

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

В.М. Дмитриев, А.В. Шутенков, В.И. Хатников,
Т.В. Ганджа, Е.Б. Шандарова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 1

Установившиеся режимы
в линейных электрических цепях

Учебное пособие

Томск, 2015

УДК 621.3.01(075.8)

ББК 31.21я73

Д 53

Д 53 Дмитриев В.М., Шутенков А.В., Хатников В.И., Ганджа Т.В., Шандарова Е.Б. Теоретические основы электротехники. Ч. 1: Установившиеся режимы в линейных электрических цепях: Учебное пособие.– Томск: 2015.– 187 с.
ISBN

Рассмотрены установившиеся режимы в линейных электрических цепях постоянного и переменного тока с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Учебное пособие кроме теоретических сведений содержит примеры расчета электрических цепей.

Книга подготовлена на кафедре моделирования и системного анализа ТУСУРа и предназначена для студентов, обучающихся в областях электроники и нанoeлектроники, радиотехники, автоматики и управления очной и дистанционной форм обучения.

УДК 621.3.01(075.8)

ББК 31.21я73

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Б.В. Лукутин,
д-р техн. наук, доцент Е.Н. Ивашкина

ISBN

© В.М. Дмитриев, А.В. Шутенков,
В.И. Хатников, Т.В. Ганджа,
Е.Б. Шандарова, 2015
© ТУСУР, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Тема 1. Основные понятия и законы электрических цепей	8
1.1. Определение электрической цепи	8
1.2. Топологические характеристики цепи	8
1.3. Фундаментальные переменные цепи	13
1.4. Схемы электрической цепи	16
1.5. Элементы электрических цепей	17
1.6. Классификация сигналов	23
1.7. Понятие о компонентных и топологических уравнениях. Закон Ома. Законы Кирхгофа	27
1.8. Модели электрической цепи. Анализ и синтез электрических цепей	28
1.9. Классификация электрических цепей	30
Тема 2. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии	31
2.1. Понятие гармонической функции	31
2.2. Метод комплексных амплитуд. Комплексные числа и основные операции над ними	33
2.3. Комплексные изображения гармонических функций	34
2.4. Анализ RLC-цепей при гармоническом воздействии	37
2.5. Активная, реактивная, полная и комплексная мощности	41
2.6. Баланс мощностей	43
2.7. Преобразования электрических цепей	44
2.8. Расчет электрических цепей с взаимной индуктивностью	49
2.9. Линейный трансформатор	53
Тема 3. Частотные характеристики электрической цепи. Резонанс в электрических цепях	55
3.1. Комплексные частотные характеристики	55
3.2. Понятие о резонансе в электрических цепях	56

3.3. Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений	57
3.4. Параллельный колебательный контур. Резонанс токов	60
3.5. Резонанс в индуктивно связанных колебательных контурах	62
Тема 4. Анализ разветвленных электрических цепей ...	64
4.1. Общее представление о методах формирования уравнений модели цепи	64
4.2. Методы, основанные на прямом применении законов Кирхгофа	64
4.3. Метод контурных токов	66
4.4. Метод узловых напряжений	70
4.5. Метод компонентных цепей	74
Тема 5. Принципы и теоремы теории цепей	76
5.1. Принцип наложения и метод наложения	76
5.2. Принцип взаимности	77
5.3. Принцип компенсации	77
5.4. Теорема и метод эквивалентного генератора	78
Тема 6. Четырехполюсники	81
6.1. Классификация четырехполюсников	81
6.2. Основные уравнения и первичные параметры четырехполюсников	82
6.3. Схемы замещения четырехполюсников	85
6.4. Характеристические параметры четырехполюсников	86
6.5. Электрические фильтры	90
6.6. Фильтры высоких порядков	97
Тема 7. Расчет электрических цепей при периодических несинусоидальных воздействиях	105
7.1. Метод расчета мгновенных установившихся значений переменных при действии несинусоидальных ЭДС	105
7.2. Действующие периодические несинусоидальные токи и напряжения	109
7.3. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях	109

7.4. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при периодическом несинусоидальном напряжении	110
Тема 8. Трехфазные цепи	113
8.1. Понятие о многофазных цепях и системах	113
8.2. Симметричный режим трехфазной цепи	115
8.3. Несимметричный режим трехфазной цепи	120
8.4. Измерение мощности в трехфазных цепях	122
8.5. Аварийные режимы в трехфазных цепях	125
8.6. Вращающееся магнитное поле	126
8.7. Разложение несимметричной трехфазной системы напряжений и токов на симметричные составляющие	129
Тема 9. Установившиеся режимы в электрических цепях с распределенными параметрами	131
9.1. Определение цепей с распределенными параметрами. Упрощенная теория линий	131
9.2. Дифференциальные уравнения однородной линии и их решение для синусоидального режима	131
9.3. Бегущие волны в линии	134
9.4. Определение напряжения и тока в любой точке линии по заданным напряжению и току в начале или в конце линии	136
9.5. Условия неискаженной передачи сигнала в линии	138
9.6. Режим согласованной нагрузки	139
9.7. Входное сопротивление линии	140
9.8. Линия без потерь. Стоячие волны	140
Приложение 1. Вопросы для самоконтроля	144
Приложение 2. Контрольные задания	154
Приложение 3. Ответы на вопросы для самоконтроля	176
Приложение 4. Ответы на контрольные задания	182
Список литературы	186

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, занимающихся по очной и дистанционной форме обучения и изучающих теорию линейных электрических цепей. Содержание данного пособия соответствует объему курсов «Теоретические основы электротехники» и «Основы теории электрических цепей» и отвечает требованиям ГОСТа по названным дисциплинам учебного плана подготовки инженеров радиоэлектронных специальностей.

Основу пособия составляют материалы лекций, читаемых ведущими преподавателями кафедры моделирования и основ теории цепей ТУСУРа в курсе «Теоретические основы электротехники». В текст пособия включен ряд дополнительных примеров, раскрывающих содержание разделов, а в ряде случаев для облегчения понимания теоретического материала опущено доказательство некоторых теорем.

Большое внимание уделяется понятийно-определяющей части материала (тема 1), на которой базируется весь остальной материал курса [1]. В теме 2 рассматривается анализ простейших электрических цепей при гармоническом воздействии [2]. Основным методом анализа является метод комплексных амплитуд (символический метод). Рассматриваются методы эквивалентных преобразований и расчета электрических цепей с взаимной индуктивностью. Частотные характеристики и резонанс в электрических цепях рассматриваются в теме 3. В теме 4 представлены все основные методы анализа разветвленных электрических цепей, подкрепляемые значительным количеством примеров. Принципы и теоремы теории цепей приведены в теме 5. Основные уравнения и параметры четырехполюсников подробно рассмотрены в теме 6 [3], включающей и разнообразные примеры. В теме 7 рассматриваются цепи с периодическими несинусоидальными сигналами. Трехфазные цепи представлены в теме 8.

В заключительной теме 9 исследуются установившиеся режимы в линейных цепях с распределенными параметрами.

Основная цель пособия – ввести студентов в круг понятий электрических цепей, познакомить с основными законами, действующими в электрических цепях, научить различным методам математического описания цепей в форме систем алгебраических и дифференциальных уравнений.

Большое внимание уделяется понятию модели компонента, а модель цепи рассматривается как совокупность компонентных и топологических уравнений.

Данное учебное пособие представляет собой твердую копию электронного учебника, который в свою очередь является частью автоматизированного учебного практикума, состоящего из электронного учебника, компьютерной лаборатории [4] и электронного задачника.

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Определение электрической цепи

Общее определение электрической цепи (ЭЦ). Совокупность элементов и устройств, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий электродвижущей силы, тока и напряжения, называется *электрической цепью*.

Формальное определение ЭЦ. С формальной точки зрения ЭЦ содержит три множества объектов

$$C = (K, B, N),$$

где $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ – множество компонентов цепи;

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – множество ветвей цепи;

$N = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ – множество узлов цепи.

Компоненты цепи делятся на две группы: источники и приемники электрической энергии.

К источникам электрической энергии (первичным источникам) относятся различные устройства, в которых происходит преобразование химической, тепловой, механической и других видов энергии в электрическую. Примеры – аккумуляторы, батареи, гидрогенераторы.

Приемники электрической энергии – это компоненты ЭЦ, в которых происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также аккумулирование электрической энергии. Примеры – резисторы, диоды, электродвигатели и другие.

1.2. Топологические характеристики цепи

Каждый компонент цепи может иметь произвольное число выводов (связей). Выводы компонентов заканчиваются зажимами или полюсами. Соответственно компоненты называются *многополюсниками* (рис. 1.1, а) или *двухполюсниками* (рис. 1.1, б). Примерами многополюсников являются транзисторы, трансформаторы, а примерами двухполюсников – ди-

оды, резисторы, индуктивности. Любая часть электрической цепи, имеющая два зажима (полюса), называется двухполюсником. Двухполюсник имеет условное изображение в виде прямоугольника с двумя выводами. Различают *активные* (А) и *пассивные* (П) двухполюсники (рис. 1.1, в) в зависимости от наличия (или отсутствия) источников энергии.

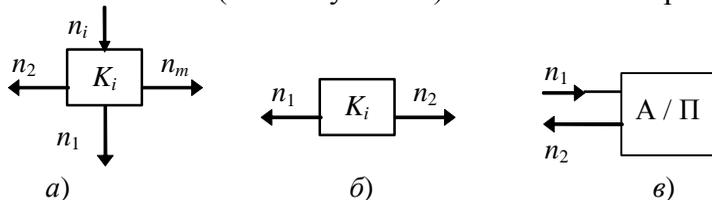


Рис. 1.1.

Выводы компонентов при включении их в цепь образуют ветви и узлы цепи. Точки объединения связей компонентов образуют множество *узлов* цепи. *Ветвью* может быть назван любой участок цепи, заключенный между двумя узлами при условии равенства токов на его входе и выходе (рис. 1.2, а, б), т.е. $i_1 = i_2$. Ряд двухполюсных компонентов имеет два вывода, но при включении в цепь характеризуются одной ветвью. Примером здесь служат резисторы, емкости, индуктивности, диоды и пр. Электрическая цепь в общем случае содержит n компонентов, m ветвей и k узлов.

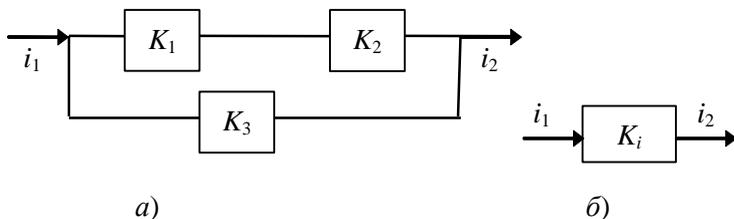


Рис. 1.2.

Ветвь может содержать произвольное число последовательно соединенных компонентов: сопротивлений, конденсаторов, катушек, источников ЭДС. Если через все эти компоненты проходит один и тот же ток, то такое соединение будем называть *последовательным*. *Параллельным* соединением компонентов (ветвей) электрической цепи называют со-

единение, при котором все участки цепи присоединяются к одной и той же паре узлов с одинаковым напряжением. *Смешанное соединение* предполагает сочетание последовательного и параллельного соединений. Более сложные электрические цепи могут не сводиться к последовательному и параллельному соединениям.

Топологические свойства электрических схем не зависят от типа и свойств элементов, из которых они составлены. Поэтому исследование топологических свойств цепей удобно проводить на основе теории графов.

Графом электрической схемы называют ее условное графическое отображение, в котором ветви схемы представлены отрезками, а узлы – точками. Отрезки линий, соответствующие ветвям схемы, называют *ветвями (ребрами)* графа, а концевые точки ветвей – *узлами (вершинами)* графа. Графы могут быть *направленными и ненаправленными*. Направленным называют граф, в котором указаны условно-положительные направления его ветвей, в противном случае граф называют ненаправленным. Если между любой парой узлов графа можно указать путь (непрерывную последовательность ветвей), то такой граф называют *связным*.

Важным является понятие *подграфа* – любое множество ветвей и узлов, содержащихся в данном графе.

В теории цепей большое значение имеют такие подграфы: путь, контур, дерево, связь и сечение.

Контур – замкнутый путь графа, в котором один из узлов графа является начальным и одновременно конечным.

Деревом связного графа называют связный подграф, содержащий любую совокупность ветвей связного графа, соединяющих все его узлы, но не образующих ни одного контура.

Ветви графа, не входящие в число ветвей дерева, называют *связями*.

Сечением графа называют минимальную совокупность его ветвей, при удалении которых граф распадается на два несвязных графа. Изображают сечение в виде замкнутой ли-

нии (поверхности), которая один раз пересекает каждую ветвь этой совокупности.

Приведенные определения показывают, что в любой относительно сложной схеме имеется большое число различных путей, деревьев, связей контуров и сечений. Однако в теории цепей существенную роль играют не все контуры и сечения, только главные.

Главным называют контур, состоящий из любого числа ветвей дерева и только одной ветви связи. *Главным сечением* называют такое, в которое входит любое число ветвей связи и только одна ветвь дерева. Как будет показано ниже, на основе главных контуров и сечений могут быть составлены независимые уравнения для анализа схем.

Для схемы направленного графа (содержащего ветви 1 – 6) главные контуры I, II, III (рис. 1.3, а) и сечения S_1 , S_2 , S_3 (рис. 1.3, б) могут быть построены на основе одного дерева, включающего ветви 1, 4, 5, выделенные жирными линиями. Направления ветвей, главных контуров и сечений графа выбираются произвольно.

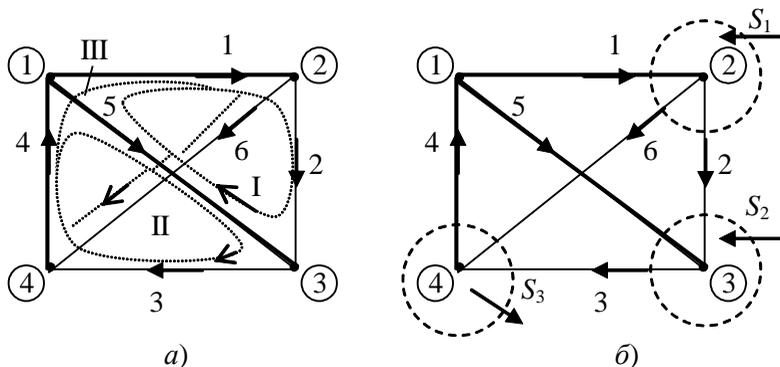


Рис. 1.3.

Аналитически информацию о графе удобно представлять в матричной форме. В матрице ненаправленного графа перечисляются все его узлы и ветви, а также содержится информация о том, между какими узлами находятся соответствующие ветви. При матричном описании направленных графов необходимо также указать и направление каждой ветви. Гра-

фы описывают узловыми, контурными матрицами и матрицами сечений.

Узловой матрицей **A** направленного графа называют прямоугольную матрицу с числом строк, равным числу узлов без единицы и числом столбцов, равным числу ветвей графа. Каждый элемент a_{ij} такой матрицы определяется по правилу

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если ветвь } j \text{ выходит из узла } i; \\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ входит в узел } i; \\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не соединена с узлом } i. \end{cases}$$

Для одного из узлов графа матрицу не заполняют. Такой узел называют опорным или базисным.

Для направленного графа (рис. 1.3) узловая матрица имеет вид:

Узлы	Ветви					
	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	-1	1	0
2	-1	1	0	0	0	1
3	0	-1	1	0	-1	0

Контурной матрицей **B** направленного графа называют прямоугольную матрицу с числом строк, равным числу контуров графа и числом столбцов, равным числу его ветвей. Каждый элемент b_{ij} матрицы определяется по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если ветвь } j \text{ содержится в контуре } i \text{ и направление ветви совпадает с направлением обхода контура;} \\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ содержится в контуре } i \text{ и направление ветви противоположно направлению обхода контура;} \\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не содержится в контуре } i. \end{cases}$$

Матрица главных контуров для графа (рис. 1.3) имеет вид:

Главные контуры	Ветви					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	-1	0
2	0	0	1	1	1	0
3	1	0	0	1	0	1

Матрица сечений \mathbf{Q} направленного графа строится по правилу: число строк равно числу сечений графа, а число столбцов равно числу ветвей. Каждый элемент q_{ij} матрицы сечений определяется по правилу:

$$q_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если ветвь } j \text{ содержится в сечении } i \text{ и направлена} \\ & \text{согласно направлению сечения;} \\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ содержится в сечении } i \text{ и направлена} \\ & \text{противоположно направлению сечения;} \\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не содержится в сечении } i. \end{cases}$$

Матрица главных сечений для графа (рис. 1.3) имеет вид:

Главные сечения	Ветви					
	1	2	3	4	5	6
1	1	-1	0	0	0	-1
2	0	1	-1	0	1	0
3	0	0	-1	1	0	-1

Переход от схемы к графу, а от графа к матрицам позволяет представлять данные о топологии схемы в удобной для ЭВМ форме, что необходимо при машинных методах расчета.

1.3. Фундаментальные переменные цепи

Электрический ток есть упорядоченное движение свободных носителей заряда: электронов – в металлах, ионов – в жидкостях и газах. За направление тока принимают то направление, в котором перемещаются (или могли бы перемещаться) носители положительного заряда.

О направлении тока судят по его знаку, который зависит от того, совпадает или нет направление тока с направлением, условно принятым за положительное. Условно-положительное направление тока при расчетах электрических цепей может быть выбрано совершенно произвольно. Поэтому перед расчетом схемы сначала **произвольным образом** представляются направления токов (соответственно и напряжений). Если в результате расчетов, выполненных с учетом выбранного направления, ток получится со знаком «+», значит

его направление (т.е. направление перемещения положительных зарядов, совпадает с направлением, выбранным за положительное). Если ток получится со знаком «-», значит его направление противоположно условно-положительному.

Количественно ток в произвольный момент времени t_1 равен производной по времени от электрического заряда, переносимого через рассматриваемое сечение проводника:

$$i(t_1) = dq / dt \text{ при } t = t_1.$$

Если скорость изменения заряда q постоянная величина ($dq / dt = \text{const}$), то имеет место постоянный ток. В противном случае ток – переменный.

Потенциал Φ_A произвольной точки A электрического поля есть работа, совершаемая силами электрического поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Разность потенциалов точек A и B называется *напряжением* между этими точками:

$$u_{AB} = \Phi_A - \Phi_B.$$

Напряжение может быть определено как предел отношения энергии электрического поля w , затрачиваемой на перенос положительного заряда, к этому заряду при $q \rightarrow 0$:

$$u = dw / dq.$$

Напряжение представляет собой скалярную величину, которой приписывается определенное направление. Обычно под направлением напряжения понимают направление, в котором перемещаются (или могли бы перемещаться) под действием электрического поля свободные носители положительного заряда, т.е. направление от точки цепи с большим потенциалом к точке цепи с меньшим потенциалом. Очевидно, что на участках цепи, в которых не содержатся источники энергии и перемещение носителей заряда осуществляется за счет энергии электрического поля, направления напряжения и тока совпадают.

Каждому выводу компонента B_j соответствует пара дуальных переменных: *поток* – V_{bj} и *потенциальная* – V_{nj} . Для электрической цепи в роли потокостепенной переменной выступает *ток ветви* i_j , а в роли потенциалостепенной –

напряжение (потенциал) узла u_j . В механических цепях потенциальной переменной является скорость, а потоковой – сила и момент силы.

Скалярное произведение вида $u_j i_j = dw / dt = p_j$ будем далее называть *мгновенной мощностью ветви*.

Энергия w , поступившая в цепь за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, может быть выражена через мгновенную мощность

$$w = w(t_1) - w(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

Будут использоваться и другие переменные: v_1, v_2, \dots, v_m – напряжения ветвей; j_1, j_2, \dots, j_p – токи контуров.

Моделью компонента электрической цепи будем называть совокупность уравнений (соотношений) от 1 до N , записанных относительно переменных выводов (ветвей) компонента, т.е. относительно u и i . Будем выделять следующие классы моделей компонентов.

Линейные статические модели описываются линейными алгебраическими уравнениями вида

$$\sum_m a_m u_m + \sum_n b_n i_n = 0.$$

Примерами таких моделей могут служить модели источников постоянного тока и напряжения, а также модель резистора. Например, модель резистора: $u_1 - u_2 - Ri = 0$.

Линейные инерционные модели описываются линейными дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dV}{dt} = f(V, t),$$

где $V = [u, i]^T$; $f(V, t)$ – линейная функция.

Например, модель емкости, относящаяся к данному классу: $\frac{du_c}{dt} = \frac{i_c}{C}$.

Нелинейные статические модели описываются нелинейными алгебраическими уравнениями. Например, модель ди-

ода: $i_d = I_t e^{\frac{U_d}{m_{\phi t}}}$, где I_t – тепловой ток диода, $m_{\phi t}$ – эмпирический коэффициент.

Нелинейные инерционные модели описываются уравнениями вида

$$\frac{dV}{dt} = F(V, t),$$

где $F(V, t)$ – нелинейная функция. Примерами в данном случае могут служить модели транзистора, изучаемые в курсе «Основы электроники».

1.4. Схемы электрической цепи

Электрическая схема – это условное графическое изображение электрической цепи. В электротехнике и радиоэлектронике встречаются различные типы электрических схем.

Принципиальная электрическая схема представляет собой графическое изображение электрической цепи из реальных компонентов и всех соединений между ними. Каждому реальному компоненту соответствует условное графическое и буквенное обозначения, определяемые стандартами ЕСКД.

Эквивалентной или *расчетной электрической схемой* называется условное графическое изображение моделирующей цепи, составленной из идеализированных элементов, замещающей исследуемую реальную цепь в рамках решаемой задачи.

Схема замещения реального элемента представляет собой условное графическое обозначение идеализированной ЭЦ, моделирующей данный элемент в рамках поставленной задачи. Схемы замещения используются, например, для представления таких сложных элементов ЭЦ, как транзисторы, трансформаторы или двигатели.

Структурная электрическая схема – это условное графическое изображение реальной цепи, на котором отражены только основные функциональные части цепи и основные связи между ними.

1.5. Элементы электрических цепей

Все элементы ЭЦ можно разделить на две большие группы: идеализированные пассивные элементы; идеализированные активные элементы.

Идеализированные пассивные элементы. Используемые в теории цепей идеализированные двухполюсные элементы – сопротивление, емкость и индуктивность – являются *пассивными*, так как энергия, потребляемая от остальной части цепи, в любой момент времени положительна или равна нулю.

Сопротивление, или *резистор* (R) – идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в какой-либо другой вид энергии, например в световую, механическую или тепловую. Запасания энергии электрического или магнитного полей в активном сопротивлении не происходит. Моделью резистора являются зависимости $u(i)$ или $i(u)$, называемые вольт-амперными характеристиками (ВАХ) и имеющие в общем случае нелинейный характер (рис. 1.4, а). Распространенным частным случаем ВАХ является линейная зависимость между током и напряжением (рис. 1.4, б).

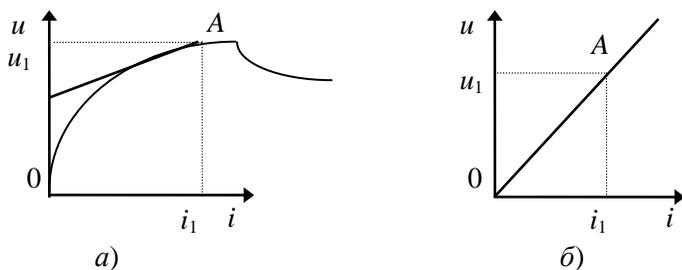


Рис. 1.4.

Используя вольт-амперные характеристики резистора, можно определить его статическое и динамическое сопротивления. *Статическое сопротивление* – это отношение мгновенных значений напряжения и тока на выводах резистора в точке A : $R_{ст} = u_R / i_R$. *Динамическое сопротивление* резистора

определяется производной мгновенного значения напряжения на его полюсах по току, т.е. касательной к графику $u(i)$ (рис. 1.4, а): $R_{\text{дин}} = du_R / di_R$. В общем случае величина динамического сопротивления зависит от положения рабочей точки А с координатами u_1 и i_1 (рис. 1.4, а). Значения $R_{\text{дин}}$ в зависимости от положения рабочей точки могут быть больше или меньше нуля, в то время как $R_{\text{ст}}$ всегда больше нуля.

Емкостью (С) называется идеализированный элемент ЭЦ, обладающий свойством запасать энергию электрического поля без преобразования ее в другие виды энергии. Примером емкости в ЭЦ служит конденсатор. Условное графическое обозначение емкости приведено в табл. 1.1. Моделью емкости является зависимость заряда q , накопленного в емкости, от напряжения u_c , называемая кулон-вольтной характеристикой, которая в общем случае имеет нелинейный характер (рис. 1.5, кривая 1).

Количественно зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения оценивают значениями *статической* $C_{\text{ст}} = q/u$ и *динамической* $C_{\text{дин}} = dq / du$ емкостей. В общем случае динамическая емкость не равна статической и обе они зависят от выбора рабочей точки на характеристике $q(u)$. Если зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения имеет линейный характер (рис. 1.5, кривая 2), то $C_{\text{ст}} = C_{\text{дин}} = C$.

Индуктивностью (L) называется идеализированный элемент ЭЦ, в котором происходит запасание энергии магнитного поля. Индуктивным элементом ЭЦ является индуктивная катушка. Если катушку пронизывает только поток самоиндукции, то в ней наводится только ЭДС самоиндукции

$$e = -\frac{d\psi_L}{dt} = -L \frac{di_L}{dt}.$$

Потокосцепление самоиндукции ψ_L зависит от протекающего тока i_L . Эта зависимость, называемая вебер-амперной характеристикой, имеет в общем случае нелинейный характер (рис. 1.6, кривая 1), а для катушки без магнитного сердечника она может носить линейный характер (рис. 1.6, кривая 2).

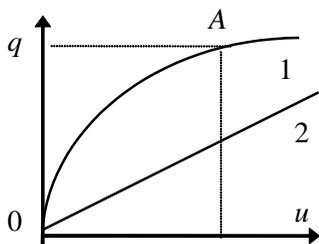


Рис. 1.5.

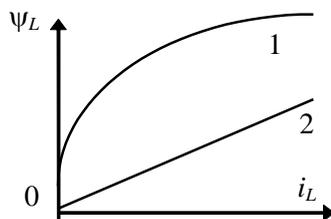


Рис. 1.6.

Количественно зависимость $\psi_L(i_L)$ характеризуется статической $L_{ст}$ и динамической $L_{дин}$ индуктивностями катушки. Значения $L_{ст}$ и $L_{дин}$ в общем случае не равны между собой и зависят от конкретных значений i_L . При линейной зависимости $\psi_L(i_L)$ статическая и динамическая индуктивности катушек равны: $L_{ст} = L_{дин} = L$.

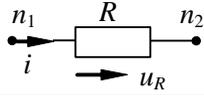
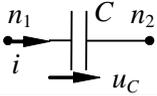
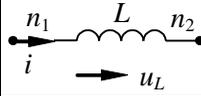
При анализе цепей используется модель индуктивности вида $u_L = -e = L \frac{di_L}{dt}$, где направление u_L совпадает с положительным направлением тока.

Элементы, для которых основные соотношения имеют одинаковую структуру и могут быть получены одно из другого путем замены параметров и переменных, называются *дуальными* (например, индуктивность и емкость). Основные характеристики элементов ЭЦ приведены в табл. 1.1.

Идеализированные активные элементы. Идеальные источники тока и напряжения относятся к идеализированным активным элементам и обладают способностью отдавать энергию подключенным к ним участкам ЭЦ.

Идеальный источник напряжения (ЭДС) – идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока и численно равно ЭДС $e(t)$, которая может быть произвольной функцией времени. В частном случае для источника постоянного напряжения $e(t) = E$ и не зависит от времени. Стрелка на условном графическом обозначении источника напряжения (рис. 1.7, а) указывает направление ЭДС. Для источни-

Таблица 1.1

Характеристики элементов ЭЦ	Изображение элемента на схеме		
			
Модель	$u_R = Ri$ $u_R = u_{n1} - u_{n2}$	$i = C \frac{du_C}{dt}$ $u_C = \phi_{n1} - \phi_{n2}$ $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int i dt$	$u_L = L \frac{di}{dt}$ $u_L = \phi_{n1} - \phi_{n2}$
Мгновенная мощность	$p_R = u_R i = Ri^2$	$p_C = u_C i =$ $= C u_C \frac{du_C}{dt}$	$p_L = u_L i =$ $= Li \frac{di}{dt}$
Энергия	$w_R = \int Ri^2 dt$	$w_C =$ $= C \int u_C du_C =$ $= \frac{C u_C^2}{2}$	$w_L = L \int i di =$ $= \frac{Li^2}{2}$

ков постоянного напряжения стрелка направлена от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом, что противоположно направлению напряжения на этих же зажимах. Модель источника напряжения с внутренним сопротивлением $R_{вн} = 0$ описывается уравнением

$$u_{n1} - u_{n2} = e(t).$$

Внешней характеристикой любого источника является его вольт-амперная характеристика. Внешней характеристикой источника постоянного напряжения является прямая линия (рис 1.7, б).

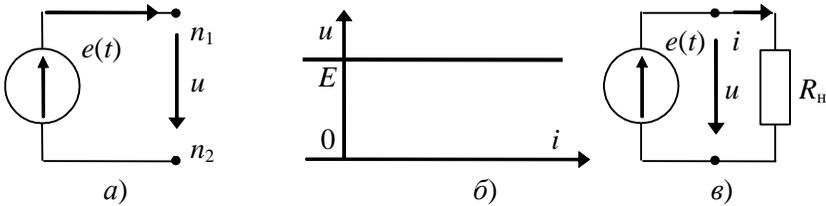


Рис. 1.7.

Замечание. При подключении к зажимам источника ЭДС нагрузки R_H (рис 1.7, в) и с уменьшением величины R_H ток в нагрузке и выделяемая в ней мощность возрастают. Если $R_H = 0$, то возникает предельный случай (режим короткого замыкания), который **исключается из рассмотрения**, т.к. при этом возникает противоречие. С одной стороны, при замкнутых зажимах источника, напряжение источника должно равняться нулю, с другой стороны, по определению, напряжение источника должно равняться $e(t)$.

Идеальный источник тока – это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах. Моделью источника тока является уравнение $i = J(t)$, где ток источника i является произвольной функцией времени. В частном случае ток может не зависеть от времени: $i = J = \text{const}$ (для источника постоянного тока).

Двойная стрелка на условном графическом обозначении источника тока показывает направление тока внутри источника (рис. 1.8, а). Внутри источника постоянного тока ток направлен от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом. Вольт-амперная характеристика идеального источника тока ($R_{\text{вн}} = \infty$) приведена на рис. 1.8, б.

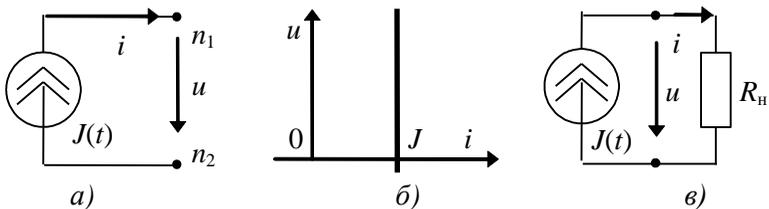


Рис. 1.8.

Замечание. На рис. 1.8, а представлено только изображение источника тока как элемента. При подключении к зажимам источника тока нагрузки R_H (рис 1.8, в) и с увеличением значения R_H напряжение на нагрузке и выделяемая в ней мощность возрастают. Если $R_H = \infty$, то возникает предельный случай (режим холостого хода источника), который **исключается из рассмотрения**, т.к. при этом возникает противоречие. С одной стороны, при разомкнутых зажимах источника,

напряжение источника должно равняться ∞ , цепь фактически разорвана и ток источника должен равняться нулю, с другой стороны, по определению, ток источника должен равняться $J(t)$.

Рассмотрим четыре *формы сигналов источников*. Постоянный сигнал: $e(t) = E = \text{const}$ (рис. 1.9, кривая 1). Гармонический сигнал: $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ (рис. 1.9, кривая 2). Периодический негармонический сигнал, описывается рядом Фурье (рис. 1.9, кривая 3). Непериодический сигнал, описывается интегралом Фурье (рис. 1.9, кривая 4).

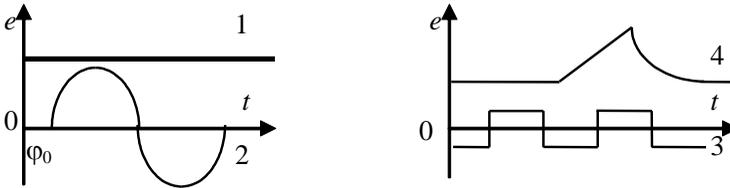


Рис. 1.9.

Управляемые источники тока и напряжения. Идеальные источники тока и напряжения могут быть и управляемыми (зависимыми). В общем случае *управляемый источник* – это идеализированный активный элемент с двумя парами выводов, параметр которого является определенной функцией тока или напряжения некоторого участка цепи.

Внутреннее сопротивление управляемого источника напряжения равно нулю, а внутреннее сопротивление управляемого источника тока равно бесконечности.

Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), показан на рис. 1.10, а. Уравнения ИНУН:

$$i_1 = 0; \quad u_2 = \mu u_1,$$

где μ – коэффициент передачи по напряжению.

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ), показан на рис. 1.10, б. Уравнения ИНУТ:

$$u_1 = 0; \quad -u_2 = r i_1,$$

где r – передаточное сопротивление.

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), показан на рис. 1.10, в. Уравнения ИТУН:

$$i_1 = 0; \quad i_2 = g u_1,$$

где g – передаточная проводимость.

Источник тока, управляемый током (ИТУТ), представлен на рис. 1.10, z и описывается уравнениями:

$$u_1 = 0; \quad \alpha i_1 = i_2,$$

где α – коэффициент передачи по напряжению.

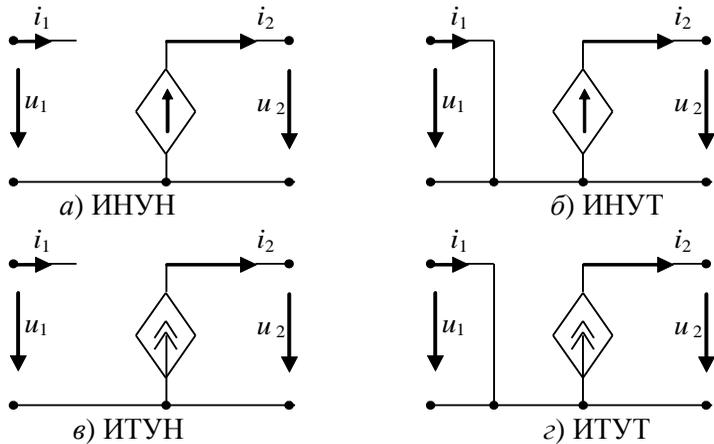


Рис. 1.10.

Приведенные управляемые источники являются *линейно управляемыми*, хотя в общем случае зависимости между током и напряжением могут быть произвольной формы. Управляемые источники тока и напряжения широко используют при составлении эквивалентных схем электронных приборов.

Замечание, относящееся к источнику тока, приведенному на рис. 1.8, относится и к управляемым источникам тока.

1.6. Классификация сигналов

Одномерные и многомерные сигналы. Типичным примером сигнала является напряжение на зажимах (входных или выходных) какой-либо цепи. Такой сигнал описывается одной функцией времени и называется *одномерным* (например, напряжение $u(t)$ на зажимах вольтметра (рис. 1.11, a)).

Многомерный сигнал образуется как множество одномерных $V(t) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}$, где n – размерность сигнала (рис. 1.11, b).

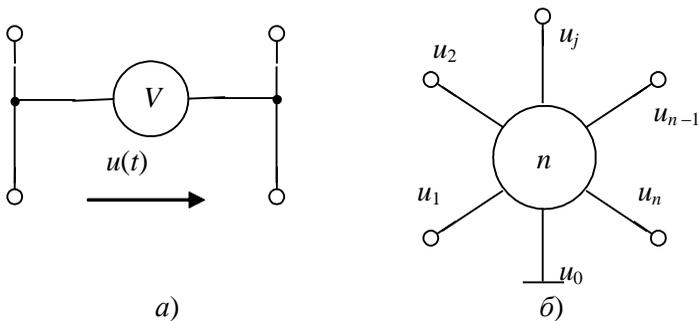


Рис. 1.11.

Детерминированные и случайные сигналы. *Детерминированный сигнал* – это сигнал, математическая модель которого позволяет предсказать его мгновенное значение в любой момент времени, например:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u); i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ – круговая частота, T – период.

Случайный сигнал – это, как правило, помехи, препятствующие получению полезного сигнала из принятого сообщения, вызванные различными флуктуациями (тепловыми, электромагнитными и др.).

В физическом смысле чисто детерминированных сигналов не существует. Любой сигнал содержит в своем составе случайную по времени составляющую (помеху), и часто эти составляющие соизмеримы по величине.

Импульсные сигналы. *Импульсные сигналы* – это сигналы, существующие лишь в пределах конечных отрезков времени. Они могут следовать во времени с некоторой частотой повторения, либо быть одиночными.

Различают видеоимпульсы (рис. 1.12, а) и радиоимпульсы (рис. 1.12, б). *Радиоимпульс* представляет собой некоторую несущую частоту $\omega_0 = 2\pi f_0$, промодулированную *видеоимпульсом*. Радиоимпульс $u_p(t)$ и видеоимпульс $u_B(t)$ связаны соотношением

$$u_p(t) = u_B(t) \sin(\omega_0 t + \psi_0).$$

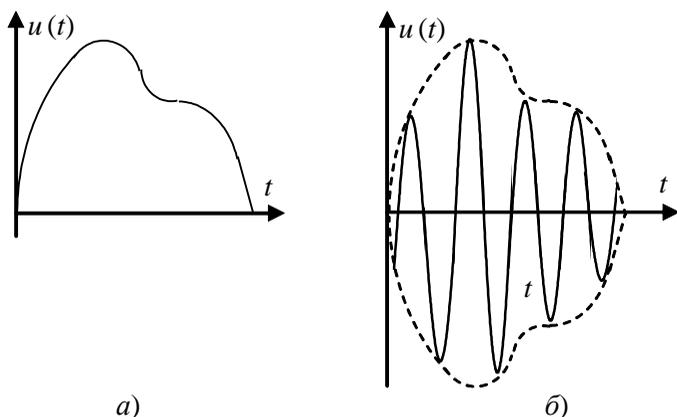


Рис. 1.12.

При этом функцию $u_B(t)$ называют огибающей, а функцию $\sin(\omega_0 t + \psi_0)$ – заполнением.

В современной электронике длительность импульсов колеблется от нескольких секунд до долей наносекунды.

Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Сигнал, который полностью аналогичен протекающему физическому процессу и который может быть измерен в любой момент времени, называется *аналоговым сигналом*. Одномерный аналоговый сигнал представляет собой осциллограмму, график которой может быть задан *непрерывным* (рис. 1.13, а) или *дискретным* (рис. 1.13, б) способом.

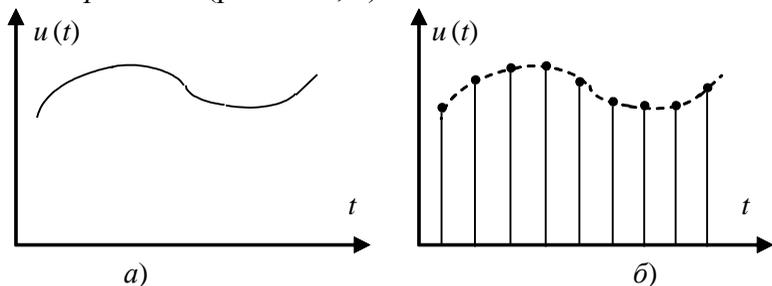


Рис. 1.13

Дискретный сигнал представляет собой счетное множество точек на оси времени, в каждой из которых определено

отсчетное значение сигнала τ_d . При этом шаг дискретизации t_i – постоянный, постоянна и ширина (длительность) τ_n отдельного импульса. Тогда площадь импульса несет информацию о значении сигнала в данной точке. Очевидно, что при этом $\tau_d = t_{i+1} - t_i \gg \tau_n$, а частота дискретного сигнала f_d много больше частоты аналогового сигнала f_a .

Основное достоинство аналогового дискретизированного сигнала состоит в том, что при его воспроизведении достаточно иметь информацию о значениях функции в точках дискретизации и интерполировать остальные значения, что позволяет по одному каналу одновременно передавать большое количество сигналов, используя режим разделения времени.

Однако рассмотренный принцип дискретизации сигнала трудно реализуется физически и сильно зависит от помех при обработке сигнала.

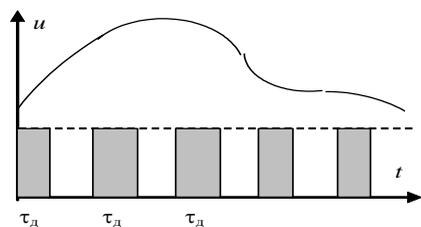


Рис. 1.14.

Поскольку информация заключается в площади дискретного импульса, то можно сделать амплитуду импульса постоянной, а длительность поставить в соответствие значению сигнала (рис. 1.14). Это – второй способ дискретизации сигнала.

Значение величины сигнала в точках отсчета для обоих способов дискретизации может быть представлено в цифровой форме, например, в двоичной системе счисления. Поскольку цифровая форма записи двоичного числа – это последовательность единиц и нулей,

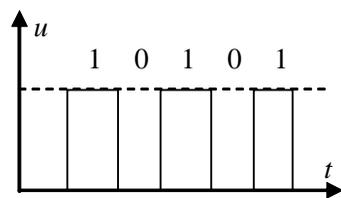


Рис. 1.15.

то физическая реализация этой формы выглядит как импульсные сигналы фиксированной частоты и длительности двух уровней, один из которых соответствует единице, а другой – нулю (рис. 1.15).

Для осуществления операции представления аналогового сигнала в цифровой форме и для обратного преобразования соответственно разработаны микросхемы аналого-цифровых (АЦП) и цифро-аналоговых (ЦАП) преобразователей.

1.7. Понятие о компонентных и топологических уравнениях. Закон Ома. Законы Кирхгофа

Математическое описание процессов в электрических цепях базируется на компонентных и топологических уравнениях.

Компонентные уравнения (уравнения компонентов или ветвей) устанавливают связь между током и напряжением каждой ветви в ЭЦ. Количество таких уравнений равно числу ветвей, а вид уравнений зависит от типа рассматриваемого компонента.

Закон Ома выражает связь между током и напряжением. Например, ток ветви с резистором связан с напряжением на резисторе уравнением $i = \frac{u_R}{R}$. Уравнения закона Ома для ем-

кости и индуктивности можно найти в табл. 1.1.

Топологические уравнения отражают свойства цепи, которые определяются только ее топологией и не зависят от того, какие компоненты входят в состав ветвей. К топологическим уравнениям относятся, в частности, уравнения, составленные на основании первого и второго законов Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, соединенных в каждом из узлов (либо протекающих через любое сечение) моделируемой цепи, в любой момент времени равна нулю: $\sum_k \alpha_k i_k = 0$, где α_k – знаковый коэффициент. $\alpha_k = +1$ для

токов, ориентированных к узлу (сечению); $\alpha_k = -1$ для токов, ориентированных от узла (сечения); k – номер ветви, подключаемой к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в лю-

бой контур моделируемой цепи, в каждый момент времени равна нулю: $\sum_k \alpha_k u_k = 0$, где k – номер ветви, входящей в рассматриваемый контур; α_k – знаковый коэффициент, который равен +1, если положительное направление напряжения ветви совпадает с направлением обхода контура.

Другая форма второго закона Кирхгофа. Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделируемой цепи, в каждый момент времени равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС источников напряжения, действующих в этом контуре: $\sum_i \alpha_i u_i = \sum_j \alpha_j e_j$. Знаковые коэффициенты равны +1, если направление u_i или e_j совпадает с направлением обхода контура.

1.8. Модели электрической цепи.

Анализ и синтез электрических цепей

Любую ЭЦ можно рассматривать как систему (C), имеющую множество внутренних параметров

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_q\},$$

x_1 — множество входов

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

x_2 — и множество выходов

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\},$$

где m и n – соответственно число входов и выходов (рис. 1.16).

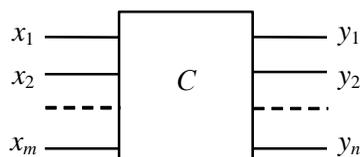


Рис. 1.16.

Электрическая цепь может быть объявлена составной частью другой ЭЦ либо компонентом с $m + n$ полюсами.

В зависимости от исходных данных и конечной цели моделирования в теории цепей различают две группы задач – задачи анализа и задачи синтеза.

Задача анализа ЭЦ состоит в определении реакции цепи Y на заданные внешние воздействия при известных

внутренних параметрах P (называемых также характеристиками ЭЦ): $Y = f(X, P)$.

Задача синтеза ЭЦ заключается в нахождении структуры S и параметров P цепи по заданной реакции Y на некоторые внешние воздействия X .

Математически задача анализа ЭЦ сводится к составлению и решению системы *линейно независимых уравнений*, переменными которых являются токи и напряжения ветвей. Совокупность уравнений (соотношений), решение которых позволяет определить токи и напряжения ветвей ЭЦ, называется *моделью электрической цепи*. Очевидно, что число уравнений модели ЭЦ должно равняться количеству неизвестных токов и напряжений.

Решением электрической цепи называется вектор неизвестных цепи $\mathbf{V} = [\mathbf{v}, \mathbf{i}]^T$, где \mathbf{v} и \mathbf{i} – напряжения и токи ветвей, также векторные величины; $[\mathbf{v}, \mathbf{i}]^T$ – транспонированная матрица этих величин.

