

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

В.М. Дмитриев, А.В. Шутенков,  
Т.В. Ганджа, Е.Б. Шандарова

## **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Часть 2

Переходные и статические режимы  
в линейных и нелинейных цепях.  
Электромагнитное поле

*Учебное пособие*

Томск, 2015

УДК 621.3.01(075.8)  
ББК 31.21я73

**Д 53 Дмитриев В.М., Шутенков А.В., Ганджа Т.В., Шандарова Е.Б.**

Теоретические основы электротехники. Ч. 2: Переходные и статические режимы в линейных и нелинейных цепях. Электромагнитное поле: Учебное пособие.– Томск: 2015.– 237 с.  
ISBN

Рассмотрены переходные режимы в линейных и нелинейных электрических и электронных цепях как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, методы анализа и расчета нелинейных электрических и магнитных цепей, анализ цепей с дискретными сигналами, а также теория и практические задачи электромагнитного поля. Кроме того, введен расширенный раздел, касающийся методов автоматизированного анализа цепей.

Приведены примеры расчета электрических и магнитных цепей.

Книга подготовлена на кафедре Моделирования и системного анализа ТУСУРа и предназначена для студентов электротехнических и электронных направлений, а также направлений и специальностей, связанных с автоматизацией технических систем и технологических процессов очной и дистанционной форм обучения.

УДК 621.3.01(075.8)  
ББК 31.21я73

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Б.В. Лукутин,  
д-р техн. наук, проф. А.Г. Горюнов

**ISBN**

© В.М. Дмитриев, А.В. Шутенков,  
Т.В. Ганджа, Е.Б. Шандарова, 2015  
© ТУСУР, 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>1. Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами</b>	
1.1. Общие вопросы анализа переходных процессов в линейных цепях .....	6
1.2. Классический метод расчета переходных процессов .....	10
1.3. Операторный метод расчета переходных процессов .....	36
1.4. Комбинированный операторно-классический метод расчета переходных процессов .....	48
1.5. Метод интегралов наложения (Дюамеля) .....	52
<b>2. Переходные процессы в электрических цепях с распределенными параметрами</b>	
2.1. Возникновение переходных процессов в цепях с распределенными параметрами .....	62
2.2. Прямая и обратная волны в однородной линии. Понятие падающей и отраженной волн .....	62
2.3. Прямая волна при подключении к линии источника напряжения .....	64
2.4. Отраженные волны .....	69
2.5. Расчет волн, возникающих при переключениях .....	76
2.6. Многократные отражения волн .....	80
<b>3. Анализ и расчет нелинейных цепей</b>	
3.1. Задача анализа нелинейных цепей .....	84
3.2. Классификация нелинейных цепей .....	85
3.3. Формирование уравнений модели нелинейной цепи .....	86
3.4. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов .....	88
3.5. Методы анализа нелинейных резистивных цепей ..	93
3.6. Примеры использования нелинейных резистивных цепей .....	111
3.7. Переходные процессы в нелинейных цепях .....	124

<b>4. Анализ и расчет магнитных цепей</b>	
4.1. Магнитные цепи с постоянными магнитными потоками .....	135
4.2. Магнитные цепи переменного синусоидального тока .....	144
4.3. Использование нелинейных свойств электромагнитных элементов в технике .....	152
<b>5. Анализ цепей с дискретными сигналами</b>	
5.1. Линейные разностные уравнения .....	159
5.2. Прямое $z$ -преобразование и его применение к анализу цепей с дискретными сигналами .....	165
5.3. Обратное $z$ -преобразование .....	169
5.4. Дискретная свертка .....	171
5.5. Соответствие между комплексной частотой $p$ в преобразовании Лапласа и параметром $z$ дискретного $z$ -преобразования .....	176
<b>6. Основы теории электромагнитного поля</b>	
6.1. Основные понятия электромагнитной теории .....	177
6.2. Поверхностные явления .....	194
6.3. Численные и экспериментальные методы моделирования полей .....	197
<b>7. Методы автоматизированного анализа цепей</b>	
7.1. Особенности современных программ автоматизированного анализа цепей .....	201
7.2. Топологические характеристики и граф электрической цепи .....	205
7.3. Топологические матрицы .....	206
7.4. Метод узловых напряжений .....	209
7.5. Модифицированный метод узловых напряжений .....	214
7.6. Примеры составления модифицированных узловых уравнений .....	215
7.7. Метод переменных состояния .....	217
7.8. Анализ уравнений состояния в частотной области .....	227
7.9. Анализ нелинейных цепей .....	228
<b>Литература .....</b>	<b>235</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, обучающихся по электротехническим направлениям и специальностям очной и дистанционной форм обучения. Рассмотрены установившиеся и переходные режимы в линейных и нелинейных цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также теория электромагнитного поля.

Основу пособия составляют материалы лекций по курсу «Теоретические основы электротехники». В текст пособия включен ряд примеров, раскрывающих содержание разделов.

Подробно рассмотрен расчет переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами классическим, операторным методами и методом интеграла Дюамеля (раздел 1). В разделе 2 рассматриваются переходные процессы в электрических цепях с распределенными параметрами. Расчету статических и переходных режимов в нелинейных цепях посвящен раздел 3. В разделе 4 представлены основные методы анализа магнитных цепей с постоянными магнитными потоками, магнитных цепей переменного синусоидального тока, а также примеры использования нелинейных свойств электромагнитных элементов в технике. Анализ цепей с дискретными сигналами приведен в разделе 5. Раздел 6, содержит основы теории электромагнитного поля, представленные основными понятиями электромагнитной теории, поверхностными явлениями, а также численными и экспериментальными методами моделирования полей. Раздел 7 содержит изложение основных методов автоматизированного анализа цепей.

Данное учебное пособие представляет собой твердую копию электронного учебника, который в свою очередь является частью автоматизированного учебного практикума, состоящего из электронного учебника, компьютерной лаборатории и электронного задачника.

# 1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

## 1.1. Общие вопросы анализа переходных процессов в линейных цепях

*Причины возникновения переходных процессов.* Переходный процесс (ПП) — процесс перехода электрической цепи (ЭЦ) с накопителями энергии (катушками индуктивности и конденсаторами) от одного установившегося режима работы к другому, отличающемуся от предыдущего, например, величиной, частотой, формой напряжения (тока) источника, действующего в схеме, или конфигурацией цепи, вследствие коммутации [1, 2].

*Коммутация* — это процесс замыкания или размыкания электронных реле, электромеханических или механических переключателей, электронных ключей, коммутаторов и т. п. Время срабатывания контактов (коммутации) считается бесконечно малым и при расчетах полагается мгновенным. Отсчет времени ПП выбирают с момента коммутации ( $t = 0$ ). Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначают  $t(0_-)$ . Время ПП обусловлено временем перераспределения энергии электрического и магнитного полей накопителей. В цепях без накопителей энергии ПП отсутствует. В них в момент коммутации ( $t = 0$ ) наступает установившийся режим.

Переходный процесс в ЭЦ может быть вызван и действием импульсных источников.

*Законы коммутации.* Переход реальной ЭЦ от одного установившегося режима к другому не может происходить мгновенно, скачком. Это связано с тем, что любой реальный источник энергии может обладать только конечной мощностью, а суммарная энергия, запасенная в цепи, может изменяться только плавно, т.е. представляет собой непрерывную функцию времени. Следовательно, суммарные потокоцеп-

ление и заряд цепи также являются непрерывными функциями времени, что может быть представлено равенствами:

$$\sum \Psi(0) = \sum \Psi(0-); \quad \sum q(0) = \sum q(0-). \quad (1.1)$$

Это положение известно как *принцип непрерывности во времени суммарного потокосцепления и суммарного электрического заряда*. Из данного принципа непосредственно следует вывод о непрерывности токов индуктивных катушек и напряжений конденсаторов, который формулируется в виде законов коммутации.

*Первый закон коммутации*: ток в индуктивности в момент коммутации сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$i_L(0) = i_L(0-), \quad (1.2)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

*Доказательство*. Если предположить скачкообразное изменение тока, то напряжение на индуктивности  $u_L = L di/dt$  станет бесконечно большим, что приведет к нарушению второго закона Кирхгофа для контура, где находится эта индуктивность. Следовательно, энергия индуктивности постепенно увеличивается или уменьшается и мгновенное изменение энергии в момент коммутации *невозможно*.

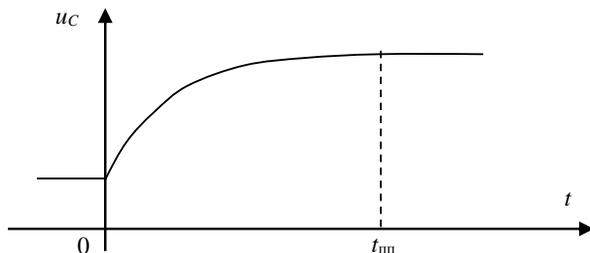
*Второй закон коммутации*: напряжение на емкости в момент коммутации сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$u_C(0) = u_C(0-), \quad (1.3)$$

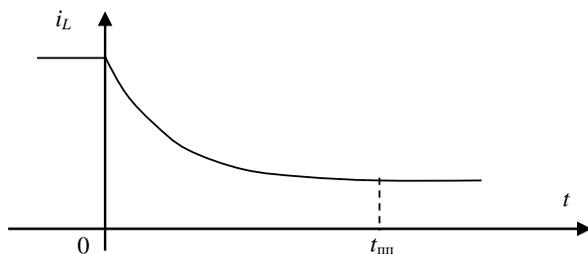
а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

*Доказательство*. Если предположить скачкообразное изменение напряжения, то ток в емкости  $i_C = C du_C/dt$  станет бесконечно большим, что приведет к нарушению первого закона Кирхгофа для узла, к которому подключена эта емкость. Следовательно, энергия емкости постепенно увеличивается или уменьшается и мгновенное изменение энергии в момент коммутации *невозможно*.

**Вывод:** в цепях, содержащих накопители энергии, возникают ПП изменения токов или напряжений от начальных значений к конечным. Изменение величин требует определенного времени. Рис.1.1. дает представление об изменениях токов и напряжений при коммутациях в  $RL$  и  $RC$ -цепях.



а)



б)

Рис. 1.1

**Порядок определения граничных условий.** Рассмотренные выше величины  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$  называют *независимыми начальными условиями* (ННУ). Их значения не зависят от коммутации, то есть не меняются в момент коммутации.

Величины, зависящие от коммутации (в момент коммутации изменяются скачком), —  $i_R(0)$ ,  $u_R(0)$ ,  $u_L(0)$ ,  $i_C(0)$  — называют *зависимыми начальными условиями* (ЗНУ).

Все величины при  $t \rightarrow \infty$  —  $i_L(\infty)$ ,  $u_L(\infty)$ ,  $u_C(\infty)$  и т. д. — называют конечными условиями (КУ). Здесь момент времени  $t(\infty)$  соответствует окончанию ПП.

В совокупности ННУ, ЗНУ и КУ называют *граничными условиями* (ГУ).

**Пример 1.1.** Для схемы (рис. 1.2) дано [1]:  $U = 150$  В;  $R_1 = 25$  Ом,  $R_2 = 45$  Ом,  $R_3 = 25$  Ом. Определить ГУ. На схеме указано докоммутационное положение ключа (замкнутое).

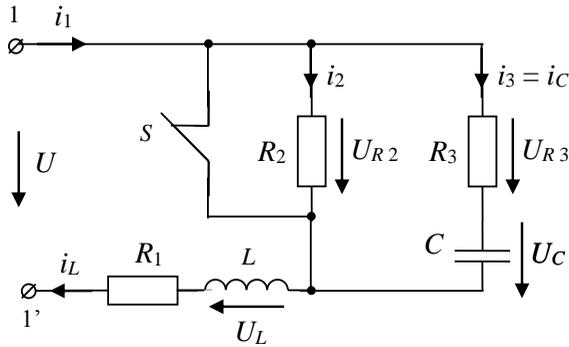


Рис. 1.2

*Решение.*

1) Размечаем цепь (размечаются токи и напряжения с указанием их направлений).

2) Анализируем цепь до коммутации ( $t = 0-$ ) и определяем ННУ:

$$i_1(0-) = i_L(0-) = u/R_1 = 150/25 = 6 \text{ А};$$

$$u_C(0-) = u_{R2} = 0.$$

3) Записываем законы Кирхгофа в момент коммутации ( $t = 0$ ), ключ разомкнут (КР):

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$i_1 R_1 + u_L + i_2 R_2 = U; \quad i_3 R_3 + u_C - i_2 R_2 = 0.$$

4) Определяем ЗНУ. Для этого решаем систему уравнений с учетом законов коммутации:

$$i_1(0) = i_1(0-) = 6 \text{ А}; \quad u_C(0) = u_C(0-) = 0,$$

тогда

$$i_2(0) = i_1(0) \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2,14 \text{ А};$$

$$i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 3,86 \text{ А};$$

$$u_L = U - i_2 R_2 - i_1 R_1 = -96,4 \text{ В}.$$

5) Для конечных условий (КУ) при  $t = \infty$  (КР) получим:

$$i_3 = 0; i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2,14 \text{ А};$$

$$u_C(\infty) = i_2(\infty)R_2 = 96,4 \text{ В}; u_L = 0.$$

**Методы анализа переходных процессов.** В зависимости от вида внешних источников энергии и сигналов, проходящих через ЭЦ, используют следующие методы:

- классический метод;
- операторный метод;
- метод интегралов наложения (Дюамеля);
- метод переменных состояния.

## 1.2. Классический метод расчета переходных процессов

**Свободные и принужденные составляющие токов и напряжений.** Классический метод анализа ПП в линейных цепях основан на классическом методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого по какому-либо методу составляется исходная система неоднородных интегро-дифференциальных уравнений относительно мгновенных значений напряжений и токов и затем разрешается относительно одной переменной тока или напряжения. Полученная форма может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} + a_0 y = f(t). \quad (1.4)$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения вида (1.4), где  $n$  равно числу необъединяемых накопителей энергии, как известно, равно сумме частного решения и общего решения однородного дифференциального уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} + a_0 y = 0. \quad (1.5)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (1.5) характеризует так называемые свободные процессы, т. е. процессы в цепи после коммутации в отсутствие внешних источников энергии ( $f(t) = 0$ ).

Таким образом, характер свободных процессов не зависит от вида внешнего воздействия на цепь, а определяется только параметрами пассивных компонентов и топологией цепи после коммутации.

Свободные процессы в цепи протекают за счет разности энергий, соответствующих установившимся режимам работы ЭЦ до и после коммутации. Так как эта разность имеет конечное значение, свободные процессы в цепях с потерями затухают (в идеализированных цепях имеют незатухающий характер).

Частное решение уравнения (1.4) определяет принужденный режим работы цепи, т.е. режим, задаваемый действующими в цепи независимыми источниками энергии.

Таким образом, при анализе ПП классическим методом искомая реакция цепи  $y$  представляется в виде суммы свободной  $y_{св}$  и принужденной  $y_{пр}$  составляющих:

$$y = y_{св} + y_{пр}.$$

Свободная составляющая с течением времени затухает, поэтому принужденная составляющая реакции представляет собой установившееся значение искомого тока или напряжения после коммутации. Для ее определения можно воспользоваться рассмотренными ранее методами анализа цепей в установившемся режиме (ГУ при  $t \rightarrow \infty$ ).

Для определения свободной составляющей  $y_{св}$  реакции цепи необходимо найти  $n$  корней характеристического уравнения. Это уравнение получают из однородного уравнения (1.5) путем алгебраизации, подставляя вместо  $d/dt$  корень  $p$ :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.6)$$

Если все корни уравнения (1.6) вещественные, разные и отрицательные, то свободная составляющая реакции

$$y_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (1.7)$$

где  $A_k$  — постоянная интегрирования;  $p_k$  — корень характеристического уравнения.

Если корни характеристического уравнения вещественные равные (кратные), то

$$y_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k \cdot t^{k-1} \cdot e^{p_k t}. \quad (1.8)$$

**Общая схема применения классического метода.** В расчете ПП классическим методом целесообразно выделить следующие этапы.

1) *Анализ цепи до коммутации.* Находят токи в индуктивностях и напряжения на емкостях в момент времени  $t = 0^-$ .

2) *Определение ННУ и ЗНУ.* ННУ представляют собой токи в индуктивностях и напряжения на емкостях в момент времени ( $t = 0$ ). Их находят с помощью законов коммутации. ЗНУ определяют обычно методом законов Кирхгофа или путем расчета эквивалентных схем.

3) *Составление дифференциального уравнения цепи после коммутации* (при  $t \geq 0$ ).

4) *Анализ установившегося процесса в цепи после коммутации* (при  $t \rightarrow \infty$ ). Находят принужденную составляющую реакции цепи (частное решение дифуравнения).

5) *Определение свободной составляющей реакции цепи.* По составленному дифуравнению формируют характеристическое уравнение, определяют его корни, и определяют общий вид свободной составляющей реакции цепи.

6) *Отыскание общего вида реакции цепи.* Общий вид реакции цепи находят путем суммирования свободной и принужденной составляющих реакции цепи.

7) *Определение постоянных интегрирования.* Постоянные интегрирования находят по ЗНУ (значения искомых токов и напряжений и их  $(n-1)$  производных при  $t = 0$ ).

**Определение начальных условий.** ННУ определяют из установившегося докоммутационного режима, с последующим применением законов коммутации.

ЗНУ определяются обычно методом законов Кирхгофа или путем расчета эквивалентных схем. При построении эквивалентных схем индуктивные элементы заменяют источниками тока  $J_L$ , направленными по току через индуктивность и равными значению  $i_L(0)$ , полученному из ННУ. Аналогично емкостные элементы заменяют источниками ЭДС, равными  $U_C(0)$  и направленными противоположно току в емкости. Полученные схемы являются резистивными с источниками постоянных сигналов. Они справедливы только для момента времени  $t = 0$ .

**Пример 1.2.** В схеме (рис. 1.3) найти зависимые и независимые начальные условия. Параметры цепи:  $e(t) = E = 100$  В;  $R_1 = R_4 = 10$  Ом;  $R_2 = R_3 = 20$  Ом.

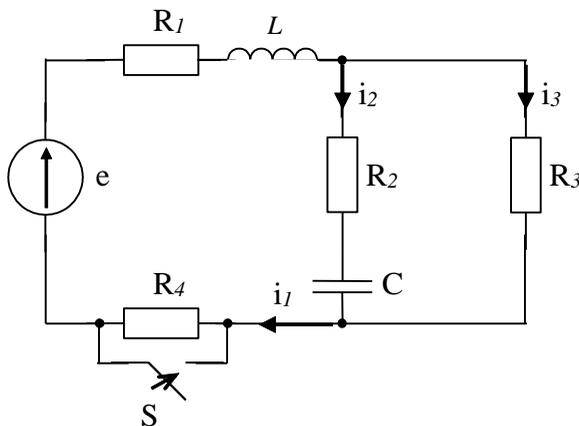


Рис. 1.3

**Решение.** Из схемы до коммутации находим ННУ ( $i_L(0)$ ,  $u_C(0)$ ). Так как в ветви с емкостным элементом при  $E = \text{const}$  ток отсутствует, то

$$i_1(0) = i_3(0_-) = E / (R_1 + R_3 + R_4).$$

Подставляя численные значения, получим:

$$i_1(0) = 100 / (10 + 10 + 20) = 2,5 \text{ A};$$

$$u_C(0) = i_3(0_-) \cdot R_3 = 2,5 \cdot 20 = 50 \text{ В}.$$

Для определения зависимых начальных условий запишем уравнения по законам Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$i_1 R_1 + u_L + i_3 R_3 = E;$$

$$i_2 R_2 + u_C - i_3 R_3 = 0.$$

Подставляя в эти уравнения найденные выше ННУ, для момента времени  $t = 0$ , получим:

$$2,5 - i_2(0) - i_3(0) = 0;$$

$$25 - u_L(0) + i_3(0) \cdot 20 = 100;$$

$$20i_2(0) + 50 - 20i_3(0) = 0.$$

В результате

$$i_2(0) = 0 \text{ A}; \quad i_3(0) = 2,5 \text{ A}; \quad u_L(0) = 25 \text{ В}.$$

*Замечание.* Этот же результат получим, используя для расчета эквивалентную схему замещения с источниками ЭДС и тока (рис.1.4), где  $i_L(0) = 2,5 \text{ A}$ ,  $u_C(0) = 50 \text{ В}$ . Часто расчет по эквивалентной схеме проще, чем решение системы уравнений.

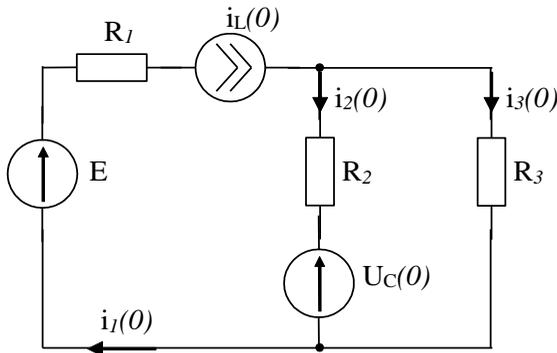


Рис. 1.4

**Определение корней характеристического уравнения.**

Как было отмечено выше, характеристическое уравнение получается из предварительно составленного однородного диф-

ференциального уравнения цепи вида (1.5) путем формальной замены символов дифференцирования  $d^n/dt^n$  символом  $p^n$ . Однако существует и более общий подход к построению характеристического уравнения. Для этого необходимо составить главный определитель системы узловых или контурных уравнений, предварительно алгебраизованных рассмотренным выше способом. Корни характеристического уравнения находят путем приравнения определителя нулю ( $\Delta(p) = 0$ ). Теоретически доказано, что данное уравнение эквивалентно уравнениям

$$Z_{ij}(p) = 0; \quad Y_{ij}(p) = 0,$$

где  $Z_{ij}(p) = 0$  и  $Y_{ij}(p)$  — входное сопротивление относительно двух точек разрыва  $(i, j)$  любой ветви схемы и входная (межузловая) проводимость относительно любой пары узлов после замены в комплексных выражениях величин  $j\omega$  на  $p$ . Источники электрической энергии удалены. Вместо ЭДС оставлены закоротки, вместо источников тока — разрывы.

**Пример 1.3.** Составить характеристическое уравнение для цепи (рис.1.5), используя метод законов Кирхгофа для составления дифференциального уравнения

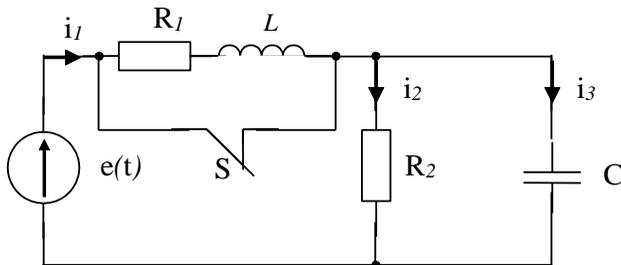


Рис. 1.5

*Решение.* После выбора положительных направлений токов составим систему уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ R_1 \cdot i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + Uc &= e; \\ Uc - R_2 \cdot i_2 &= 0. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $i_3 = C \frac{dUc}{dt}$ ,  $i_2 = \frac{Uc}{R_2}$  получим:

$$i_1 = C \frac{dUc}{dt} + \frac{Uc}{R_2} C;$$

$$\frac{di_1}{dt} = C \frac{d^2Uc}{dt^2} + \frac{1}{R_2} \frac{dUc}{dt}.$$

Подставляя последние соотношения во второе уравнение исходной системы, получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной  $Uc$

$$L_1 C \frac{d^2Uc}{dt^2} + \left( \frac{1 + R_1 R_2 C}{R_2} \right) \frac{dUc}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} Uc = e(t).$$

Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$L_1 C p^2 + \left( \frac{1 + R_1 R_2 C}{R_2} \right) p + \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 0,$$

решение которого дает два корня —  $p_1$  и  $p_2$ .

**Пример 1.4.** Определить корни характеристического уравнения в цепи (рис.1.5) методом входного сопротивления.

*Решение.* Для послекоммутационного состояния схемы источники электрической энергии принимают равными нулю. В любой ветви электрической схемы делаем искусственный разрыв и записываем выражение для комплексного сопротивления  $Z(j\omega)$  относительно точек разрыва.

Характеристическое уравнение получится после замены в  $Z(j\omega)$  символов  $j\omega$  на  $p$  и приравнивания полученного выражения нулю.

Для схемы (рис. 1.6), в соответствии с указанным порядком действий запишем:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_2(R_1 + j\omega L_1)}{R_1 + R_2 + j\omega L_1}.$$

Заменив  $j\omega$  на  $p$ , получим:

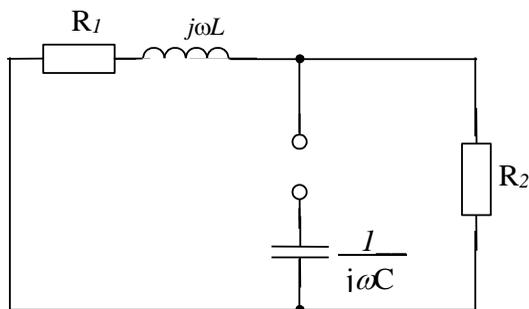


Рис. 1.6

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_2(R_1 + pL_1)}{R_1 + R_2 + pL_1},$$

или

$$L_1CR_2p^2 + (L_1 + R_1R_2C)p + R_1 + R_2 = 0.$$

Очевидно, корни выражений в обоих примерах одинаковы, определяются только параметрами пассивных элементов и не зависят от вида внешнего воздействия.

**Определение принужденных составляющих.** Принужденная составляющая (частное решение дифференциального уравнения) определяется видом источника. В общем случае принужденную составляющую находят путем подстановки в дифференциальное уравнение функций, определяющих решение и обращающих это уравнение в алгебраическое. В цепях с постоянными и гармоническими источниками принужденные составляющие совпадают с установившимися значениями, а значит, они могут быть найдены любым из известных методов расчета цепей в установившемся режиме.

**Пример 1.5.** В схеме (рис. 1.5), определить принужденную составляющую  $i_{1пр}$  при  $e(t) = E = \text{const}$ .

*Решение.* Так как принужденная составляющая определяется действующим источником, то легко видеть, что в данном случае напряжение на емкости  $U_{Cпр} = \text{const}$ , ток  $i_{3пр} = 0$ . Подставим это значение тока в уравнения цепи, составлен-

ные по законам Кирхгофа и, решив их относительно  $i_{1\text{пр}}$ , получим:

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Этот же результат получится и при простой подстановке  $i_{1\text{пр}}$  в исходное дифференциальное уравнение данной цепи.

**Пример 1.6.** В схеме (рис. 1.3) действует гармоническая ЭДС  $e(t) = 100\sin(100t + 45^\circ)$ . Определить принужденную составляющую тока ветви с индуктивным элементом  $i_{4\text{пр}}$ , если:  $R_1 = R_4 = 10$  Ом;  $R_2 = R_3 = 20$  Ом;  $L = 0,05$  Гн;  $C = 250 \cdot 10^{-6}$  Ф.

*Решение.* Определим индуктивное и емкостное сопротивления:

$$X_L = \omega L = 100 \cdot 0,05 = 5 \text{ Ом}; \quad X_C = 1/(100 \cdot 250 \cdot 10^{-6}) = 40 \text{ Ом}.$$

Далее воспользуемся символическим методом и определим входное сопротивление послекоммутационной цепи в комплексной форме:

$$\underline{Z} = R_1 + jX_L + R_3(R_2 - jX_C)/(R_2 + R_3 - jX_C).$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$\underline{Z} = 10 + j5 + 20 \cdot (20 - j40)/(40 - j40) = 25 \text{ Ом}.$$

Ток индуктивного элемента в комплексной форме

$$I_{1\text{пр}} = \frac{E}{\underline{Z}} = 4e^{j45^\circ}.$$

Ток индуктивного элемента во временной области

$$i_{1\text{пр}} = 4\sin(100t + 45^\circ) \text{ А}.$$

**Определение постоянных интегрирования.** Постоянные интегрирования определяют в следующем порядке:

- найденные начальные условия подставляют в уравнения искомой функции вида (1.5);
- находят  $n-1$  производную (в соответствии с порядком уравнения (1.5)) и формируют столько же уравнений относительно момента времени  $t = 0$ ;

- полученную систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений решают относительно постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Для цепей с одним накопителем энергии (первого порядка) постоянная интегрирования  $A$  определяется с использованием формул

$$V(t) = V(\infty) + Ae^{pt}, \quad A = V(0) - V(\infty),$$

где  $V$  — искомая величина;  $V(0)$  и  $V(\infty)$  — значения этой величины при начальном и установившемся значениях после коммутации;  $p$  — корень характеристического уравнения.

**Анализ переходного процесса в последовательной RC-цепи при скачкообразном изменении ЭДС источника.** Рассмотрим переходный процесс в последовательной RC-цепи (рис. 1.7), на входе которой ЭДС

$$e(t) = \begin{cases} E_1, & \text{при } t < 0; \\ E_2, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

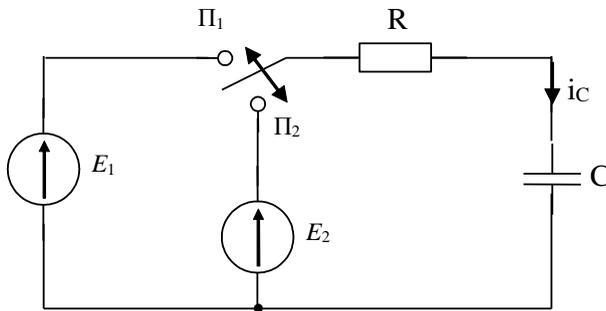


Рис. 1.7

Такое изменение ЭДС источника может происходить либо при включении источника ( $E_1 = 0; E_2 \neq 0$ ), либо при коммутациях от  $E_1$  к  $E_2$ .

Анализ переходного процесса в данной цепи проведем в той последовательности, которая была предложена выше.

1) Предполагаем, что до коммутации цепь находилась в установившемся режиме и напряжение на емкости равнялось напряжению на зажимах источника при  $t < 0$  (ключ в  $\Pi_1$ ).

Используя второй закон коммутации, находим единственное независимое начальное условие

$$u_C(0) = u_C(0_-) = E_1.$$

2) Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи целесообразно составить относительно напряжения  $u_C$  (так как известно начальное значение этого напряжения при  $t \geq 0$  (ключ в  $\Pi_2$ )):

$$u_R + u_C = E_2; \quad u_R = Ri_R; \quad i_R = i_C = i; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Исключив из приведенной системы уравнений электрического равновесия цепи все величины, кроме  $u_C$ , получим:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2. \quad (1.9)$$

3) Напряжение на емкости при  $t \geq 0$  представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}. \quad (1.10)$$

4) Очевидно, с течением времени после коммутации в цепи должен установиться режим постоянного тока, причем значение тока емкости (при  $t = \infty$ ), будет равно нулю, а значение напряжения на емкости — напряжению источника энергии после коммутации. Таким образом, принужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{Cпр} = E_2. \quad (1.11)$$

5) Характеристическое уравнение цепи (в соответствии с (1.9))

$$RCp + 1 = 0$$

имеет единственный корень

$$p_1 = -1/RC = -1/\tau_C,$$

где  $\tau_C = RC$  — постоянная времени последовательной  $RC$ -цепи. Поэтому свободная составляющая напряжения на емкости  $u_{Cсв}$  содержит один экспоненциальный член

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau_C}. \quad (1.12)$$

б) Используя выражения (1.10) — (1.12) при произвольных начальных условиях, находим напряжение на емкости после коммутации:

$$u_c = E_2 + A_1 e^{-t/\tau_c}. \quad (1.13)$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  воспользуемся начальным условием (закон коммутации для емкости). Полагая в (1.13)  $t = 0$  и  $u_c(0) = E_1$ , получим:

$$E_1 = E_2 + A_1,$$

откуда

$$A_1 = E_1 - E_2.$$

Таким образом, при заданных начальных условиях полное напряжение на емкости после коммутации ( $t \geq 0$ ) определяется выражением

$$u_c = E_2 - (E_2 - E_1) e^{-t/\tau_c}. \quad (1.14)$$

Значение тока в функции от времени при  $t > 0$  можно получить путем дифференцирования выражения (1.13) и умножения результата на  $C$  с учетом  $\tau = RC$ :

$$i_c = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-t/\tau_c}. \quad (1.15)$$

В начальный момент времени после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и до коммутации, а затем плавно изменяется, стремясь в пределе к новому установившемуся значению (рис. 1.8).

Ток в емкости в начальный момент скачком изменяется от нуля до начального значения

$$i_c(0) = (E_2 - E_1)/R, \quad (1.16)$$

а затем плавно уменьшается, стремясь в пределе к нулю.

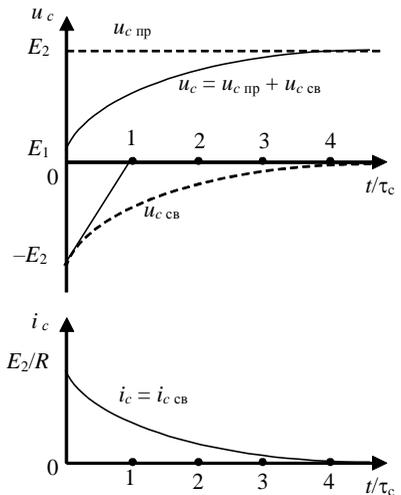


Рис. 1.8

**Понятие постоянной времени.** Как видно из выражений (1.12) и (1.15), скорость затухания свободных составляющих тока и напряжения емкости не зависит от значения ЭДС источника, а определяется только постоянной времени  $\tau_C$ , которая численно равна промежутку времени, в течение которого свободные составляющие тока и напряжения уменьшаются в  $e \cong 2,718$  раз. Можно показать (см. рис.1.8), что постоянная времени этой цепи численно равна подкасательной к кривой  $u_{C\text{св}}$  или  $i_{C\text{св}}$  при любом значении  $t \geq 0$ . Удобнее проводить касательную к этим кривым при  $t = 0$ , тогда она пересекает ось времени в точке  $t = \tau_C$ .

**Время переходного процесса.** Теоретически процесс установления нового режима длится бесконечно долго, однако, учитывая, что к моменту времени после коммутации, равному  $5\tau$ , свободные составляющие уменьшаются до уровня меньше одного процента от начального значения, переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися через промежуток времени  $T_{\text{п}} = (3 \div 5)\tau$  после коммутации.

**Пример 1.7.** Определить закон изменения напряжения и тока на емкости в цепи (рис. 1.7) при двух положениях ключа, соответствующих заряду ( $\Pi_1$ ) и разряду ( $\Pi_2$ ) конденсатора. Параметры цепи  $E_1 = E$ ,  $E_2 = 0$ ,  $R$  и  $C$  полагать известными.

*Решение.*

1) В соответствии с порядком расчета классическим методом, запишем граничные условия при заряде и разряде конденсатора (табл. 1.1)

Таблица 1.1

Момент времени	Заряд конденсатора		Разряд конденсатора	
	$u_C$	$i_C$	$u_C$	$i_C$
$t = 0_-$	0	—	$E$	—
$t = 0$	0	$E/R$	$E$	$-E/R$
$t = \infty$	$E$	0	0	0

2) Заряд конденсатора. Для послекоммутационного состояния (ключ в  $\Pi_1$ ) дифференциальное уравнение имеет вид (1.9), а корень характеристического уравнения  $RCp + 1 = 0$  равен  $p = -1/RC$ . Напряжение на конденсаторе при заряде  $u_{Cз\text{ар}}$  определяется из (1.14) при  $E_2 = 0$ , а значение тока — выражением (1.15) также при  $E_2 = 0$ .

3) Разряд конденсатора. Используя граничные условия и корень характеристического уравнения, запишем уравнение разряда конденсатора:

$$u_{C\text{р}}(t) = u_{C\text{р}}(\infty) + Be^{pt} = Be^{pt}.$$

При  $t = 0$   $u_{C\text{р}}(0) = B = E$ , тогда  $u_{C\text{р}}(t) = Ee^{-t/RC}$ .

Если ключ постоянно переключать из одного положения в другое через промежуток времени  $\tau_1 \geq T_{\Pi}$  (время ПП), то временные диаграммы будут иметь вид изображенный на рис. 1.9.

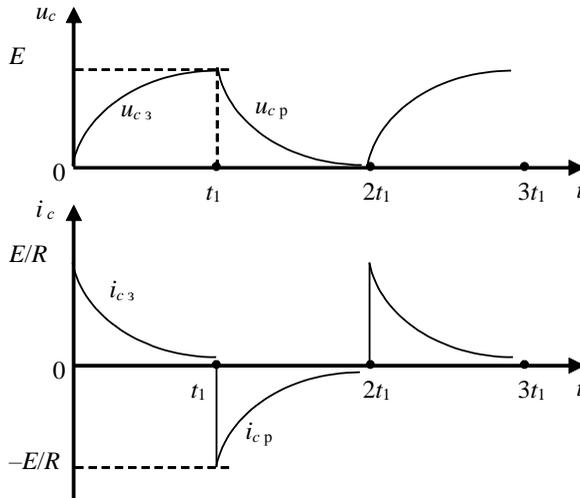


Рис. 1.9

При переходных процессах в цепях с индуктивными сечениями и емкостными контурами может наблюдаться очень быстрая импульсная начальная часть процесса, сменяемая более медленной частью или установившимся режимом. Для

упрощения анализа переходного процесса импульсную часть обычно считают происходящей мгновенно. При этом приходится признать возможным нарушение законов коммутации, связанных с непрерывностью напряжений на конденсаторах и токов в индуктивностях. При расчете таких схем используют принцип непрерывности во времени суммарного потока сцепления и суммарного электрического заряда.

**Пример 1.8.** Для заданной схемы (рис. 1.10) с параметрами  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 80$  В,  $C_1 = 100$  мкФ,  $C_2 = 80$  мкФ,  $R = 200$  Ом определить закон изменения напряжения на емкостном элементе  $u_{C_2}(t)$ .

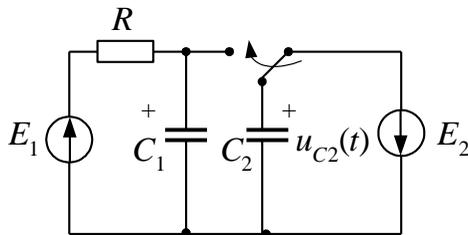


Рис. 1.10

*Решение.* В цепи первого порядка решение запишется в виде:

$$u_{C_2}(t) = U_{C_2\text{пр}} + Be^{pt}.$$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

$$u_{C_1}(0_-) = E_1 = 100 \text{ В}, \quad u_{C_2}(0_-) = -E_2 = -80 \text{ В}.$$

Суммарный заряд в схеме до коммутации:

$$\sum q_k(0_-) = C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-) = 0,006 \text{ Кл}.$$

Суммарная энергия электрического поля, запасенная конденсаторами:

$$W_3(0_-) = \frac{C_1 u_{C_1}^2(0_-)}{2} + \frac{C_2 u_{C_2}^2(0_-)}{2} = 0,66 \text{ Дж}.$$

2. Для схемы в первый момент после коммутации ( $t = 0$ )  $u_{C1}(0) = u_{C2}(0)$  и суммарный заряд:

$$\sum q_k(0) = C_1 u_{C1}(0) + C_2 u_{C2}(0) = u_{C2}(0) \cdot (C_1 + C_2).$$

По принципу неизменности суммарного заряда  $\sum q_k(0_-) = \sum q_k(0)$ , следовательно:

$$u_{C2}(0) = \frac{\sum q_k(0_-)}{(C_1 + C_2)} = 40 \text{ В};$$

$$W_3(0) = \frac{u_{C2}^2(0) \cdot (C_1 + C_2)}{2} = 0,12 \text{ Дж.}$$

Разность энергий

$$\Delta W_3 = W_3(0_-) - W_3(0) = 0,54 \text{ Дж}$$

выделяется в виде тепла в электрической дуге между контактами переключателя и в соединительных проводах, а также частично излучается в окружающее пространство.

3. Определяем принужденную составляющую  $U_{C2пр}$  в схеме после коммутации. Переходный процесс закончился, в цепи действует постоянный источник ЭДС  $E_1$ , следовательно, токи, текущие через емкостные элементы, будут равны нулю и  $U_{C2пр} = U_{C1пр} = E_1 = 100 \text{ В}$ .

4. Определяем корень характеристического уравнения. Запишем сопротивление цепи для схемы замещения (рис. 1.11), в которой  $j\omega$  заменено на  $p$ , источник ЭДС закорочен и разрыв сделан в ветке с активным сопротивлением:

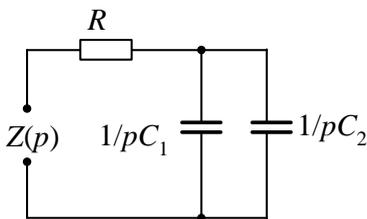


Рис. 1.11

$$Z(p) = R + \frac{1/pC_1 \cdot 1/pC_2}{1/pC_1 + 1/pC_2}.$$

Из условия  $Z(p)=0$  находим корень характеристического уравнения  $p = -33,3 \frac{1}{с}$ .

5. Определяем постоянную интегрирования. Для этого в общее решение подставляем момент времени  $t = 0$ :

$$u_{C2}(0) = U_{C2np} + B,$$

тогда  $B = u_{C2}(0) - U_{C2np} = -60 \text{ В}$ .

Окончательный результат  $u_{C2}(t) = 100 - 60e^{-33,3t} \text{ В}$ .

**Пример 1.9.** Для заданной схемы (рис. 1.12) с параметрами  $E = 100 \text{ В}$ ,  $L_1 = 100 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 200 \text{ мГн}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 150 \text{ Ом}$  определить закон изменения тока  $i_{L1}(t)$ .

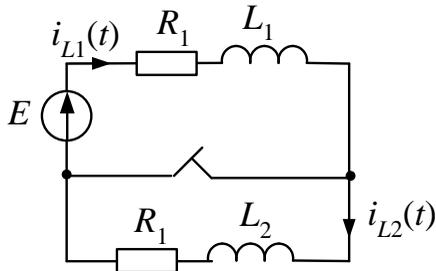


Рис. 1.12

*Решение.* В цепи первого порядка решение запишется в виде:

$$i_{L1}(t) = I_{L1np} + Be^{pt}.$$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

$$i_{L1}(0_-) = \frac{E}{R_1} = 1 \text{ А}, \quad i_{L2}(0_-) = 0.$$

Суммарное потокосцепление в схеме до коммутации:

$$\sum \Psi_k(0_-) = L_1 i_{L1}(0_-) = 0,1 \text{ Вб.}$$

Энергия магнитного поля, запасенная индуктивным элементом  $L_1$ :

$$W_M(0_-) = \frac{L_1 i_{L1}^2(0_-)}{2} = 0,05 \text{ Дж.}$$

2. Для схемы в первый момент после коммутации ( $t = 0$ )  $i_{L1}(0) = i_{L2}(0)$  и суммарное потокосцепление:

$$\sum \Psi_k(0) = L_1 i_{L1}(0) + L_2 i_{L2}(0) = i_{L1}(0) \cdot (L_1 + L_2).$$

По принципу неизменности суммарного потокосцепления  $\sum \Psi_k(0_-) = \sum \Psi_k(0)$ , следовательно:

$$i_{L1}(0) = \frac{\sum \Psi_k(0_-)}{(L_1 + L_2)} = 0,333 \text{ А;}$$

Суммарная энергия магнитного поля, запасенная индуктивными элементами:

$$W_M(0) = \frac{i_{L1}^2(0) \cdot (L_1 + L_2)}{2} = 0,017 \text{ Дж.}$$

Разность энергий:

$$\Delta W_M = W_M(0_-) - W_M(0) = 0,033 \text{ Дж}$$

также выделяется в виде тепла в электрической дуге между контактами переключателя и в соединительных проводах.

3. Определяем принужденную составляющую  $I_{L1пр}$  в схеме после коммутации. Переходный процесс закончился, в цепи действует постоянный источник ЭДС  $E$ , следовательно, сопротивления индуктивных элементов будут равны нулю и  $I_{L1пр} = I_{L2пр} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,4 \text{ А.}$

4. Определяем корень характеристического уравнения. Запишем сопротивление цепи для схемы замещения (рис. 1.13), в которой  $j\omega$  заменено на  $p$  и источник ЭДС закорочен:

$$Z(p) = R_1 + R_2 + pL_1 + pL_2.$$

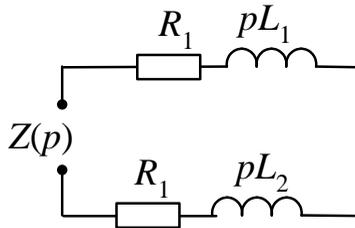


Рис. 1.13

Из условия  $Z(p) = 0$  находим корень характеристического уравнения  $p = -833,3 \frac{1}{\text{с}}$ .

5. Определяем постоянную интегрирования. Для этого в общее решение подставляем момент времени  $t = 0$ :

$$i_{L1}(0) = I_{L1\text{пр}} + B,$$

тогда  $B = i_{L1}(0) - I_{L1\text{пр}} = -0,067 \text{ А}$ .

Окончательный результат  $i_{L1}(t) = 0,4 - 0,067e^{-833,3t} \text{ А}$ .

**Подключение к последовательной  $RL$ -цепи источника гармонического напряжения.** Рассмотрим переходные процессы в  $RL$ -цепи, содержащей переменный источник, ЭДС которого изменяется по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ E_m \cos(\omega t + \varphi), & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

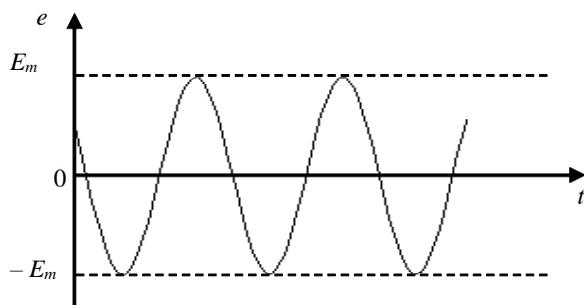
Временная диаграмма  $e(t)$  показана на рис. 1.14, а.

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно тока  $i = i_L$ , при  $t \geq 0$  имеет вид

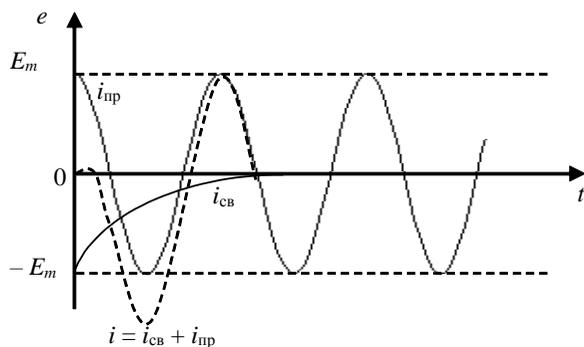
$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.18)$$

Принужденная составляющая тока может быть найдена с помощью метода комплексных амплитуд:

$$i_{\text{пр}} = \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \varphi - \varphi),$$



*a*



*б*

Рис. 1.14

где  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  — модуль, а  $\varphi = \text{arctg}(\omega L/R)$  — аргумент комплексного входного сопротивления рассматриваемой цепи.

Характеристическое уравнение цепи

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень  $p_1 = -R/L$ , поэтому свободная составляющая тока содержит один экспоненциальный член

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени последовательной  $RL$ -цепи.

