

Томский государственный университет систем  
управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра моделирования и системного анализа (МиСА)

Александр Николаевич Пономарев  
Бобенко Надежда Георгиевна

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ

Томск 2014

А.Н. Пономарев, Н.Г. Бобенко

Материаловедение / Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Кафедра моделирования и системного анализа, 2014. – 62 с.

В методические рекомендации включены два задания по разделу «статика», три задания по разделу «кинематика» и два задания по разделу «динамика». Каждое задание содержит 30 вариантов, часть схем заимствована из "Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике" под общей редакцией проф. А.А.Яблонского. Приведены примеры выполнения всех заданий с пояснениями.

© Пономарев А.Н., Бобенко Н.Г. 2014.

© ТУСУР, Кафедра МиСА, 2014.

## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| ЗАДАНИЕ С-2 Определение реакций опор составной конструкции. ....                           | 4  |
| ЗАДАНИЕ С-5 Равновесие тел с учетом сил трения.....  | 14 |
| ЗАДАНИЕ К-2 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения                        | 23 |
| ЗАДАНИЕ К-3 Определение скоростей и ускорений точек тела .....                             | 32 |
| Задание К-5 Определение скоростей с помощью узла скоростей.....                            | 38 |
| ЗАДАНИЕ Д-1 Интегрирование дифференциальных уравнений движения<br>материальной точки ..... | 46 |
| ЗАДАНИЕ Д-3 Теорема об изменении кинетического момента механической<br>системы.....        | 53 |

## ЗАДАНИЕ С-2 Определение реакций опор составной конструкции.

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С заданной составной конструкции. Схемы конструкции представлены на рис. С-2.1 - С-2.5, а необходимые данные - в таблице С-2.

Таблица С-2

| №№<br>п/п | $P$ ,<br>кН | $M$ ,<br>кН·м | $q$ ,<br>кН/м | $a$ ,<br>м | $\alpha$ ,<br>град. | $\beta$ ,<br>град. |
|-----------|-------------|---------------|---------------|------------|---------------------|--------------------|
| 1         | 10          | 5             | 1,4           | 1,0        | 45                  | 30                 |
| 2         | 12          | 8             | 1,0           | 2,0        | 60                  | 15                 |
| 3         | 15          | 4             | 0,8           | 1,5        | 30                  | 15                 |
| 4         | 14          | 6             | 1,8           | 1,0        | 75                  | 30                 |
| 5         | 20          | 4             | 1,4           | 2,0        | 60                  | 15                 |
| 6         | 16          | 10            | 1,2           | 1,0        | 30                  | 15                 |
| 7         | 18          | 8             | 1,6           | 1,5        | 60                  | 30                 |
| 8         | 20          | 12            | 2,2           | 1,0        | 75                  | 30                 |
| 9         | 22          | 6             | 1,2           | 2,0        | 45                  | 30                 |
| 10        | 30          | 8             | 2,4           | 1,5        | 30                  | 15                 |
| 11        | 10          | 5             | 1,4           | 1,0        | 45                  | 30                 |
| 12        | 12          | 8             | 1,0           | 2,0        | 60                  | 15                 |
| 13        | 15          | 4             | 0,8           | 1,5        | 30                  | 15                 |
| 14        | 14          | 6             | 1,8           | 1,0        | 75                  | 30                 |
| 15        | 20          | 4             | 1,4           | 2,0        | 60                  | 15                 |
| 16        | 16          | 10            | 1,2           | 1,0        | 30                  | 15                 |
| 17        | 18          | 8             | 1,6           | 1,5        | 60                  | 30                 |
| 18        | 20          | 12            | 2,2           | 1,0        | 75                  | 30                 |
| 19        | 22          | 6             | 1,2           | 2,0        | 45                  | 30                 |
| 20        | 30          | 8             | 2,4           | 1,5        | 30                  | 15                 |
| 21        | 10          | 5             | 1,4           | 1,0        | 45                  | 30                 |
| 22        | 12          | 8             | 1,0           | 2,0        | 60                  | 15                 |
| 23        | 15          | 4             | 0,8           | 1,5        | 30                  | 15                 |
| 24        | 14          | 6             | 1,8           | 1,0        | 75                  | 30                 |
| 25        | 20          | 4             | 1,4           | 2,0        | 60                  | 15                 |
| 26        | 16          | 10            | 1,2           | 1,0        | 30                  | 15                 |
| 27        | 18          | 8             | 1,6           | 1,5        | 60                  | 30                 |
| 28        | 20          | 12            | 2,2           | 1,0        | 75                  | 30                 |
| 29        | 22          | 6             | 1,2           | 2,0        | 45                  | 30                 |
| 30        | 30          | 8             | 2,4           | 1,5        | 30                  | 15                 |

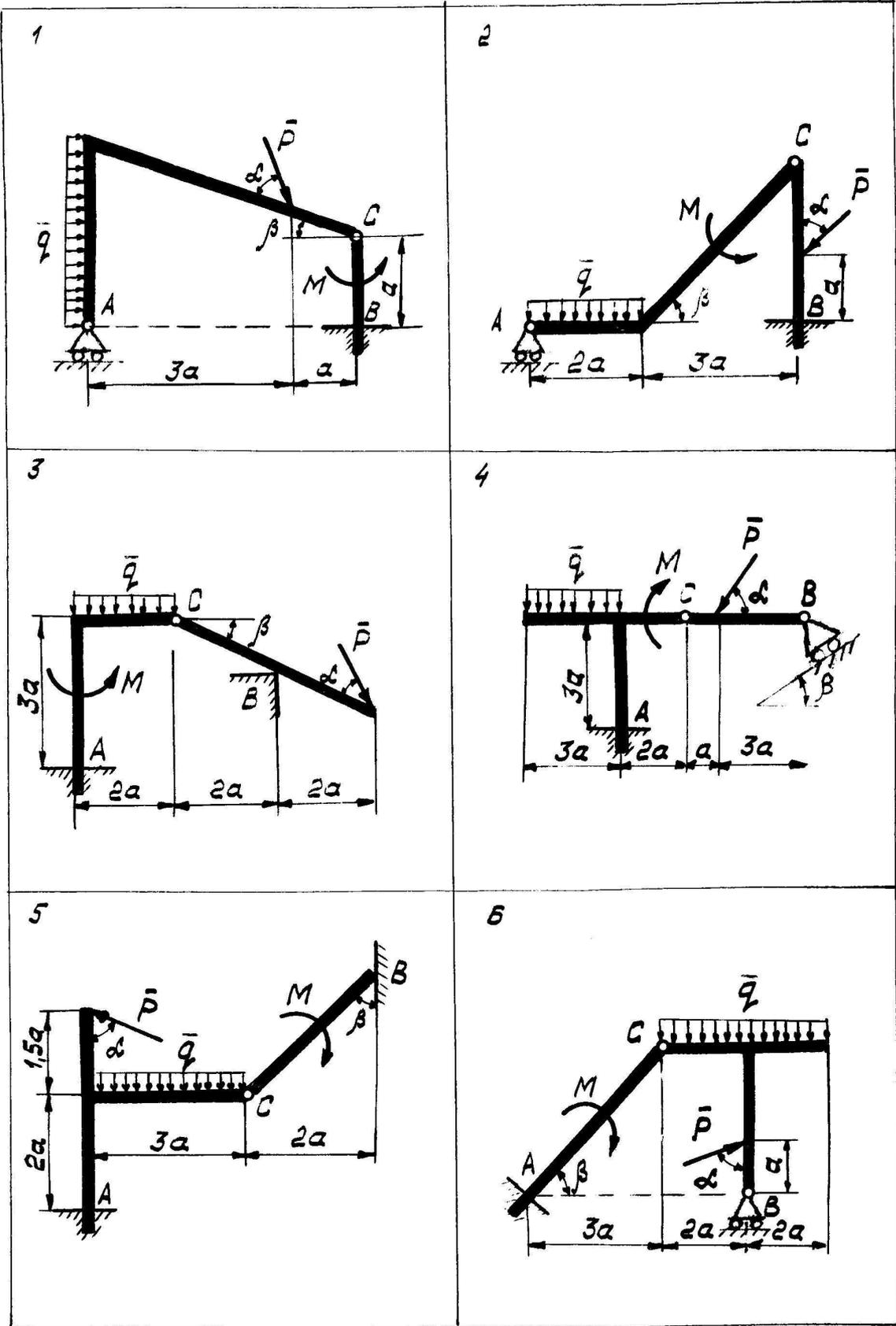


Рис. С-2.1

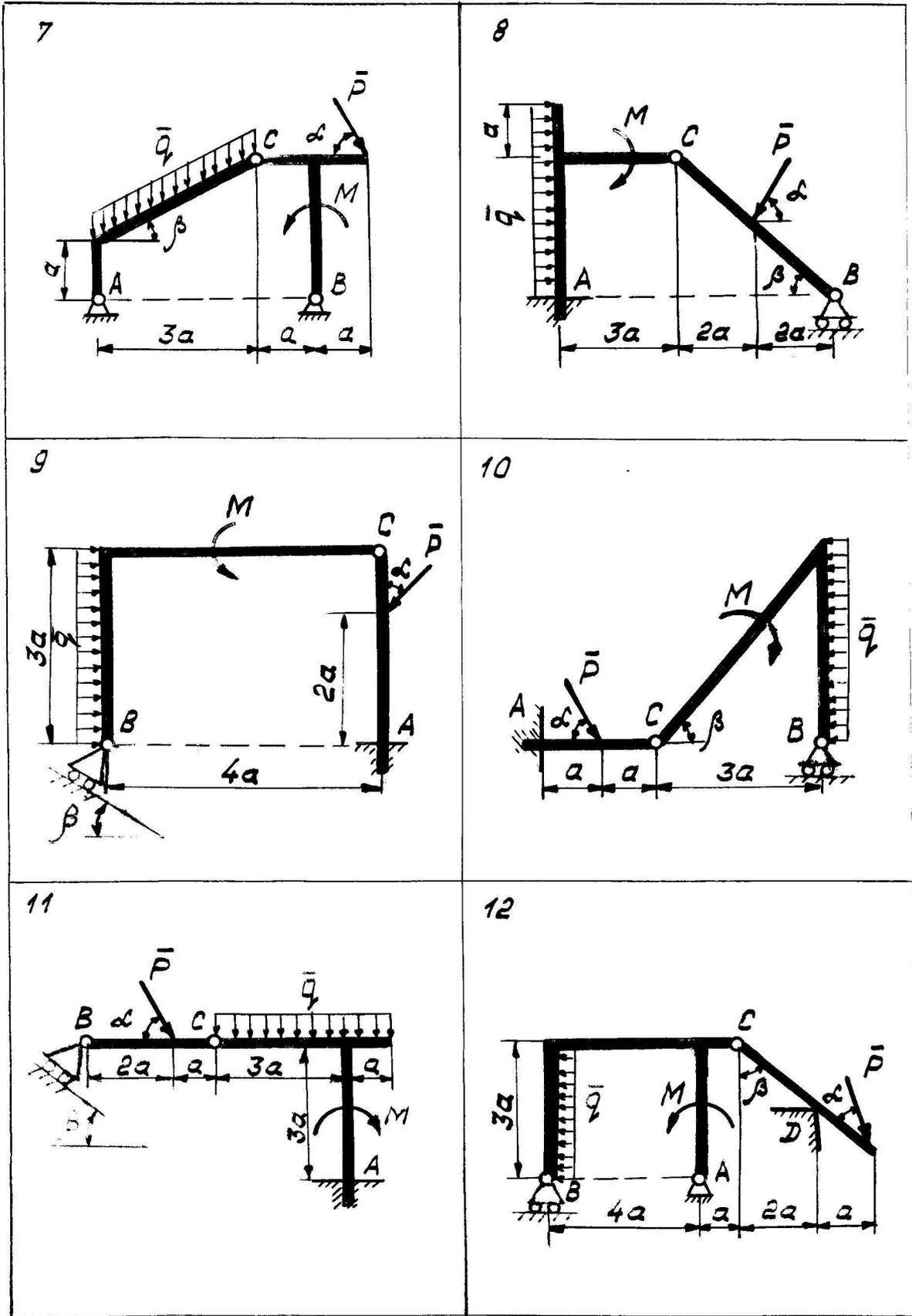


Рис. С-2.2

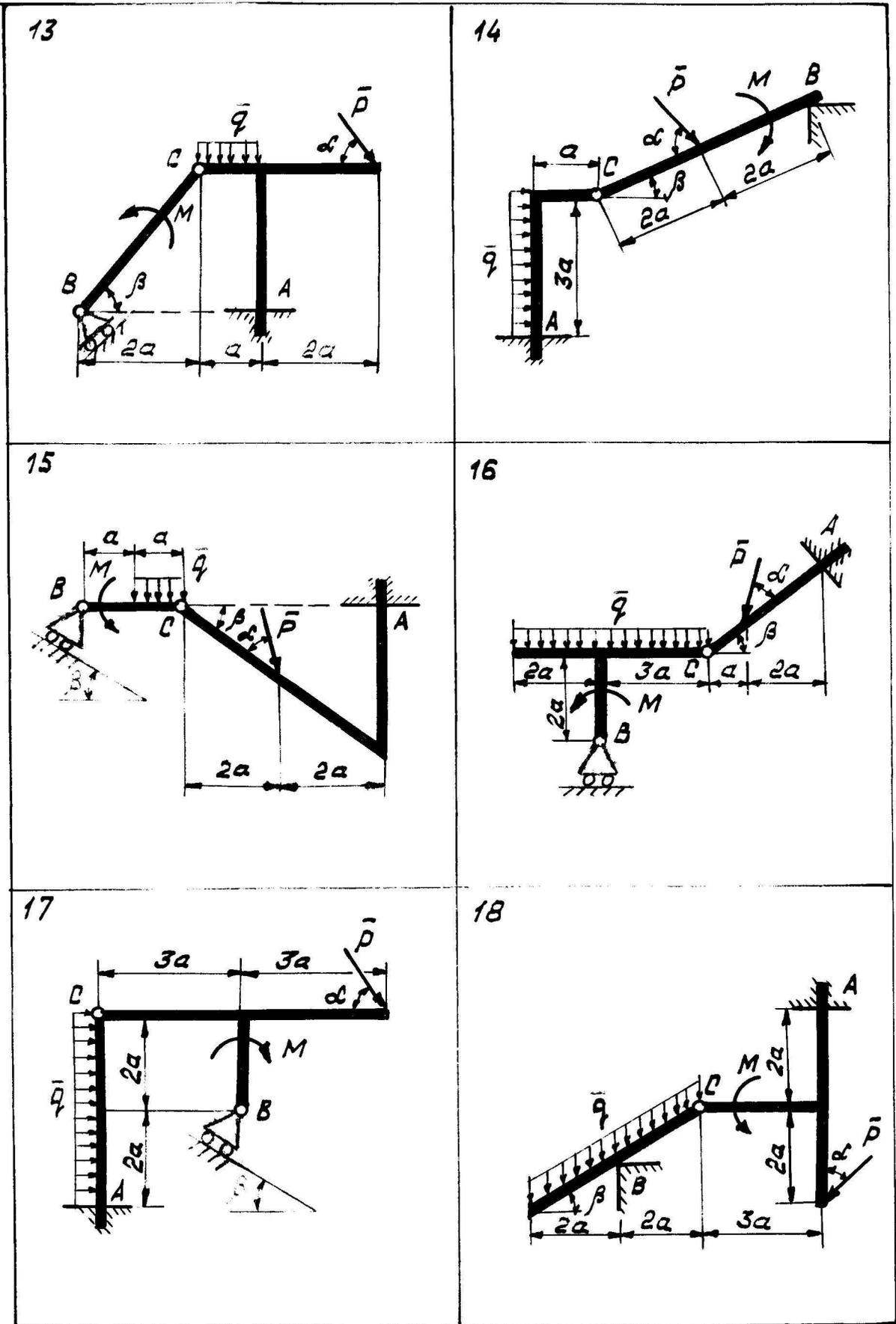
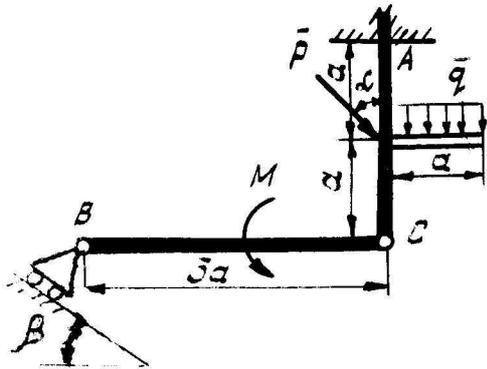
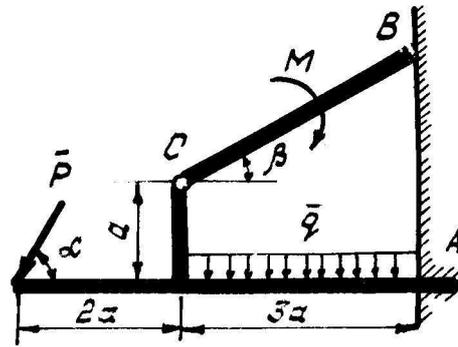


Рис. С-2.3

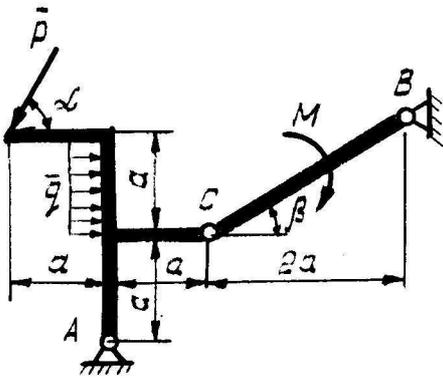
19



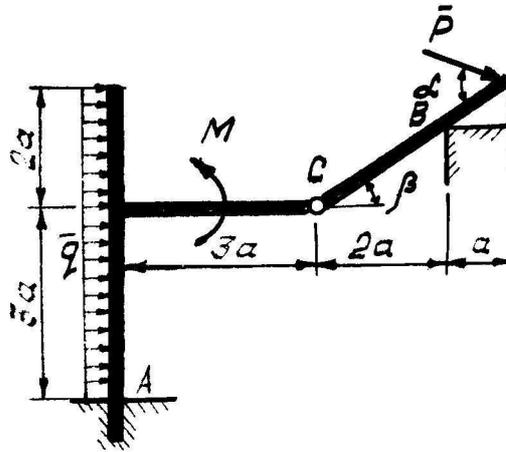
20



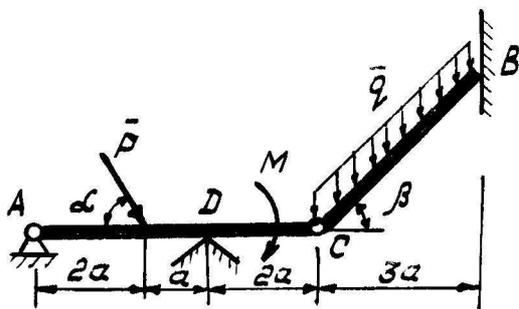
21



22



23



24

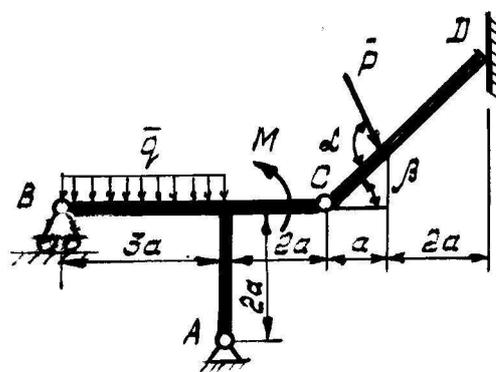


Рис. С-2.4

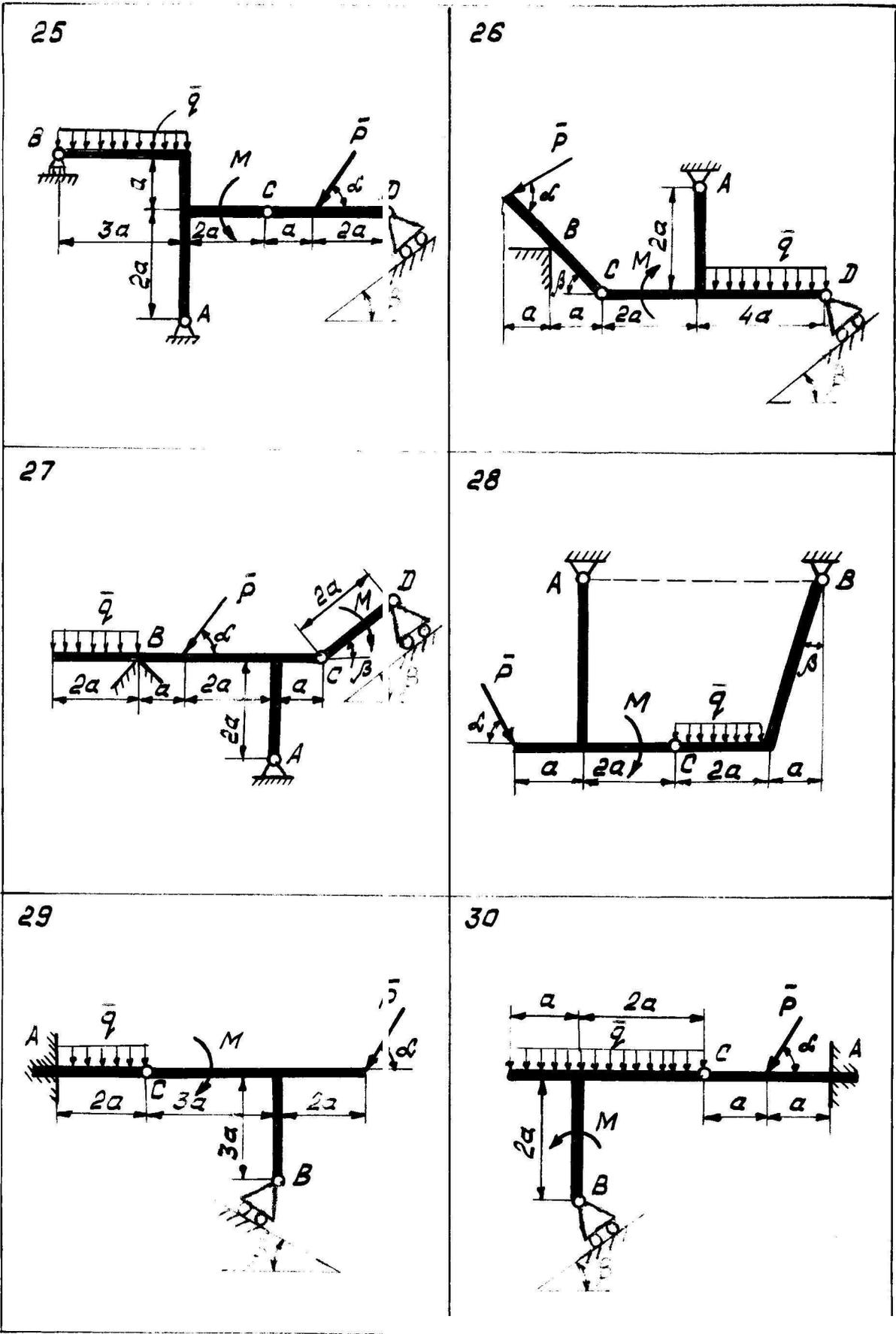


Рис. С-2.5

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис. С-2.6а);  $P = 8 \text{ кН}$ ;  $M = 20 \text{ кНм}$ ;  $q = 2 \text{ кН/м}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\epsilon = 30^\circ$ . Определить реакции опор А и В и давление в промежуточном шарнире С.