В общем случае в цепи, содержащей m ветвей и k узлов, имеется $2m$ неизвестных токов и напряжений ветвей. Используя первый закон Кирхгофа, можно составить $k - 1$ независимых уравнений баланса токов и $m - k + 1$ уравнений баланса напряжений по второму закону Кирхгофа. В сочетании с компонентными уравнениями (уравнениями ветвей) получаем $2m$ линейно независимых уравнений модели цепи, которых достаточно для ее корректного расчета.

Таким образом, используя компонентные уравнения и топологические уравнения, составленные по законам Кирхгофа, всегда можно построить модель цепи, в которой число уравнений является достаточным для определения всех неизвестных токов и напряжений.

На практике для анализа цепей используют различные методы составления моделей ЭЦ. Эти методы различаются, прежде всего, вектором независимых переменных и базируются на использовании различных приемов, позволяющих уменьшить размерность вектора неизвестных цепи. Приведем примеры вектора решения для наиболее известных мето-

дов. Метод контурных токов: $\mathbf{V} = [\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \dots, \mathbf{j}_p]^T$, где \mathbf{j} – токи контуров; p – число контуров ЭЦ. Метод узловых напряжений: $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}]^T$, где \mathbf{u} – напряжения узлов; $(k - 1)$ – число узлов цепи, исключая базовый. Табличный метод: $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_m]^T$, где \mathbf{u} – напряжения узлов размерности $(k - 1)$; \mathbf{i} – токи ветвей размерности m .

1.9. Классификация электрических цепей

Электрические цепи, составленные из идеализированных элементов, могут быть классифицированы по ряду признаков. По топологическим особенностям: простейшие (одноконтурные, двухузловые) и сложные (многоконтурные, многоузловые). По числу внешних выводов компонентов (двухполюсники, многополюсники и др.). По энергетическим свойствам: активные (содержащие источники энергии) и пассивные (не содержащие источников). По типу параметров (сосредоточенные, распределенные), по характеру процессов (непрерывные, дискретные, непериодические и пр.).

Фундаментальный характер имеет классификация цепей в зависимости от типа уравнений модели цепи. В свою очередь тип модели цепи определяется типами уравнений (моделей) входящих в нее компонентов. В соответствии с этим можно выделить: линейные статические модели постоянного тока (линейные алгебраические уравнения); линейные инерционные модели во временной области (линейные дифференциальные уравнения) и в частотной области (линейные алгебраические уравнения); нелинейные статические модели (нелинейные алгебраические уравнения); нелинейные инерционные модели (нелинейные алгебро-дифференциальные уравнения).

ТЕМА 2. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

2.1. Понятие гармонической функции

Если значение функции времени $a(t)$ изменяется по синусоидальному или косинусоидальному закону

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi) = A_m \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.1)$$

то ее называют *гармонической*.

Наибольшее значение гармонической функции A_m называется *амплитудой*. Ее размерность совпадает с размерностью самой функции.

Аргумент $\theta = \omega t + \psi$ называется *мгновенной фазой* (*фазой*). Величина ψ , равная значению мгновенной фазы θ при $t=0$, называется *начальной фазой*. Фаза гармонической функции линейно увеличивается во времени со скоростью $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, которая называется угловой частотой и выражается в рад/с.

Функция времени называется *периодической*, если ее значения повторяются через определенные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T , через который наблюдается повторение значений функции, называется *периодом*.

Таким образом, если $a(t)$ – периодическая функция, то для нее справедливо:

$$a(t) = a(t + nT),$$

где n – целое число.

Величина, обратная периоду, называется *частотой*:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (2.2)$$

Определим период и частоту гармонической функции.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) находим: $T = 2\pi/\omega$; $f = \omega/2\pi$.

При построении временных диаграмм (графиков) гармонических функций удобно откладывать по оси абсцисс не время t , а величину ωt (рис. 2.1).

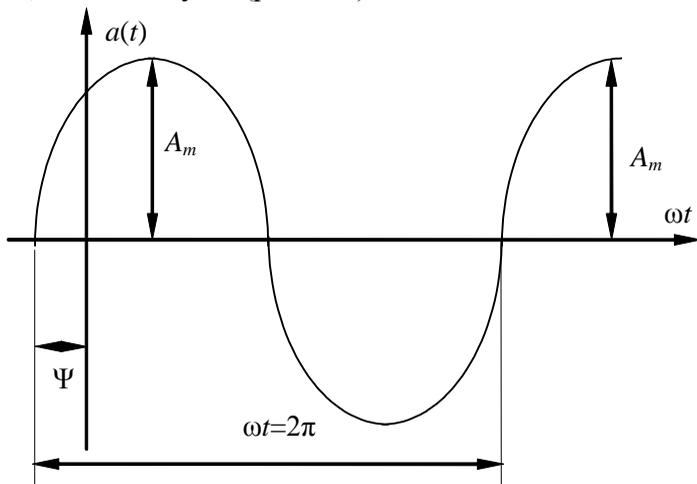


Рис. 2.1.

Если фазы двух гармонических функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ различаются на $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \Psi_1 - \Psi_2 > 0$, то говорят, что эти функции сдвинуты по фазе, и $a_1(t)$ опережает по фазе функцию $a_2(t)$. Если фазы двух гармонических функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ различаются на $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \Psi_1 - \Psi_2 < 0$, то говорят, что $a_1(t)$ отстает по фазе от функции $a_2(t)$.

Под *средним значением* периодической функции $a(t) = A_m \sin \omega t$ понимают ее среднее значение за полпериода

$$A_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} A_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} A_m. \quad (2.4)$$

Среднее значение гармонического тока или напряжения в $\frac{\pi}{2}$ раз меньше его амплитуды:

$$A_{cp} = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m.$$

Действующим значением периодической функции $a(t)$ называется среднеквадратическое значение этой функции за период T :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt} . \quad (2.5)$$

Действующее значение A функции $a(t)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше ее амплитуды:

$$A = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A_m . \quad (2.6)$$

Соответственно еще одна форма записи гармонической функции:

$$a(t) = A\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) .$$

2.2. Метод комплексных амплитуд.

Комплексные числа и основные операции над ними

Символический метод комплексных амплитуд (символический метод) основан на представлении гармонических функций времени $a(t)$ в форме комплексных чисел.

Напомним, что комплексным числом \underline{A} называется выражение вида

$$\underline{A} = A' + A'' = A e^{j\varphi} , \quad (2.7)$$

которое на комплексной плоскости отображается в виде точки с абсциссой A' (вещественная часть) и ординатой A'' (мнимая часть) (рис. 2.2, а).

Ось абсцисс, по которой откладывается вещественная часть \underline{A} , называется действительной (Re), а ось ординат, по которой откладывается мнимая часть \underline{A} , – мнимой (Im).

Каждой точке A комплексной плоскости может быть поставлен в соответствие вектор \underline{A} (рис. 2.2, б). Длину вектора \underline{A} называют его модулем

$$|\underline{A}| = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2} ,$$

а угол α , образуемый вектором \underline{A} с положительным направлением вещественной оси, называют *аргументом* комплексного числа

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A''}{A'}.$$

Вещественную и мнимую части комплексного числа можно определить через модуль и аргумент:

$$\begin{aligned} A' &= \operatorname{Re}(\underline{A}) = |\underline{A}| \cos \alpha; \\ A'' &= \operatorname{Im}(\underline{A}) = |\underline{A}| \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.10)$$

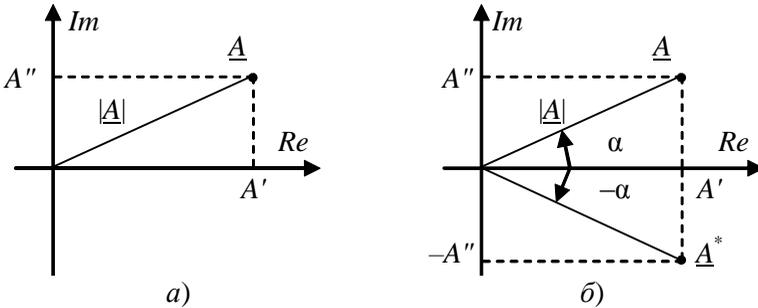


Рис. 2.2.

Подставляя далее (2.10) в выражение (2.7), можно перейти от алгебраической записи комплексного числа к тригонометрической:

$$\underline{A} = |\underline{A}| \cos \alpha + j |\underline{A}| \sin \alpha. \quad (2.11)$$

Далее, используя формулу Эйлера $e^{j\varphi} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, получаем показательную форму комплексного числа:

$$\underline{A} = |\underline{A}| e^{j\varphi}. \quad (2.12)$$

2.3. Комплексные изображения гармонических функций

Каждой гармонической функции $a(t)$ можно поставить в соответствие комплексное число \underline{A} , называемое мгновенным комплексом гармонической функции:

$$\underline{A} = A_m e^{j(\omega t + \Psi)} = A_m [\cos(\omega t + \Psi) + j \sin(\omega t + \Psi)], \quad (2.13)$$

модуль которого равен амплитуде гармонической функции A_m , а аргумент – ее фазе $\theta = \omega t + \Psi$.

Значение мгновенного комплекса \underline{A} при $t = 0$ называется *комплексной амплитудой* $\underline{A}_m = \underline{A}|_{t=0} = A_m e^{j\Psi}$ (рис. 2.1).

С использованием понятия комплексной амплитуды выражение для мгновенного комплекса может быть преобразовано к виду

$$\underline{A} = A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{A}_m e^{j\omega t}, \quad (2.14)$$

где $e^{j\omega t}$, называемый *оператором вращения*, имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки со скоростью ω (рис. 2.2). Всякий неподвижный вектор, будучи умноженным на $e^{j\omega t}$, начинает вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью ω .

Пример 2.1. Комплексная амплитуда гармонического тока $i = 5\sin[10^3 t + \pi]$ равна $\underline{I}_m = 5e^{j\pi}$, а комплексная амплитуда гармонического напряжения

$$u = 50\sin 10^5 t - \underline{U}_m = 50e^{j0} = 50.$$

Основные действия с комплексными изображениями гармонических функций. При сложении (вычитании) комплексных чисел их записывают в алгебраической форме и отдельно складывают (вычитают) их действительные и мнимые части. Например, если

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\phi} = A_1 \cos\phi + jA_1 \sin\phi = A_1' + jA_1'',$$

$$\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi} = A_2 \cos\psi + jA_2 \sin\psi = A_2' + jA_2'',$$

$$\text{то } A_1 + A_2 = (A_1' + A_2') + j(A_1'' + A_2'') = A e^{j\alpha},$$

$$\text{где } A = \sqrt{(A_1' + A_2')^2 + (A_1'' + A_2'')^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{A_1'' + A_2''}{A_1' + A_2'}.$$

Умножение и деление комплексных величин производят, как правило, в показательной форме:

$$\underline{A}_1 \underline{A}_2 = A_1 A_2 e^{j(\phi+\psi)}; \quad \frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\phi-\psi)}.$$

В комплексной форме дифференцирование по времени соответствует умножению, а интегрирование – делению комплексных значений рассматриваемых функций на $j\omega$, поэтому

$$u_L = L \frac{di}{dt} \dot{} = j\omega L I_m = jX_L I_m = \underline{Z}_L I_m = \underline{U}_{Lm},$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \dot{} = \frac{1}{j\omega C} I_m = -jX_C I_m = \underline{Z}_C I_m = \underline{U}_{Cm},$$

где X_L и X_C – индуктивное и емкостное сопротивления; \underline{Z}_L и \underline{Z}_C – соответственно индуктивное и емкостное сопротивления в комплексной форме. Для резистивного элемента напряжение в комплексной форме

$$u_R = Ri \dot{} = R I_m = \underline{Z}_R I_m = \underline{U}_{Rm},$$

где $\underline{Z}_R = R$ – вещественная величина.

Замечание. Часто в практических расчетах удобно пользоваться действующими значениями величин, тогда

$$\underline{U}_R = \underline{Z}_R \underline{I}, \underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I}, \underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}.$$

Пример 2.2. Определить эквивалентное комплексное сопротивление двухполюсника относительно входных зажимов (рис. 2.3, а).

Решение. Комплексное сопротивление схемы замещения электрической цепи (рис. 2.3, б):

$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}.$$

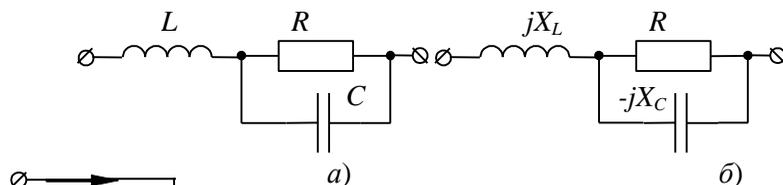


Рис. 2.3.

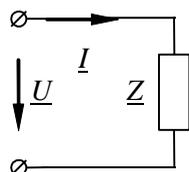


Рис. 2.4.

Пример 2.3. К зажимам идеализированного пассивного элемента (рис. 2.4) приложено напряжение $\underline{U}_R = 0,36 e^{j74^\circ}$ мВ. Определить тип и параметры элемента \underline{Z} , если значение тока: а) $\underline{I} = 0,24 e^{j74^\circ}$ мкА; б) $\underline{I} = 2,4 e^{j164^\circ}$ мкА; в) $\underline{I} = 2,4 e^{j344^\circ}$ мкА.

Решение. Значение параметра элемента $\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I}$.
а) $\underline{Z} = 0,15 e^{j0^\circ}$ кОм; б) $\underline{Z} = 0,15 e^{-j90^\circ}$ кОм; в) $\underline{Z} = 0,15 e^{j90^\circ}$ кОм.

Если сдвиг фаз между напряжением и током на элементе равен 0 , $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$, то такой элемент будет соответственно резистивным, индуктивным или емкостным.

Отметим, что законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме выполняются и для комплексного представления цепи. Также справедливы и эквивалентные преобразования (сложение последовательных сопротивлений и параллельных проводимостей в комплексной форме).

2.4. Анализ *RLC*-цепей при гармоническом воздействии

Последовательная *RLC*-цепь. Рассмотрим последовательную *RLC*-цепь, находящуюся под гармоническим воздействием (рис. 2.5, а). Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи для комплексной схемы замещения (рис. 2.5, б):

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C; \quad \underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C; \\ \underline{U}_R &= \underline{Z}_R \underline{I}_R; \quad \underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I}_L; \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}_C, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\underline{Z}_R = R$; $\underline{Z}_L = j\omega L$; $\underline{Z}_C = 1/j\omega C$ – комплексные сопротивления входящих в цепь элементов. Решая систему (2.15) относительно тока \underline{I} , получим:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

Здесь \underline{Z} – комплексное входное сопротивление последовательной *RLC*-цепи (рис. 2.5, в). Оно определяется только параметрами входящих в цепь элементов и частотой воздействия:

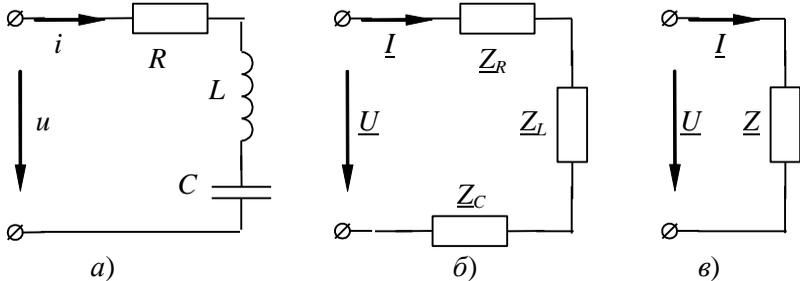


Рис. 2.5.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (2.16)$$

Переходя от алгебраической формы записи к показательной, находим модуль Z и аргумент φ входного сопротивления:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (2.17)$$

Из выражений (2.17) следует, что характер входного сопротивления цепи зависит от соотношения между линейными составляющими комплексных сопротивлений емкости и индуктивности. При $\underline{X}_L > |\underline{X}_C|$ входное сопротивление имеет резистивно-индуктивный характер, и $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.6, а).

Если $\underline{X}_L < |\underline{X}_C|$, то входное сопротивление имеет резистивно-емкостный характер, и $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ (рис. 2.6, б). При $\underline{X}_L = |\underline{X}_C|$

мнимые составляющие индуктивного и емкостного сопротивлений взаимно компенсируются, и входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер, причем $\varphi = 0$ (рис. 2.6, в).

Из закона Ома ($\underline{Z} = \frac{U}{I}$; $\underline{Z} e^{j\varphi_Z} = \frac{U e^{j\varphi_U}}{I e^{j\varphi_I}}$; $\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$) получаем, что сдвиг фаз между напряжением и током равен аргументу сопротивления.

Изобразим векторные диаграммы для тока и напряжений цепи, соответствующие различным соотношениям между \underline{X}_L и $|\underline{X}_C|$ (рис. 2.6, г – е).

Пример 2.4. Выразить входное сопротивление и ток последовательной RLC -цепи (рис. 2.5, а) в комплексной форме для частот $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 8 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Параметры цепи: $L = 80 \text{ мкГн}$, $C = 500 \text{ пФ}$, $R = 100 \text{ Ом}$. Входное напряжение $u = 10\sqrt{2} \cos \omega t$.

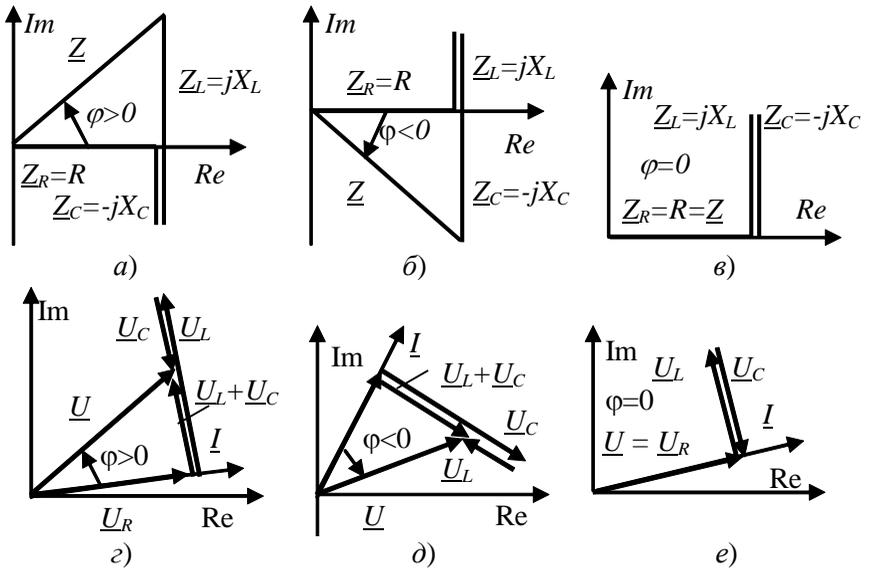


Рис. 2.6.

Решение. Комплексное входное сопротивление по (2.16) равно сумме комплексных сопротивлений элементов цепи. Подставляя в (2.16) параметры элементов, находим:

$$\underline{Z}_1|_{\omega=\omega_1} = 100 - j600 = 608e^{-j80,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2|_{\omega=\omega_2} = 100 + j390 = 403e^{j75,6^\circ} \text{ Ом}; \underline{Z}_3|_{\omega=\omega_3} = 100 \text{ Ом}.$$

Таким образом, при $\omega=\omega_1$ входное сопротивление имеет резистивно-емкостный характер, при $\omega=\omega_2$ – резистивно-индуктивный, а при $\omega=\omega_3$ – чисто резистивный характер.

Используя закон Ома в комплексной форме, находим:

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{608e^{-j80,5^\circ}} = 16,4e^{j80,5^\circ} \text{ мА};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{10}{402,6e^{j75,6^\circ}} = 24,8e^{-j75,6^\circ} \text{ мА}; \underline{I}_3 = \frac{10}{100} = 100 \text{ мА}.$$

Здесь \underline{I}_1 опережает входное напряжение на $80,5^\circ$, \underline{I}_2 отстает от напряжения на $75,6^\circ$, \underline{I}_3 совпадает по фазе с напряжением.

Параллельная RLC-цепь. Рассмотрим параллельную RLC-цепь (рис. 2.7, а), к зажимам которой приложено гармо-

ническое напряжение. Этой цепи соответствует комплексная схема замещения (рис. 2.7, б).

Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, запишем:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C; \underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C; \quad (2.18)$$

$$\underline{I}_R = \underline{Y}_R \underline{U}_R; \underline{I}_L = \underline{Y}_L \underline{U}_L; \underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U}_C,$$

где $\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$, $\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$, $\underline{Y}_C = j\omega C$ – комплексные проводимости

входящих в цепь элементов.

Решив систему уравнений (2.18) относительно тока \underline{I} , получим:

$$\underline{I} = (\underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C) \underline{U} = \underline{Y} \underline{U}. \quad (2.19)$$

Здесь \underline{Y} – комплексная входная проводимость параллельной RLC -цепи (рис. 2.7, в), которая определяется параметрами входящих в нее элементов и частотой внешнего воздействия:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad (2.20)$$

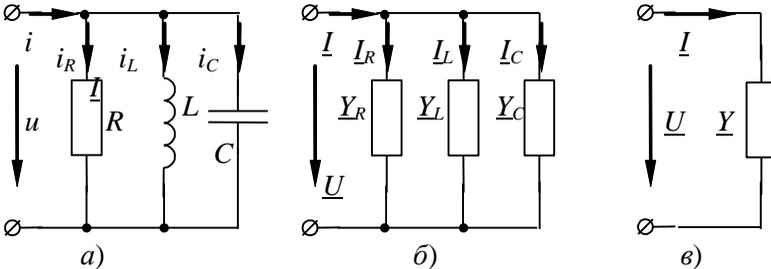


Рис. 2.7.

Переходя от алгебраической формы записи к показательной, найдем соответственно модуль Y и аргумент θ входной проводимости RLC -цепи:

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{R}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}. \quad (2.21)$$

Анализ выражений (2.21) показывает, что характер входной проводимости зависит от соотношения между реактив-

ными составляющими емкости $b_C = \omega C$ и проводимости $b_L = -\frac{1}{\omega L}$. Если $b_C > |b_L|$, то $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$, и входная проводимость цепи имеет резистивно-емкостный характер (рис. 2.8, а). Векторная диаграмма для токов и напряжений (рис. 2.8, б) соответствует случаю, когда $\varphi > 0$.

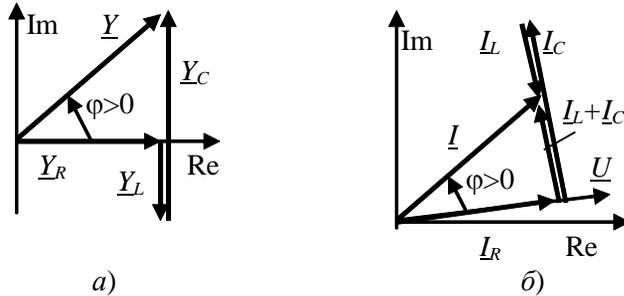


Рис. 2.8.

Уравнения, описывающие процессы в параллельной RLC -цепи, подобны по структуре уравнениям для последовательной RLC -цепи и могут быть получены одно из другого путем замены тока на напряжение, проводимости – на сопротивление, емкости – на индуктивность. Следовательно, параллельная и последовательная RLC -цепи являются *дуальными*.

2.5. Активная, реактивная, полная и комплексная мощности

Активная мощность определяется как среднее значение мгновенной мощности за период и численно равна

$$P = UI \cos \varphi. \quad (2.22)$$

По знаку активной мощности можно судить о направлении передачи энергии. При $P > 0$ двухполюсник потребляет энергию, при $P < 0$ – отдает энергию остальной части цепи.

Полной мощностью S называется величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения на входе цепи

$$S = UI. \quad (2.23)$$

Активная мощность цепи может быть выражена через полную мощность:

$$P = S \cos \varphi. \quad (2.24)$$

Таким образом, полная мощность есть максимальное значение активной мощности при $\varphi = 0$.

Комплексное число \underline{S} , модуль которого равен полной мощности цепи S , а аргумент – углу сдвига фаз между током и напряжением φ , называется *комплексной мощностью цепи*:

$$\underline{S} = S e^{j\varphi}.$$

Переходя от показательной формы записи к тригонометрической

$$\underline{S} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi, \quad (2.25)$$

устанавливаем, что вещественная часть комплексной мощности равна активной мощности цепи:

$$\operatorname{Re}(\underline{S}) = S \cos \varphi = P;$$

мнимая часть \underline{S} представляет собой *реактивную мощность* цепи:

$$\operatorname{Im}(\underline{S}) = S \sin \varphi = Q. \quad (2.26)$$

Реактивная мощность характеризует процессы обмена энергией между цепью и источником. Мощность, запасаемая в магнитном поле цепи, больше нуля, а запасаемая в электрическом поле – меньше нуля.

Комплексному числу \underline{S} соответствует вектор \underline{S} , проекции которого на вещественную и мнимую оси равны соответственно P и Q (рис. 2.9, а). Прямоугольный треугольник, катетами которого являются P и Q , а гипотенузой – S , называется треугольником мощностей. Очевидно, что активная, реактивная и полная мощности связаны соотношением $S^2 = P^2 + Q^2$, вследствие чего треугольник мощностей подобен треугольнику сопротивлений этой же цепи (рис. 2.9, б), и компоненты мощности \underline{S} (S , P , и Q) могут быть выражены через сопротивление \underline{Z} и его компоненты Z , R и X :

$$S = UI = I^2 Z; P = S \cos \varphi = UI \frac{R}{Z} = I^2 R; \quad (2.27)$$

$$Q = S \sin \varphi = UI \frac{X}{Z} = I^2 X; \underline{S} = S e^{j\varphi} = I^2 Z e^{j\varphi} = I^2 \underline{Z}.$$

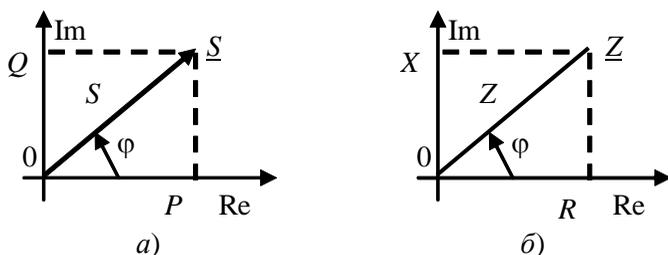


Рис. 2.9.

Связь между комплексной мощностью и комплексными действующими значениями тока и напряжения задается соотношением

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\phi_u} I e^{-j\phi_i}, \quad (2.28)$$

где $\underline{I}^* = I e^{-j\phi_i}$ – комплексно сопряженный ток.

2.6. Баланс мощностей

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую N идеальных источников напряжения, M идеальных источников тока и H идеализированных пассивных элементов. Тогда уравнение баланса мгновенных мощностей

$$\sum_{k=1}^{N+M} p_{kи} = \sum_{k=1}^H p_{kп}, \quad (2.29)$$

где $p_{ки}$ – мощность источника, $p_{кп}$ – мощность потребителя.

Уравнение баланса комплексных мощностей удобно записать в форме

$$\underline{S}_{И} = \sum_{k=1}^N \underline{E}_k \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^M \underline{U}_k \underline{J}_k^* = \sum_{k=1}^H \underline{I}_k^2 \underline{Z}_k = \underline{S}_{П}. \quad (2.30)$$

Отсюда следует баланс активных мощностей

$$P_{И} = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left(\underline{E}_k \underline{I}_k^* \right) + \sum_{k=1}^M \operatorname{Re} \left(\underline{U}_k \underline{J}_k^* \right) = \sum_{k=1}^H I_k^2 R_k = P_{П}, \quad (2.31)$$

баланс реактивных мощностей

$$Q_{И} = \sum_{k=1}^N \operatorname{Im} \left(\underline{E}_k \underline{I}_k^* \right) + \sum_{k=1}^M \operatorname{Im} \left(\underline{U}_k \underline{J}_k^* \right) = \sum_{k=1}^H I_k^2 X_k = Q_{П}, \quad (2.32)$$

$\cos \varphi = P/S$ называется коэффициентом мощности. (2.33)

Пример 2.5. В цепи (рис. 2.10) напряжения на соответствующих индексам элементах и ток I_1 имеют следующие значения:

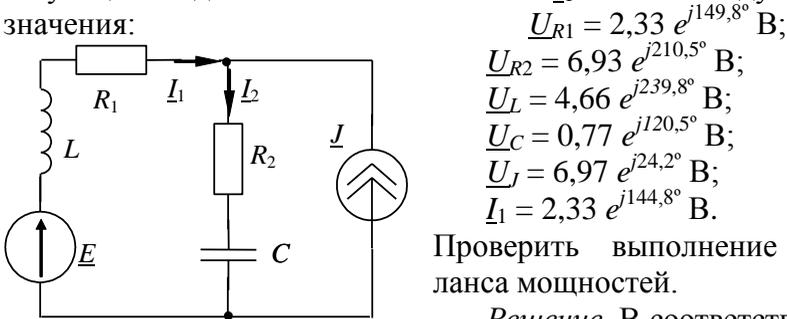


Рис. 2.10

$$\begin{aligned} \underline{U}_{R1} &= 2,33 e^{j149,8^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{R2} &= 6,93 e^{j210,5^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_L &= 4,66 e^{j239,8^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_C &= 0,77 e^{j120,5^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_J &= 6,97 e^{j24,2^\circ} \text{ В}; \\ \underline{I}_1 &= 2,33 e^{j144,8^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Проверить выполнение баланса мощностей.

Решение. В соответствии с условием баланса мощностей

мощность источников равна мощности потребителей: $\underline{S}_{\text{и}} = \underline{S}_{\text{п}}$.

$$\underline{S}_{\text{и}} = \underline{E} \underline{I}_1^* + \underline{U}_J \underline{J}^* = (21,5 + j9,06) \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$\underline{S}_{\text{п}} = \underline{I}_1^2 (R_1 + jX_L) + \underline{I}_2^2 (R_2 - jX_C) = (21,4 + j9,07) \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Условие баланса выполняется.

2.7. Преобразования электрических цепей

Понятие об эквивалентных преобразованиях. Анализ процессов в электрических цепях может быть существенно упрощен за счет использования различных преобразований, в результате которых отдельные участки цепей заменяются эквивалентными – либо с более простой топологией, либо более удобными для анализа.

Два участка цепи называются *эквивалентными*, если при замене одного из этих участков другим токи и напряжения в остальной части цепи не изменятся. Преобразования такого типа также называются *эквивалентными*. Отметим, что преобразуемые электрические цепи должны иметь одинаковое число внешних выводов, и в процессе преобразований токи выводов и напряжения между ними должны оставаться неизменными.

Рассмотрим правила преобразования цепей с последовательным и параллельным соединениями.

Участки цепи с последовательным соединением элементов. Рассмотрим одноконтурную цепь (рис. 2.11). Уравнение этой цепи составим по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений:

$$R_1 i + \dots + R_n i + \frac{1}{C_1} \int i dt + \dots + \frac{1}{C_m} \int i dt + L_1 \frac{di}{dt} + \dots + L_k \frac{di}{dt} = u - (e_1 + \dots + e_p). \quad (2.34)$$

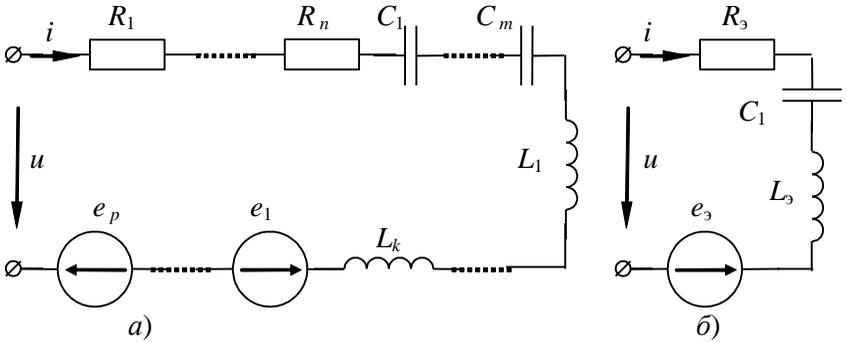


Рис. 2.11.

После приведения подобных (2.34) примет вид:

$$R_3 i + \frac{1}{C_3} \int i dt + L_3 \frac{di}{dt} = u - e_3, \quad (2.35)$$

где $R_3 = \sum_{i=1}^n R_i$; $\frac{1}{C_3} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_i}$; $L_3 = \sum_{i=1}^k L_i$; $e_3 = \sum_{i=1}^p \pm e_i$.

Если обобщенная одноконтурная цепь находится под гармоническим воздействием, то от эквивалентной схемы (рис. 2.11) удобнее перейти к электрической схеме для комплексных значений (рис. 2.12, а). Уравнения (2.34) в комплексной форме в этом случае имеют вид:

$$\underline{Z}_{R1} \underline{I} + \dots + \underline{Z}_{Rn} \underline{I} + \underline{Z}_{C1} \underline{I} + \dots + \underline{Z}_{Cm} \underline{I} + \underline{Z}_{L1} \underline{I} + \dots + \underline{Z}_{Lk} \underline{I} = \underline{U} - (\underline{E}_1 + \dots - \underline{E}_p). \quad (2.36)$$

После преобразований получаем $\underline{Z}_3 \underline{I} = \underline{U} - \underline{E}_3$,

где $\underline{Z}_3 = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_{Ri} + \sum_{i=1}^m \underline{Z}_{Ci} + \sum_{i=1}^k \underline{Z}_{Li}$; $\underline{E}_3 = \sum_{i=1}^p \pm \underline{E}_i$.

Эквивалентная цепь для комплексных действующих значений приведена на рис. 2.12, б.

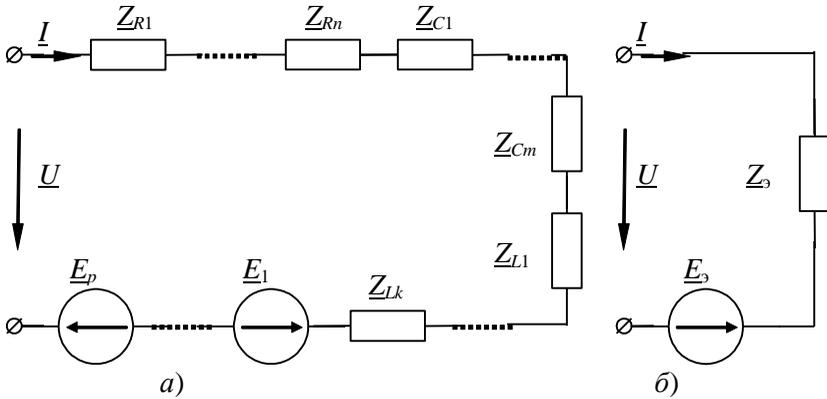


Рис. 2.12.

Участки цепи с параллельным соединением элементов. Пусть электрическая цепь (рис. 2.13, а) состоит из параллельно соединенных n активных сопротивлений, m емкостей, k индуктивностей и p независимых источников тока (обобщенная двухузловая цепь). Все элементы цепи находятся под одним и тем же напряжением u , поэтому уравнение цепи, по первому закону Кирхгофа

$$i = \frac{1}{R_1}u + \dots + \frac{1}{R_n}u + C_1 \frac{du}{dt} + \dots + C_m \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_1} \int u dt + \dots + \frac{1}{L_k} \int u dt - (J_1 + \dots - J_p). \quad (2.37)$$

После приведения подобных

$$i = \frac{1}{R_э}u + C_э \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_э} \int u dt - J_э, \quad (2.38)$$

где $R_э = \sum_{i=1}^n R_i$; $\frac{1}{L_э} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{L_i}$; $C_э = \sum_{i=1}^m C_i$; $J_э = \pm \sum_{i=1}^p J_i$.

Уравнению (2.38) соответствует преобразованная цепь (рис. 2.13, б).

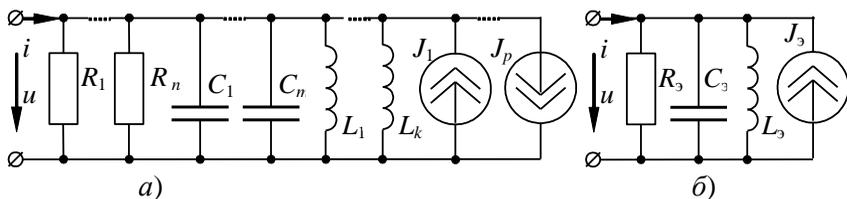


Рис. 2.13.

При гармоническом воздействии для комплексной схемы замещения (рис. 2.14, а, б, в)

$$\underline{I} = \underline{Y}_{R1} \underline{U} + \dots + \underline{Y}_{Rn} \underline{U} + \underline{Y}_{C1} \underline{U} + \dots + \underline{Y}_{Cm} \underline{U} + \underline{Y}_{L1} \underline{U} + \dots + \underline{Y}_{Lk} \underline{U} - (\underline{J}_1 + \dots - \underline{J}_p).$$

После преобразований:

$$\underline{I} = \underline{Y}_{\Sigma} \underline{U} - \underline{J}_{\Sigma}, \quad (2.39)$$

где $\underline{Y}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_{Ri} + \sum_{i=1}^m \underline{Y}_{Ci} + \sum_{i=1}^k \underline{Y}_{Li}$; $\underline{J}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^p \pm \underline{J}_i$.

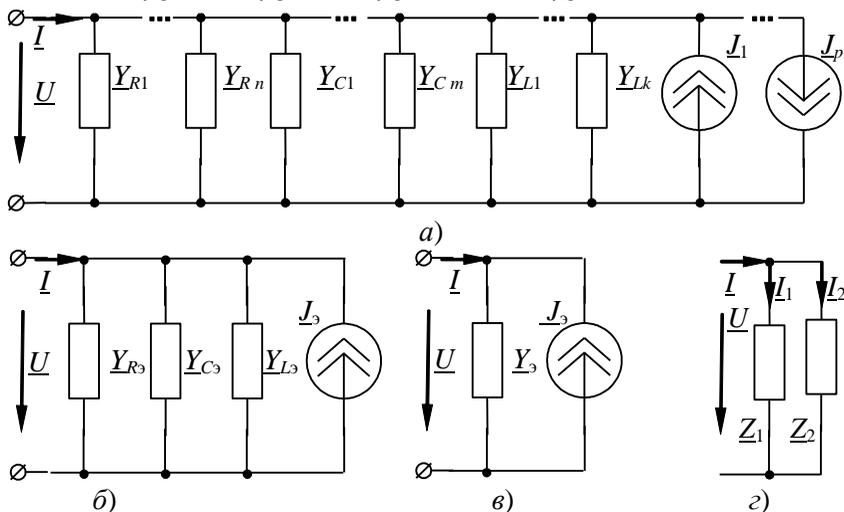


Рис. 2.14.

Используя формулу преобразования цепей с параллельным соединением элементов, получаем правило растекания токов в параллельных пассивных ветвях (не содержащих источников энергии) (рис. 2.14, з)

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad \underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_3; \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

То есть ток ветви равен подтекающему току, умноженному на сопротивление смежной ветви и деленному на сумму сопротивлений этих ветвей.

Эквивалентные преобразования треугольника сопротивлений в звезду и звезды – в треугольник. Такие преобразования должны быть эквивалентными по отношению к внешней цепи. Это значит, что подходящие к выводам токи должны быть одинаковы, одинаковы также должны быть напряжения между выводами, т.е. $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ и $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ одинаковы как для звезды (рис. 2.15, а), так и для треугольника (рис. 2.15, б) сопротивлений.

Соотношения эквивалентности для комплексных значений при переходе от треугольника к звезде:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}. \quad (2.40)$$

При переходе от звезды к треугольнику:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}. \quad (2.41)$$

Выражения комплексных проводимостей, образующих стороны треугольника, могут быть получены из (2.41) путем замены комплексных сопротивлений их проводимостями:

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

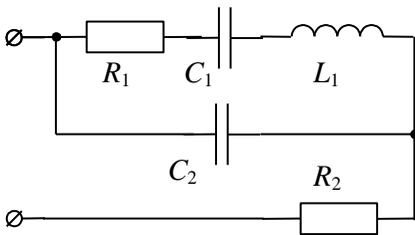


Рис. 2.16.

Пример 2.6. Рассчитать комплексное входное сопротивление цепи (рис. 2.16) с параметрами:

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм};$$

$$C_1 = C_2 = 0,5 \text{ нФ};$$

$$L = 10 \text{ мГн}; \quad f = 39,8 \text{ кГц}.$$

Решение. Эквивалентное комплексное сопротивление ветви с элементами R_1, C_1, L_1 $\underline{Z}_{\mathcal{E}1} = \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{L1}$.

Комплексное сопротивление параллельно включенных ветвей с $\underline{Z}_{\mathcal{E}1}$ и C_2

$$\underline{Z}_{\mathcal{E}2} = \frac{\underline{Z}_{\mathcal{E}1} \underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{\mathcal{E}1} + \underline{Z}_{C2}}.$$

Комплексное входное сопротивление цепи $\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{\mathcal{E}2}$.

Подставив значения параметров элементов цепи в выражения

$$\underline{Z}_{R1} = \underline{Z}_{R2} = R_1, \underline{Z}_L = j\omega L, \underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = -\frac{j}{\omega C_1},$$

получим: $\underline{Z}_{BX} = 1$ кОм.

2.8. Расчет электрических цепей со взаимной индуктивностью

Понятие взаимной индуктивности. Две или несколько катушек индуктивности называются связанными, если изменение тока в одной из них приводит к появлению ЭДС в остальных (рис. 2.17).

Полный магнитный поток первой и второй катушек соответственно:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}; \quad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}. \quad (2.42)$$

Согласное включение

Встречное включение

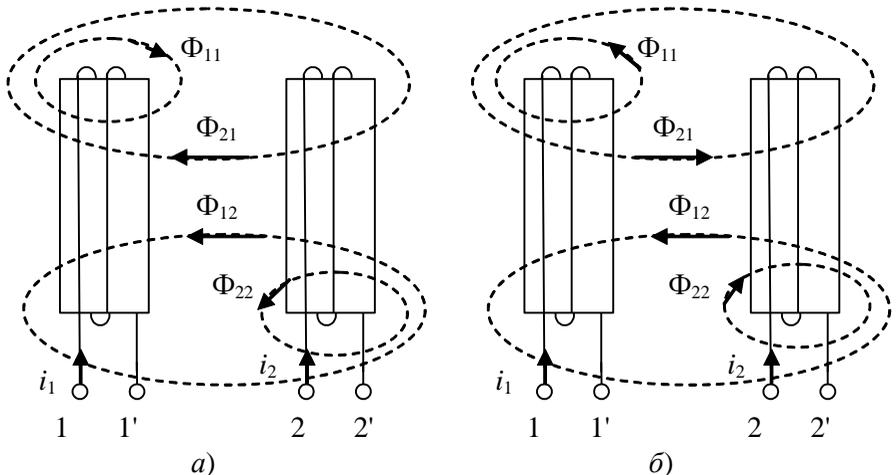


Рис. 2.17.

Так как правомерна связь:

$$\Psi_1 = N_1 \Phi_1 = N_1 \Phi_{11} \pm N_1 \Phi_{12}; \quad \Psi_2 = N_2 \Phi_2 = N_2 \Phi_{22} \pm N_2 \Phi_{21}, \quad (2.43)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – потокосцепления катушек, то, учитывая формулу $e = -\frac{d\Psi}{dt}$, запишем:

$$e_1 = -\left(\frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{dt}\right); \quad e_2 = -\left(\frac{d\Psi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt}\right). \quad (2.44)$$

Знак «+» соответствует совпадающим по направлению магнитным потокам самоиндукции и взаимоиндукции, и такое включение называется *согласным* (рис. 2.17, а). Знак «-» соответствует противоположным направлениям этих потоков, и такое включение называется *встречным* (рис. 2.17, б).

Запишем выражение (2.44) относительно напряжений в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega(L_1 \underline{I}_1 \pm M_{12} \underline{I}_2); \\ \underline{U}_2 &= j\omega(L_2 \underline{I}_2 \pm M_{21} \underline{I}_1). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь $M_{12} = M_{21} = M$ – взаимная индуктивность катушек L_1 и L_2 , равная $M = k_{CB} \sqrt{L_1 L_2}$; k_{CB} – коэффициент связи, не превышающий 1.

Полная комплексная мощность катушек, обусловленная взаимной индуктивностью,

$$\underline{S}_M = \pm j 2\omega M \underline{I}_1 \underline{I}_2 \cos\left(\hat{\underline{I}}_1 \underline{I}_2\right).$$

Здесь знак «+» соответствует согласному включению, знак «-» – встречному.

Введем понятие *одноименных* зажимов. При одинаковых направлениях токов относительно одноименных зажимов двух индуктивно связанных катушек магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции складываются. В противном случае зажимы называются *разноименными*.

Эквивалентные преобразования участков цепей со связанными индуктивностями. Рассмотрим эквивалентные преобразования участков цепей со взаимоиндуктивностями и

замену их участками, не содержащими связанных индуктивностей.

При последовательном соединении (рис. 2.18):

$$i_1 = i_2 = i; u_1 + u_2 = u. \quad (2.46)$$

Согласное включение

Встречное включение

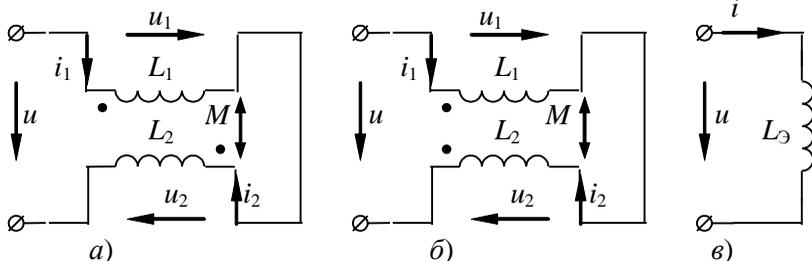


Рис. 2.18.

С учетом уравнений (2.45) запишем:

$$u = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = L_{\Sigma} \frac{di}{dt}, \quad (2.47)$$

где $L_{\Sigma} = L_1 + L_2 \pm 2M$, причем знак «+» соответствует согласному включению, знак «-» – встречному.