Суммируя свободную и принужденную составляющие, находим общее решение дифференциального уравнения цепи (1.18) после коммутации:

$$i = \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \phi - \varphi) + A_1 e^{-t/\tau}. \quad (1.19)$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  используем первый закон коммутации, в соответствии с которым начальное значение тока должно равняться нулю:

$$i(0) = i_L(0) = i_L(0_-) \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.19), получаем:

$$\frac{E_m}{Z} \cos(\phi - \varphi) + A_1 = 0,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{E_m}{Z} \cos(\phi - \varphi). \quad (1.21)$$

С учетом (1.21) выражение для тока рассматриваемой цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t - \phi + \varphi) - \frac{E_m}{Z} (\cos(\phi - \varphi)) e^{-t/\tau}.$$

Анализируя выражение для тока, можно сказать следующее. При  $\phi = \varphi \pm \pi/2$  свободная составляющая тока равна нулю и переходные процессы в цепи отсутствуют, т. е. установившийся режим в цепи наступает сразу после коммутации. При  $\phi = \varphi$  или  $\phi = \varphi \pm \pi$  начальные значения свободной и принужденной составляющих максимальны ( $\cos \pi = 1$ ), и различие в форме кривых выражено наиболее резко (см. рис. 1.14, б).

Здесь, как и для  $RC$ -цепи, скорость затухания свободной составляющей тока определяется только постоянной времени  $\tau_L = L/R$ . За промежуток времени  $t = \tau_L$  свободная составляющая тока уменьшается в  $e$  раз, а за время  $Tn = (4-5) \tau_L$  переходные процессы в цепи практически заканчиваются.

### ***Переходные процессы в последовательной RLC-цепи.***

Последовательная  $RLC$ -цепь содержит два независимо включенных реактивных элемента, поэтому она описывается дифференциальным уравнением второго порядка и для определения постоянных интегрирования здесь требуется два не-

зависимых начальных условия. Если ЭДС источника напряжения изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ E = \text{const}, & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

то независимые начальные условия цепи имеют нулевые значения:

$$i_L(0) = i_L(0_-) = 0; \quad U_C(0) = U_C(0_-) = 0. \quad (1.22)$$

Уравнение электрического равновесия цепи по второму закону Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = E. \quad (1.23)$$

Дифференцируя правую и левую части (1.23), получим уравнение цепи после коммутации:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (1.24)$$

Ток в цепи представляет собой ЗНУ и совпадает с начальным значением тока через индуктивность:

$$i_L(0) = i(0) = 0, \quad (1.25)$$

а начальное значение первой производной определяется из (1.23) с учетом (1.22) при  $t = 0$ :

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}. \quad (1.26)$$

В связи с тем, что установившееся значение тока этой цепи после коммутации равно нулю, ток при  $t \geq 0$  содержит только свободную составляющую ( $i = i_{\text{св}}$ ).

Характеристическое уравнение последовательной  $RLC$ -цепи с учетом (1.24)

$$Lp^2 + Rp + 1/C = 0 \quad (1.27)$$

имеет два корня

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right)} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - w_0^2}, \quad (1.28)$$

где  $\delta = R/(2L)$  — коэффициент затухания;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота цепи. В зависимости от соотношения между величинами  $\delta$  и  $\omega_0$  или, что то же самое, в зависимости от добротности цепи

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

корни характеристического уравнения (1.27) могут быть вещественными различными, комплексно-сопряженными или вещественными одинаковыми (кратными). Рассмотрим каждый из этих случаев.

**Вещественные различные корни.** При малой добротности  $RLC$ -цепи ( $Q < 0,5$ , т.е.  $R > 2\rho$  и  $\delta > \omega_0$ ) характеристическое уравнение (1.27) имеет два различных вещественных отрицательных корня, а выражение для тока цепи после коммутации ( $t \geq 0$ ) содержит два экспоненциальных члена:

$$i = i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.29)$$

Дифференцируя правую и левую части выражения (1.29), получаем  $di/dt = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$  и, используя ЗНУ (1.25) и (1.26), составляем уравнения для определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1 + A_2 = 0; \quad p_1 A_1 + p_2 A_2 = E/L,$$

откуда

$$A_1 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}; \quad (1.30)$$

$$A_2 = \frac{-E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.31)$$

С учетом (1.30) выражение для тока цепи после коммутации будет

$$i = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Разделив правую часть последнего выражения на коэффициент при экспонентах, получим нормированное значение тока

$$i_- = e^{p_1 t} - e^{p_2 t} = i_1 + i_2.$$

Расположение корней  $p_1$  и  $p_2$  характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного  $p$  и зависимость нормированного тока от времени приведены на рис. 1.15. Переходный процесс в цепи носит аperiodический (неколебательный) характер, причем в силу того, что  $|p_1| < |p_2|$ , вторая составляющая нормированного тока в цепи ( $i_2$ ) затухает быстрее, чем первая ( $i_1$ ).

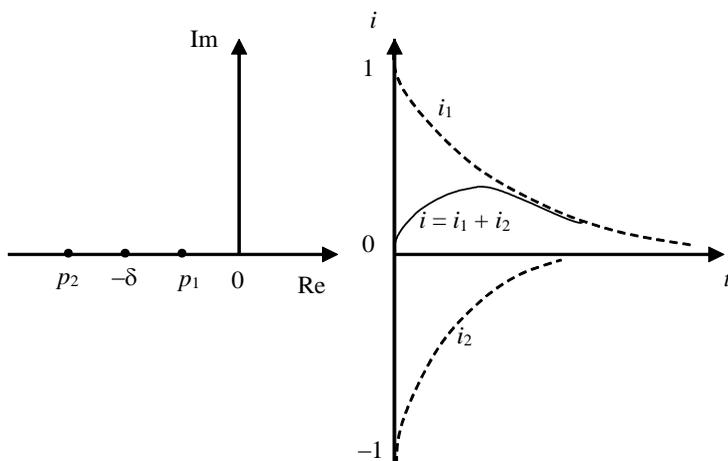


Рис. 1.15

В случае комплексно-сопряженных корней свободная составляющая переходного процесса может быть записана как затухающая гармоническая функция. Тогда выражение для напряжения на емкости

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = u_C(\infty) + A e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \gamma).$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $\gamma$  находят из системы уравнений  $u_C(t)$  и

$$\frac{du_C}{dt} = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \gamma) + \omega_{\text{св}} A e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \gamma)$$

при  $t=0$  с использованием начальных условий при заряде цепи:

$$u_c(0) = E + A \sin \gamma = 0;$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = -\delta A \sin \gamma + \omega_{\text{св}} A \cos \gamma = \frac{i_c(0)}{C} = 0.$$

$$\text{Отсюда } \gamma = \arctg \frac{\omega_{\text{св}}}{\delta}; \quad A = -\frac{E}{\sin \gamma}.$$

Ток и напряжение в  $RLC$ -цепи имеют вид:

$$i(t) = i_c(t) = C \frac{du_c}{dt}, \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}.$$

Таким образом, при включении в  $RLC$ -цепь с большой добротностью источника постоянного напряжения переходные процессы в ней имеют колебательный характер. Ток в цепи и напряжения на элементах представляют собой гармонические функции, амплитуда которых экспоненциально уменьшается во времени. Колебательный характер переходного процесса в цепи связан с периодическим обменом энергией между емкостью и индуктивностью, а затухание колебаний объясняется потерями энергии в сопротивлении.

Корни  $p_1, p_2$  характеристического уравнения (рис.1.16, а) расположены симметрично относительно оси абсцисс в левой полуплоскости на полуокружности с радиусом, численно равным резонансной частоте последовательного контура  $\omega_0$ .

Чем меньше коэффициент затухания  $\delta$ , тем ближе к мнимой оси расположены корни уравнения, меньше различие между  $\omega_{\text{св}}$  и  $\omega_0$  и медленнее затухание свободных процессов. В пределе, при  $\delta=0$ , корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси, частота свободных колебаний совпадает с резонансной частотой цепи, а колебательные процессы в цепи носят незатухающий характер. Таким образом, резонансная частота  $RLC$ -цепи численно равна частоте свободных колебаний цепи при  $\delta=0$ .

Пунктирными линиями на плоскости  $i(t)$  (рис. 1.16, б) показаны кривые  $\pm \text{Im}(t)$ , которые характеризуют закон изменения

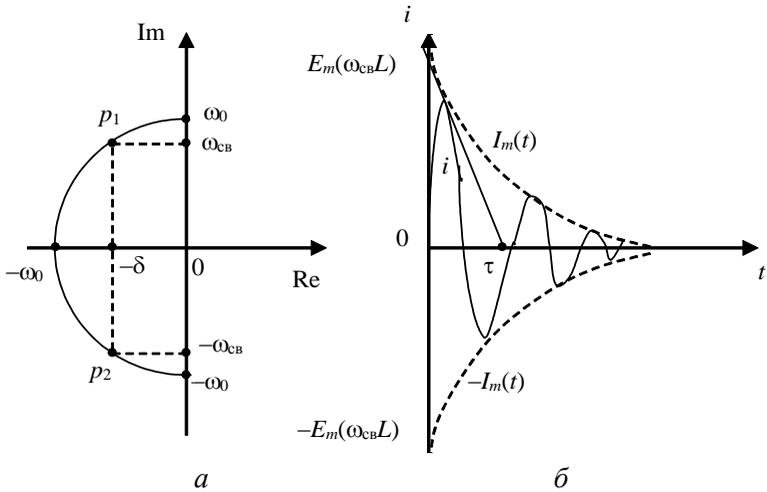


Рис. 1.16

амплитуды тока во времени. Эти кривые называются *огibaющими*. Величина  $\tau=1/\delta=2L/R$ , численно равная длине подкасательной к огибающей тока, называется *постоянной времени* последовательной *RLC*-цепи.

**Кратные корни.** При  $Q = 0,5$ , т.е. при  $R = 2\rho$  и  $\delta = \omega_0$ , характеристическое уравнение последовательной *RLC*-цепи имеет два одинаковых вещественных корня  $p_1 = p_2 = -\delta$ , расположенных на отрицательной вещественной полуоси в плоскости комплексного переменного  $p$  (рис.1.17). Как следует из выражения (1.8), общее решение дифференциального уравнения (1.24) при  $t \geq 0$  в этом случае имеет вид:

$$i = i_{cb} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (1.32)$$

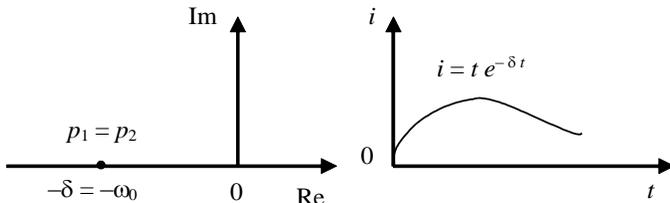


Рис. 1.17

Определяя с помощью ЗНУ (1.25) и (1.26) значения постоянных интегрирования  $A_1 = 0$  и  $A_2 = E/L$  и подставляя их в выражение (1.32), получим

$$i = Ete^{-\delta t}/L.$$

Как и для вещественных различных корней, переходный процесс в цепи при одинаковых вещественных корнях имеет *апериодический характер* (рис. 1.17). Поэтому условие  $Q = 0,5$  является предельным условием существования в цепи апериодических свободных процессов, а режим работы цепи на границе между колебательным и апериодическим характером переходных процессов называется *критическим*.

**Пример 1.10.** Определить закон изменения напряжения в емкостном элементе схемы (рис. 1.3).

*Решение.* Предположим, что параметры цепи выбраны те же, что и в примере 1.6,  $E = 100$  В. Тогда корни характеристического уравнения будут вещественными, отрицательными и разными. Решение в этом случае записывается в форме:

$$u_C(t) = u_{Cпр} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

для  $t = 0$

$$u_C(0) = 67 + A_1 + A_2 = 50;$$

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \left. \frac{du_{Cпр}}{dt} \right|_{t=0} + p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0.$$

Положим:  $u_{Cпр} = 67$  В. Решая систему двух алгебраических уравнений для конкретных значений входящих в нее параметров, получим:

$$A_1 = -50; A_2 = 33; p_1 = -200 \text{ с}^{-1}; p_2 = -300 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда напряжение на емкостном элементе

$$u_C(t) = 67 - 50e^{-200t} + 33e^{-300t} \text{ В.}$$

### 1.3. Операторный метод расчета переходных процессов

*Прямая и обратная задачи анализа.* Классический метод анализа переходных процессов применяют в основном

для простых цепей с постоянными или гармоническими источниками. Если внешнее воздействие на цепь после коммутации имеет более сложный характер, то определение принужденной составляющей реакции цепи затруднено, а при повышении порядка цепи усложняется определение постоянных интегрирования. Более широкие возможности предоставляет операторный метод анализа переходных процессов.

*Операторный метод*, или метод *интегральных преобразований Лапласа* основан на преобразовании функций времени — оригиналов  $f(t)$  — в функции комплексной переменной  $p$  — изображений  $F(p)$ , относительно которых уравнения цепи становятся алгебраическими. Взаимное соответствие между оригиналом и операторным изображением записывается с помощью знака  $\div$  (или  $L$  и  $L^{-1}$ ), например:

$$f(t) \div F(p), F(p) = L\{f(t)\}; f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

В процессе расчета переходного процесса операторным методом решаются две задачи.

*Прямая задача* — перевод временных функций в операторные через использование интеграла Лапласа и запись изображений искомых функций:

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.33)$$

*Обратная задача* — перевод операторных изображений во временные через использование обратного преобразования Лапласа: 1) по формулам соответствия  $f(t) \div F(p)$ , которые таблично задаются в справочниках; 2) по интегралу Бромвича

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (1.34)$$

где  $p = \sigma + j\omega$  — комплексная частота, причем  $\sigma > 0$ , а  $c > \sigma_0$  ( $\sigma_0$  — абсцисса абсолютной сходимости); 3) по теореме разложения. В электротехнике наибольшее распространение получил третий прием.

**Отыскание изображений (прямая задача).** Возможны два варианта отыскания изображений: 1) составленные для исходной цепи уравнения электрического равновесия в интегро-дифференциальной форме преобразуются в алгебраическую форму с помощью прямого преобразования Лапласа; 2) уравнения в алгебраической форме составляются непосредственно по преобразованной или операторной схеме замещения.

Прежде чем описать процедуру перехода, рассмотрим отыскание операторных изображений по Лапласу некоторых наиболее распространенных временных функций.

*Изображение постоянной величины  $f(t) = A$ :*

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{A(0-1)}{p} = \frac{A}{p}. \quad (1.35)$$

*Изображение показательной функции вида  $f(t) = e^{at}$ :*

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}. \quad (1.36)$$

Получаем  $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$ ,  $e^{-at} \div \frac{1}{p+a}$ .

*Изображение производной  $\frac{df}{dt} = f'(t)$ :*

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt.$$

Интегрируя по частям и подставляя пределы интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} f'(t) \div pF(p) - f(0); \\ f'(t) \div pF(p) \text{ при } f(0)=0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

*Изображение второй производной* определяется аналогично:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt} = f''(t) \div p^2 \left[ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right]. \quad (1.38)$$

Изображения производных от временных функций показывают, что действию дифференцирования соответствует умножение на оператор  $p$ .

Найдем изображение неопределенного интеграла от временной функции:  $\int f(t)dt = \int_0^t f(t)dt + f(0)$ .

Применяя метод интегрирования по частям, получим изображения интеграла: для ненулевых начальных условий

$$\int f(t)dt \div \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0)}{p}; \quad (1.39)$$

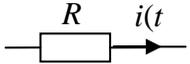
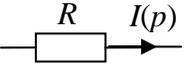
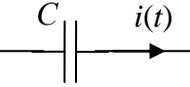
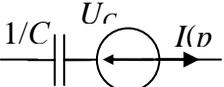
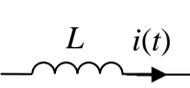
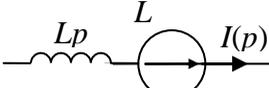
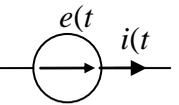
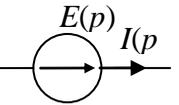
для нулевых начальных условий

$$\int f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}. \quad (1.40)$$

Действию интегрирования соответствует деление изображения функции на оператор  $p$ .

Приведем схемы замещения основных элементов в операторной форме с учетом ненулевых начальных условий на накопителях энергии и их уравнения в алгебраической форме, полученные на основании (1.35) — (1.40) (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Элемент	Операторное изображение элемента	Уравнения в операторной форме
		$U_R(p) = I(p)p$
		$U(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_c(0)}{p}$
		$U_L(p) = I(p)Lp - Li(0)$
		Определяется видом функции

Чтобы составить операторную схему замещения, необходимо предварительно определить ННУ  $i_L(0)$  и  $U_C(0)$ . Если они ненулевые, то в ветвь с индуктивностью по направлению тока следует включить источник ЭДС  $Li_L(0)$ , а последовательно с емкостью — источник ЭДС  $U_C(0)/p$ , направленный против тока. Операторная схема составляется для послекомму- тационного состояния цепи.

Операторные изображения источников ЭДС или тока также могут быть получены преобразованием по Лапласу. В табл. 1.3 приведены изображения наиболее распространенных сигналов. Для нахождения изображений более сложных сигналов используется, например, принцип наложения.

Таблица 1.3

1. Постоянный	$f(t) = A \div F(p) = A/p$
2. Экспоненциальный	$f(t) = Ae^{at} \div F(p) = A/(p-a)$
3. Синусоидальный	$f(t) = \sin(\omega t) \div F(p) = \omega/(p^2 + \omega^2)$
4. Косинусоидальный	$f(t) = \cos(\omega t) \div F(p) = p/(p^2 + \omega^2)$
5. Единичный импульс	$f(t) = \delta(t) \div F(p) = 1$

**Пример 1.11.** Для электрической цепи (рис. 1.18, *a*) дано:  $e = E = \text{const}$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Ключ в исходном состоянии разомкнут. Необходимо составить операторную схему замещения.

*Решение.* Определяем ННУ при разомкнутом ключе  $S$  (рис. 1.18, *a*):

$$i_L(-0) = i_L(0) = \frac{e}{R + R_1}; U_C(-0) = U_C(0) = \frac{R_1 e}{R + R_1}.$$

Начальные условия для тока индуктивности и напряжения емкости ненулевые, поэтому в операторную схему (рис. 1.18, *b*) включаем последовательно с индуктивностью и согласно с ее током источник ЭДС  $Li_L(0)$ , а последовательно с емкостью и встречно ее току — источник ЭДС  $U_C(0)/p$ .

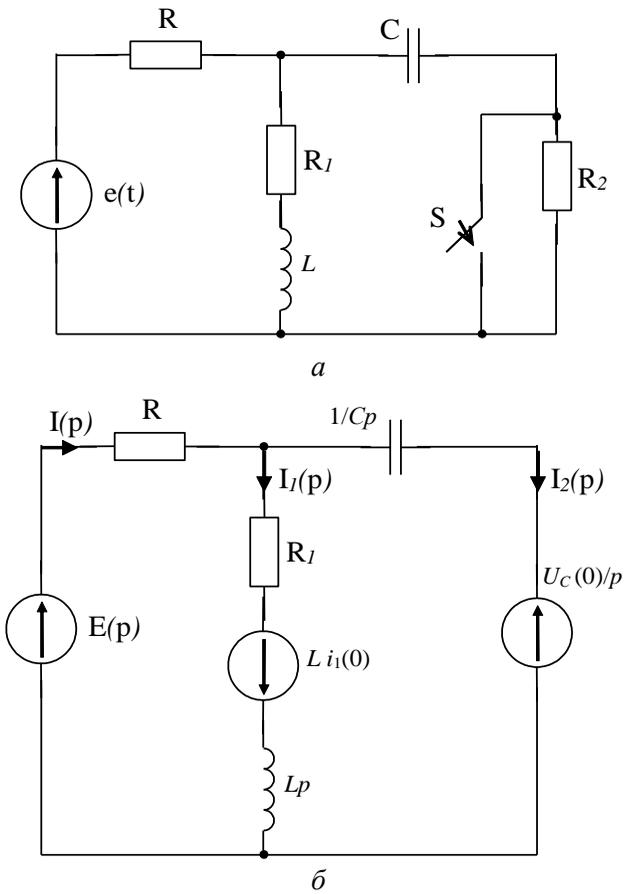


Рис. 1.18

Таким образом, операторная эквивалентная схема цепи имеет такую же структуру, как и эквивалентная схема цепи для мгновенных значений, но содержит независимые дополнительные источники энергии, определяющие запасы энергии цепи в момент, предшествующий коммутации.

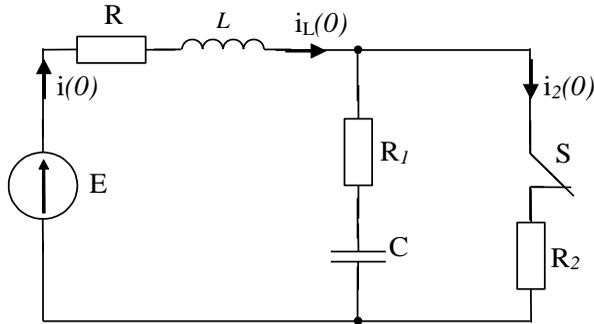
**Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.** Нетрудно показать, что законы Ома и Кирхгофа в операторной и комплексной формах также совпадают:

$$\sum I(p)=0; \quad \sum U(p)=0; \quad I(p)=\frac{E(p)}{Z(p)}. \quad (1.41)$$

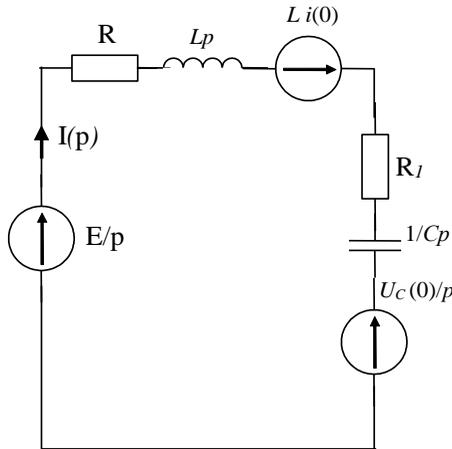
Важно помнить, что в указанных суммах токов, напряжений и ЭДС необходимо учитывать ненулевые начальные условия.

В целом задача отыскания изображений аналогична задаче расчета комплексных токов и напряжений методом комплексных амплитуд.

**Пример 1.12.** Для цепи (рис.1.19, а) с известными параметрами  $E = \text{const}$ ,  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$ ,  $C$  записать закон Ома в операторной форме.



a



b

Рис. 1.19

*Решение.* Для записи закона Ома в операторной форме вначале определим ННУ:

$$i_L(-0) = i_L(0) = i_2(0) = \frac{E}{R + R_2} \neq 0;$$

$$U_C(-0) = U_C(0) = R_2 i_2(0) = \frac{E R_2}{R_1 + R_2} \neq 0.$$

Для операторной схемы замещения цепи после коммутации (рис.1.19, б) по второму закону Кирхгофа

$$\frac{E}{p} + Li_L(0) - \frac{U_C(0)}{p} = I(p) \left[ Lp + R + R_1 + \frac{1}{Cp} \right],$$

откуда изображение тока

$$I(p) = \frac{[E(p) + E_L(p) - U_C(p)]}{Lp + \frac{1}{Cp} + (R + R_1)} = \frac{\frac{E}{p} + Li_L(0) - \frac{U_C(0)}{p}}{Lp + \frac{1}{Cp} + (R + R_1)}.$$

Последнее выражение является законом Ома в операторной форме для схемы на рис. 1.19. Здесь знаменатель является операторным сопротивлением

$$Z(p) = Lp + \frac{1}{Cp} + (R + R_1).$$

Величину, обратную  $Z(p)$ , называют операторной проводимостью:

$$Y(p) = 1/Z(p). \quad (1.42)$$

При нулевых начальных условиях закон Ома имеет вид

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}. \quad (1.43)$$

**Решение обратной задачи. Теорема разложения.** Обратной задачей операторного метода является отыскание оригинала временной функции  $f(t)$  по известному ее операторному изображению  $F(p)$ . Наиболее удобным практическим способом является использование формул теоремы раз-

ложения. При этом необходимо представить функцию  $F(p)$  в виде правильной рациональной дроби

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0} \quad (1.44)$$

при  $m \leq n$ .

Если корни характеристического уравнения  $B(p)$  вещественные разные или комплексно-сопряженные, то оригинал функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (1.45)$$

или

$$f(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k) p_k} e^{p_k t}, \quad (1.45a)$$

где  $B'(p_k)$  — производная  $B(p)$  со значением  $k$ -го корня. Выражения (1.45), (1.45a) и называют теоремой разложения.

При кратных корнях целесообразно изображение разложить на простые дроби и просуммировать оригиналы каждой простой дроби. При наличии комплексно-сопряженных корней следует учесть, что слагаемые теоремы разложения будут также комплексно-сопряженными.

Если же степени полиномов числителя и знаменателя в изображении оказались равными, т. е.  $m = n$ , что возможно при воздействии на цепь единичного импульсного сигнала ( $\delta(t) = 1$ ), то из изображения выделяют целую часть, разлагая его на простые дроби.

**Пример 1.13.** Найти закон изменения тока во времени по его операторному изображению

$$I(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1,6p + 40}{p^2 + 200p + 7500}.$$

*Решение.* Приравняв знаменатель дроби нулю, находим корни характеристического уравнения

$$p_1 = -50 \text{ с}^{-1}, p_2 = -150 \text{ с}^{-1}.$$

Для вещественных и разных по величине корней теорема разложения записывается в виде

$$i(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

После определения производной знаменателя ( $B'(p) = 2p + 200$ ) вычисляем составляющие теоремы разложения:

$$A(p_1) = -40, \quad A(p_2) = -200, \quad B'(p_1) = 100, \quad B'(p_2) = -100.$$

$$\text{В результате } i(t) = -0,4e^{-50t} + 2e^{-150t} \text{ А.}$$

### ***Общая схема применения операторного метода.***

1) Производится анализ цепи до коммутации, и определяются ННУ так же, как и в классическом методе анализа переходных процессов.

2) Составляется операторная схема замещения цепи после коммутации. При ненулевых НУ в каждую ветвь с индуктивностью включают источник ЭДС, равной  $Li_L(0)$  и направленной по току  $I_L(p)$ ; в ветвь с емкостью включают ЭДС, равную  $U_C(0)/p$  и направленную против тока  $I_C(p)$ . В ветви, не имеющие НУ, дополнительные ЭДС не включаются.

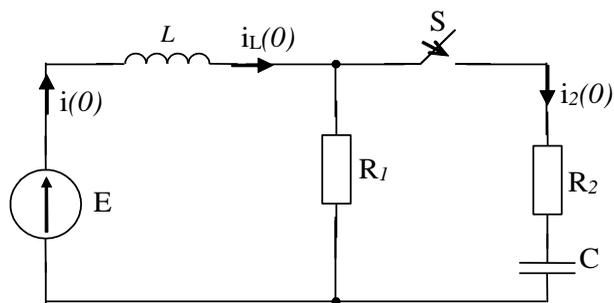
3) Операторная схема замещения, в зависимости от ее сложности и количества переменных величин, рассчитывается каким-либо из рассмотренных выше методов.

4) По операторным изображениям искомым величин записывается операторное характеристическое уравнение (знаменатель функций, одинаковый для всех переменных) и по его виду определяются корни.

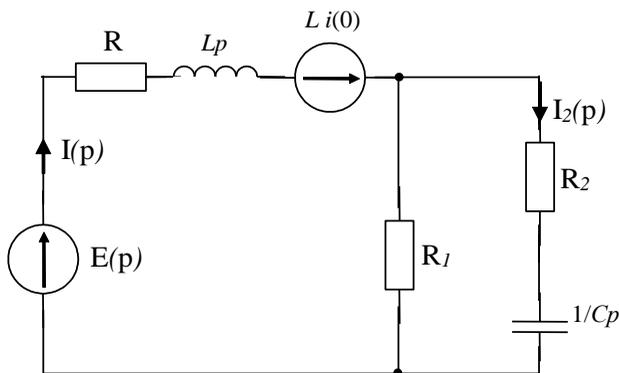
5) Определяются оригиналы искомым функций, по которым и рассчитываются необходимые переходные процессы.

Рассмотрим применение теоремы разложения на примере.

**Пример 1.14.** Параметры элементов схемы (рис. 1.20, а):  $E = 10\text{В} = \text{const}$ ;  $L = 0,01\text{Гн}$ ;  $R_1 = 2\text{кОм}$ ;  $R_2 = 3\text{кОм}$ ;  $C = 0,01\text{мкФ}$ . Определить  $i_2(t), u_C(t)$ .



а



б

Рис. 1.20

*Решение.* Определим ННУ в схеме до коммутации:

$$u_c(0) = u_c(0_-) = 0; \quad i(0) = i(0_-) = E / R_1 = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Составим операторную схему замещения (рис. 1.20, б) и определим  $I_2(p)$ . По закону Ома

$$I(p) = \frac{E/p + Li(0)}{Z(p)}, \quad \text{где } Z(p) = Lp + \frac{R_1(R_2 + 1/pC)}{R_1 + R_2 + 1/pC};$$

$$I_2(p) = I(p) \frac{R_1}{R_1 + R_2 + 1/pC} = \frac{[E + Lpi(0)]R_1C}{p^2LC(R_1 + R_2) + (L + R_1R_2)p + R_1} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Подставим численные значения:

$$I_2(p) = \frac{10^{-9} p + 2 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-7} p^2 + 7 \cdot 10^{-2} p + 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Корни характеристического уравнения  $B(p) = 0$ :

$$p_1 = -4 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = -10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Используя формулы разложения для двух корней, получим:

$$i_2(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

Вычислим составляющие выражения  $i_2(t)$

$$A(p_1) = (-4 \cdot 10^4) \cdot 10^{-9} + 2 \cdot 10^{-4} = 1,6 \cdot 10^{-4},$$

$$A(p_2) = (-10 \cdot 10^4) \cdot 10^{-9} + 2 \cdot 10^{-4} = 10^{-4},$$

$$B'(p) = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} p + 7 \cdot 10^{-2},$$

$$B'(p_1) = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot (-4 \cdot 10^4) + 7 \cdot 10^{-2} = 0,03,$$

$$B'(p_2) = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} (-10 \cdot 10^4) + 7 \cdot 10^{-2} = -0,03$$

и подставим их в выражение тока:

$$i_2(t) = \frac{1,6 \cdot 10^{-4}}{0,03} e^{p_1 t} + \frac{10^{-4}}{-0,03} e^{p_2 t} = 5,33 \cdot 10^{-3} e^{p_1 t} - 3,33 \cdot 10^{-3} e^{p_2 t} \text{ А.}$$

Определим  $u_C(p)$ :

$$u_C(p) = \frac{i_2(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{(E + L p i(0))RC}{Cp[LC p^2(R_1 + R_2) + (L + R_1 R_2 C)p + R_1]};$$

$$u_C(p) = -\frac{0,1p + 2 \cdot 10^4}{p(5 \cdot 10^{-7} p^2 + 7 \cdot 10^{-2} p + 2 \cdot 10^3)} = \frac{D(p)}{p \cdot B(p)} = \frac{D(p)}{M(p)}.$$

Корни знаменателя:  $p = 0$ ;  $p_1 = -4 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_2 = -10^5 \text{ с}^{-1}$ .

$$D(0) = 2 \cdot 10^4; \quad D(p_1) = 1,6 \cdot 10^4; \quad D(p_2) = 10^4;$$

$$M'(p) = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-7} p^2 + 2 \cdot 7 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^3;$$

$$M'(0) = 2 \cdot 10^3; \quad M'(p_1) = -0,12 \cdot 10^4; \quad M'(p_2) = 0,3 \cdot 10^4.$$

Тогда выражение напряжения в зависимости от времени

$$u_C(t) = 10 - 13,33e^{p_1 t} + 3,33e^{p_2 t} \text{ В.}$$

## 1.4. Комбинированный операторно-классический метод расчета переходных процессов

Целью данного метода является упрощение операторных изображений искомых напряжений и токов. В основе метода лежит принцип наложения: принужденные составляющие находятся из расчета установившегося режима после коммутации [3], а свободные составляющие определяются операторным методом, для чего составляется схема замещения свободного процесса, в которой внешние источники отсутствуют, а внутренние определяются по начальным значениям свободных составляющих  $Li_{L_{\text{СВ}}}(0)$ ,  $\frac{U_{\text{ССВ}}(0)}{p}$ .

### Общая схема применения метода.

1) Определяются независимые начальные условия

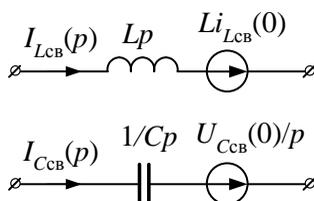
$$i_L(0_-) = i_L(0), \quad u_C(0_-) = u_C(0).$$

2) Определяются принужденные составляющие тока в индуктивности, напряжения на емкости и искомым величин, например  $u_{\text{пр}}(t)$  или  $i_{\text{пр}}(t)$ .

3) Определяются значения свободных составляющих при  $t = 0$ :

$$i_{L_{\text{СВ}}}(0) = i_L(0) - i_{L_{\text{пр}}}(0), \quad u_{\text{ССВ}}(0) = u_C(0) - u_{\text{Спр}}(0).$$

4) Рассчитывается операторная схема после коммутации для свободных составляющих, в которой источники ЭДС закорачиваются, а ветви с источниками тока разрываются. Ниже приведены операторные схемы замещения индуктивного и емкостного элементов.



5) Любым методом находят операторные изображения свободных составляющих искомым величин, например:

$$U_{\text{св}}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \quad \text{или} \quad I_{\text{св}}(p) = \frac{A_1(p)}{B_1(p)}.$$

б) По теореме разложения находят оригиналы, и записывается ответ в виде суммы принужденной и свободной составляющей, например:

$$u(t) = u_{\text{пр}}(t) + u_{\text{св}}(t) = u_{\text{пр}}(t) + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) = i_{\text{пр}}(t) + \sum_{k=1}^n \frac{A_1(p_k)}{B'_1(p_k)} e^{p_k t}.$$

Данный метод удобно применять при наличии в цепи источников, ЭДС или задающие токи которых являются периодическими функциями времени.

**Пример 1.15.** Определить  $i(t)$  в схеме (рис. 1.21) с параметрами:  $e(t) = 150 \sin(800t - 60^\circ)$  В;  $R = 24$  Ом;  $C = 104$  мкФ.

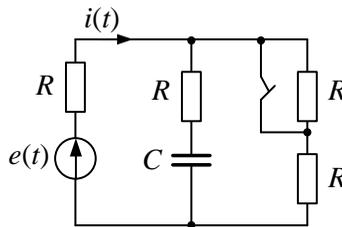


Рис. 1.21

*Решение.* Определим ННУ в схеме до коммутации. Расчет установившегося режима проводим символическим методом. Для этого составляем схему замещения (рис. 1.22, а) и рассчитываем

$$x_C = 1/\omega C = 12 \text{ Ом}; \quad \dot{E}_m = 150 e^{-j60^\circ} \text{ В}.$$

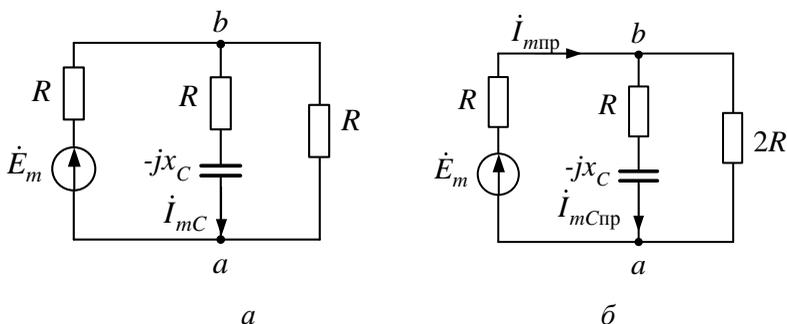


Рис. 1.22

Расчет схемы проведем методом узловых потенциалов. Пусть  $\dot{\phi}_a = 0$ , тогда

$$\dot{\phi}_b = \frac{\dot{E}_m / R}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R - jx_C}} = 53e^{-j68,13} \text{ В};$$

Напряжение на емкостном элементе найдем по закону Ома

$$\dot{U}_{mC} = \dot{I}_{mC} \cdot -jx_C = \frac{\dot{\phi}_b}{R - jx_C} \cdot -jx_C = 23,36e^{-j131} \text{ В};$$

$$u_C(t) = 23,36 \sin(800t - 131^\circ) \text{ В};$$

$$u_C(0) = 23,36 \sin(-131^\circ) = -17,6 \text{ В}.$$

Определим принужденную составляющую в схеме после коммутации (рис. 1.22, б). Тогда при  $\dot{\phi}_a = 0$

$$\dot{\phi}_b = \frac{\dot{E}_m / R}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R - jx_C}} = 64,25e^{-j69,8} \text{ В};$$

$$\dot{I}_{mnp} = \frac{\dot{E}_m - \dot{\phi}_b}{R} = 3,64e^{-j52,7} \text{ А};$$

$$\dot{U}_{mC_{\text{пр}}} = \dot{I}_{mC_{\text{пр}}} \cdot -jx_C = \frac{\Phi_b}{R - jx_C} \cdot -jx_C = 28,56e^{-j132,7} \text{ В};$$

$$u_{C_{\text{пр}}}(t) = 28,56 \sin(800t - 132,7^\circ) \text{ В};$$

$$i_{\text{пр}}(t) = 3,64 \sin(800t - 52,7^\circ) \text{ А}.$$

Определяем значение свободной составляющей при  $t = 0$ :

$$u_{C_{\text{пр}}}(0) = 28,56 \sin(-132,7^\circ) = -21 \text{ В};$$

$$u_{C_{\text{св}}}(0) = u_C(0) - u_{C_{\text{пр}}}(0) = 3,4 \text{ В}.$$

Составляем операторную схему замещения для расчета свободных составляющих (рис. 1.23):

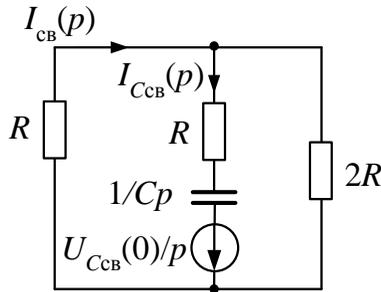


Рис. 1.23

$$I_{C_{\text{св}}}(p) = \frac{-U_{C_{\text{св}}}(0)/p}{R + 1/pC + 2R^2/3R} = \frac{-3,4}{40p + 9615};$$

$$I_{\text{св}}(p) = I_{C_{\text{св}}}(p) \cdot \frac{2R}{R + 2R} = \frac{-6,8}{120p + 28845} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Находим оригинал по теореме разложения:

$$i_{\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = -0,056e^{-240,3t} \text{ А}.$$

Суммируем принужденную и свободную составляющую и получаем  $i_{\text{пр}}(t) = 3,64 \sin(800t - 52,7^\circ) - 0,056e^{-240,3t} \text{ А}.$

## 1.5. Метод интегралов наложения (Дюамеля)

В электрических цепях часто возникают ситуации, когда на входе цепи действуют напряжение или ток произвольной формы. Среди таких воздействий могут быть сигналы, описываемые пилообразными, прямоугольными, треугольными, экспоненциальными, т.е. вида урезанных синусоид, кусочно-непрерывными функциями с разрывами первого рода. Нужно при этом определить реакцию этой цепи на выходе, для чего применяется метод интегрального преобразования Дюамеля. Суть его состоит в использовании принципа суперпозиции (наложения). Раскладывая сложный сигнал на элементарные (стандартной формы), для которых реакция цепи известна, находят реакцию цепи как сумму реакций на каждую из элементарных составляющих.

В качестве элементарных сигналов выбирают единичную функцию Хэвисайда  $1(t)$  и единичный импульс Дирака (дельта-функция)  $\delta(t)$ .

**Единичные и импульсные функции и их свойства.** Единичной ступенчатой функцией (функцией Хэвисайда) называется функция

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t_0; \\ 1, & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (1.46)$$

График функции  $1(t - t_0)$  имеет вид ступеньки или скачка высотой, равной 1 (рис. 1.24, а). Скачок такого типа будем называть *единичным*. При  $t = 0$  для единичной ступенчатой функции используют обозначение  $1(t)$  (рис. 1.24, б).

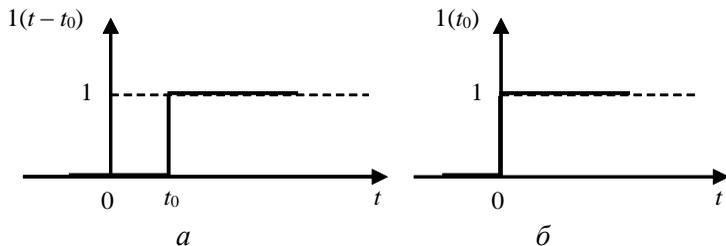


Рис. 1.24

Функцию Хэвисайда  $1(t - t_0)$  удобно использовать для аналитического представления различных внешних воздействий, значение которых скачкообразно изменяется в момент коммутации:

$$f(t) \cdot 1(t - t_0) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ при } t < t_0; \\ f(t), \text{ при } t \geq t_0, \end{array} \right\}, \quad (1.47)$$

где  $f(t)$  — ограниченная функция времени. Если  $f(t) = \text{const} = X$ , то цепь подключена к источнику постоянного напряжения, а  $t = t_0$  — момент коммутации. Внешнее воздействие такого вида называется *неединичным скачком*, который с помощью функции Хэвисайда можно представить в виде

$$x(t) = X 1(t - t_0).$$

Рассмотрим прямоугольный импульс, который может быть получен в виде разности двух одинаковых единичных скачков (рис. 1.25, а):

$$X(t) = 1(\Delta t). \quad (1.48)$$

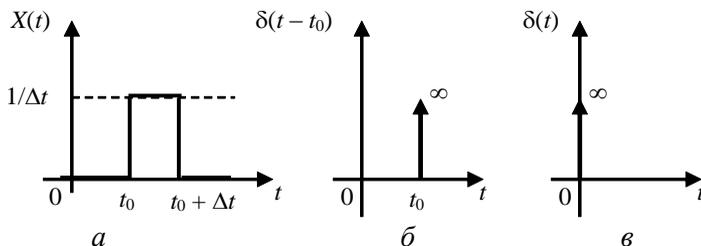


Рис. 1.25

Высота этого импульса  $1/\Delta t$ , длительность  $\Delta t$ , площадь равна 1 и не зависит от  $\Delta t$ . При уменьшении длительности импульса его высота возрастает, причем при  $\Delta t \geq 0$  она стремится к бесконечности, но площадь остается равной 1. Импульс бесконечно малой длительности, бесконечно большой высоты, площадь которого равна 1, будем называть *единичным импульсом*. Функция, определяющая единичный импульс, обозначается  $\delta(t - t_0)$  и называется  *$\delta$ -функцией* или *функцией Дирака*:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty, & \text{при } t = t_0, \end{cases} \quad (1.49)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1.$$

При  $t_0 = 0$  для  $\delta$ -функции используется обозначение  $\delta(t)$ . На временных диаграммах она обозначается вертикальной стрелкой со значком  $\infty$  около острия (рис. 1.25, б, в).

Для установления связи между  $\delta$ -функцией и единичной ступенчатой функцией воспользуемся выражением (1.48). Полагая  $X = 1/\Delta t$  и устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем:

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt} 1(t-t_0), \text{ откуда } 1(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t-t_0) dt.$$

Таким образом,  $\delta$ -функция представляет собой производную единичной ступенчатой функции, а единичная ступенчатая функция — интеграл от  $\delta$ -функции.

**Переходная и импульсная характеристики линейных цепей.** Рассмотрим линейную ЭЦ, не содержащую независимых источников тока и напряжения. Пусть внешнее воздействие на цепь представляет собой неединичный скачок  $x(t) = x^1(t) = X^* 1(t-t_0)$ , а реакция цепи на это воздействие при нулевых НУ  $y(t) = y^1(t)$ .

*Переходной характеристикой*  $h^1(t-t_0)$  линейной цепи называется отношение реакции этой цепи на воздействие неединичного скачка тока или напряжения к высоте этого скачка при нулевых НУ:

$$h^1(t-t_0) = y^1(t) / X. \quad (1.50)$$

Из выражения (1.50) видно, что при  $X=1$

$$h^1(t-t_0) = y^1(t),$$

следовательно, *переходная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока*

или напряжения. Размерность переходной характеристики равна отношению размерностей реакции цепи к размерности внешнего воздействия, поэтому переходная характеристика может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной величиной.

Переходные сопротивления и проводимости могут быть входными или переходными. На рис. 1.26 приведены переходные характеристики простейших  $RC$ - и  $RL$ -цепей.

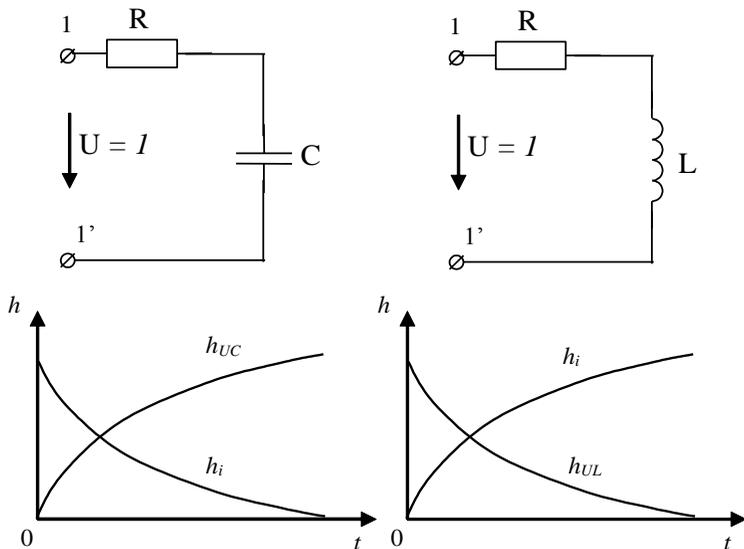


Рис. 1.26

Пусть внешнее воздействие на цепь имеет форму бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади  $S_\delta$ :

$$x(t) = x^\delta(t) = S^\delta \delta(t - t_0).$$

Реакцию цепи на это воздействие при нулевых НУ обозначим  $y(t) = y^\delta(t)$ .

*Импульсной характеристикой*  $h^\delta(t - t_0)$  называется отношение реакции этой цепи на воздействие бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади  $S_\delta$  к площади этого импульса при нулевых НУ:

$$h^\delta(t - t_0) = y^\delta(t) / S_\delta. \quad (1.51)$$

Как следует из выражения (1.51), *импульсная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного импульса* ( $S_\delta = 1$ ), а ее размерность равна отношению размерностей реакции цепи к произведению размерности внешнего воздействия на время.

Подобно комплексной частотной и операторной характеристикам цепи, переходная и импульсная характеристики устанавливают связь между внешним воздействием на цепь и ее реакцией, однако аргументом этих характеристик является не угловая  $\omega$  или комплексная  $p$  частота, а время  $t$ . Поэтому переходная и импульсная характеристики цепи относятся к *временным характеристикам*.