## РЕШЕНИЕ

Мысленно освобождаемся от связей, наложенных на каждое из тел, прикладывая при этом соответствующие реакции. Рассматриваем системы уравновешивающихся сил, приложенных к каждому телу в отдельности.

На первое тело (рис. С-2.6б) действуют: сила  $P$ , пара сил с моментом  $M$ , реакция опоры А и давление балки CD в точке С. Реакция жесткой заделки А представляется силами  $X_A$ ,  $Y_A$  и парой с моментом  $M$ , а давление балки CD - составляющими  $X_C$  и  $Y_C$ . Указанные силы расположены на плоскости произвольным образом, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad X_A + X_C - P \cdot \cos \alpha = 0 ; \quad (1)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad Y_A + Y_C - P \cdot \sin \alpha = 0 ; \quad (2)$$

$$\sum_K m_0(\vec{F}_K) = 0 ; \quad X_A \cdot OA + M_A + Y_C \cdot OC - M + P \cdot OC = 0 ; \quad (3)$$

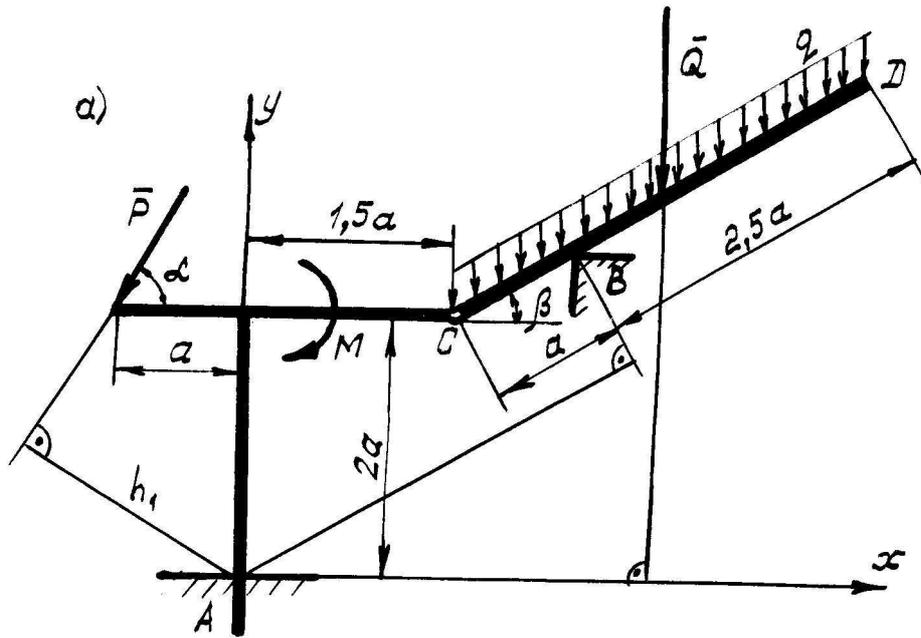
$$OA = 2 \cdot a = 2 \text{ м} , \quad OC = 1.5 \cdot a = 1.5 \text{ м} ,$$

$$OK = a \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87 \text{ м} .$$

На второе тело (рис. С-2.6в) действуют: распределенные силы интенсивности  $q$ , реакция опоры В и давление первого тела в точке С. Равномерно распределенные силы заменяем их равнодействующей  $Q$ , приложенной в середине участка CD и направленной по вертикали вниз. Ее модуль определяется по формуле:

$$Q = q \cdot CD = 2 \cdot 3,5 = 7 \text{ кН}.$$

Реакция  $N_B$  опоры В перпендикулярна к балке CD, а давление первого тела представляется составляющими  $X'_C$  и  $Y'_C$ . Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия



б)

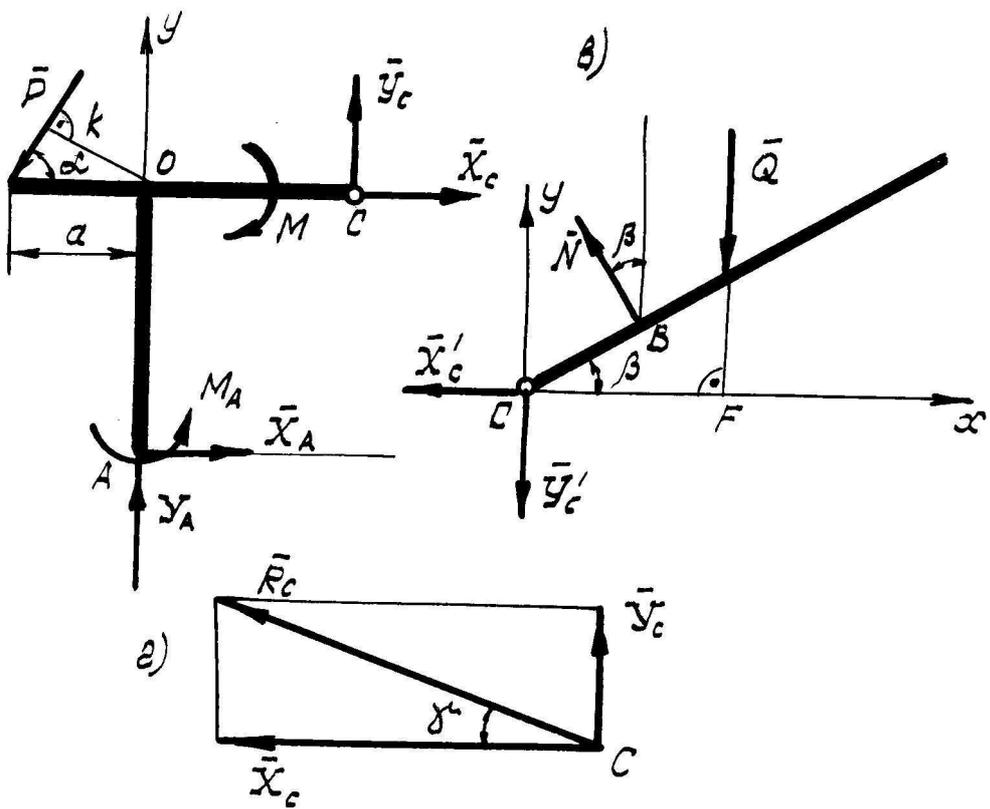


Рис. С-2.6

$$Y'_C = Y_C \quad \vec{Y}'_C \uparrow \downarrow \vec{Y}_C \quad \vec{X}'_C \uparrow \downarrow \vec{X}_C$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к балке CD имеют вид:

$$-X'_C - N_B \cdot \sin \beta = 0 \quad ; \quad (4)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 \quad -Y'_C + N_B \cdot \cos \beta - Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum_K m_C(\vec{F}_K) = 0 \quad N_B \cdot CB - Q \cdot CF = 0 \quad (6)$$

$$CB = a = 1 \text{ м} \quad CF = \frac{CD}{2} \cdot \cos \beta = \frac{3.5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.52 \text{ м.}$$

Уравнения равновесия (1)-(6) образуют полную систему уравнений, откуда определяются все шесть неизвестных величин:  $X_d, Y_d, M_d, X_c, Y_c, N_B$ . Из уравнения (6) находим

$$N_B = Q \cdot \frac{CF}{CB} = 7 \cdot \frac{1.52}{1} = 10.64 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$Y'_C = N_B \cdot \cos \beta - Q = 10.64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 2.21 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4)

$$X'_C = -N_B \sin \beta = -10.64 \cdot \frac{1}{2} = -5.32 \text{ кН.}$$

Отрицательный знак указывает, что в действительности сила  $X'_c$  (соответственно и  $X_c$ ) будет направлена в сторону противоположную принятой. Истинные направления сил  $X_c$  и  $Y_c$ , представляющих собой составляющие давления  $R_c$  балки CD на первое тело конструкции, показаны на рис. С-2.6г.

Модуль  $R_c$  и угол определяются по формулам:

$$R_c = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2} = \sqrt{(5.32)^2 + (2.21)^2} = 5.76 \text{ кН,}$$

Далее из уравнения (1) находим

$$X_A = P \cdot \cos \alpha - X_c = 8 \cdot \frac{1}{2} + 5.32 = 9.32 \text{ кН.}$$

$$\gamma = \arctg \frac{|Y_c|}{|X_c|} = \arctg 0.4154 = 22^\circ 34'.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = P \cdot \sin \alpha - Y_C = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2.21 = 4.72 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$\begin{aligned} M_A &= -X_A \cdot OA - Y_C \cdot OC + M - P \cdot OK = \\ &= -9.32 \cdot 2 - 2.21 \cdot 1.5 + 20 - 8 \cdot 0.87 = -8.92 \text{ кН}\cdot\text{м.} \end{aligned}$$

Отрицательный знак указывает, что направление вращения пары в опоре А в действительности противоположно выбранному.

### ЗАДАНИЕ С-5 Равновесие тел с учетом сил трения

Определить, при каких значениях силы  $F$  возможно равновесие конструкции, если коэффициент трения скольжения между тормозной колодкой и касающимся с ней телом равен  $\mu$ . Шириной колодки пренебречь, считая контакт точечным. Определить также реакции опор  $O, A, B, C, D$ , соответствующие предельному состоянию равновесия конструкции. Трением в шарнирах и опорах пренебречь. Схемы вариантов приведены на рис.26-30, а необходимые данные - в таблице 5.

Таблица 5

| №№ п/п | $P, \text{кН}$ | $Q, \text{кН}$ | $a, \text{м}$ | $b, \text{м}$ | $l, \text{м}$ | $\alpha$ | $F$  |
|--------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------|------|
| 1      | 0.1            | 0.4            | 0.5           | 0.7           | 0.03          | 45       | 0.10 |
| 2      | 0.2            | 0.6            | 0.6           | 0.4           | —             | 30       | 0.20 |
| 3      | 0.3            | 0.8            | 0.8           | 0.2           | 0.06          | 60       | 0.25 |
| 4      | 0.4            | 0.5            | 0.4           | 0.5           | 0.08          | 30       | 0.15 |
| 5      | 0.5            | 0.9            | 0.3           | 0.7           | 0.04          | 60       | 0.10 |
| 6      | 0.6            | 1.0            | 0.2           | 0.6           | —             | 45       | 0.25 |
| 7      | 0.4            | 1.2            | 0.7           | 0.2           | 0.06          | 30       | 0.20 |
| 8      | 0.3            | 1.4            | 0.8           | 0.4           | —             | 60       | 0.15 |
| 9      | 0.5            | 1.6            | 0.5           | 0.3           | —             | 45       | 0.20 |
| 10     | 0.3            | 1.2            | 0.6           | 0.3           | 0.08          | 30       | 0.25 |
| 11     | 0.1            | 0.4            | 0.5           | 0.7           | 0.03          | 45       | 0.10 |
| 12     | 0.2            | 0.6            | 0.6           | 0.4           | —             | 30       | 0.20 |
| 13     | 0.3            | 0.8            | 0.8           | 0.2           | —             | 60       | 0.25 |
| 14     | 0.4            | 0.5            | 0.4           | 0.5           | 0.08          | 30       | 0.15 |
| 15     | 0.5            | 0.9            | 0.3           | 0.7           | —             | 60       | 0.10 |
| 16     | 0.6            | 1.0            | 0.2           | 0.6           | 0.05          | 45       | 0.25 |
| 17     | 0.4            | 1.2            | 0.7           | 0.2           | 0.9           | 30       | 0.20 |
| 18     | 0.3            | 1.4            | 0.8           | 0.4           | 0.02          | 60       | 0.15 |
| 19     | 0.5            | 1.6            | 0.5           | 0.3           | 0.08          | 45       | 0.20 |
| 20     | 0.3            | 1.2            | 0.6           | 0.3           | —             | 30       | 0.25 |
| 21     | 0.1            | 0.4            | 0.5           | 0.7           | 0.03          | —        | 0.10 |
| 22     | 0.2            | 0.6            | 0.6           | 0.4           | 0.04          | —        | 0.20 |
| 23     | 0.3            | 0.8            | 0.8           | 0.2           | 0.06          | 45       | 0.25 |
| 24     | 0.4            | 0.5            | 0.4           | 0.5           | 0.08          | 30       | 0.15 |
| 25     | 0.5            | 0.9            | 0.3           | 0.7           | 0.04          | 30       | 0.10 |
| 26     | 0.6            | 1.0            | 0.2           | 0.6           | 0.05          | 60       | 0.25 |
| 27     | 0.4            | 1.2            | 0.7           | 0.2           | 0.06          | 45       | 0.20 |
| 28     | 0.3            | 1.4            | 0.8           | 0.4           | 0.02          | 30       | 0.15 |
| 29     | 0.5            | 1.6            | 0.5           | 0.3           | 0.08          | 60       | 0.20 |
| 30     | 0.3            | 1.2            | 0.6           | 0.3           | 0.08          | 45       | 0.25 |