При параллельном соединении (рис. 2.19):

$$u_1 = u_2 = u; i_1 + i_2 = i. \quad (2.48)$$

Используя уравнения (2.48) и (2.45), запишем:

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; u = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad (2.49)$$

Согласное включение

Встречное включение

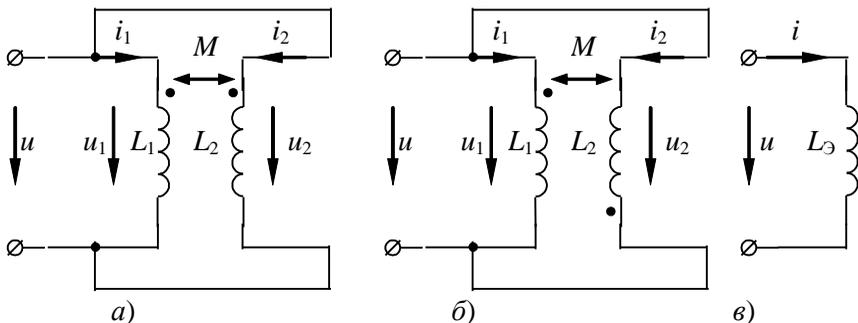


Рис. 2.19.

Из решения (2.49) получаем связь u и i :

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M} \frac{di}{dt}.$$

Эквивалентная индуктивность

$$L_{\text{Э}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}. \quad (2.50)$$

Катушки, имеющие один общий узел, могут быть заменены эквивалентными схемами без индуктивных связей (рис. 2.20).

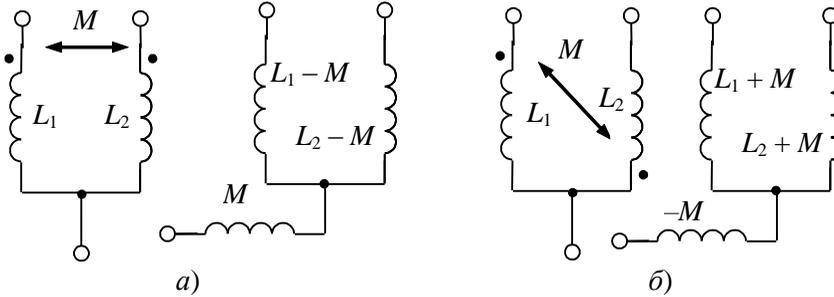


Рис. 2.20.

Пример 2.7. Составить основные системы уравнений в комплексной форме для схемы (рис. 2.21).

Решение. Токи \underline{I}_1 и \underline{I}_2 , протекающие через индуктивности, различны, и напряжения на элементах связи в разных контурах также различны. Уравнения по законам Кирхгофа:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0;$$

$$\underline{U}_{L1} + \underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{E};$$

$$\underline{U}_{L2} - \underline{U}_R = 0.$$

Компонентные уравнения:

$$\underline{U}_{L1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_R = R \underline{I}_3;$$

$$\underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}_1;$$

$$\underline{U}_{L2} = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1.$$

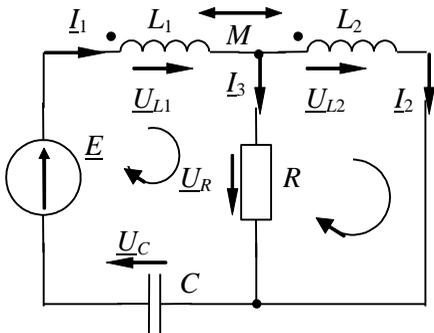


Рис. 2.21.

2.9. Линейный трансформатор

Трансформатор представляет собой устройство без подвижных частей (статическое устройство), служащее для преобразования переменного напряжения. Передача энергии из одной цепи в другую происходит здесь благодаря явлению взаимной индукции.

Комплексная схема замещения линейного трансформатора (рис. 2.22) содержит параметры первичной (X_1, R_1) и вторичной (X_2, R_2) обмоток с согласным включением и сопротивление нагрузки (Z_H).

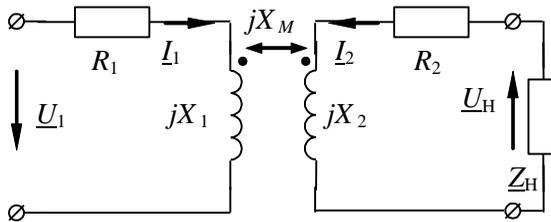


Рис. 2.22.

Схема замещения линейного трансформатора представляет собой схему с индуктивно связанными катушками без общей точки. Ей соответствуют уравнения:

$$\underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_1 jX_1 + \underline{I}_2 jX_M = \underline{U}_1; \quad (2.51)$$

$$\underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 jX_2 + \underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 Z_H = 0.$$

Для того чтобы перейти к схеме без индуктивной связи, прибавим и отнимем $jX_M \underline{I}_1$ в первом уравнении (2.51) и $jX_M \underline{I}_2$ – во втором уравнении. После преобразований получим:

$$\underline{I}_1 [R_1 + j(X_1 - X_M) + jX_M] + \underline{I}_2 jX_M = \underline{U}_1; \quad (2.52)$$

$$\underline{I}_2 [R_2 + j(X_2 - X_M) + jX_M] + \underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 Z_H = 0.$$

Уравнения (2.52) являются контурными для схемы (рис. 2.23).

Векторная диаграмма линейного трансформатора (рис. 2.22) строится в порядке, указанном цифрами в кругах (рис. 2.24).

Предполагается, что нагрузка $Z_H = Z_H e^{j\varphi_H}$ имеет активно-индуктивный характер, т.е. напряжение \underline{U}_H опережает по фазе ток \underline{I}_2 .

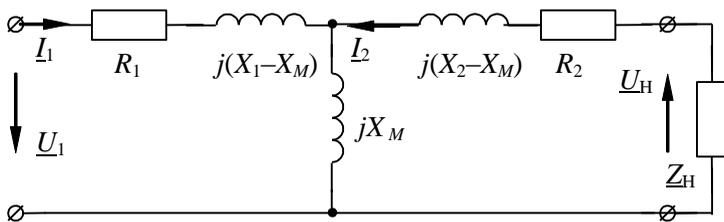


Рис. 2.23.

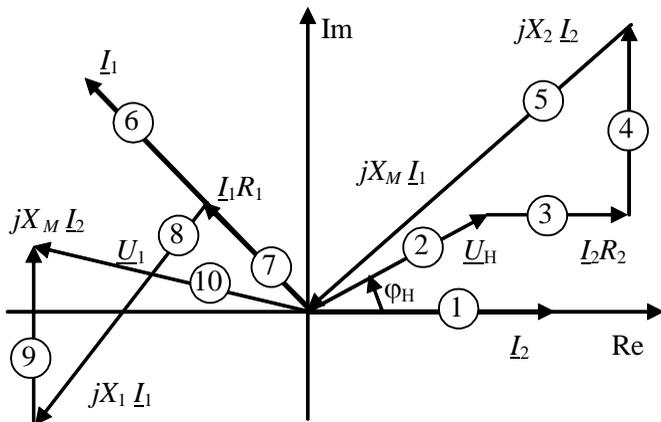


Рис. 2.24.

ТЕМА 3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ. РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

3.1. Комплексные частотные характеристики

Рассмотрим четырехполюсник (рис. 3.1).

Здесь на паре $i - i'$ – входное воздействие \underline{P}_i , а на паре $j - j'$ – выходное воздействие \underline{Q}_j .



Рис. 3.1.

Комплексной частотной характеристикой (КЧХ) называется отношение комплексных изображений отклика и воздействия

$$\underline{H}_{ij}(j\omega) = \frac{\underline{Q}_j}{\underline{P}_i} = \frac{\underline{Q}_{jm}}{\underline{P}_{im}}, \quad (3.1)$$

т.е. отношение комплексных амплитуд или действующих значений. Размерность $\underline{H}_{ij}(j\omega)$ равна отношению размерностей \underline{Q}_j и \underline{P}_i .

Комплексная частотная характеристика может быть записана в показательной форме

$$\underline{H}_{ij}(j\omega) = H_{ij}(\omega) e^{j\psi_{ij}(\omega)} \quad (3.2)$$

или в алгебраической форме

$$\underline{H}_{ij}(j\omega) = H'_{ij}(\omega) + jH''_{ij}(\omega).$$

Модуль КЧХ $H_{ij}(\omega) = \sqrt{(H'_{ij})^2 + (H''_{ij})^2}$ (амплитудно-частотная характеристика – АЧХ), аргумент КЧХ $\psi_{ij}(\omega) = \psi_Q - \psi_P$ (фазо-частотная характеристика – ФЧХ).

Таким образом, КЧХ сочетает в себе АЧХ и ФЧХ. Если задать диапазон частот ω от нуля до бесконечности и постро-

ить зависимости $H'_{ij}(\omega)$ и $H''_{ij}(\omega)$, то получим годограф – геометрическое место точек концов векторов $\underline{H}_{ij}(j\omega)$ (рис. 3.2).

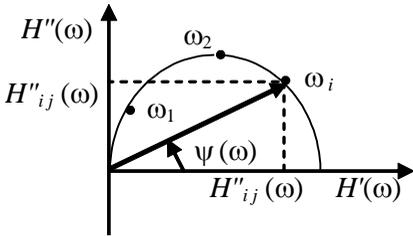


Рис. 3.2.

Наиболее распространенные частотные характеристики электрических цепей: комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$\underline{K}_{ji}(j\omega) = \frac{U_j}{U_i};$$

комплексный коэффициент передачи по току

$$\underline{G}_{ji}(j\omega) = \frac{I_j}{I_i};$$

комплексное передаточное сопротивление $\underline{Z}_{ji}(j\omega) = \frac{U_j}{I_i}$, Ом;

комплексная передаточная проводимость $\underline{Y}_{ji}(j\omega) = \frac{I_j}{U_i}$, См.

3.2. Понятие о резонансе в электрических цепях

Амплитудно-частотные характеристики линейных цепей с одним реактивным элементом имеют вид монотонно изменяющихся кривых (рис. 3.3, а). Более сложный характер имеют процессы в электрических цепях, содержащих реактивные элементы различных типов. В качестве примера приведена передаточная АЧХ такой цепи (рис. 3.3, б). Эта цепь подавляет сигналы с частотой ω_1 и эффективно передает сигналы с частотой ω_2 .

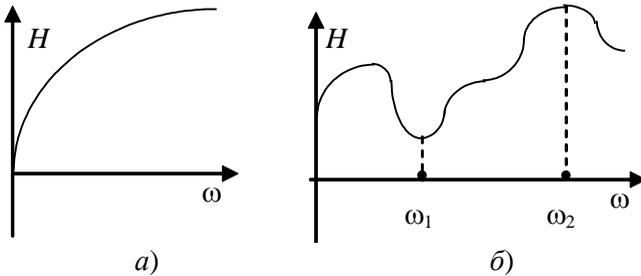


Рис. 3.3.

В теории цепей принято считать, что в пассивном двухполюснике, содержащем индуктивность и емкость, возникает *резонанс*, если на входе двухполюсника напряжение и ток совпадают по фазе, входные сопротивления и проводимости имеют чисто активный характер, а реактивная мощность на вход двухполюсника не поступает.

При последовательном соединении L , C -элементов режим в цепи называют последовательным резонансом, или *резонансом напряжений*, а при параллельном – параллельным резонансом, или *резонансом токов*.

При резонансе напряжений входной ток становится максимальным, а при резонансе токов – минимальным. Частоту внешнего воздействия, при которой наступает резонанс, называют *резонансной частотой*.

Простейшей электрической цепью, в которой наблюдается явление резонанса, можно считать *одиночный колебательный контур*, состоящий из конденсатора и индуктивной катушки. В зависимости от способа подключения источника энергии различают последовательный и параллельный колебательные контуры.

3.3. Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений

Основные соотношения для последовательного RLC -контурa приведены в табл. 3.1.

Частотные характеристики последовательного RLC -контурa. В число этих характеристик входят $X(\omega)$, $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Построим зависимость $X(\omega)$. Положим $\omega = 0$, тогда $X_C(\omega) \rightarrow \infty$, а $X_L(\omega) = 0$. Положим $\omega \rightarrow \infty$, тогда $X_C(\omega) = 0$, а $X_L(\omega) \rightarrow \infty$. Поскольку $X_L(\omega) = \omega L$ – линейная зависимость, а

$X_C(\omega) = -\frac{1}{\omega C}$ – гипербола, то результирующая зависимость

$X(\omega) = X_L(\omega) - X_C(\omega)$ пересекает ось абсцисс ($X(\omega) = 0$) в точке $\omega = \omega_0$ (рис. 3.4, а).

Таблица 3.1

<i>Резонанс напряжений в последовательном RLC-контуре</i>	
<p>Условие резонанса</p> $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \text{ или } X_L = X_C .$ <p>При этом $\underline{I} = I_{\max} = \frac{U}{R}$</p>	
<p>Напряжения на реактивных элементах: $\underline{U}_L = j\omega L \underline{I}$;</p> $\underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \underline{I} ; U_L = U_C \text{ (по модулю). } \underline{U}_R = \underline{U}$	<p>Векторная диаграмма</p>
Резонансная частота	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Характеристическое сопротивление	$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$
Добротность контура – отношение напряжения реактивного элемента к входному напряжению	$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho}{R}$
Полоса пропускания контура определяется уровнем $I_{\max} / \sqrt{2}$ резонансной кривой $I(\omega)$	$\Pi_\omega = \omega_1 - \omega_2 $
Добротность контура, полоса пропускания и резонансная частота связаны между собой	$\Pi_\omega = \frac{\omega_0}{Q} ; Q = \frac{\omega_0}{\Pi_\omega} ; \omega_0 = \Pi_\omega Q$

Зависимость $I(\omega)$ строится по формуле закона Ома

$$I(\omega) = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} .$$

При $\omega = 0$ $I(\omega) = 0$, при $\omega \rightarrow \infty$ $I(\omega) = 0$, при $\omega = \omega_0$ $I(\omega) = I_{max}$.
Кривая $I(\omega)$ имеет экстремум в точке $\omega = \omega_0$.

Зависимость $\phi(\omega)$ строится по формуле

$$\phi(\omega) = \text{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

и пересекает ось абсцисс в точке $\omega = \omega_0$ (рис. 3.4, б).

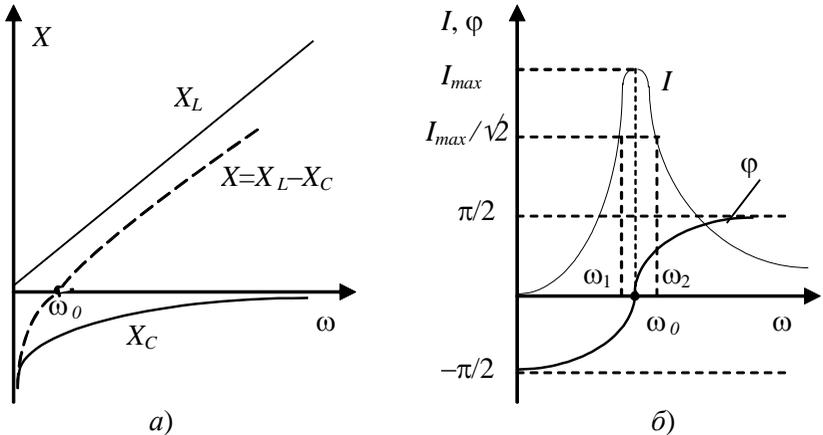


Рис. 3.4.

Пример 3.1. Заданы резонансная частота последовательного контура $f_0 = 2$ МГц, ширина полосы пропускания $\Pi_f = 16$ кГц и сопротивление $R = 12$ Ом. Рассчитать параметры реактивных элементов контура.

Решение. Запишем систему уравнений

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \Pi_f = \frac{f_0 R}{\sqrt{L/C}},$$

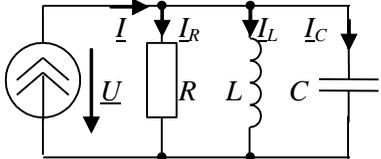
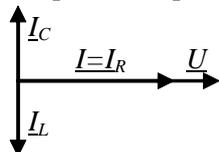
откуда индуктивность $L = \frac{R}{2\pi\Pi_f} = 119$ мкГн,

емкость $C = \frac{\Pi_f}{2\pi f_0^2 R} = 53$ пФ.

3.4. Параллельный колебательный контур. Резонанс токов

Основные соотношения для параллельного RLC -контура приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

<i>Резонанс токов в параллельном RLC-контуре</i>	
Условие резонанса $Y = g, b = 0,$ где $g = \frac{1}{R}, b = \frac{1}{\omega L} - \omega C$	
Токи в ветвях при резонансе: $\underline{I}_L = \frac{\underline{I}R}{j\omega_0 L}; \underline{I}_C = \underline{I}R j\omega_0 C.$ Напряжение $\underline{U} = \underline{I}R$	Векторная диаграмма 
Резонансная частота	$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Характеристическое сопротивление	$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$
Добротность контура – отношение тока реактивного элемента к входному току	$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{R}{\rho}$

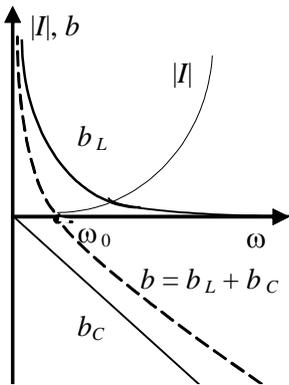


Рис. 3.5.

Частотные характеристики $I_L(\omega)$, $I_C(\omega)$, $U(\omega)$ подобны (дуальны) соответствующим характеристикам $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$, $I(\omega)$ последовательного контура.

Приведем зависимости реактивных проводимостей $b_L(\omega)$, $b_C(\omega)$, $b(\omega)$ и модуля тока $|I(\omega)|$ параллельного контура (рис. 3.5). $b_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}$ – гиперболическая зависимость, $b_C(\omega) = \omega C$ – линейная зависимость. Так как при резо-

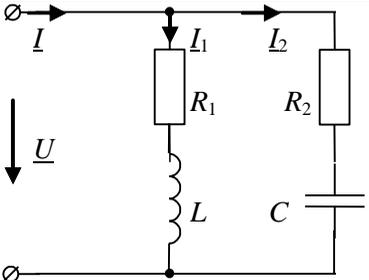
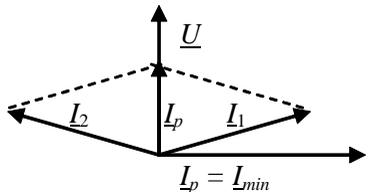
нансе мнимая составляющая входной проводимости равна нулю, то

$$j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]_{\omega=\omega_p} = \frac{1}{\omega_p L} - \omega_p C = 0.$$

При этом $b = b_L + b_C$, а $|I| = U |b|$.

Основные соотношения для параллельного RLC -контура с потерями приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

<i>Резонанс токов в параллельном RLC-контуре с потерями</i>	
<p>Условие резонанса $\underline{Y} = g, b = 0,$ где $g = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2};$ $b = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$</p>	
<p>Токи в ветвях при резонансе: $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + jX_L}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_1 - jX_L};$ $\underline{I} = \underline{I}_p = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{U}(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + \rho^2}$</p>	<p>Векторная диаграмма</p> 
<p>Резонансная частота и характеристическое сопротивление</p>	$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}},$ <p>где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$</p>
<p>Добротность контура</p>	$Q = \frac{\omega_p L}{R_1 + R_2 \omega_p^2 / \omega_0^2}.$ <p>При $\omega_p \approx \omega_0 \quad Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2}$</p>

Пример 3.2. Определить резонансную частоту f_0 , характеристическое сопротивление ρ , добротность Q и полосу

пропускания Π_f контура (рис. 3.6). Параметры цепи: $L = 0,2$ мГн; $R = 12$ Ом; $C = 360$ пФ.

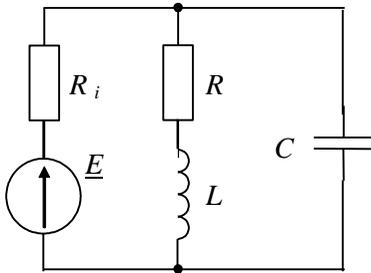


Рис. 3.6.

Решение. В случае малых потерь ($R \ll \rho$) резонансная частота, характеристическое сопротивление и полоса пропускания контуров с последовательным и с параллельным соединением элементов совпадают.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 593 \text{ кГц};$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 745 \text{ Ом}; \quad Q = \frac{\rho}{R} = 62,1; \quad \Pi_f = \frac{f_0}{Q} = 95,6 \text{ кГц}.$$

3.5. Резонанс в индуктивно связанных колебательных контурах

При наличии в резонансных контурах индуктивных связей целесообразно перейти к эквивалентным схемам без связанных элементов.

Пример 3.3. Определить реактивное сопротивление катушки X_L и ток амперметра I схемы (рис. 3.7, а) в режиме резонанса токов, если параметры цепи имеют следующие значения: коэффициент связи $k_{св} = 0,5$; сопротивление емкости на резонансной частоте $X_C = 1$ кОм; действующее значение входного напряжения $U = 1$ В.

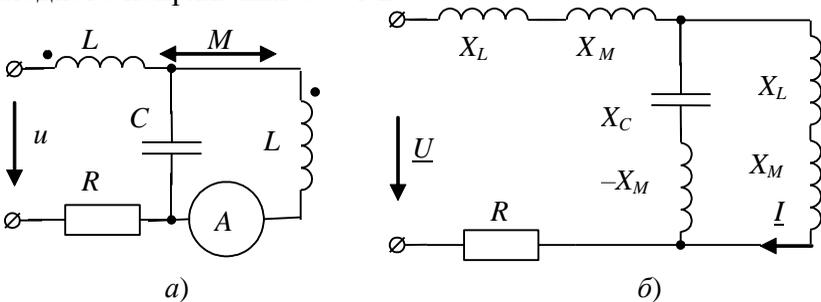


Рис. 3.7.

Решение. При развязке индуктивной связи катушек добавляем в ветви с индуктивностями L – сопротивления X_M , а в ветвь с емкостью – сопротивление $(-X_M)$ (рис. 3.7, б).

$$X_M = k_{CB} \omega \sqrt{LL} = 0,5 \omega L = 0,5 X_L.$$

По условию резонанса токов $b_L = b_C$. С учетом того, что $X_M = 0,5 X_L$ запишем:
$$\frac{1}{X_L + 0,5 X_L} = \frac{1}{X_C + 0,5 X_L}.$$

Подставив числовые значения, найдем $X_L = X_C = 1$ кОм.

Так как входное сопротивление равно бесконечности, то входной ток равен нулю, а напряжение параллельных ветвей

равно входному. Отсюда
$$I = \frac{U}{2X_L} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ мА}.$$

ТЕМА 4. АНАЛИЗ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4.1. Общее представление о методах формирования уравнений модели цепи

Выше рассматривались только простейшие одноконтурные и двухузловые цепи, а также цепи, которые приводятся к простейшим с помощью эквивалентных преобразований. Для анализа таких цепей использовалась основная система уравнений электрического равновесия, включающая в себя $m - m_{ит} - m_{ин}$ компонентных и m топологических уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Здесь m – количество ветвей в цепи, $m_{ит}$ – количество ветвей с источниками тока, $m_{ин}$ – количество ветвей с источниками напряжения.

При переходе к более сложным схемам с большим числом узлов и ветвей анализ, основанный на полной системе уравнений, резко усложняется, так как приходится решать систему из $2m - m_{ит} - m_{ин}$ уравнений. Число одновременно решаемых уравнений может быть уменьшено, если учесть, что не все $2m - m_{ит} - m_{ин}$ неизвестных токов и напряжений являются независимыми. Целесообразно переходить к сокращенной системе уравнений относительно определенным образом выбранных независимых переменных. Трудоемкость анализа цепи в конечном итоге определяется рациональностью выбора системы независимых токов и напряжений.

Рассмотрим ряд основных методов формирования системы электрического равновесия (модели) электрической цепи.

4.2. Методы, основанные на прямом применении законов Кирхгофа

Пусть электрическая цепь состоит только из идеализированных двухполюсных пассивных элементов – сопротивлений, емкостей, индуктивностей, а также источников тока и ЭДС. Основная система уравнений такой цепи содержит $k - 1$ уравнений баланса токов, $m - k + 1$ уравнений баланса

напряжений и $m - m_{\text{ин}}$ компонентных уравнений (k – количество узлов в цепи):

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q \underline{I}_q = 0 \quad (k - 1 \text{ уравнений});$$

$$\sum_{q=1}^m \alpha_q \underline{U}_q = 0 \quad (m - k + 1 \text{ уравнений}); \quad (4.1)$$

$$F_i(\underline{U}_i, \underline{I}_i) = W_i \quad (m - m_{\text{ин}} \text{ уравнений}),$$

где $\alpha_q = \pm 1$, $W_i = [E_i, J_i]$ – вектор источников.

Для определения m неизвестных токов ветвей можно воспользоваться $k - 1$ уравнениями баланса токов и $m - k + 1$ уравнениями баланса напряжений, выразив в последних напряжения ветвей через соответствующие токи.

Пример 4.1. Составить систему электрического равновесия по методу токов ветвей для электрической цепи (рис. 4.1).

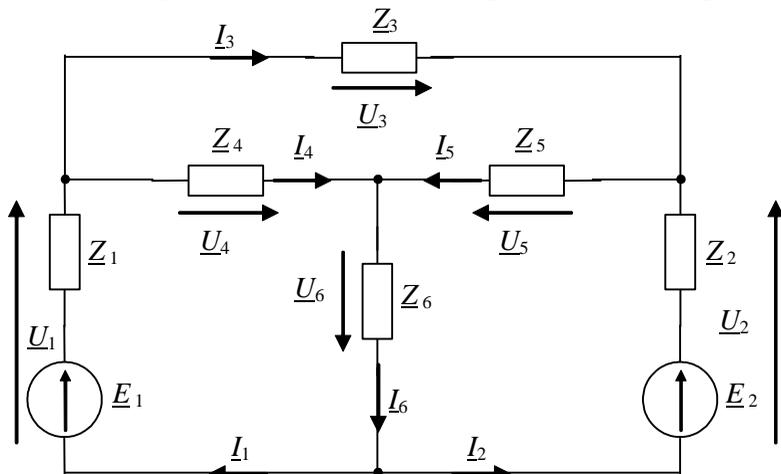


Рис. 4.1.

Решение. В данной схеме число ветвей $m = 6$, число узлов $k = 4$, причем $m_{\text{ит}} = 0$ и $m_{\text{ин}} = 0$.

Основная система уравнений электрического равновесия включает в себя 12 уравнений: $k - 1 = 3$ уравнений баланса токов

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0, \quad -\underline{I}_4 - \underline{I}_5 + \underline{I}_6 = 0, \quad -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_5 = 0; \quad (4.2)$$

$m - k + 1 = 3$ уравнений баланса напряжений

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_4 + \underline{U}_6 = 0, \quad \underline{U}_2 + \underline{U}_5 + \underline{U}_6 = 0, \quad \underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0; \quad (4.3)$$

$m = 6$ компонентных уравнений

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{E}_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{E}_2, \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3, \\ \underline{U}_4 &= \underline{Z}_4 \underline{I}_4, \quad \underline{U}_5 = \underline{Z}_5 \underline{I}_5, \quad \underline{U}_6 = \underline{Z}_6 \underline{I}_6. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя уравнения (4.4) в (4.3), получим в сочетании с уравнениями (4.2) сокращенную систему уравнений рассматриваемой цепи:

$$\begin{aligned} -\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 &= 0, \\ -\underline{I}_4 - \underline{I}_5 + \underline{I}_6 &= 0, \\ -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_5 &= 0, \\ \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_4 \underline{I}_4 + \underline{Z}_6 \underline{I}_6 &= \underline{E}_1, \\ \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_5 \underline{I}_5 + \underline{Z}_6 \underline{I}_6 &= \underline{E}_2, \\ -\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, число решаемых уравнений уменьшилось от 12 до 6.

4.3. Метод контурных токов

Метод контурных токов основан на том, что токи всех ветвей цепи могут быть выражены через токи главных ветвей. Для определения токов главных ветвей составляют систему из $m - m_{\text{ит}} - k + 1$ уравнений, называемых контурными уравнениями.

Рассмотрим методику формирования контурных уравнений на примере цепи (рис. 4.1). Выберем произвольно дерево графа этой цепи (рис. 4.2, *a*), например ветви 1 – 6 – 2, и соответствующую такому дереву систему контуров (рис. 4.2, *б* – *з*). На основании первого закона Кирхгофа токи ветвей дерева $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_6$ могут быть выражены через токи главных ветвей $\underline{I}_3, \underline{I}_4, \underline{I}_5$:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_3 + \underline{I}_4, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_5 - \underline{I}_3, \quad \underline{I}_6 = \underline{I}_4 + \underline{I}_5. \quad (4.6)$$

Далее, используя соотношения (4.6), можно найти токи остальных ветвей цепи, а затем – неизвестные напряжения ветвей.

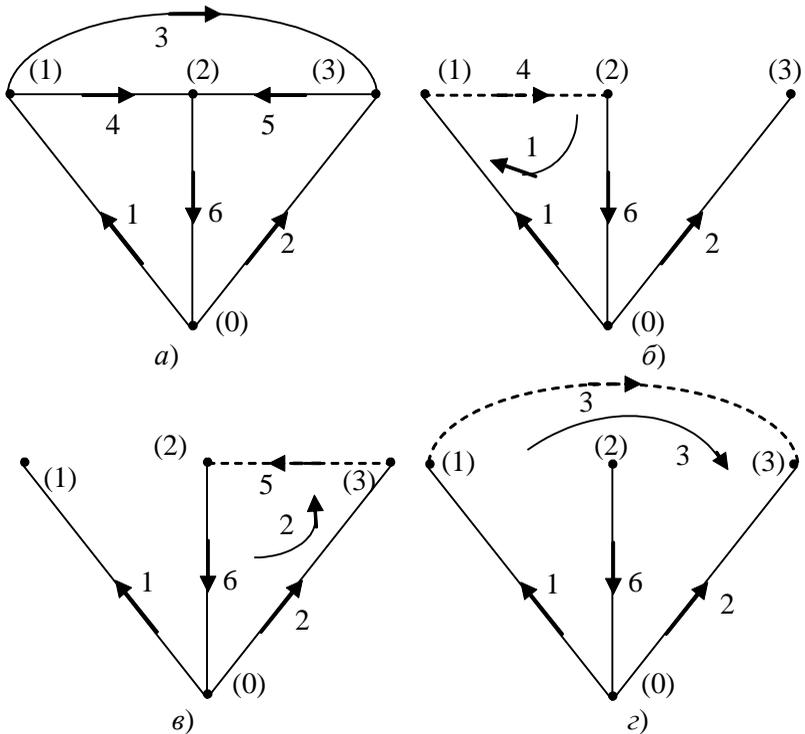


Рис. 4.2.

Для определения токов главных ветвей цепи (рис. 4.1) воспользуемся компонентными уравнениями (4.4), выразив входящие в них напряжения ветвей через токи главных ветвей. Подставив (4.6) сначала в уравнения (4.4), а затем – в уравнения второго закона Кирхгофа (4.3), получим:

$$\begin{aligned}
 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) \underline{I}_4 + \underline{Z}_6 \underline{I}_5 + \underline{Z}_1 \underline{I}_3 &= \underline{E}_1; \\
 \underline{Z}_6 \underline{I}_4 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \underline{I}_5 - \underline{Z}_2 \underline{I}_3 &= \underline{E}_2; \\
 \underline{Z}_1 \underline{I}_4 - \underline{Z}_2 \underline{I}_5 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_3 &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Здесь \underline{I}_4 , \underline{I}_5 , \underline{I}_6 – токи главных ветвей, которые являются независимыми переменными и именуются *контурными токами*.

Очевидно, решить систему (4.7) гораздо легче, чем основную систему уравнений (4.2) – (4.4). Остальные токи определяются из уравнений (4.6).

На практике контурные уравнения формируют с помощью простого алгоритма. Для каждого независимого контура, исключая контуры с источниками тока, записывают уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$I_{kk} \sum_i \underline{Z}_{ki} + \sum_{i \neq k} I_{ii} \underline{Z}_{ki} = \sum_i \underline{E}_{ki} + \sum_j J_j \underline{Z}_{kj}, \quad (4.8)$$

где k – номер рассматриваемого контура; i – номер контура с контурным током I_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$); j – номер вспомогательного контура, содержащего ветвь с источником тока J_j ;

$\underline{Z}_{ki} = \underline{Z}_{ik}$ – сопротивление связи, входящее в k -й и i -й контуры (если контурные токи проходят в одинаковых направлениях по сопротивлению связи, то оно учитывается со знаком «плюс»); $\sum_i \underline{Z}_{ki} = \underline{Z}_{kk}$ – собственное контурное сопротивление,

равное сумме сопротивлений k -го контура; $\sum_i \underline{E}_{ki}$ – алгебраическая сумма ЭДС в k -м контуре, или контурная ЭДС; $J_j \underline{Z}_{kj}$ – напряжение, вызванное током источника тока на взаимных сопротивлениях \underline{Z}_{kj} .

ЭДС, входящая в k -й контур, берется со знаком «плюс», если ее направление совпадает с направлением контурного тока I_{kk} , и со знаком «минус» – в противном случае. Произведение $J_j \underline{Z}_{kj}$ берется со знаком «плюс», если направления контурного тока и тока источника противоположны.

Для контурного тока $I_{11} = I_4$ (рис. 4.2, б) согласно (4.8) следует записать:

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) I_{11} + \underline{Z}_6 I_{22} + \underline{Z}_1 I_{33} = \underline{E}_{11}.$$

Используя введенные выше обозначения, запишем контурные уравнения (4.7) в канонической форме:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} I_{11} + \underline{Z}_{12} I_{22} + \underline{Z}_{13} I_{33} &= \underline{E}_{11}; \\ \underline{Z}_{21} I_{11} + \underline{Z}_{22} I_{22} + \underline{Z}_{23} I_{33} &= \underline{E}_{22}; \\ \underline{Z}_{31} I_{11} + \underline{Z}_{32} I_{22} + \underline{Z}_{33} I_{33} &= \underline{E}_{33}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В общем случае для произвольной линейной цепи, состоящей из активных сопротивлений, емкостей, индуктивностей

и независимых источников, система уравнений (4.9) в матричной форме

$$\underline{Z}_{ij} \underline{I}_{ji} = \underline{E}_{ji}, \quad (4.10)$$

где матрица контурных сопротивлений \underline{Z}_{ij} , вектор-столбец контурных токов \underline{I}_{ji} , вектор-столбец контурных ЭДС и напряжений, вызванных источниками тока, \underline{E}_{ji} соответственно равны

$$\underline{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{n1} & \underline{Z}_{n2} & \dots & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{I}_{ii} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{22} \\ \dots \\ \underline{I}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{E}_{ii} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{11} + \underline{J}_1 \underline{Z}_{k1} \\ \underline{E}_{22} + \underline{J}_2 \underline{Z}_{k2} \\ \dots \\ \underline{E}_{nn} + \underline{J}_n \underline{Z}_{kn} \end{bmatrix}.$$

Решая систему уравнений (4.10) с помощью формул Крамера, запишем выражение для контурного тока k -го контура:

$$\underline{I}_{kk} = \frac{\Delta_{1k}^*}{\Delta} \underline{E}_{11} + \frac{\Delta_{2k}^*}{\Delta} \underline{E}_{22} + \dots + \frac{\Delta_{nk}^*}{\Delta} \underline{E}_{nn} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{ik}^*}{\Delta} \underline{E}_{ii}, \quad (4.11)$$

где Δ – определитель системы уравнений (4.10); Δ_{ik} – алгебраическое дополнение \underline{Z}_{ik} этого определителя; $\underline{E}_{ii} = \underline{E}_{ii} + \underline{U}_{J_i}^*$ – сопряженный комплекс контурной ЭДС.

Ток ветви определяется как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих по данной ветви.

Пример 4.2. Для цепи (рис. 4.3, а) составить систему контурных уравнений.

Решение. В данной цепи $m = 6$ ветвей, $k = 4$ узлов, $m_{ит} = 1$ ветвей с источниками тока, $m - k + 1 = 3$ независимых контуров, $m - m_{ит} - k + 1 = 2$ неизвестных контурных токов.

Система контурных уравнений (рис. 4.3, б, в, г):

$$\underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{13} \underline{I}_{33} = \underline{E}_{11};$$

$$\underline{Z}_{21} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{23} \underline{I}_{33} = \underline{E}_{22},$$

где $\underline{I}_{11} = \underline{I}_2$, $\underline{I}_{22} = \underline{I}_4$ – неизвестные контурные токи; $\underline{I}_{33} = \underline{J}$ – известный контурный ток; $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$ и $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6$ – собственные сопротивления первого и второго контуров, $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_3$, $\underline{Z}_{23} = -\underline{Z}_6$ и $\underline{Z}_{13} = 0$ – взаимные сопротивления кон-

туров; $\underline{E}_{11} = \underline{E}$ и $\underline{E}_{22} = 0$ – контурные ЭДС первого и второго контуров.

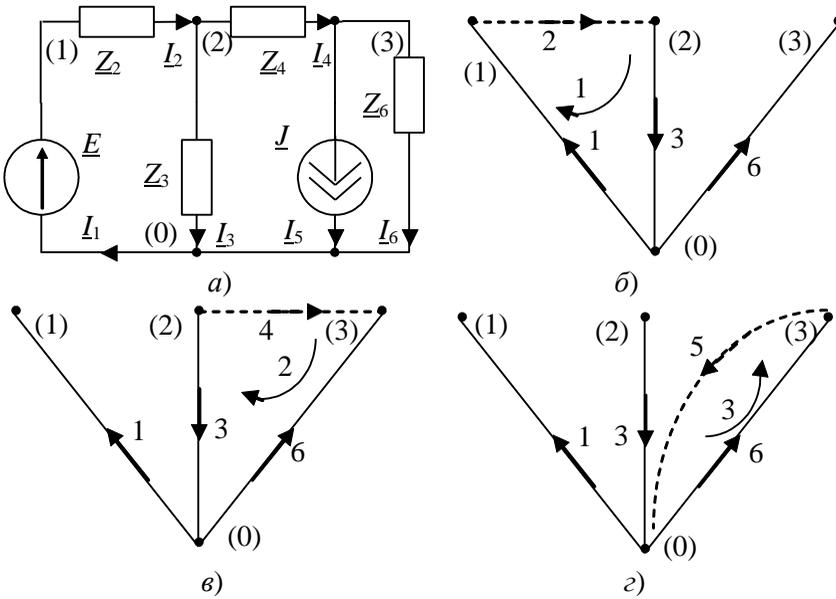


Рис. 4.3.

Подставив в систему контурных уравнений выражения сопротивлений и перенеся в правую часть уравнения контурный ток, получим:

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}_{11} - \underline{Z}_3\underline{I}_{22} &= \underline{E}; \\ -\underline{Z}_3\underline{I}_{11} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)\underline{I}_{22} &= \underline{Z}_6\underline{J}. \end{aligned}$$

4.4. Метод узловых напряжений

При составлении уравнений модели цепи по методу узловых напряжений в качестве переменных используют напряжения независимых узлов цепи относительно базисного. Напряжения всех ветвей электрической цепи могут быть выражены через узловые напряжения этой цепи. Очевидно, что напряжение ветви, включенной между i -м и j -м узлами цепи (рис. 4.4, а), равно разности напряжений (потенциалов) этих узлов: $\underline{U}_k = \underline{U}_{i0} - \underline{U}_{j0}$.

Если исследуемая цепь не содержит независимых источников напряжения, то все $k - 1$ узловых напряжений независимы. Если в цепи $m_{\text{ин}}$ источников напряжения, то может быть составлено $k - m_{\text{ин}} - 1$ уравнений электрического равновесия.

Рассмотрим метод формирования узловых уравнений на примере цепи, не содержащей источников напряжения (рис. 4.4, б). Эта цепь имеет три независимых узла и получена из цепи (рис. 4.1) путем преобразования источников ЭДС в источники тока ($\underline{J}_1 = \frac{E_1}{Z_1}; \underline{J}_2 = \frac{E_2}{Z_2}$) и замены сопротивлений проводимостями ($\underline{Y}_1 = \frac{1}{Z_1}; \underline{Y}_2 = \frac{1}{Z_2} \dots$).

Уравнения баланса токов:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 &= \underline{J}_1; \\ \underline{I}_4 - \underline{I}_5 + \underline{I}_6 &= 0; \\ \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_5 &= \underline{J}_2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

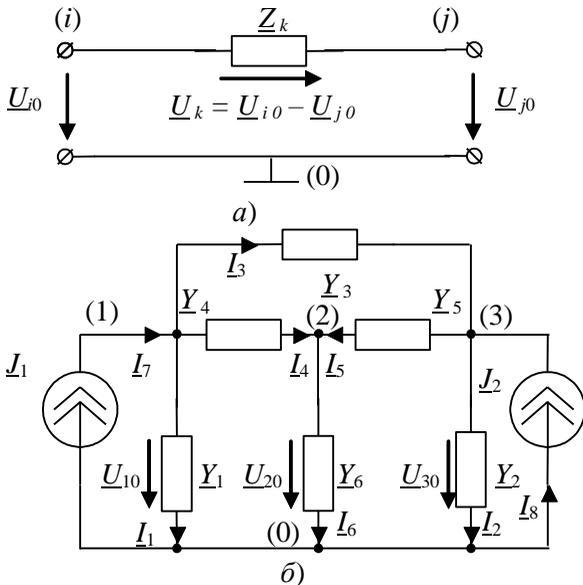


Рис. 4.4.

Выразим неизвестные токи ветвей цепи через напряжения ветвей, а напряжения ветвей – через узловые напряжения:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_1 \underline{U}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_{10}; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_{30}; \\ \underline{I}_3 &= \underline{Y}_3 \underline{U}_3 = \underline{Y}_3 (\underline{U}_{10} - \underline{U}_{30}); \\ \underline{I}_4 &= \underline{Y}_4 \underline{U}_4 = \underline{Y}_4 (\underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}) \\ \underline{I}_5 &= \underline{Y}_5 \underline{U}_5 = \underline{Y}_5 (\underline{U}_{30} - \underline{U}_{20}); \quad \underline{I}_6 = \underline{Y}_6 \underline{U}_6 = \underline{Y}_6 \underline{U}_{20}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставив выражения (4.13) в (4.12), получим систему уравнений для определения трех неизвестных узловых напряжений:

$$\begin{aligned} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \underline{U}_{10} - \underline{Y}_4 \underline{U}_{20} - \underline{Y}_3 \underline{U}_{30} &= \underline{J}_1; \\ -\underline{Y}_4 \underline{U}_{10} + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6) \underline{U}_{20} - \underline{Y}_5 \underline{U}_{30} &= 0; \\ -\underline{Y}_3 \underline{U}_{10} - \underline{Y}_5 \underline{U}_{20} + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5) \underline{U}_{30} &= \underline{J}_2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

При практическом анализе уравнения системы (4.14) можно построить по следующему алгоритму:

$$\underline{U}_{k0} \sum_i \underline{Y}_{ki} + \sum_{i \neq k} \underline{U}_{i0} \underline{Y}_{ki} = \pm \sum_i \underline{E}_i \underline{Y}_{ki} \pm \sum_k \underline{J}_k, \quad (4.15)$$

где $\sum_i \underline{Y}_{ki} = \underline{Y}_{kk}$ – собственная узловая проводимость k -го узла, равная сумме проводимостей ветвей, присоединенных к данному узлу; $\underline{Y}_{ki} = \underline{Y}_{ik}$ – взаимные проводимости; \underline{J}_{i0} – узловой ток i -го узла (он положительный, когда ЭДС и задающие токи \underline{J}_k направлены к узлу).

Уравнения (4.15) дуальны уравнениям (4.11).

Используя введенные обозначения, представим узловые уравнения линейной электрической цепи, имеющей $p = k - 1$ независимых узлов, в канонической форме записи:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} \underline{U}_{10} + \underline{Y}_{12} \underline{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{1p} \underline{U}_{p0} &= \underline{J}_{10}; \\ \underline{Y}_{21} \underline{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \underline{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{2p} \underline{U}_{p0} &= \underline{J}_{20}; \\ &\dots; \\ \underline{Y}_{p1} \underline{U}_{10} + \underline{Y}_{p2} \underline{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{pp} \underline{U}_{p0} &= \underline{J}_{p0}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В матричной форме

$$\underline{Y}_{ij} \underline{U}_{j0} = \underline{J}_{i0}, \quad (4.17)$$

где матрица узловых проводимостей цепи \underline{Y}_{ij} , вектор-столбцы узловых напряжений \underline{U}_{j0} и узловых токов \underline{J}_{j0} соответственно равны

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1p} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{m1} & \underline{Y}_{m2} & \dots & \underline{Y}_{mm} \end{bmatrix}; \quad \underline{U}_{i0} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \dots \\ \underline{U}_{p0} \end{bmatrix}, \quad \underline{J}_{i0} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{10} \\ \underline{J}_{20} \\ \dots \\ \underline{J}_{m0} \end{bmatrix}.$$

Решая систему уравнений (4.16) с помощью формул Крамера, запишем выражение для узлового напряжения k -го узла:

$$\underline{U}_{k0} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \underline{J}_{10} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \underline{J}_{20} + \dots + \frac{\Delta_{pk}}{\Delta} \underline{J}_{p0} = \sum_{i=1}^p \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \underline{J}_{i0},$$

где Δ – определитель системы уравнений (4.16); Δ_{ik} – алгебраическое дополнение элемента \underline{Y}_{ik} .

Если в цепи имеются ветви с идеальными источниками ЭДС, то их исключают путем переноса ЭДС через узел в другие ветви с сопротивлениями (рис. 4.5).

