МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)
Кафедра моделирования и системного анализа (МиСА)

В.Г. Баранник, Е.В. Истигечева

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям

Томск 2014

Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Вычислительная математика / Методические рекомендации к практическим занятиям – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Кафедра моделирования и системного анализа, 2014. – 65 с.

Содержание

1. Погрешности результата численного решения задачи

1.1 Причины возникновения и классификация погрешностей

Отклонение истинного решения от приближенного называется погрешностью решения.

Решение конкретной задачи всегда имеют погрешность, обусловленную следующими причинами:

1) созданием математической модели (любая модель имеет свою степень точности);
2) получением исходных данных (т.к. являются "результатом измерений", следовательно, возникают измерительные погрешности);
3) использованием вычислительной техники (ошибки округления, возникающие из-за ограниченной разрядной сетки и ошибки, связанные с самими методами).

На рис. 1 показаны составляющие неустранимой погрешности.

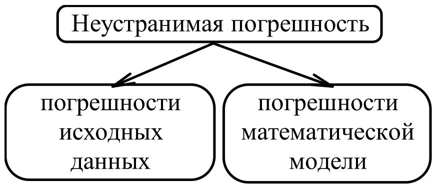


Рис. 1.

На рис. 2 показаны составляющие полной погрешности.

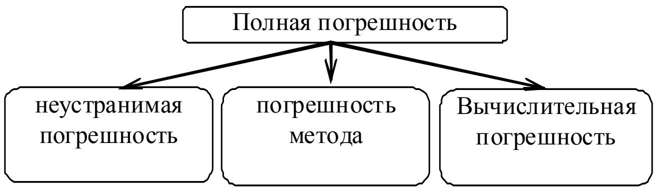


Рис. 2.

Неустранимую погрешность и погрешность метода необходимо контролировать, чтобы не осуществлять расчеты с избыточной точностью.

Характеристиками точности результата решения задачи являются абсолютная и относительная погрешности. Для технических задач 10 % - хорошая точность.

Определение. Если x - точное значение некоторого числа, x^* - приближенное, то абсолютной погрешностью приближения x^* назовем величину:

$$\Delta x^* \geq \left| x - x^* \right|.$$

Таким образом, точное значение числа x всегда заключено в границах:

$$x^* - \Delta x^* \leq x \leq x^* + \Delta x^*.$$

Определение. Отношение абсолютной погрешности к абсолютному значению приближенной величины есть относительная погрешность (т.е. доля истинного значения):

$$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|},$$

при условии, что

$$\left| x^* \right| \neq 0.$$

Пример: Найти абсолютную и относительную погрешности, если

$$x = 3.141592,$$
$$x^{*}=3.14.$$

Решение: $\Delta x^{*} \geq |3.141592 - 3.14| \Rightarrow \Delta x^{*} \geq 0.001592$; $\delta x^{*} = \dfrac{0.001592}{3.14} = 0.000507$.

Определение. Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример: У чисел подчеркнуты значащие цифры: 0.0<u>10087</u> и 0.0<u>100870000</u>.

Любое число можно представить в виде

$$x = a_1\beta^{n} + a_2\beta^{n-1} + \ldots + a_m\beta^{n-m+1},$$

где β – основание системы счисления;

n – некоторое целое число (старший десятичный разряд числа x);

a_i – значащие цифры приближенного числа x.

Определение. Значащая цифра a_k считается верной, если имеет место неравенство:

$$\Delta x^{*} \leq \omega\beta^{n-k+1},$$

где $0.5 \leq \omega \leq 1$,

в противном случае a_k – сомнительная цифра.

1.2 Прямая задача теории погрешностей

Основная задача теории погрешностей заключается в следующем: по известным погрешностям некоторой системы параметров требуется определить погрешность функции от этих параметров.

Пусть задана дифференцируемая функция $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ и пусть Δx_i^{*} - абсолютные погрешности аргументов. Тогда абсолютная погрешность функции:

$$\Delta y^{*} = \left|y - y^{*}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1^{*}, x_2^{*},\ldots,x_n^{*})}{\partial x_i}\right|\Delta x_i^{*}$$

- формула Лагранжа.

При зависимости функции от одного параметра формула Лагранжа имеет следующий вид:

$$\Delta y^{*} \leq \left|f'(x^{*})\right|\Delta x^{*}.$$

Определение. Предельной абсолютной погрешностью называют следующую оценку погрешности величины y^{*}:

$$\Delta y^{*} = \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in G}\left|y(x_1, x_2,\ldots,x_n) - y^{*}\right|.$$

Пусть задана дифференцируемая функция $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ и пусть δx_i^{*} - относительные погрешности аргументов. Тогда относительная погрешность:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln(y)\right|\Delta x_i$$

или

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ln(y)\right|\delta x_i.$$

Определение. Предельной относительной погрешностью называю величину:

$$\frac{\Delta y^{*}}{\left|y^{*}\right|}.$$

Относительная погрешность суммы

$\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{y^*} \delta x_i^*$.

Пусть $M = \max_i\left(\delta x_i^*\right)$, а $m = \min_i\left(\delta x_i^*\right)$.

Следовательно

$$m < \delta y^* \le \frac{\left(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*\right) \cdot M}{y^*}$$

Замечание: на практике применяется верхняя оценка.

Правила вычисления погрешностей [1]:

1. Предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме предельных погрешностей.
2. Относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из относительных погрешностей этих слагаемых.
3. Предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей.
4. Предельная относительная погрешность степени и корня приближенного числа равна произведению предельной относительной погрешности этого числа на показатель степени.

1.3 Обратная задача теории погрешностей

Обратная задача теории погрешности заключается в следующем: при каких значениях аргумента известная функция

$$y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)$$

будет иметь погрешность, не превосходящую заданной величины.

Простейшее решение обратной задачи дается принципом равных влияний. Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности.

Предельная погрешность функции $y=f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ для малых абсолютных погрешностей аргументов Δx_i:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| \Delta x_i\ .$$

Оценка для относительной погрешности функции:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln(y)\right| \Delta x_i$$

или

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(y)\right| \delta x_i\ .$$

Пример: Найти предельные абсолютную и относительную погрешности объема шара

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

если

$$d = 3{,}7\ \text{см} \pm 0{,}05\ \text{см};$$

$\pi \approx 3{,}14$.

Решение: Рассмотрим *d* и π как переменные величины. Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2, \ \frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3.$$

При заданных значениях *d* и π получаем, что

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}3{,}14 \cdot (3{,}7)^2 = 21{,}49,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}(3{,}7)^3 = 8{,}44.$$

Согласно правилу нахождения предельной абсолютной погрешности, имеем:

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right| \cdot |\Delta d| + \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| \cdot |\Delta \pi| = 21{,}49 \cdot 0{,}05 + 8{,}44 \cdot 0{,}0016 = 1{,}101508 \approx 1{,}1 \text{ см}^3.$$

Поэтому $V \approx 26{,}51 \pm 1{,}1$ см^3.

Относительная погрешность:

$$\delta V = \frac{1{,}1}{26{,}51} \approx 0{,}04 = 4\%.$$

1.4 Задачи и упражнения

Задание 1. В каждом варианте для заданного набора исходных данных a) - f) необходимо вычислить:

aa) число верных знаков приближенного числа, если известна абсолютная погрешность;
bb) число верных десятичных знаков приближенного числа, если известна абсолютная погрешность;
cc) абсолютную погрешность числа, если известно число верных знаков;
dd) абсолютную погрешность, если известна относительная;
ee) относительную погрешность, если известна абсолютная;
ff) абсолютную погрешность функции, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$A_x = 0.5 \cdot 10^{-3}, \ A_y = 0.5 \cdot 10^{-2}$$

1.4.1. Исходные данные:
- a) $x = 1{,}109$, $A_x = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$;
- b) $x = 0{,}01111$, $A_x = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;
- c) $x = 1{,}72911$, m=3;
- d) $x = 0{,}3771$, $\delta_x = 1\%$;
- e) $x = 32{,}11511$, $A_x = 0{,}11 \cdot 10^{-2}$;
- f) $z = \dfrac{x}{e^y}$.

1.4.2. Исходные данные:
- a) $x=1{,}209$, $A_x = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$;
- b) $x=0{,}02222$, $A_x = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;
- c) $x=1{,}7292$, m=3;
- d) $x=0{,}3772$, $\delta_x = 1\%$;
- e) $x=32{,}21512$, $A_x = 0{,}22 \cdot 10^{-2}$;
- f) $z = \dfrac{\sqrt{x+1}}{y}$.

1.4.3. Исходные данные:
- a) $x=1{,}309$, $A_x = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$;
- b) $x=0{,}03333$, $A_x = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;
- c) $x=1{,}7293$, m=3;
- d) $x=0{,}3773$, $\delta_x = 1\%$;
- e) $x=32{,}91513$, $A_x = 0{,}33 \cdot 10^{-2}$;
- f) $z = xe^y$.

1.4.4. Исходные данные:
- a) $x=1{,}409$, $A_x = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$;
- b) $x=0{,}07214$, $A_x = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;
- c) $x=1{,}42914$, m=3;
- d) $x=0{,}4774$, $\delta_x = 1\%$;
- e) $x=32{,}41514$, $A_x = 0{,}44 \cdot 10^{-2}$;

f) $z = \frac{1}{e^y + x}$.

1.4.5. Исходные данные:

a) $x=1,509$, $A_x=0,1\cdot10^{-2}$;
b) $x=0,07215$, $A_x=0,5\cdot10^{-3}$;
c) $x=1,52915$, $m=3$;
d) $x=0,37715$, $\delta_x=1\%$;
e) $x=32,51515$, $A_x=0,55\cdot10^{-2}$;
$z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

1.4.6. Исходные данные:

a) $x=1,609$, $A_x=0,1\cdot10^{-2}$;
b) $x=0,06666$, $A_x=0,5\cdot10^{-3}$;
c) $x=1,72916$, $m=3$;
d) $x=0,377766$, $\delta_x=0,5\%$;
e) $x=32,61516$, $A_x=0,11\cdot10^{-2}$;
f) $z = \frac{e^x}{y}$.

1.4.7. Исходные данные:

a) $x=1,709$, $A_x=0,1\cdot10^{-2}$;
b) $x=0,07777$; $A_x=0,5\cdot10^{-3}$;
c) $x=1,7297$, $m=3$;
d) $x=0,3777$, $\delta_x=0,5\%$;
e) $x=32,71517$, $A_x=0,77\cdot10^{-2}$;
f) $z = \frac{x}{\sqrt{y+1}}$.

1.4.8. Исходные данные:

a) $x=1,809$, $A_x=0,1\cdot10^{-2}$;
b) $x=0,08888$, $A_x=0,5\cdot10^{-3}$;
c) $x=1,7298$, $m=3$;
d) $x=0,3778$, $\delta_x=0,5\%$;
e) $x=32,91515$, $A_x=0,88\cdot10^{-2}$;
f) $z = ye^x$.

1.4.9. Исходные данные:

a) $x=1,909$, $A_x=0,1\cdot10^{-2}$;
b) $x=0,07219$, $A_x=0,5\cdot10^{-3}$;
c) $x=1,92919$, $m=3$;
d) $x=0,9779$, $\delta_x=0,5\%$;
e) $x=32,91519$, $A_x=0,99\cdot10^{-2}$;
f) $z = \frac{1}{e^x + y}$.

1.4.10. Исходные данные:

a) $x=1,9010$, $A_x=0,1\cdot10^{-2}$;
b) $x=0,07210$, $A_x=0,5\cdot10^{-3}$;
c) $x=1,72910$, $m=3$;
d) $x=0,97791$, $\delta_x=0,5\%$;
e) $x=32,915191$, $A_x=0,91\cdot10^{-2}$;
f) $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

2. Составить программу нахождения суммы ряда с точностью до $\varepsilon=0,0001$:

1.4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}$

1.4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$

1.4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

1.4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

2. Аппроксимация и интерполяция функций

2.1 Общие понятия и определения

Определение. Аппроксимация - это замена одной функции другой близкой к исходной и обладающей "хорошими" свойствами, позволяющими легко производить над ней те или иные аналитические или вычислительные операции.

Простейшая задача интерполирования: на отрезке [a,b] задана (n+1) точка, эти точки называются узлами интерполирования, и (n+1) значение функции в этих точках. Требуется построить функцию F(x), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполирования те же значения, что и f(x), т.е.

$$F(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}.$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую некоторого определенного типа, проходящую через систему заданных точек. Это задача становится однозначной, если вместо произвольной функции строить полином $P_n(x)$ степени n такой, что

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n},$$

тогда внутри промежутков $(x_i,\ x_{i+1})$ построенный полином будет приближенно описывать функцию f(x).

Полученную интерполяционную формулу обычно используют для нахождения приближенного значения функции f(x) в точках, отличных от узлов интерполирования.

2.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке [a,b] заданы (n+1) точка $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ и значения функции f в этих точках.

Будем строить интерполяционный многочлен вида:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\Phi_j(x),$$

где $\Phi_j(x),\ j = \overline{0,n}$ - многочлены степени n, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j; \\ 1, \text{ при } i = j, \end{cases}$$

так как требуем, чтобы значения интерполяционного многочлена и значения функции f(x) совпадали в узлах интерполяции i, т.е. $P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$.

Тогда $\Phi_j(x)$ можно искать в виде:

$$\Phi_j(x) = A_j(x - x_0)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)$$

где A_j - некоторая константа, которую найдем из условия $\Phi_j(x_j) = 1$, тогда

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}$$

Если обозначить $\omega_n = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ и продифференцировать это выражение по x, полагая $x=x_j$, то последнее выражение можно записать в виде:

$$\Phi_j(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)},$$

где $\omega_n'(x_j) = (x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_n)$

Таким образом, получим многочлен:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)},$$

который называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Пусть узлы интерполирования являются равноотстоящими, т.е. $x_i - x_{i-1} = h$, если ввести новую переменную $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, то многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов запишется в виде

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{j=0}^{n} f(x_0 + jh)\frac{(-1)^{n-j}t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-j)\,j!(n-j)!},$$

т.к. $\Phi_j(x) = \Phi_j(x_0 + th) = (-1)^{n-j}\dfrac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-j)\,j!(n-j)!}$, $j = \overline{0,n}$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет существенный недостаток: если при выбранном числе узлов выяснилось, что интерполяционный многочлен недостаточно точно находит значение функций в заданной точке, то при добавлении одного или нескольких узлов все вычисления необходимо проводить заново. В этом случае, когда требуется найти не аналитическое выражение, а лишь его значение в некоторой точке, от этого недостатка можно избавиться, воспользовавшись интерполяционной схемой Эйткена. По этой схеме значение интерполяционного многочлена Лагранжа находится путем последовательного применения единообразного процесса

x_0	y_0	x_0-x				
x_1	y_1	x_1-x	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	x_2-x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
…	…	…	…	…	…	…
x_n	y_n	x_n-x	$L_{n-1n}(x)$	$L_{n-2n-1n}(x)$	$L_{n-3\ldots n}(x)\ldots$	$L_{01\ldots n}(x)$

где $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, $L_{ii+1}(x) = \dfrac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}$,

$L_{ii+1i+2}(x) = \dfrac{1}{x_{i+2} - x_i}\begin{vmatrix} L_{ii+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}$, $L_{ii+1\ldots i+k}(x) = \dfrac{1}{x_{i+k} - x_i}\begin{vmatrix} L_{i\ldots i+k-1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1\ldots i+k}(x) & x_{i+k} - x \end{vmatrix}$.

Применяя эту схему, можно постепенно подключать все новые и новые узлы до тех пор, пока желаемая точность не будет достигнута.

Если все вычисления проведены точно, то интерполяционный многочлен Лагранжа совпадает с заданной функцией в узлах интерполирования. Однако он будет отличен от нее в остальных точках. Исключением является случай, когда сама функция f(x) является многочленом степени не выше n.

Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция f(x) имеет на [a,b] непрерывные производные (n+1)-го порядка, имеет вид $f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$, где ξ - некоторая точка [a,b] или $\left|f(x) - L_n(x)\right| = \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_n(x)\right|$, где $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

Это выражение может служить оценкой отклонения полинома Лагранжа от f(x) в том случае, когда можно оценить $f^{(n+1)}(x)$.

2.3 Интерполяционная формула Ньютона

Запишем интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ в другой форме:

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]$$

где разность $L_k(x) - L_{k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$, есть многочлен степени k, обращающийся в нуль в точках $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Поэтому можно записать

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = B(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

Константу B найдем, полагая $x=x_k$, т.е.

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = B(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow$$

$$B = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_k)} = f(x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

где $f(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ - есть разностное отношение k-го порядка .

Учитывая выражение для B интерполяционный многочлен можно представить в виде

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n) .$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа носит название интерполяционного многочлена Ньютона для неравных промежутков. Многочлен Ньютона имеет степень равную n и удовлетворяет условию

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n} .$$

Формула Ньютона имеет более сложное строение, чем формула Лагранжа, и требует составления разностных отношений $f(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, $k = \overline{1,n}$. Несмотря на это, она более удобна для вычислений, т.к. при добавлении нового узла все проделанные вычисления сохраняются, а в формуле добавляется еще одно слагаемое $(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Это позволяет не задавать заранее число узлов интерполирования, а постепенно увеличивать точность результата, добавляя последовательно по одному новому узлу.

Остаточный член формулы Ньютона совпадает с остаточным членом формулы Лагранжа, т.е.

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x)$$

где ξ - точка отрезка, содержащего узлы интерполирования и точку x. Из свойств разностных отношений следует

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f(x, x_0, \ldots, x_n) .$$

Тогда для остаточного члена имеем: $R_n(x) = f(x, x_0, \ldots, x_n) \omega_n(x)$.

2.4 Интерполяционные и экстраполяционные формулы при равноотстоящих значениях аргумента

Пусть все узлы интерполирования x_i принадлежат отрезку [a,b], причем $a=x_0$, $b=x_n$.

Если точка интерполирования x принадлежит отрезку [a,b], то формула, приближающая функцию f в точке x, называется интерполяционной, а если x не принадлежит отрезку [a,b], то формула называется экстраполяционной.

Узлы интерполирования, лежащие ближе к точке интерполирования, оказывают большее влияние на интерполяционный многочлен, чем узлы, лежащие дальше. Поэтому целесообразно за x_0 и x_1 брать ближайшие к x узлы интерполирования и проводить сначала линейную интерполяцию по этим узлам, а затем постепенно привлекать следующие узлы таким образом, чтобы они возможно симметричнее располагались относительно точки. Полученные при этом поправки будут незначительными.

Пусть узлы интерполирования определены на [a,b] равномерно и заданы значения интерполируемой в этих узлах функции.