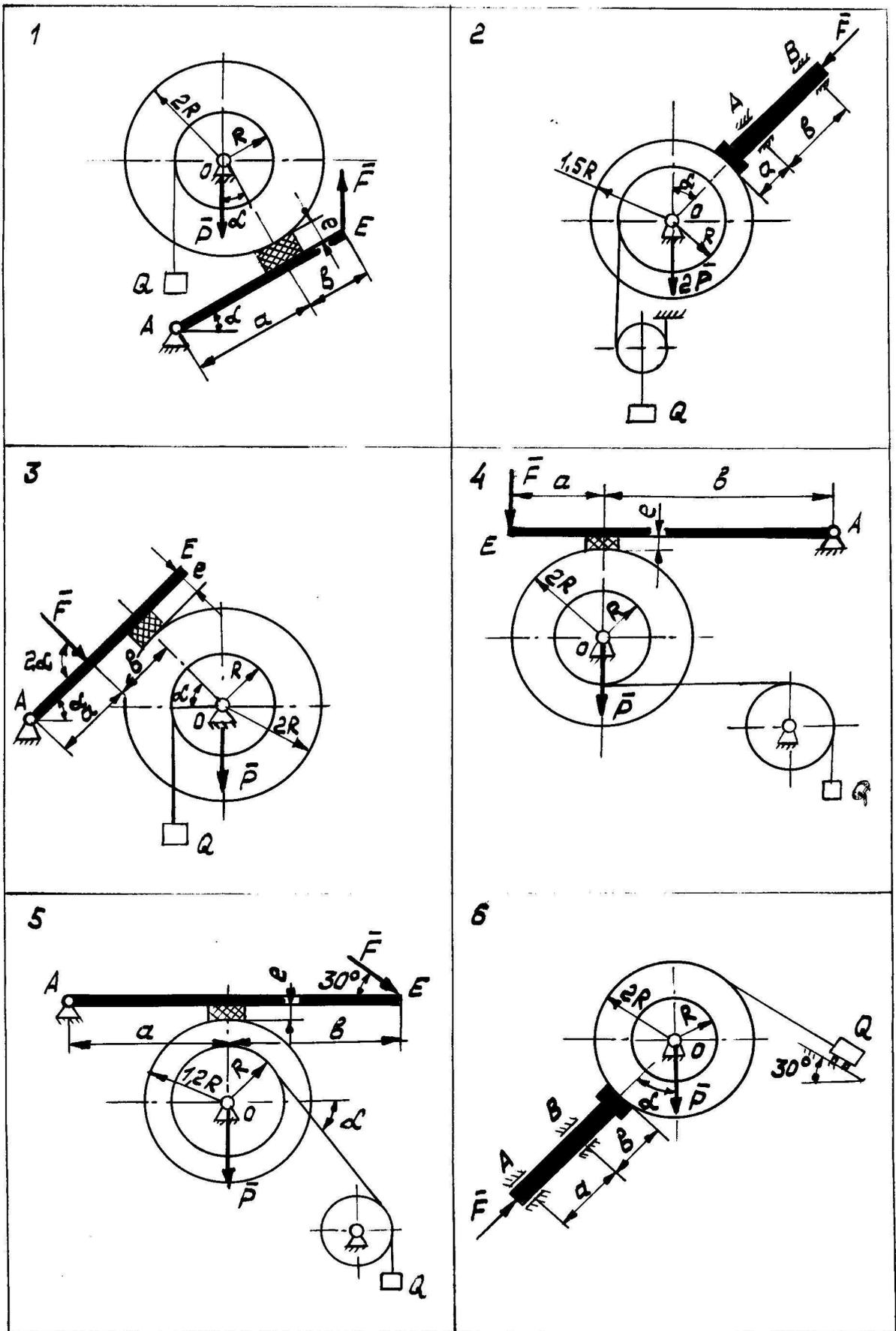


Рис. С-5.1

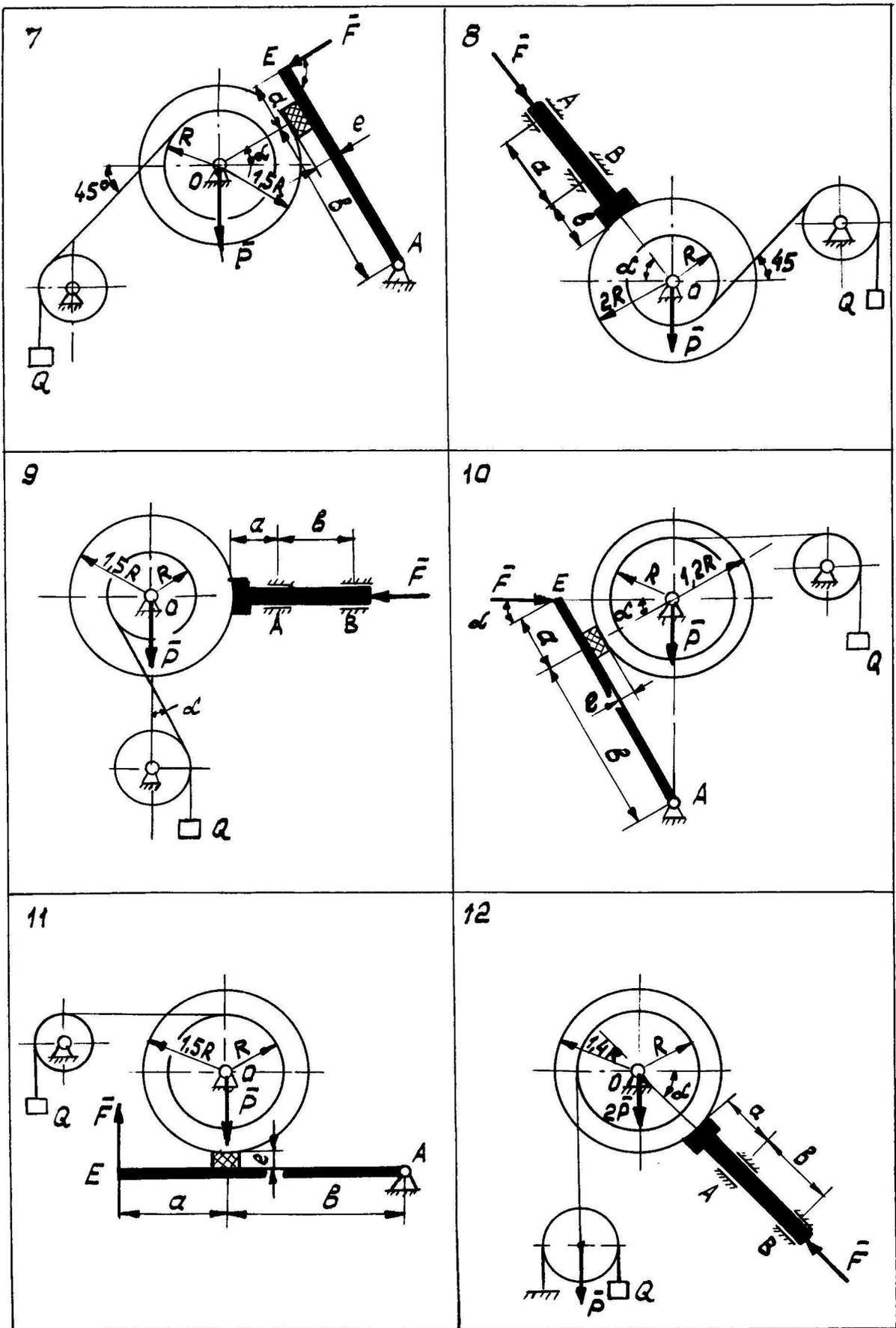


Рис. С-5.2

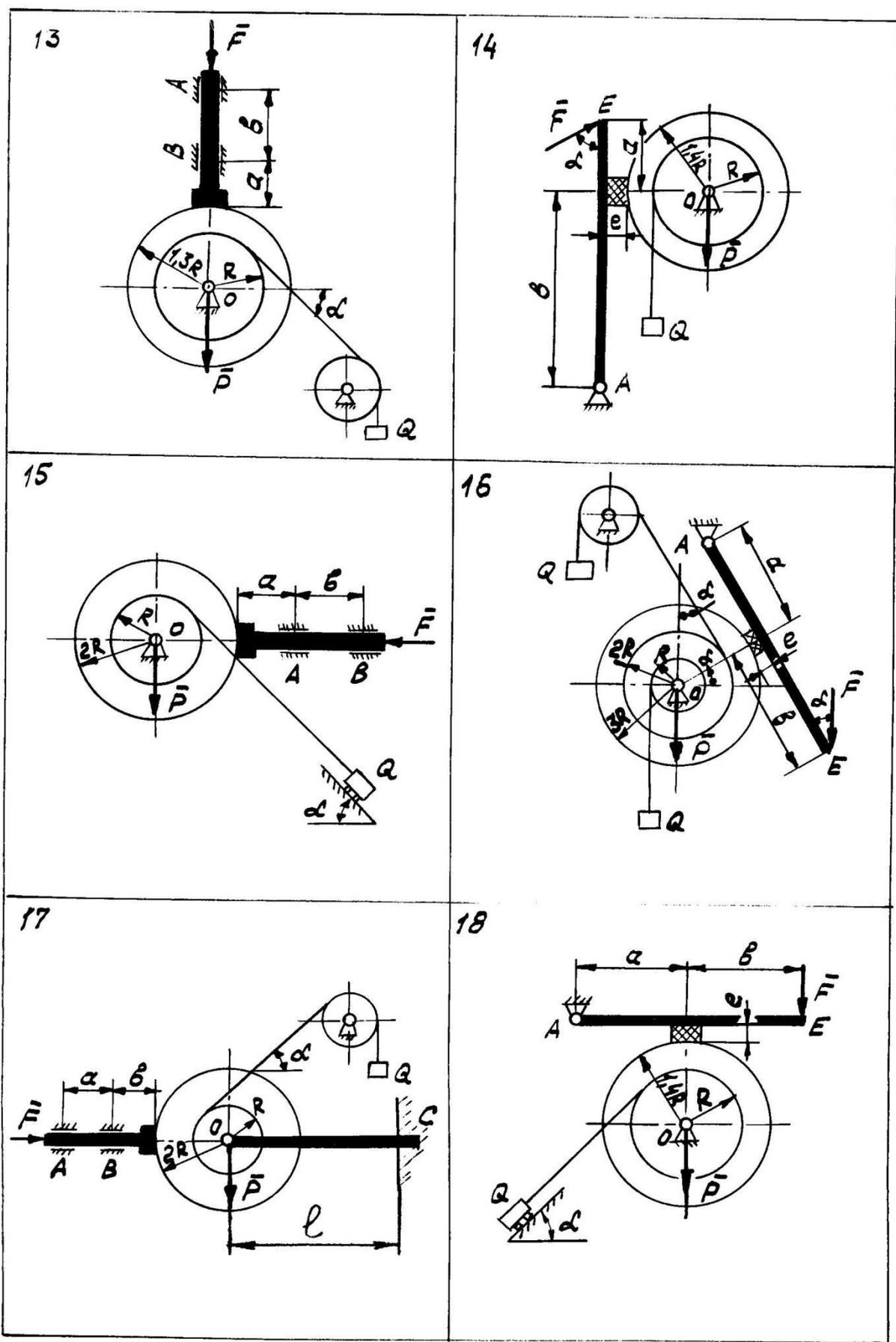


Рис. С-5.3

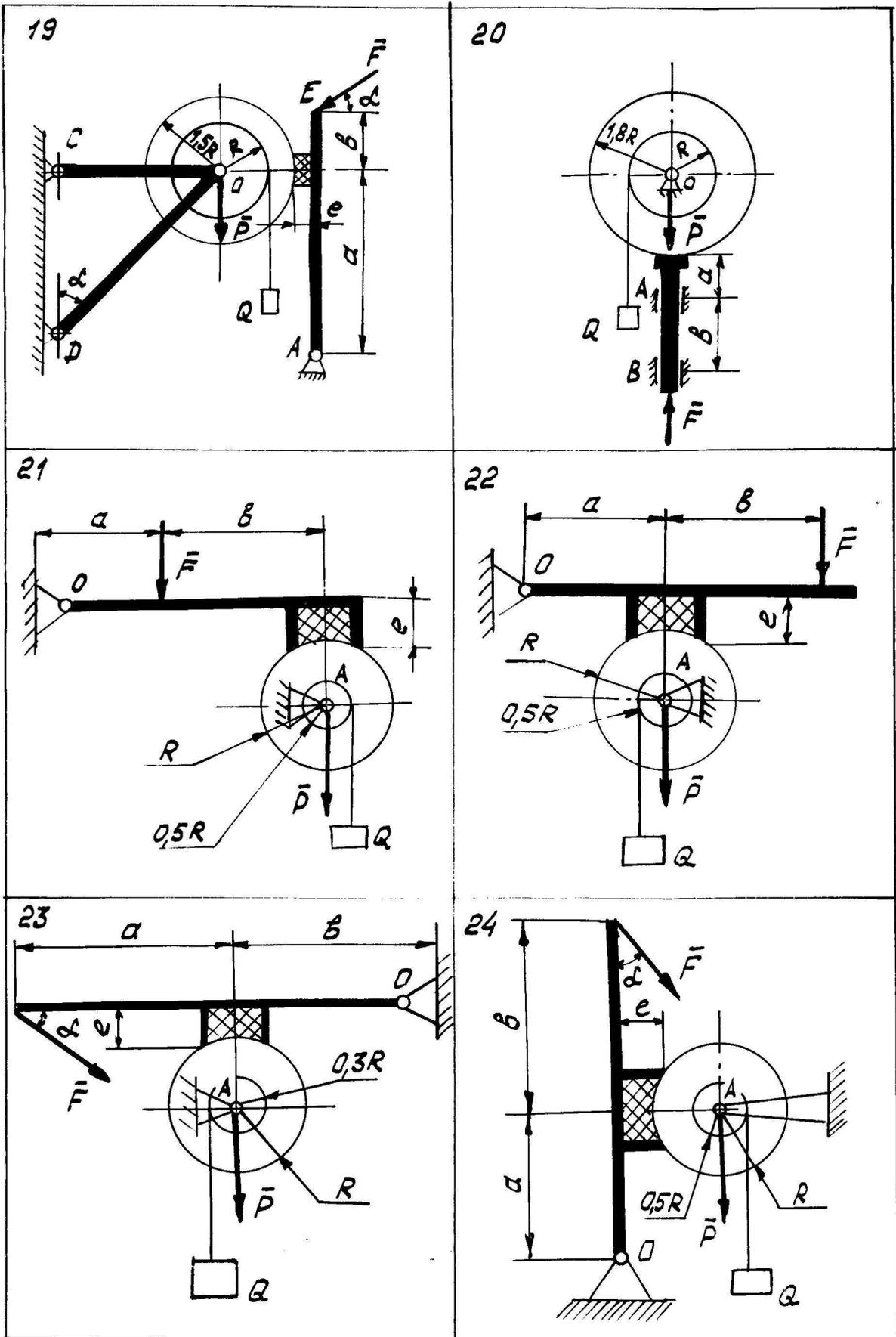


Рис. С-5.4

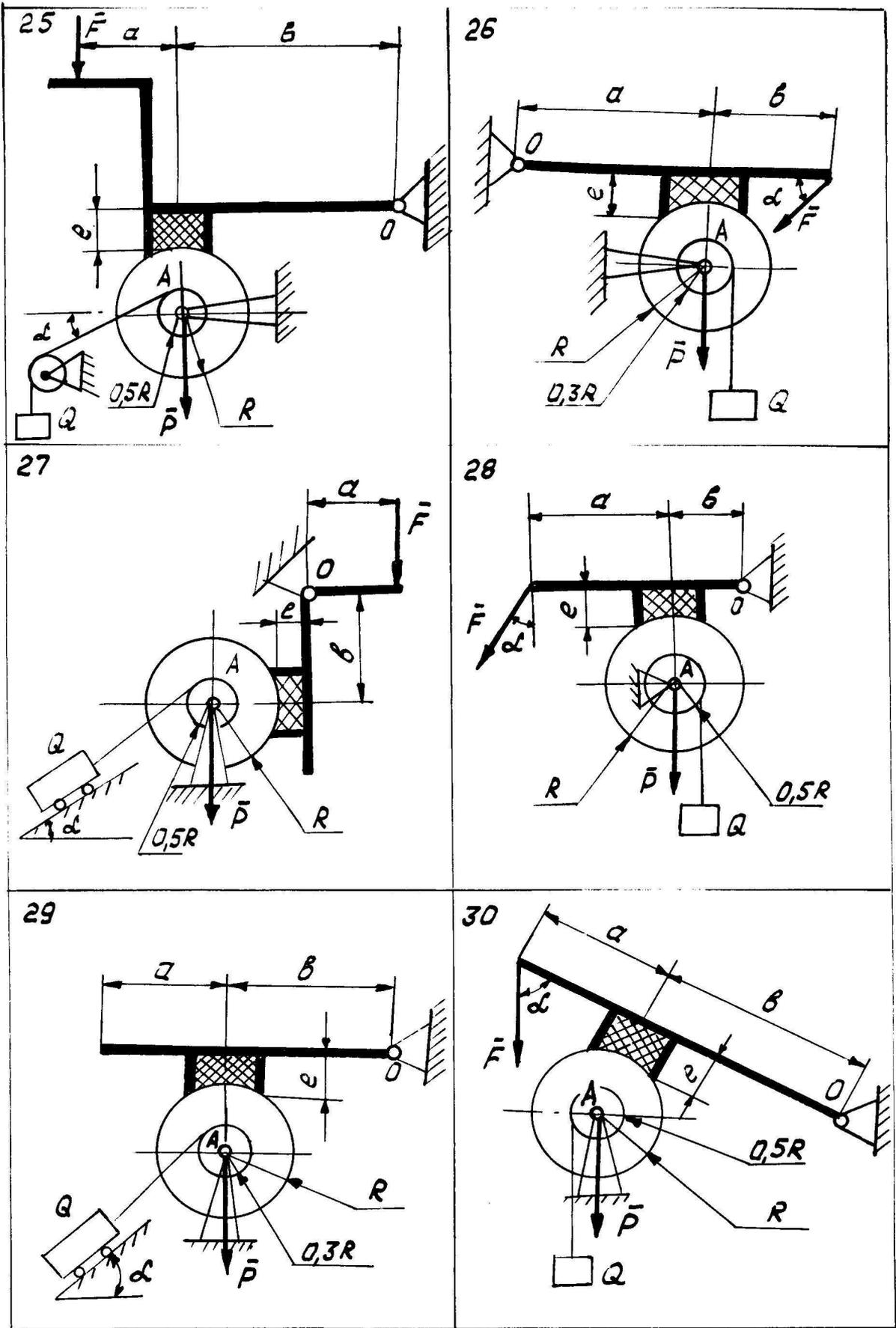


Рис. С-5.5

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис.31а);  $P = 0.3$  кН,  $Q = 1.2$  кН,  $a = 0.5$  м,  
 $b = 0.2$  м,  $l = 0.04$  м,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $f = 0.25$ .

Определить, при каких значениях силы  $F$  возможно равновесие конструкции.  
 Определить также реакции опор  $O$  и  $A$ , соответствующие предельному состоянию равновесия.

### РЕШЕНИЕ

Рассматриваемая конструкция состоит из трех тел: тележки, барабана и стержня  $AE$  с тормозной колодкой.

Рассмотрим равновесие, предполагая, что оно имеет место, для каждого из

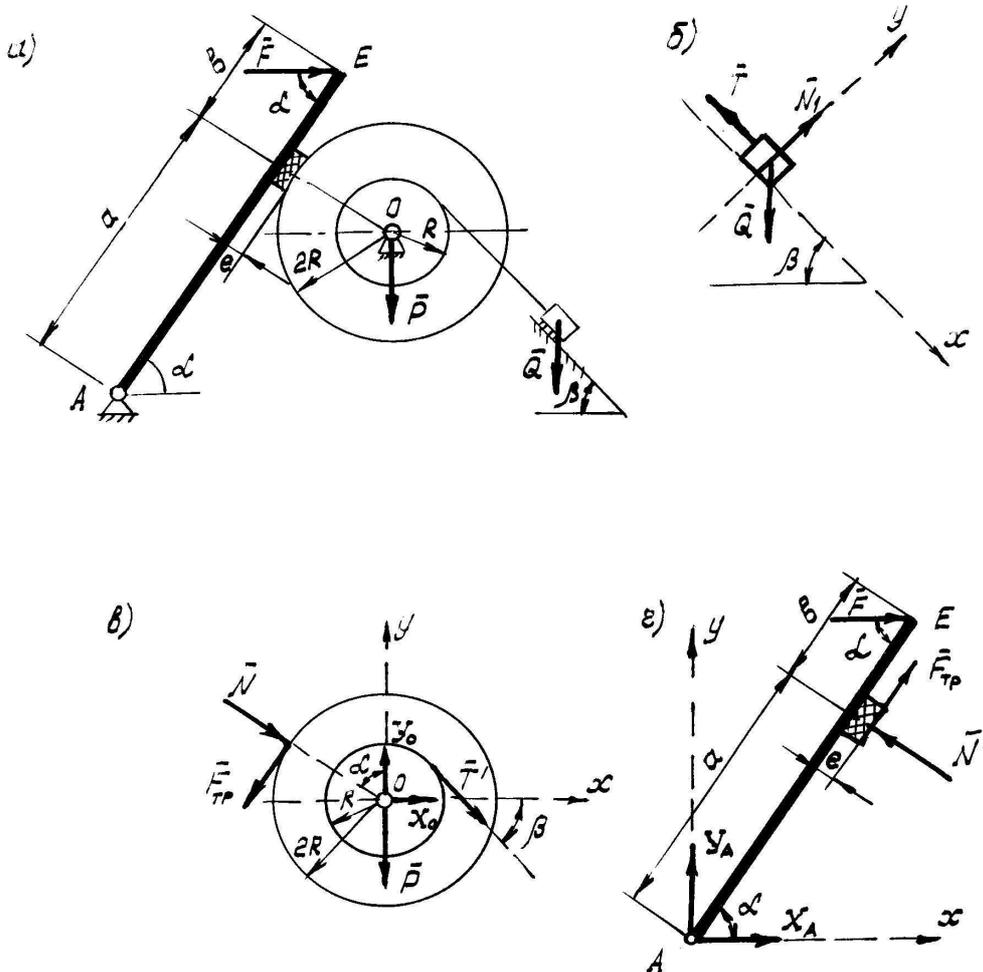


Рис. С-5.6

тел в отдельности.

Сначала запишем уравнения равновесия тележки. На тележку действуют: сила тяжести  $Q$ , реакция нити  $T$  и нормальная реакция наклонной плоскости  $N_1$  (рис.316). Выбрав координатные оси, как показано на рисунке 316, запишем следующие уравнения равновесия указанной системы сил:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Q \cdot \sin \beta - T = 0. & (1) \\ N_1 - Q \cdot \cos \beta = 0. & (2) \end{cases}$$

Далее запишем уравнения равновесия барабана (рис.31в). На барабан действуют: сила тяжести  $P$ , реакция нити  $T'$ , реакция шарнирно-неподвижной опоры  $O$ , представленная двумя взаимно перпендикулярными составляющими  $X_o$ ,  $Y_o$ , давление  $N$  тормозной колодки и сила трения  $F_{mp}$ . Учитывая, что величины сил  $T$  и  $T'$  равны ( $T = T'$ ), уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, действующей на барабан представим в виде:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & T \cdot \cos \beta + N \cdot \sin a - F_{mp} \cdot \cos a + X_o = 0, & (3) \\ \sum_i F_{iy} = 0, & Y_o - P - T \cdot \sin \beta - F_{mp} \cdot \sin a - N \cdot \cos a = 0, & (4) \\ \sum_i m_o(\vec{F}_i) = 0, & F_{mp} \cdot 2 \cdot R - T \cdot R = 0. & (5) \end{cases}$$

Затем рассмотрим равновесие стержня АЕ с тормозной колодкой (рис.31г). На стержень АЕ с тормозной колодкой действует следующая плоская произвольная система сил:  $F$ , нормальная реакция  $N'$  барабана, сила трения  $F''$  и реакция шарнирно-неподвижной опоры А, представляемая составляющими  $X_A$ ,  $Y_A$ . Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия величины сил  $NN'$ , а также  $F$  и  $F'$  равны

$$N = N', \quad F_{mp} = F'_{mp}. \quad (6)$$

Уравнения равновесия указанной системы сил с учетом соотношений (6) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & X_A + F - N \cdot \sin a + F_{mp} \cdot \cos a = 0, & (7) \\ \sum_i F_{iy} = 0, & Y_A + N \cdot \cos a + F_{mp} \cdot \sin a = 0, & (8) \\ \sum_i m_o(\vec{F}_i) = 0, & N \cdot a + F_{mp} \cdot l - F \cdot (a + b) \cdot \sin a = 0. & (9) \end{cases}$$

И, наконец, запишем условия равновесия конструкции при наличии трения:  
(10)

$$F_{mp} \leq f \cdot N$$

Система полученных линейных алгебраических уравнений (1) - (5), (7) - (9) с учетом неравенства (10) позволяет полностью решить поставленную задачу.

Прежде всего необходимо найти, при каких значениях силы  $F$  конструкция будет находиться в равновесии (то есть будет удовлетворяться неравенство (10)). С этой целью найдем на основании уравнений (1), (5) и (9) величины сил  $F_{mp}$  и  $N$ , входящих в неравенство (10):

$$F_{mp} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin \beta,$$
$$N = \frac{1}{a} \cdot \left[ F \cdot (a + b) \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin \beta \cdot l \right] \quad (11)$$

В результате подстановки (11) в (10) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin \beta \leq \frac{f}{a} \cdot \left[ F \cdot (a + b) \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin \beta \cdot l \right]$$

На основании (11) можно найти значения величины силы  $F$ , при которых рассматриваемая конструкция будет находиться в состоянии равновесия:

$$F \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot \sin \beta \cdot (a + f \cdot l)}{f \cdot (a + b) \cdot \sin \alpha} \quad (12)$$

При заданных параметрах, входящих в правую часть (14), значения величины силы  $F$ , при которых конструкция будет находиться в равновесии, определится неравенством:

$$F \geq 1.43 \text{ кН}$$

В случае предельного состояния равновесия конструкции сила  $F$  будет иметь минимальное значение

$$F_{\min} = 1.43 \text{ кН}.$$

Учитывая данные задачи, на основании (1), (3), (4), (7), (8), (11) и (12) найдем реакции неподвижных опор  $O$  и  $A$  в случае предельного состояния равновесия конструкции:

$$Y_o = 2.12 \text{ кН}, \quad X_o = -1.86 \text{ кН},$$

Следует заметить, что уравнение равновесия (2) оказалось не востребованным так как по условию задачи не требовалось определить нормальную реакцию  $N$  наклонной плоскости.

## ЗАДАНИЕ К-2 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения

Тело  $D$  (рис.2.1-2.6) вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi = \varphi(t)$  ( $\varphi$  измеряется в радианах,  $t$  - в секундах; положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рисунках дуговой стрелкой). По телу вдоль прямой  $AB$  (рис.2.1, 2.5, 2.6), или по окружности радиуса  $R$  (рис.2.2-2.4) движется точка  $M$  по закону  $S = OM = f(t)$  см (положительное и отрицательное направления отсчета координаты  $S$  от точки  $O$  указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  момент времени  $t = t_j$  сек. Необходимые данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

| № вар. | № рис. | Уравнение вращательного движения<br>$\varphi = \varphi(t)$ (рад) | Уравнение движения точки $M$<br>$OM = S = f(t)$ (см) | $t_j$<br>(сек) | $R$<br>(см) | $a$<br>(см) |
|--------|--------|--|--|----------------|-------------|-------------|
| 1      | 2.1    | $2\pi t^2$   | $16 \cos(\pi t / 4)$                                 | 2              | -           | 16          |
| 2      | 2.2    | $2\pi t^2$   | $10\pi t$  | 0.5            | 10          | -           |
| 3      | 2.3    | $2\pi t$   | $5\pi t$   | 0              | 5           | 4           |
| 4      | 2.4    | $\pi t^2$  | $20\pi \sin(\pi t / 3)$                              | 0,5            | 20          | -           |
| 5      | 2.5    | $\sin(\pi t / 6)$  | $5 - 2t^2$   | 1              | -           | 5           |
| 6      | 2.6    | $t^3$  | $7 - 4t^2$   | 1              | -           | 7           |
| 7      | 2.1    | $2t$   | $5 - 5t^2$   | 1              | -           | 5           |
| 8      | 2.2    | $\pi t^3$  | $20\pi t$  | 1              | 20          | -           |
| 9      | 2.3    | $3\pi t^2$   | $20\pi t^2$  | 1              | 80          | 60          |
| 10     | 2.4    | $\pi t^3$  | $5\pi t^2$   | 1              | 5           | -           |
| 11     | 2.5    | $\cos(\pi t / 3)$  | $3t - t^2$   | 1              | -           | 3           |
| 12     | 2.6    | $t^2$  | $4 \sin(\pi t / 4)$                                  | 2              | -           | 4           |
| 13     | 2.1    | $\pi t^2$  | $6 \sin(\pi t / 6)$                                  | 1              | -           | 6           |
| 14     | 2.2    | $2\pi t$   | $10\pi t^2$  | 1              | 10          | -           |
| 15     | 2.3    | $\pi t^3$  | $\pi(2 - t^2)$                                       | 1              | 1           | 2           |
| 16     | 2.4    | $2\pi t$   | $10\pi \cos(\pi t / 6)$                              | 2              | 10          | -           |
| 17     | 2.5    | $\cos(\pi t / 2)$  | $t^2$  | 1              | -           | 2           |
| 18     | 2.6    | $2t$   | $8 \sin(\pi t / 2)$                                  | 2              | -           | 8           |
| 19     | 2.1    | $\pi(t^2 + 3t)$  | $3t^2 - 8t$  | 1              | -           | 8           |
| 20     | 2.2    | $\pi t^2$  | $8\pi t$   | 1,5            | 8           | -           |
| 21     | 2.3    | $4\pi t^2$   | $2\pi(t + t^2)$                                      | 2              | 12          | 10          |
| 22     | 2.4    | $4 + 2\pi t^2$   | $3\pi(2 - t^3)$                                      | 1              | 2           | -           |
| 23     | 2.5    | $\cos(\pi t / 6)$  | $2 - 4t^2$   | 1              | -           | 4           |
| 24     | 2.6    | $3t - t^2$   | $2t^2 - 4$   | 1              | -           | 6           |
| 25     | 2.1    | $8\pi t + \pi t^2$   | $4 \cos(\pi t / 2)$                                  | 1              | -           | 4           |
| 26     | 2.2    | $3\pi t^2$   | $40\pi t^2$  | 0,5            | 20          | -           |
| 27     | 2.3    | $2\pi t^3$   | $20\pi t$  | 1              | 8           | 6           |

## Пример выполнения задания К-2

Диск радиуса  $R = 0,5$  м вращается вокруг своего вертикального диаметра  $OB$  (рис.2.7) по закону  $\varphi = t^3 - 2t^2$  ( $\varphi$  измеряется в радианах,  $t$  - в секундах; положительное направление отсчета угла  $cp$  показано на рисунке дуговой стрелкой.)

$$S = OM = \frac{\pi R}{6}(7t - 2t^2) \quad (\text{по}$$

По ободу диска движется точка  $M$  по закону положительно и отрицательное направления отсчёта дуговых координат  $S$  от точки  $O$  указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_j=1$ .

**Решение.** Для определенности свяжем жестко с диском систему координат  $Oxyz$  (координатная плоскость  $Oyz$  совмещена с плоскостью диска). Движение точки  $M$  рассматриваем как сложное. Вращение диска (подвижной системы координат  $Oxyz$ ) вокруг вертикальной неподвижной оси  $O$  считаем переносным. При этом движение точки  $M$  по ободу диска будет относительным. Рассмотрим более полно эти движения.