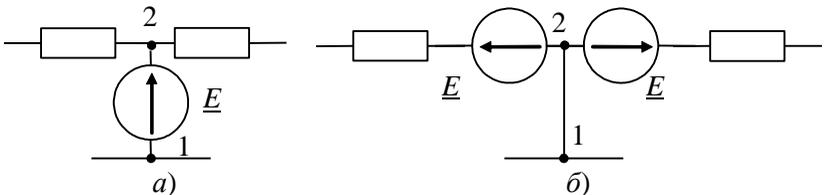


Рис. 4.5.

Если цепь имеет всего два узла, то составляется одно уравнение по методу двух узлов:

$$\underline{U}_{10} = \frac{\sum_k \underline{E}_k \underline{Y}_k + \sum_k \underline{J}_k}{\sum_k \underline{Y}_k}. \quad (4.18)$$

Формула (4.18) часто используется для эквивалентного преобразования нескольких параллельных ветвей в одну эквивалентную с ЭДС $\underline{E}_\ominus = \underline{U}_{10}$ и сопротивлением $\underline{Z}_\ominus = \frac{1}{\sum_k \underline{Y}_k}$.

4.5. Метод компонентных цепей

Рассмотренные выше методы имеют ограничения при формировании уравнений электрического равновесия. Свободным от этих ограничений является метод компонентных цепей [5]. Рассмотрим линейную цепь из элементарных компонентов, в состав которой входят комплексное сопротивление \underline{Z}_k или проводимость \underline{Y}_k (рис. 4.6, а), комплексный источник напряжения \underline{E}_i или тока \underline{J}_j (рис. 4.6, б).

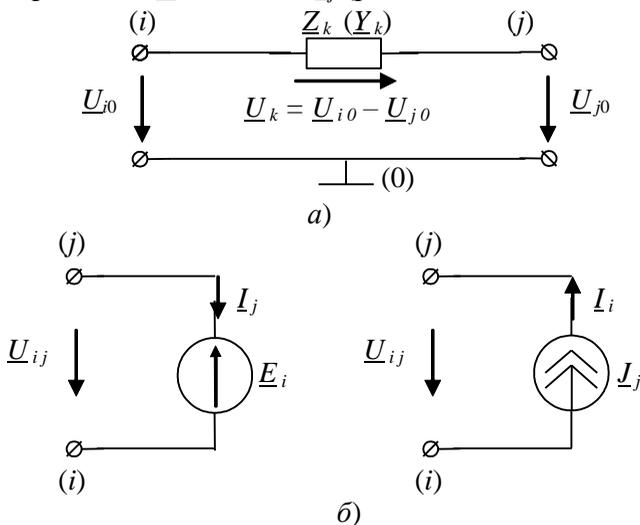


Рис. 4.6.

Уравнения моделей этих компонентов:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_i - \underline{U}_j - \underline{Z}_k \underline{I}_i &= 0 \text{ (сопротивление);} \\
 \underline{Y}_k (\underline{U}_i - \underline{U}_j) - \underline{I}_i &= 0 \text{ (проводимость);} \\
 \underline{U}_j - \underline{U}_i &= \underline{E}_i \text{ (источник напряжения);} \\
 \underline{I}_i &= \underline{J}_j \text{ (источник тока).}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Если в такой цепи имеется $k - 1$ независимых узлов и m ветвей, в которые могут входить любые из приведенных выше компонентов, то для нее уравнения электрического равновесия по методу компонентных цепей содержат: топологи-

ческие уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа; компонентные уравнения, записанные в форме (4.19).

Составим систему уравнений электрического равновесия по методу компонентных цепей для цепи (рис. 4.1). Эта система включает в себя девять уравнений, в том числе: $k - 1 = 3$ уравнения баланса токов

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0, \quad -\underline{I}_4 - \underline{I}_5 + \underline{I}_6 = 0, \quad -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_5 = 0;$$

$m = 6$ компонентных уравнений, записанных относительно узловых напряжений и токов ветвей

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = -\underline{E}_1, \quad \underline{U}_0 - \underline{U}_3 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = -\underline{E}_2,$$

$$\underline{Y}_3(\underline{U}_1 - \underline{U}_3) - \underline{I}_3 = 0, \quad \underline{Y}_4(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) - \underline{I}_4 = 0,$$

$$\underline{Y}_5(\underline{U}_3 - \underline{U}_2) - \underline{I}_5 = 0, \quad \underline{Y}_6(\underline{U}_2 - \underline{U}_0) - \underline{I}_6 = 0, \quad \underline{U}_0 = 0.$$

Таким образом, уравнения модели цепи по данному методу могут быть записаны в разной форме (относительно комплексных сопротивлений или проводимостей), могут учитывать ветви с идеальными источниками или содержать вектор решения в полной форме с учетом токов ветвей ($\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_4, \underline{I}_5, \underline{I}_6$) и напряжений узлов ($\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$). Напряжения ветвей при необходимости легко определить.

ТЕМА 5. ПРИНЦИПЫ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

5.1. Принцип наложения и метод наложения

Согласно *принципу наложения* (суперпозиции), ток (или напряжение) любой ветви равен алгебраической сумме частичных токов (или напряжений), вызванных действием каждого независимого источника в отдельности. Формально для токов можно записать:

$$i_k = \pm \sum_{j=1}^n i_k^{(j)},$$

где $i_k^{(j)}$ – частичный ток от j -го источника в k -й ветви, n – число источников.

Согласно *методу наложения*, в основе которого лежит принцип наложения, цепь представляют совокупностью подсхем (по числу источников). В каждой подсхеме оставляют только один из источников, замыкая накоротко зажимы всех остальных источников ЭДС и размыкая ветви с источниками тока (рис. 5.1).

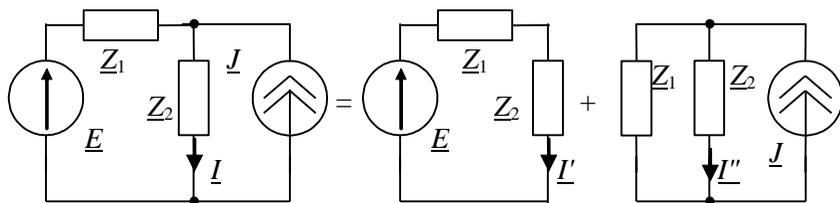


Рис. 5.1.

Искомый ток находят алгебраическим суммированием токов подсхем:

$$\underline{I} = \underline{I}' + \underline{I}''.$$

Полагая в цепи (рис. 5.1) $\underline{Z}_1 = R_1$, а $\underline{Z}_2 = R_2$, определим:

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{E}}{R_1 + R_2}; \quad \underline{I}''_1 = -\frac{\underline{J}R_1}{R_1 + R_2}.$$

Метод наложения прост и нагляден, однако он применим только к линейным цепям с малым числом источников и не-

большой размерности. Расчет подсхем производят, как правило, преобразованием, определяя эквивалентное сопротивление относительно зажимов источника и используя затем закон Ома.

5.2. Принцип взаимности

При изучении методов формирования уравнений модели цепи было установлено, что матрица контурных сопротивлений в (4.10) и матрица узловых проводимостей в (4.16) являются симметричными относительно главной диагонали. На симметричности этих матриц основывается принцип взаимности.

Теорема взаимности имеет две трактовки:

1) контурный ток k -го контура цепи, вызванный действием единственной ЭДС, помещенной в i -й контур, равен контурному току i -го контура, вызванному действием того же источника напряжения, перенесенного из i -го контура в k -й;

2) если независимый источник тока \underline{J} , подключенный к какой-либо паре зажимов линейной цепи, вызывает на другой паре зажимов напряжение \underline{U} , то этот же источник тока, подключенный к другой паре зажимов, вызовет на первой паре зажимов то же напряжение \underline{U} .

Если электрическая цепь обладает взаимностью, то она называется взаимной (обратимой). К необратимым цепям относятся, в частности, нелинейные цепи (элементы матриц \underline{Z}_{ij} и \underline{Y}_{ij} зависят от токов и напряжений ветвей) и цепи, содержащие зависимые источники.

5.3. Принцип компенсации

Согласно *принципу компенсации*, токи и напряжения цепи не изменятся, если любую ветвь этой цепи заменить либо идеальным источником напряжения, ЭДС которого равна напряжению данной ветви и направлена противоположно этому напряжению, либо идеальным источником тока, ток которого равен току рассматриваемой ветви и совпадает с ним по направлению.

Напряжение и ток ветви с сопротивлением \underline{Z}_k связаны уравнением, составленным по закону Ома. Для цепи (рис. 5.2, а) можно записать: $\underline{U}_k - \underline{Z}_k \underline{I}_k = 0$. Для цепи (рис. 5.2, б) — $\underline{U}_k = \underline{E}_k$ или $\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k$, что соответствует уравнению исходной цепи. Для цепи (рис. 5.2, в) ток исходной цепи \underline{I}_k , протекающий через \underline{Z}_k , заменим равным ему током $\underline{J}_k = \underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k}$ идеального источника тока. Таким образом, цепи (рис. 5.2, а, б, в) являются эквивалентными.

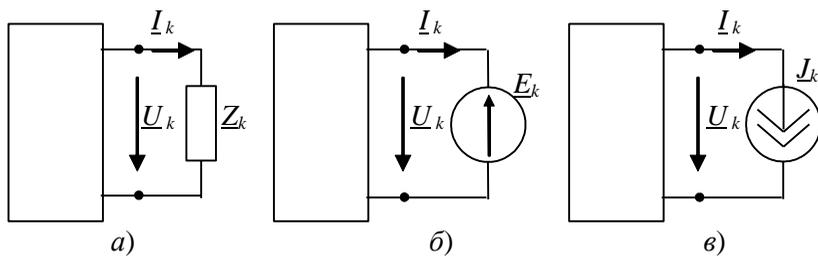


Рис. 5.2.

Принцип компенсации расширяет возможности эквивалентных преобразований электрических цепей.

5.4. Теорема и метод эквивалентного генератора

В соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе (источнике) ток любой ветви электрической цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником с ЭДС, равной напряжению холостого хода на зажимах этой ветви и внутренним сопротивлением, равным эквивалентному сопротивлению двухполюсника относительно этой ветви.

Докажем теорему. Введем в выделенную ветвь $a - a'$ (рис. 5.3, а) два вспомогательных источника \underline{E}_1 и \underline{E}_2 , ЭДС которых равны по величине, но противоположны по направлению. Так как \underline{E}_1 и \underline{E}_2 компенсируют друг друга, ток \underline{I}_a ветви не изменится. Далее, согласно принципу наложения

$$\underline{I} = \underline{I}'_a + \underline{I}''_a,$$

где \underline{I}_a – частичный ток a -й ветви, создаваемый источником \underline{E}_1 и всеми независимыми источниками активного двухполюсника (рис. 5.3, б); \underline{I}'_a – ток, создаваемый источником \underline{E}_2 (рис. 5.3, в).

Из эквивалентной схемы (рис. 5.3, б)

$$\underline{I}'_a = \frac{\underline{U}'_a - \underline{E}_1}{\underline{Z}_a}, \quad (5.1)$$

где \underline{U}'_a – напряжение на зажимах $a - a'$, когда ток в ветви равен \underline{I}_a . Выберем теперь такие ЭДС $\underline{E}_1 = \underline{E}_2$, при которых $\underline{I}_a = 0$. Тогда по (5.1) найдем значение \underline{E}_1 , при котором $\underline{I}_a = 0$:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = \underline{U}_X. \quad (5.2)$$

Таким образом, при выборе $\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = \underline{U}_X$ ток

$$\underline{I}_a = 0 + \underline{I}''_a = \underline{I}''_a.$$

Используя эквивалентную схему (рис. 5.3, в) для определения тока \underline{I}''_a , находим:

$$\underline{I}_a = \underline{I}''_a = \frac{\underline{U}_X}{\underline{Z}_{\text{ВХ}} + \underline{Z}_a} = \frac{\underline{E}_\ominus}{\underline{Z}_\ominus + \underline{Z}_a}, \quad (5.3)$$

где $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \underline{Z}_\ominus$ – комплексное входное сопротивление пассивного двухполюсника.

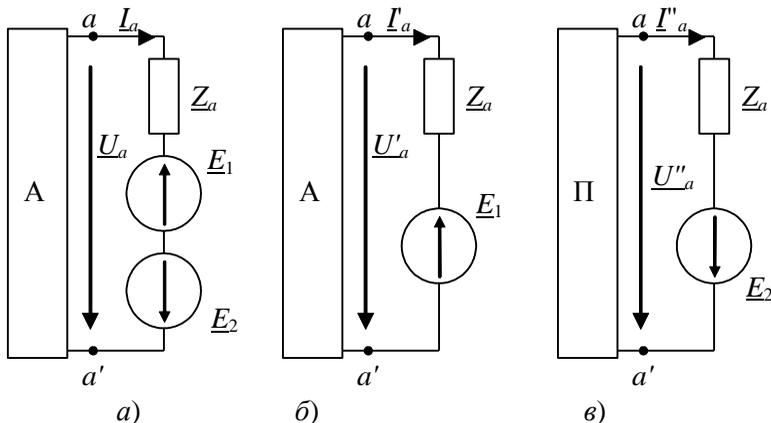


Рис. 5.3.

Как видно из выражения (5.3), ток ветви $a - a'$ равен току некоторой цепи, содержащей помимо сопротивления \underline{Z}_a источник напряжения $\underline{E}_\ominus = \underline{U}_X$ и комплексное сопротивление $\underline{Z}_\ominus = \underline{Z}_{\text{ВХ}}$ (рис. 5.4).

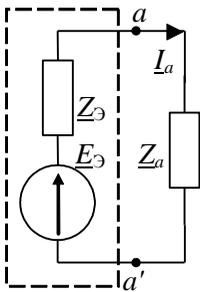


Рис. 5.4.

Итак, ток выделенной ветви I_a не изменится при замене автономного двухполюсника эквивалентным источником, ЭДС которого равна напряжению холостого хода, а внутреннее сопротивление – его комплексному входному сопротивлению.

Пример 5.1. Определить ток I_3 цепи (рис. 5.5, а), используя метод эквивалентного генератора. Параметры цепи:

$$\underline{Z}_1 = 6 \text{ Ом}; \underline{Z}_2 = 4 \text{ Ом}; \underline{Z}_3 = 12 \text{ Ом}; \underline{E}_1 = 120 \text{ В}; \underline{E}_2 = 100 \text{ В}.$$

Решение. Заменяем часть цепи слева от зажимов 1 – 1' источником ЭДС \underline{E}_3 с внутренним сопротивлением \underline{Z}_3 (рис. 5.5, б). ЭДС \underline{E}_3 равна напряжению на зажимах 1 – 1' цепи при отключенной ветви \underline{Z}_3 (рис. 5.5, в):

$$\underline{E}_3 = \underline{U}_X = \underline{E}_2 + \frac{\underline{E}_1 - \underline{E}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_2 = 108 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление \underline{Z}_3 равно входному сопротивлению цепи при отключенных источниках \underline{E}_1 и \underline{E}_2 :

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = 2,4 \text{ Ом}.$$

В соответствии со схемой (рис. 5.5, б)

$$I_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3} = 7,5 \text{ А}.$$

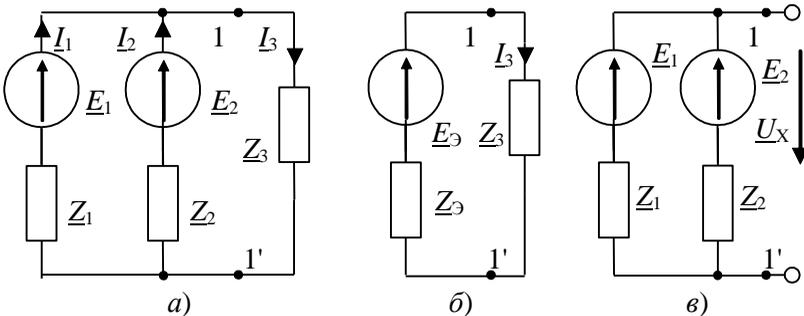


Рис. 5.5.

ТЕМА 6. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

6.1. Классификация четырехполюсников

Устройство, прибор или часть цепи, имеющие две пары зажимов, служащих для подключения источников энергии и нагрузки, называются *четыреpolюсниками*. Примерами четырехполюсников могут служить усилители и трансформаторы, электрические фильтры и линии электропередачи. К исследованию проходных четырехполюсников сводятся задачи определения комплексных частотных и операторных характеристик произвольных цепей.

Четыреpolюсники подразделяют на линейные и нелинейные, активные и пассивные, автономные и неавтономные, симметричные и несимметричные.

Активный четырехполюсник имеет в своем составе источники энергии, и напряжение на его разомкнутых зажимах отличается от нуля. *Пассивный* четырехполюсник не содержит источников энергии. В общем случае активный четырехполюсник обозначают буквой А (рис. 6.1), пассивный – буквой П.

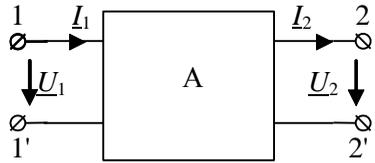


Рис. 6.1.

Активные четырехполюсники подразделяют на автономные и неавтономные. Если внутри четырехполюсника имеются нескомпенсированные источники энергии, то он – *автономный*. Если источники внутри четырехполюсника являются зависимыми (транзисторы, операционные усилители), то четырехполюсник – *неавтономный*.

Будем называть четырехполюсник *симметричным*, если перемена местами входных и выходных зажимов не приводит к изменению токов и напряжений цепи, к которой он подключен.

Еще один признак деления четырехполюсников – на взаимные и невзаимные. *Взаимным* называют четырехполюсник, для которого справедлива теорема взаимности (обратности). Все пассивные четырехполюсники – взаимные.

И, наконец, четырехполосники делят на *линейные* (связь токов и напряжений на их зажимах описывается линейными зависимостями) и *нелинейные*. Ниже будут рассматриваться только линейные пассивные четырехполосники.

6.2. Основные уравнения и первичные параметры четырехполосников

Основные уравнения проходных четырехполосников составляются относительно токов и напряжений внешних ветвей, подключенных к зажимам 1 – 1' и 2 – 2'. Их число равно числу независимых сторон четырехполосника, т.е. двум. Вид этих уравнений зависит от того, какие две величины из четырех токов и напряжений являются зависимыми, а какие – независимыми. Учитывая, что число сочетаний из четырех по два равно шести, приходим к заключению, что основные уравнения четырехполосника могут быть записаны в шести различных формах.

Четыре наиболее важные в практическом отношении формы записи уравнений четырехполосника приведены ниже.

A-форма, где \underline{U}_1 и \underline{I}_1 – зависимые от \underline{U}_2 и \underline{I}_2 :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2.\end{aligned}\quad (6.1)$$

В матричной форме $\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$.

Y-форма, где \underline{I}_1 и \underline{I}_2 – зависимые от \underline{U}_1 и \underline{U}_2 :

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 - \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 - \underline{Y}_{22}\underline{U}_2;\end{aligned}\quad \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}.\quad (6.2)$$

Z-форма, где \underline{U}_1 и \underline{U}_2 – зависимые от \underline{I}_1 и \underline{I}_2 :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 - \underline{Z}_{22}\underline{I}_2;\end{aligned}\quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.\quad (6.3)$$

H-форма, где \underline{U}_1 и \underline{I}_2 – зависимые от \underline{I}_1 и \underline{U}_2 :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Коэффициенты основных уравнений (6.1) – (6.4) называются соответственно A -, Y -, Z - и H -параметрами четырехполюсника. Каждый из этих параметров имеет физический смысл какой-либо комплексной частотной характеристики проходного четырехполюсника. Например, параметр

$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0}$ имеет смысл комплексной входной проводимости

четыреполюсника со стороны зажимов 1 – 1' при корот-

ком замыкании на зажимах 2 – 2', а параметр $\underline{H}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}$ –

величины, обратной комплексному коэффициенту передачи по напряжению от зажимов 1 – 1' к зажимам 2 – 2' в режиме холостого хода на зажимах 1 – 1'.

Математически системы уравнений (6.1) – (6.4) являются равносильными, поэтому коэффициенты уравнений должны быть связаны элементарными алгебраическими соотношениями. Для определения этих соотношений соответствующие системы уравнений должны быть решены относительно одних и тех же переменных. Например, система уравнений (6.2) может быть решена относительно напряжений \underline{U}_1 и \underline{U}_2 :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Y}_{22} \underline{I}_1 - \underline{Y}_{12} \underline{I}_2}{\Delta_Y}; \quad \underline{U}_2 = \frac{-\underline{Y}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Y}_{11} \underline{I}_2}{\Delta_Y}, \quad (6.5)$$

где $\Delta_Y = \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}$ – определитель основной системы в Y -форме.

Сравнивая коэффициенты уравнений (6.3) и (6.5), Z -параметры неавтономного четырехполюсника можно выразить через Y -параметры того же четырехполюсника:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta_Y}. \quad (6.6)$$

Соотношения (6.6) называют *формулами перехода*.

Для обратимых четырехполюсников справедливы равенства $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$, $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, $\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1$, означающие, что из четырех параметров независимыми являются только три. В симметричном обратимом четырехполюснике всего два независимых параметра.

Пример 6.1. Определить А-параметры Г-образного четырехполюсника (рис. 6.2, а) методом холостого хода и короткого замыкания.

Решение. Воспользуемся основными уравнениями четырехполюсника в А-форме (6.1).

Параметры четырехполюсника в режиме холостого хода, $I_2 = 0$ (рис. 6.2, б):

$$\underline{A}_{11} = \frac{U_{1X}}{U_{2X}}; \underline{A}_{21} = \frac{I_{1X}}{U_{2X}}.$$

В режиме короткого замыкания, $U_2 = 0$ (рис. 6.2, в):

$$\underline{A}_{12} = \frac{U_{1К}}{I_{2К}}; \underline{A}_{22} = \frac{I_{1К}}{I_{2К}}.$$

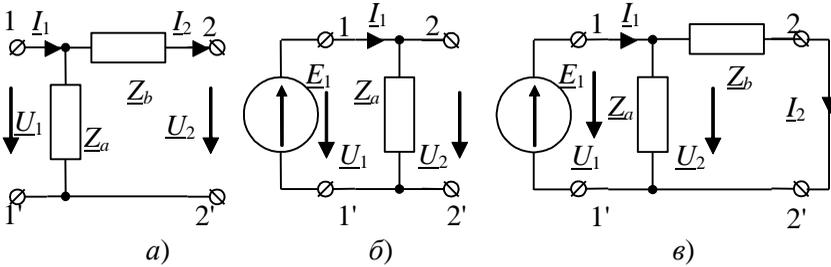


Рис. 6.2.

Из схем (рис. 6.2, б, в) видно, что в режиме холостого хода $U_2 = U_1 = E_1$, $I_1 = \frac{E_1}{Z_a}$, а в режиме короткого замыкания

$$I_2 = \frac{U_1}{Z_b} = \frac{E_1}{Z_b}, \quad I_1 = E_1 \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b}.$$

Используя полученные соотношения, находим:

$$\underline{A}_{11} = 1; \underline{A}_{12} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_b}{\underline{E}_1} = \underline{Z}_b; \underline{A}_{21} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_1 \underline{Z}_a} = \frac{1}{\underline{Z}_a};$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_b (\underline{Z}_a + \underline{Z}_b)}{\underline{E}_1 \underline{Z}_a \underline{Z}_b} = 1 + \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_a}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_b \\ \frac{1}{\underline{Z}_a} & 1 + \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_a} \end{bmatrix}.$$

6.3. Схемы замещения четырехполюсников

Каждому линейному автономному четырехполюснику может быть поставлена в соответствие эквивалентная схема, содержащая не более четырех элементов. Так как только три параметра четырехполюсника являются независимыми, то минимальное число элементов в схеме замещения, обеспечивающей заданные свойства, равняется трем.

Для каждого четырехполюсника можно построить несколько эквивалентных схем, имеющих различную топологию и различных по типам и значениям входящих в нее элементов. Широкое распространение на практике получили Т- и П-образные схемы с соединениями звездой (рис. 6.3, а) и треугольником (рис. 6.3, б).

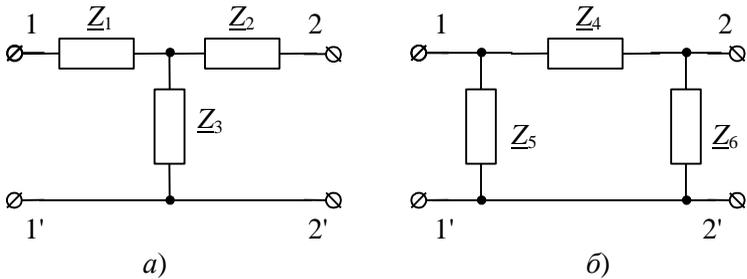


Рис. 6.3.

Сопротивления \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 , а также \underline{Z}_4 , \underline{Z}_5 , \underline{Z}_6 могут быть выражены через коэффициенты уравнений любой формы. В свою очередь, коэффициенты уравнений четырехполюсника могут быть выражены через эти сопротивления. Например, сопротивления Т-образной схемы и А-параметры связаны соотношениями:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}; \underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{A}_{21}}; \underline{Z}_3 = \frac{\underline{A}_{21} - 1}{\underline{A}_{21}}; \underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}; \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2}; \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}.$$

Для П-образной схемы:

$$\underline{Z}_4 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1}; \underline{Z}_5 = \underline{A}_{12}; \underline{Z}_6 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1}; \underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_6}; \quad (6.7)$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_5; \underline{A}_{21} = \frac{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}{\underline{Z}_4 \underline{Z}_6}; \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4}.$$

Подробные сведения о связи параметров четырехполюсника с сопротивлениями эквивалентных схем можно найти в [2], табл.4.1.

Пример 6.2. Четырехполюсник имеет следующие значения А-параметров: $\underline{A}_{11} = 1e^{j90^\circ}$; $\underline{A}_{12} = 10e^{j90^\circ}$; $\underline{A}_{21} = 0,2e^{j90^\circ}$.

Определить сопротивления Т-образной схемы четырехполюсника.

Решение. По формулам (6.7) для Т-образной схемы в случае симметричного четырехполюсника запишем:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{j - 1}{j0,2} = 5 + j5 = 7,07e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1}{j0,2} = 5e^{-j90^\circ} \text{ Ом}; \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 = 5 + j5 = 7,07e^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

6.4. Характеристические параметры четырехполюсников

Для анализа сложных цепей, составленных из одинаковых четырехполюсников, удобно от рассмотренных выше параметров перейти к характеристическим (вторичным) параметрам, которых в общем случае три: характеристические сопротивления \underline{Z}_{C1} и \underline{Z}_{C2} и характеристическая постоянная (мера) передачи.

Характеристическими сопротивлениями называют пару сопротивлений \underline{Z}_{C1} и \underline{Z}_{C2} , выбранных таким образом, что при под-

ключении к зажимам 2 – 2' сопротивления нагрузки $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}$ (рис. 6.4, а) входное сопротивление со стороны зажимов 1 – 1' равно \underline{Z}_{C1} , а при подключении $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{H1}$ к зажимам 1 – 1' (рис. 6.4, б) входное сопротивление со стороны зажимов 2 – 2' равно \underline{Z}_{C2} . Сопротивление \underline{Z}_{C1} называется характеристическим входным, а \underline{Z}_{C2} – характеристическим выходным сопротивлением.

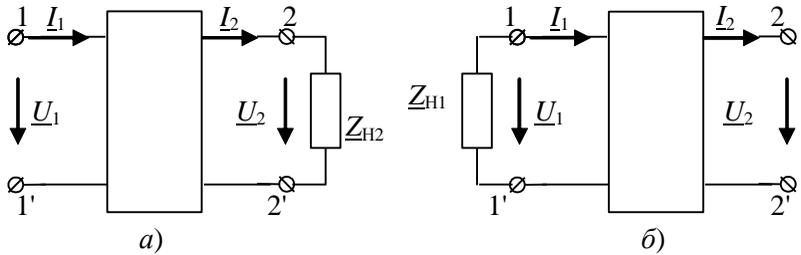


Рис. 6.4.

Характеристические сопротивления, как правило, выражаются через A -параметры или сопротивления четырехполюсника в режимах короткого замыкания ($\underline{Z}_{1К}$, $\underline{Z}_{2К}$) и холостого хода ($\underline{Z}_{1Х}$, $\underline{Z}_{2Х}$):

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} \underline{A}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_{1К} \underline{Z}_{1Х}} ; \underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} \underline{A}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_{2К} \underline{Z}_{2Х}} . \quad (6.8)$$

Характеристическую постоянную передачи $\underline{\Gamma}$ определяют по передаточной функции четырехполюсника в режиме согласованной нагрузки, позволяющей оценивать энергетические соотношения:

$$e^{\underline{\Gamma}} = \sqrt{\frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2}} . \quad (6.8)$$

Если переменные на выводах четырехполюсника выразить через A -параметры, то

$$e^{\underline{\Gamma}} = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} ,$$

откуда

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}\right) . \quad (6.10)$$

С учетом уравнения $\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1$ справедливы равенства:

$$\operatorname{ch}\underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}; \operatorname{sh}\underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}.$$

Если уравнения (6.8) представить в форме

$$\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}},$$

то можно выразить A -параметры через характеристические параметры:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \operatorname{ch}\underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}} \operatorname{sh}\underline{\Gamma}; \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{C1}\underline{Z}_{C2}}} \operatorname{sh}\underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \operatorname{ch}\underline{\Gamma}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подставив (6.11) в уравнения (6.1), получим:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} (\underline{U}_2 \operatorname{ch}\underline{\Gamma} + \underline{Z}_{C2} \underline{I}_2 \operatorname{sh}\underline{\Gamma}); \\ \underline{I}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \left(\underline{I}_2 \operatorname{ch}\underline{\Gamma} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{C2}} \operatorname{sh}\underline{\Gamma} \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Если четырехполюсник симметричный, то соотношения (6.10) – (6.12) упрощаются. Так, поскольку $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, то при наличии согласования справедливо:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_C; \quad \underline{\Gamma} &= \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}); \\ \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = e^{\underline{\Gamma}}; \quad \underline{\Gamma} &= \alpha + j\beta = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + j(\psi_{\underline{U}_1} - \psi_{\underline{U}_2}). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из (6.13) видно, что для симметричного четырехполюсника вещественная часть α меры передачи $\underline{\Gamma}$ определяет затухание как напряжения, так и тока. В несимметричном четырехполюснике она определяет ослабление полной мощности, поэтому и называется *постоянной затухания*. Измеряется обычно в неперах (Нп) либо в децибелах (дБ), причем 1 Нп = 8,68 дБ. Мнимую часть меры передачи β называют *постоянной фазы* и измеряют в радианах или градусах.

Пример 6.3. Определить характеристические параметры четырехполюсника, для которого задана матрица A -параметров

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & j8 \\ -j & 3 \end{bmatrix}. \text{ Элементы главной диагонали этой матрицы без-}$$

размерны, а остальные элементы имеют размерности Ом и См.

Решение. Характеристическое сопротивление четырехполюсника $\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = j2,83 \text{ Ом}.$

Так как для рассматриваемого четырехполюсника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 3$, то $\underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = j2,83 \text{ Ом}.$

Характеристическая постоянная передачи

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 1,76.$$

Учитывая, что $\underline{\Gamma} = \alpha + j\beta$, найдем $\alpha = 1,76 \text{ Нп} = 1,53 \text{ дБ}$, $\beta = 0$.

Пример 6.4. Для несимметричного четырехполюсника (рис. 6.5) определить коэффициенты матрицы \mathbf{A} , характеристические параметры и комплексный коэффициент передачи по напряжению при условии $X_L = 2X_C = 20 \text{ Ом}.$

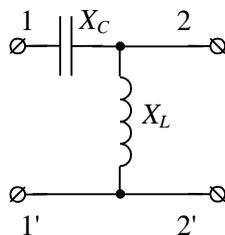


Рис. 6.5.

Решение. Коэффициенты матрицы \mathbf{A} определим по уравнениям (6.1) для режимов короткого замыкания и холостого хода (при $\underline{U}_2 = 0$ и $\underline{I}_2 = 0$ соответственно).

При замкнутых зажимах 2 – 2':

$$\underline{U}_{1К} = \underline{A}_{12} \underline{I}_2; \underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1К}}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_{1К}(-jX_C)}{\underline{U}_{1К}} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{1К} = \underline{A}_{22} \underline{I}_2; \underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1К}}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_{1К}(-jX_C)}{-jX_C \underline{U}_{1К}} = 1.$$

При разомкнутых зажимах 2 – 2':

$$\underline{U}_{1X} = \underline{A}_{11} \underline{U}_2; \quad \underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1X}}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_{1X}(jX_L - jX_C)}{\underline{U}_{1X} jX_L} = 0,5;$$

$$\underline{I}_{1X} = \underline{A}_{21} \underline{U}_2; \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{1X}}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_{1X}(jX_L - jX_C)}{(jX_L - jX_C) \underline{U}_{1X} jX_L} = -j0,05 \text{ См.}$$

По найденным A -параметрам с использованием формул (6.8) и (6.10) находим характеристические параметры:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{0,5(-j10)}{-j0,05 \cdot 1}} = 10 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{1(-j10)}{-j0,05 \cdot 0,5}} = 20 \text{ Ом};$$

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\sqrt{0,5 \cdot 1} + \sqrt{-j10 \cdot (-j0,05)}\right) = \ln(0,707 + j0,707) = \ln(e^{j45^\circ}),$$

откуда $\underline{\Gamma} = \alpha + j\beta = 0 + j\frac{\pi}{4}$, т.е. затухание в данном четырехполюснике отсутствует.

Коэффициент передачи по напряжению в режиме согласованной нагрузки ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C2}$, $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{C2}$):

$$k_U = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}}} \underline{U}_2 (ch\underline{\Gamma} + sh\underline{\Gamma}) = \frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}} e^{-\underline{\Gamma}} = 0,707 e^{-j45^\circ}.$$

6.5. Электрические фильтры

Назначение и типы фильтров. Под *электрическими фильтрами* понимают четырехполюсники, включаемые между источником питания и приемником (нагрузкой), назначение которых состоит в том, чтобы без затухания пропускать к приемнику токи одних частот и задерживать или пропускать с большим затуханием токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называют *полосой пропускания*, а диапазон частот, пропускаемых с затуханием, — *полосой затухания*.

Обычно фильтры составлены из идеальных реактивных элементов — индуктивных катушек и конденсаторов без учета активных сопротивлений и проводимостей. Фильтры используют главным образом в радиотехнике и технике связи.

Фильтры обычно собирают по симметричным Т- или П-образным схемам (см. рис. 6.3), т.е. при $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_6 = \underline{Z}_5$.

При изучении фильтров будем использовать понятия коэффициента затухания и коэффициента фазы. Кроме того, условимся называть сопротивление \underline{Z}_1 и сопротивление \underline{Z}_4 *продольными*, а сопротивление \underline{Z}_3 и сопротивление \underline{Z}_5 – *поперечными* (см. рис. 6.3, а, б).

Фильтры, в которых произведение продольного сопротивления на соответствующее поперечное сопротивление является постоянной величиной (число k), не зависящей от частоты, принято называть k -фильтрами.

Сопротивление нагрузки \underline{Z}_H на выходе фильтра должно быть согласовано с характеристическим сопротивлением фильтра \underline{Z}_C ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$). Входное сопротивление k -фильтра при этом равно \underline{Z}_C .

Фильтрующие свойства четырехполосников обусловлены возникновением в них резонансных режимов – резонансов токов или напряжений. Качество фильтра тем выше, чем более резко выражены его фильтрующие свойства, т.е. чем более резко возрастает затухание в полосе затухания.

Основы теории k -фильтров. Если нагрузка \underline{Z}_H согласована с характеристическим сопротивлением \underline{Z}_C четырехполосника, то напряжение \underline{U}_2 и ток \underline{I}_2 в нагрузке связаны с напряжением \underline{U}_1 и током \underline{I}_1 на входе четырехполосника соотношениями:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-\underline{\Gamma}}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-\underline{\Gamma}},$$

где $\underline{\Gamma} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = \alpha + j\beta$.

Тогда $\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-\alpha} e^{-j\beta}$, $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-\alpha} e^{-j\beta}$. Множитель $e^{-\alpha}$ определяет, во сколько раз модуль напряжения (тока) на выходе фильтра меньше модуля напряжения (тока) на его входе. Если $\alpha = 0$, то $e^{-\alpha} = e^0 = 1$, и фильтр пропускает колебания без затухания. Таким образом, в полосе прозрачности $\alpha = 0$, а в полосе затухания $\alpha > 0$.

Фильтрующие свойства четырехполюсника рассмотрим путем сравнения выражения для коэффициента \underline{A}_{11} с выражением

$$\underline{A}_{11} = \text{ch}(\alpha + j\beta). \quad (6.14)$$

Так как гиперболический косинус двух аргументов

$$\text{ch}(\alpha + j\beta) = \text{ch}\alpha \cos\beta + j \text{sh}\alpha \sin\beta, \quad (6.15)$$

то, как выше доказано, для фильтра по Т-образной схеме

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}. \quad \text{Для фильтра по П-образной схеме } \underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_5}.$$

Отношения $\underline{Z}_1/\underline{Z}_3$ в Т-схеме и $\underline{Z}_4/\underline{Z}_5$ в П-схеме всегда будут действительными, соответственно действительным будет и коэффициент \underline{A}_{11} . Поэтому действительным будет и $\text{ch}(\alpha + j\beta)$, а это значит, что мнимая часть в (6.15)

$$\text{sh}\alpha \sin\beta = 0. \quad (6.16)$$

При этом

$$\text{ch}\alpha \cos\beta = \underline{A}_{11}. \quad (6.17)$$

Уравнения (6.16) и (6.17) используют для определения границ полосы прозрачности и характера изменения угла в этой полосе, а также характера изменения коэффициента затухания в полосе затухания. Равенство (6.16) для полосы прозрачности удовлетворяется, так как $\text{sh}\alpha = \text{sh}0 = 0$. Поскольку $\text{ch}0 = 1$, то уравнение (6.17) для полосы прозрачности принимает вид

$$\cos\beta = \underline{A}_{11}. \quad (6.18)$$

Круговой косинус ($\cos\beta$) может изменяться в пределах от -1 до 1 , поэтому $\underline{A}_{11} = \pm 1$. Полоса прозрачности в общем случае лежит в диапазоне частот от ω_1 до ω_2 . Значения ω_1 и ω_2 для фильтров низких частот и высоких частот определяют путем решения уравнений

$$\underline{A}_{11}(\omega) = \pm 1. \quad (6.19)$$

Частоту, являющуюся граничной между полосой прозрачности и полосой затухания, называют *частотой среза*.

Характер изменения угла β в функции ω для полосы прозрачности определяют по уравнению (6.18):

$$\beta = \arccos \underline{A}_{11}(\omega). \quad (6.20)$$

Определим α и β для полосы затухания. В полосе затухания $\alpha > 0$; условие

$$\sin \beta = 0 \quad (6.21)$$

для уравнения (6.16) выполняется при $\beta = 0$ или $\beta = \pm\pi$. Согласно уравнению (6.17) при $\beta = 0$

$$\operatorname{ch} \alpha = -\underline{A}_{11}(\omega).$$

Уравнения (6.21) и (6.22) позволяют по значениям $\underline{A}_{11}(\omega)$ рассчитать $\operatorname{ch} \alpha$ в полосе затухания, по $\operatorname{ch} \alpha$ определить α , а затем построить кривую $\alpha = f(\omega)$.

Из (6.21) следует, что напряжение \underline{U}_2 находится в фазе при $\beta = 0$ и в противофазе – при $\beta = \pm\pi$ с напряжением \underline{U}_1 на входе фильтра.

В заключение необходимо отметить два важных момента: с изменением частоты ω изменяются коэффициенты \underline{A}_{12} , \underline{A}_{21} и, соответственно, характеристическое сопротивление $\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}}$; в полосе прозрачности характеристическое сопротивление k -фильтра активное, а в полосе затухания – чисто реактивное (индуктивное или емкостное).

***k*-фильтры различных типов.** Фильтрами низких частот (ФНЧ) называют фильтры, пропускающие в нагрузку лишь низкие частоты от $\omega_1 = 0$ до ω_2 . Их полоса затухания находится в интервале от ω_2 до ∞ .

Под *фильтрами высоких частот* (ФВЧ) понимают фильтры, пропускающие в нагрузку лишь высокие частоты от ω_1 до ∞ . Их полоса затухания находится в интервале от 0 до ω_1 .

Характер изменения коэффициентов α и β для двух ФНЧ (рис. 6.6, а, б) иллюстрируют кривые (рис. 6.6, в). Характер изменения коэффициентов α и β для двух ФВЧ (рис. 6.7, а, б) иллюстрируют кривые (рис. 6.7, в).

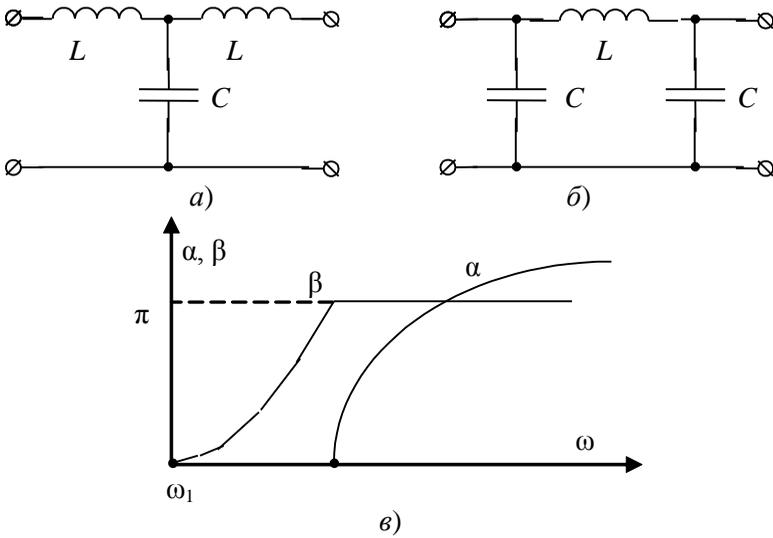


Рис. 6.6.

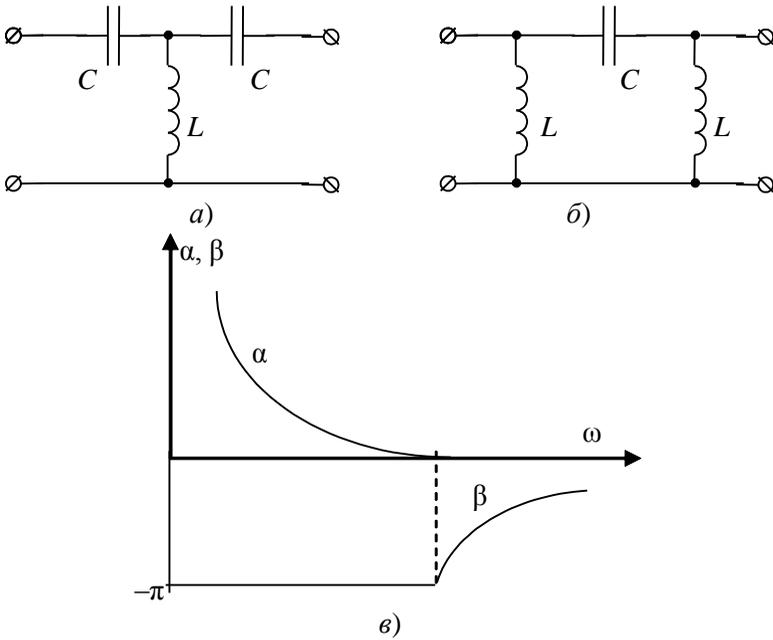


Рис. 6.7.

Рассмотрим, как изменяется модуль характеристического сопротивления \underline{Z}_C на примере T-образного ФНЧ и

П-образного ФВЧ. Для Т-образного ФНЧ (рис. 6.6, а) $\underline{Z}_{CT} = \sqrt{2L/C - (\omega L)^2}$. График $\underline{Z}_{CT} = f(\omega)$ представлен на рис. 6.8, а. При $\omega = \omega_1 = 0$ $\underline{Z}_{CT} = \sqrt{2L/C}$. С увеличением частоты \underline{Z}_{CT} уменьшается, сначала мало отличаясь от значения $\sqrt{2L/C}$. При достижении значения $\omega = \omega_2 = \sqrt{2L/C}$ $\underline{Z}_{CT} = 0$. Для П-образного ФВЧ (рис. 6.7, б) $\underline{Z}_{CП} = (2C/L - 1/(\omega L)^2)^{-0.5}$. График $\underline{Z}_{CП} = f(\omega)$ представлен на рис. 6.8, б.

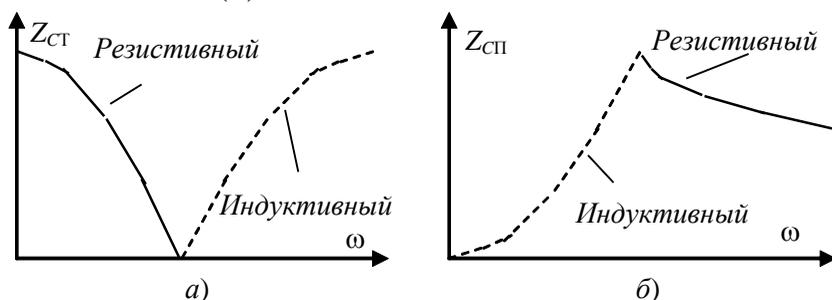


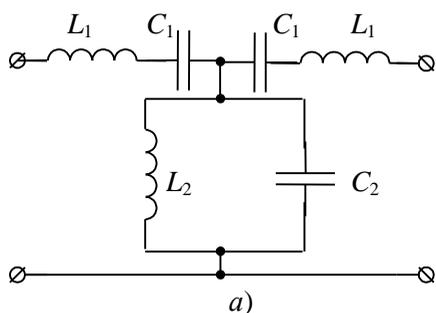
Рис. 6.8.