Каждой операторной характеристике  $H_{ij}(p)$  можно поставить в соответствие переходную  $h_{ij}^1(t - t_0)$  и импульсную  $h_{ij}^\delta(t - t_0)$  характеристики. Для установления связи между ними используем выражения (1.50) и (1.51). Запишем:  $h_{ij}^1(t - t_0) \div Y^1(p) / X$ ;  $h_{ij}^\delta(t - t_0) \div Y^\delta(p) S^\delta$ . Выразим операторные изображения реакции цепи  $Y^1(p)$  и  $Y^\delta(p)$  через операторные изображения внешних воздействий (при  $t_0 = 0$ ):

$$X^1(p) = X / p \div x^1(t); \quad X^\delta(p) = S^\delta \div x^\delta(t).$$

Тогда операторные изображения переходной и импульсной характеристик

$$h^1(t) \div H(p) / p; \quad h^\delta(t) \div H(p). \quad (1.52)$$

Таким образом, импульсная характеристика цепи  $h_{ij}^\delta(t)$  — это функция, изображение которой по Лапласу представляет собой операторную характеристику цепи  $H_{ij}(p)$ , а переходная характеристика цепи  $h_{ij}^1(t)$  — функция, операторное изображение которой равно  $H_{ij}(p) / p$ .

**Пример 1.16.** Для схемы цепи (рис. 1.27, а) найти переходную и импульсную характеристики в режиме холостого хода на зажимах 2—2'.

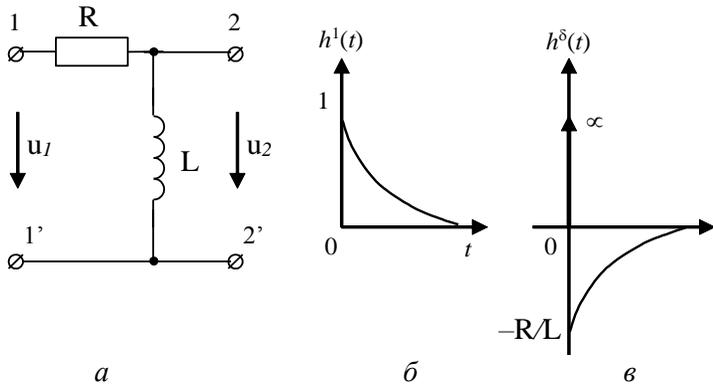


Рис. 1.27

*Решение.* Операторная характеристика данной цепи

$$u_2(p) = Z_2(p)i_1(p),$$

где  $i_1(p) = \frac{u_1(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$ ;  $Z_1(p) = R$ ;  $Z_2 = pL$ . Тогда

$$H_{ij}(p) = K_{21X}(p) = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{p + R/L}.$$

Следовательно, операторные изображения переходной и импульсной характеристик цепи:

$$h^1(t) \div \frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p + R/L} \quad \text{и} \quad h^\delta(t) \div H(p) = \frac{p}{p + R/L}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа, переходим от изображений искомых временных характеристик к оригиналам (рис. 1.27, б, в):

$$h^1(t) = e^{-Rt/L}; \quad h^\delta(t) = \delta(t) = -\frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

**Интегралы наложения (Дюамеля).** *Определение реакции цепи по ее переходной характеристике.* Пусть внешнее воздействие на цепь задается в виде произвольной функ-

ции  $x = x(t)$ , равной нулю при  $t < t_0$  и непрерывной при всех  $t$ , за исключением точки  $t = t_0$ , где  $x(t)$  может иметь конечный разрыв (рис. 1.28). Функцию  $x(t)$  можно приближенно представить в виде суммы неединичных скачков, тогда

$$x(t) \approx x(t_0)1(t - t_0) + \sum_k \Delta x(\tau_k) \cdot 1(t - \tau_k),$$

где  $x(t_0)$  — высота начального скачка функции  $x(t)$ ;  $\Delta x(\tau_k) = x'(\tau_k) \cdot \Delta\tau$  — высота скачка, подаваемого в момент времени  $t = \tau_k$ .

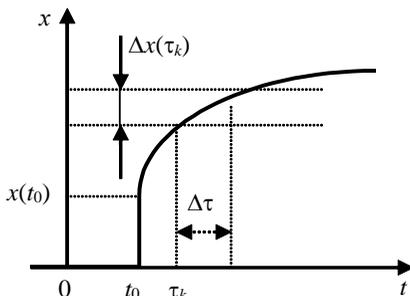


Рис. 1.28

Реакция цепи на воздействие неединичного скачка, приложенного в момент времени  $t = \tau_k$ , равна произведению высоты скачка на переходную характеристику цепи  $h^1(t - \tau_k)$ .

Следовательно, реакция цепи на воздействие, представленное суммой скачков, равна сумме произведений высот скачков на соответствующие переходные характеристики:

$$y(t) \approx x(t_0)h^1(t - t_0) + \sum_k \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau_k} h^1(t - \tau_k)\Delta\tau. \quad (1.53)$$

При  $\Delta\tau \rightarrow 0$  суммирование заменяется интегрированием:

$$y(t) = x(t_0)h^1(t - t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h^1(t - \tau) d\tau. \quad (1.54)$$

Выражение (1.54) известно под названием *интеграла Дюамеля (интеграла наложения)*.

Учитывая свойства определенных интегралов, можно записать другую форму интеграла Дюамеля:

$$y(t) = x(t_0)h^1(t) + \int_{t_0}^t \frac{dx(t-\tau)}{d\tau} h(\tau)d\tau. \quad (1.55)$$

Учитывая связь переходной и импульсной характеристик, получим третью форму интеграла Дюамеля

$$y(t) = x(t)h^1(t_0) + \int x(\tau)h^\delta(t-\tau)d\tau. \quad (1.56)$$

Выражения (1.54 — 1.56) можно использовать и для определения реакции цепи в том случае, когда внешнее воздействие на цепь описывается кусочно-непрерывной функцией, при этом интервал интегрирования разбивается на несколько промежутков в соответствии с интервалами непрерывности функции  $x(t)$ .

**Пример 1.17.** Рассчитать переходный процесс в  $RL$ -цепи (рис. 1.27). Входное напряжение задается выражением  $U(t) = U_0 e^{-\alpha t}$ . Определить  $i(t)$ .

*Решение.* Интеграл Дюамеля (1.54) для тока с использованием переходной проводимости  $g(t)$  может быть записан в виде:

$$i(t) = U_0 g(t) + \int_0^t U'(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Найдем составляющие, входящие в выражение тока:

$$g(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-Rt/L}); \quad g(t-\tau) = \frac{1}{R} (1 - e^{-R(t-\tau)/L});$$

$$U'(t) = -\alpha U_0 e^{-\alpha t}; \quad U'(\tau) = -\alpha U_0 e^{-\alpha \tau}.$$

**Применение интеграла Дюамеля для сигнала сложной формы.** Пусть на вход цепи с переходной функцией  $g(t)$  (рис. 1.29, *a*), подается сигнал  $u(t)$  (рис. 1.29, *б*). Требуется записать выражения для определения искомого тока.

Входной сигнал имеет три интервала времени, на которых форма сигнала отличается от предыдущего.

Для интервала времени  $[0 \leq t < t_1]$

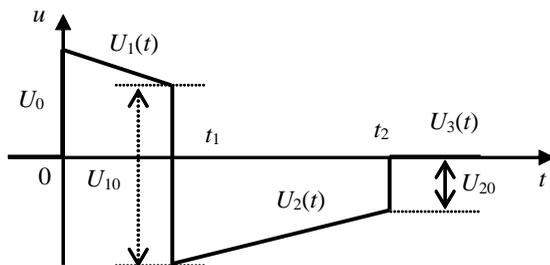
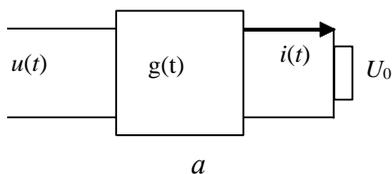


Рис. 1.29

$$i^1(t) = U_0 g(t) + \int_0^t U'(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Для второго интервала времени  $[t_1 \leq t < t_2]$

$$i^2(t) = U_0 g(t) + \int_0^{t_1} U_1'(\tau) g(t - \tau) d\tau - U_{10} g(t - t_1) + \int_{t_1}^t U_2'(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Здесь часть выражения (до знака минус) учитывает предыдущее воздействие. Обозначим ее  $A(t)$ . Часть выражения  $B(t) = U_{10} g(t - t_1)$  учитывает то, что скачок  $U_{10}$  произошел с запаздыванием на время  $t_1$ . Знак «минус» указывает на уменьшение функции.

Для третьего интервала  $[t_2 \leq t < \infty]$

$$i^3(t) = A(t) - B(t) + \int_{t_1}^{t_2} U_2'(\tau) g(t - \tau) d\tau + \\ + U_{20} g(t - t_2) + \int_{t_2}^t U_3'(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Аналогично формируются интегральные выражения для любого числа временных интервалов, как для тока, так и для напряжения.

***Порядок расчета переходных процессов методом интегралов Дюамеля.***

1) Каким-либо методом находят нужную переходную характеристику цепи (переходное сопротивление, переходную передаточную функцию и т.д.).

2) В зависимости от конкретной задачи подбирают наиболее рациональную форму интеграла Дюамеля.

3) Вычисляют производную подынтегральной функции интеграла Дюамеля (входного воздействия или переходной характеристики в зависимости от выбранной формы интеграла).

4) Подставляют найденные выше функции в выбранную в п. 2 формулу, указывают пределы интегрирования по переменной  $t$  и производят интегрирование.

5) Если на входе цепи действует сигнал сложной формы, то производят разбиение всего интервала на подинтервалы, где сигнал непрерывен и далее действуют как в рассмотренном выше случае применения интеграла Дюамеля для сигналов сложной формы.

## 2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 2.1. Возникновение переходных процессов в цепях с распределенными параметрами

В цепях с распределенными параметрами переходные процессы возникают при включении и отключении какого-либо участка, в том числе источника сигнала. Длинная линия — наиболее распространенный пример таких цепей, поэтому ниже речь идет о переходных процессах в линиях. Переходные процессы в линиях также возникают при изменении внешних электромагнитных полей (при грозовых разрядах), при передаче телеграфных и телефонных сигналов, импульсов телемеханики или специальных импульсов телеконтроля для проверки линий и выявления мест их повреждения.

В линиях электропередачи во время переходного режима возможны перенапряжения и сверхтоки, в линиях связи — искажения сигналов. Эти обстоятельства необходимо учитывать при выборе оборудования.

### 2.2. Прямая и обратная волны в однородной линии. Понятие падающей и отраженной волн

Рассмотрим известные дифференциальные уравнения однородной двухпроводной линии

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где  $L_0$ ,  $C_0$ ,  $R_0$  и  $G_0$  — параметры однородной линии на единицу ее длины;  $x$  — координата, отсчитываемая от начала линии.

В линии без потерь ( $R_0 = G_0 = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Решение уравнений (2.2) для однородной линии в общем случае ( $L_0$  и  $C_0$  не зависят от  $x$ ):

$$u = f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c) = u_{\text{пр}} + u_{\text{об}}; \quad (2.3)$$

$$i = \frac{1}{Z_C} [f_1(t - x/c) - f_2(t + x/c)] = i_{\text{пр}} - i_{\text{об}} = (u_{\text{пр}} - u_{\text{об}})/Z_C, \quad (2.4)$$

где  $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$  — скорость волны, равная фазовой скорости;  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — функции распространения вдоль линии напряжений прямой и обратной волн ( $u_{\text{пр}}$  и  $u_{\text{об}}$ ) в момент времени  $t = 0$ ;  $Z_C = \sqrt{L_0/C_0}$  — характеристическое (волновое) сопротивление линии.

Прямая волна движется от начала к концу линии, т.е. в сторону возрастания координаты  $x$ , а обратная — от конца к началу линии.

*Фронтом прямой волны* называется точка линии с координатой  $x_{\text{ф}}$ , для которой  $u_{\text{пр}} = 0$  при  $x > x_{\text{ф}}$  и  $u_{\text{пр}} \neq 0$  при  $x < x_{\text{ф}}$  (рис. 2.1, а). Координата *фронта обратной волны* характеризуется условием:  $u_{\text{об}} = 0$  при  $x < x_{\text{ф}}$  и  $u_{\text{об}} \neq 0$  при  $x > x_{\text{ф}}$  (рис. 2.1, б).

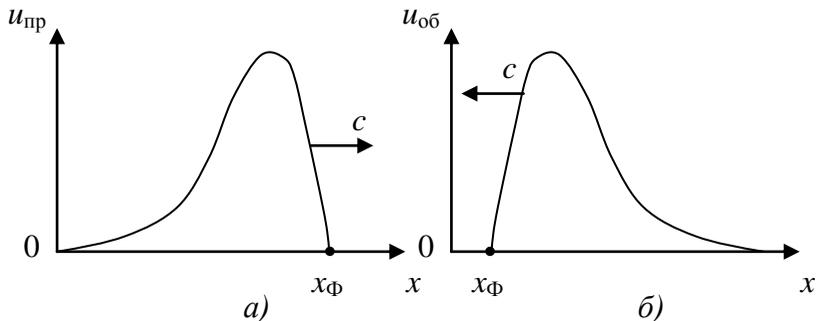


Рис. 2.1

Фронт прямой волны движется в сторону возрастания, а фронт обратной волны — в сторону убывания координаты  $x$  со скоростью  $c$ . Таким образом, *фронт волны* можно определить как начальный участок волны, первым продвигающийся по линии.

Вид функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  определяет форму прямой и встречной волн в зависимости от начальных условий и сохраняется неизменным при движении волн вдоль однородной линии без потерь, если источники и приемники включены только в начале и конце линии. В линии с потерями без искажений напряжение и ток каждой волны уменьшаются по мере ее движения.

Если исходная волна (прямая или обратная), называемая *падающей*, движется по линии и падает на узел соединения с линией, имеющей другие параметры, то в месте соединения двух линий эта волна распадается на две — *преломленную* (или *проходящую*), которая проходит из первой линии во вторую, и *отраженную* от места соединения двух линий. Будем применять для падающей и отраженной волн индексы соответственно «пад» и «отр».

### 2.3. Прямая волна при подключении к линии источника напряжения

**Включение источника постоянного напряжения.** При подключении к началу однородной линии с волновым сопротивлением  $Z_c$  источника постоянного напряжения с ЭДС  $E$  (рис. 2.2) напряжение в начале линии (между зажимами 1 — 1') сразу достигает постоянного значения  $U = E$ .

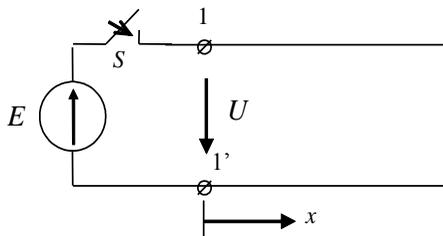


Рис. 2.2

При этом возникает прямая волна с прямоугольным фронтом, перемещающаяся вдоль линии со скоростью  $c$ . Напряжение волны  $u_{\text{пр}} = U$  (рис. 2.3, а), ток волны

$$i_{\text{пр}} = \frac{u_{\text{пр}}}{Z_c} = \frac{U}{Z_c} = I \text{ (рис. 2.3, б).}$$

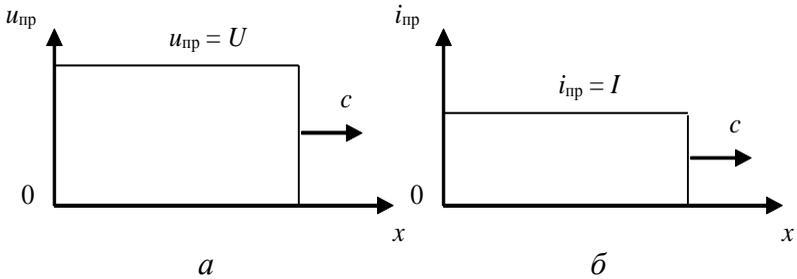


Рис. 2.3

В реальных условиях напряжение увеличивается до величины  $U$  не мгновенно, поэтому форма волны отличается от прямоугольной. На форму волны оказывают влияние внутреннее сопротивление источника, конструкция коммутирующего устройства, параметры линии и другие условия. При допущении, что линия не имеет потерь, ее форма не меняется при движении вдоль линии.

В тех точках линии, до которых еще не дошла волна, напряжение и ток равны нулю. В точках, пройденных фронтом волны, напряжение и ток соответственно равны  $U$  и  $I$ .

До тех пор пока волна не достигла конца линии, напряжение и ток вдоль линии в момент времени  $t$  распределяются по закону (рис. 2.3, а, б):

$$u = u_{\text{пр}}(x, t) = U; \quad i = i_{\text{пр}}(x, t) = U/Z_c \quad (2.5)$$

при  $x < ct$ ;

$$u = u_{\text{пр}}(x, t) = 0; \quad i = i_{\text{пр}}(x, t) = 0 \quad (2.6)$$

при  $x > ct$ .

**Включение источника с экспоненциально изменяющейся ЭДС.** При экспоненциальном изменении ЭДС источ-

ника  $e(t)$  (рис. 2.4, а), а, следовательно, и напряжения (тока) в начале линии ( $x = 0$ ) прямая волна напряжения (тока) также имеет экспоненциальную форму (рис. 2.4, б, в).

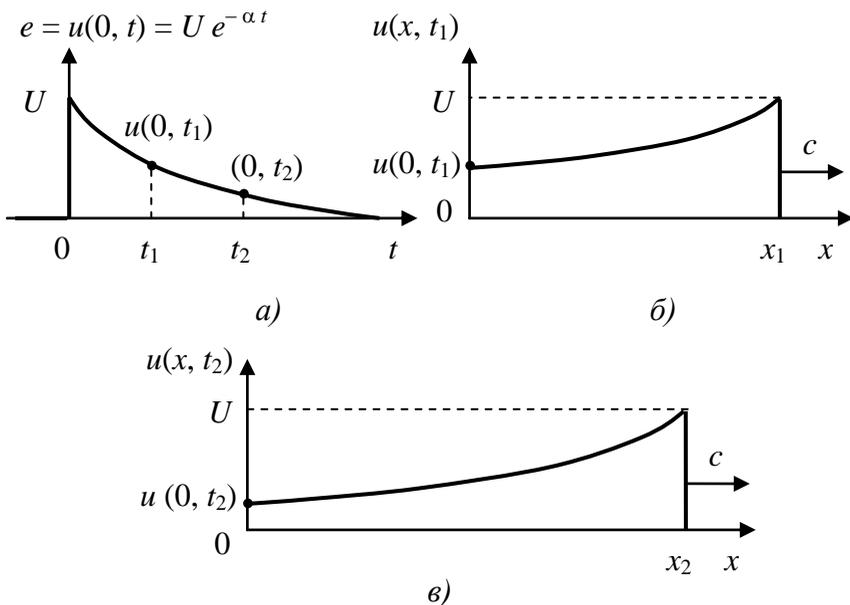


Рис. 2.4

В момент времени  $t_1$  (рис. 2.4, б) напряжение и ток в начале линии

$$u(0, t_1) = u_{\text{нп}}(0, t_1) = U e^{-\alpha t_1} < U, \quad (2.7)$$

$$i(0, t_1) = i_{\text{нп}}(0, t_1) = I e^{-\alpha t_1}, \quad (2.8)$$

а в точке с координатой  $x_1 = ct_1$

$$u(x_1, t_1) = u_{\text{нп}}(x_1, t_1) = U, \quad (2.9)$$

$$i(x_1, t_1) = i_{\text{нп}}(x_1, t_1) = I. \quad (2.10)$$

В момент времени  $t_2 > t_1$ , когда фронт волны находится на расстоянии  $x_2 = ct_2 > x_1$  от начала линии (рис. 2.4, в), в точке  $x_2$  напряжение и ток равны соответственно  $U$  и  $I$ , а в начале линии

$$u(0, t_2) = U e^{-\alpha t_2} < u(0, t_1), \quad (2.11)$$

$$i(0, t_2) = I e^{-\alpha t_2} < i(0, t_1). \quad (2.12)$$

При  $x < ct$ , т. е. с учетом запаздывания  $x/c$ , равного времени движения волны от начала линии до точки  $x$

$$u_{\text{пр}}(x, t) = U e^{-\alpha(t-x/c)}, \quad (2.13)$$

$$i_{\text{пр}}(x, t) = I e^{-\alpha(t-x/c)} \quad (2.14)$$

при  $x > ct$   $u_{\text{пр}}(x, t) = 0$ ,  $i_{\text{пр}}(x, t) = 0$ .

**Включение источника синусоидального напряжения.**

При подключении к линии источника синусоидального напряжения форма волны зависит от фазы напряжения в момент коммутации ( $t=0$ ). Например, источнику синусоидального напряжения с начальной фазой  $\pi/4$  (рис. 2.5, а) соответствует график распределения напряжения вдоль линии в момент времени  $t_1 = 5T/8$  (рис. 2.5, б).

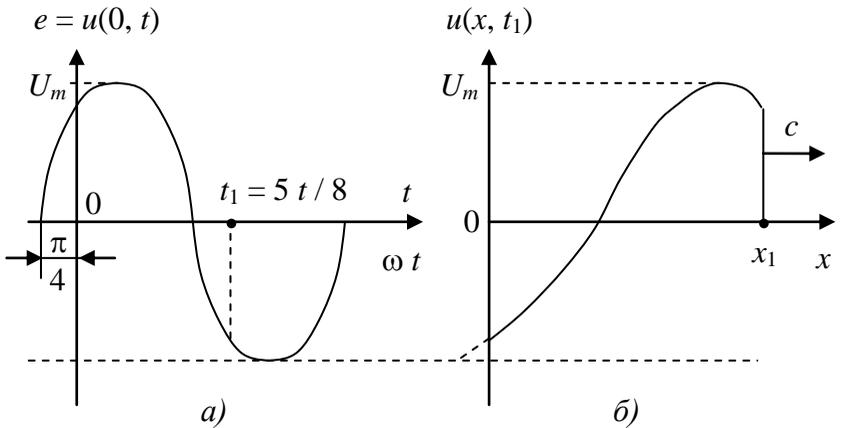


Рис. 2.5

Если за данный промежуток времени напряжение источника не успевает заметно измениться, то для упрощения анализа переходных процессов принимают допущение, что форма волны остается исходной.

**Включение произвольного источника.** Реальный источник энергии имеет внутреннее сопротивление, которое может не быть активным. При этом фронт возникающей волны не прямоугольный.

Для определения тока и напряжения прямой волны составляют эквивалентную схему, на которой длинную линию представляют волновым сопротивлением  $Z_C = u_{\text{пр}}/i_{\text{пр}}$ . Для эквивалентной схемы применим любой метод расчета переходных процессов в цепи с сосредоточенными параметрами (классический, операторный, интеграла Фурье и др.).

Найдем напряжение  $u_{\text{пр}}(0, t)$  и ток  $i_{\text{пр}}(0, t)$  прямой волны в начале линии (рис. 2.6, а), эквивалентная схема которой содержит постоянную ЭДС с индуктивным внутренним сопротивлением  $L$  и волновое сопротивление  $Z_C$  (рис. 2.6, б).

По второму закону Кирхгофа

$$E = L \frac{d i_{\text{пр}}(0, t)}{d t} + u_{\text{пр}}(0, t) = L \frac{d i_{\text{пр}}(0, t)}{d t} + Z_C i_{\text{пр}}(0, t). \quad (2.15)$$

С учетом начального условия  $i_{\text{пр}}(0, 0) = 0$  (ветвь с индуктивностью) найдем ток (рис. 2.6, в):

$$i_{\text{пр}}(0, t) = I(1 - e^{p_1 t}), \quad (2.16)$$

где  $I = E/Z_C$ ,  $p_1 = -Z_C/L$ .

Кривые тока и напряжения прямой волны в линии имеют такую же форму (рис. 2.6, в), а на рис. 2.6, г показана кривая распределения тока  $i(x, t_1) = i_{\text{пр}}(x, t_1)$  в линии в момент времени  $t_1$  на расстоянии  $x_1 = c t_1$  от начала линии до фронта волны.

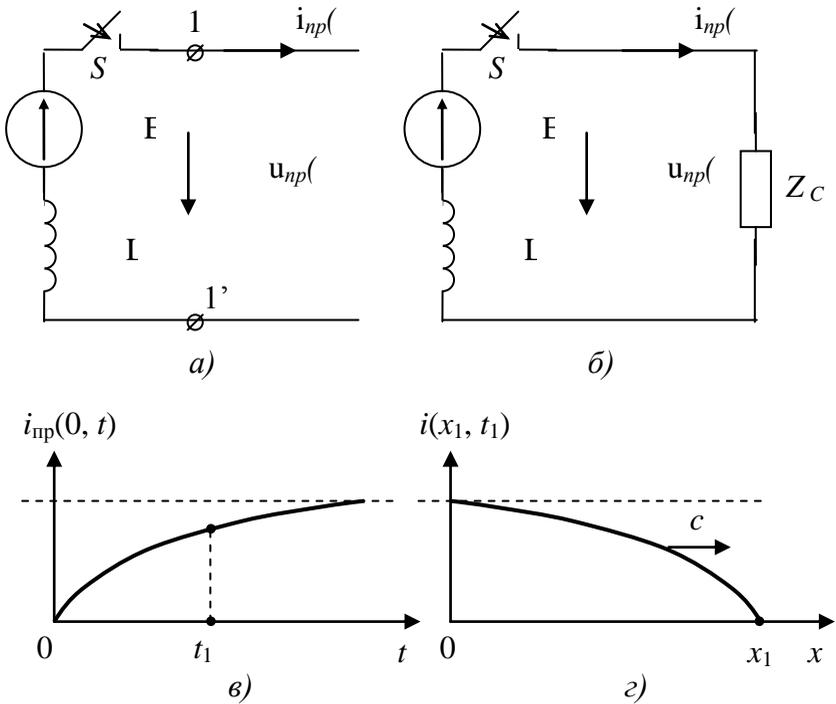


Рис. 2.6

## 2.4. Отраженные волны

**Отражение от резистивного элемента.** При согласованной нагрузке  $R_H = Z_C$  в конце линии (рис. 2.7, а) падающая волна частично отразится, образуя отраженную волну.

Рассмотрим случай, когда волна с прямоугольным фронтом  $u_{np} = U$ ,  $i_{np} = U/Z_C = I$  (рис. 2.3, а, б) через время  $\tau = l/c$  после включения источника  $E = \text{const}$  достигла конца линии и отразилась от сопротивления нагрузки  $R_H$ .

Напряжение и ток отраженной волны:

$$u_{\text{отр}} = u_{\text{об}} = \frac{R_H - Z_C}{R_H + Z_C} u_{np} = \frac{R_H - Z_C}{R_H + Z_C} u_{\text{пад}}; \quad (2.17)$$

$$i_{\text{отр}} = \frac{R_H - Z_C}{R_H + Z_C} i_{\text{пад}}, \quad (2.18)$$

где  $\frac{R_H - Z_C}{R_H + Z_C} = \frac{u_{\text{отр}}}{u_{\text{пад}}} = \frac{i_{\text{отр}}}{i_{\text{пад}}} = k$  — коэффициент отражения.

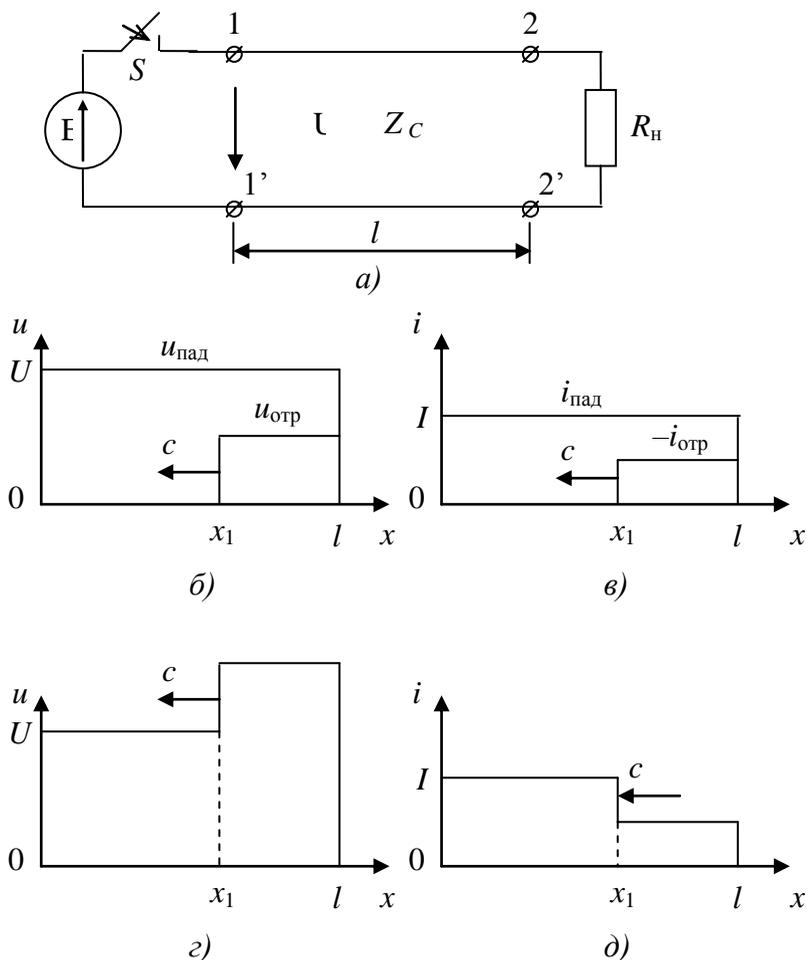


Рис. 2.7

Покажем распределение напряжения и тока падающей и отраженной волн (рис. 2.7, б, в) и результирующих напряже-

ния и тока  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ ;  $i = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}}$  (рис. 2.7, з, д), когда отраженная волна прошла  $2/5$  расстояния между концом и началом линии ( $x_1 = 3l/5$ ), приняв, что сопротивление нагрузки  $R_{\text{H}} = 3Z_C$ , т. е. коэффициент отражения  $k = 0,5$ . До точек с координатами  $x < x_1$  волна еще не дошла, поэтому на данном участке линии напряжение  $u = u_{\text{пад}} = U$ , ток  $i = i_{\text{пад}} = U/Z_C = I$ . Для точек с координатами  $x > x_1$ :  $u = U + U/2 = 1,5U$ ;  $i = I - I/2 = 0,5I$ .

Очевидно, всегда в линии после отражения волны при  $R_{\text{H}} > Z_C$  (т. е.  $k > 0$ ) напряжение увеличится, ток уменьшится, а при  $R_{\text{H}} < Z_C$  ( $k < 0$ ) напряжение уменьшится, ток увеличится. Форма отраженной волны повторяет форму падающей волны при любом активном сопротивлении нагрузки.

**Холостой ход и короткое замыкание в конце линии.** В частных случаях  $Z_{\text{H}} = \infty$  (холостой ход) и  $Z_{\text{H}} = 0$  (короткое замыкание) коэффициент отражения достигает наибольшего по модулю значения — при холостом ходе  $k_{\text{ХХ}} = 1$ , при коротком замыкании  $k_{\text{КЗ}} = -1$ . Во всех других случаях коэффициент отражения меньше единицы, т. е. напряжение и ток отраженной волны меньше, чем падающей, поскольку энергия падающей волны частично поглощается в сопротивлении нагрузки.

В случае холостого хода  $u_{\text{отр}} = k_{\text{ХХ}} u_{\text{пад}} = U$ , и напряжение в результате отражения удваивается:  $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = U + U = 2U$  (есть опасность перенапряжения), а  $i_{\text{отр}} = k_{\text{ХХ}} i_{\text{пад}} = I$ , и ток  $i = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}} = 0$ . При коротком замыкании ток удваивается, а напряжение уменьшается до нуля.

**Отражение от неоднородности.** Узел соединения различных линий (или разветвление) в конце линии следует рассматривать как неоднородность, т. е. некоторое сопротивление  $R_H$ , включенное в конце линии. Например, если в конце линии с волновым сопротивлением  $Z_{C1}$  параллельно подключены две линии с волновыми сопротивлениями  $Z_{C2}$  и  $Z_{C3}$  (рис. 2.8), то по этим линиям пойдут волны, сумма токов которых равна току, направленному к узлу по первой линии.

При этом  $R_H = \frac{Z_{C2} Z_{C3}}{Z_{C2} + Z_{C3}}$ . Выводы об отражении волны от

активного сопротивления, сделанные выше, справедливы и для случая отражения от неоднородности.

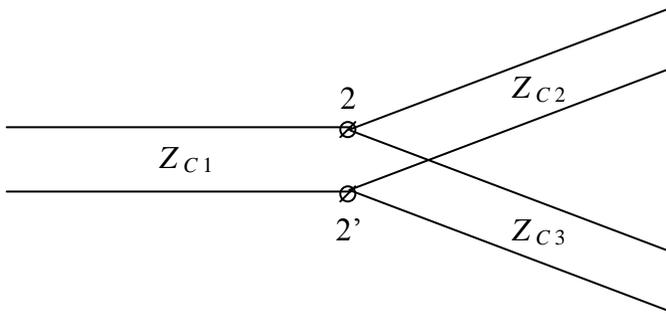


Рис. 2.8

**Общий случай отражения волны от конца линии.**

Если к концу линии подключен пассивный двухполюсник (рис. 2.9) и напряжение в конце линии  $u_{\text{пад}}$  известно, то напряжение на зажимах двухполюсника  $u_H$  можно представить как

$$u_H = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}. \quad (2.19)$$

Аналогично — для тока в конце линии:

$$i_H = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}} \quad (2.20)$$

или

$$i_H Z_C = i_{\text{пад}} Z_C - i_{\text{отр}} Z_C = u_{\text{пад}} - u_{\text{отр}}, \quad (2.21)$$

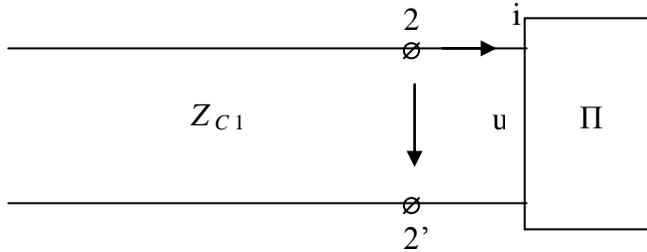


Рис. 2.9

где  $u_{\text{пр}} = u_{\text{пад}} = u_{\text{пад}}(l, t)$ ,  $u_{\text{отр}} = u_{\text{отр}}(l, t - \tau)$ ,  $i_{\text{пад}} = i_{\text{пад}}(l, t)$ ,  $i_{\text{отр}} = i_{\text{отр}}(l, t - \tau)$ , а  $\tau = l/c$  — время пробега волны вдоль линии.

Аргумент имеет вид  $t - \tau$ , следовательно, отраженная волна возникла на время  $\tau$  позднее, чем падающая.

Примем в уравнениях (2.19) — (2.21) за начало отсчета времени момент достижения падающей волной конца линии. Будем отсчитывать расстояние точки линии  $y = l - x$  от ее конца, тогда

$$\begin{aligned} u_{\text{отр}} &= u_{\text{отр}}(0, t), \quad u_{\text{пад}} = u_{\text{пад}}(0, t + \tau), \\ i_{\text{отр}} &= i_{\text{отр}}(0, t), \quad i_{\text{пад}} = i_{\text{пад}}(0, t + \tau). \end{aligned}$$

Если исключить из уравнений (2.19) и (2.20) неизвестное напряжение отраженной волны, то получим:

$$u_{\text{н}} + i_{\text{н}} Z_{\text{C}} = 2u_{\text{пад}}.$$

Уравнению (2.22) соответствует схема рис. 2.10 при замыкании ключа в момент достижения волной конца линии и появления напряжения  $u_{\text{н}}$  и тока  $i_{\text{н}}$ . При помощи этой схемы можно найти напряжение  $u_{\text{н}}$  и ток  $i_{\text{н}}$  в конце линии при произвольной нагрузке. Далее напряжение  $u_{\text{отр}}$  и ток  $i_{\text{отр}}$  отраженной волны в конце линии можно определить из уравнений (2.19) и (2.20). В общем случае форма отраженной волны не совпадает с формой падающей волны.

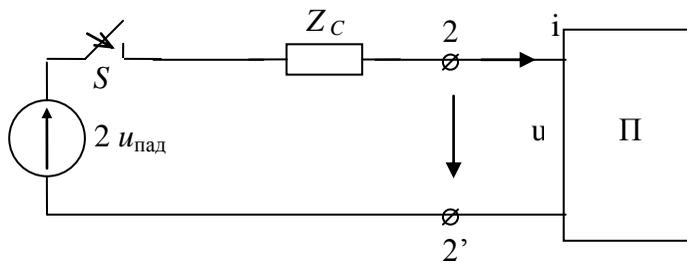


Рис. 2.10

Напряжение и ток отраженной волны в любой точке линии  $u_{отр}(y, t) = u_{отр}(0, t - y/c)$  и  $i_{отр}(y, t) = i_{отр}(0, t - y/c)$ .

Отраженную от произвольной нагрузки волну напряжения также можно найти при помощи коэффициента отражения в операторной форме

$$N(p) = \frac{Z_H(p) - Z_C}{Z_H(p) + Z_C}. \quad (2.23)$$

Напряжение отраженной волны

$$U_{отр}(p) = N(p)U_{пад}(p),$$

где  $U_{пад}(p)$  — операторное изображение напряжения падающей волны в конце линии, которое известно.

**Пример 2.1.** Падающая волна прямоугольной формы  $u_{пад} = 7$  кВ отражается от активно-индуктивной нагрузки (рис. 2.11, а). Параметры линии:  $l = 300$  км;  $Z_C = 300$  Ом;  $R = 20$  Ом;  $L = 10$  Гн. Построить кривые распределения напряжения и тока вдоль линии к моменту времени, когда отраженная волна дойдет до середины линии.

*Решение.* По эквивалентной схеме рис. 2.11, б

$$i_H = \frac{2u_{пад}}{Z_C + R}(1 - e^{pt}) = 43,75(1 - e^{-32t}) \text{ А}; \quad p = -\frac{Z_C + R}{L}.$$

Из уравнения (2.20) ток отраженной волны

$$i_{отр} = \frac{u_{пад}}{Z_C} - i_H = -20,42 + 43,75 e^{-32t} \text{ А}.$$

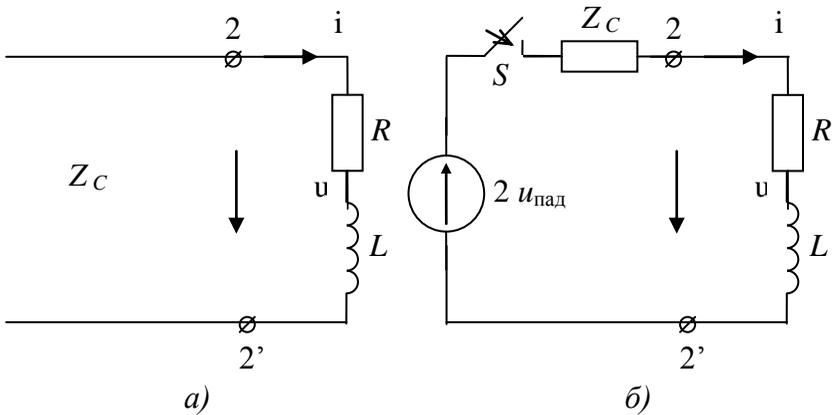


Рис. 2.11

Напряжение отраженной волны

$$u_{\text{отр}} = i_{\text{отр}} Z_C = -6,126 + 13,125 e^{-32t} \text{ кВ.}$$

В момент достижения волной конца линии напряжение удваивается, а ток падает до нуля (согласно первому закону коммутации), т. е. в первый момент волна отражается так же, как от разомкнутого конца линии. Затем ток увеличивается, а напряжение уменьшается (рис. 2.12, а, б).

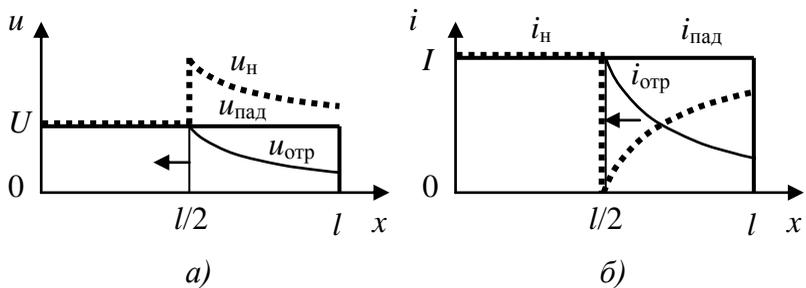


Рис. 2.12

**Пример 2.2.** Определить напряжение отраженной волны (пример 2.1) с помощью коэффициента отражения в операторной форме.

*Решение.* Операторное изображение падающего напряжения  $U_{\text{пад}}(p) = 7/p$ . Полное операторное сопротивление нагрузки

$$Z_{\text{H}}(p) = Lp + R + Z_C = 10p + 320.$$

Тогда  $N(p) = \frac{p+2}{p+62}$ ;  $U_{\text{отр}}(p) = \frac{7}{p} \frac{p+2}{p+62}$ .

Применив теорему разложения, получим:

$$u_{\text{отр}} = -6,125 + 13,125e^{-32t} \text{ кВ}.$$

## 2.5. Расчет волн, возникающих при переключениях

Волны в линиях возникают также при ненулевых начальных условиях, т. е. при коммутациях под напряжением и (или) при наличии тока в линии.

Рассмотрим подключение нагрузки  $R_{\text{H}}$  к концу линии без потерь с постоянным источником ЭДС  $E = U$  в начале (рис. 2.13). До коммутации ток в линии равен нулю, напряжение —  $U$ .

Найдем напряжение  $u_{\text{об}}$  и ток  $i_{\text{об}}$  обратной волны, возникающей после коммутации и движущейся к началу линии.

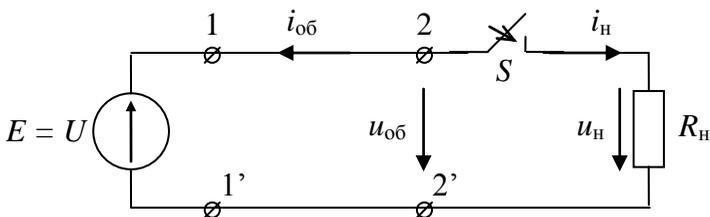


Рис. 2.13

С учетом граничных условий

$$i_H + i_{o6} = 0; \quad (2.24)$$

$$U + u_{o6} = u_H. \quad (2.25)$$

С учетом выражений  $i_H = u_H/R_H$  и  $i_{o6} = u_{o6}/Z_C$  уравнение (2.24) имеет вид

$$\frac{u_H}{R_H} + \frac{u_{o6}}{Z_C} = 0. \quad (2.26)$$

Подставив в (2.26) выражение (2.25), получим:

$$\frac{U + u_{o6}}{R_H} + \frac{u_{o6}}{Z_C} = 0.$$

Отсюда

$$u_{o6} = -\frac{U Z_C}{R_H + Z_C}; \quad i_{o6} = -\frac{U}{R_H + Z_C}. \quad (2.27)$$

Расчет переходного процесса в линии значительно упрощается путем сведения к расчету цепи при нулевых начальных условиях. При этом нет необходимости в анализе граничных условий. Коротко суть данного метода: при подключении нагрузки или участков линии необходимо на докоммутационный режим наложить режим, который возникает при подключении к зажимам ключа источника напряжения, равного докоммутационному напряжению на зажимах. Напряжения и токи, которые накладываются на ранее существовавшие, представляют собой вновь возникающие волны и рассчитываются при нулевых начальных условиях (в цепи отсутствует запасенная энергия и источники, кроме включаемого на зажимы ключа).

Для цепи рис. 2.13 расчет обратной волны можно рассмотреть на примере схемы рис. 2.14, а. По эквивалентной схеме (рис. 2.14, б) найдем:

$$i_{o6} = -\frac{U}{R_H + Z_C}; \quad u_{o6} = i_{o6} Z_C.$$

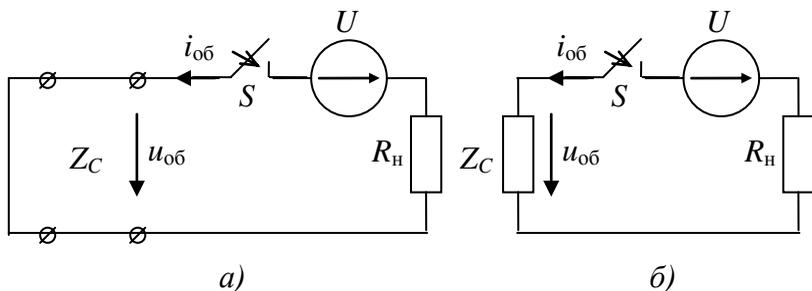


Рис. 2.14

При расчете напряжений и токов обратных волн при отключении нагрузок или участков линии метод сведения к нулевым начальным условиям заключается в подключении к зажимам ключа источника тока, ток которого равен докоммутационному току в ветви ключа.

**Пример 2.3.** Найти напряжения и токи волн, возникающих при подключении к линии без потерь (рис. 2.15, а) дополнительного сопротивления  $R = 20 \text{ Ом}$  и при отключении такого же сопротивления. Параметры линии:  $U = 6,3 \text{ кВ}$ ;  $J = 3 \text{ А}$ ;  $R_H = 30 \text{ Ом}$ ;  $Z_C = 200 \text{ Ом}$ .

*Решение.* При подключении дополнительного сопротивления  $R$  по эквивалентной схеме (рис. 2.15, б) найдем:

$$i_{\text{np}} = i_{\text{об}} = -\frac{1}{2} \frac{U}{R + Z_C/2} = -26,25 \text{ А};$$

$$u_{\text{np}} = u_{\text{об}} = i_{\text{np}} Z_C = -5,25 \text{ кВ}.$$

Наложение этих токов и напряжений на ток  $I = U/R_H$  и напряжение  $U$  иллюстрируют графики (рис. 2.15, в).