1. Закон переносного вращательного движения задан уравнением

(1)

$$\varphi = t^3 - 2t^2$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения как алгебраические величины:

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 6t - 4 \quad \omega_e = \dot{\varphi} = 3t^2 - 4t \quad ;$$

$$\text{В момент времени } t_j = 1 \text{ сек.} \quad \omega_e = -1 \text{ с}^{-1} \quad ; \quad \varepsilon_e = 2 \text{ с}^{-2} \quad .$$

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела вокруг неподвижной оси. В рассматриваемом случае  $\omega_e < 0$ . Это означает, что вращение в момент времени  $t_j = 1$  сек. происходит в направлении убывания угла ( $p$  (то есть в отрицательном направлении отсчета  $cp$ )). Путем сопоставления знаков угловой скорости и углового ускорения можно установить характер вращательного движения, то есть является оно ускоренным или замедленным. В рассматриваемом случае, как следует из (2), знаки угловой скорости и углового ускорения разные ( $\omega_e < 0$ ,  $\varepsilon_e > 0$ ).

Это показывает, что в момент времени  $t_j = 1$  сек. абсолютная величина угловой скорости убывает, то есть вращение диска является замедленным. Угловая скорость и угловое ускорение на рисунке 2.5 условно показаны дуговыми стрелками вокруг оси вращения.

2. Относительное движение точки  $M$  задано естественным способом, так как известны: траектория относительного движения (окружность радиуса  $R=0,5$  м с центром в точке  $O$ ), начало и положительное направление отсчета дуговых координат  $S$ , а также закон движения точки по траектории, определяе



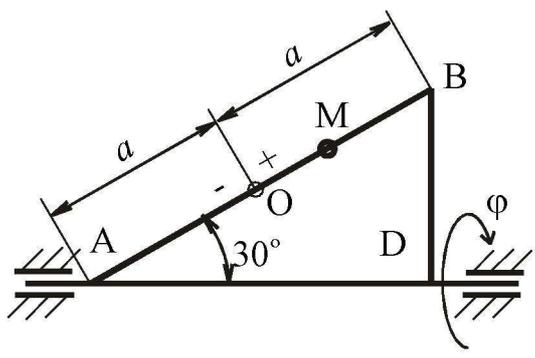


Рис. 2.1

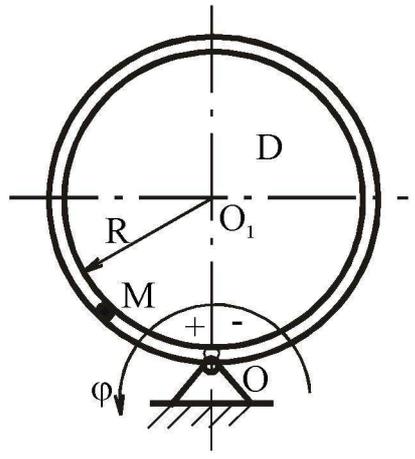


Рис. 2.2

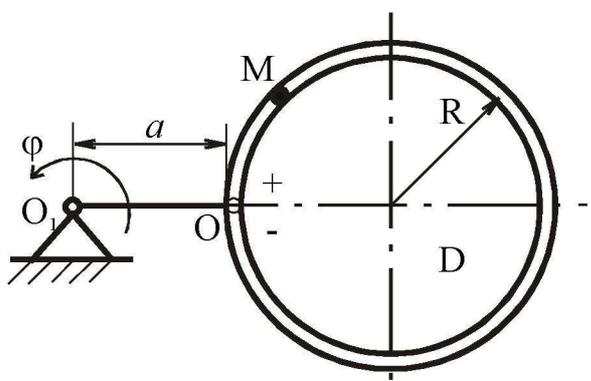


Рис. 2.3

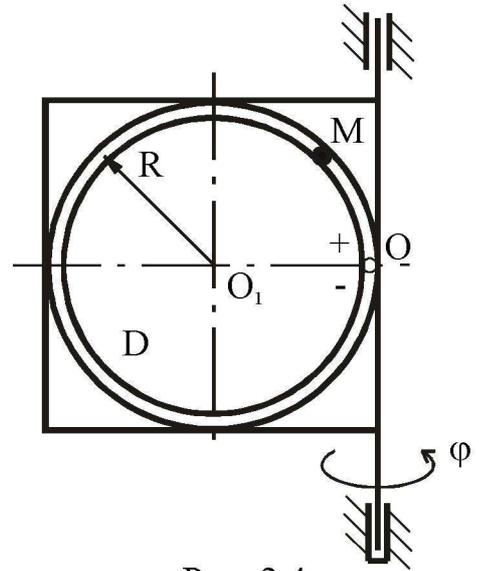


Рис. 2.4

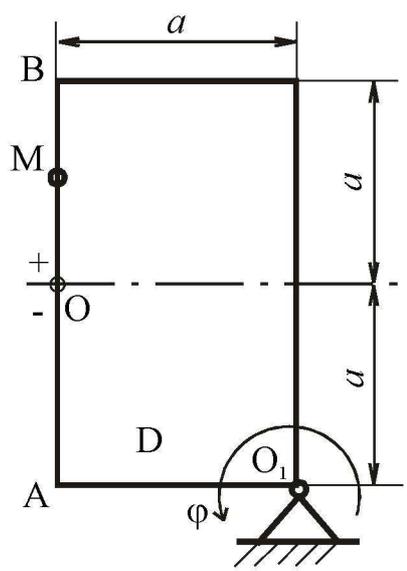


Рис. 2.5

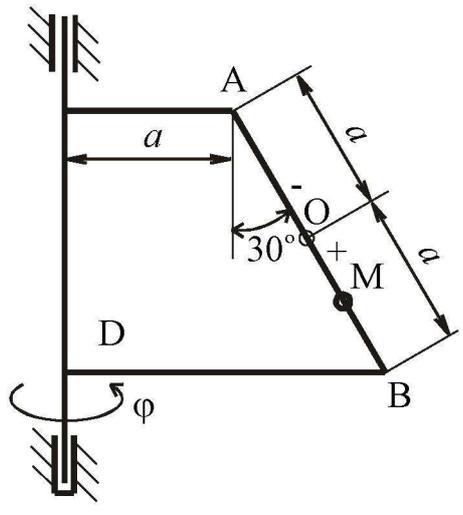


Рис. 2.6

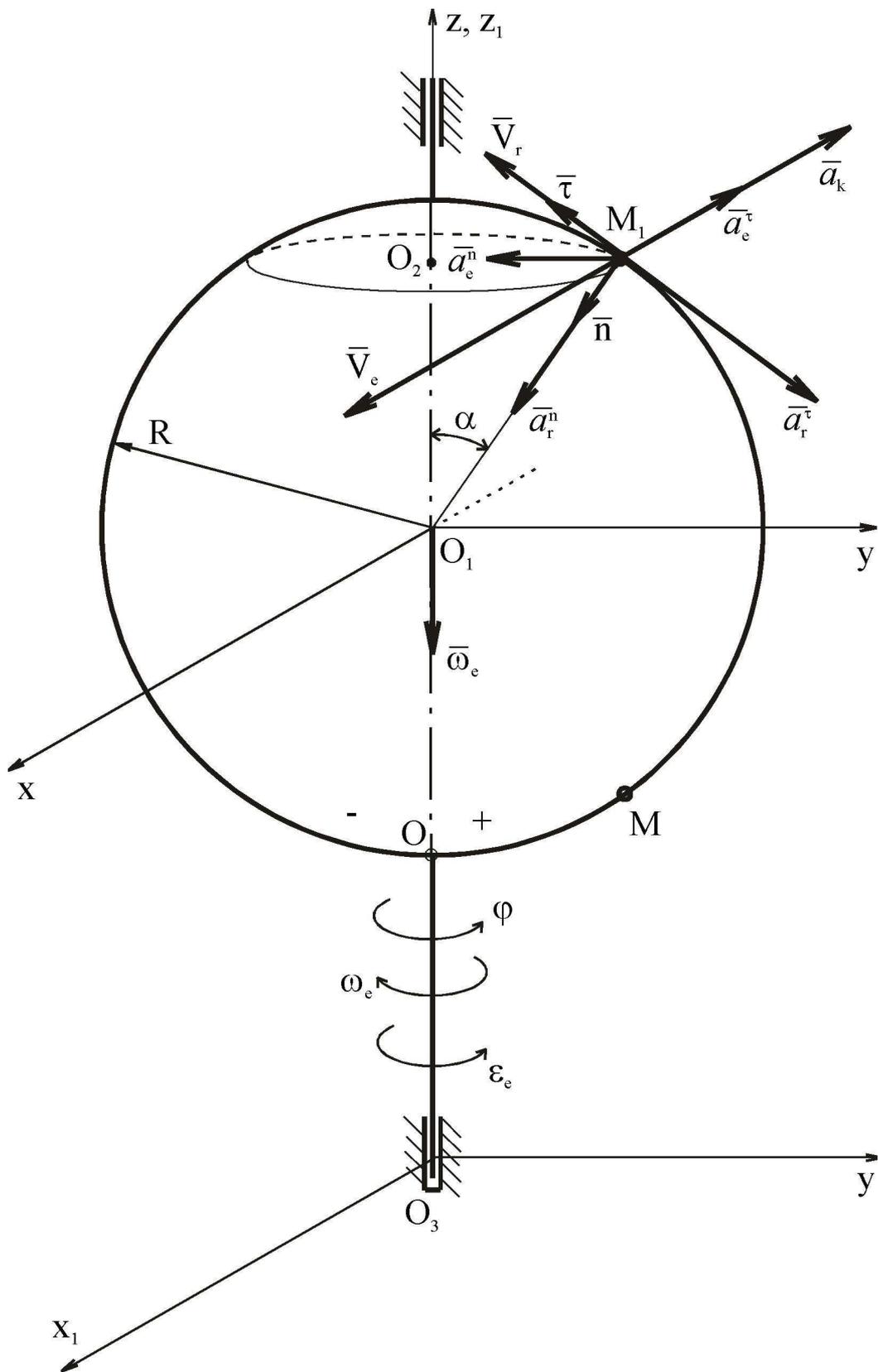


Рис. 2.7

мый уравнением

$$S = \frac{\pi R}{6} (7t - 2t^2) \quad \text{м} . \quad (3)$$

Сначала установим положение точки  $M$  на дуге окружности в момент времени  $t=7$  сек. Подставляя в уравнение (3)  $tj=l$  сек., получим

$$S_1 = \frac{5\pi R}{6} \quad (\text{м}) \quad (4)$$

Центральный угол, соответствующий дуге окружности (4), определится по формуле

$$\angle OO_1M_1 = \frac{S_1}{R} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{рад.}$$

Таким образом, как следует из рисунка 2.5, угол

$$\alpha = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{рад.}$$

В положении точки  $M_b$  покажем орты двух естественных осей  $f$  и  $Я$  (орт  $f$  направляется по касательной к окружности радиуса  $R$  в сторону возрастания дуговых координат  $S$ , а орт главной нормали  $Я$  - к центру окружности).

3. Найдем абсолютную скорость точки  $M$  по формуле:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad , \quad (5)$$

где  $V_e$  и  $V_r$  соответственно переносная и относительная скорости точки.

Для определения переносной скорости точки в момент времени  $tj=l$  сек. нужно мысленно остановить относительное движение точки в положении  $M_b$  и определить ее скорость как точки, жестко связанной с подвижной системой координат, то есть с диском. Диск, как было указано выше, совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси  $O_sZ_i$ . В силу этого величина переносной скорости ( $V_e$ ) определится по формуле

$$V_e = |\omega_e| h \quad (6)$$

где  $h$  - расстояние от точки  $M_j$  до оси вращения. Из прямоугольного треугольника (рис.2.5)

$$h = M_1O_2 = R \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0,25 \quad \text{м.} \quad (7)$$

Таким образом, на основании (6) с учетом (2) и (7) величина переносной скорости точки  $M$  в момент  $t=7$  сек. будет соответственно по формулам

$$V_e = 0,25 \quad \text{м/с.}$$

Вектор  $V_e$  направлен перпендикулярно плоскости диска (значит параллельно оси  $Ojx$ ) в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой  $co_e$ .

Для определения относительной скорости точки  $Mj$  ( $V_r$ ) нужно мысленно остановить переносное движение (вращательное движение диска) и найти скорость точки при ее движении по окружности радиуса  $R$  по закону (3). Проекция вектора  $V_r$  на направление орта  $f$  определяется по формуле:

$$V_{r\tau} = \dot{S} = \frac{\pi R}{6}(7 - 4t) \quad . \quad (9)$$

В момент времени  $tj=l$  секунда

$$V_{r\tau} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{м/с.} \quad (10)$$

Положительный знак проекции  $V_{r\tau}$  указывает, что вектор  $V_r$  направлен в сторону  $f$ . В общем случае величина относительной скорости ( $V_r$ ) определяется по формуле

$$V_r = |V_{r\tau}| = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \quad \text{м/с.} \quad (11)$$

Так как векторы  $\vec{V}_e$  и  $\vec{V}_r$  взаимно перпендикулярны (вектор  $V_r$  расположен в координатной плоскости  $Olyz$ , а вектор  $\vec{V}_e$  параллелен оси  $Oix$ ), величина абсолютной скорости ( $V_a$ ) может быть определена на основании теоремы Пифагора. В момент времени  $tj=l$  сек.

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 0,82 \quad \text{м/с.} \quad (12)$$

#### 4. Определим абсолютное ускорение точки $M$ .

В рассматриваемом случае переносное движение не является поступательным. В силу этого найдем абсолютное ускорение точки на основании теоремы Кориолиса по формуле

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \quad , \quad (13)$$

где  $\vec{a}_e$ ,  $\vec{a}_r$ ,  $\vec{a}_k$  - соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения точки.

При определении абсолютного ускорения целесообразно разложить  $a_e$  и  $a_r$  на нормальную и касательную составляющие

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau \quad \vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$$

При этом соотношение (13) примет вид

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_k \quad (14)$$

При определении переносного ускорения точки в момент времени  $tj=l$  сек. аналогично, как и при определении переносной скорости, мысленно останавливаем относительное движение и определяем ускорение точки  $Mj$  как только, неизменно связанной с диском (с подвижной системой координат). При вращательном движении диска вокруг неподвижной оси величины нормального и касательного ускорения точки  $Mi$  диска определяются

$$\begin{aligned} |\vec{a}_e^n| &= \omega_e^2 h = 0,25 \text{ м/с}^2, \\ |\vec{a}_e^\tau| &= |\varepsilon_e| h = 0,5 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор  $a''$  направлен по радиусу окружности, описываемой точкой  $M_2$  диска, к центру этой окружности – точке  $O_2$  ( $\vec{a}_e^n$  параллелен оси  $O_1y$ ). Ускорение  $\vec{a}_e^\tau$  направлено по касательной к этой окружности, то есть перпендикулярно  $\vec{a}_e^n$  ( $\vec{a}_e^\tau$  параллелен оси  $O_1x$ ). Так как диск в указанный момент времени  $t_j=l$  сек. вращается замедленно, то векторы  $\vec{V}_e$  и  $\vec{a}_e^\tau$  направлены в противоположные стороны, то есть направление вектора  $\vec{a}_e^\tau$  определяется направлением углового ускорения  $\varepsilon_e$ , которое показано на рис. 2.7 дуговой стрелкой.

Относительное движение, как было подчеркнуто выше, задано естественным способом. При этом проекции относительного ускорения точки на естественные оси, положительные направления которых определяются ортами  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$ , можно найти по формулам

$$a_{r\tau} = \ddot{S} = -\frac{2}{3}\pi R = -\frac{\pi}{3} = -1,047 \text{ м/с}^2, \quad (17)$$

$$a_{rn} = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{V_r^2}{R} = 1,232 \text{ м/с}^2. \quad (18)$$

Отрицательный знак проекции  $a_{r\tau}$  указывает, что вектор  $a_x$  направлен в противоположную сторону орта  $\vec{\tau}$ . Нормальное ускорение всегда направлено в сторону орта  $\vec{n}$ , то есть по главной нормали к центру кривизны траектории точки.

Таким образом, в рассматриваемом случае вектор  $\vec{a}_r^n$  направлен к центру  $O_1$ , окружности радиуса  $R$ , являющейся траекторией относительного движения точки. Величины относительного касательного ( $|\vec{a}_r^\tau|$ ) и относительного нормального ( $a''$ ) ускорений согласно (17) и (18) будут соответственно равны

$$|\vec{a}_r^\tau| = |a_{r\tau}| = 1,047 \text{ м/с}^2, \quad (19)$$

$$|\vec{a}_r^n| = a_{rn} = 1,232 \text{ м/с}^2. \quad (20)$$

Ускорение Кориолиса ( $|\vec{a}_k|$ ) определяется по формуле

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \quad (21)$$

Вектор угловой скорости переносного вращения  $\vec{\omega}_e$  направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение наблюдается против хода часовой стрелки (рис.2.5). В момент времени  $t_1=l$  сек., учитывая (2),

$$|\vec{\omega}_e| = 1 \text{ сек}^{-1}. \quad (22)$$

Модуль ускорения Кориолиса ( $|\vec{a}_k|$ ) на основании свойств векторного

произведения двух векторов, очевидно, равен

$$|\vec{a}_k| = 2 \cdot |\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \cdot \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r) \quad . \quad (23)$$

Считывая (22), (11), на основании (23) получим:

$$|\vec{a}_k| = 2 \cdot 1 \cdot 0,785 \cdot \sin 120^\circ = 1,36 \quad \text{м/с}^2. \quad (24)$$

Направление ускорения Кориолиса определяется направлением векторного произведения векторов  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{V}_r$ , то есть направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{V}_r$  (вектор  $\vec{\omega}_e$  при этом нужно перевести в точку  $M_1$ ) в сторону, откуда кратчайшее совмещение  $\vec{\omega}_e$  с  $\vec{V}_r$  видно против хода часовой стрелки. Так как векторы  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{V}_r$  расположены в координатной плоскости  $O_1yz$ , то  $\vec{a}_k$  направлено параллельно оси  $O_1x$  в сторону, противоположную оси  $O_1x$

Направление ускорения Кориолиса можно найти другим способом, применив правило Н.Е.Жуковского. Суть правила Н.Е.Жуковского состоит в следующем. Прежде всего нужно найти проекцию вектора  $\vec{V}_r$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения (на плоскость  $O_1xy$ ). В данном случае эта проекция направлена также, как вектор  $\vec{a}_e^n$ . Затем необходимо повернуть найденную проекцию в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой  $\omega_e$ , на угол  $\pi/2$ . Полученное в результате поворота направление проекции относительной скорости будет соответствовать направлению  $\vec{a}_k$

Для определения абсолютного ускорения найдем его проекции на оси координат  $x, y, z$ . Согласно (14) проекция абсолютного ускорения на любую ось равна алгебраической сумме проекций ускорений  $\vec{a}_e^n, \vec{a}_e^\tau, \vec{a}_r^n, \vec{a}_r^\tau, \vec{a}_k$  на ту же ось. Проекции этих ускорений на оси координат легко найти из чертежа. Таким образом, для момента времени  $t_1 = 1$  сек.

$$a_{ax} = -|\vec{a}_e^\tau| - |\vec{a}_k| = -0,5 - 1,36 = -1,86 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a_{ay} = -|\vec{a}_e^n| - |\vec{a}_r^n| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{a}_r^\tau| \cdot \cos 30^\circ = -0,25 - 1,232 \cdot \frac{1}{2} + 1,047 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,04 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a_{az} = |\vec{a}_r^n| \cdot \cos 30^\circ - |\vec{a}_r^\tau| \cdot \cos 60^\circ = -1,232 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1,047 \cdot \frac{1}{2} = -1,59 \quad \text{м/с}^2$$

По найденным трем проекциям абсолютного ускорения нетрудно найти его модуль и направление. Модуль абсолютного ускорения

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{1,86^2 + 0,04^2 + 1,59^2} = 2,45 \quad \text{м/с}^2.$$

### ЗАДАНИЕ К-3 Определение скоростей и ускорений точек тела

В планетарном механизме (рис.3.1-3.6) шестерня I радиуса  $R_1$  неподвижна, а кривошип  $OA$ , вращаясь вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение свободно насаженную на его конец  $A$  шестерню II радиуса  $R_2$ . Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек  $A$  и  $B$ , если для соответствующего момента времени известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа ( $\omega_{OA}$ ,  $\varepsilon_{OA}$ ). На рисунках условно показаны направления угловой скорости и углового ускорения дуговыми стрелками вокруг оси вращения. При этом направление угловой скорости соответствует направлению вращательного движения кривошипа. Угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

| № варианта | № рисунка | $\omega_{OA}$<br>(с <sup>-1</sup> ) | $\varepsilon_{OA}$<br>(с <sup>-2</sup> ) | $R_1$<br>(м) | $R_2$<br>(м) | $\alpha$<br>(град.) |
|------------|-----------|-------------------------------------|--|--------------|--------------|---------------------|
| 1          | 3.1       | 1                                   | 9  | 0,5          | 0,1          | 0                   |
| 2          | 3.2       | 1                                   | 8  | 0,6          | 0,1          | 30                  |
| 3          | 3.3       | 2                                   | 7  | 0,7          | 0,2          | 60                  |
| 4          | 3.4       | 2                                   | 6  | 0,8          | 0,2          | 90                  |
| 5          | 3.5       | 2                                   | 3  | 0,6          | 0,1          | 60                  |
| 6          | 3.6       | 3                                   | 5  | 0,7          | 0,2          | 120                 |
| 7          | 3.1       | 3                                   | 5  | 0,9          | 0,3          | 120                 |
| 8          | 3.2       | 3                                   | 4  | 0,5          | 0,5          | 150                 |
| 9          | 3.3       | 4                                   | 3  | 0,6          | 0,4          | 180                 |
| 10         | 3.4       | 4                                   | 2  | 0,7          | 0,4          | 210                 |
| 11         | 3.5       | 2                                   | 4  | 0,7          | 0,2          | 90                  |
| 12         | 3.6       | 3                                   | 6  | 0,7          | 0,2          | 150                 |
| 13         | 3.1       | 5                                   | 1  | 0,8          | 0,5          | 240                 |
| 14         | 3.2       | 1                                   | 1  | 0,5          | 0,1          | 0                   |
| 15         | 3.3       | 2                                   | 2  | 0,5          | 0,2          | 30                  |
| 16         | 3.4       | 3                                   | 1  | 0,6          | 0,3          | 60                  |
| 17         | 3.5       | 4                                   | 7  | 0,8          | 0,3          | 180                 |
| 18         | 3.6       | 5                                   | 9  | 0,8          | 0,3          | 240                 |
| 19         | 3.1       | 4                                   | 2  | 0,6          | 0,4          | 90                  |
| 20         | 3.2       | 5                                   | 1  | 0,7          | 0,5          | 120                 |
| 21         | 3.3       | 6                                   | 2  | 0,7          | 0,1          | 150                 |
| 22         | 3.4       | 7                                   | 1  | 0,8          | 0,2          | 180                 |
| 23         | 3.5       | 4                                   | 8  | 0,8          | 0,3          | 210                 |
| 24         | 3.6       | 1                                   | 1  | 0,5          | 0,1          | 0                   |
| 25         | 3.1       | 8                                   | 2  | 0,8          | 0,3          | 210                 |
| 26         | 3.2       | 9                                   | 1  | 0,9          | 0,4          | 240                 |

| № варианта | № рисунка | $\omega_{OA}$ ( $\text{с}^{-1}$ ) | $\varepsilon_{OA}$ ( $\text{с}^{-2}$ ) | $R_1$ (м) | $R_2$ (м) | $\alpha$ (град.) |
|------------|-----------|-----------------------------------|--|-----------|-----------|------------------|
| 27         | 3.3       | 1                                 | 1                                      | 0,6       | 0,1       | 0                |
| 28         | 3.4       | 1                                 | 2                                      | 0,6       | 0,1       | 30               |
| 29         | 3.5       | 1                                 | 2                                      | 0,6       | 0,2       | 30               |
| 30         | 3.6       | 2                                 | 3                                      | 0,6       | 0,3       | 60               |

### Пример выполнения задания К-39

Дано: кинематическая схема планетарного механизма (рис.3.7);  $R_1=0,6$  м ;  $R_2= 0,4$  м ;  $\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1}$  ;  $\varepsilon_{OA} = 1 \text{ с}^{-2}$ . Определить скорости и ускорения точек  $A$  и  $B$ , показанных на рисунке, если  $\alpha = 60^\circ$

**Решение:** Рассмотрим последовательно движения каждого из двух подвижных звеньев планетарного механизма. Начинать при этом необходимо со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы. Таким образом, начнем исследование кинематики механизма с кривошипа.