Если фильтр предназначен для работы на частотах, находящихся внутри полосы пропускания данного фильтра и далеко отстоящих от значения частоты, при котором $\underline{Z}_C = 0$, то сопротивление нагрузки на выходе ФНЧ выбирают равным \underline{Z}_C , соответствующим $\omega = \omega_1 = 0$. Для Т-образных ФНЧ (рис. 6.6, а) и для Т-образных ФВЧ нагрузки, согласованной со значением \underline{Z}_C при $\omega \rightarrow \infty$ (рис. 6.7, а), $\underline{Z}_{CT} = \sqrt{2L/C}$. В полосе затухания \underline{Z}_C оказывается чисто реактивным для всех типов k -фильтров.

Чтобы выяснить, индуктивный или емкостный характер имеет \underline{Z}_C в полосе затухания, следует определить характер входного сопротивления рассматриваемого фильтра, считая выходные зажимы схемы закороченными: для ФНЧ (рис. 6.6, а, б) – при очень высокой частоте; для ФВЧ (рис. 6.7, а, б) – при

очень низкой частоте. В результате определим, что в зоне затухания \underline{Z}_C имеет индуктивный характер для Т-образного ФНЧ (рис. 6.6, а) и П-образного ФВЧ (рис. 6.7, б), а емкостный характер – для П-образного ФНЧ (рис. 6.6, б) и Т-образного ФВЧ (рис. 6.7, а).

Полосно-пропускающий фильтр пропускает в нагрузку лишь узкую полосу частот от ω_1 до ω_2 . Слева от ω_1 и справа от ω_2 находятся полосы затухания. Параметры схемы простейшего



полосно-пропускающего k -фильтра (рис. 6.9, а) должны удовлетворять условию $L_1 C_1 = L_2 C_2$. Характер изменения α и β для полосно-пропускающего k -фильтра иллюстрируют кривые (рис. 6.9, б).

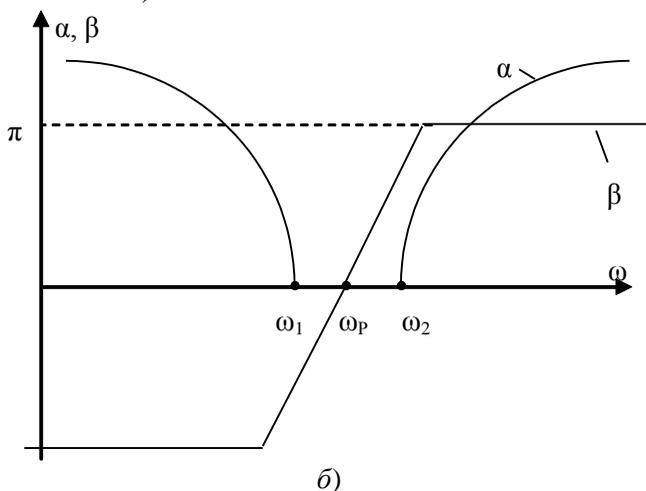


Рис. 6.9.

Приведем без вывода формулы для определения параметров фильтра (рис. 6.9, а) по заданным частотам f_1 и f_2 и сопротивлению нагрузки фильтра \underline{Z}_C при резонансной частоте $f_p = \omega_p / 2\pi$:

$$f_p = \sqrt{f_1 f_2}; C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_C}; L_1 = \frac{Z_C}{2\pi(f_2 - f_1)};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi Z_C (f_2 - f_1)}; L_2 = \frac{Z_C (f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}.$$

Пример 6.5. Определить параметры полосового фильтра (рис. 6.9, а) при условии, что он пропускает полосу частот от $f_1 = 750$ Гц до $f_2 = 850$ Гц. Сопротивление нагрузки при резонансной частоте f_p равно $Z_H = Z_C = 1130$ Ом.

Решение. $f_p = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{750 \cdot 850} = 798$ Гц;

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_C} = \frac{850 - 750}{2\pi \cdot 750 \cdot 850 \cdot 1130} = 0,022 \text{ мкФ};$$

$$L_1 = \frac{Z_C}{2\pi(f_2 - f_1)} = \frac{1130}{2\pi(850 - 750)} = 1,6 \text{ Гн};$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi Z_C (f_2 - f_1)} = \frac{1}{\pi 1130 \cdot 100} = 2,825 \text{ мкФ};$$

$$L_2 = \frac{Z_C (f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2} = \frac{1130 \cdot 100}{4\pi 750 \cdot 850} = 0,0141 \text{ Гн}.$$

6.6. Фильтры высоких порядков

Применение фильтров высоких порядков позволяет повысить качество фильтрации и приблизить характеристики фильтров к идеальным (бесконечное ослабление сигналов в полосе затухания и бесконечно резкий переход между полосами пропускания и затухания). Проектирование таких фильтров состоит из двух этапов: определение требуемой передаточной функции и проектирование схемы для реализации этой функции.

В качестве передаточных функций используются специальные математические функции, названия которых дали названия фильтрам, спроектированным на их основе: Баттерворта, Чебышева, Бесселя и др. Вопросы проектирования

фильтров не входят в данный курс, ниже будут рассмотрены наиболее часто используемые фильтры и их основные свойства.

Фильтр Баттерворта (нижних частот). Аппроксимирующая функция для идеальной АЧХ фильтра нижних частот задается в виде

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + F^2(\omega/\omega_c)}},$$

где ω_c – частота среза, n – порядок фильтра, а функция $F(\omega/\omega_c)$ должна быть минимальной по модулю в полосе $0 \leq \omega/\omega_c \leq 1$ и максимальна при $\omega/\omega_c > 1$. Простейшей функцией, отвечающей этому требованию, является функция $F(\omega/\omega_c) = (\omega/\omega_c)^n$. При этом АЧХ будет записываться в виде

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}, \quad (6.22)$$

при возведении АЧХ в квадрат получаем

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}. \quad (6.23)$$

Графики функции (6.22) при нескольких значениях n представлены на рис. 6.10 ($\omega_c = 1$).

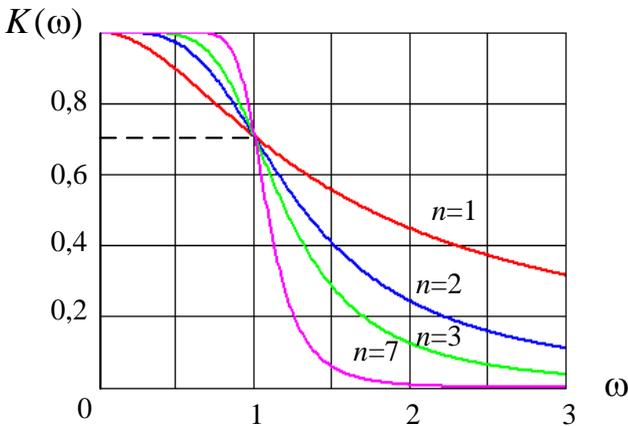


Рис. 6.10. АЧХ фильтров Баттерворта

Определяемая выражением (6.23) функция называется функцией Баттерворта, а фильтры, синтезированные на основе этой функции, называются фильтрами Баттерворта. Подобные фильтры были впервые описаны британским инженером Стефаном Баттервортом. При $\omega = \omega_c$ функции Баттерворта любого порядка равны $1/2$, что соответствует ослаблению АЧХ в $\sqrt{2}$ раз (рис. 6.10) или на 3 дБ. Аппроксимацию по Баттерворту называют максимально плоской. Таким образом, фильтрами с характеристиками Баттерворта называют фильтры, у которых в ФНЧ при нулевой частоте ослабление равно 0, в полосе пропускания оно монотонно увеличивается, на граничной частоте достигает 3 дБ, а затем в полосе затухания постепенно возрастает.

Чем больше звеньев имеет фильтр, т.е. чем выше его порядок, тем круче идет характеристика в полосе затухания и тем меньше ослабление в полосе пропускания (рис. 6.10). При $n \rightarrow \infty$ АЧХ фильтра Баттерворта приближается к идеальной. Таким образом, n является тем единственным параметром, выбор которого позволяет удовлетворить заданный набор требований к фильтру в полосе пропускания и полосе затухания.

При этом следует иметь в виду, что элементы фильтра считают чисто реактивными и при наличии потерь характеристики искажаются и отличаются от рассматриваемых. Фильтр Баттерворта – единственный из фильтров, сохраняющий форму АЧХ для более высоких порядков, тогда как многие другие разновидности фильтров (фильтры Бесселя, Чебышёва, эллиптический фильтр) имеют различные формы АЧХ при различных порядках.

Фильтр Чебышева (нижних частот). Для улучшения аппроксимации идеальной прямоугольной характеристики ФНЧ часто применяется аппроксимация по Чебышеву, при которой в качестве функции $F^2(\omega/\omega_c)$ в формуле (6.22) используется квадрат полинома Чебышева $T_n(\omega/\omega_c)$ соответ-

ствующего порядка n . При этом формула (6.23) переписывается в виде

$$K^2(\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}. \quad (6.24)$$

Коэффициент $\varepsilon < 1$ вводится для ограничения амплитуды пульсаций АЧХ в полосе пропускания, т.е. в интервале $|\omega/\omega_c| \leq 1$. Чем меньше ε , тем лучше аппроксимируется АЧХ в указанной полосе, но одновременно снижается крутизна ската характеристики в полосе затухания (при $\omega/\omega_c > 1$).

Фильтр получил название в честь известного русского математика XIX века Пафнутия Львовича Чебышёва, так как характеристики этого фильтра основываются на многочленах Чебышёва. Полиномы Чебышева (первого рода) определяются как

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^{2n-1}.$$

Полиномы Чебышева низших степеней

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1; \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1; \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n - T_{n-1}.$$

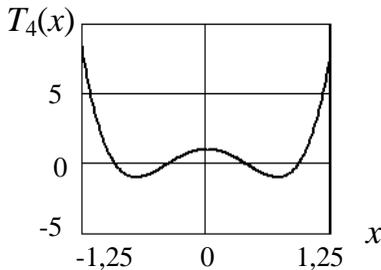


Рис. 6.11. Полином Чебышева 4-го порядка

На рис. 6.11 представлен полином Чебышева 4-го порядка. Значение $T_n(x)$ изменяется в пределах ± 1 в интервале $|x| < 1$ и растет по закону $T_n(x) \approx 2^{n-1} x^n$ при $|x| \gg 1$.

АЧХ фильтра Чебышева n -го порядка задается следующим выражением:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}}. \quad (6.25)$$

На рис. 6.12 представлены АЧХ для фильтра 4-го порядка при $\varepsilon=1$ (кривая б) и $\varepsilon = \sqrt{1/5}$ (кривая а). Как видно из рисунка, в полосе пропускания фильтра видны пульсации, амплитуда которых определяется показателем пульсации ε .

Пульсации в полосе пропускания часто задаются в децибелах и пересчитываются по формуле $20\log_{10}\sqrt{1+\varepsilon^2}$. Так, пульсации с амплитудой в 3 дБ соответствуют $\varepsilon=1$. Чем меньше ε , тем лучше аппроксимируется АЧХ в указанной полосе, но одновременно снижается крутизна ската характеристики в полосе затухания (при $\omega/\omega_c > 1$). Размах пульсаций АЧХ равен

$$\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

Таким образом, у фильтров Чебышева характеристика ослабления в полосе пропускания имеет колебательный характер с амплитудой, не превышающей 3 дБ, а в полосе затухания – монотонно возрастающий, с крутизной, большей, чем у фильтра Баттерворта такого же порядка. Чем больше амплитуда ослабления в полосе пропускания, тем круче идет характеристика в полосе затухания и наоборот, чем меньше амплитуда колебания в полосе пропускания, тем меньше крутизна характеристики в полосе затухания (рис. 6.12).

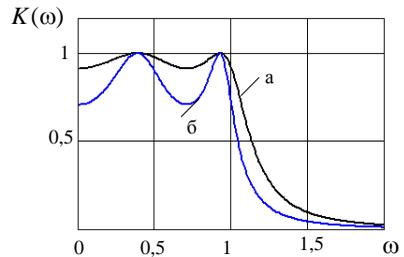


Рис. 6.12. АЧХ фильтра Чебышева первого рода четвертого порядка ($\omega_c = 1$, кривая а – $\varepsilon = \sqrt{1/5}$; кривая б – $\varepsilon=1$)

Следует отметить, что порядок аналогового электронного фильтра Чебышева равен числу реактивных компонентов, необходимых для его реализации.

Фильтр Чебышева второго рода (*инверсный фильтр Чебышева*) используется реже, так как имеет менее крутой спад

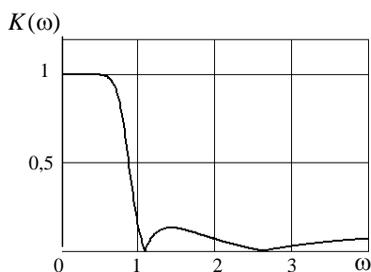


Рис. 6.13. АЧХ фильтра Чебышева второго рода четвертого порядка ($\omega_c = 1, \varepsilon = 1,133$)

АЧХ, что приводит к увеличению числа компонентов фильтра. У него отсутствуют пульсации в полосе пропускания, однако присутствуют в полосе затухания (рис. 6.13). АЧХ такого фильтра задаётся следующим выражением:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)}}}$$

Таким образом, фильтры Чебышёва помогают решать задачи обеспечения хорошего подавления частот в области полосы затухания с помощью фильтров невысокого порядка в случае, если гладкость АЧХ на частотах полос пропускания и затухания не столь важна.

В данном разделе рассматриваются только ФНЧ, т.к. другие типы фильтров (ФВЧ, полосовые и т.д.) можно получить с помощью замены переменной (частоты). Для этого во всех выражениях, содержащих частоту, нужно произвести замену переменной так, чтобы АЧХ преобразовалась в характеристику соответствующего фильтра. Такая замена называется *преобразование частоты* и подробно рассматривается в специальной литературе.

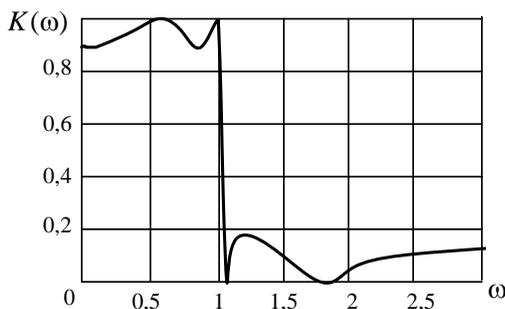


Рис. 6.14. Эллиптический фильтр, $n=4$

Эллиптический фильтр (Фильтр Кауэра) – это фильтр, у которого пульсации присутствуют как в полосе пропускания, так и в полосе затухания АЧХ. При этом величина пульсаций в каждой из полос независима друг от друга. Отличительной особенностью фильтра

Кауэра является очень крутой спад амплитудной характеристики, поэтому с помощью этого фильтра можно достигать более эффективного разделения частот, чем с помощью других линейных фильтров (рис. 6.14).

АЧХ такого фильтра записывается в виде

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\xi, \omega/\omega_c)}},$$

где R_n – рациональная эллиптическая функция n -го порядка; ξ – показатель селективности.

Следует отметить, что из эллиптического фильтра можно получить уже известные нам фильтры. Так если пульсации в полосе затухания равны нулю, то эллиптический фильтр становится фильтром Чебышева первого рода. Если пульсации равны нулю в полосе пропускания, то фильтр становится фильтром Чебышева второго рода. Если же пульсации отсутствуют на всей АЧХ, то фильтр становится фильтром Баттерворта.

Фильтры Бесселя характеризуются очень пологими участками амплитудно-частотных характеристик в переходной полосе, более пологими чем у фильтров Баттерворда (рис. 6.15), в то же время они обладают практически линейной ФЧХ в полосе пропускания.

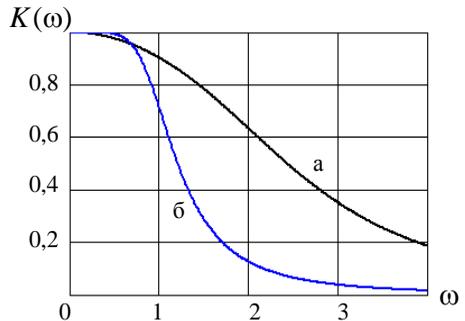


Рис. 6.15. АЧХ ФНЧ, $n=3$
(а – фильтр Бесселя; б – Баттерворда)

Передаточная функция фильтра Бесселя определяется формулой

$$H(p) = \frac{B_n(0)}{B_n(p)},$$

где $p = j\omega$, $B_n(p)$ – полином Бесселя, который находится на основе равенств

$$B_1(x) = x + 1; B_2(x) = x^2 + 3x + 3; \dots$$

$$B_n(x) = (2n - 1)B_{n-1}(x) + x^2 B_{n-2}(x).$$

В специальной литературе приведены таблицы передаточных функций фильтров Бесселя.

Переходные характеристики фильтров Баттерворта и Чебышева имеют большую амплитуду колебаний при ступенчатом входном сигнале, в то время как переходный процесс для фильтра Бесселя практически не имеет колебаний. Таким образом, несмотря на менее удовлетворительные АЧХ фильтра Бесселя, во временной области он имеет наилучшие свойства, фильтр Чебышева – наихудшие, а фильтр Баттерворта по своим свойствам занимает промежуточное положение (рис. 6.16).

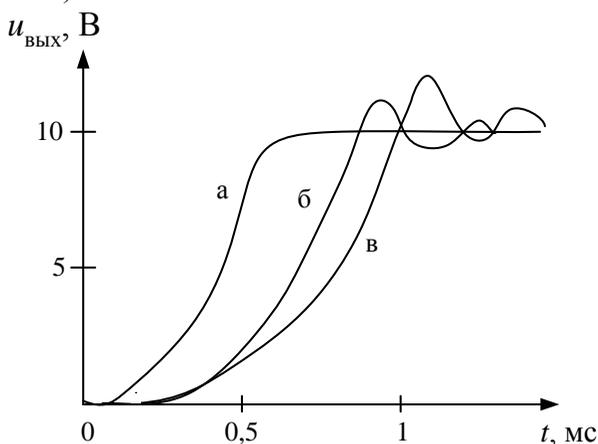


Рис. 6.16. Переходный процесс
(а – фильтр Бесселя; б – Баттерворта; в – Чебышева)

ТЕМА 7. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

7.1. Метод расчета мгновенных установившихся значений переменных при действии несинусоидальных ЭДС

Выше рассматривались синусоидальные ЭДС. На практике во многих случаях кривые периодических ЭДС отличаются от синусоидальных.

Периодические несинусоидальные напряжения и токи (рис. 7.1, а) можно представить в виде рядов Фурье, которые в общем случае содержат: постоянную составляющую; первую гармонику, имеющую период, равный периоду самой функции; высшие гармоники, причем частота k -й гармоники в k раз больше частоты первой гармоники. Мгновенное значение ЭДС

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (7.1)$$

где E_0 – постоянная составляющая; $E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – основная (первая) гармоника; $E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – высшая (k -я) гармоника; E_{km} – амплитуда, ψ_k – начальная фаза k -й гармоники.

Функции вида (7.1) должны удовлетворять условиям Дирихле, т.е. иметь конечное число разрывов, а также максимумов и минимумов за период T . Ряд Фурье (7.1) – бесконечный, но может быть ограничен конечным числом членов ряда.

Вычисление коэффициентов ряда Фурье. Общий член ряда

$$E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = E_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + E_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t. \quad (7.2)$$

Таким образом, (7.1) можно записать как

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t, \quad (7.3)$$

где

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt ; B_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin k \omega t dt ; C_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos k \omega t dt . \quad (7.4)$$

Если известны коэффициенты B_k и C_k , то можно вычислить амплитуду и фазу $e(t)$:

$$E_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} ; \psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k} .$$

Аналогичные выкладки можно привести для токов и напряжений.

Приближенные формулы ряда Фурье. Приведенные выше формулы для определения E_0 , B_k и C_k используются, когда функция $f(t)$ задана аналитически. Если же функция напряжения, тока или ЭДС задана в виде графика, то можно воспользоваться приближенными формулами. Период T делится на p равных интервалов (рис. 7.1, б), и в p точках определяются ординаты $f\left(n \frac{\omega t}{p}\right)$ заданной кривой при $n = 1, 2, \dots, p$. Тогда коэффициенты ряда после дискретной замены примут вид:

$$B_k \cong \frac{2}{p} \sum_{n=1}^p f\left(n \frac{\omega t}{p}\right) \sin\left(k n \frac{\omega t}{p}\right) ; \quad (7.5)$$

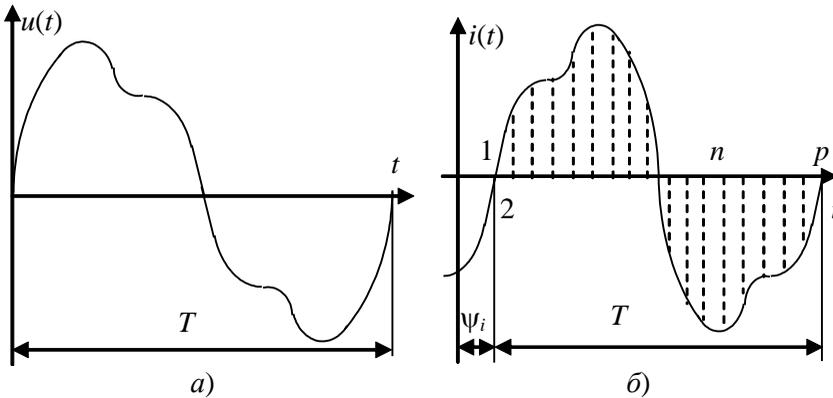


Рис. 7.1.

$$C_k \cong \frac{2}{p} \sum_{n=1}^p f \left(n \frac{\omega t}{p} \right) \cos \left(kn \frac{\omega t}{p} \right). \quad (7.6)$$

На практике для определения B_k и C_k используют приборы, именуемые гармоническими анализаторами.

Причиной появления высших гармоник тока в линейных цепях является наличие высших гармоник ЭДС и напряжений, питающих эти цепи. Высшие гармоники возникают и вследствие изменения параметров цепи. Если изменение параметров происходит по заданной периодической функции времени, то цепь является линейной, в противном случае – нелинейной.

Применение принципа наложения. Основываясь на принципе наложения, можно предложить следующий метод расчета мгновенных значений токов в линейных цепях с периодическими несинусоидальными ЭДС.

Раскладываем заданные ЭДС или напряжения в ряд Фурье:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_k + \dots;$$

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots.$$

Находим как функции времени мгновенные токи $i_0, i_1, i_2, \dots, i_k$, возникающие в некоторой ветви цепи под действием каждой составляющей ЭДС ($e_0, e_1, e_2, \dots, e_k$) или напряжения ($u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$) в отдельности. Суммируя найденные значения токов, получаем ток в данной ветви

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots.$$

Пример 7.1. Определить ток в простейшей неразветвленной RLC -цепи в установившемся режиме, если напряжение на входных зажимах является периодической несинусоидальной функцией.

Решение. Представим входное напряжение в виде ряда

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots,$$

где u_0 – постоянная составляющая напряжения;

$u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$ – высшая (k -я) гармоника напряжения.

Так как $\omega=0$, то $\underline{Z}=\infty$ и постоянная составляющая $i_0 = 0$. Мгновенное значение k -й гармоники тока

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk} - \phi_k),$$

где $I_{km} = \frac{U_{km}}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}$; $\phi_k = \text{arctg} \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R}$.

Искомый ток определяется суммой

$$i = 0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots$$

Пример 7.2. Определить комплексную амплитуду входного тока в разветвленной цепи (рис. 7.2, а).

Решение. Воспользуемся методом комплексных амплитуд, для чего преобразуем схему (рис. 7.2, а) к эквивалентной схеме (рис. 7.2, б).

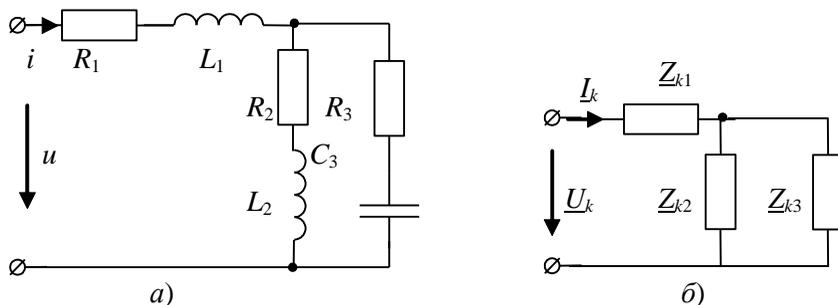


Рис. 7.2.

Комплексная амплитуда напряжения k -й гармоники

$$\underline{U}_{km} = U_{km} e^{j\psi_{uk}}.$$

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_k = Z_{k1} + \frac{Z_{k2} Z_{k3}}{Z_{k2} + Z_{k3}} = Z_k e^{j\phi_k},$$

где $\underline{Z}_{k1} = R_1 + j\omega k L_1$; $\underline{Z}_{k2} = R_2 + j\omega k L_2$; $\underline{Z}_{k3} = R_3 - j \frac{1}{\omega k C_3}$.

Комплексная амплитуда тока

$$\underline{I}_{km} = \frac{U_{km}}{Z_k} = \frac{U_{km} e^{j\psi_{uk}}}{Z_k e^{j\phi_k}} = \frac{U_{km}}{Z_k} e^{j(\psi_{uk} - \phi_k)} = I_{km} e^{j\psi_{ik}}.$$

7.2. Действующие периодические несинусоидальные токи и напряжения

Действующий периодический ток выше был определен как среднее квадратическое значение мгновенного тока за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

После разложения $i(t)$ в ряд Фурье

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots)^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{q=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_q i_s dt.$$

При $q \neq s$ интегралы от синусоидальных функций за целое число $q-s$ и $q+s$ периодов равны нулю. Таким образом,

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

т.е. действующий периодический несинусоидальный ток равен корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник. Аналогично находим выражение для периодических несинусоидальных напряжений:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2 + \dots}.$$

7.3. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях

По определению активная мощность – среднее значение мгновенной мощности за период:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + \dots + u_k + \dots)(i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots) dt = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum_{\substack{q=\infty \\ s=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k,
 \end{aligned}$$

поскольку $\int_0^T u_q i_s dt = 0$ при $q \neq s$.

Действующее значение мощности

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = \\
 &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 + \dots + U_k I_k \cos \phi_k + \dots.
 \end{aligned}$$

7.4. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при периодическом несинусоидальном напряжении

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты и неодинаково для различных гармоник.

Для активного сопротивления R кривая тока подобна кривой напряжения. Для всех гармоник $I_{kmR} = \frac{U_{km}}{R}$, следова-

тельно, $\frac{I_{kmR}}{I_{1mR}} = \frac{U_{km}}{U_{1m}}$.

Для катушки с активным сопротивлением $R = 0$ и индуктивностью L сопротивление $X_{kL} = k\omega L$ k -й гармоники растёт с увеличением порядка гармоники. Соответственно

$I_{kmL} = \frac{U_{km}}{k\omega L}$ и $\frac{I_{kmL}}{I_{1mL}} = \frac{1}{k} \frac{U_{km}}{U_{1m}}$, т.е. амплитуды высших гармоник,

выраженные в долях первой гармоники, в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения. Говорят, что катушка сглаживает кривую тока.

Для конденсатора без потерь сопротивление $X_{kC} = \frac{1}{k\omega C}$

убывает с увеличением порядка гармоники. Соответственно

$$I_{kmC} = k\omega C U_{km} \text{ и } \frac{I_{kmC}}{I_{1mC}} = k \frac{U_{km}}{U_{1m}}, \text{ т.е. амплитуды высших гармо-}$$

ник, выраженные в долях первой гармоники, в кривой тока больше, чем в кривой напряжения. Говорят, что конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

В сложной цепи, содержащей участки с активными сопротивлениями, катушки и конденсаторы, на форму кривой тока влияет конфигурация цепи. Если, например, в цепи для гармоники $k=q$ имеет место резонанс напряжений, то сопротивление для этой гармоники минимально, и эта гармоника будет выделяться в кривой тока. Таким явлением можно воспользоваться, чтобы обеспечить преимущественное прохождение гармоники порядка q от источника несинусоидального напряжения u к приемнику П по схеме (рис. 7.3, а), подобрав L и C так, чтобы выполнялось условие $q\omega L = \frac{1}{q\omega C}$.

Если ветвь из последовательно соединенных катушки L и конденсатора C настроить в резонанс при частоте $q\omega$, включить ее параллельно приемнику, причем до этой ветви включить катушку L_0 (рис. 7.3, б), то гармоника тока порядка q не пройдет в приемник, так как он будет шунтирован ветвью с L

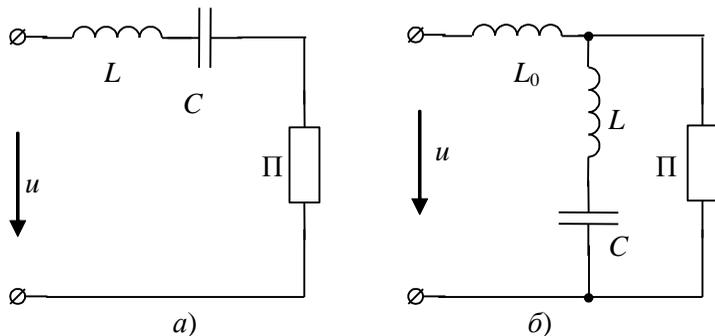


Рис. 7.3.

и C . Остальные гармоники тока, встречая значительное сопротивление ветви с L и C , проходят в приемник. Постоянная составляющая тока пройдет в приемник, так как сопротивление ветви с L и C для нее бесконечно, а индуктивное сопротивление катушки L_0 равно нулю.

Преимущественный пропуск или задержка токов определенных частот используется в электрических фильтрах, которые были рассмотрены выше.

ТЕМА 8. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

8.1. Понятие о многофазных цепях и системах

Многофазная цепь – это цепь, содержащая несколько синусоидальных ЭДС, которые могут различаться частотой, амплитудой и фазой.

В энергетике наибольшее распространение получили именно трехфазные цепи благодаря высокой экономичности и техническому совершенству. Все звенья трехфазной цепи изобрел и разработал М.О. Доливо-Добровольский.

В широком смысле трехфазная цепь состоит из трехфазной системы ЭДС, трехфазной нагрузки (нагрузок) и соединительных проводов.

Фазой называют участок цепи, по которому протекает один и тот же ток. Токи отдельных участков трехфазных цепей сдвинуты относительно друг друга по фазе.

В *трехфазной симметричной системе ЭДС* три ЭДС одинаковой частоты ω и амплитуды \underline{E}_m сдвинуты по фазе на $2\pi/3$:

$$e_A = E_m \sin \omega t; e_B = E_m \left(\sin \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); e_C = E_m \left(\sin \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Эти уравнения отражают прямой порядок чередования фаз, которому соответствует диаграмма *прямой последовательности* (рис. 8.1, а). Кроме прямой последовательности существуют *обратная* (рис. 8.1, б) и *нулевая* (рис. 8.1, в).

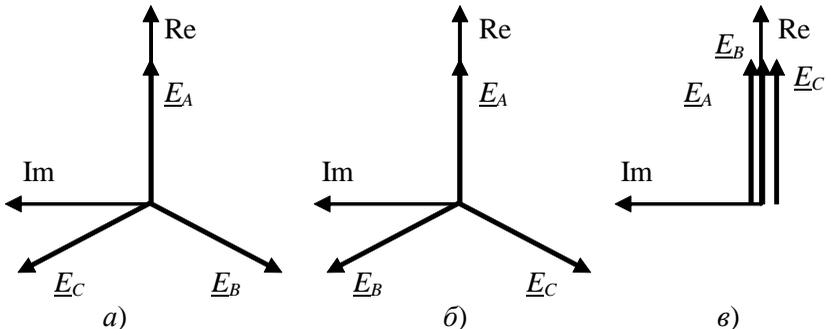


Рис. 8.1.

В комплексной форме система ЭДС прямой последовательности

$$\underline{E}_A = E_m e^{j0}; \quad \underline{E}_B = E_m e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \underline{E}_C = E_m e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

Можно выразить ЭДС фаз через оператор фазы $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$:

$$\underline{E}_A = E_m; \quad \underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A; \quad \underline{E}_C = a \underline{E}_A.$$

При этом $a^3 = 1; 1 + a + a^2 = 0$. В случае прямой или обратной последовательности $\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0$.

Нагрузка трехфазной цепи симметрична, если сопротивления ее фаз одинаковы, и несимметрична при разных сопротивлениях.

Для уменьшения числа соединительных проводов между генератором и нагрузкой обмотки трехфазного генератора (и нагрузку) соединяют в звезду или треугольник.

Схему соединения цепи называют звезда – звезда с нулевым проводом (рис. 8.2). Существуют и другие соединения: звезда – звезда; звезда – треугольник; треугольник – треугольник; треугольник – звезда.

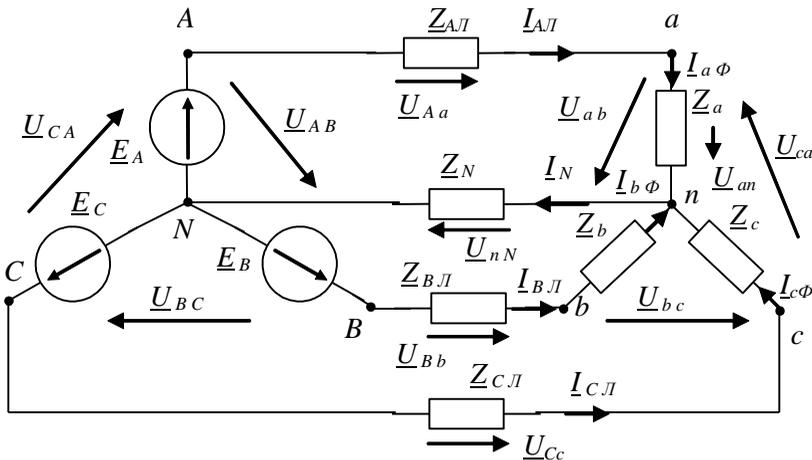


Рис. 8.2.

Точку, в которой объединены три конца трехфазного генератора (N) или нагрузки (n) при соединении звездой, назы-

вают нулевой точкой. Нулевой провод соединяет нулевые точки генератора и нагрузки. Ток нулевого провода обозначим \underline{I}_N , а его направление от n к N будем считать положительным.

Текущие по линейным проводам (Aa , Bb , Cc) токи будем называть линейными и обозначим $\underline{I}_{AЛ}$, $\underline{I}_{BЛ}$, $\underline{I}_{CЛ}$, считая направление от генератора к нагрузке положительным. Линейным напряжением называют напряжение между проводами, например \underline{U}_{AB} .

Фаза генератора – это каждая из трех обмоток генератора, фаза нагрузки – каждая из трех нагрузок. Им соответствуют фазовые токи \underline{I}_Φ , например $\underline{I}_{a\Phi}$, и напряжения \underline{U}_Φ , например \underline{U}_{an} .

8.2. Симметричный режим трехфазной цепи

Трехфазная цепь с симметричной нагрузкой, соединенной звездой. При соединении звезда – звезда с нулевым проводом (рис. 8.2) линейные токи равны фазовым токам нагрузки:

$$\underline{I}_{AЛ} = \underline{I}_{a\Phi}; \quad \underline{I}_{BЛ} = \underline{I}_{b\Phi}; \quad \underline{I}_{CЛ} = \underline{I}_{c\Phi}.$$

По первому закону Кирхгофа ток в нулевом проводе

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{AЛ} + \underline{I}_{BЛ} + \underline{I}_{CЛ} = \underline{I}_{a\Phi} + \underline{I}_{b\Phi} + \underline{I}_{c\Phi}.$$

Так как в симметричном режиме потенциалы нулевых точек генератора и нагрузки одинаковы, то можно рассчитывать токи отдельно для каждой фазы:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_{AЛ} + \underline{Z}_a}; \quad \underline{I}_B = a^2 \underline{I}_A; \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_A.$$

Фазовые напряжения нагрузки

$$\underline{U}_{an} = \underline{I}_A \underline{Z}_a; \quad \underline{U}_{bn} = a^2 \underline{U}_{an}; \quad \underline{U}_{cn} = a \underline{U}_{an}.$$

По второму закону Кирхгофа линейные напряжения в нагрузочных контурах

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{an} - \underline{U}_{bn} = (1 - a^2) \underline{U}_{an} = \left(1 + 0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \underline{U}_{an} = \sqrt{3} \underline{U}_{an} e^{j\frac{\pi}{6}};$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{bn} - \underline{U}_{cn}; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{cn} - \underline{U}_{an}.$$

Линейные напряжения на стороне генератора

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AN} - \underline{U}_{BN}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BN} - \underline{U}_{CN}; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CN} - \underline{U}_{AN}.$$

При построении векторной диаграммы (рис. 8.3) для схемы (рис. 8.2) векторы на комплексной плоскости располагают в следующей последовательности: \underline{U}_{AN} , \underline{U}_{BN} , \underline{U}_{CN} , \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} , $\underline{I}_{AЛ}$, $\underline{I}_{BЛ}$, $\underline{I}_{CЛ}$, \underline{U}_{an} , \underline{U}_{bn} , \underline{U}_{cn} , \underline{U}_{ab} , \underline{U}_{bc} , \underline{U}_{ca} , \underline{U}_{Aa} , \underline{U}_{Bb} , \underline{U}_{Cc} . Углы сдвига фаз ϕ и ψ определяют через активные ($R_{Л}$, $R_{Н}$) и реактивные ($X_{Л}$, $X_{Н}$) сопротивления линии и нагрузки соответственно:

$$\phi = \arctg \frac{X_{Л} + X_{Н}}{R_{Л} + R_{Н}}; \quad \psi = \arctg \frac{X_{Н}}{R_{Н}}.$$

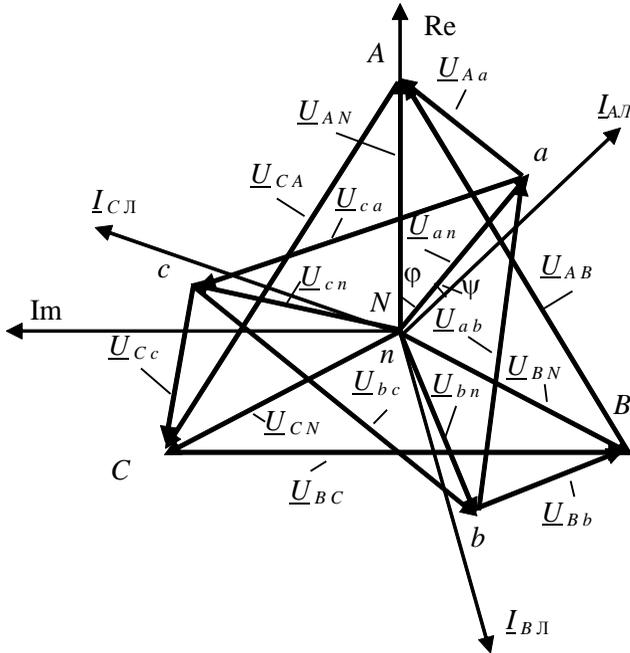


Рис. 8.3.

Трехфазная цепь с симметричной нагрузкой, соединенной треугольником. Рассмотрим случай, когда сопротивлением линейных проводов можно пренебречь ($Z_{AЛ} = Z_{BЛ} = Z_{CЛ} = 0$). При этом линейные напряжения генератора равны соответ-

ствующим линейным напряжениям нагрузки: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab}$, $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc}$, $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca}$ (рис. 8.4).

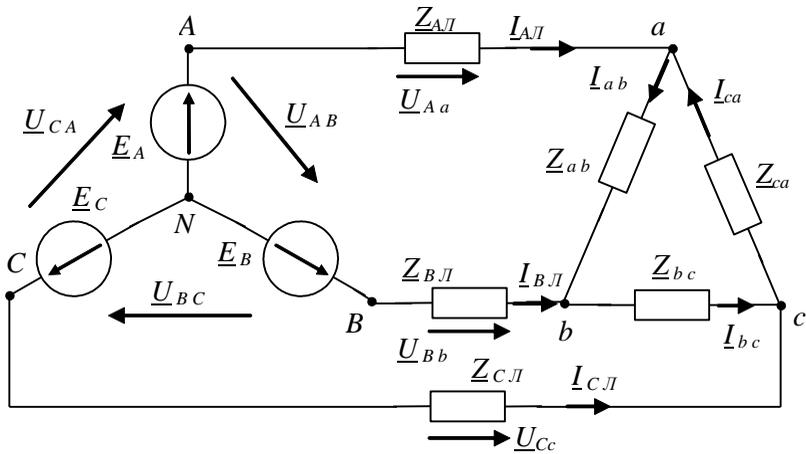


Рис. 8.4.

Токи в схеме могут быть вычислены по формулам:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \underline{I}_{bc} = a^2 \underline{I}_{ab}; \underline{I}_{ca} = a \underline{I}_{ab}; \quad (8.1)$$

$$\underline{I}_{AL} = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \underline{I}_{BL} = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \underline{I}_{CL} = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

При равномерной нагрузке

$$\underline{I}_{AL} = (1-a)\underline{I}_{ab} = \left(1 + 0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\underline{I}_{ab} = \sqrt{3}\underline{I}_{ab} e^{-j\frac{\pi}{6}},$$

\underline{I}_{BL} и \underline{I}_{CL} можно вычислить по формулам (8.1).

Порядок построения векторной диаграммы (рис. 8.5) при активно-индуктивной нагрузке: \underline{U}_{AN} , \underline{U}_{BN} , \underline{U}_{CN} , \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} , \underline{I}_{ab} , \underline{I}_{bc} , \underline{I}_{ca} , \underline{I}_{AL} , \underline{I}_{BL} , \underline{I}_{CL} . Угол $\phi = \arctg \frac{X_H}{R_H}$.

Пример 8.1. В схеме (рис. 8.6, а) нагрузка и генератор симметричны, модули токов в фазах треугольника и нагрузки одинаковы: $I_R = I_L = 1$ А. Найти линейные токи \underline{I}_{AL} , \underline{I}_{BL} , \underline{I}_{CL} .

Решение. Уравнение первого закона Кирхгофа для узла А

$$\underline{I}_{AL} = \underline{I}_{LA} + \underline{I}_{RAB} + \underline{I}_{RCA}.$$

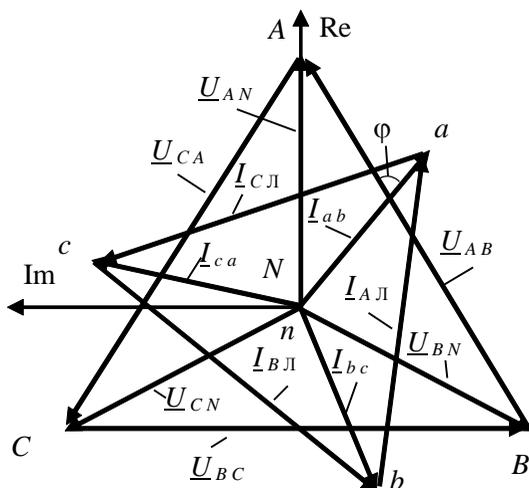


Рис. 8.5.

По модулю все три тока равны, необходимо лишь правильно учесть фазовые соотношения, что легко сделать, сопровождая расчет построением векторной диаграммы (рис. 8.6, б). Ток \underline{I}_{LA} протекает под действием фазового напряжения, а токи \underline{I}_{RAB} и \underline{I}_{RCA} – под действием линейного, которое в $\sqrt{3}$ раз больше фазового, причем токи одинаковы, следовательно, $R = \sqrt{3} X_L$.

Пусть $\underline{U}_A = U e^{j0^\circ}$, тогда

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} U e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = a^2 \underline{U}_{AB} = \sqrt{3} U e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

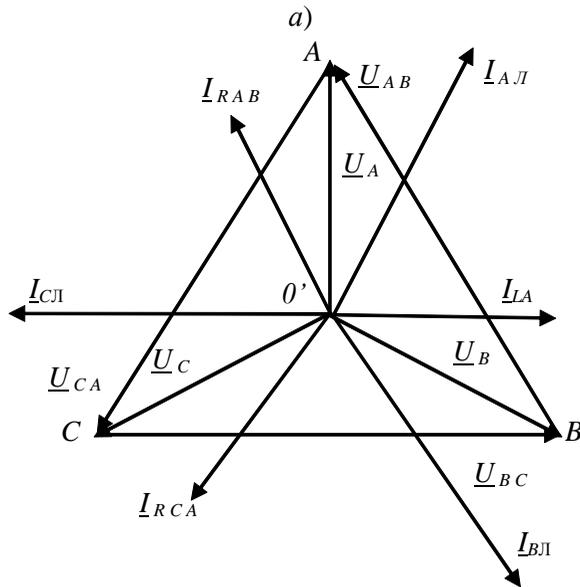
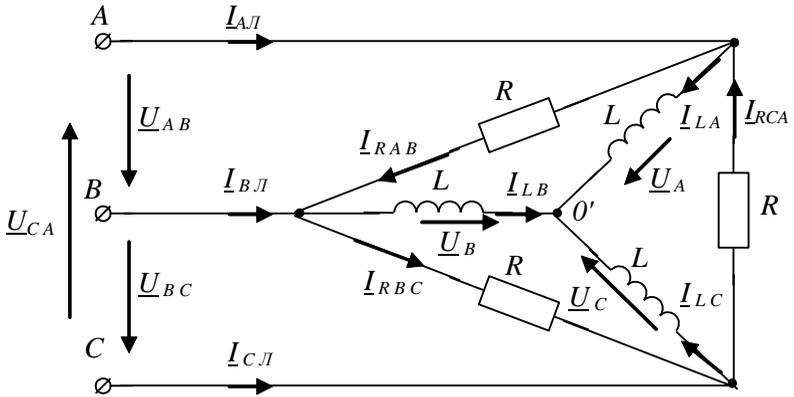
$$\underline{U}_{CA} = a \underline{U}_{AB} = \sqrt{3} U e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Фазовые токи

$$\underline{I}_{LA} = \frac{\underline{U}_A}{X_L e^{j90^\circ}} = \frac{U e^{j0^\circ}}{X_L e^{j90^\circ}} = 1 e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{RAB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3} X_L} = \frac{\sqrt{3} U e^{j30^\circ}}{\sqrt{3} X_L} = 1 e^{j30^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{RCA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\sqrt{3} X_L} = \frac{\sqrt{3} U e^{j150^\circ}}{\sqrt{3} X_L} = 1 e^{j150^\circ} \text{ А}.$$



б)
Рис. 8.6.