В случае отклонения сопротивления  $R$  по эквивалентной схеме рис. 2.15, г найдем:

$$i_{\text{np}} = i_{\text{об}} = \frac{J}{2} \frac{U}{2R} = 157,5 \text{ А};$$

$$u_{\text{np}} = u_{\text{об}} = i_{\text{np}} Z_C = 31,5 \text{ кВ}.$$

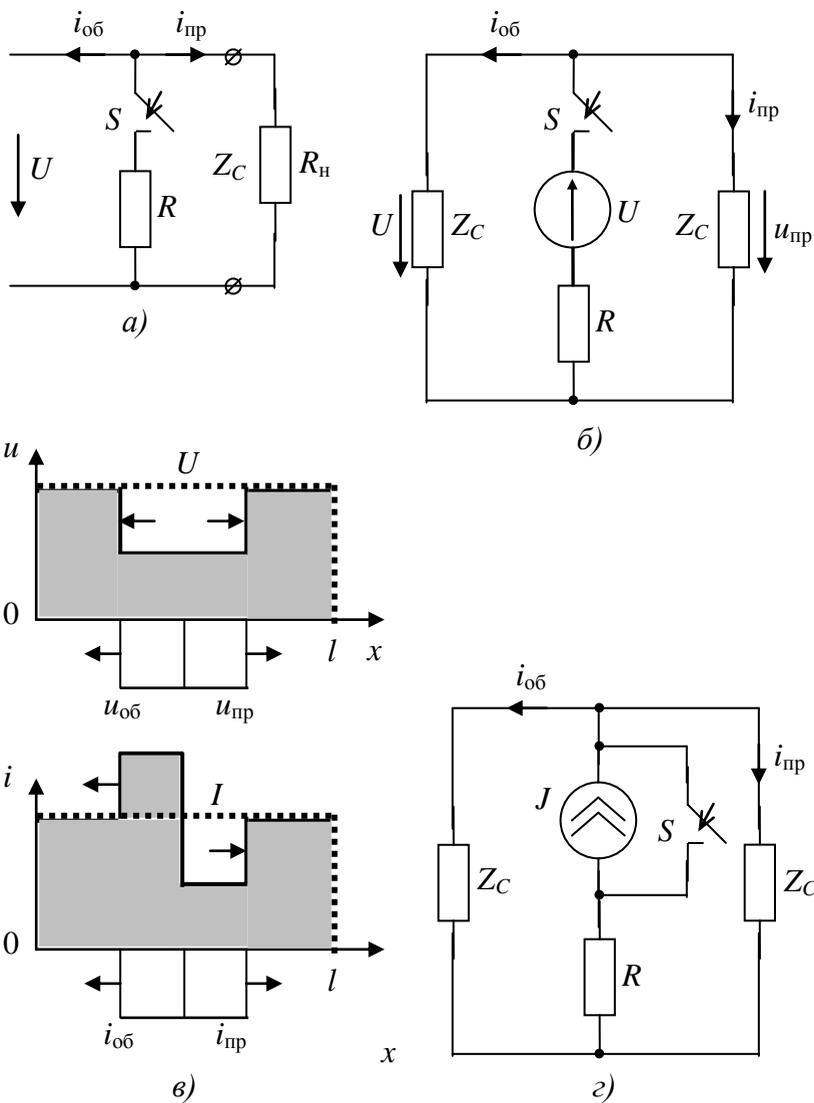


Рис. 2.15

## 2.6. Многократные отражения волн

Допустим, что в однородной линии (см. рис. 2.7, а) отраженная волна, достигнув начала линии, вновь отражается. Возникает третья волна, составляющая вместе с первой суммарную прямую волну в линии и отражающаяся от конца линии. Четвертая волна образует вместе со второй суммарную встречную волну и т.д.

На графиках распределения напряжения и тока вдоль линии, когда возникшая при подключении источника постоянного напряжения волна еще не достигла конца линии, напряжение первой прямой волны  $u_{\text{пр1}} = U$ , ток  $i_{\text{пр1}} = U/Z_C$  при любой нагрузке (рис. 2.16, а).

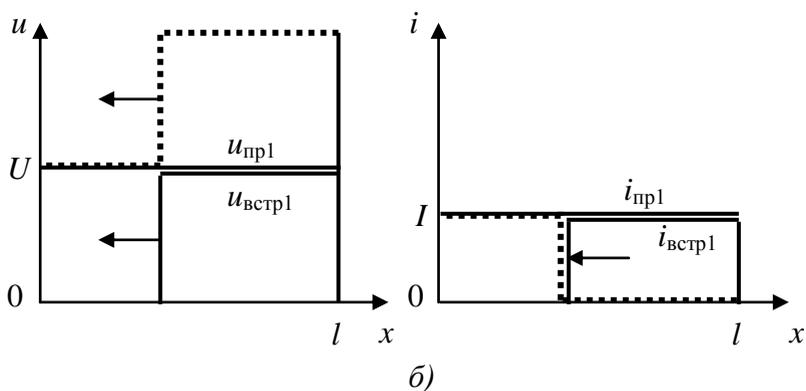
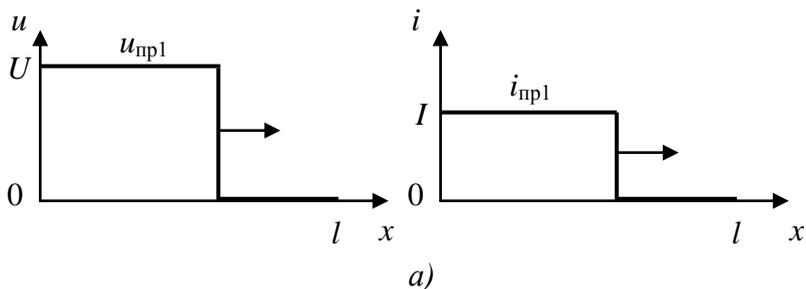


Рис. 2.16

В конце разомкнутой линии напряжение и ток первой встречной волны  $u_{\text{встр}1} = U$  и  $i_{\text{встр}1} = I$ , поскольку коэффициент отражения  $N_2 = N_X = 1$  (рис. 2.16, б). Напряжение и ток в линии  $u = u_{\text{пр}1} + u_{\text{встр}1} = 2U$  и  $i = i_{\text{пр}1} - i_{\text{встр}1} = 0$ .

Внутреннее сопротивление источника напряжения принято равным нулю, поэтому коэффициент отражения волны в начале линии  $N_1 = N_K = -1$ , и для второй прямой волны  $u_{\text{пр}2} = -u_{\text{встр}1} = -U$ ,  $i_{\text{пр}2} = u_{\text{пр}2}/Z_C = -U/Z_C = -I$ . Третья волна (рис. 2.17, а) накладывается на две первые. Напряжение в линии уменьшается до значения  $U$ , что объясняется граничными условиями.

Для второй встречной волны, возникающей после отражения третьей волны в конце линии  $u_{\text{встр}2} = N_X u_{\text{пр}2} = -U$  и  $i_{\text{встр}2} = N_K i_{\text{пр}2} = -I$  (рис. 2,17, б). Когда эта волна (накладывающаяся на две предыдущие) достигнет начала линии, напряжения и ток во всей линии станут равными нулю. С этого момента переходный процесс в линии будет повторяться (рис. 2,16, а, б, рис. 2,17, а, б) с периодом  $T = 4l/c$ .

В реальных линиях вследствие потерь напряжение волны по мере ее движения вдоль линии уменьшается. Уровень напряжения в конце линии постепенно приближается к величине напряжения источника питания (теоретически этот процесс продолжается бесконечно долго). Аналогичное «выравнивание» напряжения происходит во всех точках линии.

В случае короткого замыкания в конце линии при каждом отражении в конце линии напряжение спадает до нуля, а при отражении в начале линии вновь возрастает до значения  $U$ . Ток увеличивается на величину  $I$  при каждом отражении (рис. 2.18, а — в). В реальных линиях величину нарастающего тока ограничивают активные сопротивления и проводимость линии, а также внутреннее сопротивление источника.

В общем случае многократных отражений, когда в какой-либо точке линии включены устройства, в которых необхо-

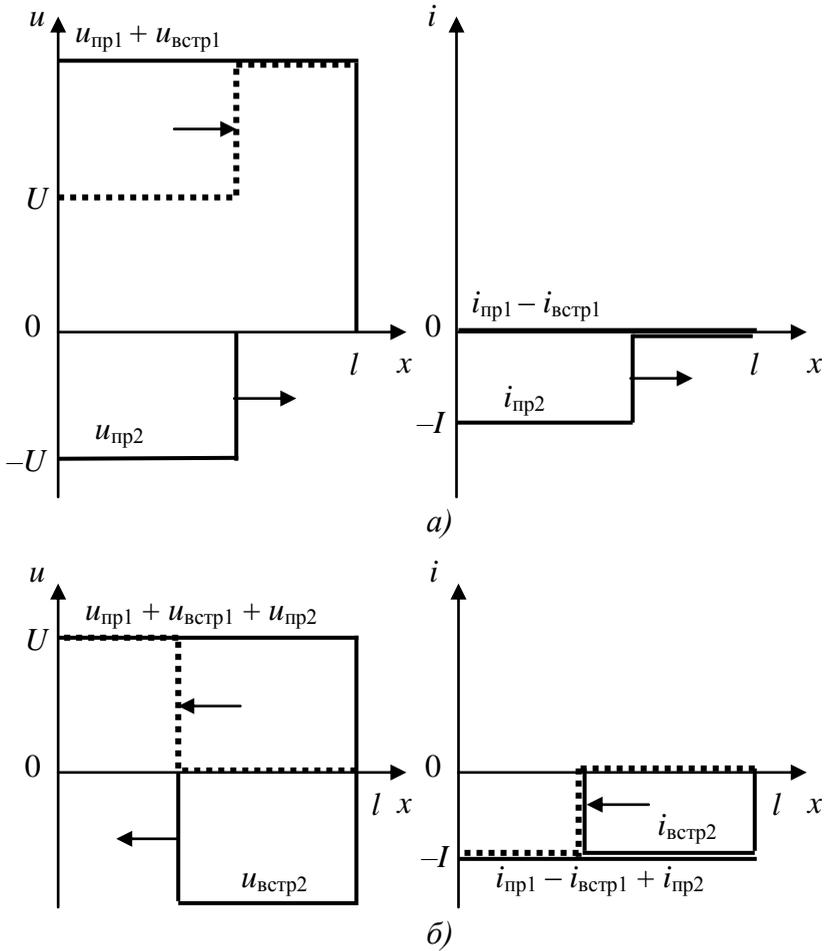


Рис. 2.17

димому учитывать индуктивности или (и) емкости, определение каждой новой отраженной волны усложняется. Приходится рассчитывать эквивалентные схемы с источниками напряжения все более сложного вида, поскольку в результате отражения изменяется форма волны. В таких случаях часто вместо применения метода наложения в заданной точке линии

сразу рассчитывают значения полных напряжения и тока, например, методом характеристик. Расчет переходного процесса также можно выполнить и с применением операторного метода, в частности, для линий с потерями.

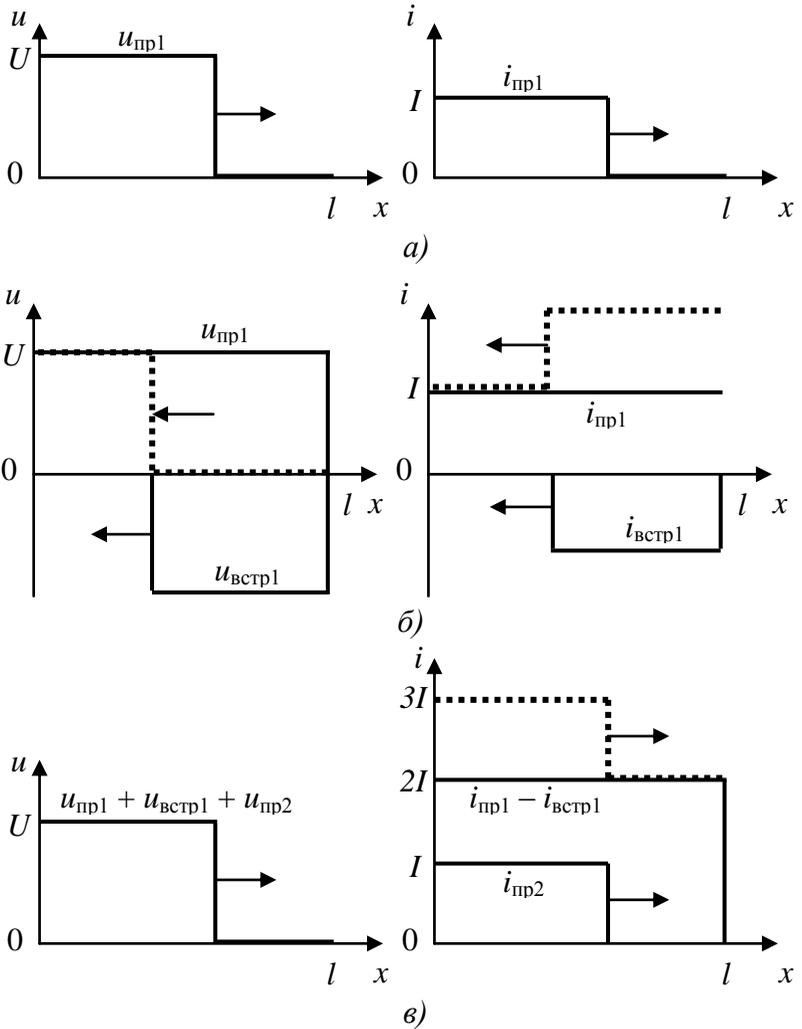


Рис. 2.18

## 3. АНАЛИЗ И РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

### 3.1. Задача анализа нелинейных цепей

Процессы, протекающие в нелинейных электрических цепях, намного сложнее и разнообразнее, чем процессы в линейных цепях. В то же время, они менее исследованы. В нелинейных цепях могут иметь место явления, которые не наблюдаются в линейных цепях, например, возникают незатухающие колебания, так называемые *автоколебания*; во многих случаях реакция нелинейной цепи на заданное воздействие не определяется однозначно. При одних и тех же воздействиях возможно несколько установившихся режимов, называемых *состоянием равновесия*, причем некоторые из них могут оказаться неустойчивыми.

Явления, протекающие в нелинейных элементах, положены в основу функционирования большинства радиоэлектронных устройств (РЭУ). Такие важные для радиоэлектроники процессы как генерирование колебаний, модуляция, детектирование, выпрямление, умножение частоты и многие другие не могут быть реализованы с помощью линейных цепей.

Характеристики большинства реальных элементов в той или иной степени нелинейны. В одних случаях эта нелинейность невелика, и ею можно пренебречь, в других случаях ею пренебречь нельзя и при построении упрощенных моделей таких цепей используются идеализированные нелинейные элементы (НЭ) с нелинейными характеристиками. На практике нелинейностью характеристик нелинейного элемента можно пренебречь, если характеристика элемента практически линейна в рабочем диапазоне токов и напряжений, а функционирование устройства не построено на использовании нелинейности соответствующей характеристики элемента.

Рассмотрим основные особенности и методы расчета цепей, содержащих нелинейные резистивные и реактивные элементы (нелинейные резисторы, диоды, индуктивности и емкости).

Общая форма записи модели нелинейной цепи имеет вид

$$F(v'_j, v_j, t) = W(t), \quad (3.1)$$

где  $v_j = [u_j, i_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  — вектор токов и напряжений ветвей цепи,  $v'_j$  — его производная;  $W(t)$  — вектор правых частей (воздействий),  $t$  — время.

Общих методов аналитического решения уравнений вида (3.1), соответствующих неявной форме записи модели нелинейной цепи, к настоящему времени нет, поэтому к таким цепям неприменим принцип наложения, а также основанные на этом принципе методы. Другая проблема, связанная с получением аналитического решения, заключается в отсутствии точного описания характеристик НЭ, которые в большинстве случаев задаются таблично или графически. Так как инженерная практика требует хотя бы приближенных предварительных расчетов и численной оценки процесса функционирования, к настоящему времени разработано много частных методик, например, графических и графо-аналитических, позволяющих дать быстрые, хотя и приближенные оценки работы нелинейной цепи.

Интенсивное развитие вычислительной техники способствовало появлению эффективных численных методов решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, что в большинстве случаев снимает проблему получения аналитического решения. Данное обстоятельство позволяет в настоящем курсе больше внимания уделить численным методам расчета с применением ЭВМ.

### 3.2. Классификация нелинейных цепей

Нелинейные цепи можно классифицировать по режимам функционирования и по типам входящих в цепь нелинейных элементов. По режимам функционирования, которые в основном определяются характером задающего источника, их можно разделить на следующие классы:

- нелинейные цепи постоянного тока;
- нелинейные цепи переменного тока;
- нелинейные цепи в переходном режиме.

*Нелинейные цепи постоянного тока* имеют в качестве входного воздействия постоянный сигнал, то есть в выражении (3.1)  $W(t) = C$ , где  $C = \text{const}$ . Производные в выражении (3.1) отсутствуют, и модель цепи приобретает вид

$$F(v) = C. \quad (3.2)$$

Примерами нелинейных цепей постоянного тока могут служить нелинейные резистивные цепи или однородные цепи, состоящие только из  $L$ - или  $C$ -элементов.

*Нелинейные цепи переменного тока* в качестве входного воздействия имеют гармонический сигнал, т.е.  $W(t) = W \sin(\omega t + \psi_0)$ . Левая часть (3.1) здесь содержит производные по току или напряжению, и модель электрической цепи в этом случае приобретает вид

$$F(v', v, t) = W \sin(\omega t + \phi). \quad (3.3)$$

Примером нелинейных цепей переменного тока могут служить  $RLC$ -цепи, содержащие в своем составе нелинейные элементы.

*Нелинейные цепи в переходном режиме* в качестве входного воздействия содержат единичные или импульсные функции, т.е.  $W(t) = 1(t)$  или  $W(t) = \delta(t)$ . В остальном модель нелинейной цепи в переходном режиме совпадает с моделью (3.3), т.е.

$$F(v', v, t) = 1(t) \text{ или } F(v', v, t) = \delta(t). \quad (3.4)$$

### 3.3. Формирование уравнений модели нелинейной цепи

Формирование уравнений модели нелинейной цепи в виде (3.1) удобнее всего производить с помощью метода компонентных цепей [4]. Метод компонентных цепей предполагает, что всякая электрическая цепь может быть представлена в виде компонентной цепи

$$C_k = (K, B, N), \quad (3.5)$$

содержащей множество компонентов цепи  $K$  (элементы ЭЦ), множество выводов компонентов  $B$  — ветвей цепи, которые,

соединяясь в общих точках, образуют множество узлов цепи  $N$ . Если компоненты цепи двухполюсные, то оба их вывода образуют одну ветвь, например ветвь из резистора, емкости и т.д.

Система уравнений модели нелинейной цепи в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$f_j(v'_j, v_j, t) = W(t), \quad j=1, 2, \dots, m \text{ (компонентные уравнения);}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \text{ (топологические уравнения),}$$

где  $v_j = (u_j, i_j)$  — вектор, содержащий узловые напряжения на выводах компонента и токи в этих выводах;  $\mathbf{A}$  — узловая матрица размерности  $(k-1) \times m$  ( $k$  — число узлов цепи). Общее число уравнений модели электрической цепи по этому методу равно  $m + k - 1$  и соответствует общему числу неизвестных.

**Пример 3.1.** Составить уравнения модели нелинейной цепи (рис. 3.1), содержащей линейные резисторы  $R_1$  и  $R_4$ , нелинейные резисторы  $u_2 = u_2(i_2)$  и  $i_3 = i_3(u_3)$ , а также источники напряжения  $e(t)$  и тока  $J_0(t)$ .

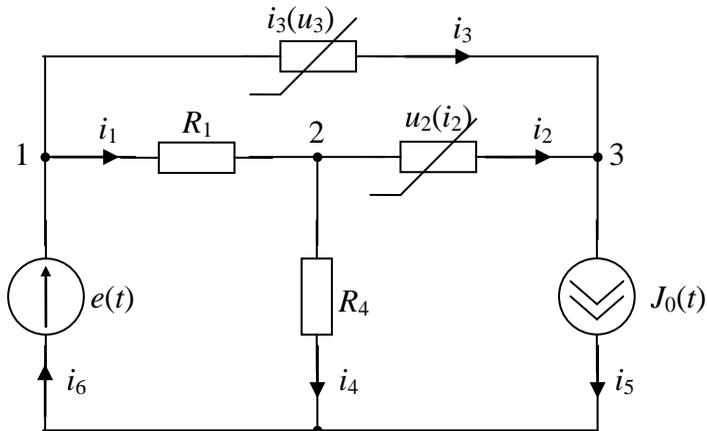


Рис. 3.1

*Решение.* Система уравнений для этой цепи, соответствующая уравнениям (3.5):

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= e(t); \quad u_1 - u_2 - R_1 i_1 = 0; \\
 u_2 - u_3 &= u_{23} = u_{23}(i_2) = i_2^2; \\
 u_2 - u_0 &= u_2(i_4); \quad i_3 = i_3(u_3); \quad i_5 = J_0(t); \\
 &(\text{компонентные уравнения}); \\
 \text{---} &\text{---} \text{---} \\
 i_6 - i_1 - i_3 &= 0; \quad i_1 - i_2 - i_4 = 0; \quad i_2 + i_3 - i_5 = 0 \\
 &(\text{топологические уравнения}).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Исключаем линейные уравнения (компонентные и топологические) и подставляем исключаемые переменные в нелинейную подсистему. После преобразований можно сократить число уравнений системы до двух:

$$\begin{aligned}
 R_1 i_3(u_3) + u_2(i_4) + R_1 i_4 &= e(t) + R_1 J_0; \\
 u_2(i_4) - u_3 - i_2^2 &= 0,
 \end{aligned}$$

которые далее необходимо решать каким-либо численным методом.

### 3.4. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

Для численных и аналитических расчетов нелинейных цепей модели нелинейных компонентов должны быть представлены в аналитической форме. Исходной формой здесь являются обычно таблично-графические зависимости, полученные из экспериментальных данных для вольт-амперных, кулон-вольтных или вебер-амперных характеристик нелинейных компонентов. Если двухполюсный компонент находится в  $j$ -й ветви, то такие зависимости могут иметь вид

$$\begin{aligned}
 u_j &= u_j(i) \quad (\text{либо } i_j = i_j(u)); \\
 q_j &= q_j(u_j); \quad \Psi_j = \Psi_j(i_j); \quad B_j = B_j(H_j).
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Задача аппроксимации вольт-амперных характеристик (ВАХ) включает в себя две самостоятельные задачи — выбор

аппроксимирующей функции и определение значений, входящих в эту функцию коэффициентов.

Функцию, аппроксимирующую ВАХ какого-либо нелинейного элемента, выбирают исходя из физических представлений о работе данного элемента или формально, основываясь на внешнем сходстве ВАХ с графическим изображением той или иной функции. Аппроксимацию характеристик НЭ можно производить набором элементарных функций — степенных, экспоненциальных, трансцендентных, линейных и кусочно-линейных, а также полиномами или сплайнами. Из них наиболее часто используются следующие:

- *степенное приближение*, при котором характеристика описывается алгебраическим полиномом вида

$$F(V) = \sum_{k=0}^n a_k V^k, \quad (3.8)$$

где  $n$  — степень полинома;  $a_k$  — коэффициенты полинома, которые могут быть определены, например, по методу наименьших квадратов [5];

- *кусочно-линейное приближение*, при котором характеристика НЭ представляется совокупностью линейных участков так, что она имеет вид ломаной линии:

$$F(V) = F_k + \frac{F_{k+1} - F_k}{V_{k+1} - V_k} (V - V_k); \quad (3.9)$$

- *экспоненциальное приближение*, задаваемое в виде ряда

$$F(V) = \sum_{k=0}^n a_k \exp(b_k V), \quad (3.10)$$

где  $a_k, b_k$  — постоянные коэффициенты;

- *параболическое приближение*, при котором характеристика НЭ представляется совокупностью квадратичных или кубических парабол-сплайнов. Для квадратичного сплайна на участке от  $\Delta V_k$  до  $\Delta V_{k+1}$

$$F(V) = F_k + a_k (V - V_k) + b_k (V - V_k)^2, \quad (3.11)$$

где  $a_k, b_k$  — постоянные коэффициенты, определяемые из условия непрерывности функции и ее производных в точках сопряжения парабол.

Рассмотрим наиболее часто используемый для определения коэффициентов аппроксимирующей функции *метод выбранных точек*, в соответствии с которым коэффициенты аппроксимирующей функции находят, исходя из совпадения значений этой функции со значениями аппроксимируемой функции в ряде заранее выбранных точек, называемых узлами интерполяции. Если для аппроксимации ВАХ, заданной множеством точек  $\{x_j, y_j\}$ , выбрана функция

$$y = y(x, a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (3.12)$$

имеющая  $n + 1$  неизвестных коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , то для определения этих коэффициентов выбирают  $n + 1$  характерных точек ВАХ, лежащих в пределах рабочей области. Подставляя значения  $x_j, y_j$  для каждой из выбранных точек в выражение (3.12), получают систему из  $n + 1$  уравнений  $y_j = y(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n)$ , из решения которой находят неизвестные коэффициенты. Очевидно, что такой выбор коэффициентов действительно обеспечивает совпадение аппроксимируемой и аппроксимирующей функций в узлах интерполяции, однако в промежутках между ними погрешность аппроксимации может быть весьма существенной, что является недостатком этого метода.

В отличие от метода выбранных точек, *метод наименьших квадратов* обеспечивает наименьшую сумму квадратов отклонений  $s$  значений аппроксимирующей функции  $y = y(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$  в произвольном числе точек  $m$ , не связанном с числом неизвестных коэффициентов  $n + 1$ .

**Пример 3.2.** Определить коэффициенты экспоненциального полинома  $i = ae^{bu} + c$ , аппроксимирующего ВАХ кремниевого диода в диапазоне напряжений от 0 до 1 В (рис. 3.2). *Решение.* Выберем для определения коэффициентов три точки на кривой: (0,4; 0,08); (0,8; 0,024) и (1,2; 0,5). Воспользу-

емя системой Mathcad и реализованным в ней методом наименьших квадратов. В результате получим следующие значения коэффициентов:  $a = 0,082$ ;  $b = 1,52$ ;  $c = -0,082$ .

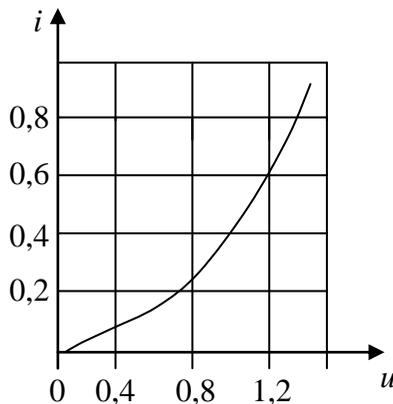


Рис. 3.2

Проверим точность аппроксимации для найденных коэффициентов, выбрав промежуточную точку на оси напряжений  $u = 1\text{ В}$ :

$$i = ae^{bu} + c = 0,082(e^{1,52u} - 1) = 0,293 \text{ мА}.$$

Сравнивая точное значение тока (0,4 мА) с полученным, оцениваем погрешность  $\Delta i$ .

На практике для аппроксимации характеристик нелинейных элементов в основном используют степенные полиномы

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.13)$$

и кусочно-линейные функции. Аппроксимация с помощью степенных полиномов универсальна и позволяет повышать точность расчета путем увеличения степени полинома, но для практической аппроксимации ВАХ из-за сложности определения коэффициентов обычно используют полиномы низких степеней.

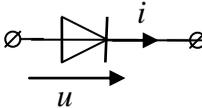
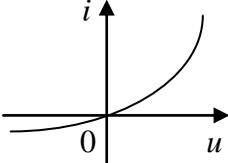
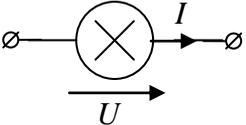
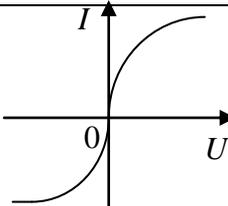
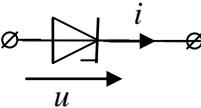
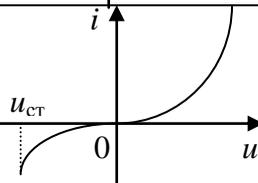
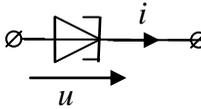
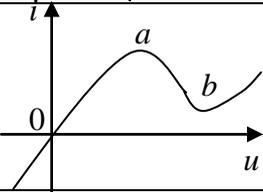
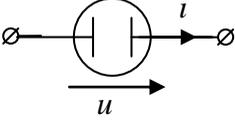
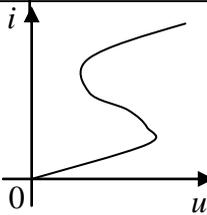
Метод кусочно-линейных функций рассматривается ниже.

### ***Примеры нелинейных элементов и их характеристик.***

Подавляющее большинство реальных нелинейных резистивных элементов — двухполюсных, трехполюсных и многопо-

люсных — рассматривается в учебных курсах по электронике. Здесь приведем условные обозначения и вольт-амперные характеристики наиболее распространенных приборов. В табл. 3.1 даны качественные зависимости для соответствующих ВАХ, но их основные особенности сохранены.

Таблица 3.1.

Наименование и условное обозначение	Вольт-амперная характеристика	Характеристика ВАХ. <i>Причина нелинейности</i>
<p>Выпрямительный полупроводниковый диод</p> 		<p>Несимметричная монотонная. <i>p-n переход</i></p>
<p>Лампа накаливания с металлической нитью</p> 		<p>ВАХ (для действующих значений) симметричная монотонная. <i>Зависимость сопротивления спирали от температуры.</i></p>
<p>Полупроводниковый стабилитрон</p> 		<p>Несимметричная, монотонная. <i>p-n переход и его лавинный пробой.</i></p>
<p>Туннельный диод</p> 		<p>Несимметричная немонотонная. <i>Туннельный эффект.</i></p>
<p>Неоновая лампа</p> 		<p>Несимметричная, немонотонная. <i>Глеющий разряд</i></p>

### 3.5. Методы анализа нелинейных резистивных цепей

**Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей.** Уравнения (3.5) задают модель нелинейной цепи в наиболее общем виде. Их решение находят с помощью приближенных численных методов. В ряде случаев исследование процессов в простейших нелинейных резистивных цепях удастся провести без составления уравнения электрического равновесия — путем выполнения различных преобразований исходной цепи.

Рассмотрим простейшие эквивалентные преобразования, которые можно применять как при анализе нелинейных резистивных цепей постоянного тока, так и при анализе нелинейных цепей, находящихся под произвольным внешним воздействием.

Пусть участок цепи (рис. 3.3, а) содержит два *последовательно* включенных нелинейных сопротивления, вольт-амперные характеристики которых заданы (рис. 3.3, б). Очевидно, при любом значении тока  $i_{\text{ВХ}} = i_1 = i_2$  напряжение  $u_{\text{ВХ}}$

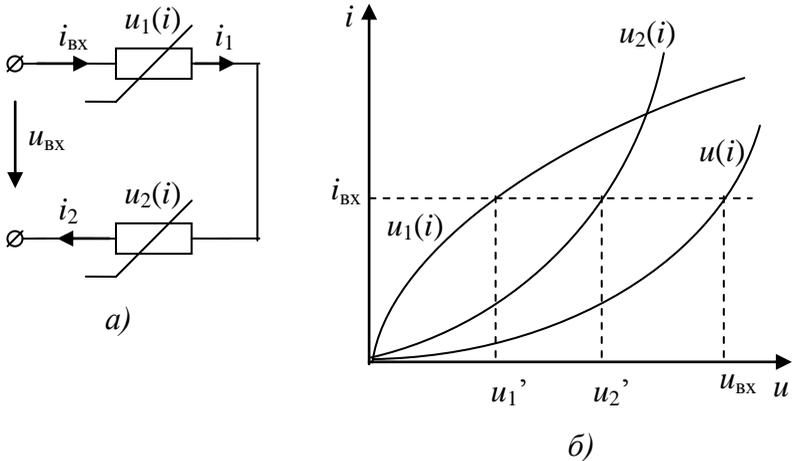


Рис. 3.3

на зажимах данного участка равно сумме напряжений на каждом из нелинейных элементов:

$$u_{\text{BX}} = u_1(i_1) + u_2(i_2).$$

Суммируя ординаты зависимостей  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$ , получаем зависимости между напряжением  $u_{\text{BX}}$  и током  $i_{\text{BX}}$  на зажимах рассматриваемого участка цепи (рис. 3.3, б). Таким образом, участок цепи, содержащий два последовательно включенных сопротивления, может быть заменен одним нелинейным сопротивлением, ВАХ  $u_{\text{BX}}(i_{\text{BX}})$  которого получается путем суммирования ординат ВАХ  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$ . Аналогично можно заменить участок цепи, содержащий последовательно включенные линейное и нелинейное сопротивления, а также участок цепи, представляющий собой последовательное соединение произвольного количества линейных и нелинейных сопротивлений.

**Пример 3.3.** Найти зависимость между током и напряжением участка цепи (рис. 3.4, а), представляющего собой последовательное соединение линейного  $R_1$  и нелинейного  $R_2$  сопротивлений, ВАХ  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$  которых заданы (рис. 3.4, б).

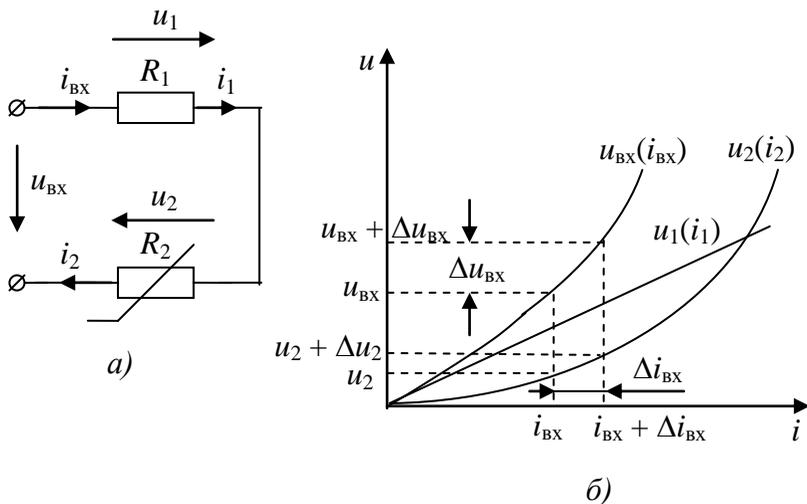


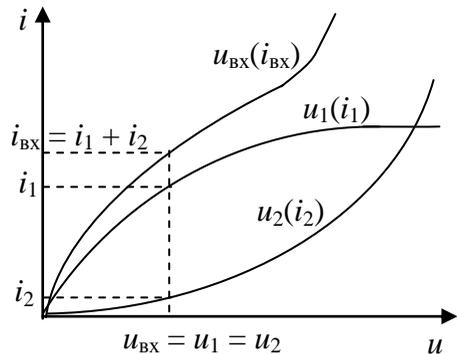
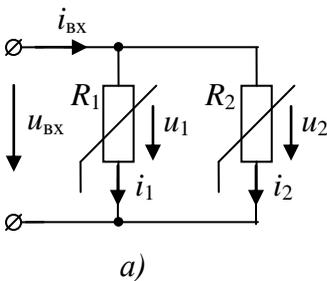
Рис. 3.4

Определить изменение напряжения  $\Delta u_2$  на линейном сопротивлении  $R_2$ , соответствующее приращению напряжения  $u_{\text{вх}}$  на зажимах цепи на  $\Delta u_{\text{вх}}$ .

*Решение.* Вольт-амперную характеристику  $u_{\text{вх}}(i_{\text{вх}})$  рассматриваемого участка цепи получаем, суммируя ординаты ВАХ  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$  последовательно включенных элементов, Используя эту характеристику (рис.3.4, б), можно найти приращение тока цепи  $\Delta i_{\text{вх}}$ , соответствующее изменению входного напряжения  $\Delta u_{\text{вх}}$ . Далее, используя зависимость  $u_2(i_2)$ , определяем соответствующее данному приращению тока приращение напряжения  $\Delta u_2$  на нелинейном сопротивлении. Приращение напряжения на линейном сопротивлении оказалось значительно меньше вызвавшего его изменения входного напряжения  $\Delta u_{\text{вх}}$  (рис.3.4, б).

Рассмотрим участок цепи (рис. 3.5, а), представляющий собой *параллельное* включение двух нелинейных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , заданных ВАХ  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$  (рис. 3.5, б). Как следует из первого закона Кирхгофа, входной ток  $i_{\text{вх}}$  рассматриваемого участка при любом напряжении  $u_{\text{вх}} = u_1 = u_2$  равен сумме токов нелинейных сопротивлений:

$$i_{\text{вх}} = i_1(u_1) + i_2(u_2).$$



б)

Рис. 3.5

Суммируя ординаты зависимостей  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$ , получаем ВАХ  $i_{\text{вх}}(u_{\text{вх}})$  нелинейного сопротивления, которым можно заменить рассматриваемый участок цепи. Используя аналогичный прием, можно определить ВАХ участка цепи, содержащего произвольное количество параллельно включенных линейных и нелинейных сопротивлений. Поочередное применение правил эквивалентного преобразования участков с последовательным и параллельным соединением элементов позволяет постепенно упрощать их структуру, упрощая тем самым дальнейший анализ нелинейной цепи.

**Пример 3.4.** Найти зависимость между током и напряжением на входе участка цепи со смешанным соединением элементов (рис.3.6, а) с заданными вольт-амперными характеристиками линейного ( $R_1$ ) и нелинейных ( $R_2$  и  $R_3$ ) сопротивлений (рис. 3.6, б). Определить приращение входного напряжения  $\Delta u_{\text{вх}}$  при изменении напряжения на сопротивлении  $R_2$  на  $\Delta u_2$ .

*Решение.* Суммируя ординаты кривых  $i_2(u_2)$  и  $i_3(u_3)$ , получаем ВАХ  $i_{23}(i_{\text{вх}})$  участка цепи, представляющего собой параллельное соединение сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ . Находим зависимость  $u_{\text{вх}}(i_{\text{вх}})$  на входе рассматриваемого участка цепи.

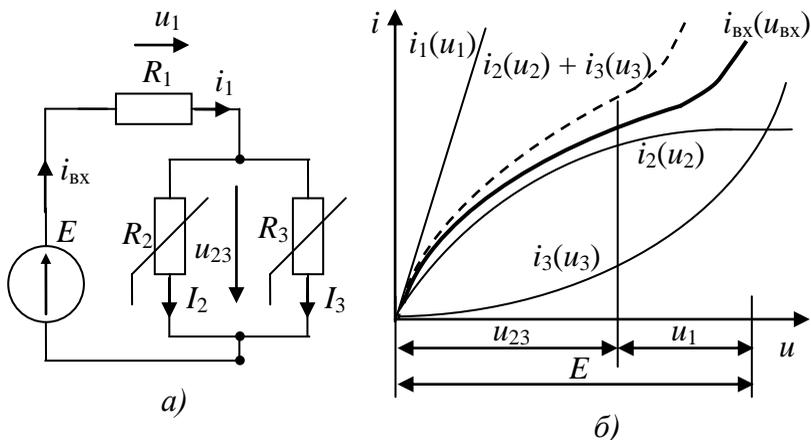


Рис. 3.6

Для этого суммируем абсциссы графиков  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2) + i_3(u_3)$  и получаем зависимость  $i_{\text{BX}}(u_{\text{BX}})$ .

Цепи, рассмотренные в примерах 3.2 и 3.3, можно использовать для стабилизации напряжения. При этом коэффициент стабилизации напряжения определяется по формуле

$$k_{\text{CT}} = (\Delta u_{\text{BX}} / u_{\text{BX}}) / (\Delta u_{\text{ВЫХ}} / u_{\text{ВЫХ}}).$$

**Определение рабочих точек.** Задача анализа нелинейной цепи постоянного тока обычно сводится к определению рабочих точек нелинейных резистивных элементов или точек смещения электронных приборов. Наиболее просто задача решается графически *методом пересечения характеристик*. Суть этого метода заключается в определении точки пересечения двух характеристик — ВАХ элемента, в котором нужно найти рабочую точку, и характеристики остальной части цепи, которая может быть найдена с помощью теоремы об эквивалентном генераторе. Причем, если двухполюсник линейный, то его характеристика будет прямой линией. Рассмотрим схему данного метода (рис.3.7), на которой:  $AN$  —

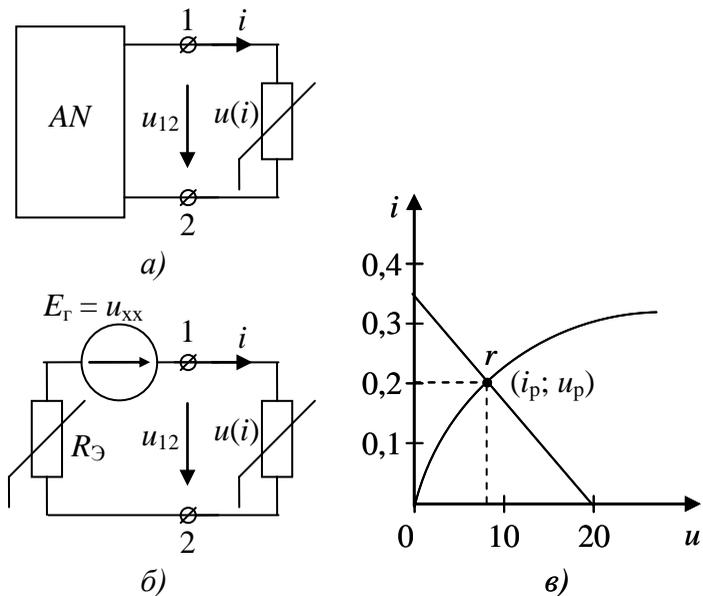


Рис. 3.7

нелинейный активный двухполюсник;  $E_{\Gamma}$  — ЭДС эквивалентного генератора, равная напряжению холостого хода на зажимах 1 – 2;  $R_{\Sigma}$  — эквивалентное сопротивление нелинейного пассивного двухполюсника с ВАХ  $u_{12}(i)$ ;  $i_p$  и  $u_p$  — ток и напряжение в рабочей точке нелинейного элемента  $u(i)$ .

**Пример 3.5.** Проанализировать мостовую резистивную схему (рис. 3.8, а) с нелинейным резистором, ВАХ которого задана (рис. 3.8, б), в одной диагонали и источником ЭДС — в другой. Параметры цепи:  $R_1 = R_0 = 27 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 108 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 81 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 54 \text{ Ом}$ ;  $E_0 = 70 \text{ В}$ .

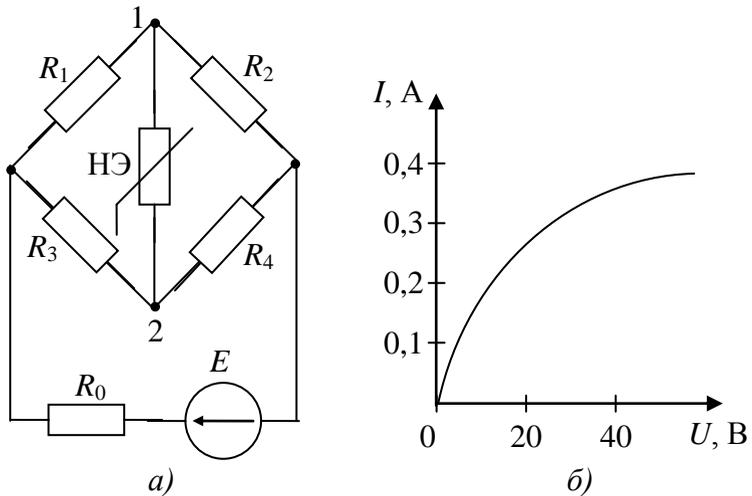


Рис. 3.8

*Решение.* Линейную часть цепи (рис. 3.8, а), в соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе, заменяем ЭДС  $E_{\Gamma}$ , равной напряжению холостого хода на разомкнутых зажимах 1 – 2 с нелинейным сопротивлением, и эквивалентным сопротивлением цепи  $R_{\Gamma}$  относительно этих зажимов (рис. 3.7, б). По второму закону Кирхгофа

$$U_{\text{ХХ}} = E_{\Gamma} = U_1 - U_2 = I_2 R_4 - I_4 R_4.$$

Так как  $R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = 35 \text{ Ом}$ , то  $I_2 = I_4 = I_0 / 2$ . Ток

$$I_0 = \frac{E}{R_3 + R_0} = \frac{70}{94,5} \text{ А},$$

где  $R_3 = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 67,5 \text{ Ом}$ . Тогда

$$U_{12} = U_{xx} = E_r = \frac{I_0}{2} (R_2 - R_4) = \frac{70}{2 \cdot 94,5} (108 - 54) = 20 \text{ В}.$$

Для расчета входного сопротивления мостовой схемы заменим верхний треугольник моста сопротивлениями  $R_1, R_2, R_0$  на звезду сопротивлений  $R_{12}, R_{20}, R_{01}$ :

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_0} = 18 \text{ Ом}; \quad R_{20} = \frac{R_2 R_0}{R_1 + R_2 + R_0} = 4,45 \text{ Ом};$$

$$R_{01} = \frac{R_1 R_0}{R_1 + R_2 + R_0} = 18 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление мостовой схемы

$$R_{\text{вх}} = R_{12} + \frac{(R_{20} + R_3)(R_{01} + R_4)}{R_{20} + R_3 + R_{01} + R_4} = 57 \text{ Ом}.$$

Полагая  $R_r = R_{\text{вх}}$ , строим зависимость  $E = (R_r + R_0)I$ , на графике (рис. 3.7, в) находим рабочую точку  $r$ , для которой определяем  $U = 11 \text{ В}$ ,  $I = 0,2 \text{ А}$ , а также статическое сопротивление  $R_{\text{ст}} = U/I = 55 \text{ Ом}$ .

Для сопротивлений нелинейных элементов существует два определения — статическое и дифференциальное сопротивления.

Под *статическим* сопротивлением НЭ  $R_{\text{ст}} = U/I$  понимают отношение постоянного напряжения на НЭ к току в нем.

*Дифференциальным сопротивлением* называется величина  $R_d = dU/dI$ , характеризующая НЭ при малых отклонениях от рассматриваемой точки нелинейной характеристики. Дифференциальное сопротивление определяет крутизну характеристики в каждой точке.

Соответственно различают статическую  $G_{ст} = 1/R_{ст}$  и дифференциальную  $G_d = 1/R_d$  проводимости НЭ.

В общем случае статическое и дифференциальное сопротивления не равны друг другу, их значения совпадают только для линейных сопротивлений.

Статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла  $\alpha$ , образованного секущей, проведенной из начала координат в рассматриваемую точку характеристики, и осью токов  $I$  (рис. 3.9):

$$R_{ст} = m_r \operatorname{tg} \alpha.$$

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла  $\beta$ , образованного касательной в рассматриваемой точке характеристики и осью  $I$ :

$$R_d = m_r \operatorname{tg} \beta.$$

При последовательном соединении нескольких нелинейных элементов дифференциальное сопротивление результирующей характеристики при каком-то токе равно сумме дифференциальных сопротивлений НЭ при том же токе. Это связано с тем, что производная суммы равна сумме производных. При параллельном соединении нескольких нелинейных элементов дифференциальная проводимость при каком-то токе равна сумме дифференциальных проводимостей отдельных НЭ при том же токе.

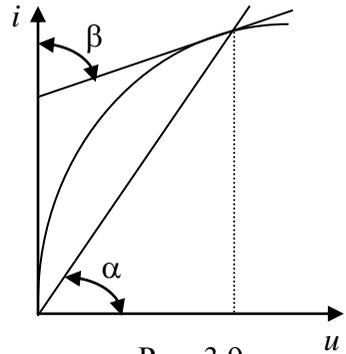


Рис. 3.9

**Метод кусочно-линейной аппроксимации.** Допустим, что область работы НЭ (совокупность положений рабочей точки) не выходит за пределы участка ВАХ, который может быть заменен с допустимой погрешностью прямой линией. Если кривая ВАХ НЭ имеет несколько таких участков, то такая замена производится с помощью *метода кусочно-линейной аппроксимации* (КЛА). Этот метод позволяет свести расчет системы нелинейных уравнений к расчету эквива-

лентной системы линейных уравнений. Решение такой эквивалентной системы производится методом линейных сплайнов [6], где значения токов и напряжений начала следующего участка приравниваются к значениям этих переменных для конца предыдущего участка. КЛА значительно упрощает анализ нелинейных цепей, так как в интервалах между изломами ВАХ имеем дело с линейными моделями цепи, для которых могут быть построены линейные схемы замещения.

