.m (листинг 16.5), содержащий описание функции, возвращающей значения функцииf(t).

Листинг 16.5. Файл F16_2.m

```
function z=F16_2(t)
z=t.^2-1/4*tan(t.^4);
```

3. Создайте файл Solve2_Q16.m (листинг 16.6), содержащей описание функции, возвращающей решение интегрального уравнения.

Листинг 16.6. Файл Solve2_Q16.m

```
function [T,Y]=Solve2_Q16(t1,t2,N)
% задание временной сетки
h=(t2-t1)/(N-1);
i =1:N;
t(i)=t1+h*(i-1);
s=t;
%задание коэффициентов квадратурной формулы методом трапеций
A(1)=0.5;
m=2:N-1;
A(m)=1;
A(N)=0.5;
%вычисление значений функции Q(t,s) в узлах сетки
for i=1:N
    for j=1:N
        q(i,j)=Q16_2(t(i),s(j));
    end;
end;
%вычисление значений функции f(t)в узлах временной сетки F=F16_2(t);
%вычисление решения интегрального уравнения x(1)=F(1)./(1-A(1)*q(1,1));
for m=2:N
S=0;
for j=1:m-1
S=S+h.*A(j).*q(m,j).*x(j);
end;
x(m)=F(m)+S./(1-h.*A(m).*q(m,m)); end; T=t; Y=x;
```

3.Выполнить следующую последовательность команд:

```
» t1=0;
» t2=5;
» N=300;
» [X Y]=Solve2_Q17(t1,t2,N);
» plot(X,Y)
```

Получим следующий график:

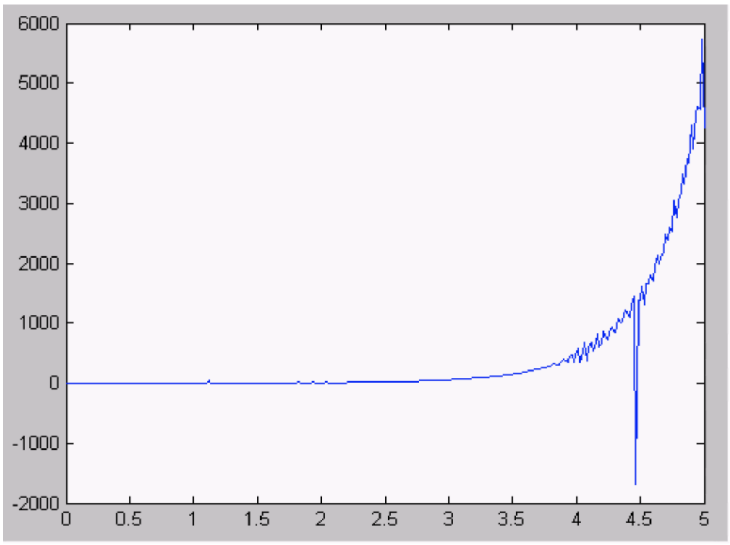

Рис. 16.2. Численное решение интегрального уравнения Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t t\sin^2(ts^3)x(s)ds + t^2 - \frac{1}{4}tg(t^4).$$

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что называется интегральным уравнением?
2. Назовите основные типы интегральных уравнений.
3. Уравнение какого вида называют интегральным уравнением второго рода Фредгольма?
4. Уравнение какого вида называют интегральным уравнением второго рода Вольтерра?
5. В чем состоит отличие интегрального уравнения Фредгольма от интегрального уравнения Вольтерры?
6. В чем состоит суть квадратурного метода решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода?
7. В чем состоит суть квадратурного метода решения интегральных уравнений Вольтерры второго рода?

ЗАДАНИЕ

1. Построить каркас приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма

$$x(t) = \int_0^2 K(t,s)x(s)ds + f(t)$$

на сетке точек отрезка $[a, b]$ с шагом h_h пользуясь какой-либо квадратурной формулой. На основе полученного каркаса записать приближенное решение в виде непрерывной функции (используя интерполяционные формулы) и с ее помощью вычислить приближенные значения X(C1) и *x(d1)*.

2.Применяя квадратурную формулу прямоугольников на отрезке $[a_2; b_2]$ с шагом h_2, найти каркас приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра

$$x(t) = \int_1^t Q(t,s)x(s)ds + F(t).$$

Представить полученное дискретное решение интерполяционным многочленом третьей степени, построенным по первым четырем узлам заданной сетки, и вычислить приближенно *x(c2)* и X(D2).

Исходные параметры для уравнений Фредгольма и Вольтерры:

№ варианта	Задание			
	$Q(t, s)$	$K(t, s)$	$f(t)$	$F(t)$
1	$2\ln\frac{1+s}{1+t^2}$	$t+\sqrt{s}$	t^2-t+1	$2t\sqrt{t}-t-1$
2	$t+\ln(1+s)$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$1-\frac{t^2}{t+1}$	$3t-2\sqrt{t}-1$
3	$2\ln\frac{1+s}{1+t^2}$	$t+\sqrt{s}$	$2t^2-t+1$	$t\sqrt{t}-t-1$
4	$\frac{t}{s^2-1}$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$t^2+\frac{t}{6}-\frac{7}{3}$	$t-2\sqrt{t}-1$
5	$2\ln\frac{1+2s}{1+t^2}$	$t+\sqrt{s}$	t^2-t+1	$2t\sqrt{t}-3t-1$
6	$t+2\ln(1+s)$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$1-\frac{t^2}{t+1}$	$3t-\sqrt{t}-1$
7	$2\ln\frac{1+2s}{1+t^2}$	$t+\sqrt{s}$	$2t^2-t+1$	$2t\sqrt{t}-t-2$
8	$\frac{2t}{s^2-1}$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$t^2+\frac{t}{6}-\frac{7}{3}$	$3t-2\sqrt{t}-2$
9	$\ln\frac{1+3s}{1+t^2}$	$t+\sqrt{s}$	t^2-t+1	$t\sqrt{t}-t-2$
10	$\frac{t}{3}+\ln(1+s)$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$1-\frac{t^2}{t+1}$	$t-\sqrt{t}-1$
11	$\ln\frac{1+3s}{1+t^2}$	$t+\sqrt{s}$	$2t^2-t+1$	$3t\sqrt{t}-t-3$
12	$\frac{3t}{s^2-1}$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$t^2+\frac{t}{6}-\frac{7}{3}$	$t-\sqrt{t}-3$

Исходные параметры для заданий.

№ варианта	Задание							
	$[a_1; b_1]$	h_1	c_1	d_1	$[a_2; b_2]$	h_2	c_2	d_2
1	[0; 2]	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[0; 1]	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
2	[1; 3]	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[1; 2]	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
3	[2; 4]	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[2; 3]	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
4	[0; 3]	0,6	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[0; 2]	0,4	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
5	[1; 4]	0,6	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[1; 3]	0,4	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
6	[2; 5]	0,6	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[2; 4]	0,4	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
7	[0; 2]	0,4	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[0; 2]	0,5	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
8	[1; 3]	0,4	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[1; 3]	0,5	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
9	[2; 4]	0,4	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[2; 4]	0,5	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
10	[0; 3]	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[0; 1]	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
11	[1; 4]	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[1; 2]	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
12	[2; 5]	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	[2; 3]	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. - М.: Высш. шк., 2005.
3. Поршнев С.В. Вычислительная математика. Курс лекций. - СПб.: БХВ-Петербург, 2004.