2.4.1. Формула Ньютона для интерполирования вперед и экстраполирования назад

Пусть точка интерполирования x находится ближе к левому концу отрезка [a,b] или слева от него. Тогда интерполяционная формула Ньютона для интерполирования вперед и экстраполирования назад примет вид

$$P(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $t=\dfrac{x-x_0}{h}$ - новая переменная, $\Delta^k y_i=\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i, k=1,2,\ldots,$ $\Delta^0 y_i=y_i$ - конечная разность k - го порядка.

Связь разностных соотношений и конечных разностей:

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_0,x_0+h)=\frac{\Delta y_0}{1!h},\ f(x_0,x_0+h,x_0+2h)=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\ \text{и т.д.}$$

Остаток в этом случае имеет вид

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

2.4.2. Формула Ньютона для интерполирования назад и экстраполирования вперед

Пусть точка интерполирования x находится ближе к правому концу отрезка [a,b] или справа от него. За первый узел интерполирования примем ближайший и обозначим его через x_k. Тогда интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад и экстраполирования вперед примет вид

$$P(x)=y_n+\frac{t}{1!}\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+\frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $t=\dfrac{x-x_n}{h}$ - новая переменная.

Связь разностных соотношений и конечных разностей:

$$f(x_n)=y_n,\ f(x_n,x_n-h)=\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h},\ f(x_n,x_n-h,x_n-2h)=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}\ \text{и т.д.}$$

Остаток в этом случае имеет вид

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Правило определения максимального порядка разностей, которые ведут себя правильно:

если $\max\limits_i\left|\Delta^j y_i\right|\ge 2^j\varepsilon$, а $\max\limits_i\left|\Delta^{j+1} y_i\right|< 2^{j+1}\varepsilon$, то максимальный порядок разностей, которые ведут себя правильно, равен j. Использование разности порядка (j+1) приведет к искажению результата. Здесь ε - абсолютная погрешность вычисленных значений y_i.

2.5 Интерполяционные формулы Гаусса

Пусть узлы интерполирования x_0, x_1, ..., x_n равноотстоящие и точка интерполирования x находится в середине отрезка [a,b] "вблизи" узла x_k, причем $x>x_k$. Для построения интерполяционной формулы необходимо привлекать узлы интерполирования в следующем порядке: x_k, x_k+h, x_k-h, ..., x_k+ih, x_k-ih. Обозначив $t=\dfrac{x-x_k}{h}$ и вводя конечные разности по формулам:

$$f(x_k)=y_k,\ f(x_k,x_k+h)=\frac{\Delta y_k}{1!h},\ f(x_k-h,x_k,x_k+h)=\frac{\Delta^2 y_{k-1}}{2!h^2}\ \text{и т.д.},$$

то для интерполирования вперед формула Гаусса примет вид

$$P(x_k+th)=y_k+\frac{t}{1!}\Delta y_k+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{k-1}+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}\Delta^3 y_{k-1}+\ldots+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)}{(2i-1)!}\Delta^{2i-1}y_{k-i+1}+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)(t-i)}{(2i)!}\Delta^{2i}y_{k-i}$$

Если точка интерполирования $x<x_k$, то узлы для построения следует привлекать в следующем порядке: x_k, x_k-h, x_k+h, ..., x_k-ih, x_k+ih.

Формула Гаусса для интерполирования назад имеет вид

$$P(x_k+th)=y_k+\frac{t}{1!}\Delta y_{k-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{k-1}+\frac{t(t^2-1^2)}{3!}\Delta^3 y_{k-2}+\ldots+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)}{(2i-1)!}\Delta^{2i-1}y_{k-i}+$$
$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)(t+i)}{(2i)!}\Delta^{2i}y_{k-i}$$

2.6 Задачи

1. Найти приближенное значение функции f(x) по таблице значений этой функции:
   а) используя интерполяционную формулу Лагранжа;
   б) используя схему Эйткена.

Вариант	Исходные данные		Вариант	Исходные данные	
1	x_0=0,35	y_0=1,419	6	x_0=0,38	y_0=1,462
	x_1=0,48	y_1=1,616		x_1=0,49	y_1=1,632
	x_2=0,97	y_2=2,637		x_2=0,99	y_2=2,691
	x_3=1,08	y_3=2,944		x_3=1,09	y_3=2,974
	x_4=1,18	y_4=3,254		x_4=1,19	y_4=3,287
	x_5=1,40	y_5=4,055		x_5=1,40	y_5=4,055
	x_6=1,71	y_6=5,528		x_6=1,71	y_6=5,528
	x_7=1,74	y_7=5,697		x_7=1,72	y_7=5,584
	x_8=2,09	y_8=8,084		x_8=2,04	y_8=7,690
	x_9=2,46	y_9=11,704		x_9=2,38	y_9=10,804
	x_{10}=2,69	y_{10}=14,731		x_{10}=2,53	y_{10}=12,553
	x=0,58			x=2,95	
Вариант	Исходные данные		Вариант	Исходные данные	
2	x_0=0,32	y_0=1,377	7	x_0=0,14	y_0=1,419
	x_1=0,73	y_1=2,075		x_1=0,28	y_1=1,419
	x_2=0,97	y_2=2,637		x_2=0,57	y_2=1,419
	x_3=1,13	y_3=3,095		x_3=1,00	y_3=1,419

	x_4=1,52	y_4=4,572		x_4=1,22	y_4=1,419
	x_5=1,57	y_5=4,806		x_5=1,36	y_5=1,419
	x_6=2,02	y_6=7,538		x_6=1,73	y_6=1,419
	x_7=2,52	y_7=12,428		x_7=1,74	y_7=1,419
	x_8=2,96	y_8=19,297		x_8=2,11	y_8=1,419
	x_9=3,40	y_9=29,964		x_9=2,49	y_9=1,419
	x_{10}=3,79	y_{10}=44,256		x_{10}=2,74	y_{10}=1,419
	x=1,96			x=0,80	
3	x_0=0,32	y_0=1,377	8	x_0=0,38	y_0=1,462
	x_1=0,48	y_1=1,616		x_1=0,40	y_1=1,491
	x_2=0,97	y_2=2,637		x_2=0,81	y_2=2,247
	x_3=1,11	y_3=3,034		x_3=1,25	y_3=3,490
	x_4=1,25	y_4=3,490		x_4=1,59	y_4=4,903
	x_5=1,53	y_5=4,618		x_5=1,86	y_5=6,423
	x_6=1,94	y_6=6,958		x_6=1,98	y_6=7,242
	x_7=2,14	y_7=8,499		x_7=2,36	y_7=10,590
	x_8=2,25	y_8=9,487		x_8=2,37	y_8=10,697
	x_9=2,56	y_9=12,935		x_9=2,76	y_9=15,799
	x_{10}=2,97	y_{10}=19,491		x_{10}=3,16	y_{10}=23,570
	x=1,34			x=1,72	
4	x_0=0,09	y_0=1,094	9	x_0=0,18	y_0=1,197
	x_1=0,41	y_1=1,506		x_1=0,65	y_1=1,915
	x_2=0,83	y_2=2,293		x_2=0,80	y_2=2,225
	x_3=1,06	y_3=2,886		x_3=0,92	y_3=2,509
	x_4=1,22	y_4=3,387		x_4=1,20	y_4=3,320
	x_5=1,61	y_5=5,002		x_5=1,59	y_5=4,903
	x_6=1,65	y_6=5,206		x_6=1,77	y_6=5,870
	x_7=2,08	y_7=8,004		x_7=1,83	y_7=6,233
	x_8=2,56	y_8=12,935		x_8=2,07	y_8=7,924
	x_9=2,96	y_9=19,297		x_9=2,38	y_9=10,804
	x_{10}=3,35	y_{10}=28,502		x_{10}=2,43	y_{10}=11,358
	x=1,75			x=2,14	
5	x_0=0,17	y_0=1,185	10	x_0=0,40	y_0=1,491
	x_1=0,64	y_1=1,896		x_1=0,66	y_1=1,934
	x_2=0,78	y_2=2,181		x_2=0,83	y_2=2,293
	x_3=0,89	y_3=2,435		x_3=1,27	y_3=3,560
	x_4=1,14	y_4=3,126		x_4=1,37	y_4=3,935
	x_5=1,50	y_5=4,481		x_5=1,40	y_5=4,055
	x_6=1,62	y_6=5,053		x_6=1,54	y_6=4,664
	x_7=2,10	y_7=8,166		x_7=1,71	y_7=5,528
	x_8=2,19	y_8=8,935		x_8=2,02	y_8=7,538
	x_9=2,25	y_9=9,487		x_9=2,50	y_9=12,182
	x_{10}=2,41	y_{10}=11,133		x_{10}=2,79	y_{10}=16,281
	x=1,35			x=1,61	

2. Подобрать интерполяционную формулу и с помощью этой формулы найти приближенное значение интерполируемой функции в точке $x \in [1,2]$. При построении интерполяционной формулы использовать только правильные разности, считая $\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-3}$ и $h=0{,}1$. Обосновать выбор интерполяционной формулы.

Вариант	Исходные данные	Вариант	Исходные данные

1	y_0=0,322 y_1=0,284 y_2=0,241 y_3=0,193 y_4=0,135 y_5=0,063 y_6=-0,031 y_7=-0,164 y_8=-0,369 y_9=-0,741 y_{10}=-1,664	y_0=6,850 y_1=5,539 y_2=4,601 y_3=3,902 y_4=3,363 y_5=2,937 y_6=2,594 y_7=2,313 y_8=2,079 y_9=1,882 y_{10}=1,715	6	y_0=-0,417 y_1=-0,751 y_2=-0,966 y_3=-0,972 y_4=-0,713 y_5=-0,211 y_6=0,396 y_7=0,876 y_8=0,980 y_9=0,592 y_{10}=-0,146	y_0=24,901 y_1=26,244 y_2=27,541 y_3=28,790 y_4=29,992 y_5=31,144 y_6=32,251 y_7=33,313 y_8=34,334 y_9=35,320 y_{10}=36,275
	x=0,98	x=1,32		x=2,01	x=1,45
2	y_0=0,070 y_1=-0,134 y_2=-0,343 y_3=-0,544 y_4=-0,724 y_5=-0,870 y_6=-0,966 y_7=-1,000 y_8=-0,962 y_9=-0,846 y_{10}=-0,654	y_0=0,614 y_1=0,614 y_2=0,640 y_3=0,685 y_4=0,741 y_5=0,801 y_6=0,856 y_7=0,902 y_8=0,936 y_9=0,956 y_{10}=0,970	7	y_0=-2,186 y_1=-1,710 y_2=-1,374 y_3=-1,120 y_4=-0,917 y_5=-0,748 y_6=-0,602 y_7=-0,473 y_8=-0,356 y_9=-0,247 y_{10}=-0,143	y_0=0,794 y_1=0,773 y_2=0,723 y_3=0,662 y_4=0,600 y_5=0,543 y_6=0,494 y_7=0,450 y_8=0,412 y_9=0,380 y_{10}=0,351
	x=0,96	x=1,71		x=2,03	x=1,05
3	y_0=5,430 y_1=5,816 y_2=6,211 y_3=6,620 y_4=7,051 y_5=7,509 y_6=8,001 y_7=8,535 y_8=9,119 y_9=9,762 y_{10}=10,475	y_0=21,779 y_1=25,505 y_2=29,577 y_3=34,017 y_4=38,852 y_5=44,109 y_6=49,822 y_7=56,027 y_8=62,768 y_9=70,091 y_{10}=78,052	8	y_0=108,240 y_1=104,312 y_2=99,184 y_3=93,097 y_4=86,314 y_5=79,108 y_6=71,733 y_7=64,418 y_8=57,353 y_9=50,683 y_{10}=44,510	y_0=4,860 y_1=4,462 y_2=3,906 y_3=3,169 y_4=2,222 y_5=1,027 y_6=-0,475 y_7=-2,363 y_8=-4,755 y_9=-7,829 y_{10}=-11,870
	x=1,46	x=1,67		x=1,95	x=1,44
4	y_0=1,257 y_1=1,524 y_2=1,728 y_3=1,849 y_4=1,867 y_5=1,768 y_6=1,547 y_7=1,215 y_8=0,798 y_9=0,339 y_{10}=-0,104	y_0=3,981 y_1=3,837 y_2=3,648 y_3=3,424 y_4=3,175 y_5=2,910 y_6=2,638 y_7=2,369 y_8=2,109 y_9=1,864 y_{10}=1,637	9	y_0=6,492 y_1=6,879 y_2=7,340 y_3=7,889 y_4=8,547 y_5=9,339 y_6=10,300 y_7=11,479 y_8=12,939 y_9=14,777 y_{10}=17,127	y_0=6,462 y_1=7,567 y_2=8,808 y_3=10,256 y_4=11,966 y_5=14,009 y_6=16,481 y_7=19,514 y_8=23,291 y_9=28,076 y_{10}=34,255
	x=1,02	x=1,63		x=1,92	x=1,55
Вариант	Исходные данные		Вариант	Исходные данные	
5	y_0=1,449 y_1=1,161	y_0=1,000 y_1=1,215	10	y_0=0,909 y_1=0,660	y_0=2,718 y_1=3,004

	y_2=0,805 y_3=0,396 y_4=-0,045 y_5=-0,488 y_6=-0,894 y_7=-1,225 y_8=-1,438 y_9=-1,505 y_{10}=-1,411	y_2=1,465 y_3=1,754 y_4=2,088 y_5=2,473 y_6=2,915 y_7=3,423 y_8=4,005 y_9=4,673 y_{10}=5,436		y_2=0,258 y_3=-0,237 y_4=-0,703 y_5=-0,978 y_6=-0,919 y_7=-0,483 y_8=0,195 y_9=0,805 y_{10}=0,989	y_2=3,320 y_3=3,669 y_4=4,055 y_5=4,481 y_6=4,953 y_7=5,473 y_8=6,049 y_9=6,685 y_{10}=7,389
	x=1,15	x=1,51		x=1,13	x=1,42

3. Построение кривой по точкам

3.1 Общие понятия

В инженерной практике часто используют совокупности точек, абсциссы которых различны, полученные в результате экспериментов. Назначение численных методов заключается в определении зависимости, которая связывает данный набор точек. Другими словами в этом случае численные методы определяют класс допустимых формул, коэффициенты которых должны быть определены. Существует множество различных типов функций, которыми можно воспользоваться. Рассмотрим класс линейных функций вида: $y = f(x) = A \cdot x + B$. Все рассмотренные до этого методы позволяли получить полиномы, достаточно хорошо аппроксимирующие или интерполирующие данные при условии, что эти данные достаточно точны, т.е. точки получены, по крайней мере, с пятью знаками точности. Однако, часто в измерениях экспериментальная ошибка достаточно велика, т.е. истинное значение удовлетворяет равенству: $f(x_k) = y_k + e_k$, где e_k - ошибка измерения.

Для того, чтобы определить насколько далеко от данных лежит кривая $y = f(x)$ можно воспользоваться следующими нормами:

$$E_1(f) = \max_{1 \le k \le N} \left| f(x_k) - y_k \right| \text{ - максимальная ошибка,} \tag{3.1}$$

$$E_2(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k) - y_k \right| \text{ - средняя ошибка,} \tag{3.2}$$

$$E_3(f) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k) - y_k \right|^2 \right)^{1/2} \text{ - среднеквадратичная ошибка.} \tag{3.3}$$

Пример: Сравним ошибки для линейного приближения функции $y = 8{,}6 - 1{,}6x$ по заданной таблице точек

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	10	9	7	5	4	3	0	-1

Решение:

Вычислим все три вида ошибок:

$$E_1(f) = \max_{1 \le k \le N} \left| f(x_k) - y_k \right| = \max_{1 \le k \le 8} \{0{,}2; 0{,}4; 0{,}0; 0{,}4; 0{,}2; 0{,}8; 0{,}6; 0{,}0\} = 0{,}8.$$

$$E_2(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k) - y_k \right| = \frac{1}{8} 2{,}6 = 0{,}325.$$

$$E_3(f) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| f(x_k) - y_k \right|^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1{,}4}{8} \right)^{1/2} = 0{,}418.$$

Таким образом, построенная наилучшим образом линия определяется минимизацией одной из величин, заданных выражениями (3.1) – (3.2). В связи с тем, что третью норму легче минимизировать выбирают её.

3.2 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется для решения следующих задач:

1.Необходимо определить величины x_1, x_2,…, x_N, которые нельзя определить непосредственно, но известно, что они линейно зависимы, а коэффициенты этой зависимости можно получить в результате измерений. Таким образом, мы имеем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы может быть получено решением задачи минимизации. Выполняя дифференцирование минимизируемой функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{M} \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iN}x_N - b_i\right),$$

приходим к линейной системе, которая будет иметь N уравнений и N неизвестных.

2. Требуется дать приближенное аналитическое описание по таблично заданным данным. Из каких-либо соображений подбирается аппроксимирующая функция, а параметры этой функции подбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисляемых значений аппроксимирующей функции от заданных была минимальной.

3.3 Метод линеаризации данных по методу наименьших квадратов

Техника линеаризации данных применяется для подгонки кривых, позволяющих при преобразовании переменных получить линейную зависимость вида $\mathbf{y = Ax + B}$. В таблице 1 приведены основные приемы линеаризации.

Таблица 1.

Таблица замены переменной для метода линеаризации данных

№ п/п	Функция	Линеаризованная форма	Замена переменных и констант
1.	$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = y$
2.	$y = \frac{A}{x + B}$	$y = \frac{-1}{B}(xy) + \frac{A}{B}$	$X = xy, Y = y$
3.	$y = \frac{x}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y}$
4.	$y = A\ln(x) + B$	$y = A\ln(x) + B$	$X = \ln(x), Y = y$
5.	$y = Ce^{Ax}$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln(y), B = \ln(C)$
6.	$y = Cx^A$	$\ln(y) = A\ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x), Y = \ln(y), B = \ln(C)$

Пусть заданы N точек с различными абсциссами $\{x_k\}$. Величина среднеквадратичной ошибки будет минимальной, когда каждая частная производная $\left(E_3(f)\right)^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k) - y_k\right|^2\right)$ по неизвестным (в данном случае неизвестные A и B) будет обращаться в нуль, т.е. A и B являются решением нормальной системы уравнений вида:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)A + \qquad NB = \left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right) \\ \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)A + \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)B = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k y_k\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

Решая систему нормальных уравнений (3.4) находим искомые коэффициенты A и B.