Рассматриваемый НЭ с ломаной характеристикой на каждом  $i$ -м участке заменяется линейным резистором  $R_{дi}$ , величина которого равна дифференциальному сопротивлению (оно определяется тангенсом угла наклона  $\beta_i$ ), и источником постоянной ЭДС. Рассмотрим принцип построения схем замещения для трех отдельных участков ВАХ НЭ (рис. 3.10). Следует обратить внимание на то, что направление ЭДС источника совпадает с направлением тока, если значение ЭДС отложено на отрицательной полуоси напряжений (интервал 3) и направлено против тока — в противном случае (интервал 2). На интервале 1 значение ЭДС равно нулю.

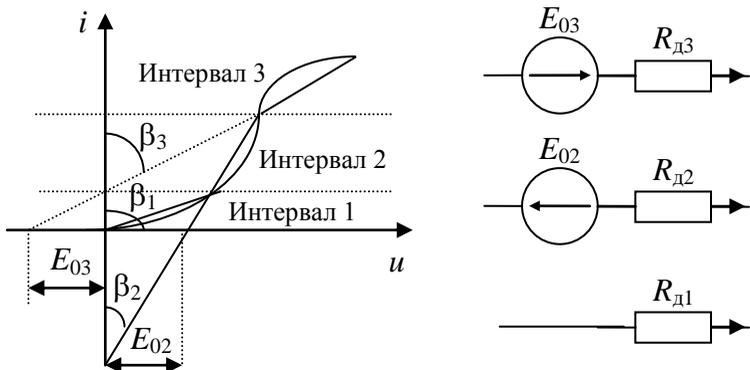


Рис. 3.10

После замены НЭ линейными сопротивлениями и ЭДС цепь рассчитывается как линейная. При этом рабочая точка не должна выходить за пределы линейного участка характеристики НЭ.

Если в цепи несколько НЭ, то решение придется выполнять для каждого из возможных сочетаний линейных интервалов, так как положение рабочих точек на ВАХ заранее неизвестно.

**Пример 3.6.** Определить параметры линейной схемы замещения, используя источник ЭДС  $E_0$  и дифференциальное сопротивление  $R_d$  НЭ с заданной ВАХ (рис. 3.11).

*Решение.* Положим, что рабочая точка перемещается лишь по участку аб (рис. 3.11, а), для которого

$$u = u_0 + i \operatorname{tg} \beta = u_0 + i \frac{m_u}{m_i} R_d.$$

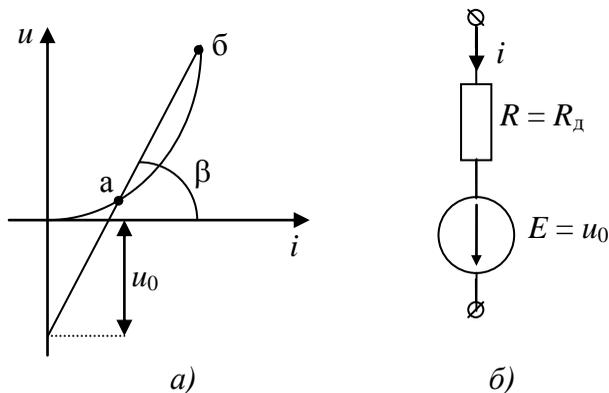


Рис. 3.11

Этому уравнению удовлетворяет участок цепи (рис. 3.11, б), где  $E = u_0$  и линейное сопротивление  $R = R_d$ .

**Пример 3.7.** Определить показание амперметра магнитоэлектрической системы в цепи нелинейного резистора (рис. 3.12) с ВАХ, аппроксимированной двумя линейными отрезками. Резистор подключен к источнику синусоидального напряжения  $u(t) = U_m \sin \omega t$ .

*Решение.* Первый участок ВАХ здесь аппроксимируется линейными сопротивлениями —  $R_1$  для положительного полупериода и  $R_2$  для отрицательного полупериода.

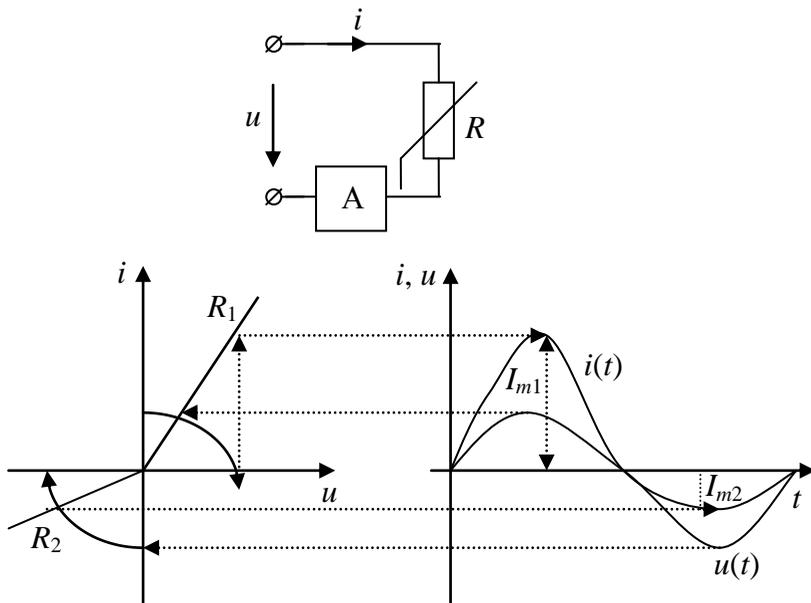


Рис. 3.12

Поскольку цепь резистивная, ток в цепи повторяет форму приложенного напряжения и состоит из двух полувольт с разными амплитудами (рис. 3.12). По закону Ома

$$I_{m1} = \frac{U_m}{R_1}; \quad I_{m2} = \frac{U_m}{R_2}.$$

Среднее значение тока, которое фиксируется амперметром, состоит из двух полувольт:

$$I_{\text{cp}} = I'_{\text{cp}} + I''_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_{m1} \sin \omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T I_{m2} \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} (I_{m1} - I_{m2}).$$

**Пример 3.8.** Построить ВАХ безынерционного нелинейного резистивного элемента  $y = f(x)$ , если воздействие  $x(t) = \sin \pi t/4$  и реакция  $y(t)$  заданы графиками (рис. 3.13, а, б).

*Решение.* При построении характеристики  $y(x)$  (рис. 3.14, а – г) важно обратить внимание на необходимость согласования масштабов графиков по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $t$ .

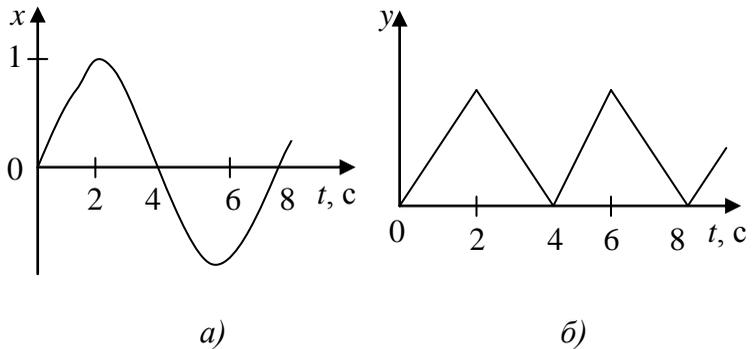


Рис. 3.13

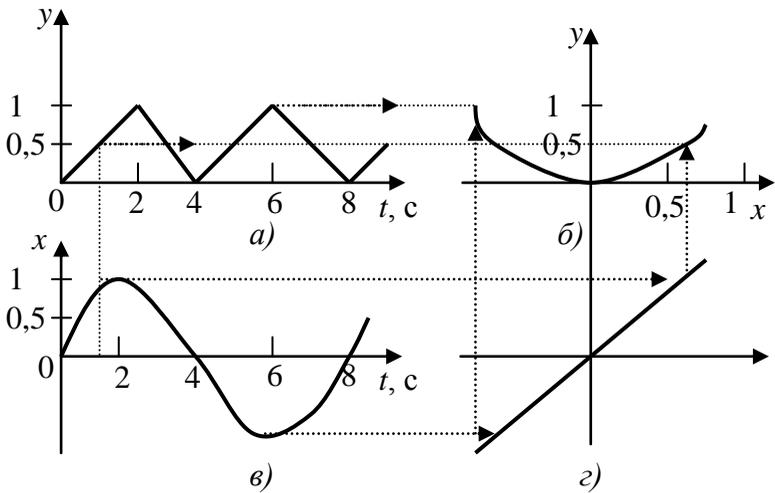


Рис. 3.14

**Численный анализ нелинейных статических цепей.**

Для сложных нелинейных цепей с произвольного вида нелинейностями основными методами анализа являются *численные методы*. Здесь интерес представляют нелинейные цепи, работающие в статическом режиме. Статический режим можно рассматривать как переходный процесс, который носит асимптотически устойчивый характер, т. е. при  $t \rightarrow \infty$

цепь переходит в асимптотически устойчивое состояние. Если цепь не имеет накопителей энергии, то она переходит в статический режим мгновенно. Модель электрической цепи в статическом режиме описывается векторным уравнением (3.2), т. е.  $F(V) = 0$ , где  $V$  — вектор переменных цепи размерности  $n$ . Данное уравнение является нелинейным алгебраическим.

Обозначим точное решение (3.2) через  $V^*$ . Численный метод сводится к нахождению последовательности векторов  $V^0, V^1, \dots, V^k$ . Вектор  $V^0$  называется *начальным приближением*, переход от очередного вектора  $V^k$  к  $V^{k+1}$  — *итерацией*, а способ перехода — *итерационным методом*. На практике используются итерационные формулы вида

$$V^{k+1} = G(V^k, H^k), \quad (3.14)$$

где  $H^k$  — вектор-параметр итерационного процесса, зависящий от результатов предыдущих итераций.

Основные характеристики итерационных методов — сходимость итераций и скорость сходимости.

Наиболее простым является *метод простой итерации*. Применительно к одному уравнению типа (3.2) с одним корнем  $V = V^{k+1}$  решение может быть записано в виде

$$V^{k+1} = V^k + hF(V^k),$$

где  $B = hI$  ( $I$  — единичная матрица);  $h$  — скалярная величина. Для выполнения условия сходимости

$$\rho(I + hЯ) < 1,$$

где  $\rho$  — максимальное из собственных значений  $[V + hF(V)]$ ;  $Я = [dF/dV]$  — матрица Якоби функции  $F$ .

Наиболее эффективным считается *метод Ньютона*. Здесь решение в окрестности того же корня разлагается в ряд Тейлора:

$$F(V^{k+1}) = F(V^k + \Delta V^k) \approx F(V^k) + \Delta V^k F'(V^k) = 0,$$

где  $F(V^k)$  — значение функции в точке  $V^k$ ;  $F'(V^k)$  — производная функции  $F(V)$  в этой же точке.

Отсюда

$$V^{k+1} = V^k + \Delta V^k \approx V^k - \frac{F(V^k)}{F'(V^k)}, \quad (3.15)$$

где  $\Delta V^k = h = -F(V^k)/F'(V^k)$  — поправка к предыдущему решению.

Порядок реализации (алгоритм) метода Ньютона следующий. Задают приближенно значение искомого решения  $V^k$  ( $k = 0$ ). Определяют поправку  $h_0$  согласно (3.15). Для ее вычисления находят производную функции  $F(V^0)$ . Вычисляют уточненное значение корня  $V^1 = V^0 + h_0$ . Повторяют процесс на следующем шаге и уточняют значение  $V^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) до необходимой точности.

В геометрической интерпретации метода Ньютона (рис. 3.15) касательные, проведенные в точках  $V^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), определяют значение поправки на соответствующем шаге, поскольку  $F'(V^k) = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{F(V^k)}{h^k}$ ,

$$\text{или } h^k = \frac{F(V^k)}{\operatorname{tg} \alpha_k}.$$

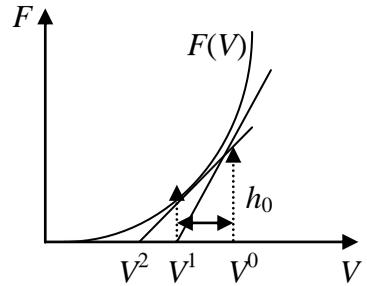


Рис. 3.15

Если начальное приближение достаточно близко к решению, то говорят о *сходимости решения*. Если производная  $F'(V^k) = 0$ , то *решение невозможно*. Из специальной литературы известно, что сходимость метода Ньютона зависит не только от значения функции  $F(V)$  и ее наклона  $F'(V)$ , но и от кривизны наклона функции  $F''(V)$ .

**Пример 3.9.** Для заданной схемы (рис. 3.16, а) составить итерационные выражения для расчета  $I_1, U_1, I_2, U_2$ , если известны  $E, J, R$  и заданы вольтамперные характеристики нелинейных элементов.

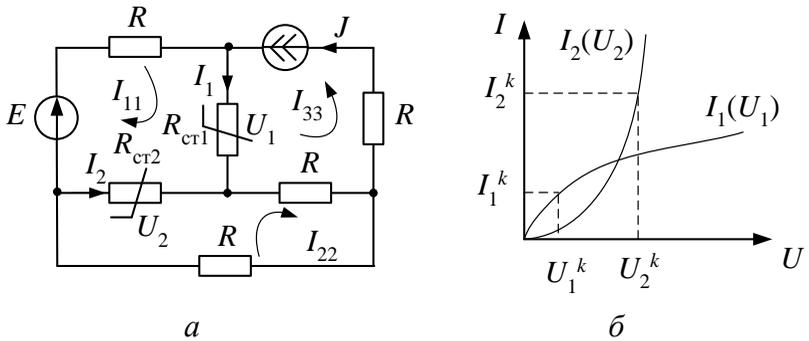


Рис. 3.16

*Решение.* Заменяем нелинейные элементы неизвестными статическими сопротивлениями, которые определяются из вольт-амперных характеристик (рис. 3.16, б). Для  $k$ -го шага итерации

$$R_{\text{ст1}}^k = \frac{U_1^k}{I_1^k}; \quad R_{\text{ст2}}^k = \frac{U_2^k}{I_2^k}.$$

Для лучшей сходимости итерационные выражения составляются для тока в нелинейном элементе, если его ВАХ загибается к оси токов и для напряжений, если ВАХ загибается к оси напряжений.

Схему рассчитаем методом контурных токов:

$$I_{11}^{k+1} \cdot (R + R_{\text{ст1}}^k + R_{\text{ст2}}^k) - I_{22}^{k+1} \cdot R_{\text{ст2}}^k + I_{33}^{k+1} \cdot R_{\text{ст1}}^k = E;$$

$$I_{22}^{k+1} \cdot (R + R + R_{\text{ст2}}^k) - I_{11}^{k+1} \cdot R_{\text{ст2}}^k + I_{33}^{k+1} \cdot R = 0;$$

$$I_{33}^{k+1} = J;$$

Итерационные выражения:

$$I_2^{k+1} = I_{22}^{k+1} - I_{11}^{k+1};$$

$$U_1^{k+1} = I_1^{k+1} \cdot R_{\text{ст1}}^k = (I_{11}^{k+1} + I_{33}^{k+1}) \cdot R_{\text{ст1}}^k.$$

На нулевом шаге итерации задаются произвольными значениями  $U_1^0$  и  $I_2^0$ , по ВАХ находятся значения  $I_1^0$  и  $U_2^0$  и рассчитываются  $R_{\text{ст1}}^0$  и  $R_{\text{ст2}}^0$ . По итерационным выражениям

находятся  $U_1^1$  и  $I_2^1$ , по ВАХ находят  $I_1^1$  и  $U_2^1$  и т.д. до повторения результатов.

**Моделирование вольт-амперных характеристик электрическими цепями.** Элементарные цепи из таких двухполюсных элементов как диоды, резисторы, источники ЭДС и тока могут воспроизводить заранее заданные вольт-амперные характеристики.

Простейшие блоки из перечисленных элементов с последовательным или параллельным соединением имеют простейшие кусочно-линейные характеристики с двумя линейными участками и регулируемыми параметрами (точки перегиба и углы между линейными отрезками). Представим пример цепного моделирования простейших кусочно-линейных характеристик (рис. 3.17, а, б). Эквивалентная характеристика, имеющая вогнутый характер, получена суммированием характеристик элементов: идеального диода ( $D$ ), линейного резистора ( $R$ ) и идеального источника ЭДС ( $E$ ). Комбинация простейших блоков позволяет конструировать цепи с заданными характеристиками.

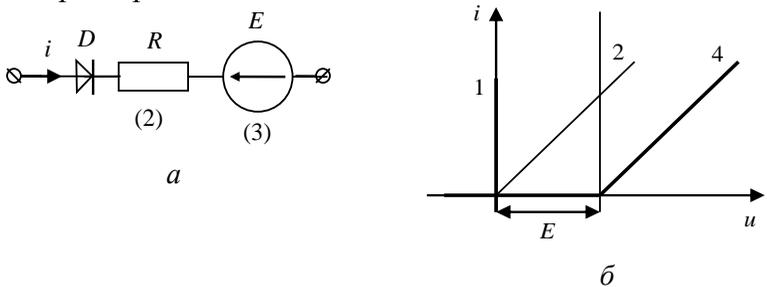


Рис. 3.17

**Пример 3.10.** Построить схему цепи, реализующую вольт-амперную характеристику нелинейного резистора (рис. 3.18, а) и определить ее параметры.

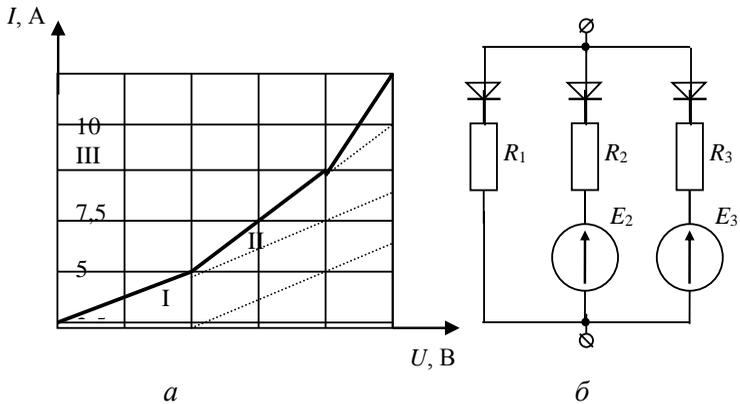


Рис. 3.18

*Решение.* Заданную кусочно-линейную ВАХ раскладываем на составляющие, продолжив линии участков I и II и вычитая их ординаты из ординат II и III соответственно. Каждая из рассматриваемых составляющих (I, II и III) реализуется последовательным блоком (рис. 3.17, а). Блоки необходимо соединить параллельно, так как для получения заданной ВАХ составляющие I, II и III суммируются по оси токов. Эквивалентная цепь из таких блоков (рис. 3.18, б) имеет следующие параметры:  $R_1 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 1 \text{ кОм}$ ;  $E_1 = 0 \text{ В}$ ;  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  $E_3 = 20 \text{ В}$ .

**Метод эквивалентных синусоид.** В цепях с нелинейными элементами периодические токи и напряжения могут содержать высшие гармоники, даже если приложенное к зажимам цепи напряжение синусоидальное (см. раздел 3.6).

Метод эквивалентных синусоид – это приближенный метод расчета, основанный на замене действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения эквивалентными им синусоидами. Выбор эквивалентных синусоид, т.е. их амплитуд и начальных фаз может быть осуществлен разными способами, в зависимости от поставленной задачи. Если интересует энергетическая часть процесса, то выбор эквивалентных

синусоид осуществляют из условия неизменности активной мощности цепи. Так напряжения и токи

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \alpha_k + \varphi_k); \quad i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

можно заменить эквивалентными синусоидами

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \alpha + \varphi); \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$ ,  $I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$  и  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

При этом производится расчет активной и реактивной мощности цепи с несинусоидальными токами и напряжениями

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k; \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Из условия неизменности активной мощности  $P = UI \cos \varphi$  можно найти угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами напряжения и тока: если  $Q < 0$ , то  $\varphi = -\arccos \frac{P}{UI}$ ;

если  $Q > 0$ , то  $\varphi = \arccos \frac{P}{UI}$ .

Применение данного метода позволяет записывать уравнения в комплексной форме, а также строить векторные диаграммы, хотя комплексные сопротивления остаются зависящими от тока и, следовательно, алгебраические уравнения, записанные в комплексной форме, остаются нелинейными.

При расчете методом эквивалентных синусоид нелинейные элементы задаются ВАХ  $U(I)$  и  $\varphi(I)$  для действующих значений.

**Пример 3.11.** Для заданной цепи (рис. 3.19) определить показание амперметра электромагнитной системы, если  $\dot{E} = 100e^{-j60^\circ}$  В,  $x_C = 38$  Ом,  $I(U) = 3 \cdot 10^{-4} \cdot U^2$  А,  $\varphi(I) = 90^\circ - 30^\circ \cdot I$ .

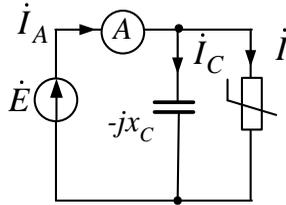


Рис. 3.19

*Решение.* Ветви параллельны, следовательно, действующее значение тока, текущего через нелинейный резистор

$$I(100) = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 100^2 = 3 \text{ А},$$

угол сдвига фаз  $\varphi(3) = 90^\circ - 30^\circ \cdot 3 = 0$ . Тогда комплекс действующего значения тока  $\dot{i} = 3e^{-j60-0} = 3e^{-j60}$  А. Ток емкостного элемента  $\dot{I}_C = \frac{\dot{E}}{-jx_C} = \frac{100e^{-j60}}{-j38} = 2,63e^{j30}$  А.

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}}{-jx_C} = \frac{100e^{-j60}}{-j38} = 2,63e^{j30} \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_A = \dot{i} + \dot{I}_C = 3e^{-j60} + 2,63e^{j30} = 4e^{-j18,7} \text{ А}.$$

Амперметр покажет 4 А.

### 3.6. Примеры использования нелинейных резистивных цепей

Нелинейные резистивные цепи находят разнообразное применение в технических областях. Ниже приведены некоторые примеры, где, в основном, излагается принцип действия устройств.

*Электронные выпрямители* предназначены для преобразования переменного тока в постоянный или пульсирующий. Они используются в устройствах автоматики, источниках питания, для питания двигателей постоянного тока и т.п. Промышленный выпрямитель — сложное устройство, состоящее из трансформатора, согласующего входное напряжение с напряжением на выходе, собственно выпрямителя, выполненного на вентилях, и сглаживающего фильтра для поддержания выходного напряжения в заданных пределах.

Однополупериодный выпрямитель (рис. 3.18) состоит из трансформатора, к вторичной обмотке которого последовательно подсоединены выпрямительный диод  $VD$  и нагрузочный резистор  $R_H$ .

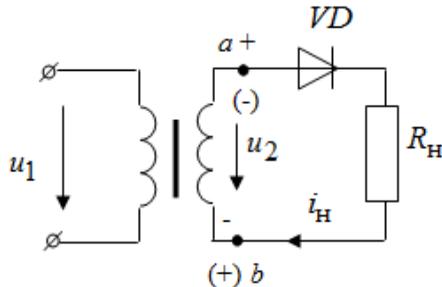


Рис. 3.20

Для упрощения анализа работы выпрямителей однофазный трансформатор и полупроводниковый диод считают идеальными, то есть принимают следующие допущения: у трансформатора активное сопротивление обмоток, а у диода прямое сопротивление равны нулю; обратное сопротивление диода равно бесконечности; в трансформаторе отсутствуют потоки рассеяния. При таких допущениях с подключением первичной обмотки трансформатора к сети переменного синусоидального напряжения во вторичной обмотке будет наводиться синусоидальная электродвижущая сила.

Работу выпрямителя удобно рассматривать с помощью временных диаграмм (рисунок 3.21).

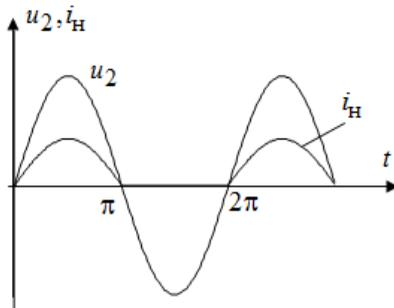


Рис. 3.21

В первый полупериод, когда электрический потенциал точки  $a$  выше электрического потенциала точки  $b$  к диоду приложено прямое напряжение, он открыт и в нагрузку течет ток нагрузки  $i_n$ . Во второй половине периода к диоду приложено обратное напряжение, диод закрыт, ток в электрической цепи равен нулю, а к запертому диоду прикладывается обратное напряжение вторичной обмотки трансформатора  $u_2$ .

Такой выпрямитель «работает» только половину периода, поэтому через нагрузку будет идти сильно пульсирующий периодический электрический ток, состоящий из разделенных паузами отдельных импульсов тока (рис. 3.21).

Основными электрическими параметрами однополупериодного выпрямителя являются:

– средние значения выпрямленного электрического тока и напряжения  $I_{н.ср}$  и  $U_{н.ср}$ ;

– мощность нагрузочного устройства  $P_{н.ср} = U_{н.ср} \cdot I_{н.ср}$ ;

– амплитуда основной гармоники выпрямленного напряжения  $U_{оснт}$ ;

– коэффициент пульсаций выпрямленного напряжения

$$p = \frac{U_{оснт}}{U_{н.ср}};$$

– действующие значения тока и напряжения первичной и вторичной обмоток трансформатора  $I_1$ ,  $U_1$  и  $I_2$ ,  $U_2$ .

В однополупериодном выпрямителе

$$U_{н.ср} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2}U_2 \sin \omega t d\omega t = \frac{\sqrt{2}U_2}{\pi} \approx 0,45U_2,$$

$$\text{или } U_2 = \frac{\pi U_{н.ср}}{\sqrt{2}} \approx 2,22U_{н.ср};$$

$$I_{н.ср} = \frac{U_{н.ср}}{R_n}.$$

Действующее значение электрического тока вторичной обмотки трансформатора

$$I_2 = \frac{U_2}{R_H} = \frac{\pi U_{H.c.p.}}{\sqrt{2} R_H} \approx 2,22 I_{H.c.p.}.$$

Коэффициент пульсаций составляет  $p = 1,57$ . Это значение можно получить из разложения в ряд Фурье выходного напряжения однополупериодного выпрямителя:

$$u_2 = \frac{U_{2m}}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

Отсюда амплитуда основной (первой гармоники напряжения) равна  $\frac{U_{2m}\pi}{2\pi}$ , следовательно, коэффициент пульсаций

$$p = \frac{U_{оснм}}{U_{H.c.p.}} = U_{2m} / 2 \Big/ \sqrt{2} U_2 / \pi = \frac{\pi}{2} \approx 1,57.$$

Однополупериодная схема имеет существенные недостатки: выпрямленное напряжение (ток) сильно пульсирует, оно значительно меньше приложенного, на диоде большое обратное напряжение, мощность трансформатора используется не полностью.

**Двухполупериодные выпрямители** бывают двух типов: мостовыми и с выводом средней точки вторичной обмотки трансформатора. Они являются более мощными, чем однополупериодные выпрямители, так как с их помощью нагрузочные устройства используют обе полуволны питающего напряжения. Однако это достигается за счет усложнения схем.

**Двухполупериодный мостовой выпрямитель** состоит из трансформатора и четырех диодов, подключенных к вторичной обмотке по мостовой схеме (рис. 3.22).

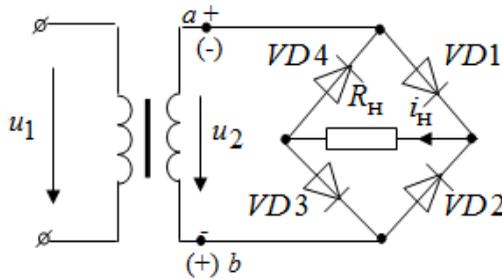


Рис. 3.22

Диоды  $VD1$  и  $VD3$  открыты в первый полупериод напряжения вторичной обмотки трансформатора  $u_2$ , когда электрический потенциал точки  $a$  выше электрического потенциала точки  $b$ .

При этом в нагрузочном сопротивлении  $R_H$  появляется ток нагрузки  $i_H$ . В этом интервале времени диоды  $VD2$  и  $VD4$  закрыты. В следующий (отрицательный) полупериод напряжения вторичной обмотки электрический потенциал точки  $b$  выше электрического потенциала точки  $a$ , диоды  $VD1$  и  $VD3$  закрыты, а  $VD2$  и  $VD4$  открыты. В оба полупериода напряжения, как видно из рисунка 3.23, ток через нагрузочный резистор  $R_H$  имеет одно и то же направление.

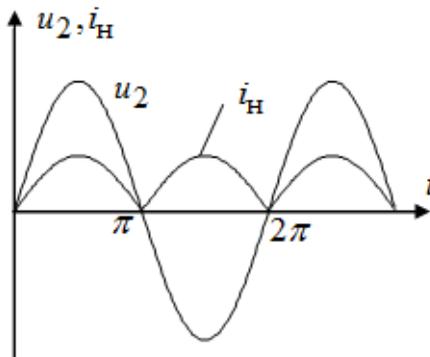


Рис. 3.23

При этом средние значения выпрямленных напряжений  $U_{н.ср}$  и токов  $I_{н.ср}$  запишутся следующим образом:

$$U_{н.ср} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2}U_2 \sin \omega t d\omega t = \frac{2\sqrt{2}U_2}{\pi} \approx 0,9U_2 ;$$

$$I_{н.ср} = \frac{U_{н.ср}}{R_H} .$$

Действующее значение напряжения вторичной обмотки трансформатора:

$$U_2 = \frac{\pi U_{н.ср}}{2\sqrt{2}} \approx 1,11U_{н.ср} .$$

Средний ток каждого диода равен

$$I_{аср} = 0,5I_{н.ср} ,$$

а действующее значение тока вторичной обмотки трансформатора –

$$I_2 = \frac{U_2}{R_H} = \frac{\pi U_{н.ср}}{2\sqrt{2}R_H} \approx 1,11 \frac{U_{н.ср}}{R_H} .$$

Максимальное обратное напряжение на диодах

$$U_{обр.маx} = \sqrt{2}U_2 .$$

Максимальный прямой ток диода

$$I_{aмаx} = \frac{\sqrt{2}U_2}{R_H} = \frac{\pi U_{н.ср}}{2R_H} \approx 1,57 \frac{U_{н.ср}}{R_H} .$$

Разложив напряжение  $u_H = i_H R_H$  в ряд Фурье, получим числовое значение коэффициента пульсаций:

$$u_H = \frac{2U_{2m}}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \dots \right) .$$

Амплитуда основной гармоники напряжения частотой  $2\omega$  равна  $\frac{2U_{н.ср}}{3}$ , следовательно, коэффициент пульсаций –  $p \approx 0,67$ .

Мостовой выпрямитель по сравнению с однополупериодным выпрямителем имеет следующие преимущества: средние значения выпрямленного тока и напряжения в два раза больше, а коэффициент пульсаций меньше.

В то же время максимальное обратное напряжение на каждом из закрытых диодов, которые по отношению к вторичной обмотке включены параллельно, имеет такое же значение, как и в однополупериодном выпрямителе, то есть  $U_{\text{обр. max}} = \sqrt{2}U_2$ . Все эти преимущества достигнуты за счет увеличения числа диодов в четыре раза, что является основным недостатком мостового выпрямителя.

*Двухполупериодный выпрямитель с выводом средней точки вторичной обмотки трансформатора* (рис. 3.24) можно рассматривать как сочетание двух однополупериодных выпрямителей, включенных на один нагрузочный резистор  $R_H$ .

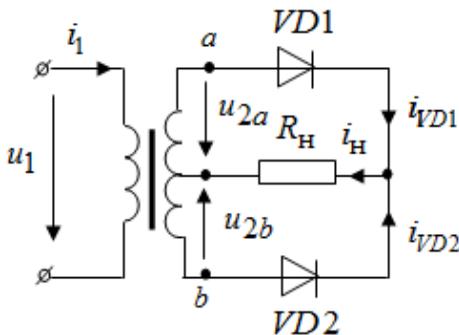


Рис. 3.24

В каждый из полупериодов напряжения  $u_{2ab}$  работает либо верхняя, либо нижняя часть выпрямителя. Если в каждой половине вторичной обмотки считать положительным то направление тока, при котором соответствующий диод открыт, то ток в каждой половине обмотки и в каждом диоде будет синусоидальным в течение положительного (для этой половины) полупериода и равным нулю в течение отрицательного полупериода. При этом независимо от того, какой

из диодов открыт, ток в нагрузочном резисторе  $R_H$  сохраняет свое направление. При одинаковых значениях напряжений  $u_{2a}$  и  $u_{2b}$  эти токи будут равны (рис. 3.25).

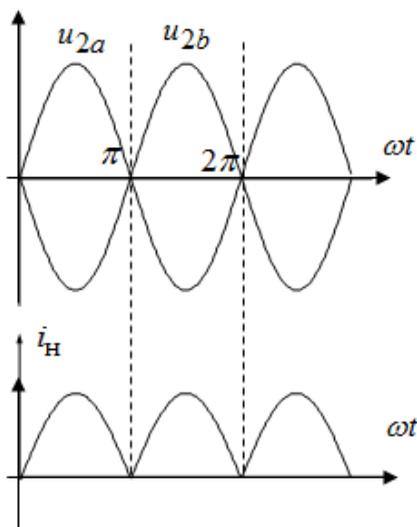


Рис. 3.25

Данный тип выпрямителя имеет те же преимущества перед однополупериодным выпрямителем, что и мостовой выпрямитель, за исключением максимального обратного напряжения  $U_{обр.маx}$ , которое определяется напряжением  $u_{2ab}$ . При  $U_{обр.маx} = \sqrt{2}U_{2ab}$  и одинаковых значениях сопротивления нагрузки  $R_H$

$$U_{обр.маx} = \pi U_{н.ср} \approx 3,14 U_{н.ср}.$$

Все остальные соотношения для токов и напряжений определяются по формулам, полученным для мостового выпрямителя, при этом коэффициент пульсации составляет  $p \approx 0,67$ .

В рассматриваемом выпрямителе габариты, масса и стоимость трансформатора значительно больше, чем в однопо-

лупериодном и мостовом выпрямителях, так как вторичная обмотка имеет вдвое большее число витков и требуется вывод от средней точки.

Двухполупериодные выпрямители применяются для питания нагрузочных устройств малой и средней мощности.

Трехфазные выпрямители применяют как выпрямители средней и большой мощностей. Существует два основных типа выпрямителей: с нейтральным выводом и мостовой.

**Трехфазный выпрямитель с нейтральным выводом** состоит из трехфазного трансформатора, обмотки которого соединены звездой, трех диодов, каждый из которых включен в фазу трансформатора и нагрузочного резистора  $R_H$  (рис. 3.26).

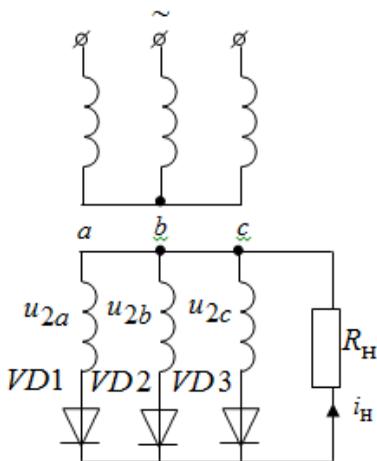


Рис. 3.26

Диоды работают поочередно, каждый в течение трети периода, когда электрический потенциал начала одной из фазных обмоток (например,  $a$ ) более положителен, чем двух других ( $b$  и  $c$ ). Выпрямленный ток в нагрузочном резисторе  $R_H$  (рис. 3.27) создается токами каждого диода, имеет одно и то же направление и равен сумме выпрямленных токов каждой из фаз:

$$i_H = i_a + i_b + i_c.$$

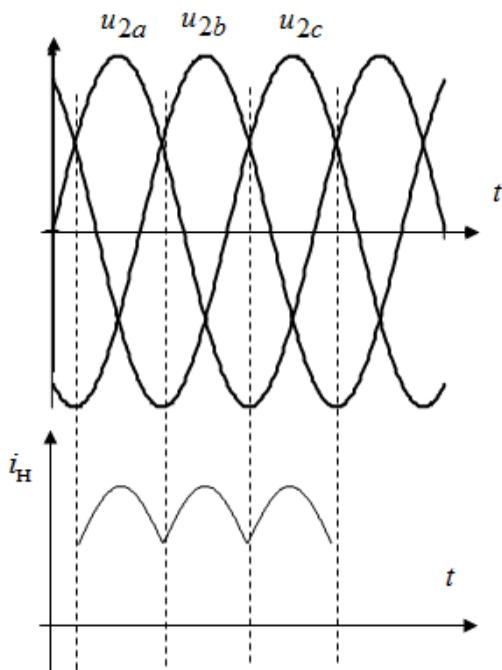


Рис. 3.27

Коэффициент пульсаций схемы выпрямления при этом составляет  $p = 0,25$ .

Данный выпрямитель служит для питания нагрузочных устройств, в которых средние значения выпрямленного тока доходят до сотен ампер, а напряжение – до десятков киловольт. К достоинствам выпрямителя можно отнести высокую надежность (минимальное количество диодов), к недостаткам – подмагничивание сердечника трансформатора постоянным током, что снижает коэффициент полезного действия выпрямителя.

**Трехфазный мостовой выпрямитель** содержит выпрямительный мост из шести диодов (рис. 3.26). Данная схема выпрямления была предложена в 1923 г. профессором А.Н. Ларионовым (схема Ларионова).

Диоды  $VD1, VD3, VD5$  образуют группу, в которой соединены все катодные выводы, а у второй половины диодов ( $VD2, VD4, VD6$ ) соединены все анодные выводы (рис. 3.28). Примем значение электрического потенциала нейтральной точки  $n$  обмоток  $\varphi_n = 0$ . При этом электрические потенциалы выводов вторичной обмотки трансформатора равны

$$\varphi_a = u_a = U_m \sin \omega t; \quad \varphi_b = u_b = U_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$\varphi_c = u_c = U_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

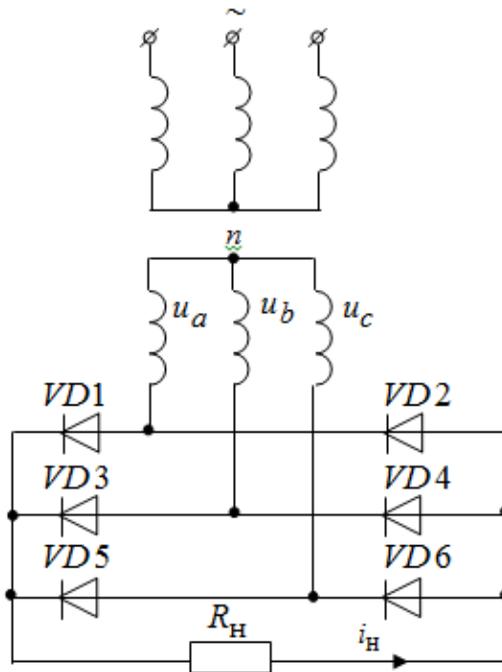


Рис. 3.28

В каждый момент времени работает тот диод первой группы, у которого анодный вывод имеет наибольший положительный электрический потенциал относительно электрического потенциала точки  $n$ , а вместе с ним – диод второй группы, у которого катодный вывод имеет наибольший по

абсолютному значению отрицательный электрический потенциал относительно нейтральной точки.

Например, в интервал времени  $t_1 \div t_2$  (рис. 3.29) ток возникает в электрической цепи диод  $VD1$  – нагрузочный резистор  $R_H$  – диод  $VD4$ , так как анодный вывод диода  $VD1$  имеет наибольший положительный электрический потенциал  $\varphi_{a\max}$ , а катодный вывод диода  $VD4$  имеет наибольший по абсолютному значению отрицательный электрический потенциал  $\varphi_{b\max}$ . При этом к этим диодам будет приложено наибольшее в этом интервале времени линейное напряжение  $u_{ab}$ . В интервал времени  $t_2 \div t_3$  (рис. 3.29) открыты диоды  $VD1$  и  $VD6$ , так как к ним приложено наибольшее в этом интервале линейное напряжение  $u_{ac}$  и так далее (рис. 3.29). Во все интервалы времени ток в нагрузке имеет одинаковое направление.

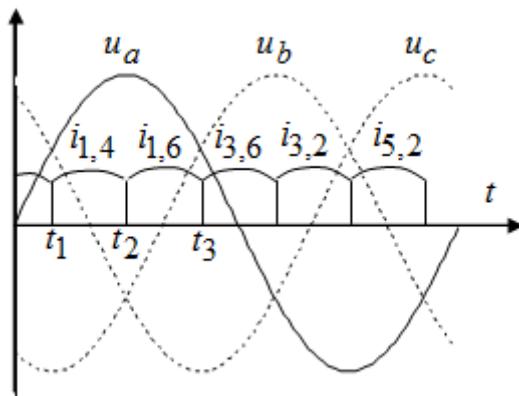


Рис. 3.29

Из временных диаграмм (рис. 3.29) видно, что пульсации выпрямленного тока значительно меньше, чем в трехфазном выпрямителе с нейтральным выводом. Коэффициент пульсаций для данной схемы составляет 0,057.

*Стабилизатор* — это устройство, автоматически поддерживающее на нагрузке заданное значение напряжения,

тока или мощности при произвольном значении входного напряжения, параметров нагрузки или цепи.

В схеме простейшего стабилизатора напряжения (рис. 3.30, а) в качестве НЭ используется стабилитрон,  $R_6$  — баластное сопротивление. На рис. 3.30, б изображена ВАХ стабилитрона. При анализе работы стабилизатора определяют пределы допустимых изменений  $U_1$  при  $R_H = \text{const}$ , а также исследуют работу стабилизатора при одновременном изменении  $U_1$  и  $R_H$ .

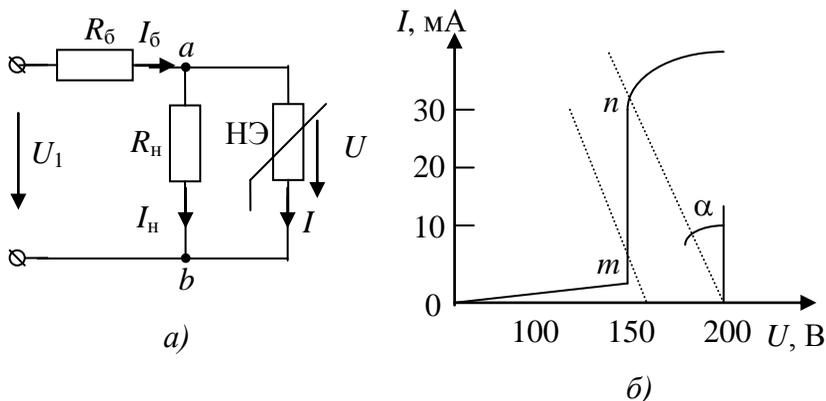


Рис. 3.30

Для оценки качества стабилизации используют *коэффициент стабилизации*, представляющий собой отношение относительного приращения напряжения на входе стабилизатора ( $\Delta U_1/U_1$ ) к относительному приращению напряжения на выходе стабилизатора ( $\Delta U_H/U_H$ ).

**Пример 3.12.** В схеме (см. рис. 3.30, а)  $R_H = 5$  кОм. ВАХ стабилитрона соответствует ВАХ на рис. 3.30, б. Определить границы допустимого изменения  $U_1$ , в которых на выходе стабилитрона поддерживается стабилизированное напряжение 150 В.

*Решение.* Воспользуемся методом эквивалентного генератора. Разомкнем ветвь стабилитрона и найдем параметры эквивалентного генератора:

$$U_{ab} = U_1 \frac{R_H}{R_H + R_G} = 0,713U_1;$$

$$R_{\text{вх} ab} = \frac{R_H R_G}{R_H + R_G} = 1427 \text{ Ом.}$$

Проведем (пунктиром) две прямые линии (рис. 3.30, б) через точки  $m$  и  $n$  под углом, тангенс которого равен  $R_{\text{вх} ab} = 1427 \text{ Ом}$ . Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси абсцисс, равны напряжению холостого хода между точками  $a$  и  $b$ . По рис. 3.30, б находим:

$$0,173U_{1\text{min}} = 157 \text{ В}; U_{1\text{min}} = 220 \text{ В};$$

$$0,713U_{1\text{max}} = 192 \text{ В}, U_{1\text{max}} = 269 \text{ В}.$$

Следовательно, напряжение  $U_1$  может изменяться от 220 до 269 В.

### 3.7. Переходные процессы в нелинейных цепях

*Общая характеристика методов анализа переходных процессов.* Методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть разделены на графические (графоаналитические), аналитические и численные.

Под *графическими (графоаналитическими)* понимают такие методы, в которых основными операциями при определении зависимостей от времени искомым токов и напряжений нелинейных элементов (НЭ) являются графические построения, иногда сопровождаемые и числовыми расчетами. Графоаналитические методы расчета свободны от погрешностей, связанных с аппроксимацией характеристик и, кроме того, позволяют учесть гистерезис и другие нелинейные зависимости.

*Аналитическими* называют такие методы, в которых основной операцией при определении зависимостей искомым функций от времени является точное аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений путем использования аналитических выражений характеристик НЭ.

*Численными* называют такие методы, в которых основной операцией при определении зависимостей искомых функций от времени является приближенное (численное) интегрирование на ЭВМ системы нелинейных дифференциальных уравнений, заданных в форме уравнений состояния.

**Метод последовательных приближений.** Рассмотрим включение постоянной ЭДС  $E$  в последовательную цепь из индуктивности  $L$  и нелинейного сопротивления, характеристика которого  $U = f(i)$  задана графически (рис. 3.31, а).

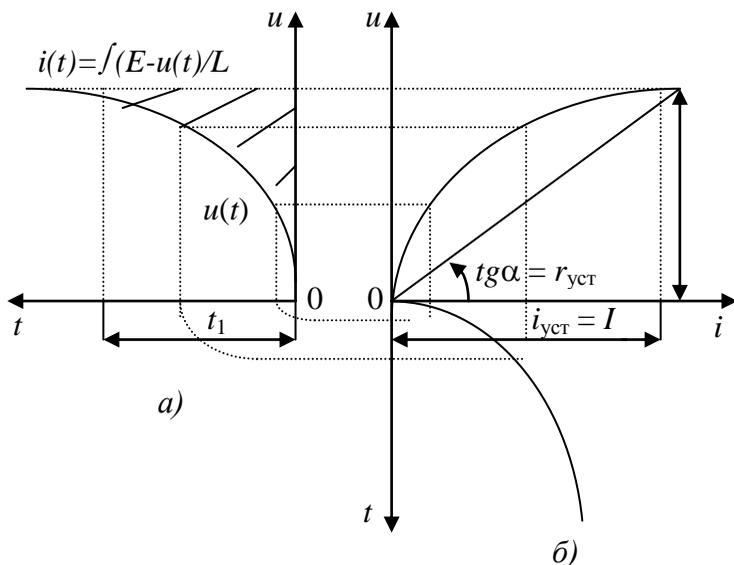


Рис. 3.31

Дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + f(i) = E \quad (3.16)$$

является нелинейным. Вначале положим, что характеристика сопротивления линейна и проходит через точку с координатами  $I$  и  $E$ , соответствующими установившемуся режиму. Тогда  $r = E/I = \text{const}$ , и дифференциальное уравнение (3.16) становится линейным:

$$L \frac{di}{dt} + r i = E. \quad (3.17)$$

Решение (3.17):

$$i = I(1 - e^{-rt/L}).$$

По зависимости  $i(t)$  (рис. 3.31, б) и нелинейной характеристике (рис. 3.31, а) строится кривая  $u(t)$  (рис. 3.31, в).