1. Кривошип  $OA$  совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки  $A$  кривошипа, которая одновременно принадлежит и подвижной шестерне II.

Абсолютная величина скорости точки  $A$  ( $V_A$ ) определяется по формуле

$$V_A = \omega_{OA} \cdot |OA| = \omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad (1)$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с} \quad (2)$$

Вектор скорости  $\vec{V}_A$  направлен перпендикулярно  $OA$  (радиусу вращения) в направлении вращения, указанному на рис.3.5 дуговой стрелкой  $\omega_{OA}$

Ускорение точки  $A$  представим разложенным на касательную и нормальную составляющие

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau \quad (3)$$

Величины нормального ( $a_A^n$ ) и касательного ( $a_A^\tau$ ) ускорений определяются соответственно по формулам:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot |OA| = \omega_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) \quad (4)$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot |OA| = \varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad (5)$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 1^2 (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2 \quad (6)$$

$$a_A^\tau = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2 \quad (7)$$

При этом нормальное ускорение точки  $A$  ( $\vec{a}_A^n$ ) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой к центру этой окружности - к точке  $O$ .

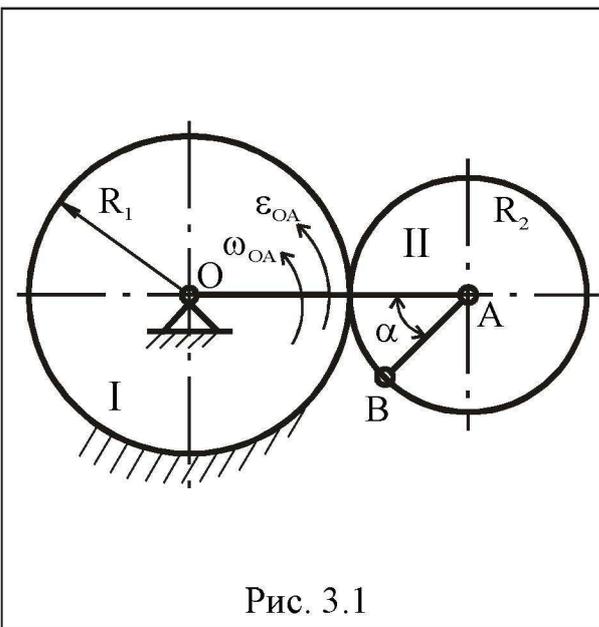


Рис. 3.1

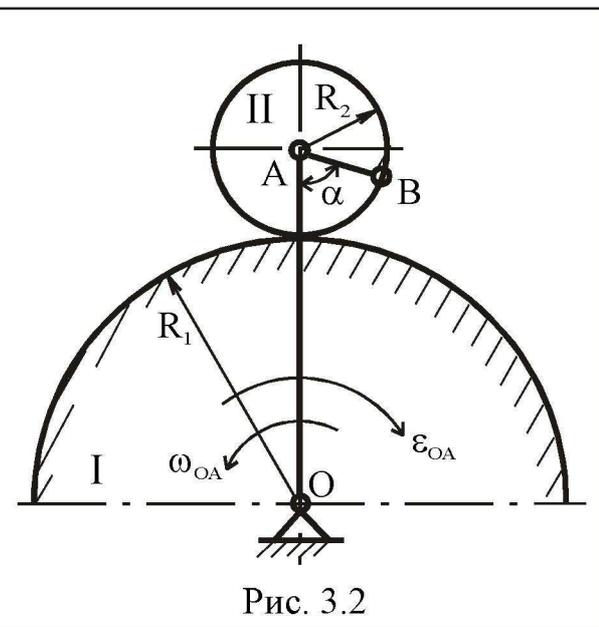


Рис. 3.2

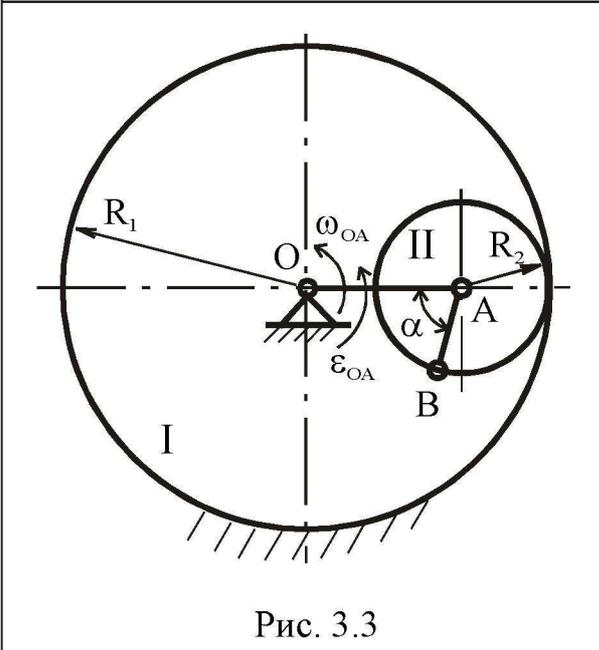


Рис. 3.3

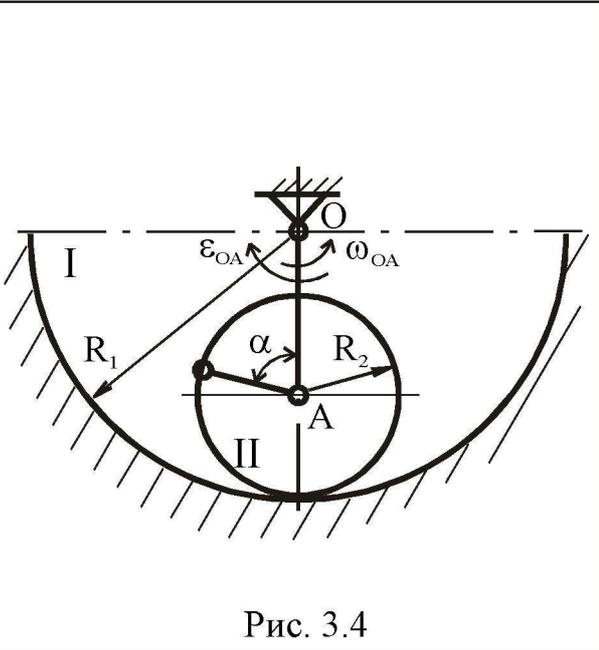


Рис. 3.4

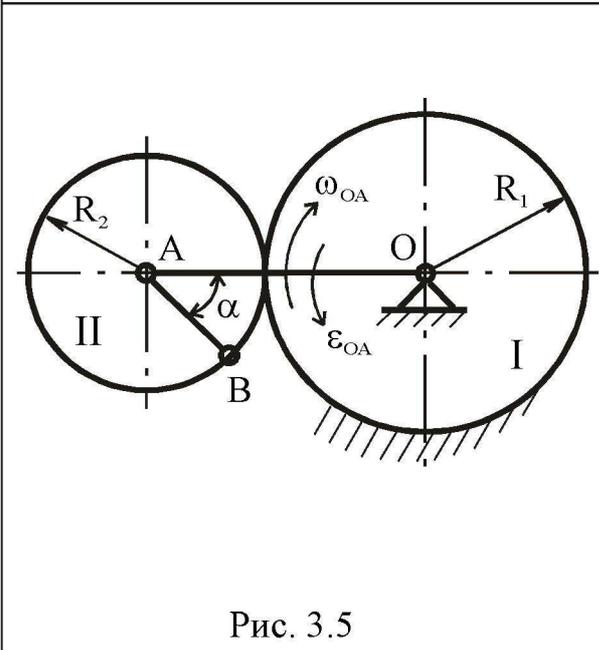


Рис. 3.5

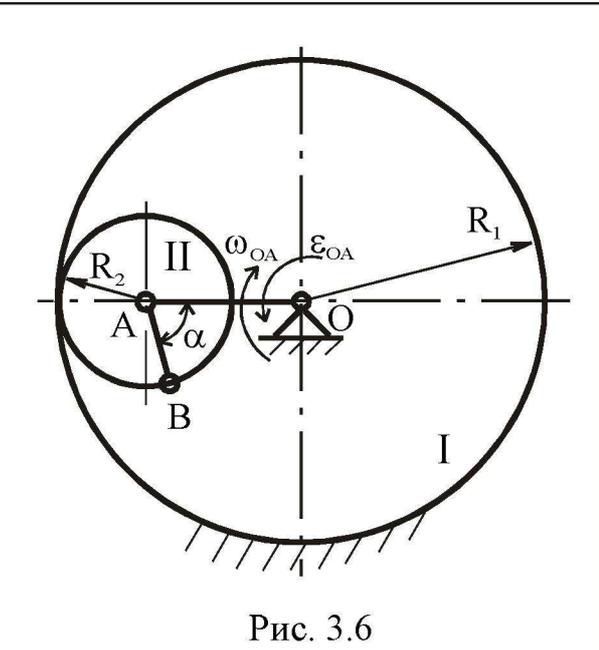


Рис. 3.6

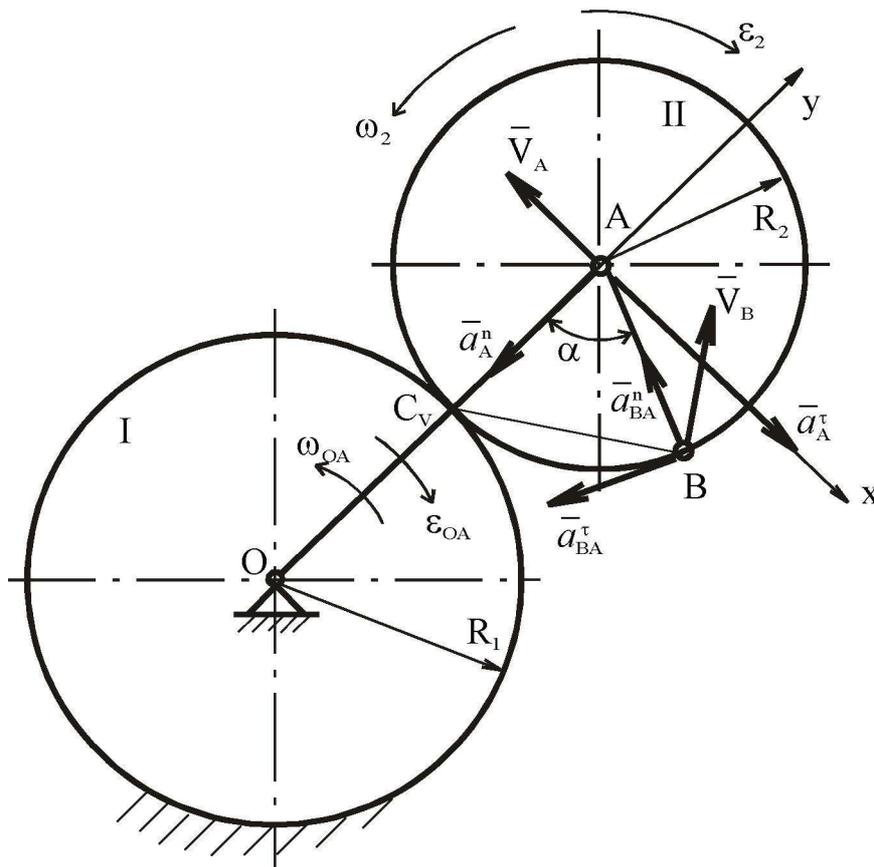


Рис. 3.7

Касательное ускорение ( $\vec{a}_A^\tau$ ) направлено по касательной к этой окружности (перпендикулярно  $OA$ ) в сторону, указанную дуговой стрелкой  $\epsilon_{OA}$ . Это объясняется тем, что при замедленном вращении (по условию задачи кривошип  $OA$  вращается замедленно) касательное ускорение направляется в сторону, противоположную направлению вращения, указанного дуговой стрелкой  $\omega_{OA}$ . В то же время при замедленном вращении угловое ускорение направляется также в сторону, противоположную направлению угловой скорости.

Величина ускорения точки  $A$  в соответствии с соотношением (3) и с учетом (6) и (7) для заданного положения механизма определится по формуле:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

2. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Учитывая, что шестерня II катится без скольжения по неподвижной шестерне I, мгновенный центр скоростей (точка  $C_V$ ) подвижной шестерни будет находиться в точке соприкосновения двух шестерен (рис.3.5).

Для заданного положения планетарного механизма выше определена скорость центра шестерни II (точки  $A$ ). Таким образом, зная величину скорости одной из точек и положение мгновенного центра скоростей подвижной шестерни, можно определить величину ее мгновенной угловой скорости ( $\omega_2$ ) по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V}, \quad (7)$$

где расстояние  $AC_V = R_2$ .

В результате подстановки значения  $AC_V = R_2$  и (1) в соотношение (7) получим

$$\omega_2 = \frac{\omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \quad (8)$$

Для заданного положения механизма

$$\omega_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ с}^{-1} \quad (9)$$

Направление мгновенного вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки  $C_V$ ), определяемое направлением скорости точки A ( $\vec{V}_A$ ), условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой  $\omega_2$ .

Шестерня II в указанном положении движется замедленно. Это следует из сопоставления направлений векторов  $\vec{V}_A$  и  $\vec{a}_A^{\tau}$  (они направлены в противоположные стороны). Следовательно, угловое ускорение шестерни II ( $\epsilon_2$ ) направлено в сторону, противоположную направлению угловой скорости  $\omega_2$ , что условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой  $\epsilon_2$

Величину углового ускорения  $\epsilon_2$  определим по формуле

$$\epsilon_2 = |\dot{\omega}_2| \quad (10)$$

Учитывая (8), на основании (10) получим

$$\epsilon_2 = \frac{|\dot{\omega}_{OA}| \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{\epsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \quad (11)$$

где  $\epsilon_{OA}$  - величина углового ускорения кривошипа O A. Для заданного положения механизма

$$\epsilon_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ с}^{-2} \quad (12)$$

Таким образом, для некоторого момента времени найдены положение мгновенного центра скоростей, угловая скорость, угловое ускорение шестерни II, а также ускорение точки A. Это позволяет найти скорость и ускорение любой точки шестерни.

Прежде всего определим абсолютную величину скорости точки B ( $V_B$ ) по формуле

$$V_B = \omega_2 \cdot BC_V, \quad (13)$$

где  $BC_V$  - расстояние от точки B до мгновенного центра скоростей.

Расстояние  $BC_V$  определим из треугольника  $ABC_V$ . Этот треугольник равносторонний и, следовательно,

$$BC_V = R_2 = 0,4 \text{ м} \quad (14)$$

Для заданного положения механизма, учитывая (9) и (14), на основании (13) получим

$$V_B = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с} \quad (15)$$

Вектор скорости  $V_B$  направлен перпендикулярно прямой  $BC_V$ . Ускорение точки  $B$  можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку  $A$  за полюс

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (16)$$

где  $\vec{a}_{BA}^n$  и  $\vec{a}_{BA}^\tau$  - соответственно нормальное и касательное ускорения точки  $B$  при относительном вращательном движении шестерни  $\Pi$  вокруг полюса  $A$ . Учитывая (3), формулу (16) представим в виде

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (17)$$

Величины нормального ( $a_{BA}^n$ ) и касательного ( $a_{BA}^\tau$ ) ускорений точки  $B$  при относительном вращательном движении шестерни  $\Pi$  вокруг полюса  $A$  определяются по формулам

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = \omega_2^2 \cdot R_2, \quad (18)$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = \varepsilon_2 \cdot R_2. \quad (19)$$

Для заданного положения механизма на основании (18) и (19) с учетом (9) и (12) получим

$$a_{BA}^n = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2, \quad (20)$$

$$a_{BA}^\tau = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с}^2. \quad (21)$$

При этом нормальное ускорение  $\vec{a}_{BA}^n$  направлено вдоль  $BA$  к центру относительного вращения (к полюсу  $A$ ), а касательное ускорение  $\vec{a}_{BA}^\tau$  направлено перпендикулярно прямой  $AB$  в сторону, указанную дуговой стрелкой  $\varepsilon_2$ .

Таким образом, найдены модули четырех векторов ускорений, стоящих в правой части векторного равенства (17), и показаны их направления в точке  $B$  на рис. 3.5. Найдем ускорение точки  $B$  как геометрическую сумму четырех показанных в точке ускорений аналитическим способом. Для этого спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства (17), на две оси координат  $x, y$  (рис.3.5)

$$a_{Bx} = a_A^\tau - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ, \quad (22)$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^n \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau \cdot \cos 30^\circ. \quad (23)$$

Учитывая (6), (7) (20) и (21), на основании (22) и (23) найдем для заданного положения механизма проекции ускорения точки  $B$  на оси  $x, y$

$$a_{Bx} = 1 - 2,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1,665 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{By} = -1 + 2,5 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,616 \text{ м/с}^2.$$

Проекции вектора ускорения  $\vec{a}_B$  (лежащего в плоскости  $xu$ ) на две оси координат полностью определяют его модуль и направление. Итак, величина

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{1,665^2 + 0,616^2} = 1,775 \text{ м/с}^2.$$

### Задание К-5 Определение скоростей с помощью узла скоростей

Приняв угловую скорость  $\omega_0$  кривошипа  $OA$  постоянной, определить для заданного положения механизма (рис.5.1-5.6):

1. скорости точек  $A, B, C, D$  механизма и угловые скорости звеньев  $AB$  и  $CD$  при помощи мгновенных центров скоростей;

2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;

3. ускорения точек  $A, B, C$ , а также угловое ускорение звена  $AB$  (аналитическим способом).

Необходимые для решения данные приведены в таблице 5.

Таблица 5

| № варианта | № рис. | $\omega_0$<br>(с <sup>-1</sup> ) | $OA$<br>(см) | $\varphi$<br>(град.) | $AB$<br>(см) | $AC$<br>(см) | $CD$<br>(см) | $h$<br>(см) | $l$<br>(см) | $O_1D$<br>(см) |
|------------|--------|----------------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|----------------|
| 1          | 5.1    | $\pi/2$                          | 40           | 90                   | 80           | 40           | 70           | -           | 10          | -              |
| 2          | 5.2    | $\pi/4$                          | 50           | 45                   | 60           | 60           | 80           | 20          | -           | -              |
| 3          | 5.3    | $\pi/2$                          | 30           | 90                   | 60           | 20           | 50           | -           | 25          | -              |
| 4          | 5.4    | $\pi/4$                          | 20           | 45                   | 100          | 50           | 60           | 10          | 80          | -              |
| 5*         | 5.5    | $\pi/3$                          | 12           | 60                   | 55           | 36           | 23           | 22          | 19          | 19             |
| 6*         | 5.6    | $2\pi/3$                         | 15           | 135                  | 50           | 15           | 40           | 54          | 17          | 40             |
| 7          | 5.1    | $\pi/4$                          | 20           | 45                   | 40           | 20           | 35           | -           | 5           | -              |
| 8          | 5.2    | $\pi/6$                          | 100          | 30                   | 120          | 120          | 160          | 40          | -           | -              |
| 9          | 5.3    | $\pi/6$                          | 60           | 30                   | 120          | 40           | 100          | -           | 50          | -              |
| 10         | 5.4    | $\pi/3$                          | 30           | 60                   | 150          | 75           | 90           | 15          | 120         | -              |
| 11*        | 5.5    | $\pi/3$                          | 24           | 60                   | 110          | 72           | 46           | 44          | 38          | 38             |
| 12*        | 5.6    | $2\pi/3$                         | 30           | 120                  | 100          | 30           | 80           | 108         | 34          | 80             |
| 13         | 5.1    | $\pi/3$                          | 60           | 60                   | 120          | 60           | 105          | -           | 15          | -              |
| 14         | 5.2    | $\pi/3$                          | 60           | 60                   | 72           | 72           | 96           | 24          | -           | -              |
| 15         | 5.3    | $\pi/4$                          | 36           | 45                   | 72           | 24           | 60           | -           | 30          | -              |
| 16         | 5.4    | $\pi/3$                          | 10           | 60                   | 50           | 25           | 30           | 5           | 40          | -              |
| 17*        | 5.5    | $\pi/3$                          | 18           | 60                   | 82,5         | 54           | 34,5         | 33          | 28,5        | 28,5           |
| 18*        | 5.6    | $2\pi/3$                         | 7,5          | 120                  | 25           | 7,5          | 20           | 27          | 8,5         | 20             |
| 19         | 5.1    | $\pi/6$                          | 30           | 30                   | 60           | 30           | 52,5         | -           | 7,5         | -              |
| 20         | 5.2    | $2\pi/3$                         | 75           | 120                  | 90           | 90           | 120          | 30          | -           | -              |
| 21         | 5.3    | $\pi/3$                          | 27           | 60                   | 54           | 18           | 45           | -           | 22,5        | -              |
| 22         | 5.4    | $\pi/6$                          | 15           | 30                   | 75           | 37,5         | 45           | 7,5         | 60          | -              |
| 23*        | 5.5    | $\pi/3$                          | 36           | 60                   | 165          | 108          | 69           | 66          | 57          | 57             |
| 24*        | 5.6    | $2\pi/3$                         | 22,5         | 120                  | 75           | 22,5         | 60           | 81          | 22,5        | 60             |
| 25         | 5.1    | $\pi/4$                          | 10           | 45                   | 20           | 20           | 18,5         | -           | 2,5         | -              |
| 26         | 5.2    | $3\pi/4$                         | 150          | 135                  | 180          | 180          | 240          | 60          | -           | -              |
| 27         | 5.3    | $\pi/2$                          | 15           | 90                   | 30           | 10           | 25           | -           | 12,5        | -              |

| № варианта | № рис. | $\omega_0$<br>(с <sup>-1</sup> ) | $OA$<br>(см) | $\varphi$<br>(град.) | $AB$<br>(см) | $AC$<br>(см) | $CD$<br>(см) | $h$<br>(см) | $l$<br>(см) | $O_1D$<br>(см) |
|------------|--------|----------------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|----------------|
| 28         | 5.4    | $\pi/2$                          | 40           | 90                   | 200          | 100          | 120          | 20          | 160         | -              |
| 29*        | 5.5    | $\pi/3$                          | 6            | 60                   | 27,5         | 18           | 11,5         | 11          | 9,5         | 9,5            |
| 30*        | 5.6    | $2\pi/3$                         | 45           | 120                  | 150          | 45           | 120          | 162         | 51          | 120            |

**Примечание:** в вариантах с рис. 5.5, 5.6 из двух возможных положений механизма выбрать для расчета такое, при котором шарнир D наиболее удален от ползуна B.