Линейные токи

$$\underline{I}_{AЛ} = 1e^{-j90^\circ} + 1e^{j30^\circ} - 1e^{j150^\circ} = 2e^{-j30^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{BЛ} = a^2 \underline{I}_{AЛ} = 2e^{-j150^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_{CЛ} = a \underline{I}_{AЛ} = 2e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

8.3. Несимметричный режим трехфазной цепи

Трехфазная цепь с несимметричной нагрузкой, соединенной звездой. В трехфазной цепи (рис. 8.2), если нагрузка несимметрична и есть нулевой провод ($\underline{Z}_N \neq 0$), то ток $\underline{I}_N \neq 0$ и напряжение $\underline{U}_{nN} \neq 0$.

По методу узловых напряжений напряжение смещения нейтрали

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (8.2)$$

где $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_{AЛ} + \underline{Z}_a}$; $\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_{BЛ} + \underline{Z}_b}$; $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_{CЛ} + \underline{Z}_c}$; $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$.

Если нулевой провод отсутствует, то $\underline{Y}_N = 0$. Линейные токи, равные фазовым, могут быть выражены через \underline{U}_{nN} :

$$\begin{aligned} \underline{I}_{AЛ} = \underline{I}_{aФ} &= (\underline{E}_A - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_{BЛ} = \underline{I}_{bФ} = (\underline{E}_B - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_B; \\ \underline{I}_{CЛ} = \underline{I}_{cФ} &= (\underline{E}_C - \underline{U}_{nN}) \underline{Y}_C. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ток нулевого провода

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C \quad \text{или} \quad \underline{I}_N = \underline{U}_{nN} \underline{Y}_N.$$

Фазовые напряжения на стороне нагрузки

$$\underline{U}_{an} = \underline{I}_{aФ} \underline{Z}_a; \quad \underline{U}_{bn} = \underline{I}_{bФ} \underline{Z}_b; \quad \underline{U}_{cn} = \underline{I}_{cФ} \underline{Z}_c.$$

Линейные напряжения

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{an} - \underline{U}_{bn}; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{bn} - \underline{U}_{cn}; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{cn} - \underline{U}_{an}.$$

Трехфазная цепь с несимметричной нагрузкой, соединенной треугольником. Если в схеме цепи (рис. 8.4) нагрузка несимметрична или не выполняется условие равенства линейных сопротивлений, то для расчета цепи можно применить эквивалентное преобразование треугольника в звезду. Сопротивления эквивалентной звезды в схеме, имеющей после преобразования вид схемы рис. 8.2:

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}.$$

Далее расчет ведется по формулам (8.2) и (8.3). Токи в фазах нагрузки можно найти из уравнений (8.1).

Пример 8.2. В схеме цепи (рис. 8.7) с симметричной системой фазовых напряжений ($U_{\phi}=220$ В) симметричная нагрузка соединена звездой сопротивлений $\underline{Z}=3+j4$ Ом, несимметричная нагрузка соединена треугольником сопротивлений $R_1=20$ Ом, $R_2=50$ Ом, $R_3=100$ Ом. Сопротивление линейных проводов $\underline{Z}_{\text{Л}}=3+j3$ Ом. Определить линейные токи $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$.

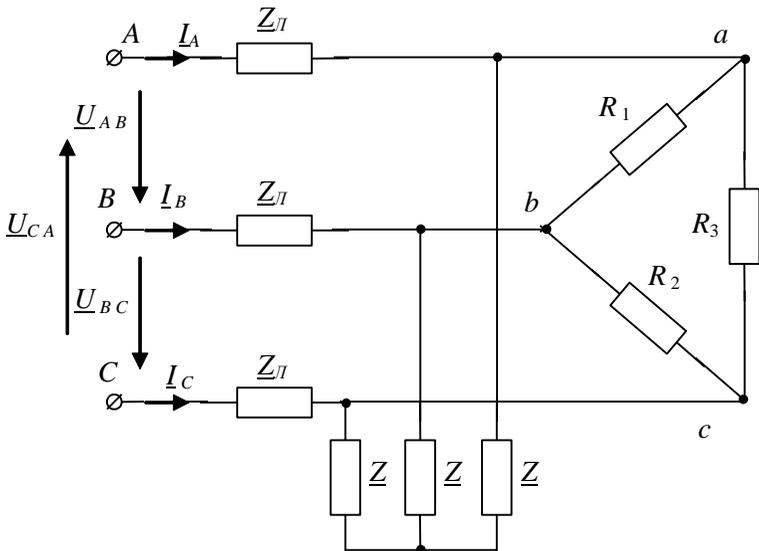


Рис. 8.7.

Решение. Преобразуем симметричную звезду нагрузки в треугольник сопротивлений

$$\underline{Z}_{\Delta}=3\underline{Z}=9+j12=15e^{j53,1^{\circ}} \text{ Ом.}$$

Сопротивления параллельно включенных пар сторон треугольника

$$\underline{Z}_1=\frac{R_1\underline{Z}_{\Delta}}{R_1+\underline{Z}_{\Delta}}=\frac{20 \cdot 15e^{j53,1^{\circ}}}{20+9+j12}=9,56e^{j30,6^{\circ}} \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \underline{Z}_\Delta}{R_2 + \underline{Z}_\Delta} = 12,4e^{j41,6^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{R_3 \underline{Z}_\Delta}{R_3 + \underline{Z}_\Delta} = 13,7e^{j46,8^\circ} \text{ Ом}.$$

Преобразуем получившийся треугольник в эквивалентную звезду с сопротивлениями

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 3,69e^{j36,8^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 3,36e^{j91,6^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,8e^{j47,8^\circ} \text{ Ом}.$$

Эквивалентные сопротивления фаз

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_\Pi + \underline{Z}_a = 7,9e^{j41,2^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_B = \underline{Z}_\Pi + \underline{Z}_b = 7,55e^{j36,1^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_\Pi + \underline{Z}_c = 9,03e^{j46,5^\circ} \text{ Ом}.$$

Линейные токи:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_A} = 27,8e^{-j41,2^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_B} = 29,1e^{-j156^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_C} = 24,4e^{j73,5^\circ} \text{ А}.$$

8.4. Измерение мощности в трехфазных цепях

Активная мощность трехфазной системы определяется суммой активных мощностей фаз нагрузки и активной мощности в сопротивлении нулевого провода:

$$P = P_A + P_B + P_C + P_N.$$

Реактивная мощность трехфазной системы представляет собой сумму соответствующих реактивных мощностей:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_N.$$

Полная мощность $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

При симметричной нагрузке

$$P_N = Q_N = 0; \quad P_A = P_B = P_C = U_\Phi I_\Phi \cos \varphi_\Phi;$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = U_\Phi I_\Phi \sin \varphi_\Phi,$$

где ϕ_Φ – угол между напряжением \underline{U}_Φ на фазе нагрузки и током \underline{I}_Φ фазы нагрузки.

Если учесть, что $3U_\Phi I_\Phi = \sqrt{3}\sqrt{3}U_\Phi I_\Phi = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л}$, где $U_{Л}$ – линейное напряжение на нагрузке, $I_{Л}$ – линейный ток нагрузки, то

$$\begin{aligned} P &= 3U_\Phi I_\Phi \cos\phi_\Phi = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} \cos\phi_\Phi; \\ Q &= 3U_\Phi I_\Phi \sin\phi_\Phi = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} \sin\phi_\Phi; \\ S &= 3U_\Phi I_\Phi = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л}. \end{aligned}$$

Рассмотрим схему измерения мощности двумя ваттметрами (рис. 8.8), которая не требует подключения к нейтрали нагрузки и позволяет измерять мощность всех трех фаз при симметричной или несимметричной нагрузке:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}\left(\underline{U}_A^* \underline{I}_A + \underline{U}_B^* \underline{I}_B + \underline{U}_C^* \underline{I}_C\right), \quad (8.4)$$

где \underline{I}_A^* , \underline{I}_B^* , \underline{I}_C^* – сопряженные комплексы токов фаз.

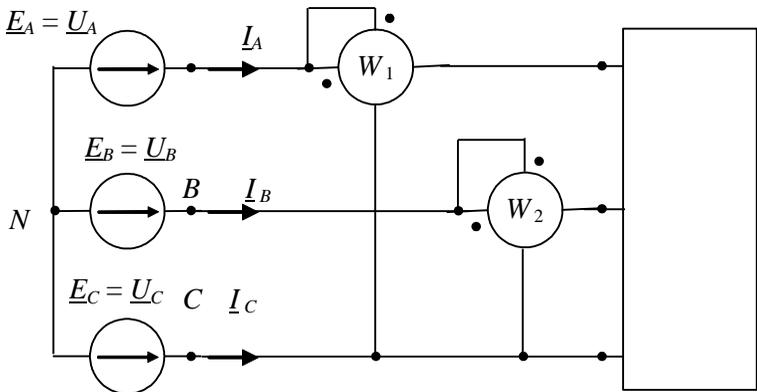


Рис. 8.8.

Подставив уравнение $\underline{I}_C^* = -\underline{I}_A^* - \underline{I}_B^*$ в (8.4), получим

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}\left(\underline{U}_A^* \underline{I}_A + \underline{U}_B^* \underline{I}_B - \underline{U}_C^* \underline{I}_A - \underline{U}_C^* \underline{I}_B\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left[\underline{I}_A^* (\underline{U}_A - \underline{U}_C) + \underline{I}_B^* (\underline{U}_B - \underline{U}_C)\right]. \end{aligned}$$

Из рис. 8.8 $P_1 = \text{Re}(\underline{U}_{AC} \underline{I}_A^*)$, $P_2 = \text{Re}(\underline{U}_{BC} \underline{I}_B^*)$. Из сравнения последних двух выражений получим мощность трехфазной системы: $P = P_1 + P_2$ (сумме показаний ваттметров).

Реактивную мощность для одной фазы можно измерить с помощью одного ваттметра (рис. 8.9). Векторная диаграмма (рис. 8.10) иллюстрирует данный способ.

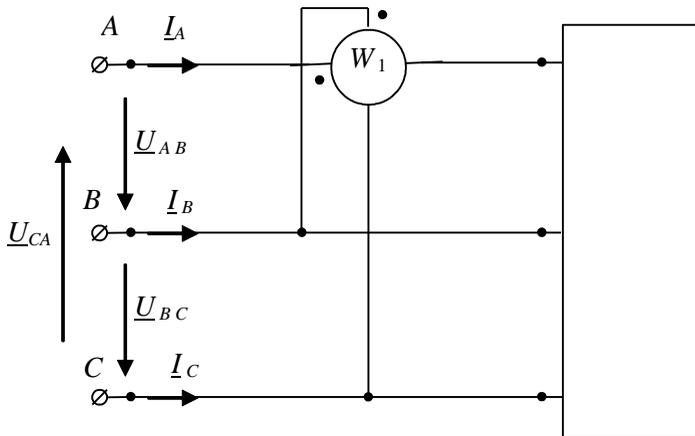


Рис. 8.9.

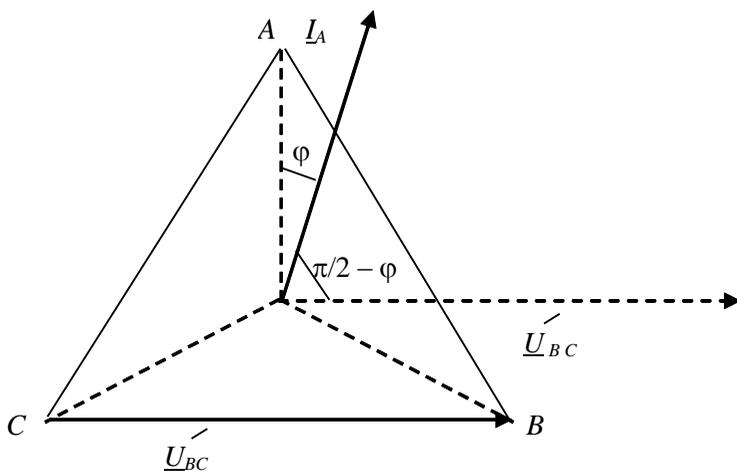


Рис. 8.10.

Показание ваттметра $P_W = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi$ достаточно умножить на $\sqrt{3}$, чтобы получить суммарную реактивную мощность трехфазной цепи $Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi$.

8.5. Аварийные режимы в трехфазных цепях

Проанализируем некоторые аварийные режимы, для простоты считая нагрузку резистивной.

В случае *обрыва фазы А* нагрузки или *обрыва линейного провода А* при соединении звезда – звезда точка нейтрали нагрузки n смещается на вектор \underline{U}_{BC} , поскольку нагрузка чисто активная, и делит его пополам. Следовательно, токи неповрежденных фаз $I_B = -I_C$ уменьшаются по модулю в $\sqrt{3}/2$ раз (рис. 8.11).

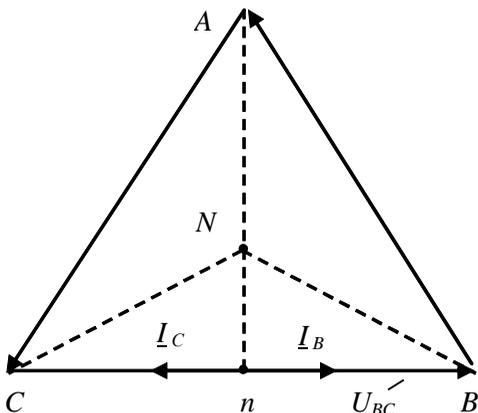


Рис. 8.11.

В случае *короткого замыкания нагрузки в фазе А* при соединении звезда – звезда точка n совмещается с точкой А. Напряжения на неповрежденных фазах возрастают до линейных, т.е. увеличиваются в $\sqrt{3}$ раз, так же, как и токи этих фаз I_B и I_C , а уменьшение угла между ними до $\pi/3$ приводит к утроению тока в короткозамкнутой фазе А (рис. 8.12).

При *обрыве линейного провода в соединении звезда – треугольник* токи двух фаз нагрузки, примыкающих к оборванному проводу, уменьшаются в два раза, а ток третьей фазы не изменяется.

При *обрыве фазы нагрузки в соединении звезда – треугольник* ток оборванной фазы отсутствует, а токи двух других фаз остаются неизменными.

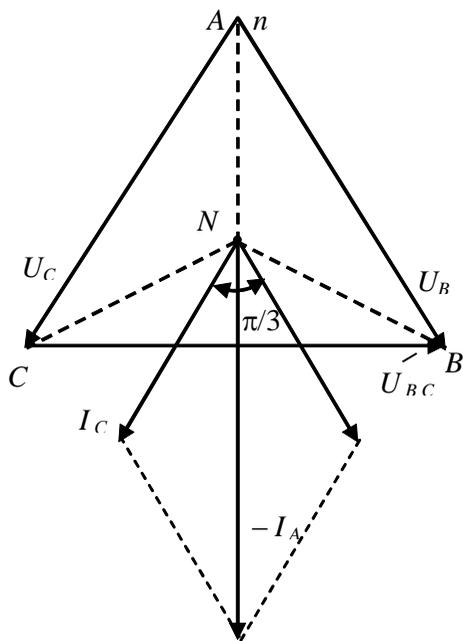


Рис. 8.12.

8.6. Вращающееся магнитное поле

Если в систему обмоток, оси которых сдвинуты в пространстве относительно друг друга (рис. 8.13, а), подать трехфазную систему токов (рис. 8.14), то суммарная магнитодвижущая сила (МДС) обмоток будет вращаться. Направления осей (нормалей к плоскости витка этих обмоток) показаны на рис. 8.13, б).

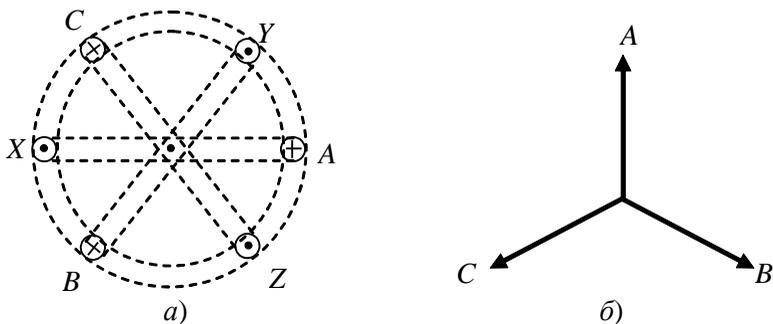


Рис. 8.13.

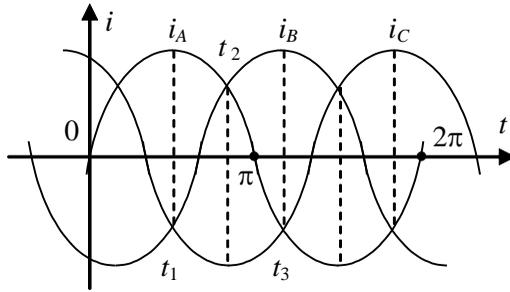


Рис. 8.14.

Моменты времени t_1 , t_2 и t_3 (рис. 8.14) позволяют проследить положение в пространстве суммарной МДС обмоток. Токи обмоток

$$i_A = I_m \sin \omega t; \quad i_B = I_m \left(\sin \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_m \left(\sin \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Разрежем и развернем систему обмоток (рис. 8.13, а), поместив начало координат в центр обмотки А (рис. 8.15), и определим МДС F , действующую на расстоянии x от начала координат.

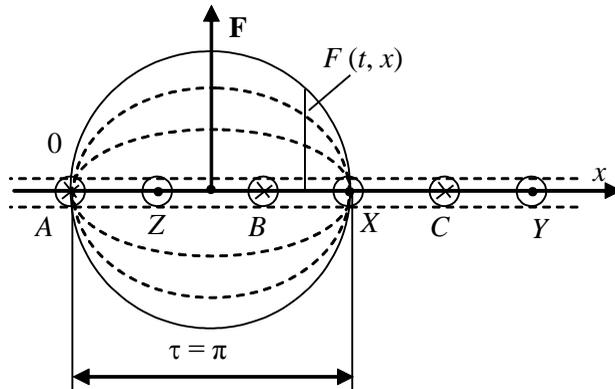


Рис. 8.15.

МДС фаз

$$\begin{aligned} F_A(x, t) &= F_m \sin \omega t \cos \frac{\pi}{\tau} x = \\ &= 0,5 F_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) + 0,5 F_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{\tau} x \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_B(x,t) &= F_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{2\pi}{3}\right) = \\
 &= 0,5F_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right) + 0,5F_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{\tau}x - \frac{4\pi}{3}\right); \\
 F_C(x,t) &= F_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tau}x + \frac{2\pi}{3}\right) = \\
 &= 0,5F_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right) + 0,5F_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{\tau}x + \frac{4\pi}{3}\right),
 \end{aligned}$$

где $F_m = WI_m$; W – число витков обмотки.

Уравнение суммарной МДС в некоторой точке x развертки

$$F(x,t) = F_A(x,t) + F_B(x,t) + F_C(x,t) = 1,5F_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right)$$

представляет собой уравнение бегущей волны. Пусть

$$\omega t - \frac{\pi}{\tau}x = C = \text{const}, \quad \text{тогда} \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega - \frac{\pi}{\tau} \frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{где}$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega\tau}{\pi} = \frac{2\pi f\tau}{\pi} = 2f\tau \quad \text{– линейная скорость волны. Число}$$

$$\text{оборотов в минуту } n = \frac{60v}{\pi f} = \frac{60 \cdot 2f\tau}{2p\tau} = \frac{60f}{p}, \quad \text{где } \tau \text{ – межполюсное деление; } p \text{ – число пар полюсов системы обмоток.}$$

Диграмма (рис. 8.16, а) соответствует моменту времени t_1 (рис. 8.14), диаграмма (рис. 8.16, б) – моменту времени t_2 , а диаграмма (рис. 8.16, в) – моменту времени t_3 .

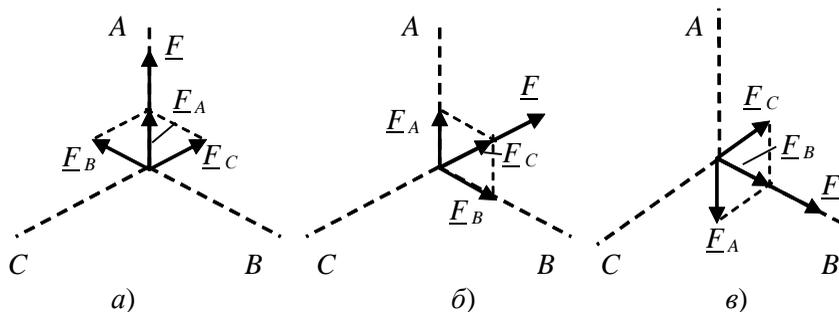


Рис. 8.16.

Если система питающих токов несимметрична, то параметры вращающегося поля существенно отличаются от рассмотренных выше.

8.7. Разложение несимметричной трехфазной системы напряжений и токов на симметричные составляющие

Несимметричная трехфазная система токов или напряжений может быть разложена на три составляющие, образующие прямую (элементы с индексом 1), обратную (элементы с индексом 2) и нулевую (элементы с индексом 0) последовательности. Токи фаз

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \quad \underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0. \quad (8.5)$$

В сумме

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 3\underline{I}_0.$$

Если сложить уравнения (8.5), умножив \underline{I}_B на a , а \underline{I}_C — на a^2 , то получим

$$3\underline{I}_1 = \underline{I}_A + a\underline{I}_B + a^2\underline{I}_C.$$

Если же при суммировании уравнений (8.5) умножить \underline{I}_B на a^2 , а \underline{I}_C — на a , то получим

$$3\underline{I}_2 = \underline{I}_A + a^2\underline{I}_B + a\underline{I}_C.$$

Нулевая последовательность не участвует в создании вращающегося магнитного поля. Ее токи лишь создают потери в обмотках и в стали конструкций электрических машин. Прямая последовательность создает вращающееся поле, выполняющее определенную работу, и участвует в преобразовании электрической энергии в механическую. Обратная последовательность создает тормозящее магнитное поле, относительная скорость которого (по отношению к скорости вращающейся части машины) почти вдвое больше скорости поля, что приводит к увеличению потерь на гистерезис и на вихревые токи. Отношение амплитуды обратной последовательности к амплитуде прямой последовательности называется коэффициентом несимметрии ($k = I_0/I_1$). Таким обра-

зом, несимметрия приводит к тому, что сопротивления фаз для каждой последовательности становятся разными.

Пример 8.3. В трехфазной системе с несимметричной нагрузкой напряжения фаз: $\underline{U}_A = 360 \text{ В}$; $\underline{U}_B = 360e^{-j90^\circ} \text{ В}$; $\underline{U}_C = 360\sqrt{2}e^{-j135^\circ} \text{ В}$. Определить коэффициент несимметрии.

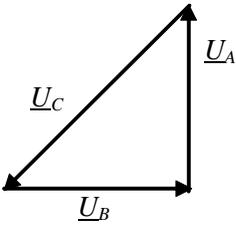


Рис. 8.17.

Решение. Векторы \underline{U}_A , \underline{U}_B и \underline{U}_C образуют прямоугольный равнобедренный треугольник (рис. 8.17), следовательно, их сумма равна нулю, т.е. нулевая последовательность в этой системе отсутствует.

Для прямой и обратной последовательностей

$$3\underline{U}_1 = \underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C = 1205e^{j15^\circ} \text{ В, откуда } U_1 = 402 \text{ В};$$

$$3\underline{U}_2 = \underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C = 543e^{j5^\circ} \text{ В, откуда } U_2 = 181 \text{ В}.$$

Коэффициент несимметрии

$$k = \frac{U_1}{U_2} = 0,45.$$

ТЕМА 9. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Определение цепей с распределенными параметрами. Упрощенная теория линий

Выше рассматривались электрические цепи с сосредоточенными параметрами, для которых полагают, что на отдельных участках цепи сосредоточен только один вид поля (электрическое – в конденсаторе, магнитное – в катушке индуктивности), а участки, на которых электромагнитная энергия необратимо преобразуется в тепловую, химическую или механическую, обозначают сопротивлениями.

В *цепях с распределенными параметрами* электрическое, магнитное поля и потери энергии распределены вдоль участков цепи, а напряжения и токи различны для разных точек (сечений) цепи. Примеры цепей с распределенными параметрами: длинные линии электропередачи, линии электропроводной связи и телеуправления, обмотки трансформаторов и электрических машин и др.

Если расстояние между проводами длинной линии много меньше длины волны электромагнитных колебаний между проводами, то для расчета такой линии применима *упрощенная теория*, которая основана на понятиях теории электрических цепей (напряжения, токи, сопротивления, индуктивности, емкости), а не на теории электромагнитного поля, которая учитывает, что электрическое и магнитное поля линии распределяются внутри проводов и между проводами. Ниже излагается упрощенная теория.

9.2. Дифференциальные уравнения однородной линии и их решение для синусоидального режима

Линия, параметры которой равномерно распределены вдоль всей ее длины, называется *однородной*.

Рассмотрим однородную двухпроводную линию с индуктивностью $L_0 dx$, активным сопротивлением $R_0 dx$, емкостью

$C_0 dx$ и активной проводимостью $G_0 dx$ на каждом элементарном участке длиной dx (рис. 9.1). Параметры однородной линии на единицу ее длины (L_0 , C_0 , R_0 и G_0) называют *первичными параметрами*. Будем называть верхний провод линии *прямым*, а нижний – *обратным*.

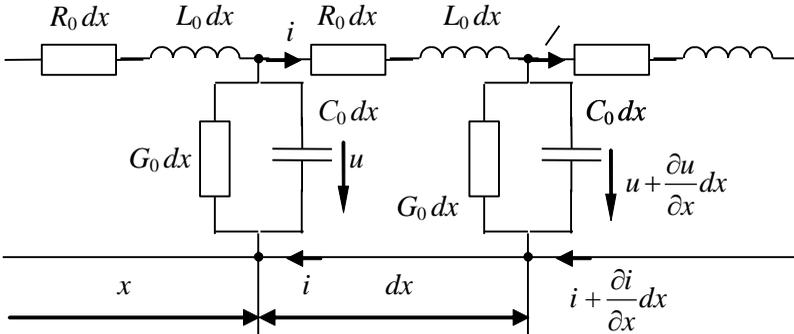


Рис. 9.1.

Каждый элементарный участок линии можно рассматривать как элементарный четырехполюсник, а линию в целом можно считать симметричным пассивным четырехполюсником относительно любых двух сечений, например относительно входных и выходных зажимов.

В начале выбранного элемента линии dx напряжение и ток обозначим соответственно u и i , а в начале следующего элемента – $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$.

По законам Кирхгофа

$$R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} = u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right);$$

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right),$$

где x – расстояние от начала линии до элемента dx .

После упрощения последних уравнений, сократив их на dx , получим систему основных дифференциальных уравнений линии с распределенными параметрами

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (9.1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9.2)$$

Будем полагать, что в линии установившийся режим при синусоидальном напряжении источника питания. Уравнения (9.1) и (9.2) в комплексной форме

$$-\frac{dU}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \underline{I};$$

$$-\frac{dI}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \underline{U}.$$

Введем обозначения: $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ – комплексное сопротивление, $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ – комплексная проводимость на единицу длины линии. Тогда

$$-\frac{dU}{dx} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (9.3)$$

$$-\frac{dI}{dx} = \underline{Y}_0 \underline{U}. \quad (9.4)$$

После дифференцирования (9.3) и (9.4) получим уравнения

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{dI}{dx}; \quad -\frac{d^2 I}{dx^2} = \underline{Y}_0 \frac{dU}{dx},$$

в которых заменим $\frac{dI}{dx}$ и $\frac{dU}{dx}$ по (9.3) и (9.4):

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U}; \quad (9.5)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{I}. \quad (9.6)$$

Решение (9.5):

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (9.7)$$

где \underline{A}_1 и \underline{A}_2 – постоянные интегрирования;

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} - \quad (9.8)$$

коэффициент распространения.

Найдем ток по уравнению (9.3):

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}}{\sqrt{\underline{Z}_0/\underline{Y}_0}}. \quad (9.9)$$

Здесь $\sqrt{\underline{Z}_0/\underline{Y}_0}$ – волновое сопротивление линии \underline{Z}_B , которое в случае однородной линии равно характеристическому сопротивлению линии как четырехполюсника:

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0/\underline{Y}_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} e^{j\theta}, \quad (9.10)$$

где

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(G_0 L_0 - R_0 C_0)}{R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0} - \quad (9.11)$$

аргумент волнового сопротивления.

Коэффициент распространения и волновое сопротивление называют *вторичными параметрами* линии.

9.3. Бегущие волны в линии

Подставим (9.10) в (9.9):

$$\underline{I} = \frac{A_1}{\underline{Z}_C} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - \frac{A_2}{\underline{Z}_C} e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (9.12)$$

где $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$; $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$.

Мгновенные значения напряжения и тока:

$$u = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2); \quad (9.13)$$

$$i = \frac{\sqrt{2} A_1}{Z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) + \frac{\sqrt{2} A_2}{Z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta). \quad (9.14)$$

Каждое слагаемое правых частей уравнений (9.13) и (9.14) представляет собой *бегущую волну*.

Скорость перемещения фазы колебания, постоянная во времени t , но изменяемая по координате x , пройденного волной, называется *фазовой скоростью*. Из выражения $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}$ следует, что $d(\omega t - \beta x + \psi_1)/dt = 0$. Фазовая скорость

$$c = v_{\Phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (9.15)$$

Аналогично из второго слагаемого (9.13) $\omega t + \beta x + \Psi_2 = \text{const}$ получим $c = v_{\Phi} = -\frac{\omega}{\beta}$, следовательно, эти слагаемые представляют собой волны, движущиеся в противоположных направлениях.

Расстояние (в направлении распространения волны) между двумя ближайшими точками, разность фаз колебаний в которых равна 2π , называется *длиной волны*. Из (9.13) получим $\omega t - \beta(x + \lambda) + \Psi_1 = \omega t - \beta x + \Psi_1 - 2\pi$, откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (9.16)$$

За один период T волна проходит расстояние в одну длину волны:

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}. \quad (9.17)$$

Волна, движущаяся от начала линии, называется *прямой*, а от конца линии – *обратной* (*встречной* или *отраженной*). Для построения кривой волны, например обратной (рис. 9.2), нужно сначала построить огибающие $\pm\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x}$.

Разложение волн на прямые и обратные имеет условный характер, а реально в линиях существуют только результирующие напряжение \underline{U} и ток \underline{I} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{об}} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \\ \underline{I} &= \underline{I}_{\text{пр}} - \underline{I}_{\text{об}} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x}, \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

откуда

$$\underline{I}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_{\text{пр}}}{\underline{Z}_C}; \quad \underline{I}_{\text{об}} = \frac{\underline{U}_{\text{об}}}{\underline{Z}_C}. \quad (9.19)$$

Таким образом, напряжения и токи в линии можно представить наложением прямых и обратных волн. Поэтому ве-

личина $\underline{\gamma}$ называется коэффициентом распространения, α – коэффициентом ослабления, β – коэффициентом фазы.

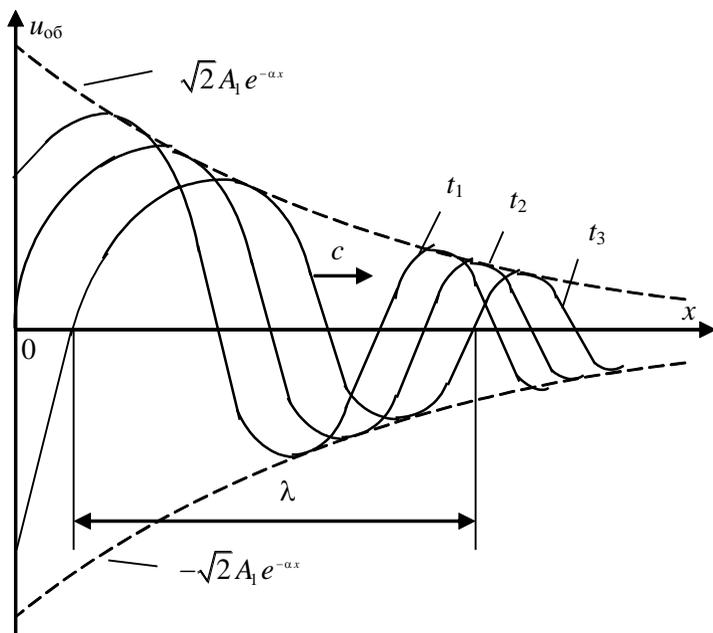


Рис. 9.2.

9.4. Определение напряжения и тока в любой точке линии по заданным напряжению и току в начале или в конце линии

Если известны значения напряжения \underline{U}_1 и тока \underline{I}_1 в начале линии, то из (9.7) и (9.12) при $x=0$ получим $\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$; $\underline{I}_1 \underline{Z}_C = \underline{A}_1 - \underline{A}_2$, откуда

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_C); \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_C). \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Подставим (9.20) в (9.7) и (9.12):

$$\underline{U} = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_C)e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_C)e^{-\underline{\gamma}x};$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} + \underline{I}_1 \right) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} - \underline{I}_1 \right) e^{\gamma x}.$$

После преобразований и ввода гиперболических функций запишем выражения для определения напряжения и тока в любой точке линии по заданным напряжению и току в начале линии:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_C \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \\ &= \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{I}_1 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma x; \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \\ &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Если заданы \underline{U}_2 , \underline{I}_2 в конце линии (сопротивление нагрузки $\underline{Z}_H = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$), то, обозначив расстояние текущей точки от конца линии через y , длину линии – через l , при $x = l - y$ из (9.7) и (9.12) получим:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma y} + \underline{A}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma y}; \\ \underline{I} \underline{Z}_C &= \underline{A}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma y} - \underline{A}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma y}. \end{aligned}$$

Заменим y на x и введем обозначения $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l}$; $\underline{A}_4 = \underline{A}_2 e^{\gamma l}$, тогда

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_3 e^{\gamma x} + \underline{A}_4 e^{-\gamma x}; \\ \underline{I} \underline{Z}_C &= \underline{A}_3 e^{\gamma x} - \underline{A}_4 e^{-\gamma x}, \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

где $\underline{A}_3 e^{\gamma x}$ – напряжение прямой волны; $\underline{A}_4 e^{-\gamma x}$ – обратной волны.

При $x=0$ $\underline{U}_2 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4$; $\underline{I}_2 \underline{Z}_C = \underline{A}_3 - \underline{A}_4$, откуда

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C); \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C). \quad (9.23)$$

После подстановки (9.23) в (9.22) и преобразований получаем формулы для определения напряжения и тока в любой точке линии по заданным соответствующим величинам в конце линии:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

9.5. Условия неискаженной передачи сигнала в линии

Линия, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и с одинаковым коэффициентом затухания, называется *линией без искажений*. При движении волны вдоль линии без искажений ее амплитуда уменьшается, но формы волны напряжения (или тока) в конце и в начале линии остаются подобными. Речь и музыка передаются по таким линиям (линиям связи и телемеханики).

Сигнал передается без искажений, если коэффициент затухания α и фазовая скорость $c = v_\phi$ не зависят от частоты, т.е. при условии

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = k. \quad (9.25)$$

Подставим выражения

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0(k + j\omega), \quad \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0(k + j\omega) \quad \text{в (9.8):}$$

$\underline{\gamma} = (k + j\omega)\sqrt{L_0 C_0}$, откуда

$$\alpha = k\sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0}; \quad (9.26)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0};$$

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (9.27)$$

В формулах (9.26) и (9.27) α и c не зависят от частоты. Не зависит от частоты и волновое сопротивление линии без искажений

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{L_0 / C_0}.$$

9.6. Режим согласованной нагрузки

Нагрузка, при которой отсутствует отраженная волна, называется *согласованной*. В режиме согласованной нагрузки коэффициент отражения равен нулю, а сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению.

Отношение напряжения отраженной (обратной) волны в конце линии к напряжению падающей волны в конце линии называется *коэффициентом отражения* по напряжению:

$$k_u = \frac{\underline{A}_1 e^{\gamma l}}{\underline{A}_2 e^{-\gamma l}} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C}. \quad (9.28)$$

Коэффициент отражения по току $k_i = -k_u$.

Формулы напряжения и тока в любой точке линии на расстоянии x от ее конца получим, заменив в формулах (9.24) $\underline{Z}_C = \underline{Z}_B$ на \underline{Z}_H :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \operatorname{sh} \underline{\gamma} x) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} x}; \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 (\operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \operatorname{ch} \underline{\gamma} x) = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma} x}. \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

В начале линии при $x = l$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} l} = U_2 e^{j\phi_{U_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l}; \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma} l} = I_2 e^{j\phi_{I_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l}, \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

где ϕ_{U_2} и ϕ_{I_2} – аргументы комплексов \underline{U}_2 и \underline{I}_2 соответственно.

Коэффициент полезного действия (КПД) линии при согласованной нагрузке равен отношению активной мощности в конце линии P_2 к активной мощности в начале линии P_1 . При этом $P_2 = U_2 I_2 \cos(\phi_{U_2} - \phi_{I_2}) = U_2 I_2 \cos \theta$. Согласно формулам (9.30) $P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \theta$. Тогда КПД

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (9.31)$$

9.7. Входное сопротивление линии

Для схемы (рис. 9.3) линии длиной l , подключенной к источнику напряжения \underline{U}_1 и нагруженной сопротивлением \underline{Z}_H , входное сопротивление получим, заменив в формулах (9.24) x на l и \underline{U}_2 – на $\underline{I}_2 \underline{Z}_H$:

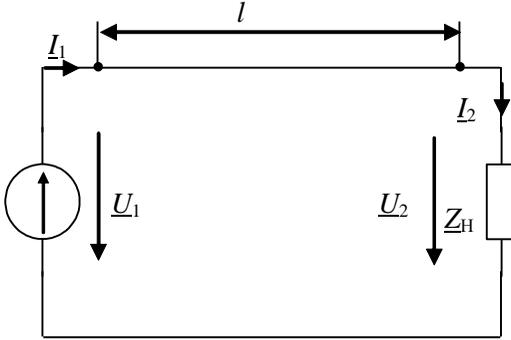


Рис. 9.3.

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_H \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{I}_2 \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \operatorname{ch} \underline{\gamma} l}. \quad (9.32)$$

При согласованной нагрузке ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$)

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{\underline{Z}_C (\operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \operatorname{ch} \underline{\gamma} l)}{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \underline{Z}_C = \underline{Z}_B.$$

9.8. Линия без потерь. Стоячие волны

Напряжение и ток в линии без потерь. Когда говорят о линии без потерь, имеют в виду линию с очень малыми потерями (R_0 и G_0 много меньше ωL_0 и ωC_0 соответственно), а полностью исключить потери энергии невозможно.

При $R_0 = G_0 = 0$ $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0}$, где $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$.

Волновое сопротивление $\underline{Z}_C = \sqrt{L_0/C_0}$ при этом – чисто активное.

Если учесть, что $\underline{\gamma} x = (\alpha + j\beta)x = (0 + j\beta)x = j\beta x$, то формулы (9.24) для линии без потерь

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} j\beta x + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} j\beta x; \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} j\beta x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} j\beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Перейдем от гиперболических функций к круговым:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 \underline{Z}_C \sin \beta x; \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Входное сопротивление линии без потерь. В режиме холостого хода ($\underline{I}_2 = 0$) из формул (9.34)

$$\underline{Z}_{\text{ВХ xx}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2 \cos \beta x}{j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta x} = \frac{-j \underline{Z}_C}{\operatorname{tg} \beta x} = \frac{-j \sqrt{L_0/C_0}}{\operatorname{tg} \beta x} = j X_{\text{xx}}. \quad (9.35)$$

При коротком замыкании на конце линии ($\underline{U}_2 = 0$)

$$\underline{Z}_{\text{ВХ кз}} = j \underline{Z}_C \operatorname{tg} \beta x = j \sqrt{L_0/C_0} \operatorname{tg} \beta x = j X_{\text{кз}}, \quad (9.36)$$

где $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$.

Стоячие волны. При холостом ходе, коротком замыкании или чисто реактивной нагрузке в линии без потерь возникают стоячие волны. *Стоячая волна* – это электромагнитная волна, образованная стоячими волнами напряжения и тока и полученная в результате наложения движущихся прямой и встречной электромагнитных волн одинаковой интенсивности. Стоячая волна описывается произведением двух периодических функций – функции координаты текущей точки (βx) и функции времени (ωt). Стоячие волны напряжения и тока сдвинуты относительно друг друга в пространстве на четверть длины волны $\lambda/4$ и во времени – на $\pi/2$.

Точки линии, в которых периодическая функция координаты обращается в нуль, называют *узлами*, а точки, в которых периодическая функция координаты имеет максимальные значения, – *пучностями*.

Передачи энергии от начала к концу линии при возникновении стоячих волн не происходит, но на каждом участке в четверть длины волны запасена электромагнитная энергия, которая переходит из энергии магнитного поля в энергию электрического поля в моменты времени, когда ток вдоль всей линии оказывается равным нулю, а напряжение достигает максимума. И наоборот, когда напряжение вдоль всей линии равно нулю, а ток максимален, вся энергия переходит в энергию магнитного поля.

Пример 9.1. Параметры длинной линии (рис. 9.1): частота $f = 500$ Гц; длина $l = 200$ км; $R_0 = 10$ Ом/км; $C_0 = 9,6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км; $L_0 = 5,08 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; $G_0 = 1,25 \cdot 10^{-6}$ См/км; напряжение и ток в конце линии $\underline{U}_2 = 100$ В; $\underline{I}_2 = 64,2e^{j15^\circ}$ мА. Определить напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 в начале линии.

Решение. *Напряжение и ток в линии на расстоянии y от конца линии до рассматриваемой точки:*

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} y; \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y.$$

Волновое сопротивление

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = (763,5 - j202,4) \text{ Ом},$$

где угловая частота $\omega = 2\pi f = 3142 \text{ с}^{-1}$.

Коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = (7,059 \cdot 10^{-3} + j0,023) \text{ км}^{-1},$$

где $\alpha = 7,059 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ – коэффициент затухания;

$\beta = 0,023 \text{ км}^{-1}$, – коэффициент фазы.

Напряжение и ток в начале линии (гиперболические функции вычислим с помощью Mathcad):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = (-5,557 \cdot 10^4 - j1,318 \cdot 10^5) \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l = (-28,42 - j159,3) \text{ А}.$$

Пример 9.2. Считая линию (рис. 9.1) линией без потерь ($R_0 = C_0 = 0$), определить напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 в начале линии и построить график распределения модуля напряжения вдоль линии в функции от координаты. Остальные данные взять из условия примера 9.1.

Решение. На рис. 9.4 представлен график распределения модуля напряжения вдоль линии в функции координаты $|\underline{U}(y)| = |\underline{U}_2 \operatorname{ch} j\beta l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} j\beta l|$.

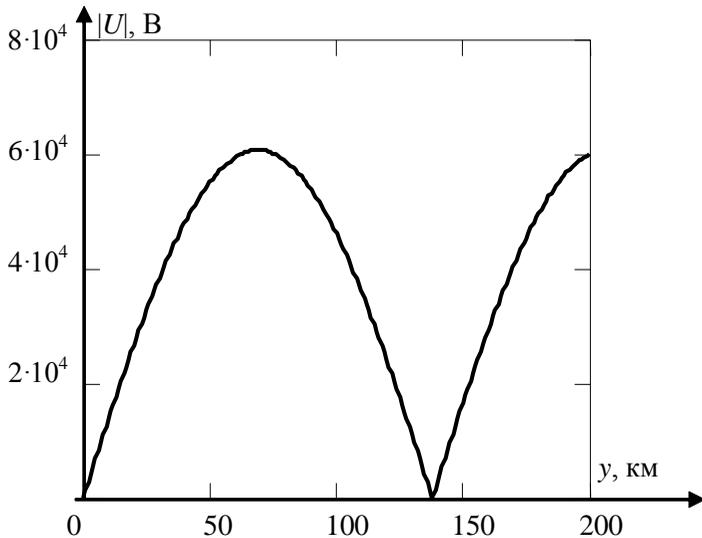


Рис. 9.4.

Для линии без потерь ($R_0 = C_0 = \alpha = 0$): волновое сопротивление

$$\underline{Z}_C = \sqrt{L_0/C_0} = 727,4 \text{ Ом};$$

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L_0C_0} = 0,022;$$

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} j\beta y + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} j\beta y; \quad \underline{I} = \underline{I}_2 \operatorname{ch} j\beta y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} j\beta y; \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} j\beta l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} j\beta l = (-15,69 - j5,993 \cdot 10^4) \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} j\beta l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} j\beta l = (-13,09 - j0,113) \text{ А}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вопросы для самоконтроля

Тема 1

- 1.1. Назовите основные компоненты ЭЦ.
- 1.2. Перечислите три множества объектов ЭЦ.
- 1.3. Как называются три типа соединений компонентов ЭЦ?
- 1.4. Какие элементы ЭЦ дуальны?
- 1.5. Какими уравнениями описываются линейные статические модели компонентов ЭЦ?
- 1.6. Назовите тип уравнений, с помощью которых описываются линейные инерционные модели.
- 1.7. В чем отличие компонентов принципиальной схемы ЭЦ от компонентов эквивалентной или расчетной схемы?
- 1.8. На какие две группы делятся идеализированные элементы ЭЦ?
- 1.9. Какими электрическими величинами описывают идеализированную модель емкости?
- 1.10. Посредством каких электрических величин описывается идеализированная модель индуктивности?
- 1.11. Что представляет собой внешняя характеристика идеализированного источника ЭДС?
- 1.12. Какой вид имеет внешняя характеристика идеализированного источника тока?
- 1.13. Назовите два типа уравнений математического описания ЭЦ.
- 1.14. Чем определяется число компонентных уравнений, и между какими величинами они устанавливают связь?
- 1.15. К какому типу уравнений относятся уравнения, составленные по законам Кирхгофа?
- 1.16. Как классифицируются линейные ЭЦ в зависимости от типа уравнений?
- 1.17. Какими уравнениями описываются нелинейные ЭЦ?
- 1.18. По каким признакам классифицируются ЭЦ?
- 1.19. Каким должен быть закон изменения напряжения на емкости, чтобы вызвать в ней постоянный ток?