Пример: Аппроксимировать таблично заданную функцию по пяти заданным точкам полиномом первой степени или построить линейную зависимость с помощью метода наименьших квадратов.

k	0	1	2	3	4
x_k	0	1	2	3	4
y_k	0	1	2	2	3.5

Решение:

1. Запишем нормальную систему для $\mathbf{y = Ax + B}$ - полинома первой степени:

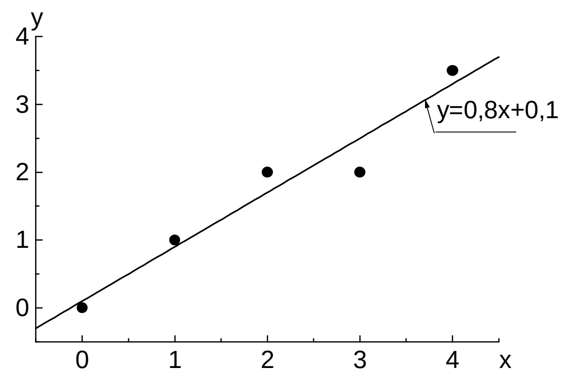
$$
\begin{cases}
\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) A + \qquad NB = \left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right) \\
\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right) A + \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) B = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k y_k\right)
\end{cases},
$$

где N = 5 – количество точек.

2. Вычислим все необходимые суммы:N=5, $\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) = 10$, $\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right) = 30$, $\left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right) = 8{,}5$, $\left(\sum_{k=1}^{N} x_k y_k\right) = 25$. Таким образом, подставляя числовые значения сумм в нормальную систему и решая ее, относительно неизвестных получаем, что A=0,8 и B=0,1

3. Таким образом, $y = 0{,}8x + 0{,}1$

4. Проверяем полученный полином. Для наглядности построим исходные данные и полученную зависимость на графике:



Замечания. Если данные не проявляют полиномиальной природы, то результат построения полинома методом наименьших квадратов будет сильно осциллировать, т.е. появится полиномиальное раскачивание. Оно наблюдается у полиномов высокой степени, поэтому полиномы выше пятой степени редко используются.

3.4 Интерполирование сплайнами

3.4.1. Кусочно-линейное и кусочно-квадратичное интерполирование

Иногда, интерполирование по всей совокупности точек бывает не достаточным. В этих случаях можно воспользоваться объединением фрагментов графиков полиномов низкой степени и интерполированием между последовательными узлами. Самый простой в использовании полином первой степени. Он создает ломаную, состоящую из отрезков, которые проходят через две точки. Чтобы представить эту кусочно-линейную кривую, используется полином Лагранжа:

$$S_k(x) = y_k \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} + y_{k+1} \frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)}$$

или используя формулу угла наклона отрезка линии в точке:

$$S_k(x) = y_k + \frac{(y_{k+1} - y_k)}{(x_{k+1} - x_k)}(x - x_k),$$

где $S_k(x)$ - линейный сплайн на отрезке [x_{k+1}, x_k], y_k – заданное значение функции, полученное экспериментально в заданных узлах. Аналогично можно построить кусочно-квадратичный полином.

Недостатком этого подхода является резкое изменение кривизны в общих узлах.

Пример: Для функции y=f(x), заданной таблично осуществить кусочно-линейное интерполирование и кусочно-квадратичное интерполирование.

x	0	0,5	1	2	3	4	5
f(x)	1,5	0	0	2	2	1	2

Решение: Осуществим кусочно-линейное интерполирование. Для этого разобьем данную функцию на элементарные промежутки, определяемые соседними числами верхней строки таблицы, и на каждом из участков строим прямую линию (полином первой степени), т.е.

$$S_1(x)=\begin{cases}-3x+1.5, & \text{при } 0\le x\le 0.5\\ 0, & \text{при } 0.5\le x\le 1\\ 2x-2, & \text{при } 1\le x\le 2\\ 2, & \text{при } 2\le x\le 3\\ -x+5, & \text{при } 3\le x\le 4\\ x-3, & \text{при } 4\le x\le 5\end{cases}$$

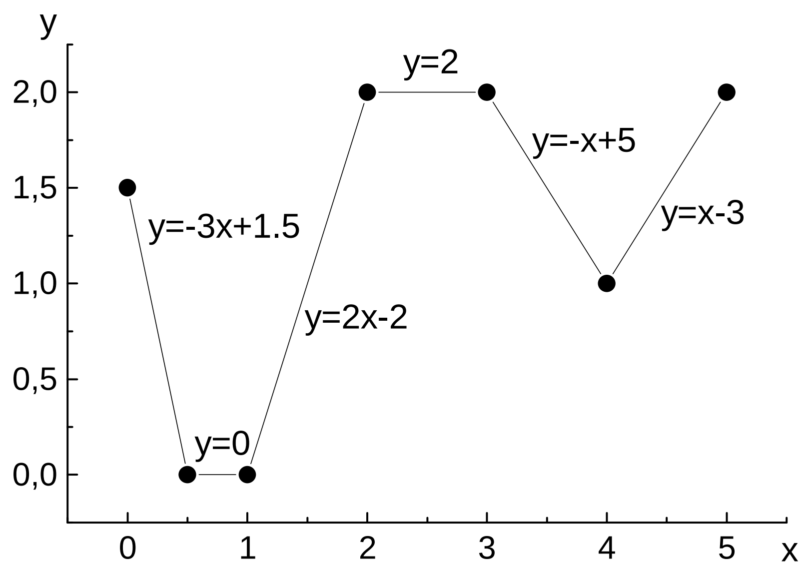


Рис. 3.1. График полученного кусочно-линейного интерполирования.

Осуществим кусочно-квадратичное интерполирование. Для этого будем рассматривать тройки известных точек отрезков [0;1],[1;3],[3;5]. На каждом из этих отрезках по известным точкам построим полином второй степени. В результате получим:

$$S_2(x)=\begin{cases}3x^2-4.5x+1.5, & 0\le x\le 1\\ -x^2+5x-4, & 1\le x\le 3\\ x^2-8x+17, & 3\le x\le 5\end{cases}$$

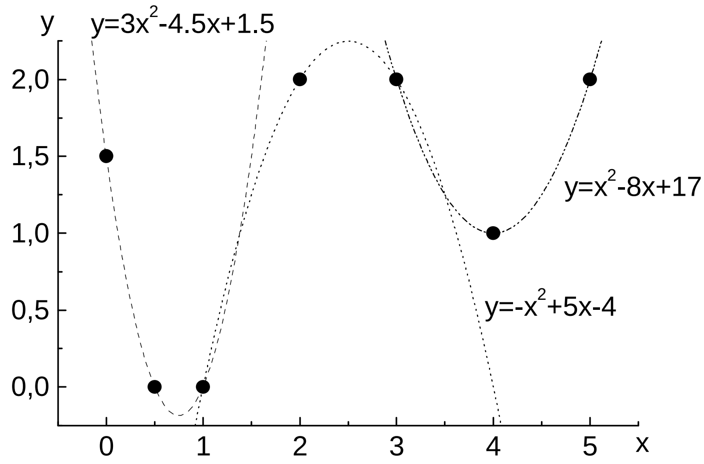


Рис.3.2. График полученного кусочно-квадратичного интерполирования.

3.4.2. Простейший подход к сглаживанию

Суть процедуры сглаживания состоит в подмене данной функции на каждом из рассматриваемых отрезков наилучшим линейным среднеквадратичным приближением.

На первом этапе. Для таблично заданной функции найти такую функцию S(x), составленную из линейных функций $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$, чтобы $f(x) \approx S_i(x)$ для всех x в смысле минимума квадрата отклонений, т.е. $\sum_{k=i-1}^{i+1}\left(f(x_k) - S_i(x_k)\right)^2 = \min$. В результате решается задача нахождения коэффициентов a_i, b_i методом наименьших квадратов:

$$a_i = \frac{1}{3}\left(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}\right),\ b_i = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right)$$

Второй этап состоит в пересчете данной таблицы $S_i(x_i) = \frac{1}{3}\left(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}\right)$, для $i = \overline{1, N-1}$. Доопределим новую табличную функцию значениями $S_0(x_0) = f_0$ и $S_N(x_N) = f_N$. В результате этого получаем новую табличную функцию, в которой сохраняется характер поведения исходной функции. Описанная процедура называется осреднением по трем точкам и является простым частным случаем линейного фильтра.

3.4.3.Кусочно-кубические сплайны

Определение: Функция S(x) называется кубическим сплайном, если существует N кубических полиномов $S_k(x)$ с коэффициентами $s_{k,0}$, $s_{k,1}$, $s_{k,2}$, $s_{k,3}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3$, для $x \in [x_k, x_{k+1}]$ и $k = \overline{0, N-1}$, т.е. кубический сплайн состоит из кубических полиномов.

2. Кусочно-кубическое интерполирование задается совокупностью точек, т.е. $S(x_k) = y_k$ для $k = \overline{0, N}$.

3. Кусочно-кубическое представление состояло из кривых, которые являются гладкими непрерывными функциями. Вторая и первая производные должны быть непрерывны: $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$, $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$, $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$.

Наиболее часто на практике используется кубический сплайн следующего вида:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Для задания сплайна коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i - подбираются так, чтобы $S_3(x_i) = y_i$, а первая и вторая производные были непрерывными.

Леммы о сплайнах:

1. **Смыкающий (чертежный) сплайн.** Существует единственный кубический сплайн, который имеет первую производную с граничными условиями $S'(a) = D_0$, $S'(b) = D_N$, т.е. смыкающий сплайн имеет определенный наклон в крайних точках.
2. **Естественный сплайн.** Существует единственный кубический сплайн со свободными граничными условиями $S''(a) = 0$, $S''(b) = 0$, т.е. сплайн допускает свободный наклон на краях для обеспечения положения, которое минимизирует осцилляцию кривой.
3. **Экстраполяционный сплайн.** Существует единственный кубический сплайн, который используется для экстраполирования по внутренним узлам, чтобы определить $S''(a)$ по узлам x_1, x_2 и $S''(b)$ по узлам x_{N-1}, x_{N-2}.
4. **Сплайн, заканчивающийся параболой.** Существует единственный кубический сплайн такой, что $S''(x) \equiv 0$ на интервале $[x_0, x_1]$ и $S''(x) \equiv 0$ на интервале $[x_{N-1}, x_N]$.
5. **Сплайн с заданной кривизной в крайних точках.** Существует единственный кубический сплайн с заданными значениями второй производной в крайних точках.

3.5 Задачи

1. По таблице исходных данных рассчитать параметры следующих функций:

а) линейной;
б) степенной;
в) показательной;
г) равносторонней гиперболы

Вариант	Исходные данные		Вариант	Исходные данные	
1	x	У	6	x	У
	61,10	49,10		60,80	49,40
	60,80	48,60		60,00	49,80
	60,18	50,10		58,60	53,40
	59,20	52,20		57,30	55,20
	58,10	53,60		56,10	56,20
	55,20	58,10		50,40	59,9
	49,10	69,10		46,80	67,4
2	x	y	7	x	y
	61,8	49,0		60,8	50,8
	60,0	49,3		59,1	53,3
	58,7	52,8		57,9	54,3
	56,1	55,2		55,7	57,6
	54,2	57,5		54,3	60,7
	50,6	63,1		52,6	64,1
	47,1	68,2		49,1	67,7
3	x	y	8	x	y

	60,1 59,2 58,6 55,4 53,1 52,0 49,9	49,0 52,1 53,2 56,6 59,5 66,6 67,8		63,1 61,9 59,6 57,2 57,1 50,9 47,1	49,8 49,3 53,3 56,1 57,3 64,1 66,6
4	x	y	9	x	y
	60,3 59,1 58,7 58,1 54,5 50,3 47,1	49,9 54,8 56,9 57,1 62,3 66,1 67,3		61,7 60,4 58,1 57,2 53,4 49,4 45,9	49,8 51,1 53,2 57,3 61,5 66,4 68,8
5	x	y	10	x	y
	59,2 59,0 54,2 55,6 53,1 57,8 60,9	49,7 50,5 51,9 54,4 57,3 64,8 49,0		58,1 57,5 56,4 55,1 53,4 50,2 46,1	49,1 51,2 53,0 54,6 57,6 60,1 61,8

4. Приближенное вычисление определенных интегралов

Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла при помощи нескольких значений интегрируемой функции. Будем строить вычислительные правила следующего вида:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j). \tag{1}$$

Формула (1) называется формулой механических квадратур, $\sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$ - квадратурной суммой, A_j - квадратурными коэффициентами, x_j - узлами или абсциссами квадратурного правила.

Остаточным членом квадратурного правила называется величина

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j). \tag{2}$$

Возможны различные подходы к построению квадратурных формул.

4.1 Интерполяционные квадратурные формулы

Пусть заданы значения подынтегральной функции f(x) в точках x_0, x_1, …, x_n принадлежащих [a,b], тогда для f(x) строят интерполяционный многочлен Лагранжа n-ой степени, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), \ \textbf{\textit{где}} \ A_j = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)}dx. \tag{3}$$

Формула (3) называется интерполяционной квадратурной формулой. Её остаточный член имеет вид

$$R_n = \int_a^b r(x)dx = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\omega_n'(x_j)}dx, \tag{4}$$

где η - некоторая точка [a,b].

Если узлы квадратурного правила равноотстоящие, то квадратурные коэффициенты принимают вид

$$A_j = \frac{h(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}\int_a^b \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-j)}dt, \tag{5}$$

где $t = \dfrac{x-x_0}{h}$, $x_i - x_{i-1} = h$, $i = \overline{0, n-1}$.

4.2 Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

Запишем квадратурное правило для равноотстоящих узлов в виде

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\sum_{j=0}^{n} C_j^n f(x_j), \tag{6}$$

где $C_j^n = \dfrac{A_j}{(b-a)} = \dfrac{(-1)^{n-j}}{n\, j!(n-j)!}\int_0^n \dfrac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}dt$.

При заданных значениях n коэффициенты принимаю следующие значения:

n=0, $C_0^0 = 1$;

n=1, $C_0^1 = C_1^1 = \dfrac{1}{2}$;

n=2, $C_0^2 = C_2^2 = \frac{1}{6}$, $C_1^2 = \frac{4}{6}$;

n=3, $C_0^3 = C_3^3 = \frac{1}{8}$, $C_1^3 = C_2^3 = \frac{3}{8}$ и т.д.

Замечание: *предпочтительно использовать формулы Ньютона-Котеса с малыми значениями n, а для уменьшения погрешности результата отрезок разбивается на достаточно большое число интервалов, и к каждому из них применяют квадратурную формулу с малым числом узлов, затем результаты складывают.*

4.2.1. Формула прямоугольников

Пусть функция f(x) на [a,b] заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа нулевого порядка, построенным по значению в средней точке отрезка[a,b], т.е. $x = \frac{a+b}{2}$ и $L_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_0 \text{ и } R_0 = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \text{ где } \xi \in [a,b]. \tag{7}$$

Разделим [a,b] на m равных частей длины $h = \frac{b-a}{m}$. К каждому частичному отрезку [a+ih,a+(i+1)h] применим формулу прямоугольников, сложив результаты, получим обобщенную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m}\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + \ldots + f\left(a+\frac{(2m-1)h}{2}\right)\right] + \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi). \tag{8}$$

4.2.2. Формула трапеций

Пусть функция f(x) на [a,b] заменяется интерполяционным многочленом первого порядка, построенным по значениям в точках a и b. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + R_1 \text{ и } R_1 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \text{ где } \xi \in [a,b]. \tag{9}$$

Разделим [a,b] на m равных частей длины $h = \frac{b-a}{m}$. К каждому частичному отрезку [a+ih,a+(i+1)h] применим формулу трапеций, сложив результаты и обозначив $f(a+ih) = f_i$, получим обобщенную формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m}\left[\frac{f_0 + f_m}{2} + f_1 \ldots + f_{m-1}\right] - \frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi). \tag{10}$$

4.2.3.Формула Симпсона (формула парабол)

Пусть функция f(x) на [a,b] заменяется интерполяционным многочленом второго порядка, построенным по значениям в точках a, $\frac{a+b}{2}$ и b. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a-b}{2}\right) + f(b)\right] + R_2 \text{ и } R_1 = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(IV)}(\xi), \tag{11}$$

где $\xi \in [a,b]$.

Разделим [a,b] на четное число m равных частей длины $h=\frac{b-a}{m}$. К каждому частичному отрезку [a+(i-1)h,a+(i+1)h] применим формулу Симпсона, сложив результаты и обозначив $f(a+ih)=f_i$, получим обобщенную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3m}\left[f_0+f_m+2(f_2+f_4+\ldots+f_{m-2})+4(f_1+f_3+\ldots+f_{m-1})\right]-\frac{(b-a)^5}{180m^4}f^{(IV)}(\xi). \quad (12)$$

4.3 Квадратурная формула Гаусса

Пусть функция y=f(x) задана на промежутке [-1,1]. Нужно подобрать узлы квадратурного правила и коэффициенты так, чтобы квадратурная формула

$$\int_a^b f(x) \cong \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) \quad (13)$$

была точной для всех полиномов f(x) наивысшей степени m=2n-1, т.к. имеем 2m неизвестных $x_j, A_j, j=\overline{1,n}$, а полином степени 2n-1 определяется 2n коэффициентами. Остаточный член обращается в нуль, когда $f(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_mx^m$, где C_i=const, i=0,…,m. Тогда

$$\int_{-1}^{1}\left(C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_mx^m\right)dx = A_1\left(C_0+C_1x_1+C_2x_1^2+\ldots+C_mx_1^m\right)+$$
$$A_2\left(C_0+C_1x_2+C_2x_2^2+\ldots+C_mx_2^m\right)+\ldots+A_n\left(C_0+C_1x_n+C_2x_n^2+\ldots+C_mx_n^m\right).$$

Учитывая соотношение: $\int_{-1}^{1}x^k dx = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}$, получаем систему 2n уравнений относительно $x_j, A_j, j=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}; \\ \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^{2n-1} = 0; \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) нелинейная, и её исследование громоздко. Поэтому воспользуемся теоремой:

> для того чтобы квадратурная формула (13) интерполяционного типа была точна для всех многочленов степени не выше 2n-1, необходимо и достаточно, чтобы ее узлы x_j ,были корнями многочлена $\omega_n(x)$, ортогонального на [-1;1] к любому многочлену степени не выше n.

Ортогональную систему многочленов, имеющих n различных действительных корней на [-1;1], образуют многочлены Лежандра

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \quad (15)$$

Итак, в квадратурной формуле с n узлами, имеющей наивысшую степень точности 2n-1, узлы x_j,j=1,...,n являются корнями многочлена Лежандра n-ой степени, а из системы (14), зная x_j легко найдем A_j.