На основании (3.16)

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t (E - u) dt. \quad (3.18)$$

Следовательно, для произвольного момента времени  $t_1$  соответствующий ток определяется соотношением

$$i(t) = m_u m_t \frac{S_1}{L},$$

где  $m_u$  — масштаб напряжения, В/мм;  $m_t$  — масштаб времени, с/мм;  $S_1$  — площадь, мм<sup>2</sup> (заштрихованная область на рис. 3.31, в).

Задаваясь различными значениями  $t$ , можно построить кривую, более точно выражающую зависимость тока от времени, чем приближенная функция (3.18).

**Применение кусочно-линейной аппроксимации для анализа переходных процессов.** Выше рассмотрен метод кусочно-линейной аппроксимации применительно к статическим цепям (без накопителей энергии). Применительно к инерционным цепям суть этого метода поясним на примере цепи с нелинейным сопротивлением и линейной индуктивностью, включенными последовательно с источником постоянной ЭДС.

Характеристика нелинейного сопротивления  $u = f(i)$  задана графически (пунктирная линия на рис. 3.32). Дифференциальное уравнение имеет вид (3.16). Заменим нелинейную характеристику нелинейного резистора совокупностью линейных отрезков (рис. 3.32). Для первого участка

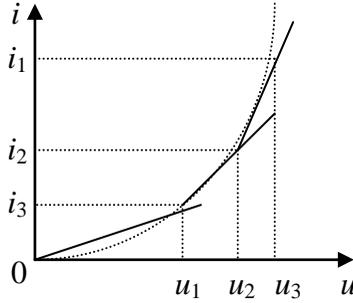


Рис. 3.32

$$i = \frac{i_1}{u_1} u = \frac{u}{r_1}, \quad u = r_1 i, \quad i = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1} (u_2 - u_1) = i_1 + \frac{u - u_1}{r_2},$$

откуда  $u = r_2 i + u_1 \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)$ , где  $r_2 = \frac{u_2 - u_1}{i_2 - i_1}$ . Для третьего

участка  $i = i_2 + \frac{i_3 - i_2}{u_3 - u_2} (u - u_2) = i_2 + \frac{u - u_2}{r_3}$ , откуда

$$u = r_3 i + u_2 \left(1 - \frac{r_3}{r_2}\right), \quad \text{где } r_3 = \frac{u_3 - u_2}{i_3 - i_2}.$$

Подставляя указанные значения в дифференциальное уравнение  $u + L \frac{di}{dt} = E$ , получаем: для первого участка ( $0 < i < i_1$  и  $0 < t < t_1$ )

$$r_1 i + L \frac{di}{dt} = E = E_1;$$

для второго участка ( $i_1 < i < i_2$  и  $t_1 < t < t_2$ )

$$r_2 i + L \frac{di}{dt} = E - u_1 \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) = E_2;$$

для третьего участка ( $i_2 < i < i_3$  и  $t_2 < t < t_3$ )

$$r_3 i + L \frac{di}{dt} = E - u_2 \left(1 - \frac{r_3}{r_2}\right) = E_3.$$

Решения дифференциальных уравнений для соответствующих участков:

$$i = \frac{E_1}{r_1} + A_1 e^{-r_1 t/L} \quad (0 < t < t_1);$$

$$i = \frac{E_2}{r_2} + A_2 e^{-r_2 t/L} \quad (t_1 < t < t_2);$$

$$i = \frac{E_3}{r_3} + A_3 e^{-r_3 t/L} \quad (t_2 < t < t_3).$$

При  $t = 0$  и ток  $i = 0$ , тогда постоянная интегрирования  $A_1 = -E_1/r_1$ .

$$\text{Для первого участка } i = \frac{E_1}{r_1} (1 - e^{-r_1 t/L}) \quad (0 < t < t_1).$$

Подстановка в полученное уравнение  $t = t_1$  и  $i = i_1$  дает  $i_1 = \frac{E_1}{r_1} (1 - e^{-r_1 t_1/L})$ , откуда определяется момент времени  $t_1$ .

Постоянную интегрирования  $A_2$  находят из уравнения тока для второго участка при  $t = t_1$  и  $i = i_2$ :  $A_2 = i_1 - E_2/r_2$ .

Для второго участка

$$i = \frac{E_2}{r_2} + \left( i_1 - \frac{E_2}{r_2} \right) e^{-r_2(t-t_1)/L} \quad (t_1 < t < t_2). \text{ Учитывается условие:}$$

при  $t = t_2$  ток  $i = i_2$ , тогда

$$i = \frac{E_2}{r_2} + \left( i_1 - \frac{E_2}{r_2} \right) e^{-r_2(t_2-t_1)/L}.$$

Полученное уравнение легко решается относительно  $t_2$ .

Очевиден также порядок определения  $A_3$  и любого количества последующих постоянных интегрирования в случае большого числа участков. По уравнениям токов различных участков может быть построена кривая  $i = f(t)$  (рис. 3.33).

Рассмотренный метод расчета основан на принципе припасовывания, суть которого состоит в том, что значения тока на границах участков приравниваются. Необходимость такого

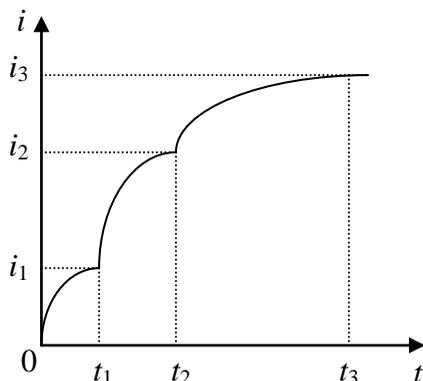


Рис. 3.33

приравнивания вытекает из того положения, что ток в местах стыка рассматриваемых участков не может изменяться скачком.

**Метод условной линеаризации.** Этот метод удобно применять для нелинейных цепей с постоянными источниками. Он дает приближенное решение и заключается в условной замене нелинейных элементов линейными. В таблице 3.1 приведены схемы замещения нелинейных элементов. Напряжения и токи переходного процесса находятся в виде приближенных функций времени классическим или операторным методом.

#### **Порядок расчета**

1. Определяются независимые начальные условия в цепи до коммутации  $i_L(0_-)$ ,  $u_C(0_-)$ .
2. Определяются значения искомых величин в первый момент после коммутации  $i(0)$  или  $u(0)$ .
3. Из расчета установившегося режима после коммутации определяются установившиеся значения необходимых для расчета токов и напряжений.
4. Линеаризуется участок характеристики нелинейного элемента, и определяются его условно-линейные параметры (табл. 3.2.).

5. В схеме после коммутации из условия  $Z(p) = 0$  определяются корни характеристического уравнения.
6. Определяются постоянные интегрирования.

Таблица 3.2

$R_H = \frac{u_{уст} - u(0)}{i_{уст} - i(0)} \quad E_H = u(0) - R_H \cdot i(0)$	
$L_H = \frac{\psi_{уст} - \psi(0)}{i_{Lуст} - i_L(0)}$	
$C_H = \frac{q_{уст} - q(0)}{u_{Cуст} - u_C(0)}$	

**Пример 3.13.** Определить ток переходного процесса  $i(t)$  (рис. 3.34), если  $E = 200\text{ В}$ ,  $C = 100\text{ мкФ}$ , и вольтамперная характеристика нелинейного резистора задана аналитически  $i(u) = 10^{-4} \cdot u^2\text{ А}$ .

*Решение.*

1. Определяем независимые начальные условия  $u_C(0_-) = E = 200\text{ В}$ .

2. В первый момент после коммутации напряжение на нелинейном резисторе  $u(0) = u_C(0) = 200\text{ В}$ , тогда ток  $i(u) = 10^{-4} \cdot (200)^2 = 4\text{ А}$ .

3. В установившемся режиме после коммутации конденсатор уже полностью разрядился и  $i_{\text{уст}} = 0$ ,  $u_{\text{уст}} = 0$ .

4. Заменяем нелинейный элемент линейной схемой замещения с параметрами  $R_{\text{н}} = \frac{u_{\text{уст}} - u(0)}{i_{\text{уст}} - i(0)} = \frac{0 - 200}{0 - 4} = 50\text{ Ом}$ ,

$$E_{\text{н}} = u(0) - R_{\text{н}} \cdot i(0) = 200 - 4 \cdot 50 = 0\text{ В}.$$

5. Составляем схему замещения (рис. 3.35), и находим корень характеристического уравнения:

$$Z(p) = R_{\text{н}} + \frac{1}{pC} = 0;$$

$$p = -\frac{1}{R_{\text{н}}C} = -200\text{ с}^{-1}.$$

6. Находим постоянную интегрирования в момент времени  $t = 0$ :  $B = i(0) - i_{\text{уст}} = 4 - 0 = 4\text{ А}$ .

Ток переходного процесса равен  $i(t) = 4e^{-200t}\text{ А}$ .

**Пример 3.14.** Определить ток переходного процесса  $i_L(t)$  (рис. 3.36), если  $E = 200\text{ В}$ ,  $R = 100\text{ Ом}$ , и вебер-

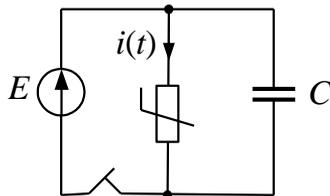


Рис. 3.34

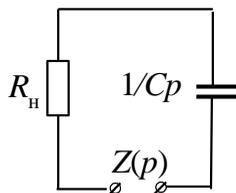


Рис. 3.35

амперная характеристика нелинейного индуктивного элемента задана аналитически  $i_L(\psi) = 13,48 \cdot \psi^2$  А.

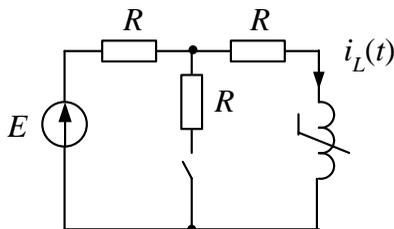


Рис. 3.36

*Решение.*

1. Определяем независимые начальные условия (индуктивный элемент является короткой в установившемся режиме в цепи постоянного тока)  $i_L(0_-) = \frac{E}{2R} = \frac{200}{200} = 1$  А.

2. В первый момент после коммутации  $i_L(0_+) = i_L(0) = 1$  А, тогда потокосцепление

$$\psi(0) = \sqrt{\frac{i_L(0)}{13,48}} = 0,27 \text{ Вб.}$$

3. В установившемся режиме после коммутации (рис. 3.37)

$$i_{L\text{уст}} = \frac{E}{2(R/2 + R)} = \frac{200}{300} = 0,667 \text{ А,}$$

тогда

$$\psi_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{i_{L\text{уст}}}{13,48}} = 0,22 \text{ Вб.}$$

4. Заменяем нелинейный индуктивный элемент линейным с индуктивностью

$$L_{\text{н}} = \frac{\psi_{\text{уст}} - \psi(0)}{i_{L\text{уст}} - i_L(0)} = \frac{0,22 - 0,27}{0,667 - 1} = 0,15 \text{ Гн.}$$

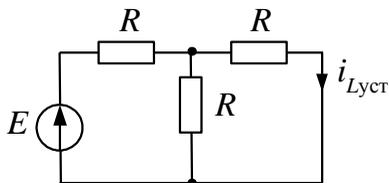


Рис. 3.37

5. Составляем схему замещения (рис. 3.38) и находим корень характеристического уравнения:

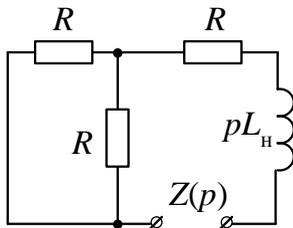


Рис. 3.38

$$Z(p) = \frac{R}{2} + R + pL_H = 0; \quad p = -\frac{R + R/2}{L_H} = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

6. Находим постоянную интегрирования в момент времени  $t = 0$ :  $B = i_L(0) - i_{L\text{уст}} = 1 - 0,667 = 0,333 \text{ А}$ .

Ток переходного процесса равен

$$i_L(t) = 0,667 + 0,333e^{-1000t} \text{ А}.$$

**Применение метода переменных состояния.** Рассмотрим методику расчета с использованием понятий дифференциальной индуктивности катушки  $L_{\text{диф}}(i) = d\phi/di$  и дифференциальной емкости нелинейного конденсатора

$$C_{\text{диф}}(u_C) = dq/du_C.$$

Если вебер-амперная характеристика индуктивной катушки  $i = \text{sh } \beta \psi$ , то  $L_{\text{диф}}(i) = \frac{1}{\alpha \beta \sqrt{1 + i/\alpha^2}}$ . Если кулон-вольтная характеристика конденсатора  $u_C = \alpha \text{ sh } bq$ , то

$$C_{\text{диф}}(u_C) = \frac{1}{ab \sqrt{1 + \left(\frac{u_C}{a}\right)^2}}.$$

**Пример 3.15.** Составить систему уравнений по методу переменных состояния для схемы (рис. 3.39) при нулевых

начальных условиях и указанных на рисунке положительных направления отсчетов токов и напряжений.

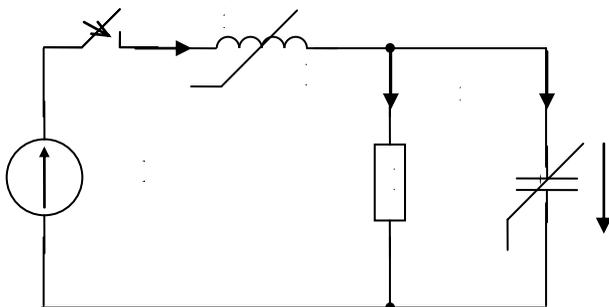


Рис. 3.39

*Решение.* Из уравнения  $i_1 = i_2 + i_3$

$$i_1 = \frac{u_C}{R} + \frac{dq}{du_C} \frac{du_C}{dt} = \frac{u_C}{R} + C_{\text{диф}}(u_C) \frac{du_C}{dt}.$$

Из уравнения  $\frac{d\phi}{dt} + u_C = E$

$$\frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} + u_C = E, \text{ или } L_{\text{диф}}(i) \frac{di}{dt} + u_C = E.$$

Искомая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -\frac{1}{RC_{\text{диф}}(u_C)} u_C + \frac{1}{C_{\text{диф}}(u_C)} i + 0 \cdot E; \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L_{\text{диф}}(i)} u_C + 0 \cdot i + \frac{1}{L_{\text{диф}}(i)} E. \end{aligned} \right\} (3.19)$$

Значения  $L_{\text{диф}}(i)$  и  $C_{\text{диф}}(i)$  на  $(k + 1)$ -м шаге интегрирования подсчитывают по значениям  $i$  и  $u_C$  на  $k$ -м шаге. Решение систем уравнений состояния вида (3.19) возможно только с помощью ЭВМ и будет подробнее рассмотрено в теме 7.

## 4. АНАЛИЗ И РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

### 4.1. Магнитные цепи с постоянными магнитными потоками

Основными величинами, характеризующими магнитное поле, являются вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Между ними существует соотношение:

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (4.1)$$

где  $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость среды;  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость среды;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м магнитная проницаемость вакуума.

Размерность магнитной индукции — Тесла (Тл =  $\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}$ ), размерность напряженности магнитного поля — А/м.

Важнейшей магнитной характеристикой является поток вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  сквозь некоторую поверхность  $\mathbf{S}$ :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (4.2)$$

Измеряется магнитный поток в Веберах ( $\text{Вб} = \text{В} \cdot \text{с} = \text{Тл} \cdot \text{м}^2$ ).

Величина магнитной проницаемости не остается постоянной при изменении величины поля для многих материалов, но именно эти материалы находят широкое применение в электротехнике. Это ферромагнетики. Для них характерно соотношение

$$\mu_a \gg \mu_0.$$

Зависимость  $B = f(H)$  для ферромагнитных материалов, к числу которых относятся электротехнические стали, пермаллои, ферриты, является нелинейной и неоднозначной. Это петля гистерезиса (рис. 4.1). Здесь  $\mu_{\text{диф}} = \frac{dB}{dH}$  — дифферен-

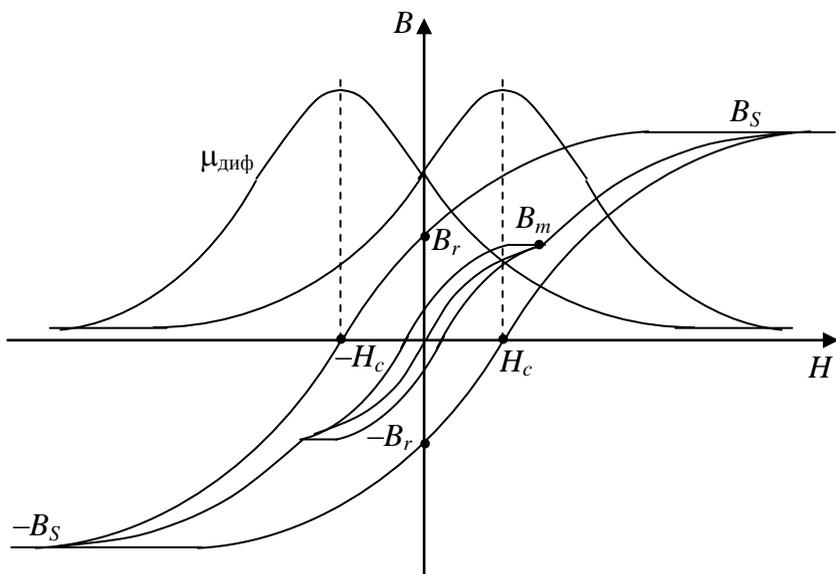


Рис. 4.1

циальное значение магнитной проницаемости. Максимальное значение индукции предельного гистерезисного цикла принято называть индукцией насыщения ( $B_S$ ), а величину индукции, остающуюся после снятия поля, — остаточной индукцией ( $B_r$ ). Величина напряженности поля, необходимого для размагничивания предварительно намагниченного образца, получила название коэрцитивной силы ( $H_c$ ).

Любой гистерезисный цикл с величиной  $B_m < B_S$  называется частным. Геометрическое место вершин частных симметричных циклов гистерезиса — это кривая первоначального намагничивания.

Умение верно определить цикл перемагничивания сердечника электротехнического элемента — основа правильного расчета и проектирования таких устройств, а ошибки могут достигать 1000 %.

**Связь электрических и магнитных величин. Энергетические соотношения в магнитных элементах.** Связь электрических и магнитных величин определяется фундаментальными законами физики — законом электромагнитной индукции

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -W \frac{d\Phi}{dt} = -WS \frac{dB}{dt} = -u, \quad (4.3)$$

где  $\Psi$  — потокосцепление;  $W$  — число витков обмотки, охватывающей поток, и законом полного тока

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum i = iW. \quad (4.4)$$

В случаях, когда магнитный поток идет вдоль пути интегрирования, можно воспользоваться интегральной формой записи закона полного тока

$$Hl = IW,$$

где  $l$  — длина пути магнитного потока;  $I$  — ток.

Величина  $IW$  называется магнитодвижущей силой. По аналогии с электрической цепью можно говорить о магнитном потенциале или напряжении

$$U_{\text{маб}} = \int_a^b \mathbf{H} d\mathbf{l}. \quad (4.5)$$

При  $H = \text{const}$  и совпадении направлений векторов ( $\mathbf{H} d\mathbf{l} = H dl \cos 0^\circ$ )

$$U_{\text{маб}} = Hl_{\text{аб}}.$$

Тогда, очевидно, можно говорить и о магнитном законе Ома и законах Кирхгофа для магнитных цепей. Действительно:

$$B = \mu\mu_0 H; \quad H = \frac{BS}{\mu\mu_0 S} = \frac{\Phi}{\mu\mu_0 S}. \quad (4.6)$$

Умножим обе части последнего равенства на  $l$ :

$$Hl = \Phi \frac{l}{\mu\mu_0 S} = \Phi R_{\text{м}} = U_{\text{м}}, \quad (4.7)$$

где  $R_M = \frac{l}{\mu_a S}$  — магнитное сопротивление, имеющее размерность Ом/с. Магнитная проводимость  $G_M = \frac{1}{R_M} = \frac{\mu_a S}{l}$ .

Используя дуальность электрических и магнитных соотношений, можно записать законы Кирхгофа для магнитных цепей:

$$\left. \begin{aligned} \pm \sum_k \Phi_k &= 0; \\ \pm \sum_k I_n W_n &= \pm \sum_k U_{mk}. \end{aligned} \right\}; \quad (4.8)$$

Рассмотрим энергетические соотношения в магнитных цепях. Мгновенное значение мощности

$$p = ui = WS \frac{dB}{dt} \frac{Hl}{W} = VH \frac{dB}{dt}, \quad (4.9)$$

где  $V = Sl$  — объем магнитного материала элемента.

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$\int_0^t p dt = V \int_{B_0}^{B_m} H dB. \quad (4.10)$$

Таким образом, удельная (отнесенная к единице объема) энергия, затрачиваемая на перемагничивание от точки  $B_0$  до  $B_m$ , определяется площадью под кривой  $H dB$  (заштрихованная область на рис. 4.2). Важно отметить, что на участке  $B_m — B_r$  дифференциал  $dB$  становится отрицательным. Это значит, что на этом участке энергия элемента высвобождается и может быть возвращена источнику (рекуперация энергии).

При циклическом перемагничивании удельные затраты энергии на один цикл перемагничивания равны площади петли гистерезиса.

Мощность потерь на гистерезис пропорциональна частоте (числу циклов в единицу времени):

$$P_r = S_{\text{пр}} Vf = kVB_m f, \quad (4.11)$$

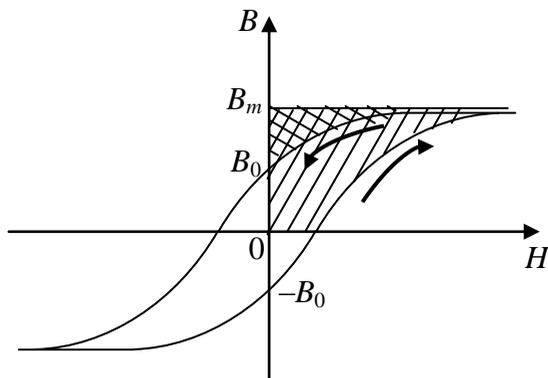


Рис. 4.2

где  $k$  — коэффициент, зависящий от вида материала, формы его петли гистерезиса и формы сердечника.

Рассмотренные параметры и их соотношения в значительной степени зависят от формы сердечника электромагнитного элемента. Это вызвано тем, что магнитное сопротивление магнитопровода часто оказывается соизмеримо с магнитным сопротивлением окружающего пространства, вследствие чего приходится при расчете магнитных цепей прибегать к некоторым допущениям. Обычно считают: 1) магнитный поток неизменен по всей длине магнитопровода (т. е. пренебрегают потоками рассеяния); 2) в воздушном зазоре магнитный поток имеет то же сечение, что и в магнитопровode. Возможность таких допущений необходимо всякий раз оценивать количественно.

**Пример 4.1.** Определить величину магнитного потока в магнитной цепи с немагнитным воздушным зазором  $\delta$  (рис. 4.3), если  $W = 100$ ,  $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $l = 0,05 \text{ м}$ ,  $S = 0,1^{-3} \text{ м}$ ,  $I = 1 \text{ А}$ ,  $\mu_a = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м}$ .

*Решение.* Пренебрегая потоком рассеяния, считаем, что магнитный поток одинаков по всей длине магнитопровода, а площадь сечения зазора равна площади сечения сердечника.

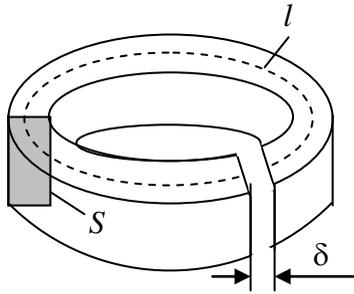


Рис. 4.3

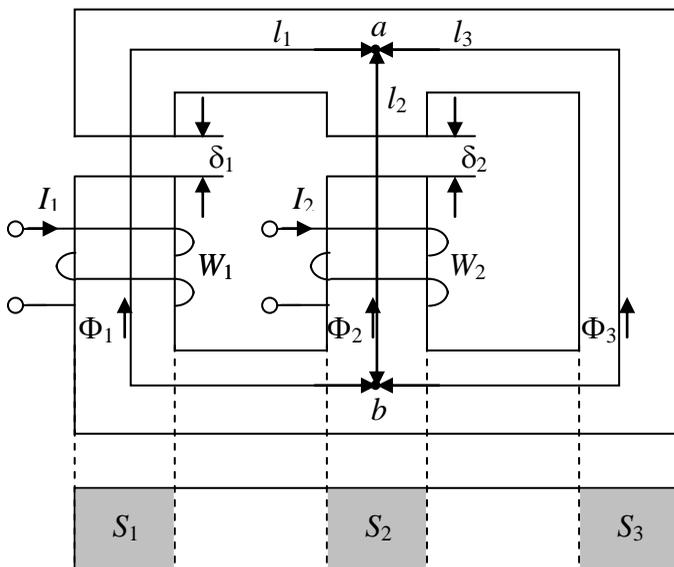
Тогда

$$IW = H_M l + H_\delta \delta = \frac{\Phi}{\mu_a S} l + \frac{\Phi}{\mu_0 S} \delta;$$

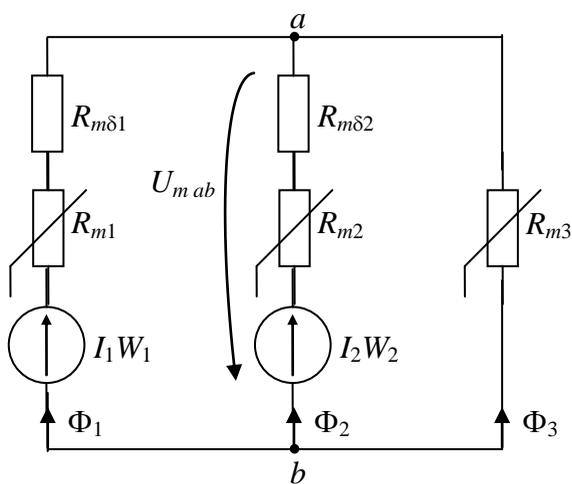
$$\Phi = \frac{IWS}{\frac{l}{\mu_a} + \frac{\delta}{\mu_0}} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{\frac{0,05}{5 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{12,56 \cdot 10^{-7}}} = 2,227 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

На основе характеристик намагничивания, с учетом геометрии сердечника и принятых допущений, создаются вебер-амперные характеристики, которые могут быть аналитическими, если найдена функциональная зависимость  $B = f(H)$ , либо графическими, если эта зависимость задана графиком. На основе вебер-амперных характеристик создается система уравнений равновесия магнитной цепи, которая затем решается относительно магнитных потоков.

Рассмотрим вариант графического решения такой задачи. Пусть для магнитной цепи (рис. 4.4) известны геометрические параметры  $l_1, l_2, l_3, S_1, S_2, S_3, \delta_1, \delta_2$  и магнитодвижущие силы  $I_1 W_1, I_2 W_2$ . Необходимо определить магнитные потоки  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . Известна также характеристика намагничивания материала сердечника  $B = f(H)$  (рис. 4.5), заданная кривой первоначального намагничивания (при расчете цепей с постоянными потоками гистерезисом можно пренебречь).



a)



b)

Рис. 4.4

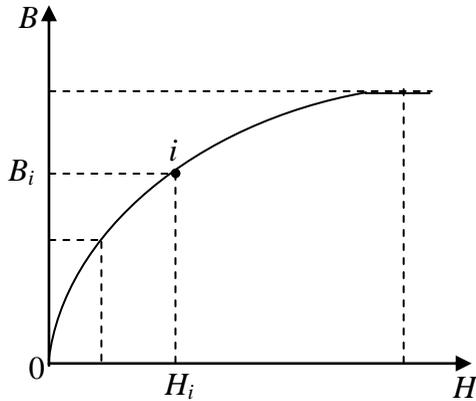


Рис. 4.5

Запишем систему уравнений равновесия магнитной цепи:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 &= 0; \\ I_1 W_1 - I_2 W_2 &= H_1 l_1 + H_{\delta_1} \delta_1 - H_2 l_2 - H_{\delta_2} \delta_2; \\ I_2 W_2 &= H_2 l_2 + H_{\delta_2} \delta_2 - H_3 l_3. \end{aligned} \right\}; \quad (4.12)$$

Из данной системы уравнений для каждой  $i$ -й точки ( $H_{\delta_i} = \frac{B_i}{\mu_0}$ ) кривой намагничивания вычисляются:  $H_{1i} l_1$ ;  $H_{\delta_{1i}} \delta_1$ ;  $H_{2i} l_2$ ;  $H_{\delta_{2i}} \delta_2$ ;  $H_{3i} l_3$ ;  $\Phi_{1i} = B_i S_1$ ;  $\Phi_{2i} = B_i S_2$ ;  $\Phi_{3i} = B_i S_3$ .

Далее можно решать задачу графическим методом двух узлов, для чего необходимо преобразовать исходную систему уравнений, включив в каждый контур цепи (рис. 4.4) магнитное напряжение между узлами  $a$  и  $b$   $U_{Mab}$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 &= 0; \\ U_{Mab} &= I_2 W_2 - H_2 l_2 - H_{\delta_2} \delta_2; \\ U_{Mab} &= I_1 W_1 - H_1 l_1 - H_{\delta_1} \delta_1; \\ U_{Mab} &= -H_3 l_3. \end{aligned} \right\}; \quad (4.13)$$

По каждому из трех последних уравнений системы строятся вебер-амперные характеристики. Примем для определенности:  $I_1 W_1 > I_2 W_2$ ;  $I_1 > 0$ ;  $I_2 > 0$ . Вебер-амперные характеристики (рис. 4.6) представляют собой зависимости  $\Phi_1 = f_1(U_{mab})$ ,  $\Phi_2 = f_2(U_{mab})$ ,  $\Phi_3 = f_3(U_{mab})$ . Решением данной системы будет точка, где выполняется первое уравнение системы ( $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ ), для определения которой целесообразно построение кривой  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{mab})$  лишь в области ожидаемого решения.

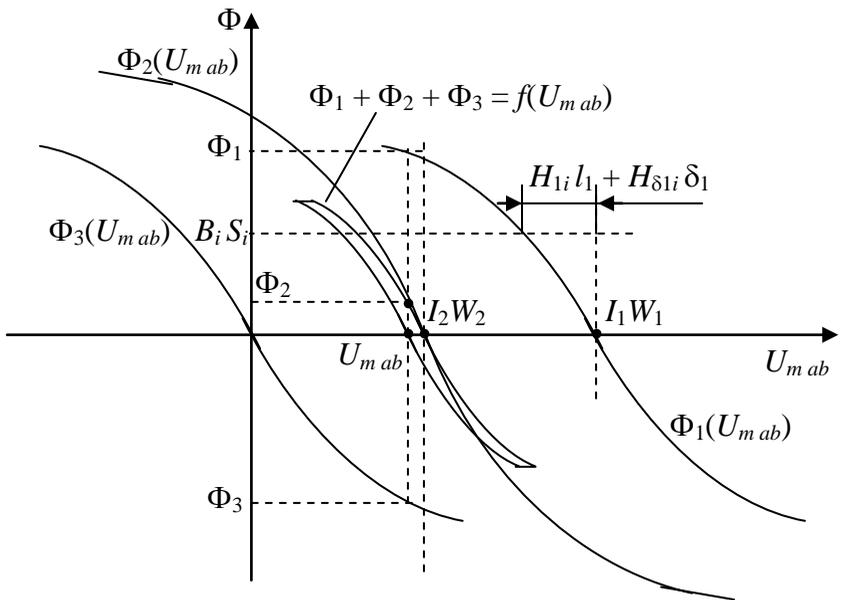


Рис. 4.6

Из известных недостатков графических методов главный — отсутствие аналитичности. Для устранения этого недостатка можно применять различные аппроксимирующие петлю гистерезиса уравнения. Так для аппроксимации основной кривой намагничивания многие авторы рекомендуют использовать уравнение гиперболического синуса

$$H_m = \alpha \operatorname{sh} \beta B, \quad (4.14)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты, зависящие от параметров кривой. Для их определения можно использовать «привязку» аппроксимирующего выражения к двум точкам — с максимальным и минимальным значениями магнитной проницаемости:

$$\alpha = \frac{\mu_{\Delta} H_m}{\sqrt{\mu_{\max}^2 - \mu_{\Delta}^2}}; \quad \beta = \frac{1}{\alpha \mu_{\max}}, \quad (4.15)$$

где  $\mu_{\max}$  — значение магнитной проницаемости по средней кривой намагничивания при  $B = 0$ ;  $\mu_{\Delta}$  — значение магнитной проницаемости в области насыщения;  $H_m$  — напряженность магнитного поля в области насыщения.

Гистерезисная составляющая напряженности поля может быть описана уравнением эллипса, наложенного на гиперболический синус как на криволинейную координату:

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B + H_c \operatorname{sign} B \sqrt{1 - \frac{B^2}{B_m^2}}, \quad (4.16)$$

где  $H_c$  — коэрцитивная сила. Здесь знак гистерезисной составляющей напряженности поля учитывается символом  $\operatorname{sign} B$ , а значение корня всегда принимается положительным.

При компьютерном анализе магнитных цепей эта аппроксимация дает хорошие совпадения и позволяет вычислять также энергетические параметры элементов.

## 4.2. Магнитные цепи переменного синусоидального тока

Главными особенностями работы ферромагнитных элементов на переменном токе являются изменение спектрального состава сигналов и появление затрат на вихревые токи, когда материал сердечника обладает высокой проводимостью. Проиллюстрируем эти положения.

Пусть магнитный поток изменяется по синусоидальному закону

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t, \quad (4.17)$$

тогда ЭДС

$$e = -W \frac{d\Phi}{dt} = -W\omega\Phi_m \cos \omega t = E_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

напряжение

$$u = U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.18)$$

действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 4,44 W f \Phi_m. \quad (4.19)$$

При синусоидальном магнитном потоке ЭДС и напряжения обмоток синусоидальны, а ток намагничивания имеет сложный спектральный состав.

Если вебер-амперную характеристику сердечника аппроксимировать степенным полиномом

$$iW = a\Phi + b\Phi^3, \quad (4.20)$$

который дает хорошее совпадение с кривой первоначального намагничивания, то поток можно считать синусоидальным (рис. 4.7):

$$\begin{aligned} iW &= a\Phi_m \sin \omega t + b\Phi_m^3 \sin^3 \omega t; \\ iW &= a\Phi_m \sin \omega t + \frac{3}{4}b\Phi_m^3 \sin \omega t - \frac{1}{4}b\Phi_m^3 \sin 3\omega t; \\ i &= \frac{1}{W} \left( a\Phi_m + \frac{3}{4}b\Phi_m^3 \right) \sin \omega t - \frac{b\Phi_m^3}{4W} \sin 3\omega t = \\ &= I_{m1} \sin \omega t - I_{m3} \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Ток намагничивания состоит из двух гармонических составляющих — первой и третьей (пунктирные линии на рис. 4.7).

Однако при учете гистерезиса не удастся обойтись столь простой аппроксимацией (рис. 4.8). Здесь кривая тока имеет более сложную форму. Кроме того, ток заметно опережает магнитный поток и отстает от напряжения на угол, меньший 90°. Это говорит о том, что появляется составляющая тока потерь.

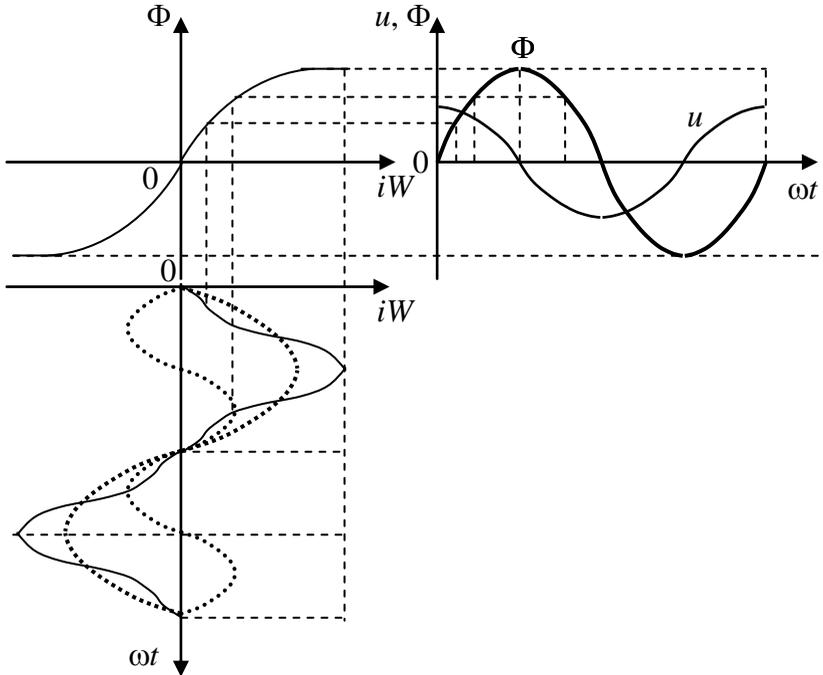


Рис. 4.7

На практике в большинстве случаев заменяют несинусоидальный ток эквивалентным синусоидальным, приравнивая при этом действующие значения условной синусоиды и реальной кривой. Однако ограничиться только учетом гистерезиса невозможно при наличии в сердечнике вихревых токов.

**Пример 4.2.** Вычислить показание амперметра электромагнитной системы, если  $u(t) = 100 \cos 100t$  В,  $i(\psi) = 16\psi^3$  А (рис. 4.9).

*Решение.*

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt}; \quad \psi(t) = \int u(t) dt = \sin 100t \text{ Вб};$$

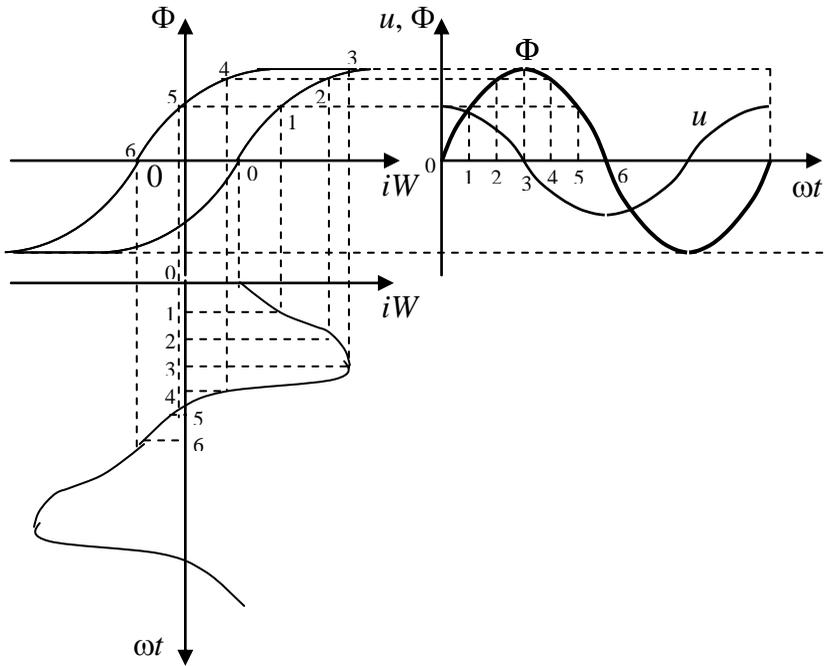


Рис. 4.8

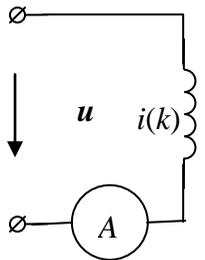


Рис. 4.9

$$i(e) = 16 \sin^3 100t = 16 \cdot \frac{1}{4} (3 \sin 100t - \sin 300t) =$$

$$= (12 \sin 100t - 4 \sin 300t) \text{ A};$$

$$I_A = \sqrt{\left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 8,44 \text{ A}.$$

**Учет влияния вихревых токов, возникающих при перематывании сердечников.** Для уменьшения влияния вихревых токов сердечники электромагнитных материалов делают шихтованными, т.е. набранными из пластин или навитыми из ленты. Чем меньше толщина пластин или ленты, тем меньше, при прочих равных условиях, потери энергии на вихревые токи и тем на больших частотах может работать сердечник. Ферриты относятся к магнитодиэлектрикам и могут работать на высоких частотах, но их индукция насыщения в среднем в 5 раз меньше, чем индукция насыщения металлических материалов, поэтому их применение не всегда целесообразно.

Рассмотрим ленточный сердечник при переменном магнитном потоке (рис. 4.10). Выделим в сечении ленты сердечника элементарный контур шириной  $dx$  и поместим начало координат в его середину. Тогда длина контура  $L_k = 4x + 2h$ , если контур находится на расстоянии  $x$  от начала координат. Обычно  $h \gg d$ , поэтому примем  $L_k = 2h$ . Тогда элементарная проводимость контура

$$g_v = \sigma \frac{ldx}{2h}, \quad (4.21)$$

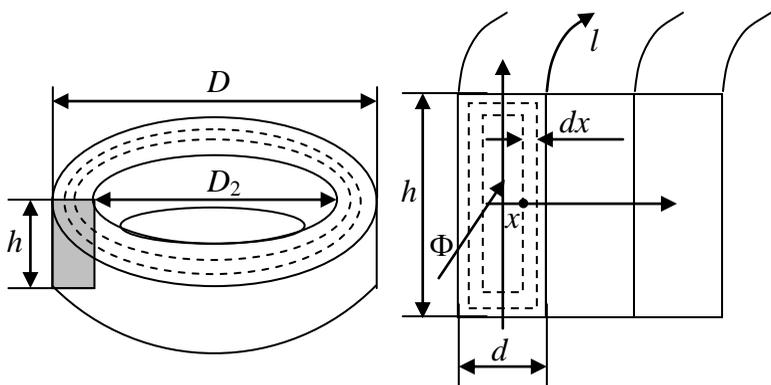


Рис. 4.10

где  $\sigma$  — удельная электропроводность материала сердечника;  $l$  — длина всей ленты.

Пусть индукция в сердечнике изменяется по закону  $B = B_m \sin \omega t$ , а ЭДС витка, образованного элементарным контуром, равна

$$e_b = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = -2xh\frac{dB}{dt} = -2xhB_m\omega \cos \omega t. \quad (4.22)$$

Амплитуда ЭДС

$$E_{b_m} = 4xhB_m\pi f,$$

а действующее значение ЭДС

$$E_b = 2\sqrt{2}xhB_m\pi f.$$

Элементарная мощность, выделяемая в одиночном витке:

$$dp = E_b^2 g_b = 4\pi^2 hB_m^2 f^2 \sigma l x^2 dx.$$

Тогда мощность во всей ленте (сердечнике)

$$p_b = \int_0^{d/2} dp = \frac{\pi^2}{6} V \sigma B_m^2 f^2 d^2, \quad (4.23)$$

где  $V = hld$  — объем ленты (сердечника).

Таким образом, если потери на гистерезис пропорциональны первой степени частоты, то потери на вихревые токи пропорциональны квадрату частоты, квадрату индукции и квадрату толщины ленты. Потери энергии на вихревые токи и гистерезис в сердечнике принято называть потерями в стали и представлять в эквивалентных схемах неким сопротивлением, включенным либо последовательно с индуктивностью намагничивания, либо параллельно ей.

**Схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником.** В справочной литературе по ферромагнитным сердечникам обычно приводится удельное (отнесенное к единице веса материала) значение мощности потерь в стали (в ваттах на килограмм). В нашем анализе потери на гистерезис и вихревые токи зависели от объема материала, но, зная удельный вес материала, легко перейти к справочным величинам:

$$p_{\Gamma} = k_{\Gamma} VGB_m f; \quad p_{\text{вт}} = k_{\text{вт}} VGB_m^2 f^2, \quad (4.24)$$

где  $G$  — удельный вес материала.

Потери в стали  $p = p_{\Gamma} + p_{\text{вт}}$ . Именно эта суммарная величина приводится в справочниках для определенной частоты (чаще всего 50 Гц). Если же требуется знать каждое из слагаемых (например, для определения возможности использования данного сердечника на более высоких частотах), то приходится искать этот параметр на другой частоте или измерять его экспериментально, после чего, учитывая различие зависимостей мощности от частоты, легко произвести разделение:

$$p_{c\ m1} = af_1 + bf_1^2; \quad p_{c\ m2} = af_2 + bf_2^2. \quad (4.25)$$

Когда известны удельные потери в стали на данной частоте, можно вычислить параметры схемы замещения.

Величина мощности устройства определяет объем или вес материала сердечника. По этому параметру выбирают типоразмер сердечника с известной длиной средней линии пути магнитного потока  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ . Напряжение намагничивания

$$U = 4,44 WSfB_m = kB_m, \quad (4.26)$$

тогда ток намагничивания (условно синусоидальный)

$$I_M = \frac{H_m l}{W},$$

где  $H_m$  — напряженность поля, соответствующая  $B_m$ .

При этом индуктивность намагничивания катушки может быть рассчитана по среднему значению магнитной проницаемости:

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{B_m}{H_m}; \quad L_M = \frac{d\Psi}{di} = \frac{\omega^2 S dB}{ldH} \approx \frac{\omega^2 S}{l} \mu_{\text{ср}}.$$

Применение дифференциального значения магнитной проницаемости невозможно из-за неоднозначности и сложности ее зависимости от напряженности магнитного поля (см. рис. 4.1).

В параллельной схеме замещения катушки потери в стали могут быть учтены параллельным присоединением индуктивности намагничивания резистора

$$R_{\Pi} = \frac{(kB_m)^2}{P_{cm}}.$$

Тогда ток потерь

$$I_{\Pi} = \sqrt{\frac{P_{cm}}{R_{\Pi}}}. \quad (4.27)$$

Сопротивление меди обмотки может быть рассчитано по известному числу витков обмотки и геометрии провода и обмотки:

$$R_k = \frac{1}{\sigma} \frac{l_{\text{пр}}}{S_{\text{пр}}},$$

где  $l_{\text{пр}}$  — длина провода катушки;  $S_{\text{пр}}$  — площадь поперечного сечения провода катушки.

Индуктивность рассеяния обычно берут в процентном отношении к  $L_M$ , так как точный расчет требует решения полевой задачи со сложными граничными условиями:

$$L_p \approx (0,03 - 0,1)L_M.$$

Нижний предел берут для тороидальных сердечников.

Схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником представлена на рис. 4.11, а, соотношение между токами схемы и напряжениями на ее элементах поясним векторной диаграммой (рис. 4.11, б).