1.20. При каком законе изменения тока в индуктивности напряжение на индуктивности постоянно?

Тема 2

2.1. Напишите формулы, показывающие связь действующего, среднего значений с максимальным значением гармонической периодической функции $a(t)$.

2.2. Назовите три формы записи комплексного числа.

2.3. Напишите формулы перехода от алгебраической формы записи комплексного числа \underline{A} к показательной, если $\underline{A} = A' + jA'' = Ae^{j\phi}$.

2.4. По каким формулам осуществляется переход от показательной формы записи комплексного числа к алгебраической?

2.5. Для гармонической функции $a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ запишите выражение мгновенного комплекса \underline{A}_m .

2.6. Мгновенная функция тока $i(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$ А. Запишите выражение его комплексной амплитуды \underline{I}_m .

2.7. Комплекс амплитуды напряжения $\underline{U}_m = 100e^{j90^\circ}$ В. Запишите комплекс его действующего значения.

2.8. Чему соответствуют процессы дифференцирования и интегрирования периодической синусоидальной функции в области комплексного переменного?

2.9. Запишите в комплексной форме функцию напряжения на индуктивности для максимального значения. То же — для напряжения на емкости.

2.10. Запишите комплекс сопротивления нагрузки, если напряжение $u(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ)$ В и ток $i(t) = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 165^\circ)$ А.

2.11. Найдите синусоидальную функцию напряжения, комплекс действующего значения которого $\underline{U} = (-30 + j40)$ В.

2.12. Комплексы тока и напряжения в цепи источника питания $\underline{I}_m = 4\sqrt{2}e^{j165^\circ}$ А и $\underline{U}_m = 120\sqrt{2}e^{j120^\circ}$ В. Запишите выражение комплекса полной мощности, выражения активной и реактивной мощностей.

2.13. На каком пассивном элементе ЭЦ ток и напряжение совпадают по фазе?

2.14. Запишите закон изменения тока через конденсатор $i_C(t)$, если $u_C(t) = 100\sqrt{2}\sin(100t + 45^\circ)$ В, а $C = 0,5$ мкФ.

2.15. Запишите закон изменения напряжения $u_K(t)$ на катушке индуктивности с параметрами $R_K = 10$ Ом, $L_K = 0,1$ Гн, по которой протекает ток $i(t) = 5\sin(100t + 90^\circ)$ А.

2.16. Токи в пассивных параллельных ветвях схемы:
 $i_1(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + 0^\circ)$ А, $i_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)$ А,
 $i_3(t) = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)$ А. Определите ток $i(t)$ в неразветвленной части схемы.

2.17. Запишите формулы расчета эквивалентных параметров R_3 , L_3 и C_3 при последовательном включении элементов R , L и C .

2.18. Какие размерности имеют величины: M – коэффициент взаимной индукции; k_{CB} – коэффициент магнитной связи двух катушек индуктивности?

2.19. Чему равна эквивалентная индуктивность двух последовательно соединенных катушек L_1 и L_2 при их согласном и встречном включении?

2.20. Вычислите коэффициент связи k_{CB} двух катушек $L_1 = 0,05$ Гн и $L_2 = 0,2$ Гн, если $M = 0,08$ Гн.

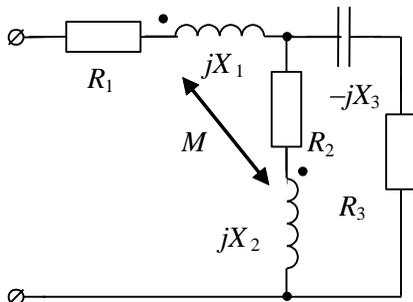
2.21. По катушкам индуктивности L_1 и L_2 протекают токи i_1 и i_2 . Запишите в комплексной форме выражения напряжений на этих катушках при их встречном включении.

2.22. Запишите формулу определения полной комплексной мощности двух катушек, обусловленной взаимной индуктивностью при согласном включении.

2.23. Чем определяется схема развязки взаимноиндуктивных связей двух катушек, подключенных к общему узлу схемы?

2.24. Для схемы записать комплексы сопротивлений трех ветвей после развязки индуктивной связи катушек.

2.25. Как изменится коэффициент взаимоиндукции двух катушек, если ток в одной из них увеличить в n раз?



Тема 3

3.1. Зависимость каких величин называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)?

3.2. В какой форме записи может быть представлена комплексно-частотная характеристика (КЧХ)?

3.3. Что такое фазо-частотная характеристика (ФЧХ)?

3.4. Какой уровень уменьшения сигнала установлен для полосы пропускания?

3.5. В каком LC -контуре возникает резонанс напряжений?

3.6. Какой резонансный режим возникает в ЭЦ при параллельном соединении элементов L и C ?

3.7. Какое соотношение связывает напряжения u_L , u_C и $u_{ВХ}$ при резонансе напряжений, если добротность контура $Q > 1$?

3.8. Добротность параллельного колебательного контура $Q < 1$. Укажите связь токов I_L , I_C и $I_{ВХ}$ при резонансе токов.

3.9. Назовите условие, при котором в последовательном колебательном RLC -контуре возникает резонанс.

3.10. Запишите условие резонанса токов в контуре, состоящем из параллельно соединенных конденсатора C и катушки с параметрами R_k и L_k для резонансной частоты ω_0 .

3.11. Чему равно полное сопротивление последовательного RLC -контура при резонансе напряжений?

3.12. Запишите формулу волнового сопротивления для последовательного колебательного контура.

3.13. Запишите соотношение мощностей P , Q и S для резонансного режима в последовательном контуре.

3.14. По какой формуле определяют резонансную частоту ω_0 в параллельном колебательном контуре с параметрами C , R_k и L_k ?

3.15. Какую операцию нужно выполнить перед составлением условия резонанса в сложной цепи с взаимной индуктивностью?

Тема 4

4.1. Сколько уравнений по первому и второму законам Кирхгофа нужно составить для схемы, имеющей n узлов и m ветвей?

4.2. Какие законы лежат в основе метода контурных токов (МКТ)?

4.3. Составляются ли уравнения по МКТ для контуров, содержащих источники тока?

4.4. Сколько узловых уравнений по методу узловых потенциалов (МУП) нужно составить, если в схеме n узлов?

4.5. Как по МКТ рассчитывают токи ветвей схемы?

4.6. Как рассчитать токи ветвей схемы по МУП?

4.7. Сколько подсхем составляют при расчете цепи методом наложения?

4.8. Как в методе наложения исключают из схемы источники ЭДС и источники тока?

4.9. Запишите выражения для расчета тока нагрузки по методу эквивалентного генератора (МЭГ).

4.10. Как в МЭГ определить ЭДС эквивалентного генератора?

4.11. Какие три условия должны быть выполнены при расчете сопротивления эквивалентного генератора Z_r по МЭГ?

4.12. Какой принцип лежит в основе метода наложения?

4.13. Чему равно количество контурных уравнений в МКТ?

4.14. Как в МКТ учитывают влияние токов источников тока?

Тема 5

5.1. Как записывается выражение для искомого тока по методу эквивалентного генератора?

5.2. Чему равно количество составляемых подсетей в методе наложения? Как преобразуются источники ЭДС и тока при их составлении?

Тема 6

6.1. Назовите число независимых параметров (коэффициентов) в уравнениях обратимого пассивного четырехполюсника.

6.2. Сколько независимых параметров (коэффициентов) в уравнениях обратимого симметричного четырехполюсника?

6.3. Запишите уравнения, связывающие A -параметры пассивного четырехполюсника.

6.4. Сколько опытов необходимо провести для экспериментального определения параметров пассивного четырехполюсника?

6.5. Как называются активные четырехполюсники, содержащие управляемые источники?

6.6. Матрица каких параметров связывает входные и выходные величины, если уравнения записаны для токов четырехполюсника I_1 и I_2 ?

6.7. Назовите матрицу коэффициентов пассивного четырехполюсника, если его уравнения записаны для \underline{U}_1 и \underline{U}_2 .

6.8. Какую размерность имеют A -параметры пассивного четырехполюсника?

6.9. По какому признаку четырехполюсники делятся на взаимные и невзаимные?

6.10. Как прямое включение четырехполюсника заменить на обратное?

6.11. Какой физический смысл имеют параметры пассивного четырехполюсника $\underline{Y}_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}$ и $\underline{A}_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$?

6.12. Каким числом вторичных (характеристических) параметров характеризуется пассивный четырехполюсник?

6.13. Как определить характеристические сопротивления \underline{Z}_{C1} и \underline{Z}_{C2} несимметричного четырехполюсника?

6.14. Запишите формулы, по которым определяются коэффициент затухания и фазовый коэффициент пассивного четырехполюсника.

6.15. Как определить характеристическое сопротивление симметричного четырехполюсника?

6.16. Назовите две основные полосы частот электрического фильтра.

6.17. Как классифицируются электрические LC-фильтры в зависимости от полосы пропускания частот?

6.18. Какую полосу частот пропускают фильтр низких частот (ФНЧ) и фильтр высоких частот (ФВЧ)?

6.19. Какую полосу частот от 0 до ∞ пропускает полосовой фильтр (ПФ), если ω_1 и ω_2 – крайние частоты полосы пропускания?

6.20. Какую полосу частот задерживает заграждающий фильтр (ЗФ)?

Тема 7

7.1. Запишите формулу расчета постоянной составляющей ряда Фурье периодической несинусоидальной функции ЭДС E_0 , если ее мгновенное значение $e(t)$.

7.2. Как вычислить амплитуду и фазу k -й гармоники, если $e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t$?

7.3. Как называется метод расчета мгновенных значений токов в электрических цепях с несинусоидальными ЭДС?

7.4. Как рассчитать комплекс полного сопротивления цепи для k -й гармоники \underline{Z}_k при последовательном соединении элементов R, L, C ?

7.5. Мгновенное значение функции тока $i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2)$. Запишите формулу для определения действующего значения этого тока.

7.6. Как записать формулу для расчета активной мощности в цепи, если выражения мгновенных величин:

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{i3});$$
$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_{u1}) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{u3})?$$

7.7. Как влияет на форму кривой несинусоидального тока, по сравнению с кривой напряжения, включение индуктивности или емкости?

7.8. Ряд Фурье несинусоидальной функции записывается выражением: $a(t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2)$. Запишите вторую форму ряда Фурье через синусные и косинусные составляющие.

7.9. Для вопроса 7.8 запишите соотношения между A_{1m} , A_{2m} и C_{1m} , C_{2m} , B_{1m} , B_{2m} .

7.10. Назовите четыре вида мощностей, которые можно рассчитать для цепи несинусоидального тока.

7.11. Как рассчитать мощность искажения?

7.12. Запишите формулу расчета полной мощности, если $i(t) = I_0 + I_{1m} \sin \omega t + I_{2m} \sin 2\omega t$; $u(t) = U_0 + U_{1m} \sin \omega t + U_{2m} \sin 2\omega t$.

7.13. Справедлив ли принцип наложения для комплексных величин токов и напряжений?

7.14. Можно ли построить векторную диаграмму для токов разных гармоник?

7.15. Как рассчитать угол нагрузки φ_k для k -й гармоники?

Тема 8

8.1. ЭДС фазы A трехфазного источника $e_A = E_m \sin \omega t$. Какими будут начальные фазы ЭДС e_B и e_C при прямом порядке следования фаз?

8.2. Назовите основные типы соединений обмоток генератора и нагрузки в трехфазной цепи.

8.3. Как называют провод, соединяющий нулевые точки генератора и нагрузки?

8.4. Как называется напряжение между двумя линейными проводами? Между линейным и нулевым проводами?

8.5. Запишите формулу, связывающую токи в нулевом и линейных проводах, при соединении звезда – звезда с нулевым проводом.

8.6. Какие соотношения существуют между линейными и фазными величинами при соединении звезда – звезда и симметричной нагрузке?

8.7. Какие соотношения существуют между линейными и фазными токами и напряжениями при соединении треугольник – треугольник и симметричной нагрузке?

8.8. Для симметричного генератора с прямым порядком чередования фаз и соединением обмоток в звезду линейное напряжение $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_L$. Запишите систему линейных и фазных напряжений этого генератора, используя оператор фазы.

8.9. В симметричной трехфазной цепи линейный ток $\underline{I}_A = \underline{I}_L$. Запишите систему всех линейных и фазных токов при соединении нагрузки треугольником, используя оператор фазы.

8.10. Назовите наиболее рациональный метод расчета несимметричной трехфазной цепи с соединением звезда – звезда.

8.11. Приведите формулы расчета активной мощности в симметричной трехфазной цепи.

8.12. Запишите формулы для расчета реактивной мощности в симметричной трехфазной цепи.

8.13. Какую мощность можно измерить в симметричной трехфазной цепи по методу одного ваттметра?

8.14. Как рассчитать показание ваттметра, включенного на ток \underline{I}_A и напряжение \underline{U}_{AB} ?

8.15. Какую мощность можно рассчитать для несимметричной трехфазной цепи, пользуясь методом двух ваттметров, если их показания P_{w_1} и P_{w_2} известны?

Тема 9

9.1. Перечислите первичные параметры ЭЦ с распределенными параметрами.

9.2. Функциями каких двух переменных являются ток и напряжение длинной линии?

9.3. Как записываются уравнения длинной линии в дифференциальной форме, если входное напряжение – гармоническая функция?

9.4. Запишите уравнения длинной линии в дифференциальной форме для мгновенных значений тока и напряжения при отсчете расстояния x от начала линии.

9.5. Назовите вторичные параметры ЭЦ с распределенными параметрами и запишите формулы их определения.

9.6. Как рассчитать фазовую скорость распространения бегущей волны?

9.7. Какие волны присутствуют в длинной линии, работающей в режиме бегущих волн?

9.8. Как передается электромагнитная энергия от генератора к нагрузке в режиме бегущих волн?

9.9. При какой нагрузке в длинной линии отсутствуют отраженные волны?

9.10. Запишите уравнения линии с потерями в режиме согласованной нагрузки.

9.11. Запишите формулу для расчета длины волны.

9.12. Какое условие выполняется для первичных параметров в длинной линии без искажений?

9.13. Какими формулами описывается длинная линия без потерь при отсчете расстояния от нагрузки?

9.14. По каким формулам в линии без потерь рассчитываются параметры α , β , Z_C ?

9.15. При выполнении каких условий в линии без потерь возникают стоячие волны?

9.16. Происходит ли передача электромагнитной энергии от генератора к нагрузке при возникновении стоячих волн?

9.17. Какой вид имеет схема замещения отрезка короткозамкнутой линии без потерь длиной $0 < x < \lambda/4$?

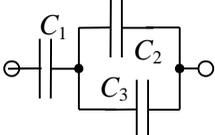
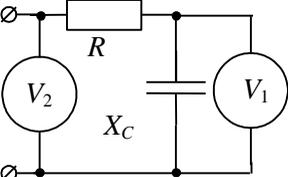
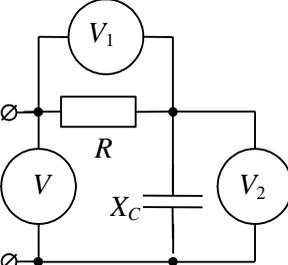
9.18. Запишите уравнения длиной линии с потерями в установившемся гармоническом режиме с использованием гиперболических функций (при отсчете расстояния от нагрузки).

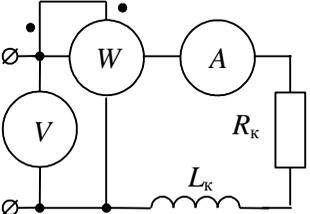
9.19. Запишите формулу расчета коэффициента отражения в длинной линии.

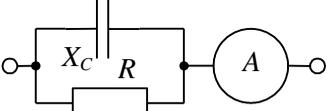
9.20. Как определить КПД длинной линии при согласованной нагрузке?

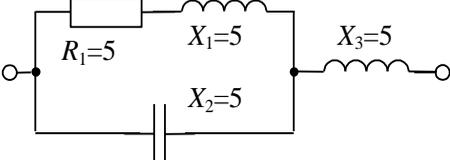
Контрольные задания

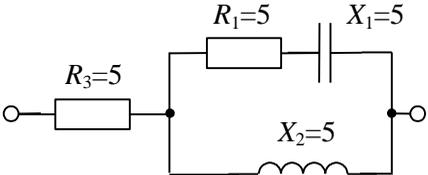
Тема 2

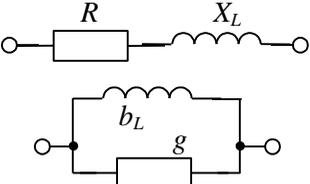
<p>2.1. Угловая частота переменного тока $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$. Определить период T.</p>	
<p>2.2. Две реальные катушки индуктивности с параметрами $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,3 \text{ Гн}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $L_2 = 0,6 \text{ Гн}$ соединены последовательно. Определить параметры R_3 и L_3 эквивалентной схемы замещения.</p>	
<p>2.3. Два конденсатора C_1 и C_2 соединены последовательно и включены в сеть с напряжением $U = \text{const}$. Как распределяются напряжения на конденсаторах, если $C_1 = 2C_2$?</p>	
<p>2.4.</p> 	<p>Три конденсатора соединены, как показано на схеме. Определить их эквивалентную емкость C_3.</p>
<p>2.5. Для цепи синусоидального тока с параметрами $R = 32 \text{ Ом}$ и $X_L = 24 \text{ Ом}$ определить мгновенное значение входного напряжения $u(t)$, если ток $i(t) = 4\sin(\omega t - 120^\circ) \text{ А}$.</p>	
<p>2.6. В цепи синусоидального тока с параметрами $R = 40 \text{ Ом}$ и $X_C = 40 \text{ Ом}$ мгновенное напряжение на конденсаторе $u_C(t) = 240\sin(\omega t + 150^\circ) \text{ В}$. Определить $u(t)$ на входе цепи.</p>	
<p>2.7.</p> 	<p>В цепи с параметрами $R = 16 \text{ Ом}$ и $X_C = 12 \text{ Ом}$ включены два вольтметра электромагнитной системы. Напряжение $U_{V1} = 24 \text{ В}$. Определить U_{V2}.</p>
<p>2.8.</p> 	<p>Чему равно показание вольтметра V, включенного на входе схемы, если $U_{V1} = 48 \text{ В}$, $U_{V2} = 64 \text{ В}$? Все вольтметры – электромагнитной системы.</p>

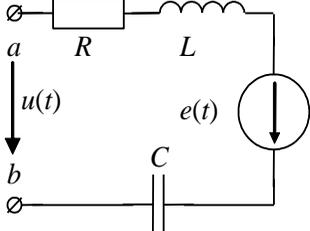
2.9.  В цепи переменного тока показания приборов на частоте $f = 50$ Гц: $P_W = 40$ Вт; $U_V = 80$ В; $I_A = 2$ А. Определить параметры катушки R_k и L_k .

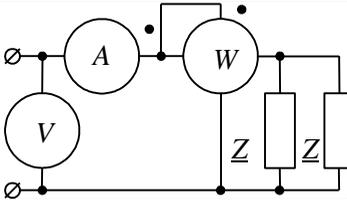
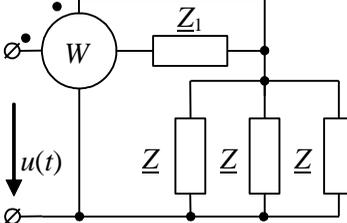
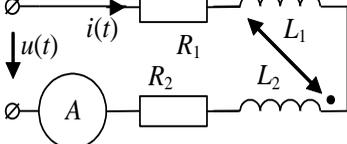
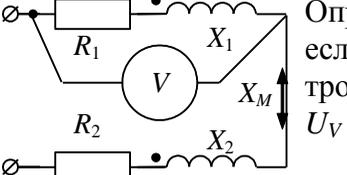
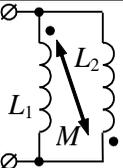
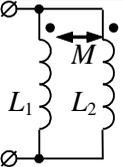
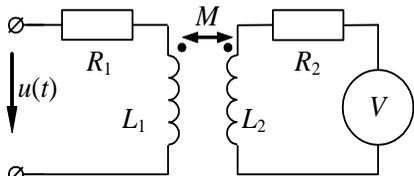
2.10.  В цепи переменного тока $R = X_C = 10$ Ом, $U = 20$ В. Определить показание амперметра электромагнитной системы.

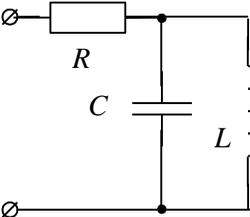
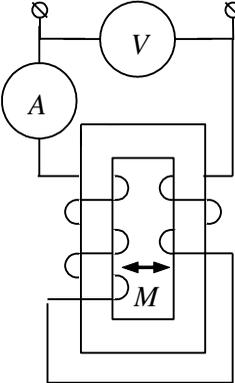
2.11.  Определить эквивалентные активное R и реактивное X сопротивления схемы. На рисунке сопротивления даны в омах.

2.12.  Определить комплекс полного сопротивления схемы. На рисунке сопротивления даны в омах.

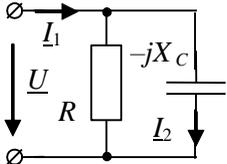
2.13.  Определить параметры (g, b_L) параллельной схемы замещения реальной катушки индуктивности с параметрами $R = X_L = 20$ Ом

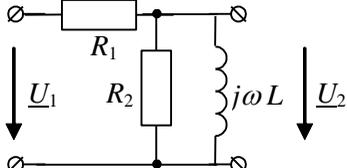
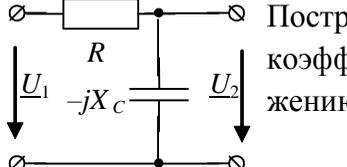
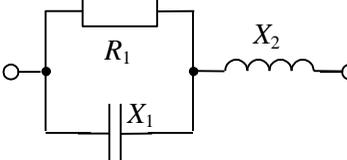
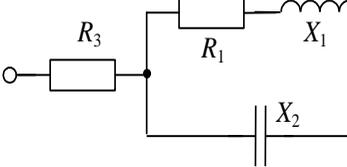
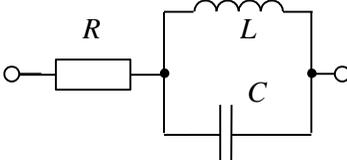
2.14.  Определить амплитуду входного напряжения U_{mab} , если ток $i(t) = 1 \sin \omega t$ А, $R = X_L = 10$ Ом, $e(t) = 10 \sin(\omega t + 90^\circ)$ В.

<p>2.15.</p> 	<p>В схеме $I_A = 10$ А, $U_V = 141$ В. Эквивалентное сопротивление схемы $\underline{Z}_Э = R_Э + jX_Э$, где $R_Э = X_Э$. Определить показание ваттметра.</p>
<p>2.16.</p> 	<p>Определить показание ваттметра, если $\underline{U} = 200$ В, $\underline{Z} = 30e^{j60^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_1 = 10e^{j60^\circ}$ Ом.</p>
<p>2.17.</p> 	<p>Определить I_A и мгновенное значение тока $i(t)$, если $\underline{U} = 250$ В, $R_1 = R_2 = 7,5$ Ом, $X_{L1} = 5$ Ом, $X_{L2} = 7$ Ом, $X_M = 4$ Ом.</p>
<p>2.18.</p> 	<p>Определить напряжение U_{R1}, если показание вольтметра электромагнитной системы $U_V = 120$ В, а $X_1 = X_M$.</p>
<p>2.19.</p> 	<p>Определить эквивалентную индуктивность, если $k_{CB} = 1$, а L_1, L_2, M – известны.</p>
<p>2.20.</p> 	<p>Определить эквивалентную индуктивность двух параллельно соединенных катушек, если известны L_1, L_2, M.</p>
<p>2.21.</p> 	<p>Определить показание вольтметра электромагнитной системы U_V, если $u(t) = 20\sqrt{2} \sin \omega t$ В, $R_1 = X_1 = X_M = 10$ Ом.</p>

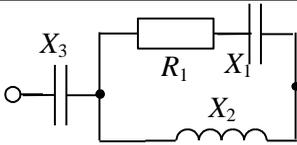
<p>2.22. </p>	<p>Входное сопротивление цепи постоянному току равно 40 Ом. Как изменится это сопротивление на частоте 100 с^{-1}, если $L=0,2 \text{ Гн}$, $C=250 \text{ мкФ}$?</p>
<p>2.23. </p>	<p>Две одинаковые катушки индуктивности с $R_1=R_2=3 \text{ Ом}$ соединены последовательно и надеты на общий каркас. Амперметр электродинамической системы показывает ток $I_A=7,5 \text{ А}$; $X_M=8 \text{ Ом}$. Что показывает вольтметр электродинамической системы? $k_{CB}=1$.</p>
<p>2.24. Как изменится коэффициент M двух катушек, если ток в одной из них увеличить в n раз?</p>	
<p>2.25 Две последовательно соединенные катушки включены встречно, причем $X_1=X_2=2X_M$. Как изменится напряжение на зажимах цепи, если при неизменном токе уменьшить до нуля k_{CB}? Активным сопротивлением катушек можно пренебречь.</p>	

Тема 3

<p>3.1. Функция входного сопротивления ЭЦ</p>	
<p>$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L}$. Записать выражения АЧХ и ФЧХ.</p>	
<p>3.2. </p>	<p>Для схемы записать выражение коэффициента передачи по току</p> $k_i(j\omega) = \frac{I_2}{I_1}$

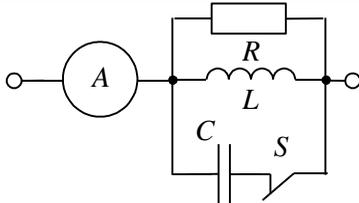
3.3	Для схемы задания 3.2 записать выражения АЧХ и ФЧХ передаточной функции $\underline{k}_i(j\omega)$.
3.4.	 <p>Записать выражение коэффициента передачи по напряжению $\underline{k}_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$.</p>
3.5	Для схемы задания 3.4 записать выражения АЧХ и ФЧХ передаточной функции $\underline{k}_u(j\omega)$.
3.6	Построить АЧХ и ФЧХ функции входного сопротивления $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = R - j\frac{1}{\omega C}$.
3.7	Построить АЧХ и ФЧХ функции входного сопротивления последовательной RLC -цепи.
3.8.	 <p>Построить АЧХ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ для коэффициента передачи по напряжению $k_u(j\omega)$.</p>
3.9.	 <p>Определить значение сопротивления X_1, при котором в цепи будет резонанс. $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $X_2 = 5 \text{ Ом}$.</p>
3.10.	 <p>Определить значение сопротивления X_2, при котором в цепи будет резонанс токов. $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $X_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$.</p>
3.11.	 <p>Определить частоту f, при которой в цепи будет резонанс токов, если $L = 0,1 \text{ Гн}$, $R = 5 \text{ Ом}$, $C = 25,4 \text{ мкФ}$.</p>

3.12.



Определить комплекс полного сопротивления, если $R_1 = X_1 = 10 \text{ Ом}$; $X_2 = X_3 = 20 \text{ Ом}$.

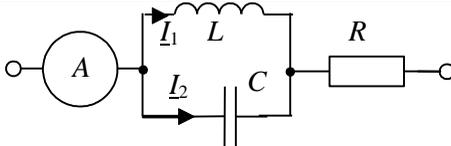
3.13.



Как изменится показание амперметра после размыкания ключа S , если

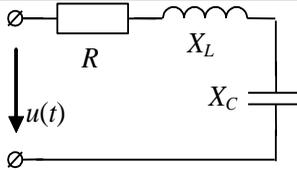
$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

3.14.



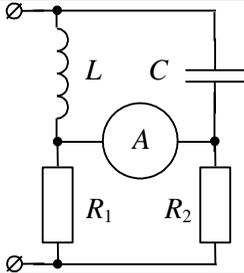
Определить показание амперметра электромагнитной системы. $I_1 = I_2 = 10 \text{ А}$.

3.15.



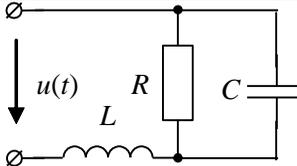
Каким должно быть соотношение между параметрами цепи (R , X_L , X_C) при резонансе, чтобы входное напряжение было больше напряжения на конденсаторе?

3.16.

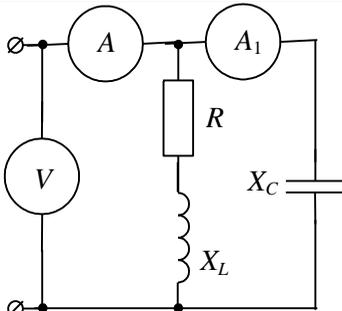


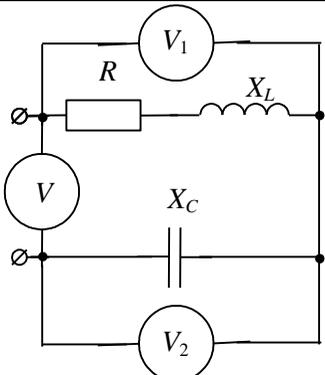
Определить частоту ω_0 и показание амперметра при резонансе. $U = 200 \text{ В}$, $C = 2 \text{ мкФ}$, $L = 20 \text{ мГн}$, $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$.

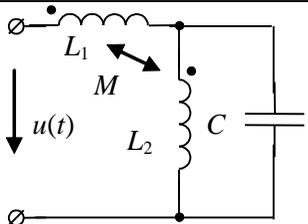
3.17.



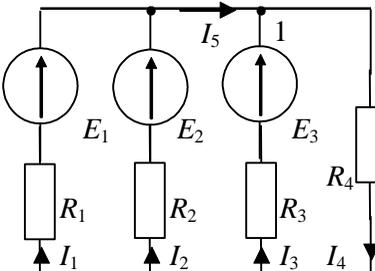
При каком значении сопротивления R на частоте $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$ наступит резонанс? $L = 2 \text{ мГн}$, $C = 5 \text{ мкФ}$.

3.18.  Показания приборов в схеме: $I_A = 5 \text{ A}$; $I_{A1} = 8,67 \text{ A}$; $U_V = 100 \text{ В}$. Определить сопротивление R при резонансе токов.

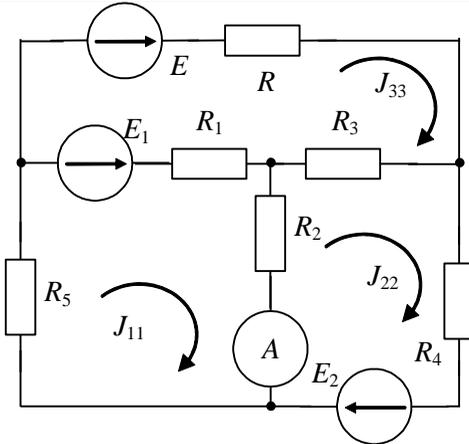
3.19.  Показания приборов в схеме при резонансе: $U_{V1} = 20 \text{ В}$; $U_{V2} = 10 \text{ В}$. Определить U_V и добротность контура.

3.20.  При каком значении емкости C в цепи на частоте $\omega_0 = 10^3 \text{ с}^{-1}$ наступит резонанс напряжений? $k_{CB} = 0,5$; $L_1 = L_2 = 20 \text{ мГн}$.

Тема 4

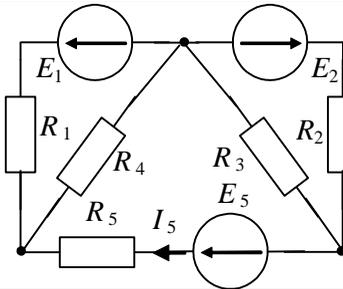
4.1.  Методом узловых потенциалов определить токи в схеме; записать значение потенциала ϕ_1 .
 $E_1 = E_2 = E_3 = 40 \text{ В}$;
 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$.

4.2.



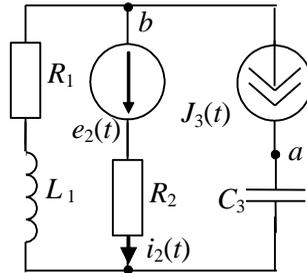
Методом контурных токов определить показание амперметра и контурные токи. Параметры цепи: $E = 90 \text{ В}$; $E_1 = 110 \text{ В}$; $E_2 = 150 \text{ В}$; $R = R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 3 \text{ Ом}$; $R_5 = 7 \text{ Ом}$.

4.3.



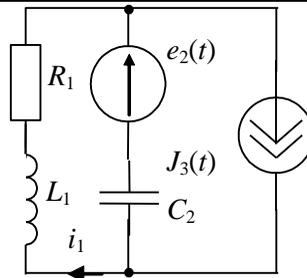
Определить ток I_5 в схеме с параметрами:
 $E_1 = E_3 = 20 \text{ В}$; $E_2 = 10 \text{ В}$;
 $R_1 = R_2 = 20 \text{ Ом}$;
 $R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$;
 $R_5 = 20 \text{ Ом}$; $E_5 = 20 \text{ В}$.

4.4.



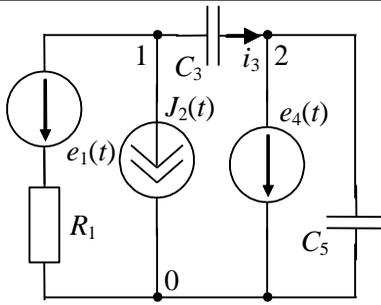
Методом законов Кирхгофа определить ток $i_2(t)$ и напряжение $u_{ab}(t)$ на зажимах источника тока. Параметры цепи:
 $e_2(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ В}$;
 $J_3(t) = 2\sqrt{2} \sin \omega t \text{ А}$;
 $R_1 = R_2 = X_{L1} = X_{C3} = 10 \text{ Ом}$.

4.5.



Методом контурных токов определить ток $i_1(t)$. Параметры цепи: $e_2(t) = 20 \sin \omega t \text{ В}$;
 $J_3(t) = 1 \cos \omega t \text{ А}$;
 $R_1 = X_{L1} = 20 \text{ Ом}$;
 $X_{C2} = 40 \text{ Ом}$.

4.6.



Методом узловых потенциалов рассчитать ток $i_3(t)$ и записать в комплексной форме потенциалы точек 1 и 2. Параметры цепи:

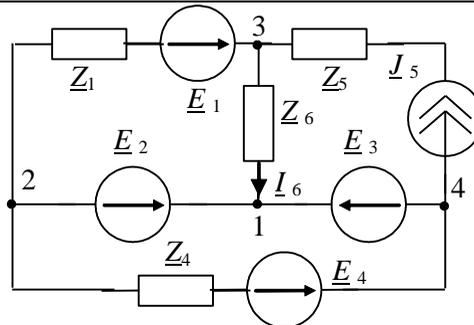
$$e_1(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t \text{ В};$$

$$e_4(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t \text{ В};$$

$$J_2(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А};$$

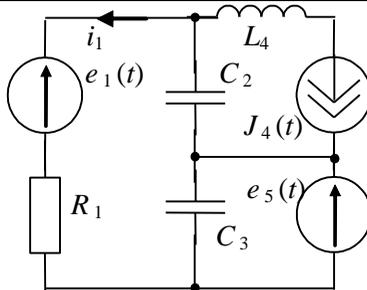
$$R_1 = X_{C3} = X_{C5} = 10 \text{ Ом}.$$

4.7.



Укажите наиболее рациональный способ расчета тока I_6 в комплексной схеме замещения.

4.8.



Определить ток $i_1(t)$ наиболее рациональным методом.

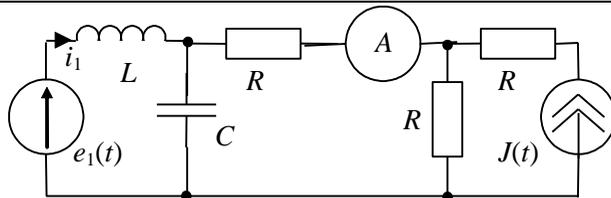
Параметры цепи:
 $R_1 = X_{L1} = X_{C2} = X_{C3} = 10 \text{ Ом};$

$$e_1(t) = 10\sqrt{2}\cos\omega t \text{ В};$$

$$e_5(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t \text{ В};$$

$$J_4(t) = 2\sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А}.$$

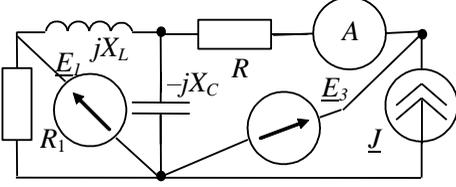
4.9.

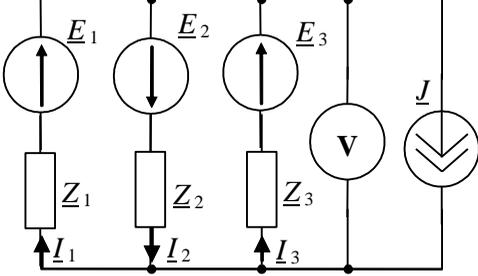


Определить показание амперметра электромагнитной системы. Параметры цепи: $R = X_L = X_C = 10 \text{ Ом};$

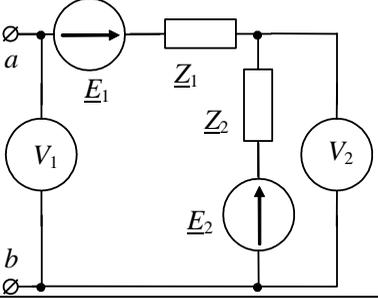
$$e_1(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t \text{ В}; \quad J(t) = \sqrt{2}\cos\omega t \text{ А}.$$

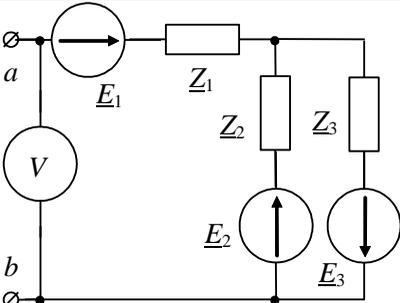
4.10. В схеме задания 4.9 определить ток $i_1(t)$ методом контурных токов.

4.11.  Определить показание амперметра электромагнитной системы. Параметры схемы замещения: $\underline{E}_1 = 10 \text{ В}$;
 $\underline{E}_3 = j10 \text{ В}$; $\underline{J} = 5 \text{ А}$; $R = X_L = 10 \text{ Ом}$; $R_1 = X_C = 5 \text{ Ом}$.

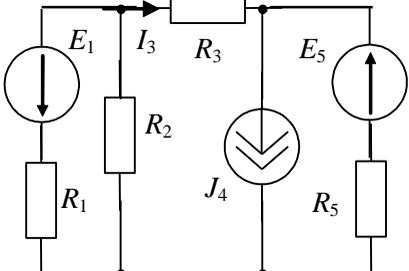
4.12.  Определить показание вольтметра электромагнитной системы методом узловых потенциалов. Параметры схемы замещения: $\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = j10 \text{ В}$;
 $\underline{E}_3 = -j10 \text{ В}$; $\underline{J} = 10 \text{ А}$; $\underline{Z}_1 = 1 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = j \text{ Ом}$; $\underline{Z}_3 = -j \text{ Ом}$.

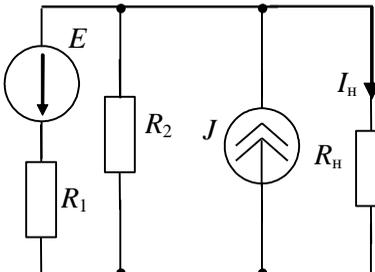
4.13. В схеме задания 4.12 рассчитать комплексы токов ветвей $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

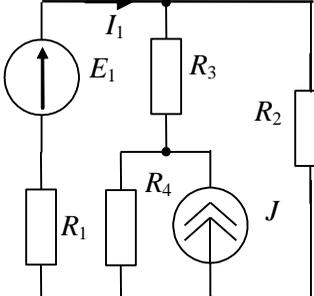
4.14.  Определить показание вольтметров электромагнитной системы и записать величину входного сопротивления схемы \underline{Z}_{ab} . Параметры схемы замещения: $\underline{E}_1 = 100e^{j30^\circ} \text{ В}$; $\underline{E}_2 = 50e^{j60^\circ} \text{ В}$;
 $\underline{Z}_1 = 5 + j10 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = 5 - j5 \text{ Ом}$.

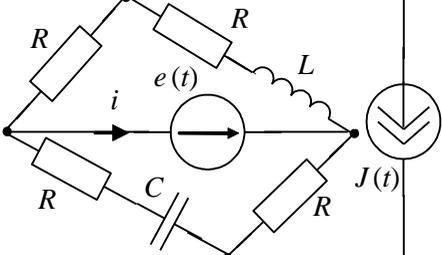
4.15.  Определить \underline{Z}_{ab} и показание вольтметра электромагнитной системы. Параметры схемы замещения: $\underline{E}_1 = 10 \text{ В}$;
 $\underline{E}_2 = j10 \text{ В}$; $\underline{E}_3 = j5 \text{ В}$;
 $\underline{Z}_1 = 1 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = 1 - j \text{ Ом}$;
 $\underline{Z}_3 = 1 + j \text{ Ом}$.

Тема 5

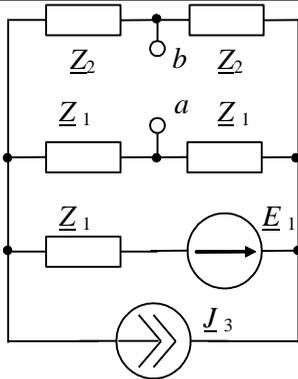
5.1.  Методом эквивалентного генератора определить ток I_3 . Параметры схемы: $E_1 = E_5 = 15 \text{ В}$; $J_4 = 0,3 \text{ А}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = R_5 = 40 \text{ Ом}$; $R_3 = 12 \text{ Ом}$.

5.2.  Определить параметры эквивалентного генератора для определения тока I_H в схеме с параметрами: $E = 10 \text{ В}$; $J = 0,015 \text{ А}$; $R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}$.

5.3.  Методом наложения определить ток I_1 в схеме с параметрами: $E_1 = 30 \text{ В}$; $J = 8 \text{ А}$; $R_1 = R_3 = R_4 = 15 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$.

5.4.  Определить ток в цепи источника ЭДС $i(t)$, если параметры схемы: $1/\omega C = 40 \text{ Ом}$; $\omega L = 80 \text{ Ом}$; $R = 20 \text{ Ом}$; $e(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$; $J(t) = 1 \sin \omega t \text{ А}$.

5.5.

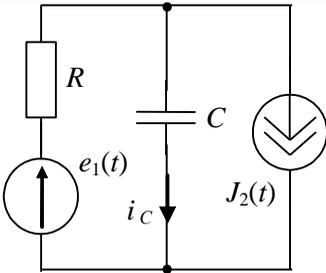


Определить $Z_r = Z_{ab}$ для схемы с параметрами:

$$\underline{Z}_1 = 30e^{j60^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = 10e^{j60^\circ} \text{ Ом}.$$

5.6.



Методом наложения определить ток $i_C(t)$, если:

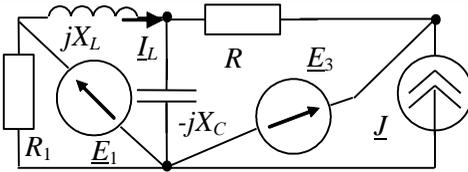
$$R = 20 \text{ Ом}; C = 500 \text{ мкФ};$$

$$e_1(t) = 20\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ) \text{ В};$$

$$J_2(t) = 1 \sin(100t + 90^\circ) \text{ А}.$$

5.7. В схеме задания 5.6 определить ток $i_C(t)$ методом эквивалентного генератора.

5.8.



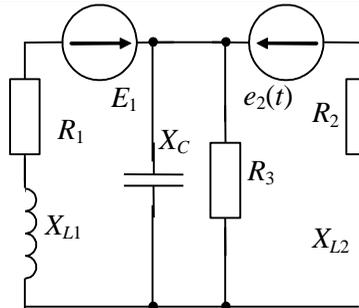
Методом эквивалентного генератора определить ток $i_L(t)$.

$$\underline{E}_1 = 10 \text{ В}; \underline{E}_3 = j10 \text{ В};$$

$$R = X_L = 10 \text{ Ом};$$

$$R_1 = X_C = 5 \text{ Ом}; \underline{J} = 1 \text{ А}.$$

5.9.



Определить ток $i_L(t)$ методом наложения. Параметры схемы:

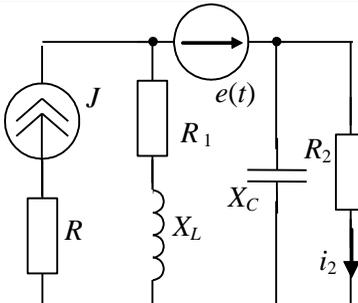
$$R_1 = X_{L1} = 20 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}; X_{L2} = 30 \text{ Ом};$$

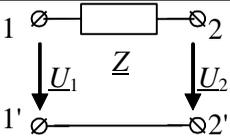
$$R_3 = X_C = 40 \text{ Ом};$$

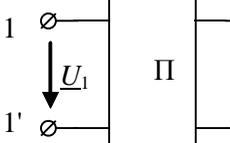
$$E_1 = 56 \text{ В} = \text{const};$$

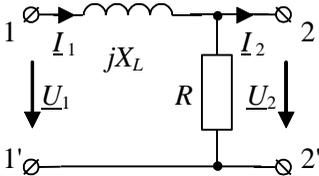
$$e_2(t) = 30\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В}.$$

5.10.  Методом наложения рассчитать ток $i_2(t)$ в схеме с параметрами:
 $R = R_1 = 20 \text{ Ом};$
 $R_2 = X_C = 60 \text{ Ом};$
 $X_L = 30 \text{ Ом};$
 $J = 2 \text{ А} = \text{const};$
 $e(t) = 40\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}.$

Тема 6

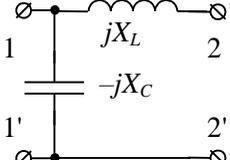
6.1.  Определить А-параметры пассивного четырехполюсника, если комплекс \underline{Z} задан.