Для произвольного интервала[a,b] сделаем замену $t_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_j$. В этом случае формула Гаусса примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^{n} A_j f(t_j)\,. \tag{16}$$

Таблица узлов и коэффициентов формулы Гаусса

n	x_j	A_j
n=1	x_1=0	A_1=2
n=2	x_1=-0,577350269 x_2=0,577350269	A_1=1 A_2=1
n=3	x_1=-0,774596669 x_2=0 x_3=0, 774596669	A_1=0,555555556 A_2=0,888888889 A_3=0,555555556
n=4	x_1=-0,861136312 x_2=-0,339981044 x_3=0,339981044 x_4=0,861136312	A_1=0,347854845 A_2=0,652145155 A_3=0, 652145155 A_4=0,347854845
n=5	x_1=-0,906179846 x_2=-0,538469319 x_3=0 x_4=0,538469319 x_5=0,906179846	A_1=0,236926885 A_2=0,478628670 A_3=0,568888889 A_4=0,478628670 A_5=0,236926885
n=6	x_1=-0,932469514 x_2=-0,661209386 x_3=-0,238619186 x_4=0,238619186 x_5=0,661209386 x_6=0,932469514	A_1=0,171324492 A_2=0,360761573 A_3=0,467913934 A_4=0,467913934 A_5=0,360761573 A_6=0,171324492
n=7	x_1=-0,949107912 x_2=-0,741531185 x_3=-0,405845151 x_4=0 x_5=0,405845151 x_6=0,741531185 x_7=0,949107912	A_1=0,129484966 A_2=0,279705391 A_3=0,381830051 A_4=0,417959184 A_5=0,381830051 A_6=0,279705391 A_7=0,129484966

4.4 Метод Монте-Карло

Методы решения задач, использующие случайные величины, называются методами Монте-Карло.

Пусть методом Монте-Карло требуется вычислить m - кратный интеграл

$$I = \iint\limits_{(S)}\ldots\int f(x_1,\ldots,x_m)dx_1\ldots dx_m\,, \tag{17}$$

где функция $f(x_1,...,x_m)$ задана в ограниченной замкнутой области S, а эта область заключена в m - мерном параллелепипеде $a_j \le x_j \le A_j$, $j = \overline{1,m}$. Для преобразования m - мерного параллелепипеда в m - мерный единичный куб сделаем замену переменных следующего вида: $x_j = a_j + (A_j - a_j)\xi_j$, $j = \overline{1,m}$, при этом $0 \le \xi_j \le 1$. Якобиан этого преобразования

$$\frac{D(x_1,\ldots,x_m)}{D(\xi_1,\ldots,\xi_m)} = \begin{vmatrix} A_1-a_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2-a_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & A_m-a_m \end{vmatrix} = (A_1-a_1)\ldots(A_m-a_m).$$

Тогда интеграл (17) перепишется в виде

$$I = \iint\limits_{(\sigma)}\ldots\int F(\xi_1,\ldots,\xi_m)d\xi_1\ldots d\xi_m\,, \tag{18}$$

где $F(\xi_1,\ldots,\xi_m) = (A_1-a_1)\ldots(A_m-a_m)f\left(a_1+(A_1-a_1)\xi_1,\ldots,a_m+(A_m-a_m)\xi_m\right)$, σ - новая область интегрирования, лежащая внутри m - мерного единичного куба.

Выберем m равномерно распределенных на [0,1] последовательностей случайных чисел $\xi_1^{(1)}\ldots\xi_k^{(1)}\ldots;\ \ldots,\ \xi_1^{(m)}\ldots\xi_k^{(m)}\ldots$. Точки $M_j\left(\xi_j^{(1)}\ldots\xi_j^{(m)}\right)$, $j=1,2\ldots$ можно рассматривать как случайные точки из m - мерного единичного куба. Будем считать, что n - случайных точек принадлежат области σ, а (N-n) точек не принадлежат ей.

Если взять достаточно большое число n точек из области σ, то приближенно можно считать

$$F_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}F(M_j)\,, \tag{19}$$

тогда выражение (18) можно переписать в виде

$$I = F_{cp}\cdot\sigma = \frac{\sigma}{n}\sum_{j=1}^{n}F(M_j)\,, \tag{20}$$

здесь σ - объем области интегрирования. Если вычисление объема затруднительно, то можно считать, что $\sigma = \frac{n}{N}$, тогда

$$I = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}F(M_j)\,. \tag{21}$$

4.5 Задачи

I. Вычислить определенный интеграл при n=24 по соответствующей квадратурной формуле:

№ п/п	Прямоугольников	Трапеций	Симпсона
1.	$\int_0^1 \sqrt{e^x+1}dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x dx$
2.	$\int_0^1 \frac{2+x}{2-x}dx$	$\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\cos x)dx$
3.	$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$	$\int_0^2 \frac{2xdx}{1+x^2}$
4.	$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+\cos x}$	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$
5.	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x}}dx$	$\int_0^{\pi} (\cos x)^2\cos(2x)dx$	$\int_0^1 (x+1)(x+2)dx$

6.	$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{1+\sin x}$	$\int_{1}^{2}(\ln x+x)dx$
7.	$\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x+x^2}dx$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+2\cos x)^2 dx$	$\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
№ п/п	Прямоугольников	Трапеций	Симпсона
8.			
9.			
10.			

II. Вычислить интегралы из задания I по формуле Гаусса при n=7.

III. Вычислить интегралы методом Монте-Карло с точностью до ______. Причем первоначально взять 20 случайных чисел, равномерно распределенных на [0,1], а затем добавлять по 10 чисел сразу и вычислять значения интеграла до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность (данные взять из задания I).

5. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

5.1 Общие понятия и определения

Определение. Вековым определителем матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ называется определитель вида:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Определение. Собственным значением квадратной матрицы A называется такое число λ, для которого выполняется соотношение:

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}, \tag{5.1}$$

если $\overline{x}$ - некоторый не нулевой вектор, называемый собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ.

Соотношение (1) можно переписать в виде:

$$(A - \lambda E)\overline{x} = \overline{0}, \tag{5.2}$$

Условием существования ненулевого решения однородной системы (5.2) является требование:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением матрицы A.

Все методы нахождения собственных значений и соответствующим им собственных векторов можно разделить на два класса: точные и итерационные.

К точным методам относятся те, что сначала строят собственный многочлен матрицы, а затем, находя его корни, получают собственные значения. По найденным собственным значениям находят соответствующие им собственные вектора, не прибегая к решению однородных систем линейных алгебраических уравнений.

К итерационным методам относятся те методы, в которых собственные значения матрицы определяются без обращения к собственному многочлену, при этом обычно одновременно вычисляются и соответствующие им собственные векторы. Вычислительные схемы таких методов носят итерационных характер.

При решении данных задач необходимо знать, что все собственные значения лежит в интервале, определяемом нормой исходной матрицы:

$$-\|A\| \le \lambda \le \|A\|,$$

где $\|A\|$ - норма матрицы A, которая может быть посчитана двумя способами:

a) евклидова норма $\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij} \right)^{1/2}$

b) сумма максимума модулей по строкам $\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \max |a_{ij}|$

Для проверки правильности решения полной проблемы собственных значений можно использовать следующие два равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|.$$

5.2 Метод Данилевского

Суть метода в приведении векового определителя к нормальному виду Фробениуса:

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Разложив определитель (5.4) по первой строке будем иметь:

$$D(\lambda)=(-1)^n\left(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-p_3\lambda^{n-3}-\ldots-p_n\right). \tag{5.5}$$

Известно, что преобразование подобия не изменяет характеристического многочлена матрицы A. Поэтому, удачно подобрав преобразование подобия, можно получить матрицу, собственный многочлен которой может быть выписан по ее виду.

Рассмотрим модификацию метода Данилевского удобную для численной реализации. Пусть задана матрица

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

с помощью преобразований подобия матрица (5.6) приводится к матрице имеющей нормальную форму Форбениуса:

$$\Phi=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Процесс приведения к нормальной форме Форбениуса:

I. Матрица A умножается справа на матрицу C_1, а слева на C_1^{-1}:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{nn} \end{bmatrix},\ C_1^{-1}=\begin{bmatrix} -a_{2n}/a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{3n}/a_{1n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{nn}/a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

В результате получаем матрицу $A^{(1)}=C_1^{-1}AC_1$, у которой (n-1) – й столбец имеет нужный нам вид.

II. На втором шаге матрица $A^{(1)}$ умножается справа на матрицу C_2, а слева на C_2^{-1}:

$$C_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}^{(1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{nn}^{(1)} \end{bmatrix},\ C_2^{-1}=\begin{bmatrix} -a_{2n}^{(1)}/a_{1n}^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{3n}^{(1)}/a_{1n}^{(1)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{nn}^{(1)}/a_{1n}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/a_{1n}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

В результате получаем матрицу $A^{(2)}=C_2^{-1}A^{(1)}C_2$, у которой (n-1) – й и (n-2) – й столбцы имеют тот же вид, что и соответствующие столбцы матрицы Форбениуса.

Продолжая этот процесс, после (n-1) – го шага получим матрицу $A^{(n-1)}$, имеющую нормальную форму Форбениуса. Здесь предполагается, что $a_{in}^{(j)}$, $j = \overline{0, n-1}$ отличны от нуля.

Собственный многочлен матрицы имеет вид:

$$D(\lambda) = \left(\lambda^n - a_{nn}^{(n-1)}\lambda^{n-1} - a_{n-1n}^{(n-1)}\lambda^{n-2} - \ldots - a_{1n}^{(n-1)}\right), \tag{5.8}$$

Корни многочлена (5.8) являются собственными значениями исходной матрицы А.

Если $S = C_1 C_2 \ldots C_{n-1}$, а $\overline{y}$ - собственный вектор матрицы $A^{(n-1)}$, то собственный вектор матрицы А определяется соотношением $\overline{x} = S\overline{y}$, т.е. для определения компонент собственного вектора $\overline{y}$ имеем:

$$\begin{cases} p_n y_n = \lambda y_1; \\ y_1 + p_{n-1} y_n = \lambda y_2; \\ y_2 + p_{n-2} y_n = \lambda y_3; \\ \ldots \\ y_{n-2} + p_2 y_n = \lambda y_{n-1}; \\ y_{n-1} + p_1 y_n = \lambda y_n; \end{cases} \tag{5.9}$$

Т.к. собственный вектор определяется с точностью до числового множителя, то можно считать, что $y_n = 1$. Таким образом решая систему (5.9) будем иметь:

$$\begin{cases} y_n = 1; \\ y_1 = \lambda^{n-1} - p_1\lambda^{n-2} - p_2\lambda^{n-3} - \ldots - p_{n-1}; \\ \ldots \\ y_{n-2} = \lambda^2 - p_1\lambda - p_2; \\ y_{n-1} = \lambda - p_1; \end{cases} \tag{5.10}$$

5.3 Метод Крылова

Суть метода заключается в построении алгебраического образа. По виду которого можно было бы сразу записать собственный многочлен вещественной матрицы А.

Возьмем произвольный вектор $\overline{C}^{(0)} = (1, 0, \ldots, 0)$, согласованный по размерности с матрицей А, и по этому вектору будем составлять последовательность векторов $\overline{C}^{(1)} = A\overline{C}^{(0)}$, $\overline{C}^{(2)} = A\overline{C}^{(1)} = A^2\overline{C}^{(0)}$, … до тех пор пока не встретится такой вектор $\overline{C}^{(m)} = q_1\overline{C}^{(m-1)} + q_2\overline{C}^{(m-2)} + \ldots + q_m\overline{C}^{(0)}$, т.е. вектор являющийся линейной комбинацией предыдущих линейно независимых векторов.

Для определения номера m составляют максимально возможную линейную комбинацию, т.е. полагают m=n:

$$\begin{cases} q_1\overline{C}_1^{(n-1)} + q_2\overline{C}_1^{(n-2)} + \ldots + q_n\overline{C}_1^{(0)} = C_1^{(n)} \\ q_1\overline{C}_2^{(n-1)} + q_2\overline{C}_2^{(n-2)} + \ldots + q_n\overline{C}_2^{(0)} = C_2^{(n)} \\ \ldots \\ q_1\overline{C}_n^{(n-1)} + q_2\overline{C}_n^{(n-2)} + \ldots + q_n\overline{C}_n^{(0)} = C_n^{(n)} \end{cases} \tag{5.11}$$

Здесь $C_j^{(i)}$, при $j = \overline{1, n}$ - координаты вектора $\overline{C}^{(i)}$, $i = \overline{0, n}$. В результате для определения $q_1, q_2, \ldots, q_n$ имеем систему n – линейных алгебраических уравнений.

Для случая линейной независимости векторов $\overline{C}^{(1)}$, …, $\overline{C}^{(n)}$ полученную систему решают методом Гаусса. В том случае, когда линейно независимы только m первых векторов, находят m коэффициентов системы $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Зная все значения коэффициентов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ можно записать собственный многочлен матрицы А: $P(\lambda) = \lambda^n - q_1\lambda^{n-1} - q_1\lambda^{n-2} - \ldots - q_n$. Решив уравнение $P(\lambda) = 0$, найдем все собственные значения матрицы А.

В том случае, когда найдены только m коэффициентов системы, можно записать многочлен $\psi(\lambda) = \lambda^m - q_1\lambda^{m-1} - q_1\lambda^{m-2} - \ldots - q_m$, который является делителем собственного многочлена матрицы А. Решив уравнение: $P(\lambda) = 0$, найдем часть собственных значений матрицы А. Изменяя исходный вектор $\overline{C}^{(0)}$ и проделав все вычисления заново, находим все оставшиеся собственные значения.

Собственный вектор $\overline{x}_i$ соответствующий собственному значению λ_i ищется в виде линейной комбинации линейно-независимых векторов :

$$x_i = \alpha_{i1}C^{(m-1)} + \alpha_{i2}C^{(m-2)} + \ldots + \alpha_{im}C^{(0)},$$

где коэффициенты $\alpha_{i1} = 1$; $\alpha_{i2} = \lambda_i - q_1$, …, $\alpha_{im} = \lambda_i^{m-1} - q_1\lambda_i^{m-2} - q_2\lambda_i^{m-3} - \ldots - q_{m-1}$.

5.4 Вычисление всех собственных значений положительно определенной симметрической матрицы

Собственные значения такой матрицы вещественные и положительные, а собственные векторы выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие ортогональности: $(\overline{x}_i, \overline{x}_j) = 0$, $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Система для определения собственного вектора $\overline{x}_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, соответствующего собственному значению λ_1 имеет вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = 0; \\ a_{21}x_{21} + (a_{22} - \lambda)x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{n1} = 0; \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_{n1} = 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

В связи с тем, что собственный вектор определяется с точностью до числового множителя, предположим, что одна из компонент собственного вектора равна 1, т.е. $x_{n1} = 1$. В итоге получаем систему нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n-11}, \lambda_1$, которую можно решать методом итерации:

$$\begin{cases} x_{11}^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1^{(k)}}\left(a_{11}x_{11}^{(k)} + a_{12}x_{21}^{(k)} + \ldots + a_{1n}\right); \\ x_{21}^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1^{(k)}}\left(a_{21}x_{11}^{(k)} + a_{22}x_{21}^{(k)} + \ldots + a_{2n}\right); \\ \ldots \\ x_{n-11}^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1^{(k)}}\left(a_{n-11}x_{11}^{(k)} + a_{n-12}x_{21}^{(k)} + \ldots + a_{n-1n}\right); \\ \lambda_1^{(k+1)} = a_{n1}x_{11}^{(k)} + a_{n2}x_{21}^{(k)} + \ldots + a_{nn}. \end{cases} \tag{5.13}$$

Начальное приближение для системы (5.13) выбирается произвольно. Если метод итерации для системы (5.13) сходится, то для достаточно больших значений k можно приближенно положить $\lambda_1 = \lambda_1^{(k)}$, $\overline{x}_1 = \left(x_{11}^{(k)}, x_{21}^{(k)}, \ldots, x_{n-11}^{k}, 1\right)$.

Для определения λ_2 и $\overline{x}_2$ воспользуемся двумя соотношениями: $A\overline{x}_2 = \lambda_2\overline{x}_2$ и условием ортогональности векторов $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$:

$$x_{12} = \frac{1}{\lambda_2}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{(1)} x_{j2},\ i = \overline{1, n-1},$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{x_{n-12}}\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1j}^{(1)} x_{j2} \qquad (5.14)$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - x_{j1}^{(k)} a_{1n}$.

Учитывая, что $\overline{x}_2$ определяется с точностью до числового множителя, положим $x_{n-12} = 1$. Исключив из (5.14) уравнение для определения x_{n-12} и получим систему из (n-1) – го нелинейного алгебраического уравнения для определения неизвестных $x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n-22}, \lambda_2$. Задавая произвольно начальное приближения, и решая систему методом итерации, получим:

$$x_{i2}^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda_2^{(k)}}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij}^{(1)} x_{j2}^{(k)} + a_{in-1}^{(1)},\ i = \overline{1, n-1},$$
$$\lambda_2^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-2} a_{i-1j}^{(1)} x_{j2}^{(k)} + a_{n-1n}^{(1)} \qquad (5.15)$$

Для контроля правильности вычисления можно воспользоваться уравнением:

$$\lambda_2 x_{n2} = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_{j2}.$$

Для определения λ_3 и $\overline{x}_3$ воспользуемся тремя соотношениями: $A\overline{x}_3 = \lambda_3\overline{x}_3$ и условиями ортогональности векторов $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_3$, а также векторов $\overline{x}_2$ и $\overline{x}_3$. Далее процесс аналогичен процессу нахождения λ_2 и $\overline{x}_2$ и т.д.

Замечание: последующие собственные значения и векторы вычисляются с меньшей точностью, чем предыдущие.