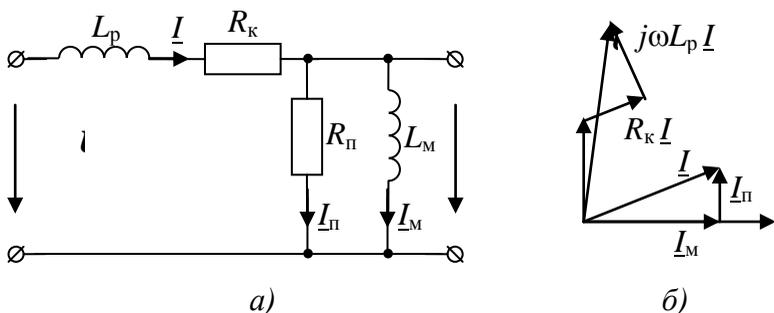


Рис. 4.11

**Пример 4.3.** Потери в стали катушки на частоте 50 Гц составили 6 Вт, а на частоте 100 Гц — 20 Вт. Определить потери в сердечнике на частоте 1 кГц.

*Решение.* Потери в стали

$$P_{ст} = P_r + P_{вт} = af + bf^2;$$

$$6 = 50a + 50^2 b;$$

$$20 = 100a + 100^2 b.$$

Отсюда  $a = 0,04$ ,  $b = 16 \cdot 10^{-4}$ .

$$P_{ст} \Big|_{f=10^3 \text{ Гц}} = 0,04 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 = 1640 \text{ Вт}.$$

### 4.3. Использование нелинейных свойств электромагнитных элементов в технике

Выше подчеркивалась важность умения правильно построить цикл перемагничивания сердечника электромагнитного элемента и учета этого фактора при расчетах и проектировании. Проиллюстрируем это на примере работы импульсного трансформатора для преобразования однополярных импульсов. Изобразим схему усилителя на трансформаторе (рис. 4.12, а) и график петли гистерезиса сердечника трансформатора (рис. 4.12, б).

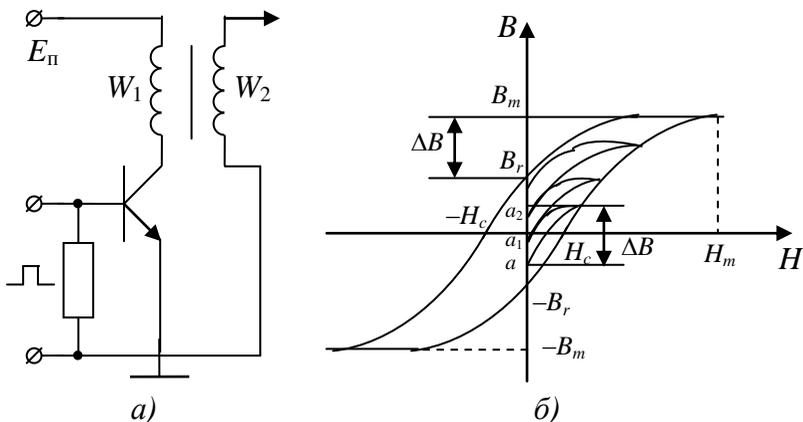


Рис. 4.12

При отсутствии внешнего магнитного поля состояние сердечника характеризуется любой произвольной точкой на оси ординат (ось индукции) между точками  $-B_r$  и  $B_r$ . Пусть это будет точка  $a$ . Пренебрегая напряжением на открытом транзисторе, можно считать, что на протяжении длительности импульса все напряжение питания прикладывается к первичной обмотке трансформатора  $W_1$ . Тогда на основе закона электромагнитной индукции

$$u = WS \frac{dB}{dt} = E, \quad \int_0^{t_n} E dt = WS \int_{B_a}^B dB, \quad Et_n = WS \Delta B,$$

т.е. каждый одиночный импульс вызывает изменение индукции на величину  $\Delta B$ . После окончания импульса сердечник переходит в точку  $a_1$  и т. д., пока не установится предельный несимметричный цикл, в котором индукция изменяется от  $B_r$  до  $B_m$ . Именно это значение  $(B_m - B_r)$  индукции должно быть взято в расчете. Для материалов с высокой прямоугольностью петли  $B_m - B_r$  составляет менее 5% от  $2 B_m$ ; такой может быть ошибка, если не учитывать условия перемагничивания сердечника.

**Феррорезонанс напряжений.** Резонанс в последовательной цепи, содержащей идеальную катушку индуктивности и конденсатор, может наступить либо при изменении частоты, либо при изменении параметров цепи. Если в такую цепь (рис. 4.13, а) включить катушку с ферромагнитным сердечником, индуктивность которой является функцией напряжения (или тока), резонанс может наступать на выбранной частоте лишь в определенной точке характеристики элементов (рис. 4.13, б). Напряжение на катушке индуктивности опережает ток (без учета потерь угол равен  $\pi/2$ ), а напряжение на конденсаторе отстает от тока на  $\pi/2$ . В сумме

$$\underline{U} = \underline{U}_k + \underline{U}_c,$$

но эти векторы противоположны по направлению, т. е.

$$U = |\underline{U}_k - \underline{U}_c|.$$

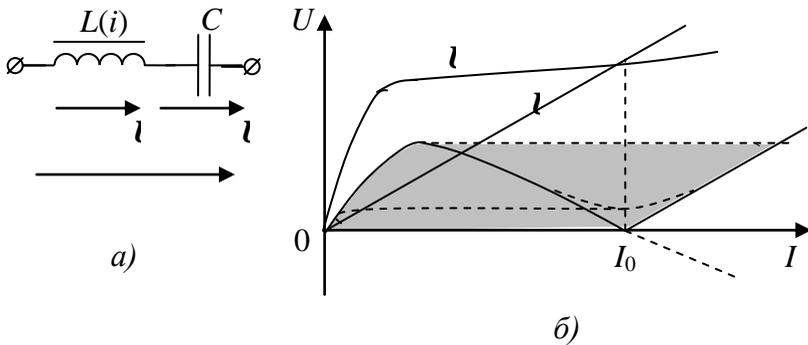


Рис. 4.13

Точка пересечения этой кривой с осью абсцисс соответствует феррорезонансу.

Триггерный эффект и связанные с ним скачки тока (см. заштрихованную область на рис. 4.13, б) могут быть использованы при построении пороговых устройств на переменном напряжении.

Феррорезонанс напряжений используется также при построении стабилизаторов переменного напряжения. Для схемы стабилизатора напряжения (рис. 4.14, а) приведем характеристики (рис. 4.14, б), из которых видно, что стабилизирующее напряжение  $U_1$  изменяется от  $U_1'$  до  $U_1''$  и подается на всю резонансную цепь. Стабильное напряжение снимается с катушки и изменяется от  $U_2'$  до  $U_2''$ . Очевидно, если сердеч-

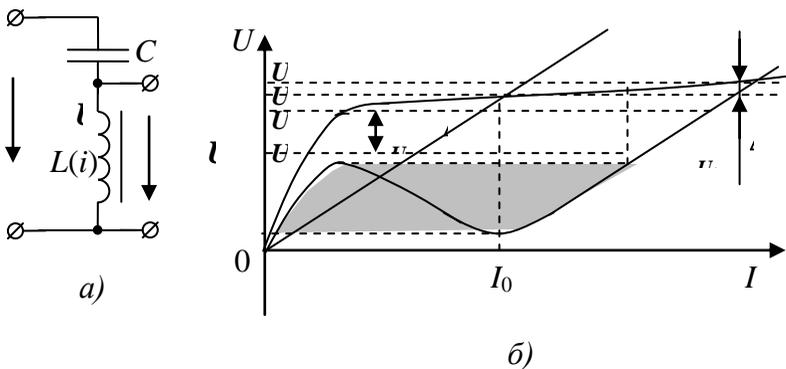


Рис. 4.14

ник катушки находится в области глубокого насыщения, то нестабильность выходного напряжения может быть весьма малой. Коэффициент стабилизации такой цепи

$$k_{\text{ст}} = \frac{(U_1'' - U_1')U_2'}{(U_2'' - U_2')U_1'} \quad (4.28)$$

составляет несколько десятков.

**Феррорезонанс токов.** При параллельном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 4.15, а) возможен (на определенной частоте) феррорезонанс токов. Диаграммы (рис. 4.15, б, в) поясняют работу схемы.

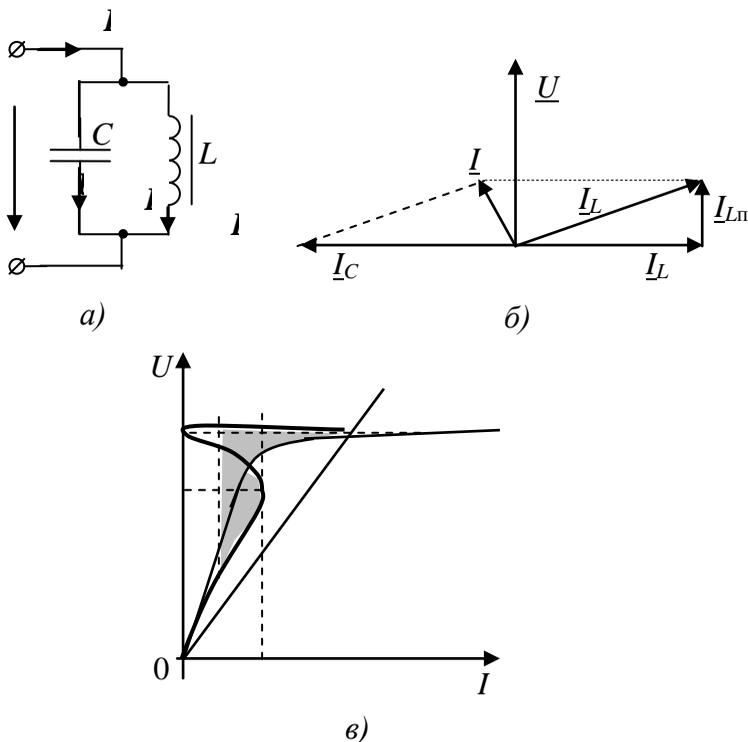


Рис. 4.15

Триггерный эффект проявляется здесь только при питании цепи от источника тока, тогда скачки напряжения обра-

зуют заштрихованную релейную зону (рис. 4.15, в). Феррорезонанс токов используют в пороговых токовых устройствах.

**Простейшая управляемая нелинейная индуктивная катушка и построение на ее основе магнитных усилителей.** Выше было показано, что значение магнитной проницаемости в различных точках кривой индукции различно, причем это различие может составлять несколько порядков.

Поскольку

$$L = \frac{W^2 S}{l} \mu_{\text{диф}},$$

то величину индуктивности катушки можно менять, изменяя положение рабочей точки на кривой намагничивания. Это можно осуществить путем воздействия на сердечник постоянного во времени (но изменяемого по величине) магнитного поля. Приведем схему цепи, реализующей этот принцип (рис. 4.16, а), и диаграммы (рис. 4.16, б), поясняющие работу этой цепи. Смещение рабочей точки от нуля ( $H_y = 0$ ) до точки а ( $H_{y0} = H_{ya}$ ) приводит к уменьшению индуктивности рабочей обмотки ( $W_p$ ) и, как следствие, к увеличению тока нагрузки.

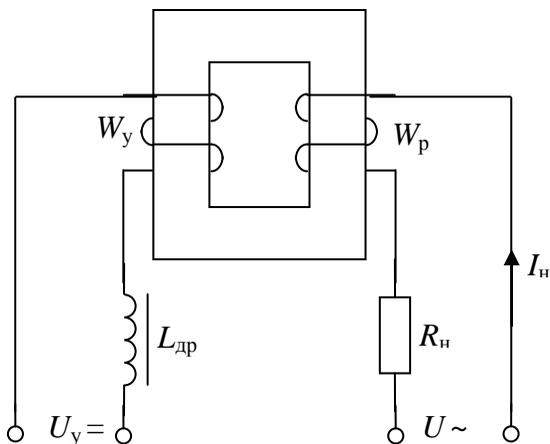
Недостатком такого решения является то, что из рабочей цепи в цепь управления трансформируется переменное напряжение, которое тем больше, чем больше коэффициент трансформации  $W_y / W_p$ . Для уменьшения влияния этого напряжения в цепь управления включают линейный дроссель  $L_{\text{др}}$ , с учетом условия

$$U \frac{W_y}{W_p} \frac{1}{Z_{\text{цy}}} \ll I_y,$$

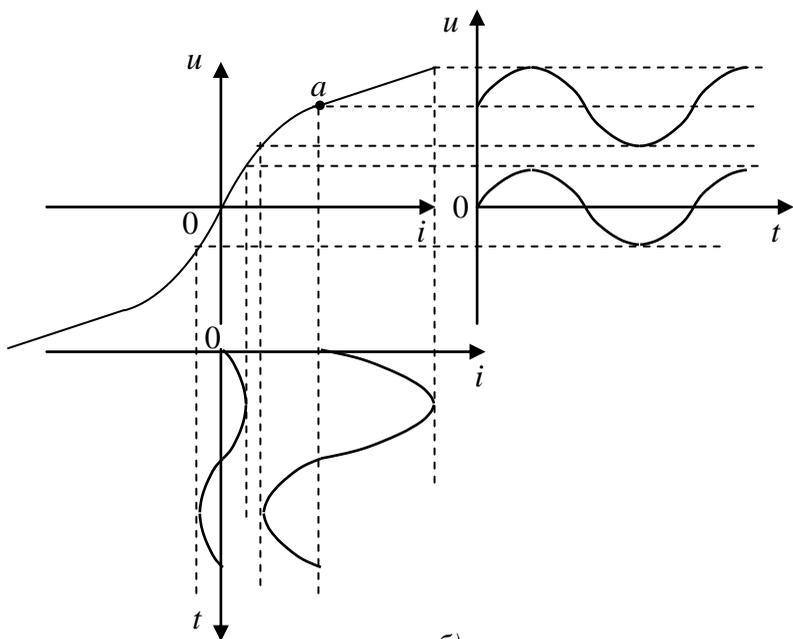
где  $Z_{\text{цy}} = \sqrt{R_{\text{цy}}^2 + (\omega L_y + \omega L_{\text{др}})^2}$  — сопротивление цепи управления.

В схеме (рис. 4.16, а) наблюдается эффект усиления по току. Действительно, если  $I_y W_y \cong I_p W_p$  и  $W_y > W_p$ , то путем незначительного изменения напряжения можно значительно

изменять ток нагрузки. Коэффициент усиления по току  $k_i = W_y/W_p$ .



а)



б)

Рис. 4.16

Схемы магнитных усилителей на двух сердечниках лишены недостатка, связанного с трансформацией переменного тока из рабочей области в цепь управления. В одной из таких схем (рис. 4.17, а) магнитные потоки рабочих обмоток,

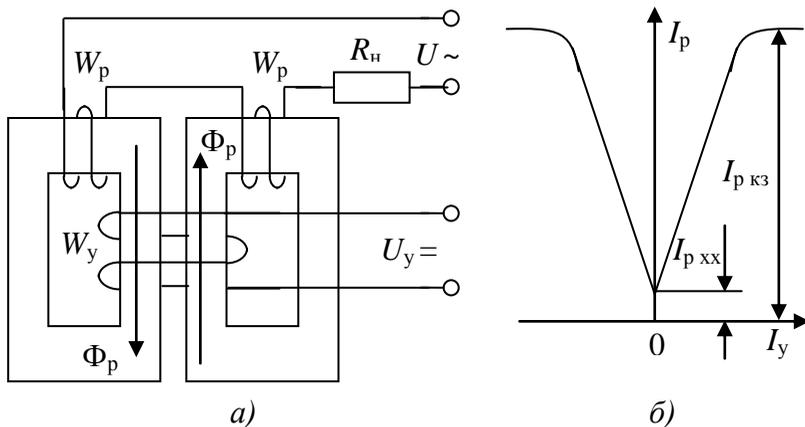


Рис. 4.17

включенных последовательно согласно, пронизывают обмотку управления встречно и, следовательно, компенсируют друг друга. Выходная характеристика усилителя (рис. 4.17, б) показывает, что магнитный усилитель является управляемым

источником тока. Ток рабочей обмотки  $I_p = \frac{I_y W_y}{W_p}$  при

$I_y = \text{const}$  не зависит от нагрузки.

## 5. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ДИСКРЕТНЫМИ СИГНАЛАМИ

### 5.1. Линейные разностные уравнения

В [7] были частично рассмотрены дискретные сигналы (сигналы дискретного времени) и способы дискретизации аналоговых сигналов. Было показано, что часто такие сигналы возникают при периодической выборке аналоговых сигналов (сигналов непрерывного времени). При таком способе представления, когда выборка осуществляется достаточно часто, можно избежать потерь информации.

Максимально возможное время дискретизации аналогового сигнала без потерь информации определяется *теоремой Котельникова*. Если некоторый аналоговый сигнал  $u(t)$  после его разложения в ряд Фурье содержит гармонические составляющие в диапазоне частот  $0 — f_{\max}$ , а каждая из гармоник характеризуется, как известно, амплитудой и фазой, то, чтобы учесть влияние высшей гармоники, на ее периоде должно быть взято, по крайней мере, два отсчета. Тогда интервал

между отсчетами  $\Delta = \frac{1}{2f_{\max}}$  выражает содержание теоремы

В.А. Котельникова (1933 г.): любую функцию времени, содержащую гармоники в диапазоне частот  $0 — f_{\max}$  можно передавать с помощью чисел, следующих друг за другом с интервалом в  $\frac{1}{2f_{\max}}$  секунд.

Преимущество, достигаемое дискретизацией сигналов, — это, прежде всего, возможность одновременного предоставления большому числу пользователей доступа к дорогостоящим средствам связи и системам обработки данных (режим разделения времени). Кроме того, обработка дискретных сигналов свободна от проблем, связанных с чувствительностью, дрейфом, шумами и т.п.

Для описания дискретных цепей используются системы разностных уравнений, играющих здесь такую же роль, какую играют дифференциальные уравнения в описании цепей и систем непрерывного времени.

Поскольку дискретный сигнал представляет собой счетную последовательность, например  $u[n] = 2^n$ , то линейное разностное уравнение  $N$ -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\sum_{k=0}^N a_k i[n+k] = \sum_{l=0}^N b_l i[n+l], \quad (5.1)$$

где  $u[n]$  — входной дискретный сигнал;  $i[n]$  — выходной дискретный сигнал.

Получение уравнений вида (5.1) рассмотрим на конкретных примерах.

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений включают разностные уравнения как промежуточный этап вычислений. Действительно, производная некоторой функции  $u(t)$  может быть приблизительно записана как

$$\frac{du(t)}{dt} \approx \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}, \quad (5.2)$$

где в числителе — разность двух соседних отсчетов значений функции (ее числовой последовательности), а в знаменателе — шаг дискретизации  $\Delta t$ , обычно принимаемый постоянным.

Возьмем некоторую цепь и составим для нее динамические уравнения равновесия. Цепь (рис. 5.1) имеет три накопителя энергии, следовательно, для ее расчета необходимо

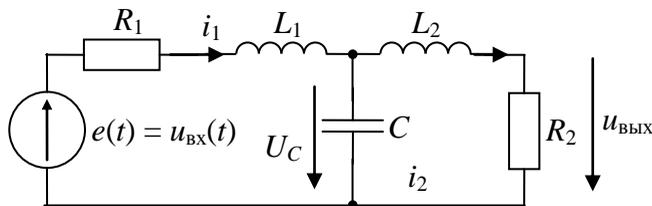


Рис. 5.1

составить три уравнения состояния в нормальной форме Коши относительно переменных  $u_C$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ . Заменяв индуктивности источниками тока, а конденсатор — источником ЭДС, рассчитываем резистивную цепь:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_2(t) + i_C(t); \\ u_{\text{вх}}(t) &= i_1(t)R_1 + u_{L1}(t) + u_C(t); \\ u_C(t) &= +u_{L2}(t) + i_2(t)R_2. \end{aligned}$$

В нормальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1(t)}{dt} &= \frac{1}{L_1} (u_{\text{вх}}(t) - i_1(t)R_1 - u_C(t))M; \\ \frac{di_2(t)}{dt} &= \frac{1}{L_2} (u_C(t) - i_2(t)R_2); \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} (i_1(t) - i_2(t)). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

В качестве выходного напряжения можно рассматривать напряжение на резисторе  $R_2$

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = i_2(t)R_2.$$

Приняв шаг дискретизации  $\Delta t = h$  и используя выражение (5.2), получим:

$$\begin{aligned} i_1(t+h) &\approx \left(1 - \frac{R_1 h}{L_1}\right) i_1(t) - \frac{h}{L_1} u_C(t) + \frac{h}{L_1} u_{\text{вх}}(t); \\ i_2(t+h) &\approx \left(1 - \frac{R_2 h}{L_2}\right) i_2(t) + \frac{h}{L_2} u_C(t); \\ u_C(t+h) &\approx u_C(t) + \frac{h}{C} i_1(t) - \frac{h}{C} i_2(t); \\ u_{\text{ВЫХ}}(t) &= i_2(t)R_2. \end{aligned}$$

Заменяем текущее время счетной последовательностью  $t = n + h$ :

$$i_1(t) = i_1(n+h) = i_1[n]; \quad i_2(t) = i_2[n]; \quad u_C(t) = u_C[n].$$

Поскольку разностные уравнения оперируют числовыми последовательностями, необходимо задаться конкретными значениями параметров цепи и величиной шага интегрирования:  $R_1 = R_2 = 10^3 \text{ Ом}$ ;  $L_1 = L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $C = 0,2 \text{ мкФ}$ ;  $h = 10 \text{ мкс}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} i_1[n+1] &= 0,9i_1[n] - 10^{-4}u_C[n] + 10^{-4}u_{\text{вх}}[n]; \\ i_2[n+1] &= 0,9i_2[n] + 10^{-4}u_C[n]; \\ u_C[n+1] &= u_C[n] + 50i_1[n] - 50i_2[n]; \\ u_{\text{вх}}[n] &= 10^3i_2[n]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Система разностных уравнений (5.4), как видно из (5.1), реализует алгоритм Эйлера, главным недостатком которого является накопление ошибки, если величина шага  $h$  недостаточно мала. Эта система может быть решена, если известны начальные значения  $i_1[0]$ ,  $i_2[0]$ ,  $u_C[0]$  и внешнее воздействие  $u_{\text{вх}}[n]$ .

Важным инструментом при выборе алгоритма составления систем разностных уравнений в численных методах является формула Тейлора

$$i_{n+1} = i_n + i'_n h + i''_n \frac{h^2}{2} + i'''_n \frac{h^3}{6} + \dots + i_n^{(p)} \frac{h^p}{p!} + o(h^{p+1}),$$

где  $o(h^{p+1})$  — отбрасываемые члены ряда, определяющие погрешность,  $i'_n, \dots, i_n^{(p)}$  — производные по току.

Многие численные методы решения систем дифференциальных уравнений базируются на формуле Тейлора. При этом вторая и третья производные обычно аппроксимируются с использованием первой. Таков, например, метод Рунге-Кутта четвертого порядка, рассмотренный в разделе 7.

Обычно для студентов представляет сложность технология применения того или иного метода. Для освоения технологии можно применить метод Рунге-Кутта к цепи (рис. 5.1), для которой уже получены разностные уравнения (5.4) по

алгоритму Эйлера, приняв внешнее воздействие постоянным ( $e(t) = E = \text{const}$ ):

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{L_1}(E - u_C(t) - i_1(t)R_1) = f_1(u_C(t), i_1(t), i_2(t));$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{L_2}(u_C(t) - i_2(t)R_2) = f_2(u_C(t), i_1(t), i_2(t));$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}(i_1(t) - i_2(t)) = f_3(u_C(t), i_1(t), i_2(t)).$$

Начальные условия:  $i_1 = i_1(0) = I_{10}$ ;  $i_2 = i_2(0) = I_{20}$ ;  
 $u_C = u_C(0) = U_{C0}$ .

На нулевом шаге ( $t = t_0 = 0$ ) вычисляются коэффициенты разностных уравнений:

$$T_1(i_1) = f_1(E, u_C(0), i_1(0));$$

$$T_1(i_2) = f_2(u_C(0), i_2(0)),$$

$$T_1(u_C) = f_3(i_1(0), i_2(0));$$

$$T_2(i_1) = f_1\left(E, u_C(0) + T_1(u_C)\frac{h}{2}, i_1(0) + T_1(i_1)\frac{h}{2}\right);$$

$$T_2(i_2) = f_2\left(u_C(0) + T_1(u_C)\frac{h}{2}, i_2(0) + T_1(i_2)\frac{h}{2}\right);$$

$$T_2(u_C) = f_3\left(i_1(0) + T_1(i_1)\frac{h}{2}, i_2(0) + T_1(i_2)\frac{h}{2}\right);$$

$$T_3(i_1) = f_1\left(E, u_C(0) + T_2(u_C)\frac{h}{2}, i_1(0) + T_2(i_1)\frac{h}{2}\right);$$

$$T_3(i_2) = f_2\left(u_C(0) + T_2(u_C)\frac{h}{2}, i_2(0) + T_2(i_2)\frac{h}{2}\right);$$

$$T_3(u_C) = f_3\left(i_1(0) + T_2(i_1)\frac{h}{2}, i_2(0) + T_2(i_2)\frac{h}{2}\right);$$

$$T_4(i_1) = f_1(E, u_C(0) + T_3(u_C)h, i_1(0) + T_3(i_1)h);$$

$$\begin{aligned}
 T_4(i_2) &= f_2(u_c(0) + T_3(u_c)h, i_2(0) + T_3(i_2)h), \\
 T_4(u_c) &= f_3(i_1(0) + T_3(i_1)h, i_2(0) + T_3(i_2)h). \\
 i_1 &= i_1 + \frac{h}{6}(T_1(i_1) + 2T_2(i_1) + 2T_3(i_1) + T_4(i_1)); \\
 i_2 &= i_2 + \frac{h}{6}(T_1(i_2) + 2T_2(i_2) + 2T_3(i_2) + T_4(i_2)); \\
 u_c &= u_c + \frac{h}{6}(T_1(u_c) + 2T_2(u_c) + 2T_3(u_c) + T_4(u_c)); \\
 u_2 &= i_2 R_2.
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

На следующем шаге ( $t = t + h$ ) расчет повторяется, и т.д. Погрешность метода пропорциональна величине  $h^5$ . На основе приведенных соотношений, переходя к численным последовательностям, можно построить систему линейных разностных уравнений по данному методу.

Строго говоря, уравнения (5.4) и (5.5) получены на основе анализа цепи непрерывного времени (рис. 5.1). Элементами цепей дискретных сигналов являются логические импульсные блоки-сумматоры, накопители, усилители, блоки задержки на единицу и др. Рассмотрение таких цепей выходит за рамки данного курса, однако общность подходов к анализу цепей аналоговых сигналов и цепей дискретных сигналов делает уместным рассмотрение методов анализа таких цепей и в данном учебном пособии. Рассмотрим наиболее употребительные элементы цепей с дискретными сигналами (рис. 5.2).

Так же как электрической цепи (рис. 5.1) соответствует система уравнений переменных состояния непрерывного времени (5.3), так некоторой цепи, составленной из логических узлов (рис. 5.3), соответствует система разностных уравнений дискретного времени (5.4). Коэффициенты усиления усилителей с учетом усилителей  $h$  образуют коэффициенты линейных разностных уравнений, каждое из которых можно записать, обойдя соответствующий контур структурной схемы (рис. 5.3).

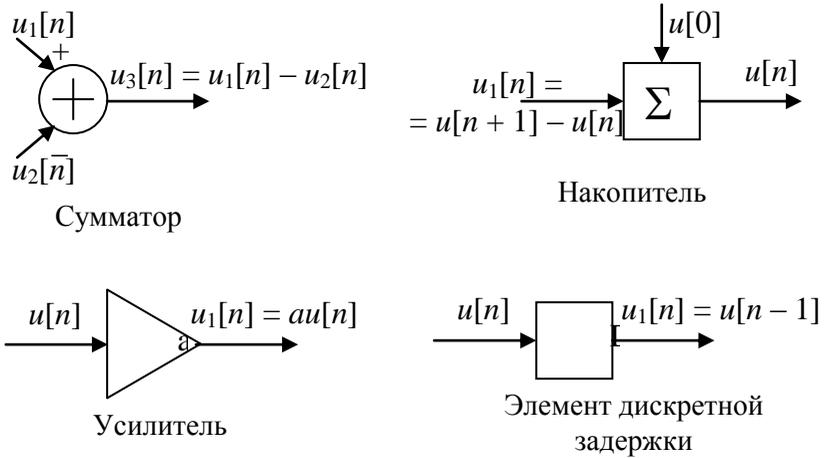


Рис. 5.2

Анализ дискретных сигналов, как и аналоговых, возможен в частотной области и во временной области. В первом случае применяется дискретизация частотного спектра и дискретное преобразование Фурье, а во втором —  $Z$ -преобразование (аналог преобразования Лапласа).

## 5.2. Прямое $z$ -преобразование и его применение к анализу цепей с дискретными сигналами

По аналогии с преобразованием Лапласа, где ядром преобразования является экспонента  $e^{-pt}$ , в  $z$ -преобразовании ядром является дискретная экспонента  $z^{-n}$ . Как и в преобразовании Лапласа, здесь есть возможность упрощения решений линейных разностных уравнений и возможность получения системных функций цепей дискретного времени.

Одностороннее  $z$ -преобразование определяется формулой

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n]z^{-n}. \quad (5.6)$$

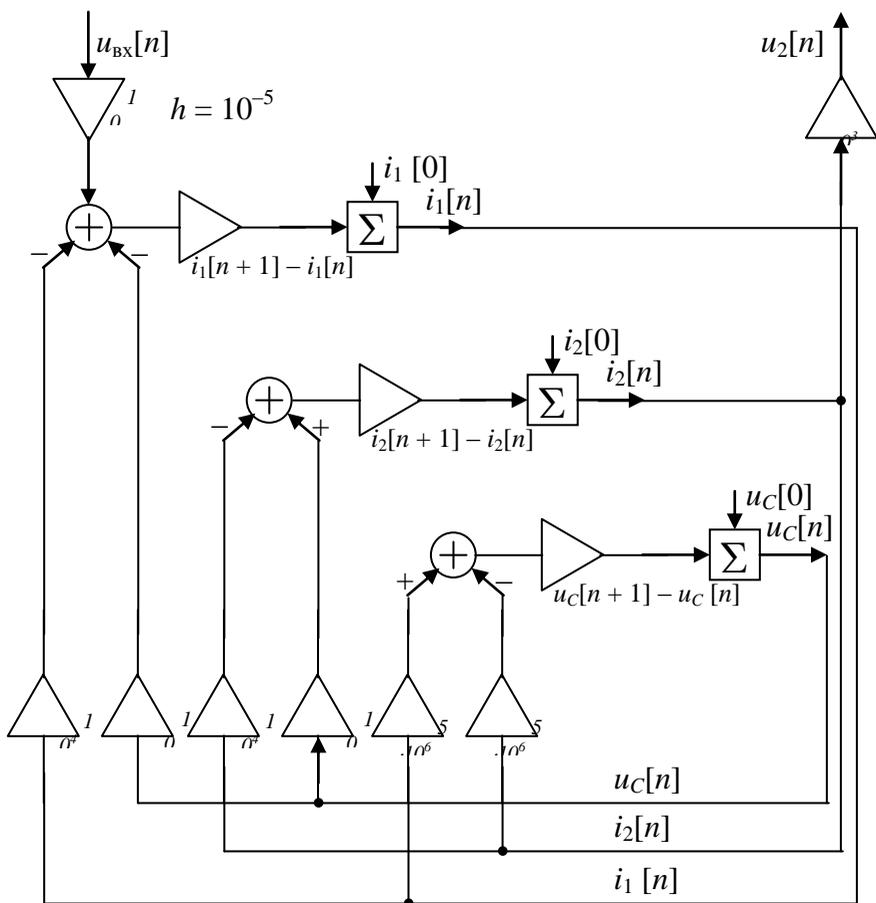


Рис. 5.3

Если  $u[n]$  возрастает не быстрее экспоненты, то ряд (5.6) сходится для всех  $z$ , находящихся на комплексной  $z$ -плоскости вне круга, определяемого радиусом сходимости. Поясним это примерами.

**Пример 5.1.** Применить  $z$ -преобразование к функции  $u[n] = Aa^n$ , где  $n \geq 0$ ,  $a < 1$  (рис. 5.4).

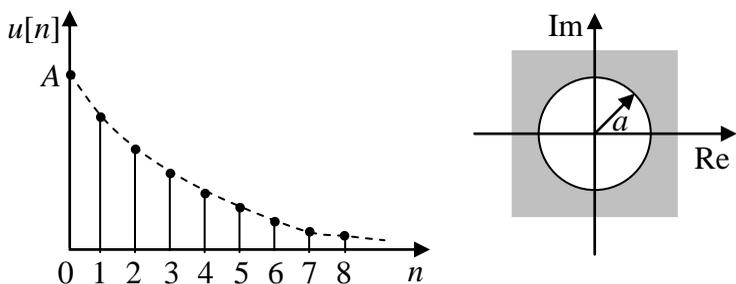


Рис. 5.4

*Решение.*  $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A a^n z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$  — сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой  $q = a/z$ . Сумма такого ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{u_1 q^n - u_1}{q - 1}$ , где  $u_1$  — первый член ряда. При  $|q| > 1$  ряд расходится, а при  $q = z^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$ ,  $r = |q| < 1$ , — сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . Иными словами, в нашем примере  $a/z$  должно быть меньше единицы,  $r = a$  — радиус сходимости. Тогда

$$U(z) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} A \frac{1 \left(\frac{a}{z}\right)^n - 1}{\frac{a}{z} - 1} = \frac{A}{1 - a z^{-1}}. \quad (5.7)$$

Используя методику, приведенную в примере 5.1, можно найти изображения на  $z$ -плоскости наиболее часто встречающихся функций.

Как и в цепях непрерывного времени, в цепях с дискретными сигналами важной характеристикой является реакция цепи на единичное воздействие. Одно из таких сигналов-воздействий — единичная ступенчатая импульсная последовательность, аналог функции Хевисайда в системах с анало-

говыми сигналами (рис. 5.5). Здесь  $u[n] = 1[n]A$ ,  $A = \text{const}$ . Изображение такой функции легко получить, положив в функции примера 5.1  $a = 1$ ,  $r = a = 1$ :

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot 1[n] z^{-n} = \frac{A}{1 - z^{-1}}.$$

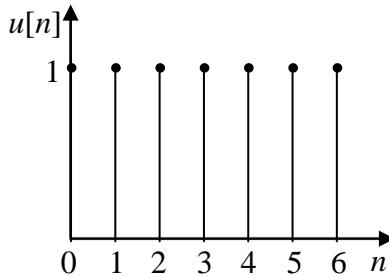


Рис. 5.5

Реакцию дискретной цепи на единичный импульс  $\delta[n]$  также называют импульсной характеристикой цепи  $h[n]$ . Поскольку при дискретизации аналогового сигнала информация о его величине заключена в площади дискретного отсчета, то

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0; \end{cases}$$

$$\Delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1, \quad r = 0.$$

Аналогично можно получить ряд других преобразований:

$$\left. \begin{aligned} u[n] = n &\leftrightarrow U(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad r = 1; \\ u[n] = n a^n &\leftrightarrow U(z) = \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}, \quad r = 1; \\ u[n] = a^n \cos n\phi &\leftrightarrow U(z) = \frac{1 - a z^{-1} \cos \phi}{1 - 2a z^{-1} \cos \phi + a^2 z^{-2}}, \quad r = 1; \\ u[n] = a^n \sin n\phi &\leftrightarrow U(z) = \frac{a z^{-1} \sin \phi}{1 - 2a z^{-1} \cos \phi + a^2 z^{-2}}, \quad r = 1. \end{aligned} \right\} (5.8)$$

Как и преобразование Лапласа,  $z$ -преобразование обладает рядом свойств. Приведем некоторые теоремы.

*Теорема суперпозиции (линейности):*

$$au_1[n] + bu_2[n] \leftrightarrow aU_1(z) + bU_2(z),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные множители.

*Теорема умножения на  $n$ :*

$$u[n] = nu_1[n] \leftrightarrow U(z) = -z \frac{dU_1(z)}{dz}$$

(сравните с полученным ранее выражением).

*Теорема умножения на экспоненту:*

$$u[n] = a^n u_1[n] \leftrightarrow U(z) = U_1(a^{-1}z).$$

*Теорема задержки на  $N > 0$ :*

$$u[n] = u_1[n - N] \cdot 1[n - N] \leftrightarrow U(z) = z^{-N} U_1(z).$$

*Теорема опережающего сдвига:* если  $u[n] \leftrightarrow U(z)$ , то  $u[n - N] \leftrightarrow z(U(z) - u[0])$ .

### 5.3. Обратное $z$ -преобразование

Обратное  $z$ -преобразование осуществляется по формуле, аналогичной интегралу обратного преобразования Лапласа:

$$u[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C U(z) z^{n-1} dz. \quad (5.9)$$

Круговой интеграл берется по замкнутому пути на плоскости  $z$  в области сходимости функции  $U(z)$ .

Как в случае применения преобразования Лапласа, функцию-оригинал находят обычно не по формуле (5.9), а более простым путем, раскладывая функцию  $U(z)$  на простые дроби и применяя теорему о вычетах. Пусть

$$U(z) = \frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}.$$

Находят корни знаменателя, приравнявая его нулю:

$$M(z^{-1}) = 0; \quad z_k^{-1} = \frac{1}{p_k}; \quad p_k = z_k.$$

Тогда

$$U(z) = \frac{B_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{B_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{B_M}{1 - p_M z^{-1}},$$

где  $b_k = \operatorname{res}_{z=p_k} U(z) = (1 - p_k z^{-1})U(z)|_{z=p_k}$ . Переход к функции-оригиналу, как и в операторном методе, осуществляется с помощью известного преобразования дискретной экспоненты

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}}.$$

Окончательно получим:

$$u[n] = (B_1 p_1^n + B_2 p_2^n + \dots + B_M p_M^n) \cdot 1[n].$$

**Пример 5.2.** Применить обратное  $z$ -преобразование к функции  $U(z) = \frac{0,5}{0,5z^{-2} - 1,5z^{-1} + 1} = \frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})}$ .

*Решение.* Приравнявая нулю знаменатель, находим его корни:

$$M(z^{-1}) = 0; \quad \frac{0,5}{z^2} - \frac{1,5}{z} + 1 = 0; \quad z^2 - 1,5z + 0,5 = 0;$$

$$z_{1,2} = 0,75 \pm \sqrt{0,75^2 - 0,5} = 0,75 \pm 0,25;$$

$$p_1 = z_1 = \frac{1}{z_1^{-1}} = 1; \quad p_2 = z_2 = \frac{1}{z_2^{-1}} = 1;$$

$$B_1 = (1 - p_1 z^{-1})U(z)|_{z=p_1} = \frac{0,5}{1 - p_2 z^{-1}} = 1;$$

$$B_2 = (1 - p_2 z^{-1})U(z) \Big|_{z=p_2} = \frac{0,5}{1 - p_1 z^{-1}} = -0,5.$$

Тогда

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{0,5}{1 - 0,5z^{-1}} = \frac{0,5}{0,5z^{-2} - 1,5z^{-1} + 1},$$

$$u[n] = B_1 p_1^n + B_2 p_2^n = 1 - 0,5 \cdot 0,5^n = 0,5; 0,75; 0,875 \dots 1.$$

Если корни знаменателя комплексно-сопряженные, то и коэффициенты разложения (аналоги постоянных интегрирования  $B_i$ ) — комплексно-сопряженные:

$$\underline{p}_1 = \frac{1}{z_1^{-1}} = \alpha + j\beta; \quad \underline{p}_2 = \frac{1}{z_2^{-1}} = \alpha - j\beta;$$

$$\underline{B}_1 = m + jq; \quad \underline{B}_2 = m - jq;$$

$$u[n] = \underline{B}_1 \underline{p}_1^n + \underline{B}_2 \underline{p}_2^n = 2|B_1| |p_1|^n \cos(\gamma + n\varphi);$$

$$\gamma = \arctg \frac{q}{m}; \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}.$$

#### 5.4. Дискретная свертка

Применение интеграла свертки (интеграла Дюамеля) для анализа цепей с сигналами непрерывного времени, подробно рассмотренное в разделе 1, позволяет определять реакцию цепи при воздействии сигналов, изменяющихся во времени. Важно и то, что это соотношение связывает характеристики цепей во временной области с системными функциями в частотной области:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau) h^\delta(t - \tau) d\tau = \int_0^t u_1(t - \tau) h^\delta(\tau) d\tau,$$

где  $u_1(t)$  — напряжение на входе четырехполюсника с известной импульсной характеристикой  $h^\delta(t)$ , при нулевых начальных условиях;  $u_2(t)$  — выходное напряжение четырехполюсника.

Аналогичные формулы существуют и для цепей и сигналов дискретного времени:

$$u_2[n] = \sum_{k=0}^{\infty} u_1[k] h^{\delta}[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u_1[n-k] h^{\delta}[k]. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) может быть применена непосредственно для расчета числовой последовательности дискретного сигнала, или после применения к ней  $z$ -преобразования на ее основе могут быть получены системные функции в  $z$ -области.

Применим к выражению  $u_2[n] = \sum_{k=0}^{\infty} u_1[k] h^{\delta}[n-k]$   $z$ -преобразование:

$$\begin{aligned} U_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_1[k] h^{\delta}[n-k] \right) z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_1[k] h^{\delta}[n-k] \cdot 1[n-k] \right) z^{-k} z^{-(n-k)}. \end{aligned}$$

Поскольку импульсная характеристика  $h^{\delta}[n-k]$  является результатом воздействия функции  $\delta[n-k]$ , ее умножение на  $1[n-k]$  не изменит выражения. Изменив порядок суммирования, получим:

$$U_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_1[k] z^{-k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h^{\delta}[n-k] \cdot 1[n-k] z^{-(n-k)} \right).$$

Единичная последовательность  $1[n-k]$  при отрицательных значениях аргумента обращается в нуль, и выражение в скобках оказывается равным

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{\delta}[n-k] z^{-n-k} = H^{\delta}(z),$$

где  $H^{\delta}(z)$  — системная функция дискретной цепи. Тогда окончательно мы вновь получим аналогию с преобразованиями Лапласа и Фурье:

$$U_2(z) = U_1(z) H^{\delta}(z).$$

**Пример 5.3.** Определить реакцию цифровой цепи (рис. 5.6, а), реализующую алгоритм Эйлера «вперед», на входной сигнал, представляющий собой дискретную единичную ступенчатую функцию  $1[n]$  (рис. 5.6, б).

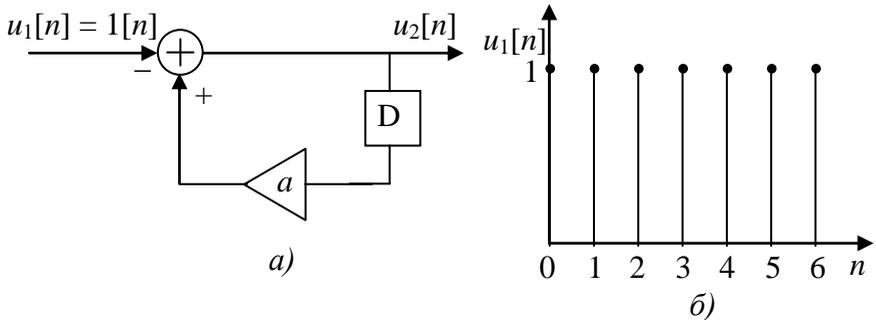


Рис. 5.6

*Решение.* Обратите внимание на то, что этот же алгоритм, только для трех переменных, реализует другая схема (см. рис. 5.3). Отличие данного решения состоит лишь в замене накопителя блоком задержки на единицу. Задержка сигнала на один такт, как и в преобразовании Лапласа, равносильна умножению на экспоненту. Если взять функцию единичного отсчета, задержанную на  $k$  тактов (шагов), то

$$\Delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-k] z^{-n} = z^{-k}.$$

Тогда системная функция приведенной цепи может быть определена из уравнения равновесия цепи

$$U_2(z) = U_1(z) + a z^{-1} U_2(z).$$

Здесь учтена работа блока задержки на единицу и коэффициент усиления усилителя  $a < 1$ . Тогда  $H(z) = \frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$

— это изображение экспоненты, т. е.  $h^\delta[n] = a^n$ . По существу  $h^\delta[n]$  — это реакция приведенной цепи на единичный отсчет  $\delta[n]$  (рис. 5.7).

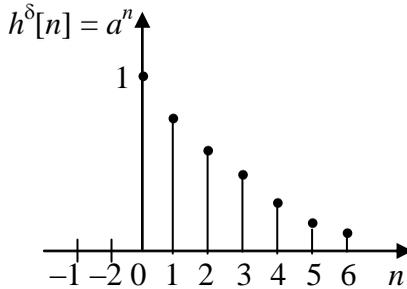


Рис. 5.7

Такой же результат можно получить, непосредственно прослеживая прохождение единичного импульсного сигнала по структурной схеме рис. 5.6, а. При  $n=1$  на выходе каскада задержки — напряжение  $U_2(0)$ , а на выходе усилителя —  $u_2[0]a = a$ . В это время на сумматоре  $u_1[1] = \delta[1] = 0$  (так как  $\delta[0] = 1$ ) и  $u_2[1] = au_2[0] = a = h[1]$ . Аналогично  $h[2] = \delta[2] + ah[1] = a^2$  и т.д.,  $h^\delta[n] = a^n$ .

Реакцию цепи на единичную ступенчатую функцию  $1[n]$  можно рассчитать либо по формуле свертки, либо, как было показано выше, с помощью  $z$ -преобразования.

Определим  $u_2[n] = \sum_{k=0}^{\infty} u_1[k]h[n-k]$  обоими методами.

Ограничим расчет по уравнению свертки тремя шагами, что позволит определить частичную сумму геометрической прогрессии. Для  $n=3$

$$u_2[3] = \sum_{k=0}^3 u_1[k]h[3-k] = u_1[0]h[3] + u_1[1]h[2] + u_1[2]h[1] + u_1[3]h[0] = 1 \cdot a^3 + 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = \frac{1-a^4}{1-a}.$$

Частичная сумма геометрической прогрессии при  $n > 0$

$$u_2[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Получим выражение для  $u_2[n]$ , применяя  $z$ -преобразование:

$$U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}; \quad H(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}};$$

$$U_2(z) = U_1(z)H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})};$$

$$N(z^{-1}) = 1; \quad M(z^{-1}) = a z^{-2} - (1+a)z^{-1} + 1 = 0;$$

$$z^2 - (1+a)z + a = 0; \quad z_1 = p_1 = \frac{1}{z^{-1}} = 1; \quad z_2 = p_2 = \frac{1}{z^{-1}} = a;$$

$$B_k = (1 - p_k z^{-1}) U_2(z) \Big|_{z=p_k}.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$U_2(z) = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{1-a z^{-1}};$$

$$u_2[n] = \frac{1}{1-a} + \frac{a}{a-1} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Изобразим график функции  $u_2[n]$  (рис. 5.8).