### Пример выполнения задания К-5

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 5.7).  $\varphi = 30^\circ$ ;  $OA = 30$  см;  $AB = 70$  см;  $BC = 35$  см;  $CD = 40$  см;  $l = 90$  см;  $\omega_0 = \pi/6$  с<sup>-1</sup>

Определить:

1. скорости точек  $A, B, C, D$  механизма и угловые скорости всех его звеньев при помощи мгновенных центров скоростей;
2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;
3. ускорения точек  $A, B, C$ , а также угловое ускорение звена  $AB$  (аналитическим способом).

**Решение:** Построим механизм в выбранном масштабе  $m_e = 1:10$  (рис.5.7).

При исследовании кинематики плоского механизма будем рассматривать последовательно движение каждого звена механизма, начиная с ведущего звена, угловая скорость которого задана.

1. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.

а) Звено  $OA$  совершает вращательное движение вокруг неподвижного центра  $O$ . Определим скорость точки  $A$  кривошипа, которая одновременно при надлежит следующему звену  $AB$ . Величина скорости точки  $A$  определяется по формуле

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \frac{\pi}{3} \cdot 30 \approx 16 \quad \text{см/с.}$$

Вектор скорости  $V_A$  перпендикулярен прямой  $OA$  и направлен в сторону вращения кривошипа, указанную дуговой стрелкой  $\omega_0$  (рис.5.7).

б) Звено  $AB$  совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Выше найдена скорость точки  $A$  этого звена и известна линия действия (направления) скорости точки  $B$  ( $\vec{V}_B$  - вдоль прямой  $OB$ ). Мгновенный центр скоростей звена  $AB$  (точка  $C_{VI}$ ) находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках  $A$  и  $B$  к направлениям их скоростей ( $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ ). Точка  $C$  принадлежит звену  $AB$ . Соединим точку  $C$  с мгновенным центром

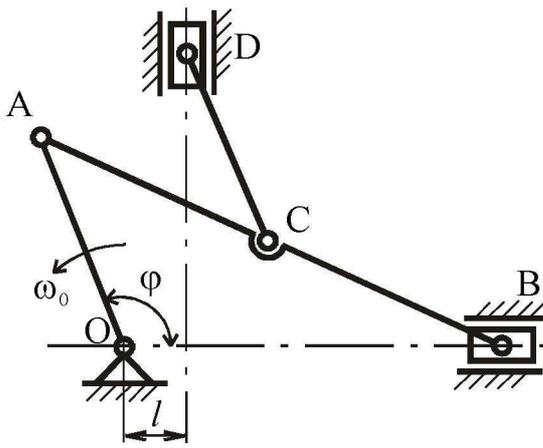


Рис. 5.1

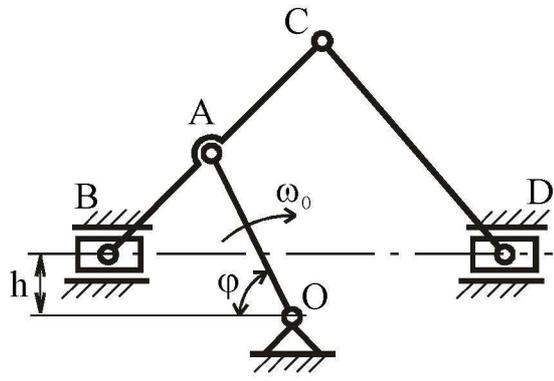


Рис. 5.2

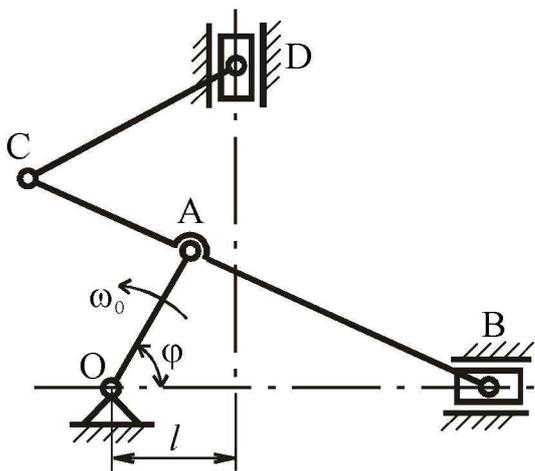


Рис. 5.3

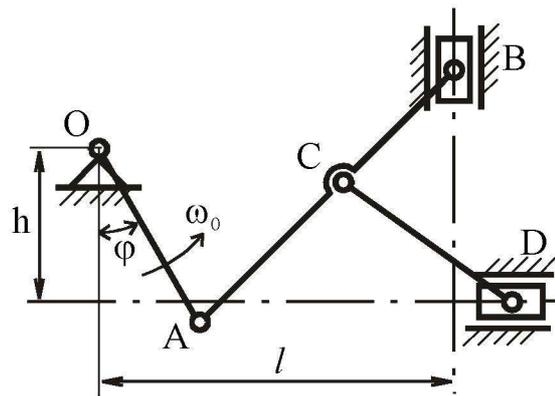


Рис. 5.4

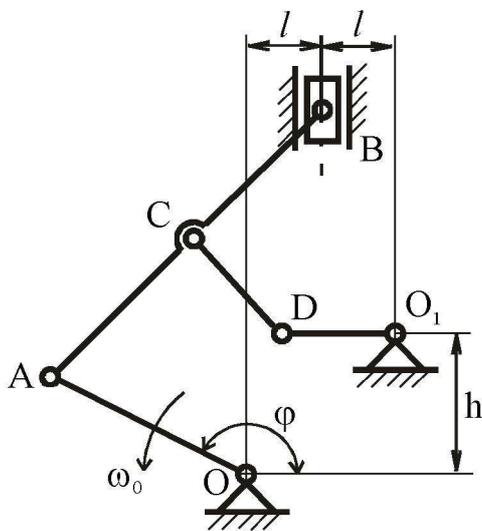


Рис. 5.5

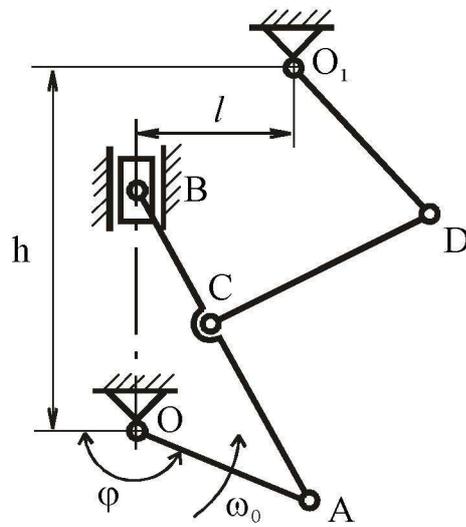


Рис. 5.6

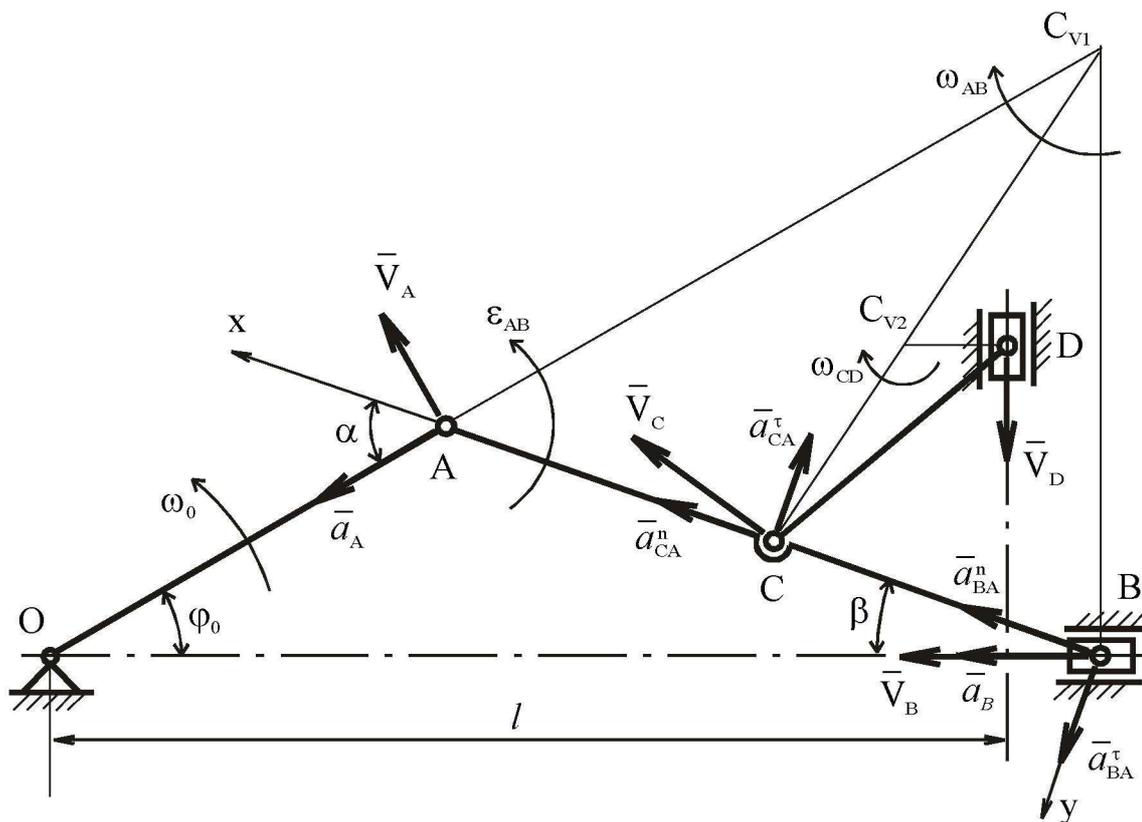


Рис. 5.7

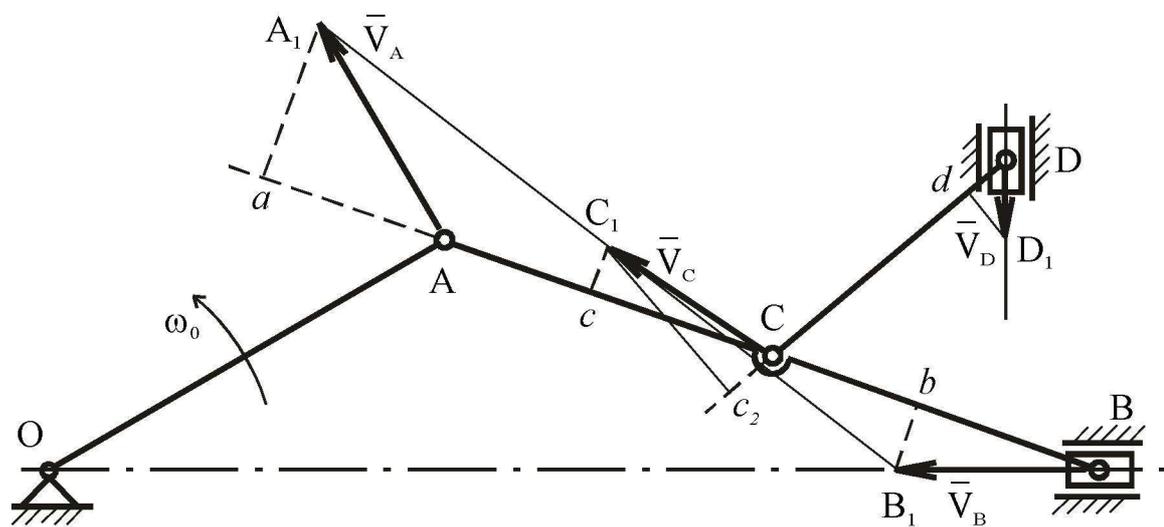


Рис. 5.8 скоростей  $C_{V1}$ . Вектор скорости точки  $C$  ( $\vec{V}_C$ ) направлен перпендикулярно к прямой  $CC_{V1}$ .

Для звена  $CD$  мгновенный центр скоростей определяем аналогично. Известна линия действия скорости точки  $C$  ( $\vec{V}_C$ ) и линия действия (направления) скорости в точке  $D$  (по вертикали). Восстанавливаем перпендикуляр в точке  $D$  к вертикали до пересечения с прямой  $CC_{V1}$  в точке  $C_{V2}$ .  $C_{V2}$  и есть мгновенный центр скоростей

звена *CD*.

Измеряем расстояния от точек  $A, B, C$  и  $D$  до соответствующих мгновенных центров скоростей

$$|AC_{V1}| = 8 \text{ см}, \quad |BC_{V1}| = 6 \text{ см}, \quad |CC_{V1}| = 6,1 \text{ см} . \\ |CC_{V2}| = 3 \text{ см} . \quad |DC_{V2}| = 1,4 \text{ см} .$$

Учитывая масштаб  $m_e$ , получаем

$$AC_{V1} = 80 \text{ см}, \quad BC_{V1} = 60 \text{ см}, \quad CC_{V1} = 61 \text{ см}, \\ CC_{V2} = 30 \text{ см}, \quad DC_{V2} = 74 \text{ см} .$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям до мгновенных центров скоростей. Для звена  $AB$  имеем

$$\frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{V_B}{BC_{V1}} = \frac{V_C}{CC_{V1}} .$$

Отсюда находим

$$V_B = V_A \frac{BC_{V1}}{AC_{V1}} = 12 \text{ см/с}, \quad V_C = V_A \frac{CC_{V1}}{AC_{V1}} = 12,2 \text{ см/с}.$$

Аналогично для звена  $CD$  получим

$$\frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{V_D}{DC_{V2}} \quad V_D = V_C \frac{DC_{V2}}{CC_{V2}} = 5,6 \text{ см/с}.$$

в) Определим величины угловых скоростей звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей

$$V_A = \omega_{AB} \cdot AC_{V1}, \quad V_B = \omega_{AB} \cdot BC_{V1}, \quad V_C = \omega_{AB} \cdot CC_{V1}, \\ V_C = \omega_{CD} \cdot CC_{V2}, \quad V_D = \omega_{CD} \cdot DC_{V2} .$$

$$\text{Отсюда } \omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{16}{80} = 0,2 \text{ см/с},$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{12,2}{30} \approx 0,41 \text{ см/с}.$$

Из рис.5.7. следует, что вращения звеньев  $AB$  и  $CD$  вокруг мгновенных центров скоростей происходят по часовой стрелке.

2. Определение скоростей этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки.

Для определения скоростей точек методом проекций вновь строим механизм в заданном масштабе ( $m_e = 1:10$ ) (рис.5.8). С помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, и теоремы о геометрическом месте концов векторов скоростей точек прямой  $B, C$  и  $D$ .

На рис.5.8 находим проекцию вектора скорости  $\vec{V}_A$ , который построен в масштабе ( $m_v = 1:4$ ), на прямую  $AB$ . Откладываем от точки  $B$  отрезок  $Aa = Bb$  вдоль прямой  $AB$ . Восстанавливаем в точке  $b$  перпендикуляр к прямой  $AB$  до

пересечения с прямой  $OB$ , по которой направлен вектор скорости в точке  $B$  ( $\vec{V}_B$ ). Соединяем концы векторов скоростей точек  $A$  и  $B$  прямой  $A_1B_1$ . От точки  $C$  вдоль прямой  $AB$  откладываем отрезок  $Cc = Aa$  и восстанавливаем из точки  $c$  перпендикуляр до пересечения с прямой  $A_1B_1$  в точке  $C_1$ . Отрезок  $CC_1$  определяет вектор скорости  $\vec{V}_C$  в точке  $C$ .

Скорость точки  $D$  определяем аналогично. Находим проекцию скорости  $\vec{V}_C$  на прямую  $CD$ . Откладываем от точки  $D$  отрезок  $Dd = Cc_2$ . Восстанавливаем перпендикуляр из точки  $d$  до пересечения в точке  $D_1$  с вертикалью, по которой направлен вектор скорости в точке  $D$  ( $\vec{V}_D$ ). Отрезок  $DD_1$  изображает вектор скорости  $\vec{V}_D$ .

Измеряя длины отрезков  $BB_1$ ,  $CC_1$ , и  $DD_1$ , и учитывая масштаб скорости  $m_v$ , найдем величины скоростей в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$

$$V_B = 12 \text{ см/с}, \quad V_C = 12,2 \text{ см/с}, \quad V_D = 5,6 \text{ см/с}.$$

### 3. Определение ускорений точек $A$ , $B$ и $C$ , а также углового ускорения $\epsilon_{AB}$

Так как кривошип  $OA$  вращается равномерно, ускорение точки  $A$  направлено к центру  $O$  и равно

$$a_A = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 8,215 \text{ см/с}^2.$$

Для определения ускорения точки  $B$  звена  $AB$  воспользуемся теоремой об ускорениях точек плоской фигуры. Считая точку  $A$  полюсом, запишем

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r$ . (1) Нормальное ускорение точки  $B$  во вращательном движении вокруг полюса  $A$  направлено от точки  $B$  к точке  $A$  вдоль  $AB$  и равно

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2,8 \text{ см/с}^2.$$

Что касается ускорений  $\vec{a}_B$  точки  $B$  и  $\vec{a}_{BA}^r$ , то известны только линии действия

этих векторов:  $\vec{a}_B$  - по прямой  $OB$  вдоль направляющих ползуна,  $\vec{a}_{BA}^r$  перпендикулярно  $AB$ . Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис.5.7). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора расчетному. Выбрав направления

осей  $x$  и  $y$  как показано на рис.5.7, получим

$$\begin{aligned} a_B \cdot \cos \beta &= a_A \cdot \cos \alpha + a_{BA}^n, \\ a_B \cdot \sin \beta &= a_A \cdot \sin \alpha + a_{BA}^r. \end{aligned} \quad (2)$$

Углы  $\alpha$  и  $\beta$  измеряем на рис.5.7 с помощью транспортира. Из уравнений (2) получим

$$a_B = \frac{a_A \cdot \cos \alpha + a_{BA}^n}{\cos \beta} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{BA}^r = a_B \cdot \sin \beta - a_A \cdot \sin \alpha = -4,15 \text{ см/с}^2. \quad (3)$$

Поскольку  $a_{BA}^r$  отрицательно, следовательно, направление вектора  $\vec{a}_{BA}^r$  противоположно выбранному на рис.5.7.

Направление ускорения  $\vec{a}_{BA}^{\tau}$  относительно полюса  $A$  определяет направление углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$ , которое показано на рис 5.7 дуговой стрелкой.

Для определения ускорения точки  $C$  примем за полюс точку  $A$  и в соответствии с теоремой об ускорениях точек плоской фигуры запишем равенство  $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^{\tau}$ . (5) Направление вектора ускорения  $\vec{a}_C$  точки  $C$  заранее неизвестно. Нормальное и тангенциальное ускорения точки  $C$  во вращательном движении вокруг полюса  $A$

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 2,1 \text{ см/с}^2 .$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 1,4 \text{ см/с}^2 ,$$

Вектор  $\vec{a}_{CA}^{\tau}$  перпендикулярен вектору  $\vec{a}_{CA}^n$  и направлен соответственно угловому ускорению  $\varepsilon_{AB}$ .

Ускорение точки  $C$  находим способом проекций

$$a_{Cx} = a_A \cdot \cos \alpha + a_{CA}^n = 7,5 \text{ см/с}^2 ,$$

$$a_{Cy} = a_A \cdot \sin \alpha - a_{CA}^{\tau} = 3,39 \text{ см/с}^2 .$$

Найдем величину вектора ускорения точки  $C$  по формуле

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 8,22 \text{ см/с}^2 .$$

## ЗАДАНИЕ Д-1 Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Материальная точка  $M$  массой  $m$ , получив в точке  $A$  начальную скорость  $V_0$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$  (рис. 1.1, 1.2), расположенной в вертикальной плоскости. Участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный. Угол наклона трубы  $\alpha=30^\circ$

На участке  $AB$  на материальную точку действует сила тяжести  $\vec{P}$ , постоянная сила  $\vec{Q}$  (ее направление указано на рисунках) и сила сопротивления среды  $\vec{R}$ , зависящая от скорости  $\vec{V}$  груза (направлена сила против движения). Трением груза о трубу на участке  $AB$  пренебрегаем.

В точке  $B$  материальная точка, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок  $BC$  трубы, где на нее действует сила тяжести  $\vec{P}$ , сила трения (коэффициент трения груза о трубу  $f=0,2$ ) и переменная сила  $\vec{F}$  проекция которой  $F_x$  на ось  $x$  приведена в таблице Д-1.

Известно расстояние  $AB=l$  или время  $t_1$  движения от точки  $A$  до точки  $B$ . Требуется найти закон движения материальной точки на участке  $BC$ :  $x=f(t)$

**Указание.** Решение задачи разбивается на две части. Сначала составляем и интегрируем методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке  $AB$  учитывая начальные условия. В случае, когда задана длина отрезка  $AB$ , целесообразно перейти от интегрирования по  $t$  к интегрированию по переменной  $z$  с помощью формулы:

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dt} \cdot \frac{dz}{dz} = V_z \frac{dV_z}{dz}$$

Зная время движения на участке  $AB$  или длину этого участка, определяем скорость материальной точки в конце участка, в точке  $B$ . Эта скорость принимается за начальную при исследовании движения материальной точки на участке  $BC$ . После этого составляем и интегрируем дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке  $BC$ .