5.5 Задачи

I. Методом Данилевского найти собственные значения и собственные векторы матрицы:

Вариант	Исходная матрица	Вариант	Исходная матрица
1.	$\begin{pmatrix} -0{,}755 & 0{,}392 & 0{,}562 & 3{,}599 \\ 6{,}968 & -3{,}273 & 4{,}121 & 2{,}521 \\ -1{,}374 & 2{,}456 & -1{,}507 & 7{,}163 \\ -0{,}359 & 6{,}148 & 2{,}542 & 0{,}783 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} -3{,}916 & -2{,}795 & -1{,}392 & 2{,}993 \\ -1{,}719 & -0{,}860 & 3{,}906 & 2{,}613 \\ -0{,}581 & -0{,}773 & -0{,}063 & -4{,}53 \\ 1{,}878 & 1{,}123 & -0{,}802 & 1{,}331 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} -1{,}204 & 3{,}147 & 6{,}296 & -4{,}55 \\ -4{,}206 & 0{,}885 & 2{,}580 & 2{,}095 \\ -1{,}497 & 0{,}679 & 2{,}993 & 0{,}353 \\ 3{,}895 & 3{,}732 & 5{,}577 & 0{,}704 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} -1{,}814 & 1{,}843 & -2{,}626 & -6{,}011 \\ 1{,}922 & 0{,}199 & -4{,}987 & -2{,}687 \\ -1{,}254 & -1{,}423 & 4{,}205 & -0{,}785 \\ -1{,}469 & -8{,}239 & -1{,}221 & -0{,}276 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} -7{,}519 & 1{,}042 & -4{,}896 & -0{,}873 \\ 6{,}831 & 2{,}969 & 6{,}192 & -5{,}857 \\ 0{,}137 & -1{,}21 & 1{,}881 & 4{,}47 \\ -0{,}689 & 13{,}012 & 0{,}622 & -2{,}331 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} -3{,}921 & 6{,}24 & -0{,}052 & 2{,}524 \\ 13{,}926 & -0{,}506 & 10{,}705 & -1{,}52 \\ 3{,}702 & -2{,}802 & -1{,}267 & 4{,}394 \\ -4{,}707 & -1{,}599 & -1{,}157 & 0{,}717 \end{pmatrix}$
Вариа	Исходная матрица	Вариан	Исходная матрица

нт		т	
7.	$\begin{pmatrix} 3{,}76 & 2{,}631 & 5{,}601 & -6{,}291 \\ 1{,}149 & -2{,}53 & 0{,}497 & -0{,}05 \\ 2{,}981 & 5{,}613 & 0{,}345 & 0{,}281 \\ 6{,}624 & 2{,}021 & -4{,}508 & 4{,}243 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} -3{,}432 & -0{,}2 & 3{,}443 & -1{,}696 \\ -13{,}427 & -0{,}508 & 3{,}298 & 8{,}875 \\ -2{,}85 & 4{,}398 & -6{,}323 & -0{,}33 \\ -6{,}696 & 0{,}205 & -7{,}817 & -1{,}419 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} -2{,}071 & -3{,}107 & 3{,}08 & -2{,}49 \\ 2{,}85 & 1{,}658 & 0{,}007 & 11{,}607 \\ 1{,}108 & 8{,}249 & 0{,}964 & -2{,}536 \\ 0{,}239 & 3{,}139 & -4{,}587 & 4{,}513 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} -6{,}834 & 0{,}61 & -2{,}941 & -11{,}302 \\ -1{,}292 & 2{,}357 & 3{,}539 & -4{,}173 \\ 3{,}241 & 10{,}977 & -1{,}337 & -1{,}444 \\ 3{,}882 & 1{,}769 & 2{,}233 & -0{,}797 \end{pmatrix}$

II. Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы методом Крылова и методом, вычисляющим все собственные значения и векторы симметрической положительно определенной матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

6. Методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

6.1 Общие понятия и определения

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где f(x) - непрерывна и в общем случае комплекснозначная функция.

Определение. Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1) обращается в тождество, называется решением этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности – корнем уравнения.

В зависимости от вида функции f(x) уравнения вида (1) делятся на алгебраические и трансцендентные.

Определение. f(x) называют алгебраической, если для получения значения функции по данному x необходимо выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем (операцию извлечения корня можно представить как операцию возведения в степень с показателем $\frac{1}{n}$).

Определение. Алгебраическая функция называется рациональной относительно переменной x, если над x производятся операции сложения, вычитания, умножения и деления и возведения в степень. В зависимости от степени x рациональная функция может быть либо целой рациональной , либо дробно-рациональной.

$f(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{4x-1}{8}$ - пример целой рациональной функции;

$f(x) = \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_k}$ - пример дробно-рациональной функции,

где a_i, b_j - любые действительные числа, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$, k - натуральное число или 0, n - натуральное число. Это

К классу алгебраических функций так же принадлежат и иррациональные функции.

Определение. f(x) называют иррациональной, если для получения ее значения по данному x необходимо выполнить кроме арифметических действий (не обязательно всех) еще и извлечение корня. При этом функция будет иррациональной, если аргумент находится под знаком корня.

Определение. Если в левую часть (1) входят только алгебраические функции, то уравнение называют алгебраическим.

Алгебраическое уравнение можно привести к виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2}$$

где числа a_i , $i = \overline{1,n}$ -коэффициенты уравнения, причем это могут быть как вещественные, так и комплексные числа.

Корни уравнения тоже могут быть и вещественными и комплексными. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда a_i вещественные числа.

Определение. f(x) называют трансцендентной функцией, если она содержит логарифмическую, показательную, тригонометрические, обратные тригонометрические и другие функции.

Определение. Если в записи уравнения (1) содержится трансцендентная функция, то уравнение называют трансцендентным.

Точные значения корней уравнения (1) можно найти лишь. в исключительных случаях. Например, в случае квадратного уравнения можно использовать известные формулы, однако, в случае n>4 Н.Х. Абель доказал, что не существует формулы выражающей решение уравнения (2).

Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений есть приближенные числа, поэтому нельзя говорить о нахождении точных корней.

Предположим, что уравнение (1) имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня уравнения (1) существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Остановимся на задаче нахождения всех или некоторые корней уравнения (1).

В общем случае данная задача распадается на три подзадачи:

1) определение количества, характер и расположение корней;
2) нахождение приближенных значений корней;
3) выбор интересующих корней и нахождение их с заданной точностью.

Будем считать, что уравнение (1) имеет только действительные корни. Тогда нахождение корней с заданной точностью необходимо проводить в два этапа:

1) отделение корней, т.е. нахождение достаточно малых промежутков, в которых содержится один и только один корень данного уравнения;
2) уточнение приближенных корней, т.е. нахождение корней с заданной точностью.

6.2 Отделение корней

Процесс отделения корней можно проводить различными способами. Широко используемые способы отделения корней – графический и аналитический (табличный). Они базируются на свойствах гладкости функции.

Затем следует убедиться, что на отрезке $[\alpha,\beta]$ корень единственный.

6.2.1.Графический метод

Этот метод основан на построении графика функции y=f(x). Если построить график данной функции, то искомым отрезком $[\alpha,\beta]$, содержащим корень уравнения (1), будет отрезок оси абсцисс, содержащий точку пересечения графика с этой осью. Иногда выгоднее функцию f(x) представить в виде разности двух более простых функций, т.е. $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ и строить графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет являться корнем уравнения (1), а отрезок на оси абсцисс которому принадлежит данный корень, будет являться интервалом изоляции. Этот метод отделения корней хорошо работает только в том случае, если исходное уравнение не имеет близких корней. Данный метод дает тем точнее результат, чем мельче берется сетка по оси Ox.

Пример. Графически решить уравнение $x\ln(x)=1$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде: $\ln(x)=\frac{1}{x}$, т.е. $\varphi(x)=\ln(x)$ и $\psi(x)=\frac{1}{x}$.

Таким образом, корни данного уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения кривых $y=\ln(x)$ и $y=\frac{1}{x}$.

Теперь построим графики функций и определим интервал изоляции корня.

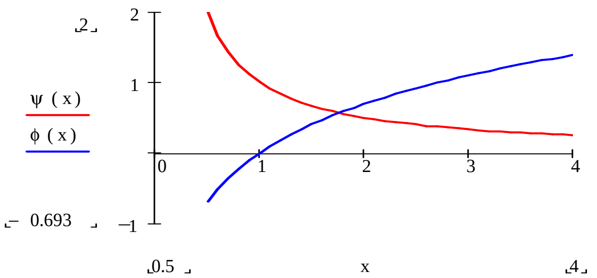


Рис. 1.

Из рис.1 видно, что корень находится на отрезке [1,2]. В качестве приближенного значения этого корня можно взять значение x=1.5. Если взять шаг по оси Ox меньше, то и значение корня можно получить более точное.

6.2.2.Аналитический метод (табличный или шаговый).

Для отделения корней полезно помнить следующие известные теоремы:

1) если непрерывная функция f(x) принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha,\beta]$, т.е. $f(\alpha)f(\beta)<0$, то внутри этого отрезка содержится, по крайне мере, один корень уравнения f(x)=0;
2) если непрерывная и монотонная функция f(x) на отрезке $[\alpha,\beta]$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри данного отрезка содержится единственный корень;
3) если функция f(x) непрерывна на отрезка $[\alpha,\beta]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная ее сохраняет постоянный знаквнутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения (1) и притом единственный.

Если исходное уравнение имеет близкие корни или функция f(x) сложная, то для отделения отрезков изоляции можно воспользоваться методом деления отрезка на части (шаговым методом).

Сначала определяют знаки функции в граничных точках области. Затем отрезок разбивается с помощью промежуточных точек $x=\alpha_1,\alpha_2,\dots$. Если окажется, что в двух соседних точках α_k и α_{k+1} функция f(x) имеет разные знаки, то в силу приведенной теоремы, можно утверждать, то на этом отрезке имеется по крайне мере один корень.

Теперь необходимо убедиться, что на выбранном отрезке находится единственный корень. Для этого можно проверить меняет ли знак производная функции f(x) на этом интервале.

Пример. Найти интервалы изоляции корня уравнения $x^2-2=0$ на [0,4]

Решение. Построим таблицу значений, где $y(x)=x^2-2$:

x	y(x)
0	-2
1	-1
2	2
3	7
4	14

Из таблицы значений видно, что функция y(x) меняет знак на отрезке [1,2], поэтому корень находится на этом отрезке.

6.2.3. Отделение корней алгебраических уравнений

Для отделения корней алгебраического уравнения (2) с действительными коэффициентами полезно помнить следующие известные теоремы алгебры:

1) если $a=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_n|\}$, $b=\max\{|a_0|,|a_1|,\dots,|a_{n-1}|\}$, то все корни уравнения (2) расположены в кольце

$$\frac{|a_n|}{b+|a_n|}\le x\le 1+\frac{a}{|a_0|}, \tag{3}$$

2) если a максимум модулей отрицательных коэффициентов уравнения, $a_0>0$ и первый отрицательный коэффициент последовательности $a_0,a_1,\dots,a_n$ есть a_m, то все положительные корни уравнения меньше $N=1+\sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}$ (если отрицательных коэффициентов нет, то нет и положительных корней).

3) если $a_0>0$ и при $x=c>0$ имеют место неравенства $f(c)>0$, $f'(c)>0$, …, $f^{(n)}(c)>0$, то число c служит верхней границей положительных корней уравнения (2).

4) Пусть заданы многочлены

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\,,$$
$$\varphi_1(x)=x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_n\,,$$
$$\varphi_2(x)=f(-x)=(-1)^n\left[a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}\ldots+(-1)^na_n\right],$$
$$\varphi_3(x)=x^nf\left(-\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\left[a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}\ldots+(-1)^na_0\right]$$

и N_0, N_1, N_2, N_3 верхние границы положительных корней соответственно многочленов f(x), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Тогда все положительные корни уравнения (2) лежат на отрезке $[1/N_1, N_0]$, а все отрицательные корни на отрезке $[-N_2, -1/N_3]$.

Пример. Отделить корни данного алгебраического уравнения, используя теорему 4:

$$x^3-0.5x^2+0.78=0\,.$$

Решение. $f(x)=x^3-0.5x^2+0.78\,,\ N_0=1+\dfrac{0.5}{1}=1.5\,,$

$$\varphi_1(x)=x^3f\left(\frac{1}{x}\right)=0.78x^3-0.5x+1\,,\ N_1=1+\sqrt{\frac{0.5}{0.78}}\approx 1.8006\,,$$
$$\varphi_2(x)=f(-x)=-x^3-0.5x^2+0.78\,,\ N_2=1+\sqrt[3]{0.78}\approx 1.9205\,,$$
$$\varphi_3(x)=x^3f\left(-\frac{1}{x}\right)=-0.78x^3+0.5x+1\,,\ N_3=1+\sqrt{\frac{1}{0.78}}\approx 2.1323\,.$$

Таким образом корни уравнения могут лежать на интервалах $[-1.9205;-0.4690]$, $[0.5554;1.5]$.

Для определения количества действительных корней уравнения (2) необходимо воспользоваться **теоремой Декарта**: число положительных корней уравнения (2) с учетом их кратности равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (при этом равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.

Теорема Декарта не требует больших вычислений, но не всегда дает точное количество действительных корней уравнения (2).

Замечание. Для определения количества отрицательных корней достаточно применить теорему Декарта к многочлену $f(-x)$.

Если уравнение (2) не имеет кратных корней на $[\alpha,\beta]$, то точное число действительных корней дает теорема Штурма.

Предположим, что уравнение (2)не имеет кратных корней. Обозначим через $f_1(x)$ производную $f'(x)$; через $f_2(x)$ остаток от деления $f(x)$ на $f_1(x)$, взятый с обратным знаком; через $f_3(x)$ остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$, взятый с обратным знаком и т.д., до тех пор пока не придем к постоянной. Полученную последовательность

$$f(x)\,,\ f_1(x)\,,\ f_2(x)\,,\ \ldots,\ f_n(x) \qquad (4)$$

назовем рядом Штурма.

Теорема Штурма: Число действительных корней уравнения f(x)=0, расположенных на отрезке $[\alpha,\beta]$, равно разности между числом перемен знаков в последовательности (4) при $x=\alpha$ и числом перемен знаков в последовательности (4) при $x=\beta$.

Замечание. Использование теоремы Штурма на практике, связано с большой вычислительной работой при построении рядя Штурма.

Пример. Отделить корни данного алгебраического уравнения, используя теорему Штурма:

$$x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{39}{50}=0$$

Решение.

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{39}{50},$$
$$f_1(x) = 3x^2 - x,$$
$$f_2(x) = \frac{1}{18}x - 0.78,$$
$$f_3(x) = -577.3248$$

Построим таблицу для подсчета смены знаков:

	$-\infty$	-1	-0.4	0.5	1	∞
sign f(x)	-	-	+	+	+	+
sign $f_1(x)$	+	+	+	+	+	+
sign $f_2(x)$	-	-	-	-	-	+
sign $f_3(x)$	-	-	-	-	-	-
Число перемен знаков	2	2	1	1	1	1

Из таблицы подсчета смены знаков видно, что есть один корень данного уравнения, и он находится на [-1;-0.4].

6.2.4. Метод половинного деления (Дихотомии)

Пусть дано уравнение (1), где функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и f(a)f(b)<0. Для нахождения корня этого уравнения, принадлежащего данному отрезку [a,b], делим его пополам. Если значение $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $x_{ср} = \frac{a+b}{2}$ - корень уравнения. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то выбираем тот, из полученных отрезков $[a, x_{ср}]$ или $[x_{ср}, b]$ на концах которого функция f(x) имеет противоположные знаки. Новый отрезок полученный указанным способом $[\alpha_1, \beta_1]$ снова делим пополам и процесс снова повторяем.

Продолжая этот процесс, получим либо точное значение корня уравнения или бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, …, $[\alpha_n, \beta_n]$, … таких, что $f(\alpha_i, \beta_i) < 0$ $i = 1, 2, \ldots$, причем $\beta_i - \alpha_i = \frac{1}{2^i}(\beta - \alpha)$.

Замечание. Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения корня данного уравнения, т.к. при увеличении точности существенно возрастает объем вычислительной работы.

Пример. Уточнить корень уравнения $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, лежащий на отрезке [0,1].

Решение. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$.

1 этап: a=0, $f(0) = 0^4 + 2 \cdot 0^3 - 0 - 1 = -1$,

b=1, $f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 - 1 = 1$,

f(0)f(1)=-1<0

$x_{ср} = \frac{0+1}{2} = 0.5$, $f(0.5) = 0.5^4 + 2 \cdot 0.5^3 - 0.5 - 1 = -1.19$

f(0)f(0.5)>0, значит корня на отрезке [0;0.5] нет.

f(0.5)f(1)<0, значит корень находится на [0.5;1].

2 этап: a=0.5, f(0.5)=-1.19

b=1, f(1)=1

$x_{ср} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$, $f(0.75) = 0.75^4 + 2 \cdot 0.75^3 - 0.75 - 1 = -0.59$

$f(0.5)f(0.75)>0$, значит корня на отрезке [0.5;0.75] нет.

$f(0.75)f(1)<0$, значит корень находится на [0.5;1].

Дальше процесс продолжается аналогичным образом.

6.3 Итерационные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

Методы отделения корней весьма удобны и просты. Однако они дают ответ только на вопрос локализации корня, и позволяю найти грубое приближение этого корня. Если же требуется найти более точное значение корня, то следует воспользоваться итерационными методами.

Суть любого итерационного метода решения уравнения (1), заключается в следующем. Пусть известен малый промежуток $[\alpha,\beta]$, в котором содержится единственный корень $x=\eta$ уравнения (1). Из достаточно малой окрестности корня выбирается произвольная точка x_0 – начальное приближение к корню уравнения и строится последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - посредством рекуррентного соотношения: $x_k = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$, k=1, 2, … .

При этом последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - должна сходиться к корню $x=\eta$, что обеспечивается соответствующим выбором φ_k .

Достоинством всех итерационных методов является то, что ошибка вычислений не накапливается.

6.3.1. Метод простой итерации

Уравнение (1) приводится к виду

$$x = \varphi(x), \tag{5}$$

при этом для функции $\varphi(x)$ должно выполняться **условие**

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \text{ при } x \in [\alpha, \beta]. \tag{6}$$

Если условие (6) не выполняется, то можно $\varphi(x)$ представить в виде $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, а число λ подобрать таким образом, чтобы условие (6) выполнялось.

Предположим для определенности, что $f'(x)>0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ (если $f'(x)<0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то вместо уравнения (1) рассматривается уравнение $-f(x)=0$), тогда $0<m<f'(x)<M$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $f'(x)$ на $[\alpha, \beta]$. В этом случае полагаем $\lambda = \dfrac{1}{M}$, а $q = 1 - \dfrac{m}{M}$. Очевидно, что чем меньше величина q, тем быстрее будет сходимость.

Рекуррентное соотношение метода простой итерации имеет вид $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, $i = 0,1,2,\ldots$. За начальное приближение x_0 можно взять любую точку отрезка $[\alpha, \beta]$.

Геометрическая интерпретация. На отрезке $[\alpha, \beta]$ строят графики функций y=x и $y = \varphi(x)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков является корнем уравнения (5). Отталкиваясь от некоторой точки $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ строится ломаная линия $A_0B_1A_1B_2A_2$ …, звенья которой попеременно параллельны осям абсцисс и ординат (рис.2). Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2 представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, … корня ξ.