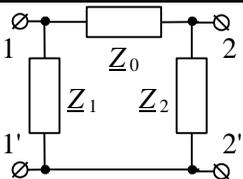
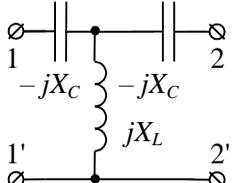
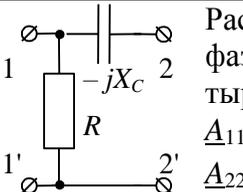
6.2.  Определить А-параметры пассивного симметричного четырехполюсника, если известно, что $\underline{Z}_{1X} = (6 - j2) \text{ Ом}; \underline{Z}_{1K} = (5 - j5) \text{ Ом}.$

6.3.  Записать уравнения несимметричного четырехполюсника через Z-параметры.

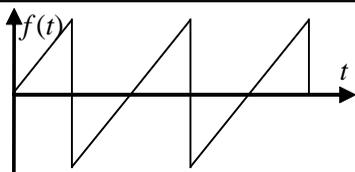
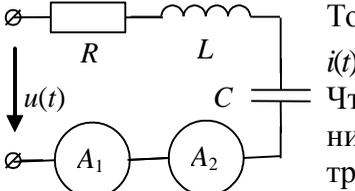
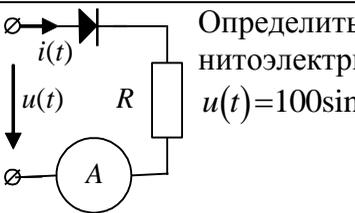
6.4. Для четырехполюсника задания 6.3 рассчитать А-параметры, если $R = X_L = 10 \text{ Ом}.$

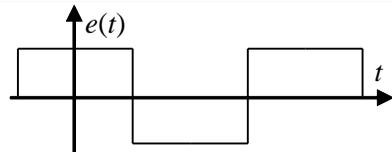
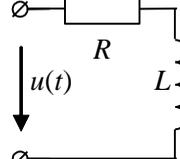
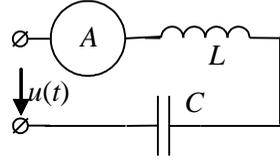
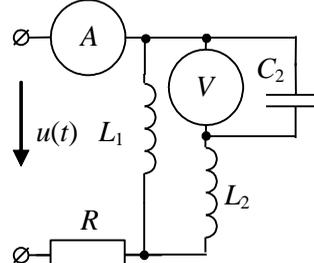
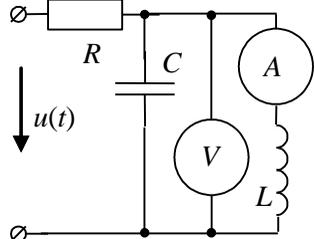
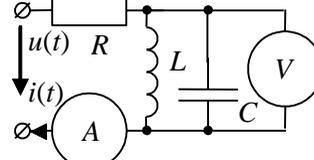
6.5. Симметричный четырехполюсник с параметрами $\underline{A}_{11} = 1 - j; \underline{A}_{12} = -10 - j20; \underline{A}_{21} = 0,1$ заменить эквивалентной схемой Т-образного четырехполюсника и определить значения сопротивлений $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_3.$

6.6.  Записать уравнения несимметричного Г-образного четырехполюсника через Y-параметры, если $X_L = X_C = 10 \text{ Ом}.$
Составить матрицу Y-параметров.

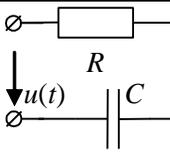
<p>6.7.</p> 	<p>Определить А-параметры \underline{Z}_C и Γ симметричного четырехполюсника, если $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = j10$ Ом; $\underline{Z}_0 = j3$ Ом.</p>
<p>6.8.</p> 	<p>Определить характеристическое сопротивление \underline{Z}_C и коэффициент передачи симметричного четырехполюсника с параметрами: $X_L = 10$ Ом; $X_C = 20$ Ом.</p>
<p>6.9.</p> 	<p>Рассчитать коэффициент затухания и фазовый коэффициент Γ-образного четырехполюсника с постоянными: $\underline{A}_{11} = 1$; $\underline{A}_{12} = -j5$ Ом; $\underline{A}_{21} = 0,2$ См; $\underline{A}_{22} = \sqrt{2} e^{-j45^\circ}$.</p>
<p>6.10. Рассчитать характеристические параметры симметричного четырехполюсника задания 6.7.</p>	

Тема 7

<p>7.1.</p> 	<p>Какие гармоники входят в состав функции $f(t)$?</p>
<p>7.2.</p> 	<p>Ток в цепи изменяется по закону: $i(t) = (5 + 10\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin 3\omega t)$ А. Что покажут амперметры магнитоэлектрической (A_1) и электромагнитной (A_2) систем?</p>
<p>7.3.</p> 	<p>Определить показание амперметра магнитоэлектрической системы, если $u(t) = 100 \sin \omega t$ В, $R = 10$ Ом.</p>

<p>7.4.</p> 	<p>Запишите в общем виде разложение в ряд Фурье функции $e(t)$, учитывая симметрию кривой.</p>
<p>7.5.</p> 	<p>Сопротивление катушки индуктивности для второй гармоники $\underline{Z}^{(2)} = 20\sqrt{2}e^{j45^\circ}$ Ом. Определить сопротивление этой катушки для третьей гармоники.</p>
<p>7.6.</p> 	<p>Найдите показание электромагнитного амперметра, если $\omega L = 10$ Ом; $\frac{1}{\omega C} = 30$ Ом;</p> $u(t) = (100\sqrt{2}\sin\omega t - 100\sqrt{2}\sin(3\omega t + 60^\circ))$ В.
<p>7.7.</p> 	<p>Определить показания приборов электродинамической системы I_A и U_V, если $u(t) = 9 + 12\cos 3\omega t$ В; $R = 3$ Ом; $X_{L1} = 2$ Ом; $X_{L2} = 5$ Ом; $X_{C2} = 45$ Ом.</p>
<p>7.8.</p> 	<p>Определить показания приборов электромагнитной системы I_A и U_V, если $u(t) = 18 + 24\cos 3\omega t$ В; $R = 6$ Ом; $X_L = 5$ Ом; $X_C = 45$ Ом.</p>
<p>7.9.</p> 	<p>Определить ток $i(t)$, показания вольтметра электромагнитной и амперметра – магнитоэлектрической системы.</p> <p>$R = 10$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $C = 1$ мФ;</p> $u(t) = (20 + 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ) + 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ))$ В.

7.10.

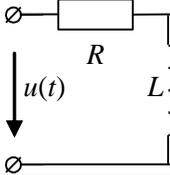


Определить активную мощность, выделяемую в цепь, если дано:

$$u(t) = (100\sqrt{2}\sin\omega t + 20\sqrt{2}\sin 3\omega t) \text{ В};$$

$$R = 10 \text{ Ом}; \quad \frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом}.$$

7.11.

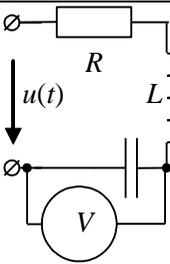


Определить активную и полную мощности в цепи, если дано:

$$u(t) = (80 + 100\sqrt{2}\sin 2\omega t) \text{ В};$$

$$R = 20 \text{ Ом}; \quad \omega L = 10 \text{ Ом}.$$

7.12.

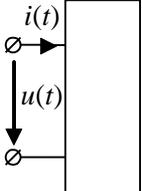


$$u(t) = (100 + 50\sqrt{2}\sin\omega t) \text{ В};$$

$$2\omega L = \frac{1}{\omega C} = R = 10 \text{ Ом}.$$

Как изменится показание вольтметра магнитоэлектрической системы, если индуктивность увеличить в два раза?

7.13.

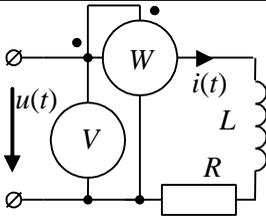


Для пассивного двухполюсника определить мощности P , Q , S и мощность искажения T , если дано:

$$u(t) = (20 + 15\sqrt{2}\sin\omega t + 5\sqrt{2}\sin 3\omega t) \text{ В};$$

$$i(t) = (2 + 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ) + \sqrt{2}\sin(3\omega t + 30^\circ)) \text{ А}.$$

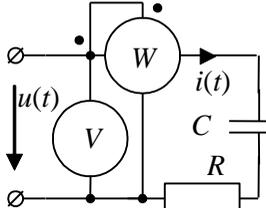
7.14.



Показания вольтметра и амперметра электродинамической системы $P_W = 116 \text{ Вт}$ и $U_V = 50 \text{ В}$.

Ток $i(t) = (4 + 8\sin\omega t + 4\sin 2\omega t + 2\sin 3\omega t) \text{ А};$
 $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$. Определить параметры катушки индуктивности R и L .

7.15.

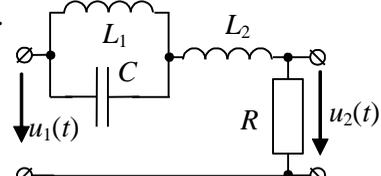


Дано: $P_W = 50 \text{ Вт};$

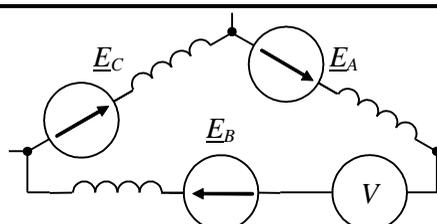
$$U_V = 50 \text{ В}; \quad \omega = 314 \text{ с}^{-1};$$

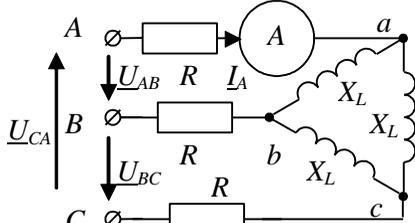
$$i(t) = (2\sin\omega t + \sin 3\omega t) \text{ А}.$$

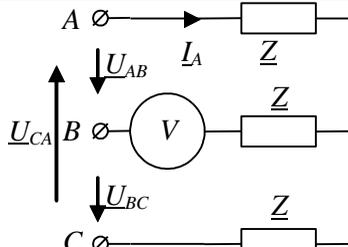
Определить R и C .

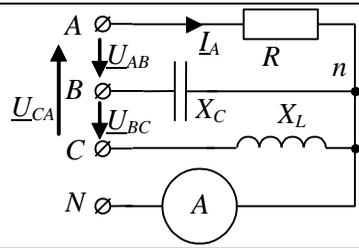
7.16.  Определить значения L_1 и L_2 , если $C_1 = 200 \text{ мкФ}$;
 $u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t + U_{2m} \sin 2\omega t$;
 $u_2(t) = U_{2m} \sin \omega t$;
 $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$.

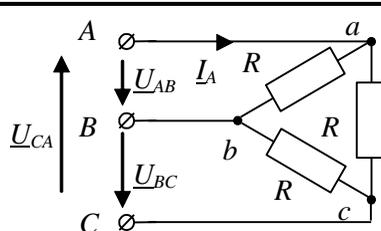
Тема 8

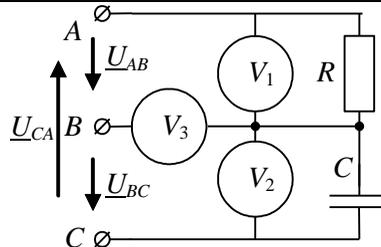
8.1.  Что покажет вольтметр электродинамической системы, включенный в разрыв обмотки трехфазного генератора, соединенного треугольником?
 В фазах генератора – симметричная система ЭДС.

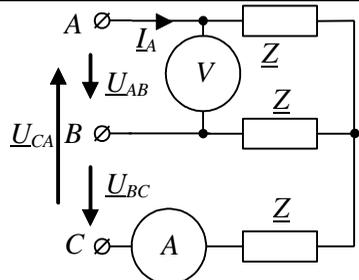
8.2.  Определить линейный ток I_A , измеряемый электромагнитным амперметром, если линейное напряжение $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$;
 $R = X_L = 60 \text{ Ом}$.

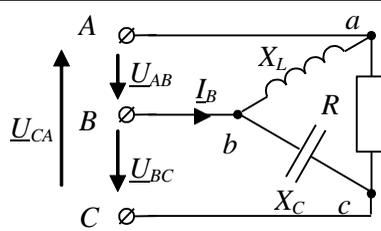
8.3.  Что покажет вольтметр электромагнитной системы, если линейное напряжение генератора $U_{\text{Л}} = U$?

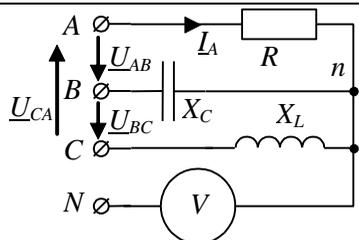
8.4.  Определить ток в нулевом проводе, если линейное напряжение генератора $U_{Л} = 120$ В, а сопротивления $R = X_L = X_C = 10$ кОм.

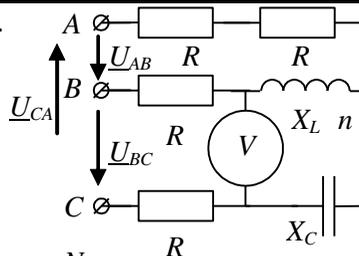
8.5.  Определить модуль тока I_A при обрыве линейного провода B, если известны значения фазного напряжения генератора $U_{\Phi} = 100$ В и сопротивления $R = 100$ Ом.

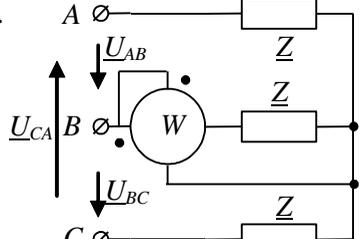
8.6.  Определить показание вольтметра V_3 , если $U_{V_1} = 127$ В, $U_{V_2} = 220$ В.

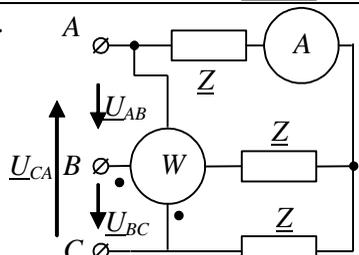
8.7.  В симметричной трехфазной цепи сопротивления нагрузки $Z = (20 + j20)$ Ом соединены в звезду, линейное напряжение $U_{AB} = U_V = 220$ В. Что покажет амперметр, включенный в фазу C?

8.8.  Определить величину тока I_B , если модули токов в фазах треугольника $I_{\Phi} = 1$ А.

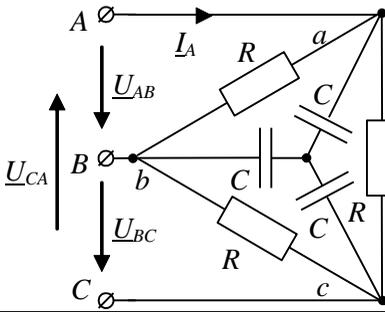
8.9.  Определить показание вольтметра в несимметричной трехфазной цепи с соединением звезда – звезда с нулевым проводом, если фазное напряжение генератора $U_{\phi} = 120 \text{ В}$,
 $R = X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$.

8.10.  Трехфазная цепь с параметрами $R = X_L = X_C$ подключена к сети с фазным напряжением 220 В. Определить показание вольтметра.

8.11.  Определить мощность, которую покажет электродинамический ваттметр, включенный в трехфазную цепь с линейным напряжением $U_{л} = 220 \text{ В}$ и сопротивлениями $\underline{Z} = (20 - j20) \text{ Ом}$.

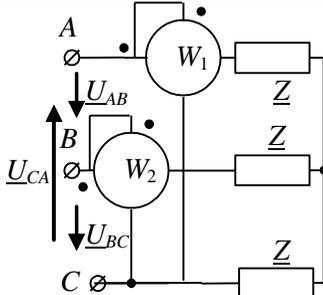
8.12.  Определить показание ваттметра электродинамической системы и реактивную мощность трехфазной цепи, если $I_A = 4,4 \text{ А}$,
 $\underline{Z} = 50e^{-j80^\circ} \text{ Ом}$.

8.13.



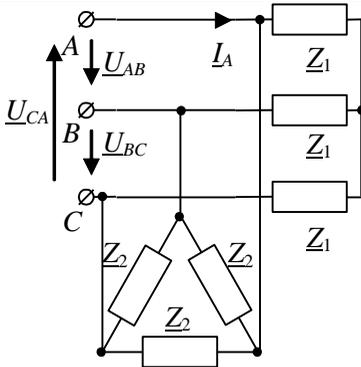
Фазные токи в симметричной трехфазной цепи равны $I_R = I_C = 2$ А.
 Определить модули линейных токов.

8.14.

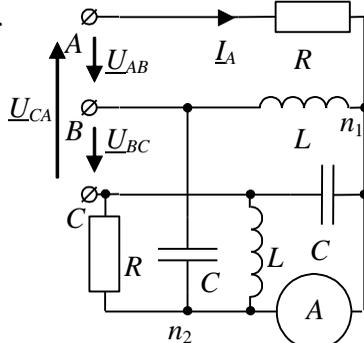


Определить параметры симметричной трехфазной нагрузки X_L и R , если известны показания ваттметров: $P_{W1} = 400$ Вт; $P_{W2} = 200$ Вт.

8.15.



Определить линейный ток I_A , если мощность, потребляемая звездой сопротивлений нагрузки Z_1 , $P_{Z1} = 3,3$ кВт, а треугольником сопротивлений Z_2 — $P_{Z2} = 2,15$ кВт. Линейное напряжение $U_{AB} = 220$ В. Характер нагрузок Z_1 и Z_2 активно-индуктивный ($\cos \varphi_1 = 0,867$, $\cos \varphi_2 = 0,707$).

8.16. 

Дано: линейное напряжение $U_{\text{Л}} = 100 \text{ В}$;
 $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10 \text{ Ом}$.
 Что покажет амперметр, включенный между нулевыми точками двух звезд нагрузки?

Тема 9

9.1. Определить длину волны, если известны параметры кабельной линии: $R_0 = 1 \text{ Ом/км}$; $\omega C_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ См/км}$; $L_0 = 0$; $G_0 = 0$.

9.2. Параметры кабельной линии: $R_0 = 1 \text{ Ом/км}$; $C_0 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км}$; $L_0 = 0$; $G_0 = 0$. Определить фазовую скорость распространения волны вдоль линии при частоте $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

9.3. Длинная линия с первичными параметрами $R_0 = 22 \text{ Ом/км}$; $C_0 = 7,8 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$; $L_0 = 8,4 \text{ мГн/км}$; $G_0 = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ См/км}$ работает на частоте $f = 600 \text{ Гц}$. Определить вторичные параметры \underline{Z}_C , $\underline{\gamma}$, α , β .

9.4. Телефонная линия характеризуется параметрами: $R_0 = 5,5 \text{ Ом/км}$; $C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$; $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$; $G_0 = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$. Какие индуктивности L_1 на каждый километр длины нужно включить, чтобы линия стала неискажающей?

9.5. Параметры двух линий:
 $\underline{Z}_{C1} = 100 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{C2} = 200e^{j30^\circ} \text{ Ом}$. Напряжение падаю-

шей волны $\underline{U}_{\Pi} = 5e^{j60}$ кВ. Определить напряжение волны, отраженной от места стыка линий.

9.6. Линия без потерь работает в режиме короткого замыкания на конце линии на частоте $f = 1000$ Гц. Длина линии $l = \lambda/3$. Параметры: $L_0 = 0,2$ мГн/км; $C_0 = 10^{-8}$ Ф/км. Определить входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{ВХКЗ}}$.

9.7. Для линии длиной $l = 5$ км на частоте $f = 1000$ Гц известны сопротивления $\underline{Z}_{\text{ВХХ}} = 500e^{-j60}$ Ом и $\underline{Z}_{\text{ВХК}} = 460e^{-j20}$ Ом. Определить волновое сопротивление \underline{Z}_B и коэффициент распространения $\underline{\gamma}$.

9.8. Длинная линия с параметрами $\underline{Z}_B = 500e^{-j37}$ Ом и $\underline{\gamma} = 0,2e^{-j45}$ км⁻¹ короткозамкнута на конце и присоединена к источнику синусоидального напряжения с частотой $f = 1000$ Гц. Длина линии $l = 5$ км. Определить ток и напряжение в начале линии, если ток в конце линии $\underline{I}_2 = 2$ А.

9.9. Длинная линия замкнута на активное сопротивление $\underline{Z}_2 = 200$ Ом. Определить напряжение \underline{U}_1 на входе линии, если по нагрузке протекает ток $\underline{I}_2 = 1,5$ А, а $f = 1000$ Гц. Параметры линии: $\underline{Z}_B = 500e^{-j37}$ Ом; $\underline{\gamma} = (0,1414 + j0,1414)$ км⁻¹. Длина линии $l = 5$ км.

9.10. Для линии задания 9.9 определить входной ток \underline{I}_1 , если линия нагружена на сопротивление $\underline{Z}_2 = 200$ Ом, а по нагрузке протекает ток $\underline{I}_2 = 2$ А при частоте $f = 1000$ Гц.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Ответы на вопросы для самоконтроля

Тема 1

- 1.1. Источники и приемники.
- 1.2. Компоненты, ветви, узлы.
- 1.3. Последовательное, параллельное, смешанное.
- 1.4. R и G , L и C , E и J .
- 1.5. Линейные алгебраические.
- 1.6. Линейные дифференциальные.
- 1.7. Компоненты реальные, а не идеализированные.
- 1.8. Активные и пассивные.
- 1.9. Заряд q и напряжение u_C .
- 1.10. Индуктивность L и ток i_L .
- 1.11. Прямая, параллельная оси тока.
- 1.12. Прямая, параллельная оси напряжения.
- 1.13. Компонентные и топологические.
- 1.14. Количество ветвей схемы, связь между током и напряжением каждой ветви.
- 1.15. Топологические.
- 1.16. Линейные статические и линейные инерционные.
- 1.17. Нелинейные алгебраические или дифференциальные.
- 1.18. Топологические, энергетические, физические.
- 1.19. Линейный закон $-u_C = kt$.
- 1.20. Линейный закон $-i_L = kt$.

Тема 2

- 2.1. $A_{CP} = 0,637A_m$;
 $A = 0,707A_m$.
- 2.2. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная.
- 2.3. $A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$;
 $\phi = \arctg \frac{A''}{A'}$.
- 2.4. $A' = A \cos \phi$; $A'' = A \sin \phi$.
- 2.5. $\underline{A}_m(t) = A_m e^{j(\omega t + \phi)}$.
- 2.6. $\underline{I}_m = 2\sqrt{2}e^{j45^\circ}$ А.
- 2.7. $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}e^{j90^\circ}$ В.
- 2.8. Умножению комплекса на $j\omega$, делению комплекса на $j\omega$.
- 2.9. $u_L = L \frac{di}{dt} \cdot = j\omega L \underline{I}_{Lm}$;
 $u_C = \frac{1}{C} \int i dt \cdot = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_{Cm}$.
- 2.10. $\underline{Z} = 30e^{-j45^\circ}$ Ом.

$$2.11. u(t) = 50\sqrt{2}\sin(\omega t + 143,1^\circ) \text{ В.}$$

$$2.12. \underline{Z} = 480e^{-j45^\circ} \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$P_{\text{И}} = 240\sqrt{2} \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{И}} = -240\sqrt{2} \text{ вар.}$$

$$2.13. R.$$

$$2.14.$$

$$i_c(t) = 5\sqrt{2}\sin(100t - 45^\circ) \text{ мА.}$$

$$2.15.$$

$$u_k(t) = 50\sqrt{2}\sin(100t + 135^\circ) \text{ В.}$$

$$2.16. i(t) = 2\sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А.}$$

$$2.17. R_{\text{Э}} = \sum R_k; L_{\text{Э}} = \sum L_k$$

$$\text{и } \frac{1}{C_{\text{Э}}} = \sum \frac{1}{C_k}.$$

2.18. M измеряется в Гн, $k_{\text{СВ}}$ – безразмерная величина.

$$2.19. L_{\text{сорт}} = L_1 + L_2 + 2M;$$

$$L_{\text{встр}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

$$2.20. k_{\text{СВ}} = 0,8.$$

$$2.21. \underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1.$$

$$2.22.$$

$$\underline{S}_M = j2\omega M \underline{I}_1 \underline{I}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

2.23. Подключением одноименных зажимов к общему узлу.

$$2.24. \underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 + jX_M;$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 + jX_M;$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_3 - jX_M.$$

2.25. Не изменится.

Тема 3

3.1. Зависимость модуля величины от частоты.

3.2. Показательная и алгебраическая.

3.3. Зависимость фазы от частоты.

$$3.4. \text{В } \sqrt{2} \cong 1,41 \text{ раз.}$$

3.5. При последовательном.

3.6. Резонанс токов.

$$3.7. u_L = u_C > u_{\text{ВХ}}.$$

$$3.8. I_L = I_C < I_{\text{ВХ}}.$$

$$3.9. X_L = X_C \text{ или}$$

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C.$$

$$3.10. \omega_0 C = \frac{\omega_0 L_k}{R_k^2 + (\omega_0 L_k)^2}.$$

$$3.11. Z = R.$$

$$3.12. \rho = \sqrt{L/C}.$$

$$3.13. S = P; Q_L = Q_C;$$

$$Q = Q_L - Q_C = 0.$$

$$3.14. \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL_k} - \left(\frac{R_k}{L_k}\right)^2}.$$

3.15. Развязку индуктивной связи.

Тема 4

- 4.1. $n - 1$ уравнений – по первому и $m - (n - 1)$ уравнений – по второму закону Кирхгофа.
4.2. Законы Кирхгофа.
4.3. Нет.
4.4. $n - 1$ узловых уравнений.
4.5. Как алгебраическую сумму соответствующих контурных токов.
4.6. По закону Ома.
4.7. По числу источников питания в схеме.
4.8. Источники ЭДС закорачивают, ветви с источниками тока размыкают.

$$4.9. \quad \underline{I}_H = \frac{\underline{E}_\Gamma}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_\Gamma};$$
$$\underline{I}_H = \underline{I}_{\text{кз}} / (1 + \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_\Gamma}).$$

- 4.10. На основе режима холостого хода или короткого замыкания.
4.11. Закорочены источники ЭДС, отключены источники тока и нагрузка.
4.12. Принцип наложения (суперпозиции).
4.13. Число независимых контуров схемы.
4.14. Дополнительным напряжением на сопротивлениях контура за счет токов источников тока.

Тема 5

$$5.1. \quad \underline{I}_a = \frac{\underline{E}_\mathcal{E}}{\underline{Z}_\mathcal{E} + \underline{Z}_a}$$

- 5.2. Количеству источников ЭДС и тока. Ветви с источниками ЭДС закорачиваются, тока – размыкаются.

Тема 6

- 6.1. Три.
6.2. Два.
6.3. $\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1$.
6.4. Три.
6.5. Неавтономные.
6.6. Y.

- 6.7. Z.
6.8. \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} – безразмерные величины; \underline{A}_{12} измеряют в омах, \underline{A}_{21} – в сименсах.
6.9. Выполняется принцип взаимности.

6.10. Поменять местами входные и выходные зажимы.

6.11. \underline{Y}_{11} – комплексная входная проводимость, \underline{A}_{11} – комплексный коэффициент передачи по напряжению.

6.12. Три.

$$6.13. \underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} \underline{A}_{21}}};$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} \underline{A}_{21}}}.$$

$$6.14. \alpha = \ln(\underline{U}_1 / \underline{U}_2) = \ln(\underline{I}_1 / \underline{I}_2);$$

$$\beta = \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \psi_{I_1} - \psi_{I_2}.$$

$$6.15. \underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C;$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_K = \underline{Z}_X.$$

6.16. Полоса пропускания (прозрачности) и полоса затухания.

6.17. ФНЧ, ФВЧ, ПФ, ЗФ.

6.18. Полоса пропускания ФНЧ – от $\omega_1 = 0$ до ω_2 ,
ФВЧ – от ω_1 до ∞ .

6.19. Полоса пропускания ПФ – от ω_1 до ω_2 .

6.20. Полоса затухания ЗФ – от ω_1 до ω_2 .

Тема 7

$$7.1. E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt.$$

$$7.2. E_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2};$$
$$\psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}.$$

7.3. Метод наложения.

$$7.4. \underline{Z}_k = R + j\omega k L - j \frac{1}{\omega k C}.$$

$$7.5. I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2 + I_{m2}^2}{2}} =$$
$$= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}.$$

$$7.6. P = U_0 I_0 +$$
$$+ U_1 I_1 \cos(\psi_{u_1} - \psi_{i_1}) +$$
$$+ U_3 I_3 \cos(\psi_{u_3} - \psi_{i_3}).$$

7.7. Индуктивность сглаживает кривую тока, а емкость искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

$$7.8. a(t) = A_0 + B_{1m} \sin \omega t +$$
$$+ B_{2m} \sin 2\omega t + C_{1m} \cos \omega t +$$
$$+ C_{2m} \cos 2\omega t.$$

$$7.9. B_{1m} = A_{1m} \cos \phi_1;$$
$$B_{2m} = A_{2m} \cos \phi_2;$$
$$C_{1m} = A_{1m} \sin \phi_1;$$
$$C_{2m} = A_{1m} \cos \phi_2.$$

7.10. P – активная, Q – реактивная, S – полная мощности;
 T – мощность искажения

$$7.11. T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

$$7.12. S =$$

$$= \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2)(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2)}.$$

$$7.13. \text{Нет.}$$

$$7.14. \text{Нет.}$$

$$7.15. \phi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}.$$

Тема 8

$$8.1. \psi_B = -\frac{2\pi}{3}; \psi_C = \frac{2\pi}{3}.$$

8.2. Звезда – звезда, звезда – треугольник, треугольник – треугольник, треугольник – звезда.

8.3. Нулевой.

8.4. Линейное напряжение. Фазное напряжение.

$$8.5. \underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

$$8.6. \underline{U}_{\text{Л}} = \sqrt{3}U_{\Phi}; \underline{I}_{\text{Л}} = I_{\Phi}.$$

$$8.7. \underline{I}_{\text{Л}} = \sqrt{3}I_{\Phi}; \underline{U}_{\text{Л}} = U_{\Phi}.$$

$$8.8. \underline{U}_{AB} = U_{\text{Л}}; \underline{U}_{BC} = a^2 U_{\text{Л}};$$

$$\underline{U}_{CA} = a U_{\text{Л}};$$

$$\underline{U}_A = U_{\text{Л}} e^{-j30^\circ} / \sqrt{3};$$

$$\underline{U}_B = a^2 \underline{U}_A; \underline{U}_C = a \underline{U}_A.$$

$$8.9. \underline{U}_A = I_{\text{Л}}; \underline{U}_B = a^2 I_{\text{Л}};$$

$$\underline{U}_C = a I_{\text{Л}}; \underline{I}_{ab} = I_{\text{Л}} e^{-j30^\circ} / \sqrt{3};$$

$$\underline{U}_{bc} = a^2 \underline{I}_{ab}; \underline{U}_{ca} = a \underline{I}_{ab}.$$

8.10. Метод узловых потенциалов.

$$8.11. P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \phi_{\Phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \phi_{\Phi}.$$

$$8.12. Q = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \phi_{\Phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \phi_{\Phi}.$$

8.13. Активную и реактивную.

$$8.14. P_W = \text{Re} \left(\underline{U}_{AB} \underline{I}_A^* \right).$$

$$8.15. P = P_{W_1} + P_{W_2}.$$

Тема 9

9.1. L_0 , C_0 , R_0 и G_0 .

9.2. $i(x,t)$, $u(x,t)$.

$$9.3. -\frac{dU}{dx} = \underline{Z}_0 I; -\frac{dI}{dx} = \underline{Y}_0 U.$$

$$9.4. -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$9.5. \underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} ;$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} .$$

$$9.6. c = v_\Phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} .$$

9.7. Падающие волны тока и напряжения.

9.8. Вся энергия падающей волны потребляется нагрузкой.

9.9. При согласованной нагрузке.

9.10.

$$\underline{U} = \underline{U}_2 (\text{ch} \underline{\gamma} x + \text{sh} \underline{\gamma} x) = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} x} ;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 (\text{sh} \underline{\gamma} x + \text{ch} \underline{\gamma} x) = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma} x} .$$

$$9.11. \lambda = \frac{2\pi}{\beta} .$$

$$9.12. \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = k .$$

9.13.

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 \underline{Z}_C \sin \beta x ;$$

$$\underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x .$$

$$9.14. \alpha = k \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0} ;$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} ;$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{L_0 / C_0} .$$

9.15. При холостом ходе, коротком замыкании или чисто реактивной нагрузке.

9.16. Нет.

$$9.17. \begin{array}{c} L \\ \text{---} \end{array}$$

9.18.

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \text{sh} \underline{\gamma} x ;$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \text{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} x .$$

$$9.19. k_u = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C} .$$

$$9.20. \eta = \frac{P_1}{P_2} = e^{2\alpha l} .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Ответы на контрольные задания

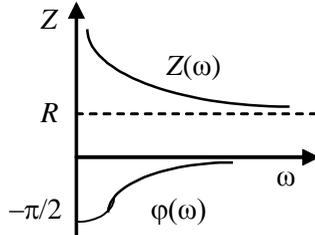
Тема 2

- 2.1. $T = 0,0125$ с.
2.2. $R_3 = 30$ Ом; $L_3 = 0,9$ Гн.
2.3. $U_{C2} = 2U_{C1}$.
2.4. $C_3 = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$.
2.5. $u(t) = 160\sin(\omega t - 83,1^\circ)$ В.
2.6. $u(t) = 240\sqrt{2}\sin(\omega t + 195^\circ)$ В.
2.7. $U_{V2} = 40$ В.
2.8. $U_V = 80$ В.
2.9. $R_k = 10$ Ом; $L_k = 123,5$ мГн.
2.10. $I_A = 2\sqrt{2}$ А.
2.11. $R = 5$ Ом; $X = 0$.
2.12. $Z = 10 + j5 = 11,2e^{j63,5^\circ}$ Ом.
2.13. $g = b_L = 0,025$ См.
2.14. $\underline{U}_{mab} = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$ В.
2.15. $P_W = 1000$ Вт.
2.16. $P_W = 500$ Вт.
2.17. $I_A = 10$;
 $i(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 53^\circ)$ А.
2.18. $U_{R1} = 120$ В.
2.19. $L_3 = 0$.
2.20. $L_3 = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$.
2.21. $U_V = 10\sqrt{2}$ В.
2.22. Увеличится в $\sqrt{2}$ раз.
2.23. $U_V = 45$ В.
2.24. Не изменится.
2.25. Возрастет в два раза.

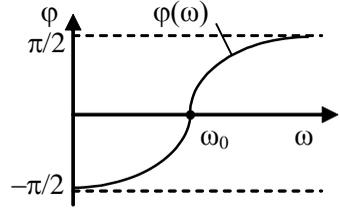
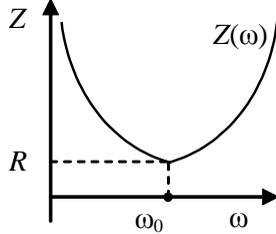
Тема 3

- 3.1. $\underline{Z}(\omega) = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ – АЧХ;
 $\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \frac{\omega L}{R}$ – ФЧХ.
3.2. $\underline{k}_i(j\omega) = \frac{R\omega C}{R\omega C - j}$.
3.3. $\underline{k}_i(\omega) = \frac{R\omega C}{\sqrt{(R\omega C)^2 + 1}}$ – АЧХ;
 $\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \frac{1}{R\omega C}$ – ФЧХ.
3.4. $\underline{k}_u(j\omega) = \frac{j\omega LR_2}{R_1R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}$
3.5. АЧХ – $k_u(\omega) = \frac{\omega LR_2}{\sqrt{(R_1R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2}}$;
ФЧХ – $\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \frac{\omega L(R_1 + R_2)}{R_1R_2}$.

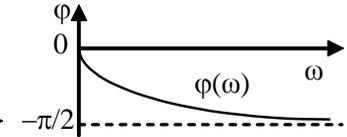
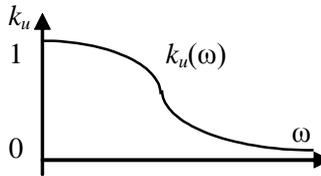
3.6.



3.7.



3.8.



3.9. $X_1 = 10 \text{ Ом}$.

3.10. $X_2 = 10 \text{ Ом}$.

3.11. $f_0 = 100 \text{ Гц}$.

3.12. $Z_{\text{BX}} = 20\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}$.

3.13. Увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

3.14. $I_A = 0$.

3.15. $R > X_L; R > X_C$.

3.16. $\omega_0 = 5000 \text{ с}^{-1}; I_A = 2 \text{ А}$.

3.17. $R = \infty$.

3.18. $R = 5 \text{ Ом}$.

3.19. $U_V = 10\sqrt{3} \text{ В}; Q = 1/\sqrt{3}$.

3.20. $C = 200 \text{ мкФ}$.

Тема 4

4.1. $I_1 = I_2 = I_3 = 5 \text{ А}$;

$I_4 = 15 \text{ А}; I_5 = 10 \text{ А}; \varphi_1 = 30^\circ \text{ В}$.

4.2. $J_{11} = 10 \text{ А}; J_{22} = 5 \text{ А};$

$J_{33} = 4 \text{ А}; I_A = 5 \text{ А}$.

4.3. $I_5 = 0,5 \text{ А}$.

4.4. $i_2(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t - 180^\circ) \text{ А};$

$u_{ab}(t) = 20 \sin(\omega t - 450^\circ) \text{ В}$.

4.5. $i_1(t) = 0,5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А}$.

4.6. $i_3(t) = 1,59\sqrt{2} \sin(\omega t - 18,5^\circ) \text{ А}$.

4.7. Метод узловых потенциалов.

4.8. $i_1 = 0$.

4.9. $I_A = 1 \text{ А}$.

$$4.10. i_1(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A.}$$

$$4.11. I_A = 1 \text{ A.}$$

$$4.12. U_V(t) = 10 \sqrt{2} \text{ B.}$$

$$4.13. I_1 = -10 \text{ A;}$$

$$I_2 = I_3 = 22,4e^{-j26,5^\circ} \text{ A.}$$

$$4.14. U_{V1} = 59 \text{ B; } U_{V2} = 50 \text{ B;}$$

$$\underline{Z}_{ab} = 11,2e^{j26,5^\circ} \text{ Ом.}$$

$$4.15. U_V = 17,6 \text{ B;}$$

$$\underline{Z}_{ab} = 11,2e^{j26,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Тема 5

$$5.1. I_3 = -0,25 \text{ A.}$$

$$5.2. E_\Gamma = -3,5 \text{ B; } R_\Gamma = 100 \text{ Ом.}$$

$$5.3. I_1 = -1 \text{ A.}$$

$$5.4. i(t) = 2,25 \sin(\omega t + 20,9^\circ) \text{ A.}$$

$$5.5. \underline{Z}_\Gamma = 20e^{j60^\circ} \text{ Ом.}$$

$$5.6. i_C(t) = \\ = 1,6 \sin(100t + 108,5^\circ) \text{ A.}$$

$$5.7. i_C(t) =$$

$$= 1,59 \sin(100t + 108,5^\circ) \text{ A.}$$

$$5.8. i_L(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ A.}$$

$$5.9. i_2(t) =$$

$$= 1,6 \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ A.}$$

$$5.10. i_2(t) =$$

$$= 0,5 + 0,8 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A.}$$

Тема 6

$$6.1. \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}; \underline{A}_{21} = 0.$$

$$6.2. \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ};$$

$$\underline{A}_{12} = -j10 \text{ Ом;}$$

$$\underline{A}_{21} = (0,2 - j0,1) \text{ См.}$$

$$6.3. \underline{Z} = \begin{bmatrix} R + jX_L & -R \\ R & -R \end{bmatrix}.$$

$$6.4. \underline{A}_{11} = \sqrt{2}e^{j45^\circ}; \underline{A}_{22} = 1;$$

$$\underline{A}_{12} = j10 \text{ Ом; } \underline{A}_{21} = 0,1 \text{ См.}$$

$$6.5. \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = -j10 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_3 = 10 \text{ Ом.}$$

$$6.6. \underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & j0,1 \\ -j0,1 & j0,1 \end{bmatrix}.$$

$$6.7. \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1,3;$$

$$\underline{A}_{12} = j3 \text{ Ом; } \underline{A}_{21} = -j0,23 \text{ См.}$$

$$6.8. \underline{Z}_C = 0; \underline{\Gamma} = 0 + j\pi;$$

$$\alpha = 0; \beta = \pi.$$

$$6.9. \alpha = 0,599 \text{ Нп; } \beta = 0,135.$$

$$6.10. \underline{Z}_C = 3,6 \text{ Ом;}$$

$$\alpha = 0,756 \text{ Нп; } \beta = 0.$$

Тема 7

7.1. Четные и нечетные синусные составляющие.

$$7.2. I_{A1} = 5 \text{ A; } I_{A2} = 12,25 \text{ A}$$

$$7.3. I_A = 18,5 \text{ A}$$

$$7.4. e(t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} E_{km} \cos k\omega t.$$

$$7.5. \underline{Z}^{(3)} = 36e^{j56,3^\circ} \text{ Ом.}$$

- 7.6. $I_A = 5\sqrt{2}$ А.
 7.7. $I_A = 4,12$ А; $U_V = 42,6$ В.
 7.8. $I_A = 3,2$ А; $U_V = 17$ В.
 7.9. $i(t) = [2 + 1,67\sqrt{2} \sin(200t - 78,6^\circ)]$ А;
 $I_A = 2$ А; $U_V = 100,6$ В.
 7.10. $P = 120$ Вт.

- 7.11. $S = 604$ ВА; $P = 570$ Вт.
 7.12. Не изменится.
 7.13. $P = 60$ Вт; $Q = 28,5$ вар;
 $S = 76,5$ ВА; $T = 37,6$ ВА;
 7.14. $R = 2$ Ом; $L = 0,106$ Гн.
 7.15. $R = 20$ Ом; $C = 118$ мкФ.
 7.16. $L_1 = 0,5$ Гн; $L_2 = 0,17$ Гн.

Тема 8

- 8.1. $U_V = 0$.
 8.2. $I_A = 2$ А
 8.3. $U_V = \frac{\sqrt{3}}{2}U$.
 8.4. $I_A = 32,8$ мА
 8.5. $I_A = 2,6$ А
 8.6. $U_{V3} = 127$ В.
 8.7. $I_A = 4,5$ А
 8.8. $I_B = 1,73$ А

- 8.9. $U_V = 330$ В.
 8.10. $U_V = 213$ В.
 8.11. $P_W = 405$ Вт.
 8.12. $P_W = -1280$ Вт;
 $Q = -2220$ вар.
 8.13. $I_{II} = 4$ А
 8.14. $R = 60$ Ом; $X_L = 35$ Ом.
 8.15. $I_A = 17,8 e^{-j66,5^\circ}$ А
 8.16. $I_A = 10$ А

Тема 9

- 9.1. $\lambda = 443$ км.
 9.2. $v_\Phi = 70700$ км/с.
 9.3. $Z_C = 1140 e^{-j12,5^\circ}$ Ом.
 9.4. $L_1 = 64 \cdot 10^{-3}$ Гн/км.
 9.5. $U_{OTPI} = 2,12 e^{j93,1^\circ}$ кВ.
 9.6. $Z_{BX K3} = -j245$ Ом;
 9.7. $Z_B = 480 e^{-j40^\circ}$ Ом;
 $\underline{\gamma} = 0,224 e^{j40,2^\circ}$ км⁻¹.

- 9.8. $\underline{U}_1 = 1000 e^{j17,3^\circ}$ В;
 $\underline{I}_1 = 2,14 e^{j27,3^\circ}$ А;
 $\alpha = 0,0128$ км⁻¹;
 $\beta = 0,032$ км⁻¹.
 9.9. $\underline{U}_1 = 1065 e^{j20^\circ}$ В.
 9.10. $\underline{I}_1 = 1,6\sqrt{2} e^{j45^\circ}$ А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2007. – 701 с.
2. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов. – М.: Высшая школа, 2005. – 574 с.
3. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 3 т. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В.Л. Че-чурин. – СПб.: Питер, 2003.
4. Дмитриев В.М. ЛАРМ: автоматизированный лабора-торный практикум по электротехнике и электронике. Учеб-ное пособие для вузов / В.М. Дмитриев, А.В. Шутенков, Т.В. Ганджа, А.Н. Кураколов. – Томск: В-Спектр, 2010. – 186 с.
5. Дмитриев В.М. МАРС – среда моделирования техни-ческих устройств и систем / Дмитриев В.М., Шутенков А.В., Зайченко Т.Н., Ганджа Т.В. – Томск: В-Спектр, 2011. – 278 с.

*Вячеслав Михайлович Дмитриев,
Александр Васильевич Шутенков
Валентин Иванович Хатников
Тарас Викторович Ганджа,
Елена Борисовна Шандарова*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Часть 1

Установившиеся режимы
в линейных электрических цепях
Учебное пособие