### Пример выполнения задания Д-1

На вертикальном участке  $AB$  трубы (рис.1.3) на точку массой  $m=1$  кг действует сила тяжести и сила сопротивления  $R=\mu V^2$ . Скорость материальной точки  $M$  в начальный момент времени  $t=0$  в точке  $A$  равна нулю. Длина участка  $AB=2$  (м). На наклонном участке  $BC$  трубы ( $\alpha=30^\circ$ , на материальную точку действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения  $f=0,2$ ) и переменная сила  $F_x=16\sin(3t)$ . Требуется определить закон движения материальной точки на участке  $BC$ .

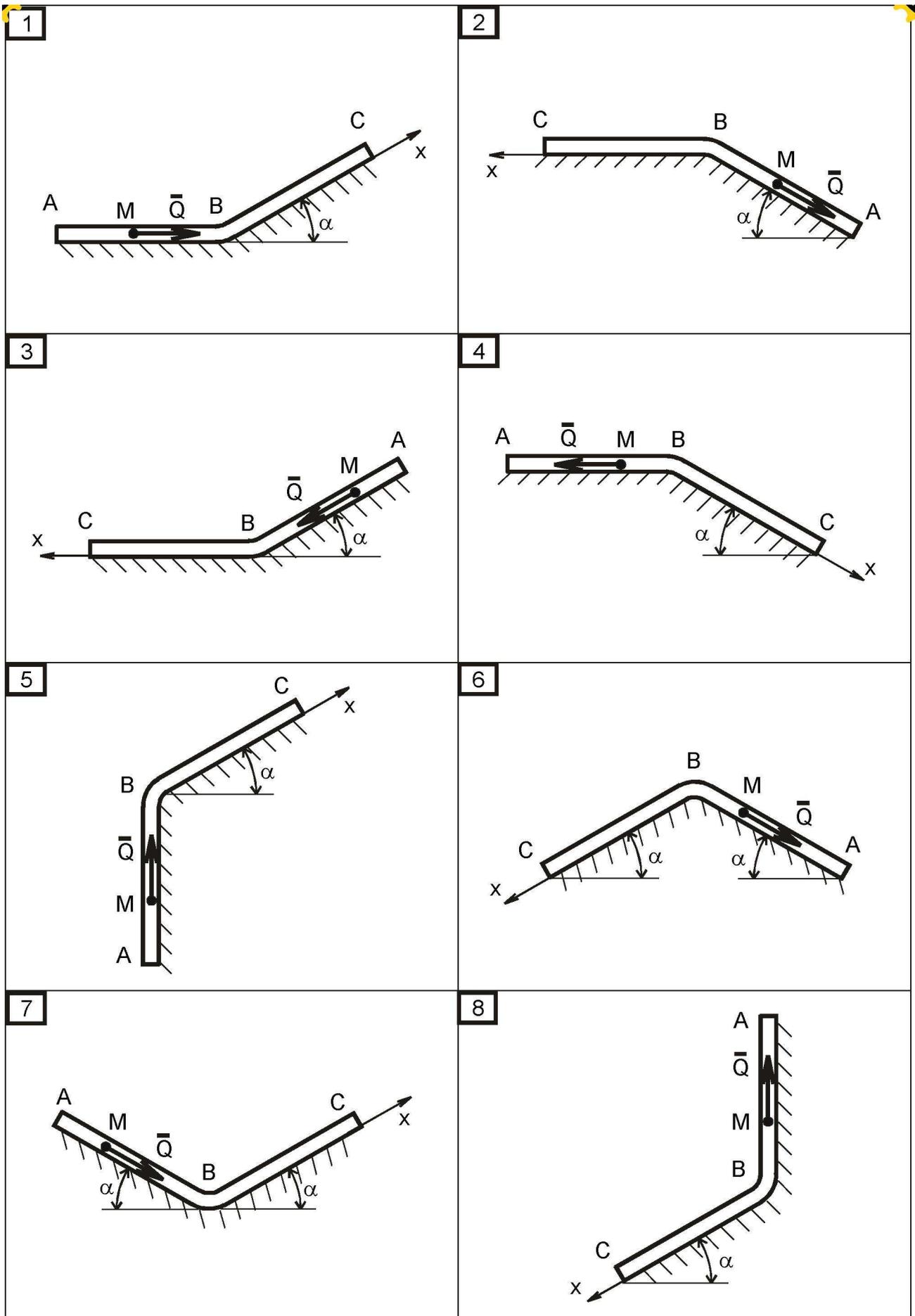


Рис. 1.1

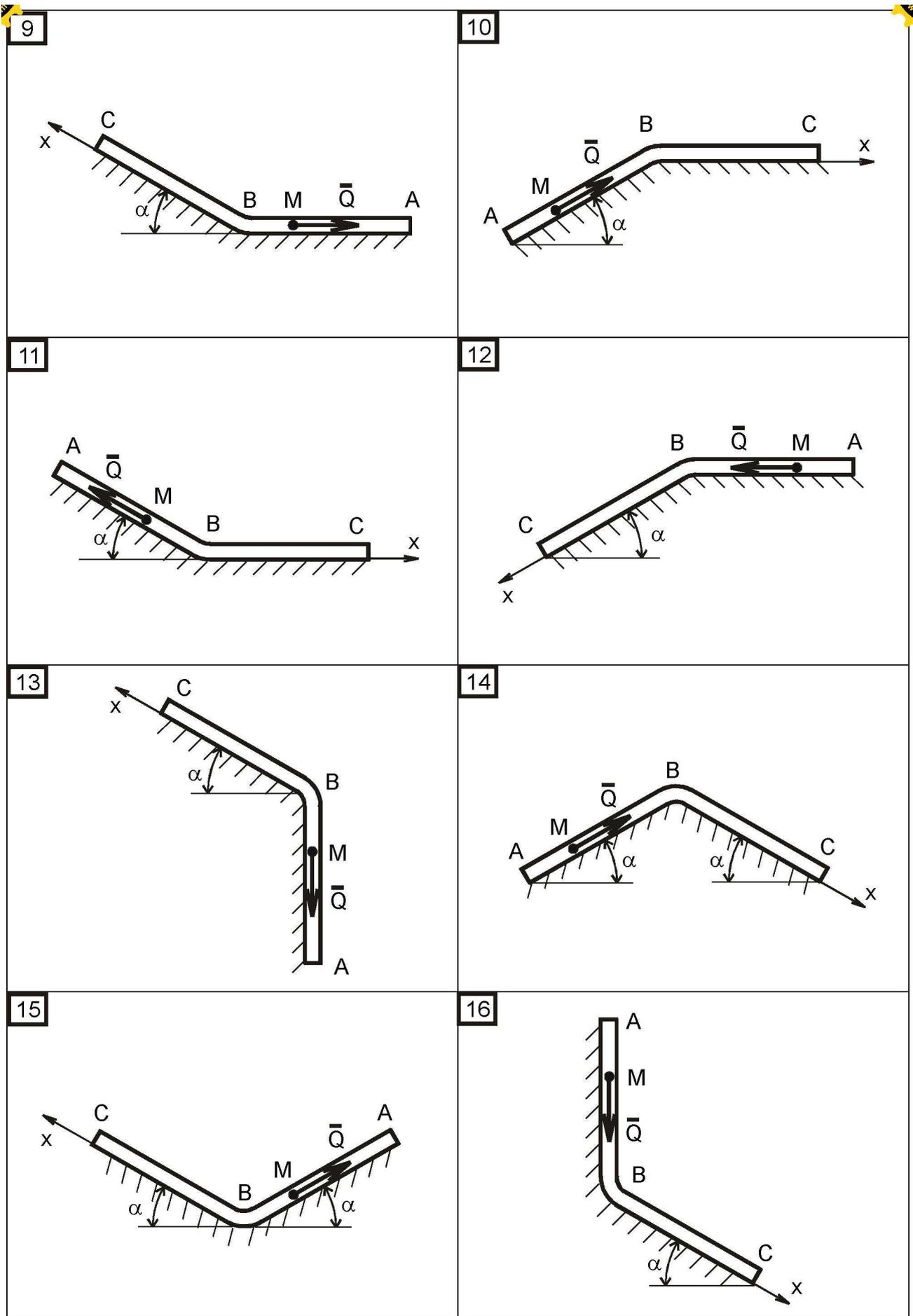


Рис. 12

Таблица Д-1

| № варианта | Рис. | $m$<br>(кг) | $V_0$ ,<br>м/с | $Q$ ,<br>Н | $R$ ,<br>Н | $\mu$ | $l$ ,<br>м | $t_1$ ,<br>с | $F_x$ ,<br>Н |
|------------|------|-------------|----------------|------------|------------|-------|------------|--------------|--------------|
| 1          | 1    | 4,5         | 18             | 9          | $\mu V$    | 0,45  | -          | 5            | $3\sin 2t$   |
| 2          | 2    | 3           | 32             | 4          | $\mu V^2$  | 0,8   | 2,5        | -            | $-8\cos 4t$  |
| 3          | 3    | 2           | 2              | 2          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 2,5          | $2\sin 4t$   |
| 4          | 4    | 6           | 14             | 18         | $\mu V^2$  | 0,6   | 5          | -            | $-3\cos 2t$  |
| 5          | 5    | 1,6         | 18             | 4          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 2            | $4\cos 4t$   |
| 6          | 6    | 1,2         | 22             | 2          | $\mu V^2$  | 0,8   | 0,5        | -            | $6t$         |
| 7          | 7    | 2           | 5              | 2          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 2,5          | $2\sin 4t$   |
| 8          | 8    | 2,4         | 12             | 6          | $\mu V^2$  | 0,48  | 1,5        | -            | $6t$         |
| 9          | 9    | 1,8         | 15             | 6          | $\mu V$    | 0,3   | -          | 3            | $9t^2$       |
| 10         | 10   | 4           | 12             | 12         | $\mu V^2$  | 0,8   | 2,5        | -            | $-8\cos 4t$  |
| 11         | 11   | 2           | 20             | 6          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 2,5          | $2\sin 4t$   |
| 12         | 12   | 4,8         | 5              | 12         | $\mu V^2$  | 0,24  | 5          | -            | $-6\sin 2t$  |
| 13         | 13   | 1,2         | 24             | 2          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 1            | $4\cos 4t$   |
| 14         | 14   | 2,4         | 12             | 6          | $\mu V^2$  | 0,8   | 0,5        | -            | $6t$         |
| 15         | 15   | 4           | 10             | 6          | $\mu V$    | 0,8   | -          | 5            | $3\sin 2t$   |
| 16         | 16   | 2,4         | 12             | 2          | $\mu V^2$  | 0,48  | 1,5        | -            | $6t$         |
| 17         | 1    | 6           | 2,5            | 18         | $\mu V^2$  | 0,6   | 5          | -            | $-3\cos 2t$  |
| 18         | 2    | 2           | 26             | 3          | $\mu V$    | 0,6   | -          | 5            | $2\cos 2t$   |
| 19         | 3    | 4           | 2              | 4          | $\mu V^2$  | 0,2   | 5          | -            | $-6\sin 4t$  |
| 20         | 4    | 1,6         | 18             | 4          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 2            | $4\cos 4t$   |
| 21         | 5    | 6           | 14             | 18         | $\mu V^2$  | 0,6   | 5          | -            | $-3\cos 2t$  |
| 22         | 6    | 2,1         | 28             | 3          | $\mu V$    | 0,5   | -          | 3            | $8\sin 2t$   |
| 23         | 7    | 2,4         | 1,2            | 2          | $\mu V^2$  | 0,8   | 1,5        | -            | $6t$         |
| 24         | 8    | 2           | 20             | 6          | $\mu V$    | 0,4   | -          | 2,5          | $2\sin 4t$   |
| 25         | 9    | 8           | 10             | 16         | $\mu V^2$  | 0,8   | 15         | -            | $-6\cos 2t$  |
| 26         | 10   | 1,8         | 15             | 6          | $\mu V$    | 0,3   | -          | 2            | $9t^2$       |
| 27         | 11   | 2,5         | 1,5            | 8          | $\mu V^2$  | 0,75  | 2,5        | -            | $3\sin 2t$   |
| 28         | 12   | 3           | 2,2            | 9          | $\mu V$    | 0,6   | -          | 2,5          | $2\cos 2t$   |
| 29         | 13   | 2           | 28             | 5          | $\mu V^2$  | 0,6   | 0,5        | -            | $-3\cos 2t$  |
| 30         | 14   | 4,5         | 18             | 9          | $\mu V$    | 0,5   | -          | 3            | $8\sin 2t$   |

### Решение

Рассмотрим движение материальной точки на участке  $AB$ . Изобразим на чертеже материальную точку  $M$  в произвольном положении. На точку действуют силы  $\vec{P}$  и  $\vec{R}$ . Введем ось  $z$  в направлении от точки  $A$  к точке  $B$ . Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось  $z$ .

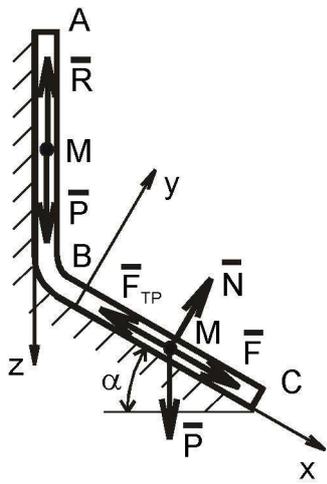


Рис. 1.3

$$m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{KZ} \quad \text{или} \quad m \frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z \quad .$$

$$P_z = mg \quad R_z = -\mu V^2 \quad V_z = V$$

$$m \frac{dV}{dt} = mg - \mu V^2 \quad , \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} = g - \frac{\mu}{m} V^2 \quad . \quad (1)$$

Введем обозначение  $b = \frac{\mu}{m} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \quad (1/м)$ .

Тогда (1) запишется так

$$\frac{dV}{dt} = g - bV^2 \quad (2)$$

Так как в условии задачи задана длина участка  $AB$ , то целесообразно при интегрировании перейти от переменной  $t$  к переменной  $z$  в уравнении (2). Домножим на  $dz$  правую и левую части уравнения (2), получим

$$dz \frac{dV}{dt} = (g - bV^2) dz \quad \frac{dz}{dt} = V$$

$$V dV = (g - bV^2) dz \quad (3)$$

Разделим переменные в уравнении (3) и вычислим интегралы от обеих частей равенства

$$\frac{V dV}{g - bV^2} = dz \quad , \quad -\frac{1}{2b} \ln(g - bV^2) = z + C_1 \quad . \quad (4)$$

Из начальных условий  $V_0 = 0, z_0 = 0$  следует, что

$$C_1 = -\frac{1}{2b} \ln g \quad (5) \quad \text{Подставим (5) в (4),}$$

получим

$$-\frac{1}{2b} \ln \frac{g - bV^2}{g} = z \quad \text{или} \quad \frac{g - bV^2}{g} = e^{-2bz}$$

Так как длина участка трубы  $AB = 2$  (м), то скорость в конце участка в точке  $B$  будет равна

$$V_B^2 = g \frac{1 - e^{-2bz}}{2} = 10 \frac{1 - e^{-2 \cdot 0,5 \cdot 2}}{2} = 20 \left( 1 - \frac{1}{e} \right) ,$$

$$V_B = 4,15 \text{ м/с} . \quad (6)$$

Рассмотрим движение материальной точки на участке  $BC$ . Изобразим в произвольном положении точку и действующие на нее силы  $P=mg$ ,  $N$ ,  $F_{TP}$  и  $F$ . Введем оси координат  $X$  и  $Y$  и составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на оси  $x$  и  $y$

$$m \frac{dV_X}{dt} = mg \sin \alpha - F_{TP} + F_X , \quad (7)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha . \quad (8)$$

Найдем силу  $N$  из уравнения (8)

$$N = mg \cos \alpha .$$

Из этого равенства и закона Кулона  $F_{TP}=fN$  определим силу трения

$$F_{TP} = fmg \cos \alpha .$$

Подставим значения сил трения и  $F_X$  в уравнение (7)

$$m \frac{dV_X}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(3t) . \quad (9)$$

Разделим обе части уравнения (9) на  $m$  и подставим численные значения параметров

$$\frac{dV_X}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(3t) = 9,8(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) + 3,2$$

Имеем

$$\frac{dV_X}{dt} = 3,2 + 16 \sin(3t) . \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на  $dt$  и интегрируя, получим

$$V_X = 3,2t - \frac{16}{3} \cos(3t) + C_2 . \quad (11)$$

$$C_2 = 4,15 + \frac{16}{3} \cos 0 = 9,48 .$$

Из начального условия  $V(0) = V_B$  и (6) получим

Подставим значение  $C_2$  в (11)

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - \frac{16}{3} \cos 3t + 9,48$$

Умножаем обе части уравнения на  $dt$  и интегрируем по  $t$

$$x = 1,6t^2 - \frac{16}{9} \sin 3t + 9,48t + C_3 \quad . \quad (12)$$

Из начального условия  $x(0)=0$ , получим. Поставляем  $C_3=0$  . значение  $C_3$  в (12) и находим закон движения точки на участке ВС

$$x = 1,6t^2 - \frac{16}{9} \sin 3t + 9,48t \quad .$$

### ЗАДАНИЕ Д-3 Теорема об изменении кинетического момента механической системы

На звено 1 механизма, угловая скорость которого равна  $\omega_{10}$ , с некоторого момента времени ( $t=0$ ) начинает действовать пара сил с моментом  $M$  (движущий момент) или движущая сила  $P$ .

Массы звеньев 1 и 2 механизма равны соответственно  $m_1$  и  $m_2$ , а масса поднимаемого груза 3 -  $m_3$ . Момент сил сопротивления вращению ведомого звена 2 равен  $M_c$ . Радиусы больших и малых окружностей звеньев 1 и 2:  $R_1, r_1, R_2, r_2$

Схемы механизмов показаны на рис. 3.1-3.3, а необходимые для решения данные приведены в табл. 3.1.

Найти уравнение вращательного движения звена механизма, указанного в последней графе табл. 3.1. Определить также натяжение нитей в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкосновение звеньев 1 и 2, найти усилие в точке их касания. Звенья 1 и 2, для которых радиусы инерции  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в табл. 3.1 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

#### Пример выполнения задания Д-3

Дано:  $m_1=100$  кг;  $m_2=150$  кг;  $m_3=400$  кг;  $M=4200+200t$  Нм;  $M_c=2000$  Нм=const;  $R_1=60$  см;  $R_2=40$  см;  $r_2=20$  см;  $\rho_1=20\sqrt{2}$  см;  $\rho_2=30$  см;  $\omega_{10}=2$  сек<sup>-1</sup>.

Найти уравнение  $\varphi_2=f(t)$  вращательного движения звена 2 механизма, а также окружное усилие  $S$  в точке касания звеньев 1 и 2 и натяжение нити  $T$  в момент времени  $t_1=1$  сек (рис. 3.4.а).

#### Решение

К звену 1 механизма приложены (рис. 3.4.6) сила тяжести  $\vec{G}_1$ , движущий момент  $M$ , составляющие реакции подшипника  $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ , окружное усилие  $\vec{S}_1$  и нормальная реакция  $\vec{N}_1$  звена 2.

К звену 2 механизма приложены сила тяжести  $\vec{G}_2$ , момент сил сопротивления  $M_c$ , составляющие реакции подшипника  $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ , натяжение нити  $\vec{T}$ , к которой подвешен груз 3, окружное усилие  $\vec{S}_2$  и нормальная реакция  $\vec{N}_2$  звена 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести  $\vec{G}_3$  и натяжение нити  $\vec{T}$ .