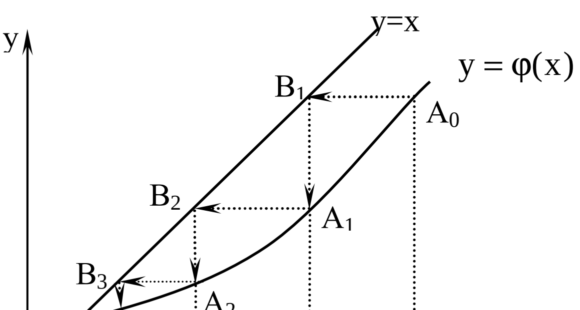


Рис. 2.

Для оценки n-го приближения можно воспользоваться формулой

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|. \tag{7}$$

Итерационный процесс следует продолжать до тех пор пока не будет выполнено неравенство

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \frac{q}{1-q}\varepsilon \text{ или } \left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon, \text{ если } q \le \frac{1}{2},$$

где ε- точность решения уравнения (1).

6.3.2. Метод Ньютона

Этот метод является еще одним классическим методом решения уравнения (1). Иначе его называют методом касательных или методом линеаризации.

Предположим, что отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит единственный корень $x=\xi$ уравнения (1) и функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ не равны нулю на данном отрезке. Будем рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации. Выберем произвольную точку x_0 из малой окрестности корны и так, чтобы выполнялось условие $f(x_0)f''(x_0) > 0$, т.е. чтобы знак функции и ее второй производной в точке x_0 совпадали. Обычно за x_0 берут один из концов отрезка $[\alpha, \beta]$. Построим итерационную последовательность по формуле

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_k)}, \text{ k=1, 2, \dots .} \tag{8}$$

Последовательность (8) будет сходиться, т.к.

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \text{ и } \varphi'(x) = 0.$$

Последнее означает, что если x_0 выбрано из малой окрестности корня, то $\varphi'(x) \le 1$. При произвольном x_0 итерации будут сходиться, если всюду $\left|f(x)f''(x)\right| < \left(f'(x)\right)^2$.

Метод Ньютона имеет простую **геометрическую интерпретацию**. На отрезке $[\alpha, \beta]$ к кривой y=f(x) проводится касательная в точке $A_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 3). За первое приближение корня принимается точка пересечения этой касательной с осью абсцисс. Через точку $A_1(x_1; f(x_1))$ снова проводится касательная, точка пересечения которой с осью абсцисс дает второе приближение корня x_2 и т.д. Уравнение касательной в точке $A_n(x_n; f(x_n))$ есть $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$. Полагая y=0, $x=x_{n+1}$, получаем $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

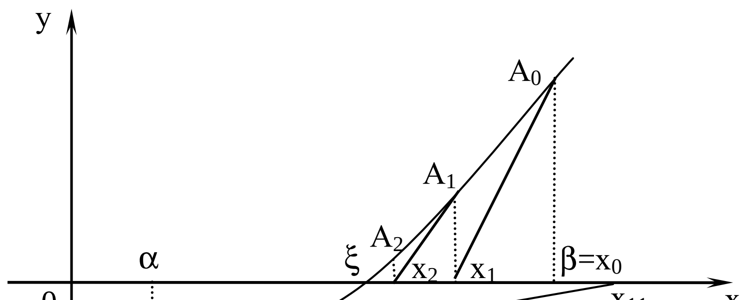


Рис. 3.

За начальное приближение x_0 в данном случае был выбран тот конец отрезка [α, β], для которого выполнялось условие $f(x_0)f''(x_0) > 0$. В результате все приближения x_1, x_2, … лежат внутри отрезка [α, β]. Если за начальное приближение x_0 взять противоположный конец отрезка [α, β], то получим точку x_{11}, лежащую вне отрезка, и может случиться, что полученная в этом случае последовательность не сойдется к корню ξ.

Погрешность n-го приближения оценивается по формуле

$$|\xi - x_n| \le \frac{f(x_n)}{m}, \text{ где } m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)|,$$

или по соотношению

$$|\xi - x_n| \le \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2, \text{ где } M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)|.$$

Пример. С помощью графического метода отделить корни трансцендентного уравнения и уточнить их методом Ньютона с точностью ε=0,00001.

$$\ln(x) - (x-1)^2 + 0{,}15 = 0.$$

Решение. Запишем наше уравнение в виде $y_1 = y_2$, где $y_1 = \ln(x)$; $y_2 = (x-1)^2 - 0{,}15$. Строим графики данных функций.

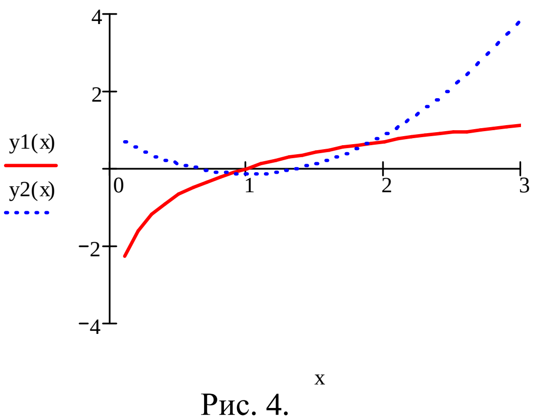


Рис. 4.

Из рис. 3 видно, что данное уравнение имеет два корня: первый корень принадлежит отрезку [0.1; 1], а второй [1.1; 2].

Уточним корни методом касательных. Для этого вычислим производные

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2(x-1);\ f''(x) = -\frac{1}{x^2 - 2}.$$

Итерационная формула метода Ньютона в данном случае принимает вид

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\ln(x_{n-1}) - (x_{n-1} - 1)^2 + 0{,}15}{\frac{1}{x_{n-1}} - 2(x_{n-1} - 1)},$$

где n=1, 2, 3, … .

$f(0.1) = -2.96$; $f''(0.1) = -102$; $f(0.1)f''(0.1) > 0$, поэтому x_0=0.1.

Результаты вычислений представим в виде таблиц.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0.1	0.351067	0.668912	0.836598	0.872805	0.874392	0.874395	0.874395
$f(x_k)$	-	-1.31789	-0.36172	-0.05511	-0.00222	-	0.000000	

	2.962585					0.000001	1	
$f'(x_k)$	11.8	4.146330	2.157139	1.522122	1.400120	1.394868	1.394858	

Аналогично получаем результаты для второго корня.

k	0	1	2	3	4
x_k	2	1.8954315	1.8856575	1.8855667	1.8855667
$f(x_k)$	-0.1568528	-0.0123510	-0.0001089	0.00000001	
$f'(x_k)$	-1.5	-1.2692786	-1.2409892	-1.2407889	

6.4 Решение систем двух нелинейных уравнений

Пусть дана система двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F(x, y) = 0; \\ G(x, y) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Необходимо найти решение этой системы с заданной точностью.

Будем предполагать, что система (9) имеет только действительные изолированные корни, приближенные значения которых x_0 и y_0 можно найти либо построив кривые F(x,y) и G(x,y) и определив координаты их точки пересечения, либо грубой прикидкой. Для нахождения корней с заданной точностью существует несколько итерационных методов. Рассмотрим два из них, которые являются обобщением одномерных случаев.

6.4.1Метод простой итерации

Для применения метода простой итерации система (9) приводится к виду

$$\begin{cases} x = f(x, y); \\ y = g(x, y). \end{cases}$$

Последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_i, y_i); \\ y_{i+1} &= g(x_i, y_i),\ i = 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{10}$$

где x_0 и y_0 – найденные приближенные значения искомого корня.

Для ответа на вопрос о сходимости прибегнем к следующей теореме:

Пусть в некоторой замкнутой области

$$R(a \le x \le A,\ b \le y \le B)$$

имеется только одно решение $x=\xi$, $y=\eta$ системы (9).

Если

1) функции f(x,y) и g(x,y) определены и непрерывно дифференцируемы в R;
2) начальные приближения x_0 и y_0 и все последующие приближения x_i, y_i, i=1,2,… принадлежат R;
3) в R выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| &\le q_1 < 1; \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| &\le q_2 < 1, \end{aligned} \tag{11}$$

то процесс последовательных приближений (9) сходится к решению $x=\xi$, $y=\eta$ системы, т.е.

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \xi,\ \lim_{i\to\infty} y_i = \eta.$$

Условие (11) можно заменить условием

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le q_1<1;$$
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\le q_2<1, \qquad (12)$$

Итерационный процесс можно считать законченным, как только выполниться неравенство

$$\frac{M}{1-M}\left(\left|x_i-x_{i-1}\right|+\left|y_i-y_{i-1}\right|\right)<\varepsilon, \qquad (13)$$

где M – наибольшее из чисел q_1 и q_2, входящих в неравенства (11), (12); ε - точность решения системы.

Если M<0.5, то в этом случае можно воспользоваться неравенством следующего вида: $\left|x_i-x_{i-1}\right|+\left|y_i-y_{i-1}\right|<\varepsilon$.

6.4.2. Метод Ньютона

Алгоритм уточнения начальных приближений x_0 и y_0 в этом случае записывается в следующем виде

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,y_n)};$$
$$y_{n+1}=y_n-\frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,y_n)}, \qquad (14)$$

где $\Delta_x^{(n)}=\begin{vmatrix}F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n)\\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}$, $\Delta_x^{(n)}=\begin{vmatrix}F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n)\\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix}$,

$J(x_n,y_n)=\begin{vmatrix}F'_x(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n)\\ G'_x(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}\ne 0$.

Вычисления по формулам (14) следует проводить до тех пор, пока для двух соседних приближений не выполниться неравенство (13).

6.5 Метод Лобачевского

Метод Лобачевского позволяет найти все корни алгебраического уравнения n-й степени и не требует предварительного отделения корней.

Пусть требуется найти все корни алгебраического уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \qquad (15)$$

а корни это уравнения удовлетворяют соотношению

$$\left|x_1\right|>\left|x_2\right|>\ldots>\left|x_n\right|.$$

При этом если корни сильно разделены, т.е. $\left|\frac{x_i}{x_{i+1}}\right|>>1,\ i=\overline{1,n-1}$,

то на основании известных соотношений между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения можно записать приближенные равенства:

$x_1\approx-\frac{a_1}{a_0},\ x_2\approx-\frac{a_2}{a_1},\ \ldots,\ x_n\approx-\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Если корни не разделены сильно, то сильного разделения можно добиться, возводя корни в высокие степени. Для этого проводят процесс квадрирования корней, т.е. строят уравнение

$$a_0^{(1)}x^n+a_1^{(1)}x^{n-1}+\ldots+a_n^{(1)}=0, \qquad (16)$$

корнями которого являются квадраты корней исходного уравнения со знаком минус ($-x_1^2, -x_2^2, \ldots, -x_n^2$), а коэффициенты данного уравнения находятся по соотношению:

$$a_i^{(1)} = a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j a_{i-j}a_{i+j}\ . \qquad (17)$$

При этом предполагается, что a_j=0, если j<0 или j>n.

Преобразовав коэффициенты уравнения (16) по формуле (17), получаем уравнение, корнями которого являются $x_1^4, x_2^4, \ldots, x_n^4$. Проводя этот процесс j раз, получим уравнение

$$a_0^{(j)}x^n + a_1^{(j)}x^{n-1} + \ldots + a_n^{(j)} = 0\,, \qquad (18)$$

с корнями $(-1)^j x_1^m, (-1)^j x_2^m, \ldots, (-1)^j x_n^m$, где $m = 2^j$, которые сильно разделены.

В процессе квадрирования возможны различные случаи.

1. Если в процессе квадрирования корней удвоенные произведения в выражениях (17) уменьшаются по сравнению с квадратом, то это является признаком того, что уравнение (15) имеет **только действительные корни**:

a) все корни различны по абсолютной величине;

b) среди корней есть равные по абсолютной величине.

В случае **a)** процесс квадрирования корней следует прекратить на некотором шаге k, если, в пределах точности вычислений, удвоенные произведения не влияют на величину вычисляемых коэффициентов, т.е. $a_s^{(k+1)} = \left(a_s^{(k)}\right)^2$, $s = \overline{0, n}$. Модули корней уравнения необходимо вычислять следующим образом:

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}}\ , \ldots, |x_n| \approx \sqrt[m]{\frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}}\ .$$

В случае **b)**, например когда $|x_2| = |x_3|$, процесс квадрирования корней следует прекратить на некотором шаге k, если будут выполняться следующие соотношения: $a_0^{(k+1)} = \left(a_0^{(k)}\right)^2$, $a_1^{(k+1)} = \left(a_1^{(k)}\right)^2$, $a_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(a_2^{(k)}\right)^2$, $a_3^{(k+1)} = \left(a_3^{(k)}\right)^2$, …, $a_n^{(k+1)} = \left(a_n^{(k)}\right)^2$, а модули корней вычислять

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}}\ , |x_2| = |x_3| \approx \sqrt[2m]{\frac{a_3^{(k)}}{a_2^{(k)}}}\ ,\ldots, |x_n| \approx \sqrt[m]{\frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}}\ .$$

2. Уравнение (15) имеет **комплексные корни**, например $x_2 = re^{i\varphi}$, $x_3 = re^{-i\varphi}$.

При квадрировании корней признаком существования комплексных корней является то, что коэффициент $a_2^{(k)}$ будет менять знак после некоторого шага. Процесс следует прекратить, как только на некотором шаге k будут выполняться соотношения:

$$a_0^{(k+1)} = \left(a_0^{(k)}\right)^2,\ a_1^{(k+1)} = \left(a_1^{(k)}\right)^2,\ a_3^{(k+1)} = \left(a_3^{(k)}\right)^2, \ldots, a_n^{(k+1)} = \left(a_n^{(k)}\right)^2.$$

Модули корней исходного уравнения в этом случае можно вычислить следующим образом:

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}}\ ,\ r \approx \sqrt[m]{\frac{a_3^{(k)}}{a_1^{(k)}}}\ ,\ |x_4| \approx \sqrt[m]{\frac{a_4^{(k)}}{a_3^{(k)}}}\ , \ldots, |x_n| \approx \sqrt[m]{\frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}}\ .$$

Знаки действительных корней могут быть найдены при помощи подстановки их в исходное уравнение, а затем определяются корни x_2, x_3: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$, т.е. $x_1 + 2r\cos(\varphi) + x_4 \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$.

Из последнего соотношения находим $\cos(\varphi)$, затем находим $\sin(\varphi)=\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$ и окончательно находим корни $x_2 = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, $x_2 = r(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))$.

3. Исходное уравнение имеет **близкие по модулю корни**. В этом случае нахождение корней с заданной точностью потребует много шагов процесса квадрирования корней. Поэтому целесообразно методом Лобачевского корни найти приближенно, а уточнение провести методом последовательных приближений.

Пример. Найти корни уравнения методом Лобачевского $x^3-3x+1=0$.

Решение. Таблица вычислений действительных корней

Степени	x^3	x^2	x^1	x^0
1	1	0 $\left.\begin{matrix}0\\6\end{matrix}\right\}$	-3 $\left.\begin{matrix}9\\0\end{matrix}\right\}$	1
2	1	6 $\left.\begin{matrix}36\\-18\end{matrix}\right\}$	9 $\left.\begin{matrix}81\\-12\end{matrix}\right\}$	1
4	1	18 $\left.\begin{matrix}3.24\cdot10^2\\-1.38\cdot10^2\end{matrix}\right\}$	69 $\left.\begin{matrix}4.761\cdot10^3\\-0.036\cdot10^3\end{matrix}\right\}$	1
8	1	$1.860\cdot10^2$ $\left.\begin{matrix}3.460\cdot10^4\\-0.945\cdot10^4\end{matrix}\right\}$	$4.725\cdot10^3$ $\left.\begin{matrix}2.233\cdot10^7\\0\end{matrix}\right\}$	1
16	1	$2.515\cdot10^4$ $\left.\begin{matrix}6.325\cdot10^8\\-0.447\cdot10^8\end{matrix}\right\}$	$2.233\cdot10^7$ $\left.\begin{matrix}4.986\cdot10^{14}\\0\end{matrix}\right\}$	1
32	1	$5.878\cdot10^8$ $\left.\begin{matrix}3.455\cdot10^{17}\\-0.010\cdot10^{17}\end{matrix}\right\}$	$4.986\cdot10^{14}$ $\left.\begin{matrix}2.486\cdot10^{29}\\0\end{matrix}\right\}$	1
64	1	$3.445\cdot10^{17}$ $\left.\begin{matrix}1.187\cdot10^{35}\\0\end{matrix}\right\}$	$2.486\cdot10^{29}$ $\left.\begin{matrix}6.180\cdot10^{58}\\0\end{matrix}\right\}$	1
128	1	$1.187\cdot10^{35}$	$6.180\cdot10^{58}$	1

Останавливаясь на 64-й степени корней, получаем:

$$\begin{aligned}
&-x_1^{64}+3.445\cdot10^{17}=0,\\
&-3.445\cdot10^{17}x_2^{64}+2.486\cdot10^{29}=0,\\
&-2.486\cdot10^{29}x_2^{64}+1=0.
\end{aligned}\tag{19}$$

Решая (19) относительно неизвестных будем иметь следующие выражения:

$$x_1=\pm\sqrt[64]{3.445\cdot10^{17}},$$

$$x_2=\pm\sqrt[64]{\frac{2.486}{3.445}\cdot10^{12}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt[64]{\frac{1}{2.486}\cdot 10^{-29}}\ .$$

Логарифмируя полученные выражения, будем иметь

$$\lg|x_1| = \frac{1}{64}\cdot 17.53719 = 0.27402\ ;$$

$$\lg|x_2| = \frac{1}{64}\cdot 11.85831 = 0.18528\ ;$$

$$\lg|x_3| = \frac{1}{64}\cdot(-29.39550) = \bar{1}.54070\ ,$$

поэтому $x_1 = \pm 1.879$; $x_2 = \pm 1.532$, $x_3 = \pm 0.347$.

По правилу Декарта исходное уравнение имеет один отрицательный корень т два положительных корня, причем $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Поэтому наибольшим по модулю должен быть отрицательный корень: $x_1 = -1.879$; $x_2 = 1.532$, $x_3 = 0.347$.

6.6 Задачи и упражнения

Найти наименьший положительный корень уравнения. Начальное приближение найти графически. Используя итерационные методы, уточнить результат до четырех верных знаков.

6.5.1. $\mathrm{tg}(x) + x^2 - 1 = 0$;

6.5.2. $2^x - 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$;

6.5.3. $10\ln(x) - 3\cos(x) = 0$;

6.5.4. $\ln(x) - x^2 + 7x - 8 = 0$;

6.5.5. $\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{x} + 2 = 0$;

6.5.6. $\frac{\sqrt{x}}{3} - \mathrm{ctg}(x) = 0$;

6.5.7. $2\sqrt{x} - \frac{4}{x} = 0$;

6.5.8. $\arcsin(x) + 2x - 2 = 0$;

6.5.9. $\ln(x) - 5\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$;

6.5.10. $\arccos(x) - x^2 = 0$;

Найти положительные корни системы уравнений, считая, что корни принадлежат области:

$$\{\ 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 10\}.$$

Результат определить с четырьмя верными знаками.

6.5.11. $\begin{cases} \sin(x+y) - x^2 + y^2 - 4 = 0; \\ (x-y)^2 + xy^2 - 19 = 0. \end{cases}$

6.5.12. $\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{y}{2}\right)-\dfrac{x-y}{2}-1.3=0; \\ x-y+x^2+y^2-6.35=0. \end{cases}$

6.5.1.3. $\begin{cases} \cos(x+5y)-x-y^2+2.46=0; \\ y^2(2-x)-x^3=0. \end{cases}$

6.5.14. $\begin{cases} e^{xy}+x^2+y^2-5=0; \\ \left(x^2+y^2\right)^2-16\left(x^2-y^2\right)=0. \end{cases}$

6.5.14. $\begin{cases} \cos(x)(x^2-y)+2(x+y)-9=0; \\ 16x^2-y^2-4=0. \end{cases}$

6.5.15. $\begin{cases} \cos(x)(x^2-y)+2(x+y)-9=0; \\ 16x^2-y^2-4=0. \end{cases}$

6.5.16. $\begin{cases} \sin(x-0.5y)+x+y^2-5=0; \\ 16x^2-y^2-4=0. \end{cases}$

6.5.17. $\begin{cases} \cos(x-y)-xy+2=0; \\ x^2+xy-y^2+1.25=0. \end{cases}$

6.5.18. $\begin{cases} e^{x-3y}-y^2+x^2+3=0; \\ x^2+2y^2-9=0. \end{cases}$

6.5.19. $\begin{cases} \sin(x+2y)-x-y+10=0; \\ 3x^2-4y^2+xy+18=0. \end{cases}$

6.5.20. $\begin{cases} e^{x^2y}+x^2-120=0; \\ (x-y)^2-xy-20=0. \end{cases}$

Найти все корни алгебраического уравнения с четырьмя верными знаками.

6.5.21. $x^4-10.84x^3-22.41x^2+4.92x-32.52=0$.
6.5.22. $x^4+30.54x^3-1.4x^2+115.73x+9юх86=0$.
6.5.23. $x^4+8.99x^3+2.6x^2+119.55x+68.48=0$.
6.5.24. $x^4-7.15x^3-23.81x^2-6.93x+157.6=0$.
6.5.25. $x^4-10.64x^3+1.27x^2+130.43x+221.38=0$.
6.5.26. $x^4-56.83x^3-5.56x^2-24.69x-72.56=0$.
6.5.27. $x^4-19.82x^3+30.51x^2+64.1x-32.4=0$.
6.5.28. $x^4-9.01x^3-56.22x^2+104.42x-7.56=0$.
6.5.29. $x^4+13.15x^3+42.42x^2+55.2x+106.82=0$.
6.5.30. $x^4-15.71x^3-8.33x^2+41.57x-71.92=0$.

7. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\boxed{\qquad}, \qquad (20)$$

где A - квадратная матрица n-го порядка, а $\bar{x}, \bar{f}$ - вектор - столбцы, согласованные по размерности с матрицей A. Существует множество методов решения СЛАУ. Все их можно разделить на две группы, как показано на рис. 5.

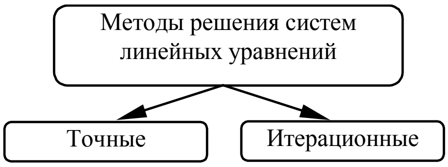


Рис. 5.

7.1 Точные методы

Точные методы позволяют найти точное решение за конечное число арифметических операций. Эти методы просты и универсальны, однако вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными, причем оценка погрешности корней в общем случае затруднительна. К ним относятся: метод Гаусса, метод квадратного корня, отражений и др. Эти методы применимы для систем порядка не больше 200.

7.2 Метод Гаусса (схема единственного деления)

Метод Гаусса основан на последовательном исключении неизвестных. Существуют различные схемы, реализующие этот метод. Рассмотрим схему единственного деления.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Предполагается, что определитель СЛАУ отличен от нуля.

Процесс получения решения СЛАУ по методу Гаусса состоит из двух последовательных этапов:

- прямой ход (процесс последовательного исключения неизвестных, т.е. приведения расширенной матрицы системы к "квази" треугольному виду)
- обратный ход (процесс получения решения из преобразованной упрощенной системы).

При решении СЛАУ уместно напомнить, какие преобразования называются элементарными:

1. Линейные операции над строками (умножение на число, отличное от нуля, элементов какой-либо строки и сложение с соответствующими элементами другой строки).
2. Перестановка строк.
3. Вычеркивание (отбрасывание) линейно зависимых и нулевых строк

Схема решения методом Гаусса следующей системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1,n}:$$

1. Переместим строки системы таким образом, чтобы

$$a_{11} = \max_k(|a_{k1}|) \text{ и } a_{11} \neq 0.$$

2. Делим первое уравнение системы на a_{11}:

$$x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

3. Умножаем полученное равенство на a_{k1}:

$$a_{k1}x_1 + a_{k1}\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j = a_{k1}\frac{b_1}{a_{11}},\ k = \overline{2,n}.$$

4. Вычитаем из k-ой строки полученное равенство:

$$\sum_{j=2}^{m}\left(a_{kj} - a_{k1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)x_j = b_k - a_{k1}\frac{b_1}{a_{11}}$$

или

$$,\ k = \overline{2,n}.$$

5. Далее процесс продолжаем до тех пор, пока система не будет приведена к право треугольному виду:

$$x_k + \sum_{j=j+1}^{n} a_{kj}^{k}x_j = b_k^k,\ k = \overline{1,n}.$$

6. В заключении осуществляем обратный ход метода Гаусса и находим неизвестные величина, начиная с последнего уравнения.

7.3 Метод отражений

Метод отражений применяется для решения систем с комплексно неособенной матрицей. В этом методе матрица A раскладывается на произведение двух матриц: унитарной матрицы и правой треугольной.

При реализации данного метода необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$\bar{\omega} = \chi\left(\bar{s} - \alpha\bar{e}\right),\ |\alpha| = \sqrt{\left|\left(\bar{s},\bar{s}\right)\right|},\ \chi = \frac{1}{\sqrt{2\left[|\alpha|^2 + |\alpha|\left|\left(\bar{s},\bar{e}\right)\right|\right]}}. \tag{21}$$

Итак, разложение комплексной матрицы A в произведение унитарной и правой треугольной происходит за несколько шагов.

ШАГ I.

В качестве вектора $\bar{s}$ выберем первый столбец матрицы A, т.е.

$$\bar{s} = \left(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}\right)',$$

а за $\bar{e}$ возьмем вектор

$$\bar{e} = (1,0,\ldots,0)'.$$

Воспользуемся соотношениями (21) для нахождения $\alpha, \chi, \bar{\omega}_1$. Построим матрицу

$$V_1 = E - 2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_1^*$$

и введем обозначение:

.

Матрица A_1 имеет вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

ШАГ II.

В качестве вектора $\bar{s}$ выберем

$$\bar{s} = \left(0, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{2ò}^{(1)}\right)',$$

а за $\bar{e}$ возьмем вектор

$$\bar{e} = (0,1,0,\dots,0)'.$$

Затем находим $\bar{\omega}_2$ и строим матрицу

$$V_2 = E - 2\bar{\omega}_2\bar{\omega}_2^*.$$

Обозначим $A_2 = V_2 A_1$.

Матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Продолжая этот процесс, получаем в итоге матрицу A_{n-1} имеющую право треугольный вид.

Рассмотрим, как находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом отражений.

Пусть требуется решить систему $A\bar{x} = \bar{f}$, где A - неособенная комплексная матрица.

Обозначим через A_0 расширенную матрицу системы

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ò1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn+1} \end{bmatrix} \text{ или } A_0 = \left[\bar{a}_1^{(0)},\dots,\bar{a}_{n+1}^{(0)}\right],$$

где $\bar{a}_{n+1}^{(0)} = (f_1,\dots,f_n)'$, $\bar{a}_k^{(0)} = (a_{1k},\dots,a_{nk})'$, $k = \overline{1,n}$.

Данная матрица преобразуется к правой треугольной с помощью матриц отражения.

$$A_{k+1} = V_{k+1}A_k \text{ или } \bar{a}_i^{(k+1)} = V_{k+1}\bar{a}_i^{(k)},\ k = \overline{0,n-i},\ i = \overline{1,n+1}.$$

При построении матрицы V_{k+1} в качестве векторов $\bar{s}$ и $\bar{e}$ возьмем векторы $\bar{s} = \left(0,\dots,0,a_{k+1\,k+1}^{(k)},a_{k+2\,k+1}^{(k)}\dots,a_{n\,k+1}^{(1)}\right)'$, $\bar{e} = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)'$.

После n-1 шага система $A\bar{x} = \bar{f}$ примет вид

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= a_{1n+1}^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= a_{2n+1}^{(n-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= a_{nn+1}^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{22}$$

Решение системы (22) находится по формулам

$$x_n = \frac{a_{n\,n+1}^{(n-1)}}{a_{n\,n}^{(n-1)}}, \qquad x_k = \frac{a_{k\,n+1}^{(n-1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{n\,i}^{(n-1)}x_i}{a_{k\,k}^{(n-1)}}. \tag{23}$$

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом отражений.

$$\begin{aligned} 2x_1 + (-9+4i)x_2 + (4-3i)x_3 &= 15-i \\ -(9+4i)x_1 + 6x_2 + (-1+2i)x_3 &= -22+26i \\ -(4+5i)x_1 - (1+2i)x_2 - 3x_3 &= -12+10i \end{aligned}$$

Решение. Пользуясь приведенным алгоритмом находим:

$$|\alpha| = \sqrt{|(\bar{s},\bar{s})|} = 11.916\,,\ \arg(\alpha_1) = -3.142\,,\ \alpha_1 = -11.961\,,$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2\left[|\alpha|^2 + |\alpha||(\bar{s},\bar{e})|\right]}} = 0.055\,,$$

$$\bar{\omega} = \chi(\bar{s} - \alpha\bar{e}) = \begin{bmatrix} 0.764 \\ -0.494 - 0.22i \\ -0.22 - 0.275i \end{bmatrix},$$

$$\bar{\omega}^* = \begin{bmatrix} 0.764 \\ -0.494 + 0.22i \\ -0.220 + 0.275i \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0.168 + 0i & 0.755 - 0.336i & 0.336 + 0.42i \\ 0.755 + 0.336i & 0.415 + 0.000439i & -0.338 - 0.175i \\ 0.336 + 0.42i & 0.338 - 0.175i & 0.752 \end{bmatrix}.$$

Повторив указанный процесс, приводим матрицу к квазитреугольному виду. Далее выполняется обратный ход по соотношениям (23). В результате получаем искомые значения:

x_1 = 7.24 - 5.246i,

x_2 = -0.596 - 0.3081i,

x_1 = 1.703 - 0.147i.

7.4 Итерационные методы

В приближенных или итерационных методах решение системы линейных алгебраических уравнений является пределом итерационной последовательности, получаемой с помощью этих методов. К ним относятся: метод простой итерации, метод Зейделя и др. Итерационные методы выгодны для системы специального вида, со слабо заполненной матрицей очень большого вида порядка $10^3 \div 10^5$. Для итерационных методов характерно то, что они требуют начальных приближений значений неизвестных, решение ищется в виде последовательности, постепенно улучшающихся приближений, и кроме того, итерационный процесс должен быть сходящимся. В вычислительной практике процесс итерации обычно продолжается до тех пор, пока два последовательных приближения не совпадут в пределах заданной точности.

7.5 Метод простой итерации

Прежде чем решать систему линейных алгебраических уравнений (20) приведем ее к нормальному виду:

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{g} \tag{24}$$

Запишем стационарное итерационное правило (т.е. матрица B и вектор $\bar{g}$ не зависят от номера итерации):

$$\bar{x}^{k+1} = B\bar{x}^k + \bar{g}\,.$$

Нестационарное итерационное правило получаем если матрица B и вектор $\bar{g}$ зависят от номера итерации:

$$\bar{x}^{k+1} = B_k\bar{x}^k + \bar{g}^k\,.$$

Стационарное итерационное правило называется методом простой итерации, и предел итерационной последовательности является точным решением системы (24) или (20).

Необходимые и достаточные условия сходимости итерационной последовательности: для того, чтобы метод простой итерации сходился при любом начальном приближении, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

В силу того, что проверить сформулированное выше условие достаточно сложно на практике применяют следующие достаточные признаки:

1) для того чтобы метод простой итерации сходился, достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы;
2) для того чтобы метод простой итерации сходился, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$\text{a) } \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1,\ i = \overline{1,n};$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1,\ j = \overline{1,n};$$

$$\text{c) } \sum_{i,j=1}^{n} \left|b_{ij}\right|^2 < 1.$$

Для определения скорости сходимости можно воспользоваться следующей теоремой: если какая-либо норма матрицы B, согласованная с данной нормой вектора, меньше единицы, то имеет место следующая оценка погрешности метода простой итерации:

$$\left\|\bar{x}^* - \bar{x}^k\right\| < \|B\|^k \cdot \left\|\bar{x}^k\right\| + \frac{\|B\|^k \cdot \|\bar{g}\|}{1 - \|B\|},$$

где $\bar{x}^*$ - точное решение система (20).

Другими словами, если выполняется условие доминирования диагональных элементов матрица A по строкам или столбцам:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right| \text{ или } \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \le \left|a_{jj}\right|.$$

В этом случае легко можно перейти от системы вида (20) к системе (24). Для этого разделим i – ое уравнение системы на a_{ii} и выразим x_i:

$$x_i = \frac{f_i}{a_{ii}} - \frac{a_{11}}{a_{ii}} x_1 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{ii}} x_n,$$

т.е. для матрицы B будет выполнено одно из условий сходимости, где

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации:

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -6, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение. Здесь модули диагональных коэффициентов 10, 5 и 4 системы значительно преобладают над остальными коэффициентами при неизвестных. Приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3 + 0.2x_2 + 0.1x_3, \\ x_2 = 1.2 + 0.2x_1 + 0.2x_3, \\ x_3 = 3 \quad + 0.5x_1 - 0.25x_2. \end{cases} \tag{25}$$

В качестве нулевых приближений принимаем значения:

$$x_1^{(0)} = 0.3,\ x_2^{(0)} = 1.2,\ x_3^{(0)} = 3.$$

Подставляя эти значения в правые части системы (25) получим первые приближения

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.3 + 0.2 \cdot 1.2 + 0.1 \cdot 3 = 0.84, \\ x_2^{(1)} = 1.2 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 3 = 1.86, \\ x_3^{(1)} = 3 \quad + 0.5 \cdot 0.3 - 0.25 \cdot 1.2 = 2.85. \end{cases}$$

Полученные значения

$$x_1^{(1)} = 0.84,\ x_2^{(1)} = 1.86,\ x_3^{(1)} = 2.85$$

опять подставляем в правые части (25) получаем новое приближение. Продолжая этот процесс, после седьмой итерации находим значения корней:

$$x_1^{(7)} = 1,\ x_2^{(7)} = 2,\ x_3^{(7)} = 3.$$

7.6 Метод Зейделя

В методе Зейделя система (20) также приводится к системе (24). Но при вычислении последующей компоненты вектора $\overline{x}^{(k+1)}$ используются уже вычисленные компоненты этого вектора. Вычислительное правило в скалярной форме запишется следующим образом:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i} b_{ij} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + g_i.$$

Установим связь между методом Зейделя и методом простой итерации. Для этого матрицу *B* представим в виде суммы двух матриц:

$$B = H + F,$$

где

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix};\ H = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Правило Зейделя в матричной форме перепишется в виде:

$$\overline{x}^{(k+1)} = H\overline{x}^{(k+1)} + F\overline{x}^{(k)} + \overline{g}$$

или

$$(E - H)\overline{x}^{(k+1)} = F\overline{x}^{(k)} + \overline{g};$$

$$\overline{x}^{(k+1)} = (E - H)^{-1} F\overline{x}^{(k)} + (E - H)^{-1}\overline{g},$$

т.е. метод Зейделя эквивалентен методу простой итерации с матрицей

$$(E - H)^{-1} F.$$

Исходя из полученной аналогии методов Зейделя и простой итерации, можно сформулировать следующий **признак сходимости метода Зейделя**:
для того чтобы метод Зейделя сходился, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы

$$(E - H)^{-1} F$$

по модулю были меньше единицы. Другими словами, чтобы метод Зейделя сходился, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\left|F + \lambda H - \lambda E\right| = 0$$

по модулю были меньше единицы, т.к.

$$\left|(E - H)^{-1} F - \lambda E\right| =$$

$$\left|(E - H)^{-1}(E - H)\left[(E - H)^{-1} F - \lambda E\right]\right| =$$

$$\left|(E - H)^{-1}\right|\left|F + \lambda H - \lambda E\right| =$$

$$\left|F + \lambda H - \lambda E\right| = 0\,.$$

Сформулируем **достаточный признак сходимости**: для того, чтобы метод Зейделя сходился, достаточно, чтобы выполнилось одно из условий:

$$1)\ \|B\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1;$$

$$2)\ \|B\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1;$$

$$3)\ \|B\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \left|b_{ij}\right|^2} < 1\,.$$

Процесс Зейделя сходится к единственному решению быстрее процесса простых итераций.

Пример. Методом Зейделя решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7, \\ 1.3x_1 - 0.2x_2 - 5.8x_3 = 1.4, \\ 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему к виду, удобному для итераций. Меняем местами в системе уравнения так, чтобы наибольший по модулю коэффициент уравнения оказался диагональным

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9, \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7, \\ 1.3x_1 - 0.2x_2 - 5.8x_3 = 1.4. \end{cases}$$

Т.к. для сходимости процесса Зейделя, модуль коэффициента, стоящего на главной диагонали, должен быть больше суммы модулей других коэффициентов. В преобразованной системе это условие выполняется.

Замечание. В тех случаях, когда это условие в исходной системе не выполняется, необходимо вместо отдельных уравнений данной системы записывать их удачные линейные комбинации, позволяющие получить нужный результат.