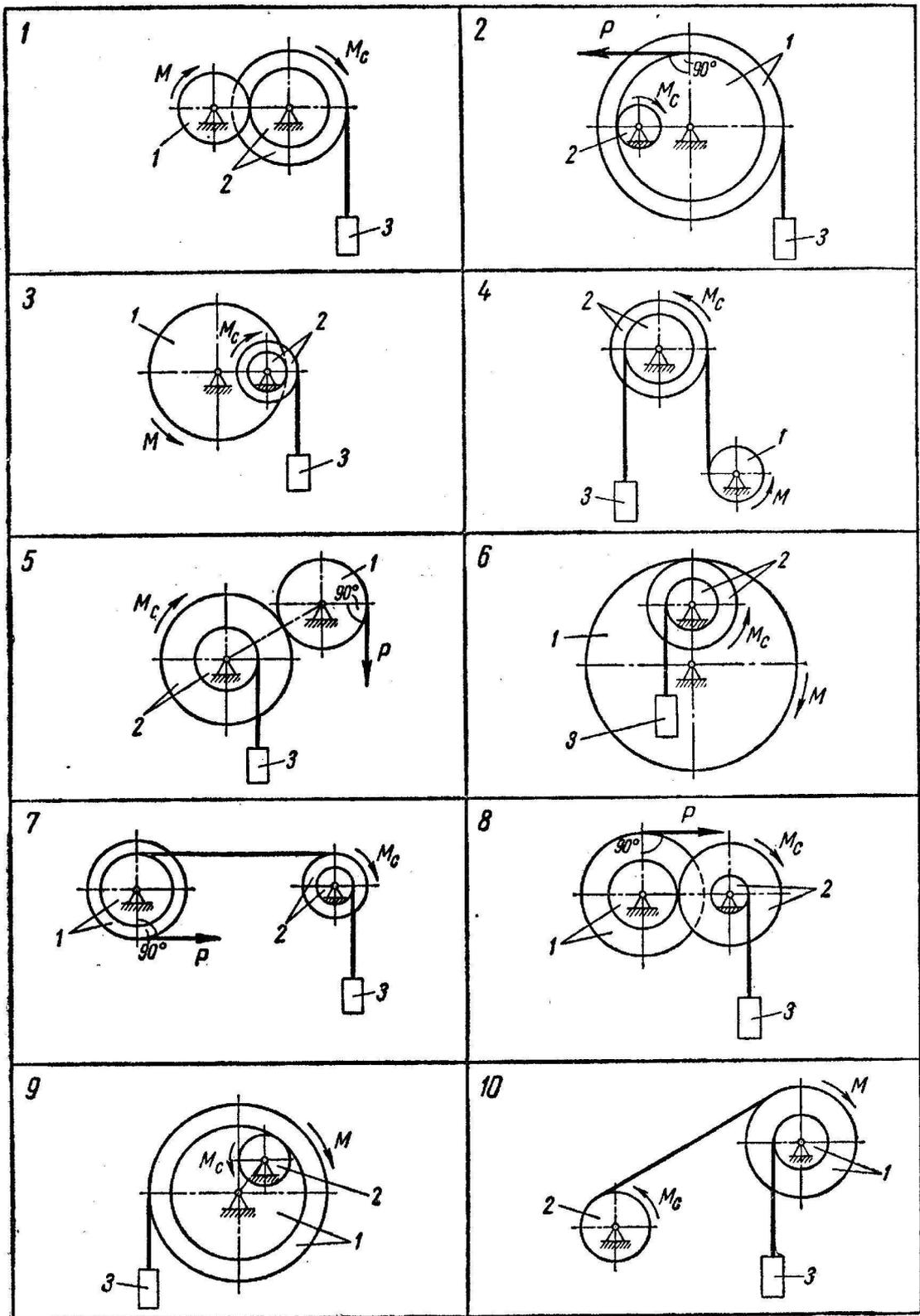


Рис. 3.1

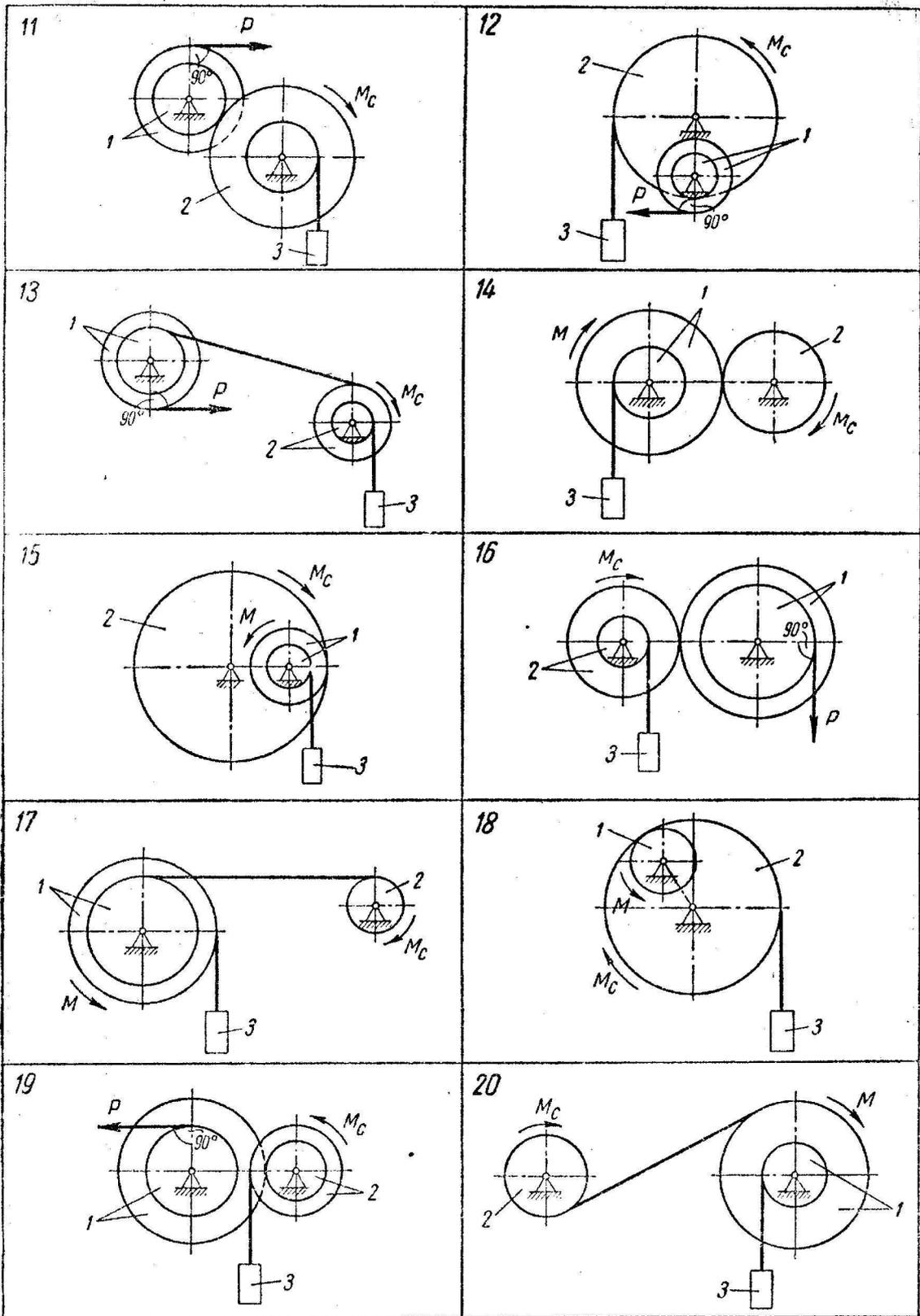


Рис. 3.2

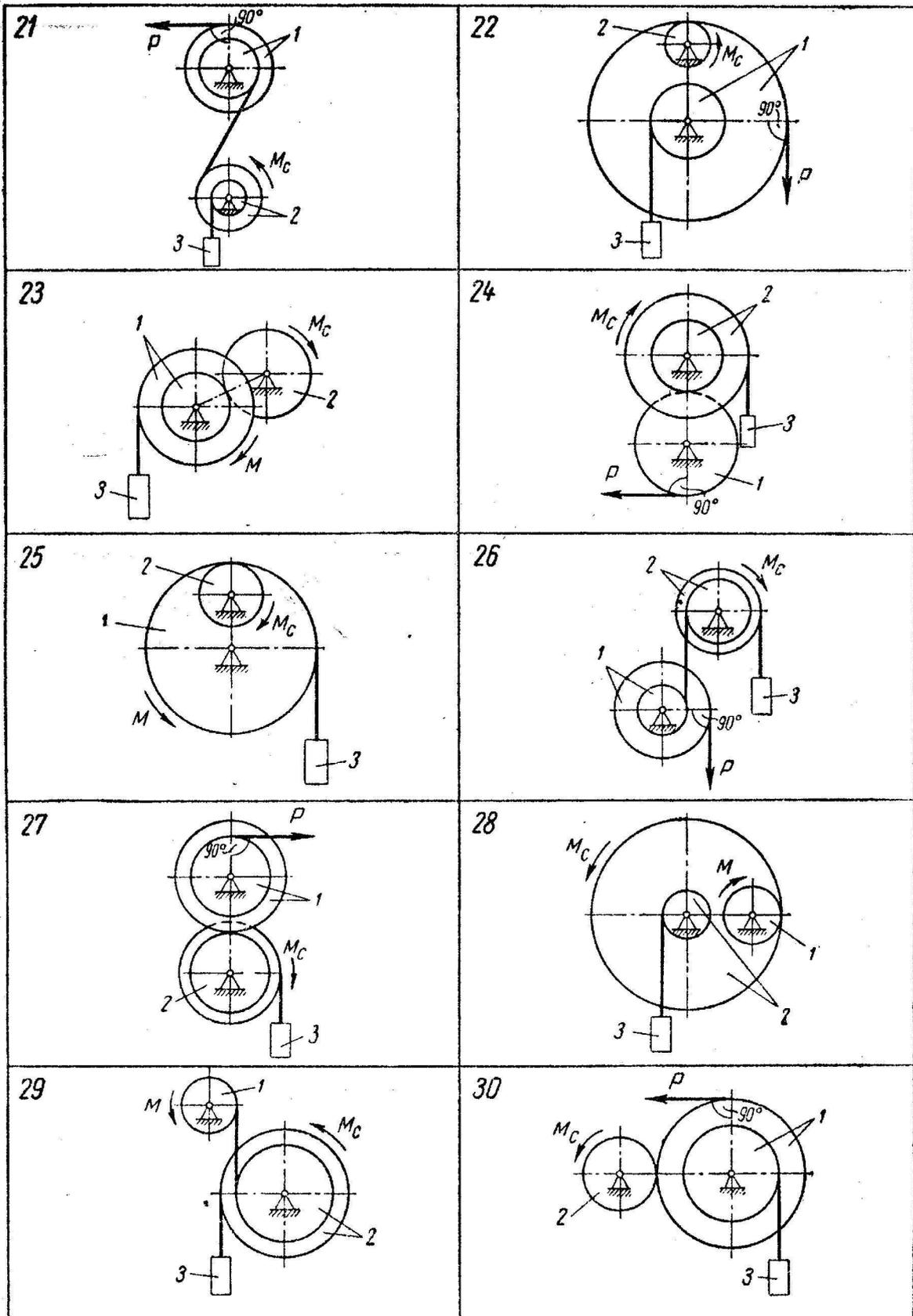


Рис. 3.3

Таблица Д-3

| № Варианта | $m_1$ , кг | $m_2$ , кг | $m_3$ , кг | $R_1$ , см | $r_1$ , см | $R_2$ , см | $r_2$ , см | $\rho_1$ , см | $\rho_2$ , см | $M$ , Нм               | $P$ , Н                 | $M_C$ , Нм | $\omega_{10}$ , с <sup>-1</sup> | $t$ , с | Найти       |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|------------------------|-------------------------|------------|---------------------------------|---------|-------------|
| 1          | 100        | 300        | 500        | 20         | -          | 60         | 40         | -             | 60            | 2100+20t               | -                       | 1000       | 2                               | 2       | $\varphi_1$ |
| 2          | 300        | 80         | 500        | 70         | 50         | 20         | -          | 60            | -             | -                      | 10200+100t <sup>2</sup> | 600        | 1                               | 0,5     | $\varphi_2$ |
| 3          | 200        | 100        | 400        | 60         | -          | 30         | 20         | 60            | $20\sqrt{2}$  | 6100+20e <sup>t</sup>  | -                       | 800        | 0,5                             | 2,5     | $\varphi_1$ |
| 4          | 100        | 250        | 300        | 20         | -          | 50         | 30         | -             | 40            | 1000+40t <sup>2</sup>  | -                       | 1400       | 1,5                             | 2       | $\varphi_1$ |
| 5          | 150        | 300        | 600        | 30         | -          | 50         | 20         | -             | 30            | -                      | 5500+200t               | 1500       | 2                               | 1       | $\varphi_2$ |
| 6          | 400        | 250        | 600        | 70         | -          | 30         | 20         | 70            | $20\sqrt{2}$  | 4800+10e <sup>2t</sup> | -                       | 800        | 3                               | 4       | $\varphi_1$ |
| 7          | 300        | 200        | 400        | 60         | 40         | 30         | 20         | 50            | 20            | -                      | 3000+100t <sup>2</sup>  | 500        | 0                               | 3       | $\varphi_2$ |
| 8          | 300        | 250        | 700        | 50         | 30         | 40         | 20         | 40            | 30            | -                      | 9700+50t <sup>3</sup>   | 500        | 1                               | 2       | $\varphi_1$ |
| 9          | 200        | 100        | 500        | 80         | 60         | 20         | -          | $50\sqrt{2}$  | -             | 5900+30t               | -                       | 600        | 2                               | 3       | $\varphi_2$ |
| 10         | 250        | 100        | 400        | 40         | 20         | 30         | -          | 30            | -             | 2500+50e <sup>t</sup>  | -                       | 1200       | 0                               | 1,5     | $\varphi_2$ |
| 11         | 150        | 300        | 700        | 40         | 30         | 60         | 30         | 30            | 40            | -                      | 3900+50t <sup>2</sup>   | 1000       | 1                               | 2       | $\varphi_1$ |
| 12         | 100        | 200        | 600        | 30         | 20         | 60         | -          | $20\sqrt{2}$  | 60            | -                      | 5700+50t                | 1500       | 2                               | 2       | $\varphi_1$ |
| 13         | 180        | 100        | 300        | 50         | 40         | 30         | 20         | $30\sqrt{2}$  | 20            | -                      | 2700+200t <sup>3</sup>  | 400        | 0,5                             | 1       | $\varphi_2$ |
| 14         | 150        | 80         | 400        | 40         | 20         | 30         | -          | 30            | -             | 1800+20t               | -                       | 700        | 1,5                             | 2,5     | $\varphi_1$ |
| 15         | 300        | 180        | 500        | 20         | 10         | 50         | -          | $10\sqrt{2}$  | 50            | 700+40t <sup>2</sup>   | -                       | 300        | 0                               | 1,5     | $\varphi_1$ |

Продолжение таблицы Д-3

| № Варианта | $m_1$ , кг | $m_2$ , кг | $m_3$ , кг | $R_1$ , см | $r_1$ , см | $R_2$ , см | $r_2$ , см | $\rho_1$ , см | $\rho_2$ , см | $M$ , Нм               | $P$ , Н                 | $M_C$ , Нм | $\omega_{10}$ , с <sup>-1</sup> | $t$ , с | Найти    |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|------------------------|-------------------------|------------|---------------------------------|---------|----------|
| 16         | 300        | 250        | 400        | 60         | 40         | 50         | 30         | 50            | 40            | -                      | 7300+100t               | 1200       | 1                               | 2       | $\phi_1$ |
| 17         | 250        | 100        | 800        | 50         | 30         | 20         | -          | 40            | -             | 5400+50t <sup>2</sup>  | -                       | 900        | 2                               | 2       | $\phi_1$ |
| 18         | 200        | 100        | 600        | 20         | -          | 50         | -          | -             | 50            | 1900+20e <sup>2t</sup> | -                       | 1500       | 0,5                             | 1       | $\phi_2$ |
| 19         | 250        | 150        | 400        | 50         | 30         | 30         | 20         | 40            | 20 $\sqrt{2}$ | -                      | 14200+200t <sup>2</sup> | 500        | 0,5                             | 2       | $\phi_1$ |
| 20         | 400        | 100        | 800        | 50         | 20         | 30         | -          | 40            | -             | 3700+50e <sup>t</sup>  | -                       | 1200       | 2                               | 1       | $\phi_2$ |
| 21         | 200        | 150        | 300        | 50         | 40         | 30         | 20         | 30 $\sqrt{2}$ | 20            | -                      | 3800+100t               | 800        | 1                               | 1,5     | $\phi_2$ |
| 22         | 250        | 100        | 800        | 60         | 20         | 10         | -          | 50            | -             | -                      | 9700+200t <sup>3</sup>  | 700        | 2                               | 0,5     | $\phi_1$ |
| 23         | 200        | 80         | 400        | 40         | 20         | 30         | -          | 30            | -             | 2300+20t               | -                       | 900        | 0,5                             | 1       | $\phi_2$ |
| 24         | 100        | 200        | 500        | 30         | -          | 40         | 20         | -             | 30            | -                      | 12600+100t <sup>2</sup> | 500        | 1,5                             | 1       | $\phi_1$ |
| 25         | 150        | 80         | 400        | 60         | -          | 20         | -          | 60            | -             | 4900+40e <sup>3t</sup> | -                       | 800        | 0                               | 1,5     | $\phi_2$ |
| 26         | 250        | 200        | 500        | 50         | 20         | 40         | 30         | 40            | 30            | -                      | 3500+150t               | 600        | 2                               | 2       | $\phi_1$ |
| 27         | 250        | 150        | 500        | 50         | 30         | 40         | 30         | 30 $\sqrt{2}$ | 30            | -                      | 15200+100t <sup>3</sup> | 700        | 1,5                             | 1       | $\phi_1$ |
| 28         | 60         | 200        | 900        | 20         | -          | 60         | 10         | -             | 50            | 900+10t <sup>2</sup>   | -                       | 1500       | 0                               | 2       | $\phi_2$ |
| 29         | 50         | 200        | 500        | 20         | -          | 40         | 30         | -             | 25 $\sqrt{2}$ | 2100+20e <sup>t</sup>  | -                       | 1000       | 2                               | 0,5     | $\phi_1$ |
| 30         | 300        | 60         | 600        | 50         | 30         | 20         | -          | 40            | -             | -                      | 7200+50t                | 700        | 1,5                             | 1       | $\phi_2$ |

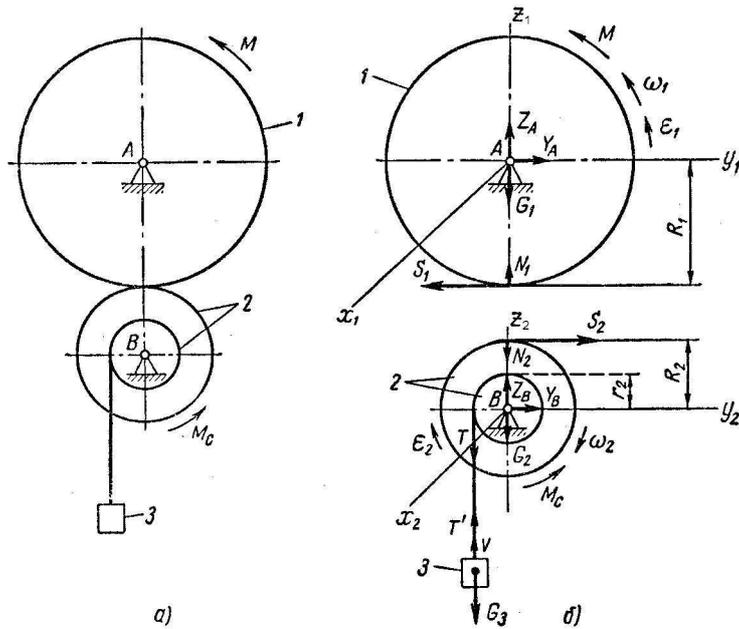


Рис. 3.4

Очевидно:  $S_2 = -S_1$ ,  $N_1 = -N_2$ ,  $T = -T$ .

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 1 вокруг неподвижной оси  $x_1$ :

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = M_1^e .$$

Главный момент  $M_1^e$  внешних сил, приложенных к звену 1 (рис. 3.4,б), относительно осей  $x_1$

Момент  $M$  задает направление  $\omega_1$ , приводит в движение систему и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый усилием  $\vec{S}_1$ , направлен противоположно  $\omega_1$ , препятствует вращению звена 1 и, следовательно, отрицателен. Дифференциальное уравнение вращательного движения звена 1 примет вид

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = M - S_1 R_1 . \quad (1)$$

Выразим угловое ускорение  $\ddot{\varphi}_1$  звена 1 через угловое ускорение  $\ddot{\varphi}_2$  звена 2.

Так как

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{R_2}{R_1} , \quad \text{то} \quad \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \frac{R_2}{R_1} .$$

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$I_1 \ddot{\phi}_2 \frac{R_2}{R_1} = M - S_1 R_1 \quad (2)$$

Для составления дифференциального уравнения вращения вокруг оси  $x_2$  звена 2, к которому подвешен груз 3, применим теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_2}{dt} = M_2^e \quad (3)$$

Кинетический момент системы 2-3 относительно оси  $x_2$

$$K_2 = I_2 \omega_2 + m_3 V r_2 \quad ,$$

где  $I_2 \omega_2$  - кинетический момент звена 2, вращающегося с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг неподвижной оси  $x_2$ ;  $m_3 V r_2$  - момент количества движения груза 3, движущегося поступательно со скоростью  $V$ . Так как  $V = \omega_2 r_2$ , то

$$K_2 = (I_2 + m_3 r_2^2) \omega_2 = I_{np_2} \dot{\phi}_2$$

где  $I_{np_2} = I_2 + m_3 r_2^2$  - приведенный к оси  $x_2$  момент инерции системы 2-3.

Главный момент  $M_2^e$  внешних сил, приложенных к системе 2-3 (рис.3.4), относительно оси  $x_2$

Момент, создаваемый усилием  $\vec{S}_2$ , задает направление  $\omega_2$ , приводит в движение систему 2-3 и поэтому принят положительным, а момент силы тяжести груза  $\vec{G}_3$  и момент сил сопротивления  $\vec{M}_C$  направлены противоположно  $\omega_2$ , препятствуют движению системы и, следовательно, отрицательны. Таким образом, из уравнения

$$\frac{d}{dt} (I_{np_2} \dot{\phi}_2) = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C \quad .$$

и получаем следующее дифференциальное уравнение вращения звена 2:

$$I_{np_2} \ddot{\phi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C \quad (4)$$

В полученной системе уравнений (2) и (4) неизвестны усилия  $S_1=S_2=S$  и угловое ускорение  $\ddot{\varphi}_2$ . Для исключения  $S$  первое из уравнений этой системы домножим на  $R_2$ , второе на  $R_1$  и сложим их. Тогда получим

$$\left( I_1 \frac{R_2^2}{R_1} + I_{np_2} R_1 \right) \ddot{\varphi}_2 = MR_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1 ,$$

или

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{MR_1 R_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_{np_2} R_1^2} . \quad (5)$$

Выражение (5) определяет в общем виде угловое ускорение звена 2 механизма. Учитывая исходные данные, найдем:

$$I_1 = m_1 \rho_1^2 = 100(0,2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 ,$$

$$I_{np_2} = I_2 + m_3 r_2^2 = m_2 \rho_2^2 + m_3 r_2^2 = 150 \cdot 0,3^2 + 400 \cdot 0,2^2 = 29,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 .$$

Подставляем числовые данные в (5)

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 &= \frac{(4200 + 200t)0,6 \cdot 0,4 - (400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000) \cdot 0,6^2}{8 \cdot 0,4^2 + 29,5 \cdot 0,6^2} = \\ &= 4,034t + 0,4597 \text{ (сек}^{-2}\text{)}. \end{aligned}$$

Интегрируем это уравнение дважды:

$$\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + C_1 ;$$

$$\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + C_1 t + C_2 .$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи:

$$t=0 \quad \varphi_2=0 \quad \dot{\varphi}_2(0) = \omega_2(0) = \omega_1(0) \cdot \frac{R_1}{R_2} = 2 \cdot \frac{60}{40} = 3 \text{ сек}^{-1} .$$

Уравнение угловой скорости звена 2 имеет вид

$$\dot{\phi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + 3 \quad (\text{сек}^{-1}).$$

Искомое уравнение вращательного движения звена 2 имеет вид:

$$\phi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + 3t \quad (\text{рад}).$$

Окружное усилие  $S$  можно определить из уравнения (4):

При  $t_1=1$  сек

$$S = \frac{29,5(4,034 \cdot 1 + 0,4597) + 400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000}{0,4} = 7295 \quad \text{Н.}$$

$$S = S_2 = \frac{I_{np2} \ddot{\phi}_2 + G_3 r_2 + M_C}{R_2} .$$

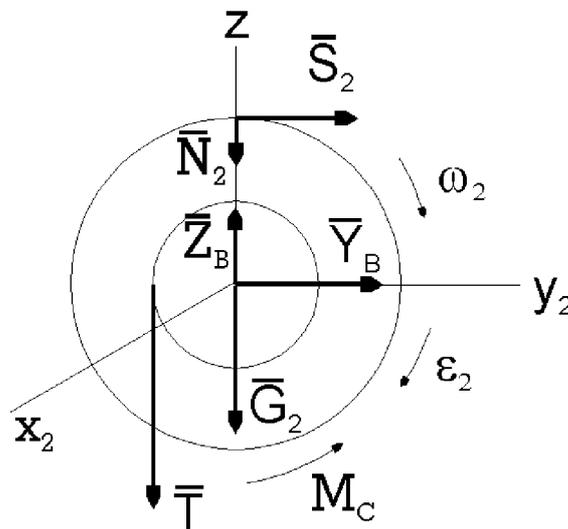


Рис. 3.5