Приведем систему к нормальному виду с помощью следующих преобразований:

$$\begin{cases} 10x_1 - 2.4x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9, \\ 2.2x_1 + 10x_2 - 0.9x_2 + 4.4x_3 = 9.7, \\ 1.3x_1 - 0.2x_2 - 10x_3 + 4.2x_3 = 1.4. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 10x_1 = 1.9 + 2.4x_1 - 0.5x_2 - 2.4x_3, \\ 10x_2 = 9.7 - 2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.4x_3, \\ -10x_3 = 1.4 - 1.3x_1 + 0.2x_2 - 4.2x_3. \end{cases}$$

Разделив все коэффициенты все уравнений системы на десять, получим систему уравнений, эквивалентную исходной и удовлетворяющую условию сходимости процесса Зейделя:

$$\begin{cases} x_1 = 0.19 + 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3, \\ x_2 = 0.97 - 0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3, \\ x_3 = -0.14 + 0.13x_1 - 0.02x_2 - 0.42x_3. \end{cases} \tag{26}$$

В качестве нулевых приближений принимаем значения:

$$x_1^{(0)} = 0.19,\ x_2^{(0)} = 0/97,\ x_3^{(0)} = -0.14.$$

Подставляя эти значения в правые части системы (26) получим первые приближения

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.19 + 0.24 \cdot 0.19 - 0.05 \cdot 0.97 - 0.24 \cdot (-0.14) = 0.2207, \\ x_2 = 0.97 - 0.22 \cdot 0.19 + 0.09 \cdot 0.97 - 0.44 \cdot (-0.14) = 1.0703, \\ x_3 = -0.14 + 0.13 \cdot 0.19 - 0.02 \cdot 0.97 - 0.42 \cdot (-0.14) = -0.1915. \end{cases}$$

Полученные значения

$$x_1^{(1)} = 0.2207,\ x_2^{(1)} = 1.0703,\ x_3^{(1)} = -0.1915$$

опять подставляем в правые части (26) получаем новое приближение. Продолжая этот процесс, после седьмой итерации находим значения корней:

$$x_1^{(7)} = 0.2474,\ x_2^{(7)} = 1.1145,\ x_3^{(7)} = -0.2243.$$

7.7 Задачи и упражнения

Задание 1. Решить системы методом Гаусса, а также методом простой итерации и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, сравнить итерационные методы по числу итераций и по эффективности (трудность реализации метода, объем памяти, общие затраты времени) итерационные методы и метод Гаусса.

7.7.1. $$\begin{cases} -6.45x_1 + 7.11x_2 - 9.34x_3 + 7.78x_4 = -36; \\ 8.45x_1 + 6.23x_2 + 4.68x_3 + 0.91x_4 = -64.3; \\ -4.41x_1 + 6.51x_2 - 7.89x_3 + 0.63x_4 = -0.2; \\ 9.26x_1 + 9.37x_2 - 9.89x_3 + 9.49x_4 = 35.6. \end{cases}$$

7.7.2. $$\begin{cases} 6.54x_1 + 4.37x_2 + 0.92x_3 - 4.71x_4 = 96.1; \\ 6.21x_1 - 8.49x_2 + 7.72x_3 + 9.24x_4 = 91; \\ 6.96x_1 + 6.21x_2 + 3.18x_3 - 0.61x_4 = 87.2; \\ -7.43x_1 + 1.96x_2 + 4.53x_3 - 3.51x_4 = 78.2. \end{cases}$$

7.7.3. $$\begin{cases} -5.38x_1 - 9.31x_2 - 4.68x_3 - 3.99x_4 = -89.8; \\ 1.33x_1 + 7.35x_2 - 1.31x_3 - 3.96x_4 = -24.8; \\ 4.73x_1 - 9.22x_2 + 5.52x_3 + 6.31x_4 = -14.5; \\ 1.83x_1 - 1.85x_2 + 9.99x_3 - 1.86x_4 = 60.7. \end{cases}$$

7.7.4. $$\begin{cases} -4.92x_1 - 4.25x_2 + 0.84x_3 + 6.6x_4 = -18.7; \\ -2.56x_1 - 5.96x_2 + 1.48x_3 + 5.53x_4 = 62.7; \\ -2.99x_1 - 7.46x_2 - 0.44x_3 + 2.11x_4 = -56; \\ -8.32x_1 + 3.8x_2 + 5.48x_3 - 0.71x_4 = -93.3. \end{cases}$$

7.7.5. $\begin{cases} 1.77x_1 - 5.31x_2 + 6.46x_3 - 8.85x_4 = -52.3; \\ 7.62x_1 + 8.77x_2 + 6.4x_3 + 5.17x_4 = 40.7; \\ 1.58x_1 - 3.24x_2 + 8.34x_3 - 4.9x_4 = 88.5; \\ -6.56x_1 - 1.46x_2 + 1.98x_3 - 9.48x_4 = 29.2. \end{cases}$

7.7.6. $\begin{cases} -5.87x_1 - 7.28x_2 - 3.15x_3 - 0.42x_4 = 25.1; \\ 6.43x_1 - 3.98x_2 - 7.55x_3 - 1.53x_4 = 30.3; \\ 0.93x_1 + 9.41x_2 + 0.35x_3 - 0.23x_4 = -44.6; \\ -9.87x_1 - 0.09x_2 + 0.04x_3 + 9.96x_4 = 85.8. \end{cases}$

7.7.7. $\begin{cases} -0.07x_1 + 9.89x_2 - 0.17x_3 - 0.28x_4 = 0.1; \\ 9.55x_1 - 0.72x_2 - 1.16x_3 + 8.13x_4 = -0.3; \\ 3.03x_1 - 4.9x_2 + 2.08x_3 + 7.19x_4 = 99.8; \\ -0.72x_1 - 3.53x_2 + 5.75x_3 - 7.77x_4 = -0.5. \end{cases}$

7.7.8. $\begin{cases} 6.61x_1 + 5.03x_2 + 1.64x_3 - 3.32x_4 = 79.8; \\ 8.33x_1 - 4.99x_2 - 6.66x_3 - 1.65x_4 = -97.9; \\ 1.69x_1 - 9.95x_2 + 1.75x_3 + 1.8x_4 = 82; \\ -6.45x_1 + 5.36x_2 + 8.92x_3 + 4.29x_4 = 84.1. \end{cases}$

7.7.9. $\begin{cases} -1.03x_1 + 7.21x_2 - 3.82x_3 - 6.61x_4 = 32.1; \\ -0.43x_1 + 2.97x_2 - 7.46x_3 + 5.51x_4 = -24.9; \\ 8.06x_1 + 3.58x_2 + 1.65x_3 - 4.77x_4 = -92.8; \\ 6.88x_1 - 7.88x_2 + 9x_3 - 8.88x_4 = -17.6. \end{cases}$

7.7.10. $\begin{cases} -5.97x_1 - 3.33x_2 + 0.7x_3 + 7.38x_4 = -98.7; \\ -1.92x_1 - 4.54x_2 + 3.55x_3 + 0.01x_4 = -87.5; \\ 2.57x_1 + 1.59x_2 - 5.84x_3 + 5.75x_4 = -86.2; \\ 9.91x_1 + 5.66x_2 + 5.57x_3 + 1.24x_4 = -73.6. \end{cases}$

7.7.11. $\begin{cases} -3.64x_1 + 4.65x_2 - 8.99x_3 + 5.66x_4 = -21.5; \\ 6.68x_1 + 2.35x_2 - 0.97x_3 - 8.61x_4 = 2.1; \\ 0.43x_1 + 1.82x_2 - 7.75x_3 + 4.08x_4 = 80.7; \\ 6.34x_1 + 0.42x_2 - 3.24x_3 + 7.19x_4 = -17.1. \end{cases}$

7.7.12. $\begin{cases} 1.4x_1 + 7.68x_2 - 0.92x_3 - 3.23x_4 = -60.4; \\ 5.85x_1 - 7.38x_2 + 8.48x_3 - 8.89x_4 = -88.5; \\ 9.6x_1 - 9.28x_2 - 9.67x_3 - 8.95x_4 = -48.8; \\ -8.61x_1 - 7.55x_2 - 6.16x_3 - 3.71x_4 = -37.2. \end{cases}$

7.7.13. $\begin{cases} -0.44x_1 + 2.56x_2 - 7.87x_3 + 4.7x_4 = 1.3; \\ 6.84x_1 + 1.55x_2 - 1.6x_3 + 9.95x_4 = 64.3; \\ -1.65x_1 - 1.7x_2 + 6.66x_3 - 5.03x_4 = -34.4; \\ -8.37x_1 - 3.4x_2 - 1.77x_3 + 4.83x_4 = -70. \end{cases}$

7.7.14. $\begin{cases} -0.44x_1 + 2.56x_2 - 7.87x_3 + 4.7x_4 = 1.3; \\ 6.84x_1 + 1.55x_2 - 1.6x_3 + 9.95x_4 = 64.3; \\ -1.65x_1 - 1.7x_2 + 6.66x_3 - 5.03x_4 = -34.4; \\ -8.37x_1 - 3.4x_2 - 1.77x_3 + 4.83x_4 = -70. \end{cases}$

7.7.15. $\begin{cases} 9.86x_1 + 8.75x_2 + 8.61x_3 + 7.36x_4 = -69.3; \\ 5.98x_1 + 3.35x_2 - 0.67x_3 - 7.31x_4 = 79; \\ 2.03x_1 + 4.72x_2 - 3.24x_3 - 8.52x_4 = -90.3; \\ -1.75x_1 - 0.26x_2 + 7.99x_3 - 2.27x_4 = 88.8. \end{cases}$

7.7.16. $\begin{cases} 1.8x_1 - 5.57x_2 + 6.24x_3 - 9.33x_4 = -42.8; \\ 6.92x_1 + 7.59x_2 + 4.51x_3 + 2.11x_4 = 34.5; \\ -3.37x_1 + 8.75x_2 - 4.62x_3 - 5.87x_4 = 91.7; \\ -0.48x_1 + 3.66x_2 - 6.82x_3 + 6.84x_4 = 26.2. \end{cases}$

7.7.17. $\begin{cases} 0.68x_1 - 5.55x_2 + 5.13x_3 + 9.59x_4 = -99.8; \\ 4.73x_1 + 4.33x_2 - 0.94x_3 - 6.61x_4 = 68.7; \\ 2.46x_1 + 5.85x_2 - 1.69x_3 - 5.83x_4 = 69; \\ 2.49x_1 + 6.67x_2 - 0.83x_3 - 4.16x_4 = 37.7. \end{cases}$

7.7.18. $\begin{cases} 2.62x_1 - 0.64x_2 - 8.02x_3 + 1.35x_4 = 50.1; \\ 3.33x_1 - 5.32x_2 + 8.02x_3 - 7.3x_4 = -91.4; \\ -9.27x_1 - 6.56x_2 - 5.83x_3 - 2.39x_4 = 58.7; \\ 1.79x_1 + 9.4x_2 + 1.19x_3 + 0.6x_4 = 67.4. \end{cases}$

7.7.19. $\begin{cases} -9.21x_1 - 2.61x_2 - 1.81x_3 + 5.59x_4 = -82.1; \\ 6.21x_1 + 9.38x_2 - 6.83x_3 - 7.45x_4 = 24; \\ -4.27x_1 - 1.71x_2 + 4.02x_3 - 7.68x_4 = 41.9; \\ 6.35x_1 + 8.67x_2 + 5.02x_3 + 3.69x_4 = -34.1. \end{cases}$

7.7.20. $\begin{cases} -5.31x_1 + 8.25x_2 - 7.05x_3 - 8.79x_4 = -12.8; \\ -5.83x_1 - 4.62x_2 - 0.45x_3 + 4.94x_4 = -75.9; \\ -5.51x_1 + 9.44x_2 - 6.06x_3 - 6.62x_4 = 11.4; \\ -2.68x_1 + 0.7x_2 + 8.02x_3 - 1.28x_4 = 35.5. \end{cases}$

7.7.21. $\begin{cases} 9.96x_1 + 7.68x_2 + 7.64x_3 + 5.33x_4 = -32.5; \\ 2.97x_1 - 1.69x_2 - 8.71x_3 - 0.4x_4 = 54.8; \\ 0.89x_1 - 9.51x_2 + 1.39x_3 + 1.89x_4 = -77.7; \\ -6.71x_1 + 5.18x_2 + 6.47x_3 + 3.66x_4 = 77.2. \end{cases}$

Задание 2. Решить методом Гаусса и методом отражений следующие системы уравнений.

7.7.22. $\begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 16+38i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 17+25i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 1+25i. \end{cases}$

7.7.23. $\begin{cases}(1+i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=30-12i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=21+15i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=21+11i.\end{cases}$

7.7.24. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=61-i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=51-3i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=21+21i.\end{cases}$

7.7.25. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=26+34i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=13+17i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-1+23i.\end{cases}$

7.7.26. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=15+35i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=35+25i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=4+28i.\end{cases}$

7.7.27. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=55i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=-8+21i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-16+40i.\end{cases}$

7.7.28. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=40+67i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=15+33i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-8+41i.\end{cases}$

7.7.29. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=-40-67i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=-15-33i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=8-41i.\end{cases}$

7.7.30. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=68+16i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=40+18i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=37+17i.\end{cases}$

7.7.31. $\begin{cases}(1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=-6+23i;\\(8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=10i;\\(3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-16+3i.\end{cases}$

Задание 3. Выполните обращение матрицы A и решение системы AX=B методом Гаусса по любой из известных схем, ограничиваясь в записи чисел тремя знаками после запятой. Получите решение той же задачи в среде MatLab и сравните полученные результаты. Приняв найденное методом Гаусса решение за начальное приближение, выполните его уточнение до 4-5 знаков любым из итерационных методов.

7.7.32.

A				B
1	0.47	-0.11	0.55	.1.33
0.42	1	0.35	0.17	1.29
-0.25	0.67	1	0.36	2.11
0.54	-0.32	-0.74	1	0.10

0.63	1	0.11	0.34	2.08
0.17	1.18	-0.45	0.11	0.17
0.31	-0.15	1.17	-2.35	1.28
0.58	0.21	-3.45	-1.18	0.05

0.77	0.04	-0.21	0.18	1.24
-0.45	1.23	-0.06	0	-0.88
-0.26	-0.34	1.11	0	0.62
-0.05	0.26	-0.34	1.12	-1.17

0.79	-0.12	0.34	0.16	-0.64
-0.34	1.18	-0.17	0.18	1.42
-0.16	-0.34	0.85	0.31	-0.42
-0.12	0.26	0.08	0.75	0.83

-0.68	-0.18	0.02	0.21	-1.83
0.16	-0.88	-0.14	0.27	0.65
0.37	0.27	-1.02	-0.24	-2.23
0.12	0.21	-0.18	-0.75	1.13

-0.58	-0.32	0.03	0	-0.44
0.11	-1.26	-0.36	0	-1.42
0.12	0.08	-1.14	-0.24	0.83
0.15	-0.35	-0.18	0	1.42

-0.83	0.31	-0.18	0.22	1.71
-0.21	-0.67	0	0.22	-0.62
0.32	-0.18	-0.95	-0.19	0.89
0.12	0.28	-0.14	-1	-0.94

-0.87	0.27	-0.22	-0.18	-1.21
-0.21	-1	-0.45	0.18	0.33
0.12	0.13	-0.33	0.18	0.48
0.33	-0.41	0	-1	1.21

-0.81	-0.07	0.38	-0.21	0.81
-0.22	-0.92	0.11	0.33	0.64
0.51	-0.07	-0.81	-0.11	1.71
0.33	-0.41	0	-1	1.21

-1	0.22	-0.11	0.31	-2.7
0.38	-1	-0.12	0.22	1.5

0.17	-0.21	0.31	-1	0.17

-0.93	-0.08	0.11	-1.18	0.51
0.18	-0.48	0	0.21	-1.17
0.13	0.31	-1	-0.21	1.02
0.08	0	-0.33	-0.72	0.28

-0.95	-0.06	-0.12	0.14	2.17
0.04	-1.12	0.08	0.11	1.4
0.11	0.12	0	1.03	0.8
0.34	0.08	-1.06	0.14	2.1

0	-0.19	0.27	-0.88	1.2
-0.33	-1	-0.07	0.21	0.92
0.11	0	1.03	-0.42	0.92
-0.92	-0.03	0	-0.04	1.2

-0.88	-0.23	0.25	-0.16	1.24
0.33	0.03	-0.84	-0.32	-1.15
0.14	-0.66	-0.18	0.24	0.89
0.12	-0.05	0	-0.85	0.57

0.12	-1	0.32	-0.18	0.72
0.08	-0.12	-0.77	0.32	0.58
0.25	0.22	0.14	-1	-1.56
-0.77	-0.14	0.06	-0.12	-1.21

-0.86	0.23	0.18	0.17	1.42
0.12	-1.14	0.08	0.09	0.83
0.16	0.24	-1	-0.35	-1.21
0.23	-0.08	0.05	-0.75	-0.65

76	21	6	-34	-142
12	-114	8	9	83
16	24	-100	-35	-121
23	-8	5	-75	85

-83	27	-13	-11	142
5	-68	13	24	26
9	54	127	36	23
13	27	34	156	49

1	2	3	9	1.11
2	1	9	4	1.16

3	9	1	4	1.24
9	1	3	4	1.55

-1	0.28	-0.17	0.06	-21
0.52	-1	0.12	0.17	117
0.17	-0.18	-0.79	0	0.81
0.11	0.22	0.03	-0.95	-0.72

76	21	6	-34	142
12	-114	8	9	83
16	24	-100	35	121
23	-8	5	-75	85

-83	27	-13	-11	142
5	-68	13	24	26
9	54	127	36	23
13	27	34	156	49

25	3	5	4	1.11
5	4	3	25	1.16
3	25	4	5	1.24
4	5	25	3	1.55

0.12	-1	0.32	-0.18	0.72
0.08	-0.12	-0.77	0.32	0.58
0.25	0.02	0.14	-1	-1.56
-0.77	-0.14	0.06	-0.12	-1.21

-0.86	0.23	0.18	0.17	1.42
0.12	-1.14	0.08	0.09	0.83
0.16	0.24	-1	-0.35	-1.21
0.23	-0.08	0.05	-0.75	-0.65

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632с.
2. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование MATHLAB, 3-е издание.: Пер. с англ.- М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. - 720 с.
3. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учебное пособие для вузов. - . М.: Высшая школа, 2001 г. - 382 с.
4. Практикум по численным методам/ Под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во: Томского государственного университета, 1979. - 212 с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.,1966г.- 664 с.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 535 с.
7. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука. 1989.
9. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука, т.I, 1966 - 632 с.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978 г., 512 с.
11. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1982 . - 342 с.