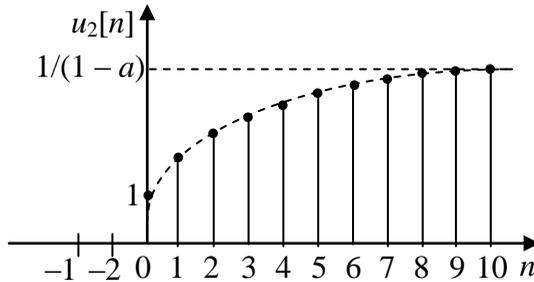


Рис. 5.8

Приведенный анализ показывает единство подходов к анализу цепей, значительно различающихся в физическом смысле.

### 5.5. Соответствие между комплексной частотой $p$ в преобразовании Лапласа и параметром $z$ дискретного $z$ -преобразования

Пусть имеем некоторый аналоговый сигнал  $u(t)$  и его дискретизацию  $u[n]$ , причем  $u(t)|_{t<0} = 0$  и  $u[n]_{n<0} = 0$ . Тогда

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} \stackrel{\circ}{=} pU(p); \quad \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=nT} \stackrel{\circ}{=} pU|_{t=nT}.$$

Для цифрового сигнала

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{u[n] - u[n-1]}{T} = \frac{u[n] - z^{-1}u[n]}{T} = u[n] \frac{1 - z^{-1}}{T}.$$

Сопоставляя выражения и учитывая, что  $u|_{t=nT} = u[n]$ , полу-

чим:  $p = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ .

## 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 6.1. Основные понятия электромагнитной теории

Электротехнические и электронные устройства представляют собой системы заряженных тел и контуров с токами, взаимодействующие друг с другом. Явления, происходящие в таких системах, определяются как процессами в заряженных телах и проводящих контурах с токами, так и физическими процессами в окружающей среде, в которой распространяется электромагнитное поле.

*Электромагнитное поле* — это вид материи, определяемый во всех точках двумя векторными величинами, характеризующими соответственно электрическое и магнитное поле, и оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы [8, 10].

*Частные виды электромагнитного поля.* *Электростатическое поле* создается неподвижными заряженными телами и проявляется в виде механической силы, действующей на неподвижный электрический заряд.

*Электрическое поле постоянного тока (стационарное электрическое поле)* образуется внутри и вне проводников при прохождении по ним постоянного тока. При этом внутри однородного проводника отсутствует объемная плотность заряда, и линии вектора плотности тока замкнуты. Поле — потенциально.

*Магнитное поле постоянного потока* проявляется силовым воздействием на движущиеся в нем заряженные тела и на неподвижные контуры с постоянным током. Поле имеет вихревой характер.

*Основные характеристики электромагнитного поля.* *Напряженность электрического поля* — физическая характеристика электрического поля, определяющая силовое воздействие поля на электрический заряд. Напряженность электрического поля  $E$  является векторной величиной, численно

равной отношению силы  $\mathbf{F}$ , с которой электрическое поле действует на заряд  $Q$ , внесенный в рассматриваемую точку поля, к значению этого заряда, когда внесенный заряд стремится к нулю:

$$\mathbf{E} = \lim_{\substack{Q \rightarrow 0 \\ Q > 0}} \frac{\mathbf{F}}{Q}. \quad (6.1)$$

В этом случае за положительное направление вектора напряженности  $\mathbf{E}$  принято направление от положительного заряда  $+Q$  к отрицательному  $-Q$  (рис. 6.1).

Сила электрического поля направлена вдоль вектора  $\mathbf{E}$ . Линия напряженности электрического поля — это линия, в каждой точке которой вектор  $\mathbf{E}$  касателен к ней.

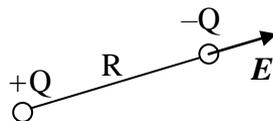


Рис. 6.1

При описании электрического поля в материальных средах, например в диэлектриках, требуется ввести в рассмотрение второе векторное поле  $\mathbf{D}$ , названное *полем электрического смещения* (или электрической индукции). Вектор  $\mathbf{D}$  в вакууме связан с вектором  $\mathbf{E}$  соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (6.2)$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная вакуума ( $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м). Размерность электрического смещения — Кл/м<sup>2</sup>.

Необходимо отметить, что при электрическом взаимодействии изменяется кинетическая энергия движущейся заряженной частицы вещества.

*Магнитная индукция* — это физическая характеристика магнитного поля, определяющая силовое воздействие поля на движущийся заряд. Кинетическая энергия заряженных тел остается при этом постоянной. Численно магнитная индукция равна отношению максимальной силы, действующей на заряд, к произведению заряда и скорости его движения:

$$B = \frac{F_{\text{max}}}{Qv}. \quad (6.3)$$

При рассмотрении явлений, происходящих в магнетиках, вводится векторное поле  $\mathbf{H}$ , называемое *напряженностью магнитного поля*. В вакууме векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6.4)$$

где  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м. Величина  $\mathbf{B}$  имеет размерность  $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ , а величина  $\mathbf{H}$  — размерность А/м.

Направление магнитной индукции можно определить по правилу буравчика, если буравчик вращать в направлении от вектора силы  $\mathbf{F}$  к вектору скорости  $\mathbf{v}$  положительного заряда  $Q$ .

**Виды плотности тока.** Для характеристики интенсивности и направления движения носителей заряда в каждой точке области вводится понятие *плотности тока проводимости*

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = N e \mathbf{v}, \quad (6.5)$$

где  $N$  — количество носителей, содержащихся в  $1 \text{ м}^3$  вещества,  $e$  — заряд носителя,  $\mathbf{v}$  скорость носителей в данной точке пространства. Размерность плотности тока проводимости —  $\text{А}/\text{м}^2$ .

Если в свободном пространстве электрическое поле  $\mathbf{E}$  действует на заряды со среднеобъемной плотностью  $\rho$ , движущиеся со скоростью  $\mathbf{v}$ , то можно говорить о *плотности тока переноса*  $\mathbf{j}_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v}$ .

Токи проводимости и переноса могут возникать как в постоянных, так и в переменных электрических полях. Ток смещения присутствует только в переменных полях.

Такие факты как протекание переменного электрического тока в цепи, содержащей конденсатор, между обкладками которого не существует носителей заряда, говорят о существовании тока иной природы, нежели ток проводимости. Максвелл ввел понятие *тока смещения* в вакууме — измене-

ние во времени вектора напряженности электрического поля в вакууме, плотность которого равна  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . Ток смещения в вакууме не возникает в результате движения электрических зарядов, но возбуждает магнитное поле по тем же законам, что и все виды токов.

Ток смещения в диэлектрике состоит из тока смещения в вакууме и тока поляризации, возникающего в результате движения связанных зарядов диэлектрика.

*Плотность тока смещения* в диэлектрике

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (6.6)$$

где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость, характеризующая свойство диэлектрика поляризоваться.

*Плотность полного электрического поля*  $\mathbf{j}$  определяется суммой его составляющих:  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{пер}} + \mathbf{j}_{\text{см}}$ . Очевидно, что полный электрический ток представляет собой два разнородных явления — движение электрических зарядов и изменение электрического поля во времени. Токи смещения преобладают в диэлектриках, токи проводимости — в проводниках, а в полупроводниках нужно учитывать все — составляющие полного тока.

**Уравнения Максвелла.** Процессы в электромагнитных полях описывают уравнениями Максвелла [14]. Эти уравнения могут быть записаны в интегральной и дифференциальной форме (табл. 6.1). Интегральная форма устанавливает связь между величинами в разных точках поля или на разных отрезках, поверхностях. Дифференциальная форма описывает соотношение между величинами вблизи одной и той же точки поля в определенный момент времени.

Однако эта система уравнений позволяет определить изменения электромагнитного поля во времени и связь его со свойствами среды, но не позволяет определить те преобразования энергии, в которых эти изменения поля проявляются.

Поэтому необходимо знание выражения энергии электромагнитного поля для некоторого объема  $V$  [9]

$$W_{ЭМ} = W_{Э} + W_{М} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV, \quad (6.7)$$

где  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  — абсолютные электрическая и магнитная проницаемости среды.

Таблица 6.1

Уравнения Максвелла			
Интегральная форма		Дифференциальная форма	
1	$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{cr}} \right) d\mathbf{S}$	1	$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{cr}}$
2	$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$	2	$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
3	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q$	3	$\text{div } \mathbf{D} = \rho$
4	$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	4	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
5	$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$	5	$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$
6	$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$	6	$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$

*Первое уравнение Максвелла* устанавливает связь между магнитным полем и его источниками (плотностью полного электрического тока). Здесь  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость.

*Второе уравнение Максвелла* устанавливает связь между электрическим полем и возбуждающим его переменным магнитным полем. Оно является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея, согласно которому индуцированная ЭДС

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.8)$$

Как следствие, магнитное поле при отсутствии электрического поля может быть только постоянным. Однако, любое изменение магнитного поля влечет за собой возникновение электрического поля.

*Третье уравнение Максвелла* устанавливает связь между потоком вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  и суммарным зарядом  $q$ , заключенным в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ . Это утверждение является обобщением закона Гаусса, утверждающего, что источники электрического поля расположены в тех местах, где есть заряды.

*Четвертое уравнение Максвелла* утверждает, что вектор индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  не имеет источников, а его силовые линии всегда замкнуты.

Из уравнений Максвелла вытекает принцип непрерывности электрического тока:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0, \quad (6.9)$$

т. е. поток вектора плотности полного тока через любую замкнутую поверхность  $S$  всегда равен нулю. Этот принцип показывает, что постоянные токи могут протекать только в замкнутых цепях. В переменных полях линии вектора  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  могут быть незамкнутыми и иметь продолжением линии вектора  $\mathbf{j}_{\text{см}}$ . В местах, где заканчиваются линии вектора плотности тока проводимости, могут накапливаться заряды.

В систему уравнений Максвелла входят частные производные по четырем переменным —  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ . Для упрощения решения целесообразно исключить одну из них. Это возможно, если рассматриваемый электромагнитный процесс является монохроматическим, т. е. изменение полей во времени представляется гармоническими колебаниями с некоторой частотой  $\omega$ . Комплексный вектор вида

$$\underline{\mathbf{E}} = E_{m_x} e^{j\varphi_x} \mathbf{1}_x + E_{m_y} e^{j\varphi_y} \mathbf{1}_y + E_{m_z} e^{j\varphi_z} \mathbf{1}_z$$

принято называть комплексной амплитудой [10]. Эти амплитуды могут быть введены в уравнения Максвелла. Оператор

дифференцирования по времени, действующий на мгновенное значение поля, заменяется на множитель  $j\omega$ . Тогда получим уравнения Максвелла в комплексном виде:

- 1)  $\text{rot } \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{cr}}$ ; 2)  $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$ ; 3)  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ ;  
 4)  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ; 5)  $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ ; 6)  $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ .

***Законы, теоремы и принципы теории электромагнитного поля.***

*1. Электростатическое поле*

*Закон Кулона.* Сила взаимодействия между точечными зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ , расположенными на расстоянии  $R$ :

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} \cdot \mathbf{1}_R, \text{ где } \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

*Теорема Гаусса.* Поток вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов, расположенных в объеме, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum Q.$$

*2. Электрическое поле постоянного тока*

*Закон Ома.* Плотность тока проводимости пропорциональна напряженности электрического поля:  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ .

*Закон Джоуля-Ленца.* Мощность тепловых потерь, рассеиваемая в единице объема при протекании тока проводимости  $P = \mathbf{jE} = \sigma E^2 = j^2 / \sigma$ .

*Первый закон Кирхгофа.* Поток вектора плотности постоянного тока проводимости через замкнутую поверхность равен нулю:  $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0$ .

*Второй закон Кирхгофа.* Циркуляция вектора напряженности электрического поля вне источников ЭДС равна нулю:  $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ .

### 3. Магнитное поле постоянного тока

*Закон Био-Савара-Лапласа.* Элементарная слагающая магнитной индукции в неферромагнитной среде создается элементом тока  $I d\mathbf{l}$  в точке, удаленной от элемента  $d\mathbf{l}$  на расстояние  $R$ :  $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{1}_R}{R^2}$ . Постоянный ток про-

ходит по линейному проводнику в направлении его элемента  $d\mathbf{l}$ . Результирующая магнитной индукции в рассматриваемой точке, создаваемая током, проходящим по проводнику длиной  $l$ :  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{1}_R}{R^2}$ .

$$\text{Закон Ампера: } d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{1}_R}{R^2} dV; \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{1}_R}{R^2} dV,$$

где  $dV$  — элемент объема проводника с плотностью тока  $\mathbf{j}$ .

*Закон полного тока.* Циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, протекающих внутри контура интегрирования:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I.$$

### 4. Постоянное или переменное во времени магнитное поле

*Принцип непрерывности линий магнитной индукции.* Магнитный поток сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю:  $\Phi = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ .

*Закон полного тока.* Циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов проводимости  $i_{\text{пр}}$ , токов переноса зарядов  $i_{\text{перен}}$ , токов смещения в диэлектрике  $i_{\text{см}}$ :  $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = i_{\text{полн}}$ ;

$$i_{\text{полн}} = i_{\text{пр}} + i_{\text{перен}} + i_{\text{см}}.$$

*Закон электромагнитной индукции.* Магнитный поток, пронизывающий контур, изменяясь, наводит в нем

ЭДС  $\varepsilon = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ . ЭДС положительна, если ее направление и направление магнитных линий при уменьшении магнитного потока определяются правилом правого винта.

*Закон сохранения заряда.* Заряд  $dQ$ , проходящий через замкнутую поверхность  $S$ , равен убыли заряда внутри объема, ограниченного поверхностью  $S$ :  $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ .

*Теорема Умова-Пойнтинга:*

- для мгновенных значений векторов в отсутствие источников энергии в объеме. Мощность, потребляемая (отдаваемая) внутри объема, входит (выходит) в объем  $V$  в виде потока вектора Пойнтинга  $\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$  через замкну-

тую поверхность, ограничивающую этот объем:

$$-\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV,$$

где  $\int_V \sigma E^2 dV$  — мощность тепловых потерь внутри объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ ;

$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = \frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t}$  — скорость изменения

запаса электромагнитной энергии в единице объема;

- при наличии источников энергии в объеме. Мгновенная мощность источников энергии в объеме  $p_{\text{ист}}$  определяется мощностью тепловых потерь, скоростью изменения энергии электромагнитного поля в объеме  $V$  и скоростью изменения энергии, выходящей через граничную поверхность  $S$  рассматриваемого объема:

$$p_{\text{ист}} = \oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} - \int_V \sigma E^2 dV + \frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t};$$

- в комплексной форме. Поток комплексного вектора Пойнтинга  $\underline{\mathbf{P}}$  сквозь замкнутую поверхность равен комплексной мощности, выделяемой внутри объема, ограниченного этой поверхностью:

$$-\oint_S \underline{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = \int_V \sigma E^2 dV + j2\omega \int \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = P + jQ.$$

Вектор Пойнтинга  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  характеризует значение и направление перемещения энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной  $\mathbf{P}$ . Если вектор  $\mathbf{P}$  направлен внутрь поверхности, то его поток, проходящий через поверхность, будет положительным:  $-\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} > 0$ . Направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением поступательного движения оси правого винта, головка которого вращается в плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в направлении от  $\mathbf{E}$  к  $\mathbf{H}$  по кратчайшему расстоянию.

5. *Постоянное и переменное электромагнитные поля*  
*Теорема единственности решения:* решение, удовлетворяющее уравнениям поля, граничным и начальным условиям, является единственным.

6. *Поле, описываемое линейными уравнениями*  
*Принцип наложения:* результирующий вектор (скаляр) равен сумме векторов (скаляров), создаваемых каждым источником в отдельности.

7. *Электрическое поле, электрическое поле постоянного тока, магнитное поле постоянного потока*

*Принцип двойственности:* задачу о расчете одного поля можно заменить задачей о расчете другого поля, применив аналогию величин и коэффициентов, характеризующих эти поля, если граничные поверхности обоих полей по форме и взаимному расположению одинаковы,

а граничные условия и дифференциальные уравнения подобны относительно величин и коэффициентов, присущих каждому полю.

**Виды краевых задач.** Исследование электростатического поля в общем случае сводится к решению дифференциальных уравнений Пуассона и Лапласа при заданных граничных условиях.

**Краевая задача.** Рассчитывается поле при заданных граничных (краевых) условиях, которым удовлетворяют значения векторов и скаляров поля на поверхности раздела сред с различными электрофизическими свойствами.

**Внутренняя краевая задача.** Рассчитывается поле внутри области, ограниченной некоторыми поверхностями.

**Внешняя краевая задача.** Определяется поле во внешнем пространстве при дополнительном условии о поведении потенциала в бесконечности:  $\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

**Краевая задача Дирихле.** Решается дифференциальное уравнение при заданных значениях потенциала во всех точках на границе области поля.

**Краевая задача Неймана.** Решается уравнение Лапласа при известных значениях нормальной составляющей градиента потенциала  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  во всех точках на границе области поля.

Рассмотрим более подробно следующие граничные задачи.

- Граница раздела диэлектриков в электростатическом поле [11]. Скачок нормальных составляющих векторов электрического смещения на границе раздела диэлектрических сред (рис. 6.2) равен поверхностной плотности свободного заряда  $\sigma_S$  в данной точке:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_S ;$$

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} - \varepsilon_{a2} E_{2n} = \sigma_S ;$$

$$\varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_S .$$

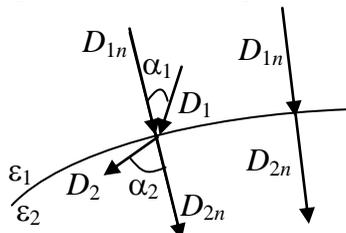


Рис. 6.2

При  $\sigma_s = 0$  нормальные составляющие на границе раздела диэлектрических сред непрерывны:  $\varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ . Скачок нормальных составляющих вектора поляризации на границе раздела диэлектрических сред равен отрицательному значению поверхностной плотности связанного заряда в данной точке:  $p_{1n} - p_{2n} = -\sigma_s$ . Тангенциальные составляющие напряженности электрического поля на границе раздела диэлектрических сред непрерывны:  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ;  $\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$ , при  $\varphi_1 = \varphi_2$  (на поверхности раздела сред потенциал непрерывен). Закон преломления линий вектора  $\mathbf{E}$ :  $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ .

- На границе раздела проводника и диэлектрика (рис. 6.3). Поверхность проводника является эквипотенциальной ( $\varphi = \text{const}$ ). Внутри проводника  $E = 0$ , следовательно,

$E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0$ . На поверхности проводника в ди-

электрике вектор электрического смещения имеет только нормальную составляющую, равную поверхностной плотности свободного заряда в данной точке:  $D_1 = D_{1n} = \sigma_s$ ;

$E_{1n} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_1}$ . Если же реализуется электрическое поле постоян-

ного тока для такого типа граничных условий, то на поверхности проводника в диэлектрике напряженность электрического поля имеет две составляющие:  $E_{1n} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_1}$ ;

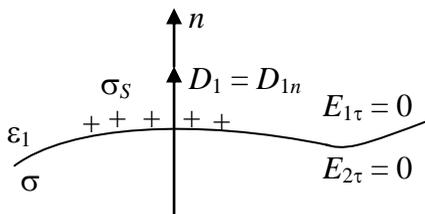


Рис. 6.3

$E_{1\tau} = E_{2\tau} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_1} = \frac{J}{\sigma}$  (рис. 6.4). Если на поверхности проводника расположен положительный заряд, то вектор напряженности  $\mathbf{E}_n$  направлен в сторону диэлектрика, при отрицательном заряде — в сторону проводника.

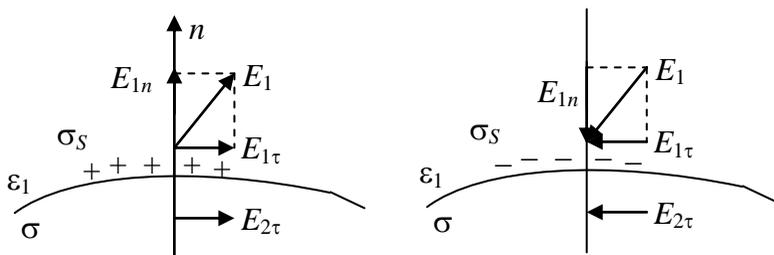


Рис. 6.4

• Электрическое поле на границе раздела проводников (рис. 6.5). Нормальные составляющие вектора плотности тока в переменном поле претерпевают разрыв:

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}; \quad \sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}.$$

В постоянном поле ( $\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = 0$ )

нормальные составляющие вектора плотности тока непрерывны:  $J_{1n} = J_{2n}$ ;  $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$ ;

$E_{1\tau} = E_{2\tau}$  при  $E_{\text{стоп}} = 0$ . Закон преломления линий вектора  $\mathbf{J}$ :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

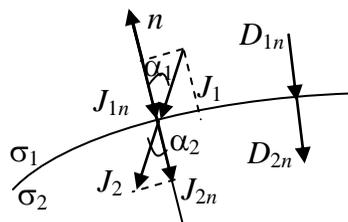


Рис. 6.5

• Магнитное поле постоянного тока на границе раздела магнитных сред. Нормальные составляющие вектора магнитной индукции и скалярные магнитные потенциалы на границе раздела магнитных сред непрерывны (рис. 6.6):  $B_{1n} = B_{2n}$ ;  $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$  при  $A_{1\tau} = A_{2\tau}$ ;  $\varphi_{1M} = \varphi_{2M}$ ;

$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{1M}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{2M}}{\partial n}$ . Скачок тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля на границе раздела магнитных сред равен линейной плотности тока  $\frac{dI}{dt}$ .

При  $\frac{dI}{dt} = 0$  тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля на границе раздела магнитных сред непрерывны (рис. 6.7):  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ ;  $B_{1\tau}/\mu_1 = B_{2\tau}/\mu_2$ . Закон преломления линий вектора магнитной индукции:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

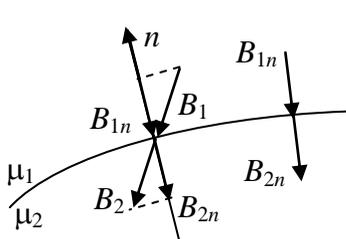


Рис. 6.6

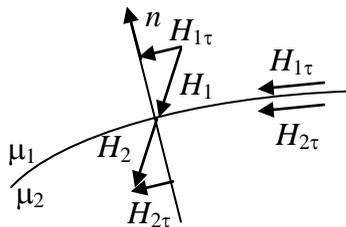


Рис. 6.7

- Переменное электромагнитное поле (для мгновенных значений) на границе раздела реальных сред [12]:

$$\sigma_1 E_{1n} + \varepsilon_{a1} \frac{\partial E_{1n}}{\partial t} = \sigma_2 E_{2n} + \varepsilon_{a2} \frac{\partial E_{2n}}{\partial t};$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \text{ (рис. 6.8).}$$

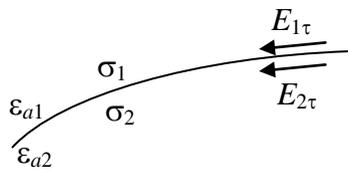


Рис. 6.8

- Гармонически изменяющееся поле для комплексных значений на границе раздела реальных проводников (рис. 6.9). Комплексные значения нормальных составляющих вектора плотности полного тока на границе раздела реальных проводников непрерывны:

$$\underline{J}_{1n\text{полн}} = \underline{J}_{2n\text{полн}}; \underline{\sigma}_1 \underline{E}_{1n} = \underline{\sigma}_2 \underline{E}_{2n},$$

где  $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon_a$  — комплексная удельная проводимость.

• Гармонически изменяющееся поле для комплексных значений на границе раздела реальных диэлектриков (рис. 6.10). Нормальные составляющие вектора полного электрического смещения на границе раздела реальных диэлектриков непрерывны:

$$\underline{D}_{1n\text{полн}} = \underline{D}_{2n\text{полн}}; \epsilon_1 \underline{E}_{1n} = \epsilon_2 \underline{E}_{2n}.$$

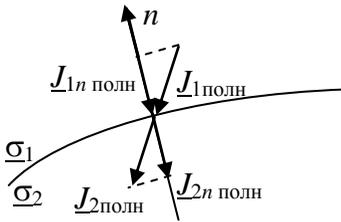


Рис. 6.9

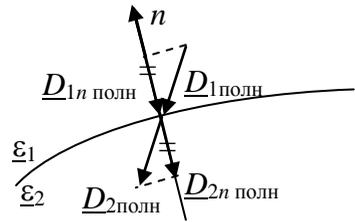


Рис. 6.10

**Потенциальное поле.** Для *потенциальных* (безвихревых) *полей* линейный интеграл по любому замкнутому контуру от напряженности электрического поля, а также от вектора напряженности магнитного поля в области, занятой током, равен нулю. Поэтому потенциальные поля характеризуют скалярными функциями: электрическим  $\varphi$  и магнитным  $\varphi_M$  потенциалами. Потенциальными полями являются электростатическое, электрическое постоянного тока (вне источников), магнитное постоянного потока вне области с током и квазистатическое поля (табл. 6.2).

Потенциальные поля графически представляются в виде картины поля — линий вектора поля и эквипотенциальных поверхностей.

**Уравнения квазистационарного электромагнитного поля.** *Квазистационарным* называют переменное электромагнитное поле, которое с течением времени изменяется так медленно, что можно пренебречь током смещения, по срав-

нению с током проводимости и эффектом запаздывания излучения. Для металлических проводников пренебрежение токами смещения  $I_{\text{см}} \ll I$  ( $\frac{\omega \epsilon_a}{\sigma} \ll 1$ ) допустимо в широком диапазоне частот вплоть до  $\omega = 10^{18}$ . Эффект запаздывания несущественен, если линейные размеры электромагнитных установок много меньше длин исследуемых волн. На промышленной частоте  $f = 50$  Гц  $\lambda = 6000$  км, поэтому эффектом запаздывания можно пренебречь в пределах больших областей поля.

Таблица 6.2

Характеристики потенциальных полей	Уравнения полей		
	Электрическое поле	Электрическое поле постоянного тока вне источника	Магнитное поле постоянного тока вне области с током
Условие потенциальности в интегральной форме	$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$	$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$	$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$
Условие потенциальности в дифференциальной форме	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	$\text{rot } \mathbf{H} = 0$
Уравнение напряженности поля (вне области с током)	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_M$
Уравнение Лапласа	$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi_M = \Delta \varphi_M$
Уравнение Пуассона	$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\rho(\epsilon \epsilon_0)$		

Квазистационарное поле описывают уравнениями, полученными из уравнений Максвелла при  $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ . Такое поле не является потенциальным, поскольку, по второму уравнению Максвелла,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$ . Совместное решение уравнений Максвелла производится с помощью вспомогательных функций — электромагнитных потенциалов. Электромагнитные потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  для квазистационарного поля удовлетворяют уравнениям Пуассона и Лапласа.

*Аналогия между полями.* Между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем. Общим свойством этих полей является их потенциальность ( $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ ). Для обоих полей справедливо уравнение Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$ , если рассматриваемая область электрического поля находится вне источников энергии, а область электростатического поля — вне объемного заряда. Из подобия уравнений следует формальная аналогия между соответствующими величинами в этих уравнениях и тождественность граничных условий для них при одинаковой форме граничных поверхностей. При этом картины полей подобны.

*Между магнитным полем постоянного потока и электростатическим полем.* Дифференциальные уравнения магнитного поля постоянного потока, записанные для пространства вне тока, и дифференциальные уравнения электрического поля в отсутствие объемных зарядов аналогичны. При расчете магнитного поля заменяют  $\epsilon\epsilon_0$  на  $\mu\mu_0$ ,  $\varphi$  на  $\varphi_M$ ,  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  на  $\mathbf{B}$ .

*Экранирование полей.* Экранами являются устройства, предназначенные для защиты установок от электромагнитных внешних полей, а также окружающего пространства — от полей, создаваемых самой установкой [13]. За счет применения электростатических экранов поле внешних зарядов компенсируется полем вызванных ими зарядов, расположенных на внешней поверхности экрана. Электростатические экраны применяются при точных измерениях. При экраниро-

вании внешнего магнитного поля применяют замкнутые ферромагнитные оболочки из листовых или массивных ферромагнитных материалов — *магнитные экраны*. В *электромагнитных* экранах используется явление затухания электромагнитной волны, распространяющейся в проводниках с большой удельной проводимостью ( $\sigma \gg \omega \epsilon_a \approx 0$ ).

## 6.2. Поверхностные явления

*Поверхностный эффект.* Поверхностным эффектом называют явление, связанное с неравномерным распределением по сечению проводника плотности тока проводимости, наведенных токов, **E**, **B**, **H**, а также магнитного потока. При наличии этого эффекта наибольшие значения векторов **j**, **E**, **H** и др. наблюдаются на поверхности проводника. Распределение электромагнитного поля по сечению проводника зависит от частоты изменения тока, параметров среды или радиуса проводника. При этом сопротивление проводника  $R$  возрастает, а его внутренняя индуктивность  $L$  уменьшается.

Закон распределения электромагнитного поля по сечению проводника можно определить путем совместного решения уравнений Максвелла с учетом граничных условий, в системе координат, соответствующей форме граничной поверхности.

*Электрический поверхностный эффект* возникает при прохождении переменного тока по проводнику.

*Магнитный поверхностный эффект* наблюдают, когда ферромагнитный проводник находится во внешнем переменном магнитном поле.

В случае *поверхностного эффекта в проводниках с переменным электрическим током или находящихся в переменном магнитном поле* возникает вихревое электрическое поле, препятствующее изменению тока внутри проводника и способствующее его изменению в приповерхностных слоях.

При  $\frac{dI}{dt} < 0$  силовые линии вихревого электрического поля изменяют направление, но при этом вновь будут препятство-

вать изменению тока во внутренних частях проводника. В результате максимальная амплитуда плотности тока имеет место в приповерхностных слоях проводника, а минимальная — во внутренних. Для сильного скин-эффекта [12]

$$j = j_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right), \quad (6.10)$$

где  $\delta$  — характерная длина затухания;  $j_0$  — плотность тока при  $x = 0$ .

Длина затухания  $\delta$  — это глубина, на которой плотность тока уменьшается в  $e$  раз:  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0\mu}}$ . Например, для про-

вода диаметром  $d = 1$  мм, полагая  $\delta = d/10 = 10^{-4}$  м,  $\mu = 1$ ,  $\gamma = \rho\omega^7$  (Ом·м) $^{-1}$  (медь, алюминий), получим

$$f_{\text{крит}} = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1 \text{ МГц}.$$

Для больших частот, когда  $\delta \ll d$ , полный ток можно рассчитать по формуле

$$I = \int_S j dS \approx 2\pi \int_0^\infty j(x) dx = 2\pi j_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) dx = 2\pi\delta j_0. \quad (6.11)$$

Выражение (6.11) показывает, что полный ток можно представить однородным, но сосредоточенным в узкой трубке толщиной  $\delta$  вблизи поверхности провода.

Величину скин-эффекта можно охарактеризовать коэффициентом увеличения сопротивления переменному току

$$k_{\sim} = \frac{R_{\sim}}{R_0} = \frac{S_0}{S_{\sim}} = \frac{\pi d^2/4}{\pi d\delta} = \frac{d}{4\delta}, \quad (6.12)$$

где  $R_0$  — сопротивление проводника при постоянном напряжении, а  $R_{\sim}$  — при переменном.

На очень высоких частотах глубина проникновения тока составляет тысячные доли миллиметра, поэтому различные шероховатости проводящей поверхности удлиняют путь тока

и увеличивают сопротивление. Для предотвращения этого явления токопроводящие устройства полируют.

**Эффект близости.** Эффект близости возникает при взаимном влиянии токов соседних проводов на распределение электромагнитного поля в них. Этот эффект перераспределяет электромагнитное поле по сечению проводника и нарушает симметрию, которую наблюдают при поверхностном эффекте уединенного проводника. При этом возрастают потери энергии и активное сопротивление провода. Особенно сильно эффект близости проявляется в проводниках, свернутых в виде спирали, например, в катушках индуктивности.

Активное сопротивление катушки току высокой частоты может в несколько раз превышать ее сопротивление постоянному току.

Магнитное поле, созданное первичным током  $i_1$ , и индуцированное им электрическое поле, в свою очередь, индуцируют в проводе вторичный ток  $i_2$ , сонаправленный с  $i_1$  в области сгущения магнитных линий (внутри катушки) и направленный противоположно току  $i_1$  в области разрежения линий внутри катушки (рис. 6.11). Таким образом, результи-

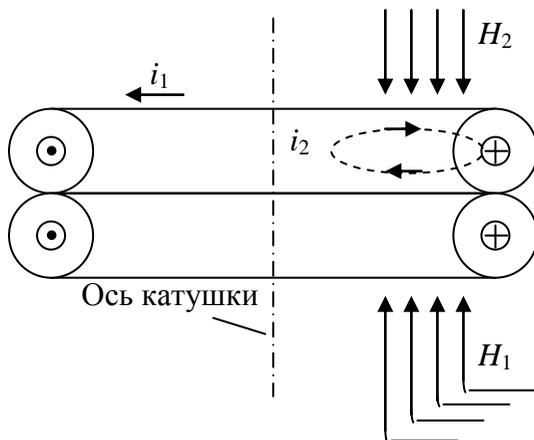


Рис. 6.11

рующий ток имеет максимальную плотность вблизи внутренних поверхностей обмотки катушки. В связи с этим, эффективное сечение проводника уменьшается, а его сопротивление увеличивается. Вышеописанные эффекты тем сильнее, чем выше частота и больше диаметр провода.

### **6.3. Численные и экспериментальные методы моделирования полей**

*Характеристика численных методов анализа полей.* Численные методы расчета электрических и магнитных полей сводятся к составлению системы алгебраических уравнений. Обычно порядок системы уравнений совпадает с общим числом неизвестных. Численные методы являются приближенными, поэтому основным их недостаток — трудность оценки ошибки. Источником ошибок является как сам метод, так и его реализация на ЭВМ.

По *методу интегральных уравнений* исследование поля в неоднородной среде сводят к расчету его в однородной среде. Влияние на поле неоднородностей учитывают введением в поле вторичных источников — зарядов поляризации, токов намагниченности и т.д., распределенных на границах (в объеме) неоднородностей. Первоначально определяют интегральные уравнения, которые должны соответствовать распределению вторичных источников, а затем по уравнениям поля с учетом заданных вторичных источников решают задачу анализа поля.

По *методу конечных элементов* область поля разбивается на конечное число подобластей — элементов. Внутри каждого элемента искомая функция аппроксимируется, например полиномом, коэффициенты которого выражены через неизвестные значения искомой функции в узлах элемента. Полученные соотношения для коэффициентов подставляют в аппроксимирующий полином, что приводит к уравнению искомой функции в зависимости от узловых значений функции и формы элемента. Это интерполяционное уравнение записывают для каждого элемента согласно

сквозной нумерации всех элементов области, после чего с помощью выбранного метода находят уравнения для узловых значений функции (рис. 6.12).

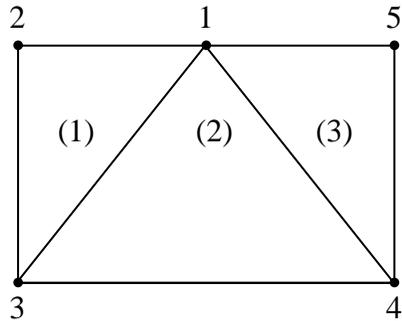


Рис. 6.12

*Метод сеток* основан на решении уравнений Лапласа и Пуассона в конечных разностях. В области исследуемого поля

наносят квадратную или полярную сетку, для узлов которой рассчитывают значения потенциалов. Для этого на сетку наносят предполагаемую картину поля, задавая значениями потенциалов в узлах, и по уравнению связи, полученному из уравнения Лапласа, находят потенциалы узлов сетки [1]. При первом расчете предполагаемые и рассчитанные значения могут не совпадать, образуя остаток. Расчеты проводят до тех пор, пока значения потенциалов не совпадут или остаток во всех узлах не будет превышать заданного значения.

Рассмотрим метод сеток более подробно. Решаются уравнения в частных производных: Пуассона  $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon r_0}$  ( $\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{j}_0$ ) и Лапласа  $\nabla^2\varphi = 0$  ( $\nabla^2\mathbf{A} = 0$ ). Дифференциальное уравнение приближенно заменяют разностным уравнением для рассматриваемой точки исследуемого поля. В результате получают приближенное алгебраическое уравнение связи потенциалов рассматриваемой точки и соседних точек:

$$\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d - 4\varphi_k = -\frac{\rho a^2}{\varepsilon \varepsilon_0}; \quad (6.13)$$

$$\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d - 4\varphi_k = 0. \quad (6.14)$$

Уравнения связи решают численным подбором. Для этого на область поля между граничными поверхностями нано-

сят координатную сетку и для рассматриваемого узла  $\varphi_k$  представляют значения потенциалов соседних узлов  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$  и  $\varphi_d$  (рис. 6.13). Погрешность при замене уравнений Пуассона и Лапласа уравнениями (6.13) и (6.14) уменьшается с уменьшением шага сетки.

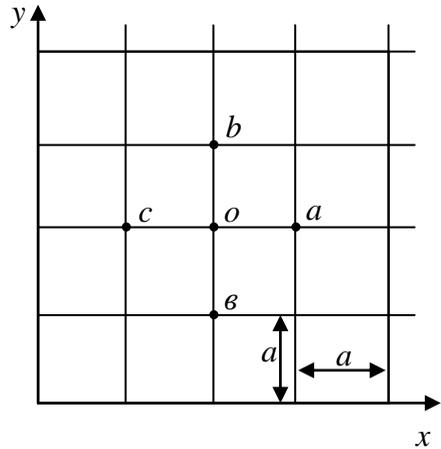


Рис. 6.13

*Алгоритм метода сеток:*

- 1) в области поля между граничными поверхностями наносят сетку в соответствующей системе координат и буквами обозначают ее узлы;
- 2) на сетке приближенно проводят эквипотенциальные и силовые линии, а затем, ориентируясь на картину поля, задаются значением потенциала каждого узла сетки;
- 3) последовательно задавая значения потенциала каждого узла, составляют уравнение связи (6.13) или, если  $\rho = 0$ , уравнение (6.14). При первоначально принятых значениях потенциалов узлов уравнение связи равно не нулю, а некоторому числу — остатку, который записывается около соответствующего узла;
- 4) изменяют потенциалы узлов так, чтобы остаток в уравнениях связи для всех узлов не превышал заданного. Для этого самый большой остаток можно уменьшить, например, на  $\frac{1}{4}$  и повторить вычисления по схеме. Систему уравнений для узлов записывают в матричной форме.

**Экспериментальные методы моделирования потенциальных полей.** Экспериментальные методы исследования полей подразделяются на методы непосредственного измерения потенциалов и напряженностей, методы построения

картины поля в области реальных полей посредством металлических стрелок, штырей и других видов зондов, методы моделирования одних полей другими с помощью электрических ванн, заполненных жидкими электролитами [6]. С помощью реостата, зонда и индикатора нуля (рис. 6.14) можно снять семейство эквипотенциальных линий.

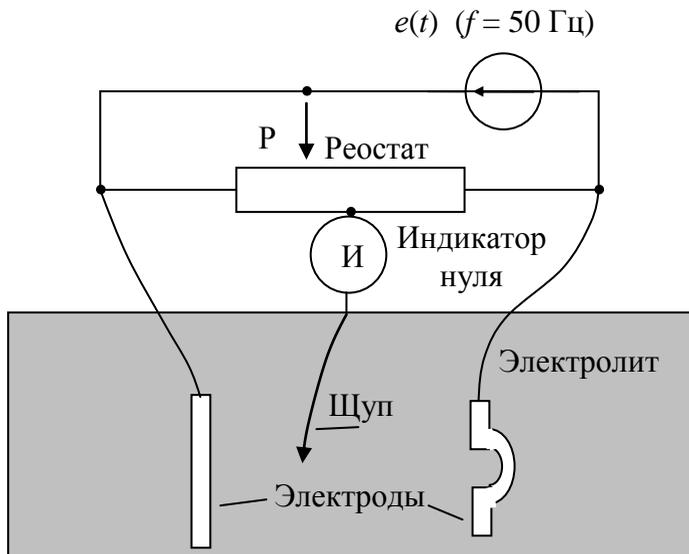


Рис. 6.14

Движок реостата устанавливают в какое-либо фиксированное положение. Перемещая зонд, добиваются нулевого показания индикатора нуля и обнаруживают подобные точки.

## 7. МЕТОДЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

### 7.1. Особенности современных программ автоматизированного анализа цепей

Основные особенности различных программ автоматизированного анализа цепей связаны со следующими их характеристиками [15]:

- методом построения компьютерной модели цепи;
- возможностями анализа (решения) этой модели в различных режимах — статическом, динамическом, частотном, экспериментальном;
- составом библиотеки моделей компонентов, входящих в исследуемые объекты;
- наличием редактора схем, выходного графического редактора и блоков обработки результатов.

Основной программой, которая широко используется как в промышленности, так и в учебном процессе ведущих университетов является **программа Pspice**. Алгоритмы **Pspice** используются практически во всех других программах схемотехнического моделирования. Немаловажным является и тот факт, что имеются *свободно распространяемые студенческие версии* этой программы.

**Программа Pspice**. Программа является модификацией программы анализа электронных цепей SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis). В настоящее время ее считают эталонной программой моделирования электронных цепей и устройств. Модели электронных компонентов в формате SPICE используются большинством других программ схемотехнического моделирования.

В первых версиях **Pspice** исходные данные о цепи готовились в текстовой форме в виде списка соединений (netlist). Результаты моделирования также представлялись в текстовой форме. Позднее появились *графические редакторы Schematics и Capture*, позволяющие создавать и редактиро-

вать чертежи принципиальных схем. *Schematics* является одновременно управляющей оболочкой для запуска других модулей Pspice. Для представления результатов расчетов в удобной форме служит *графический постпроцессор Probe*. Он выводит на экран графики результатов моделирования и выполняет их математическую обработку.

**Базовый набор элементов Pspice** включает:

резисторы, конденсаторы, индуктивные катушки, диоды, биполярные транзисторы, полевые транзисторы с управляющим *p-n* переходом и изолированным затвором, длинные линии, источники напряжения и тока различной формы. Аналоговые интегральные схемы, а также некоторые компоненты, такие как тиристоры, *представляются подсхемами*, параметры которых задает пользователь.

Базовый набор элементов Pspice *содержит также цифровые функциональные блоки*, выполняющие логические операции. Цифровые элементы могут реализовываться пользователем на основе функциональных блоков. Кроме того, существуют обширные библиотеки серийно выпускаемых цифровых компонентов.

Разработаны обширные библиотеки компонентов в формате SPICE, выпускаемых ведущими мировыми производителями электронного оборудования.

Для некоммерческого использования в учебных заведениях предоставляются бесплатно версии Pspice 8.0 и Pspice 9.x.

**Программа Micro-CAP** разработана фирмой Spectrum Software. Программа имеет удобный графический редактор, позволяющий создавать и редактировать принципиальные схемы аналоговых и цифровых устройств. Основные виды анализа:

- расчет статического режима по постоянному току;
- расчет частотных характеристик линеаризованной цепи;
- расчет реакции во временной области при произвольных входных воздействиях;
- анализ шумов и параметрической чувствительности;

- многовариантный анализ, включая статистический анализ методом Монте-Карло;

Программа имеет обширную библиотеку моделей компонентов ведущих фирм США, Европы и Японии.

**Программа Multisim** (фирма National Instruments Corporation). Первые версии программы имели название Electronics Workbench и разрабатывались фирмой с одноименным названием. Программа имела очень простой и интуитивно понятный графический интерфейс. В настоящее время фирма **Electronics Workbench** является дочерней компанией, которой полностью владеет фирма National Instruments Corporation.

Последние версии программы используют математические модули и модели компонентов SPICE. Особенностью программы Multisim является наличие виртуальных измерительных приборов, имитирующих реальные аналоги. В состав Multisim входят эффективные средства графической обработки результатов моделирования.

Другая важная особенность программы заключается в том, что Multisim поддерживает взаимодействие с графической средой LabVIEW, предназначенной для разработки программно-аппаратных средств измерения и управления.

**Программа Circuit Maker** (фирма Protel International) предназначена *для моделирования аналоговых, цифровых и смешанных аналого-цифровых* устройств. Она имеет удобный графический интерфейс, позволяющий быстро подготовить электрические схемы аналоговых и цифровых устройств. Результаты моделирования выводятся в графической форме, в виде осциллограмм и графиков частотных характеристик. Имеется студенческая версия программы, распространяемая бесплатно.

Перечисленные программы используют модуль анализа, разработанный для программы SPICE. Он предусматривает следующие виды анализа.

1. Расчет рабочей точки нелинейной резистивной цепи постоянного тока (режим большого сигнала);

2. Анализ резистивных цепей постоянного тока (расчет узловых напряжений, токов и напряжений ветвей);
3. Расчет частотных характеристик линейных цепей (режим малого сигнала, анализируется линейная цепь);
4. Анализ временных характеристик нелинейных цепей при действии сигналов произвольной формы (режим большого сигнала);
5. Расчет характеристик чувствительности линейных цепей к вариациям параметров компонентов в режимах постоянного и переменного тока;
6. Анализ в частотной и временной областях при вариациях параметров схемы;
7. Анализ шумовых характеристик моделируемой цепи;
8. Статистический анализ для оценки влияния случайного изменения параметров цепи на ее частотные и временные характеристики.
9. Расчет спектрального состава колебаний.

Схема, отражающая типовую структуру систем компьютерного моделирования, приведена на рис.7.1

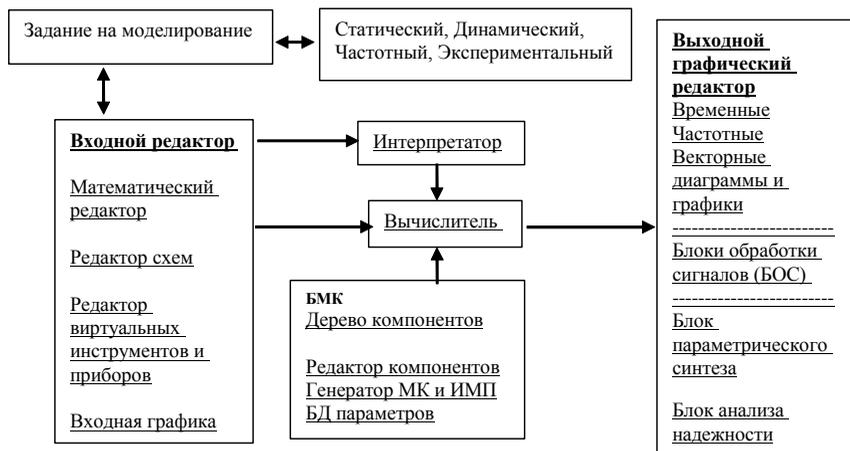


Рис. 7.1

## 7.2. Топологические характеристики и граф электрической цепи

Уравнения, составленные по законам Кирхгофа, определяются только схемой соединений ветвей, т.е. геометрической структурой цепи. Они не зависят от вида и характеристик элементов. Поэтому при составлении уравнений по законам Кирхгофа удобно отвлечься от вида и характеристик ветвей, и заменить их линиями, соединяющими узлы. В результате мы получим граф электрической цепи.

Геометрические свойства цепей изучает раздел теории цепей, который называют топологией. **Топология** – это наука о межсоединениях элементов в системе и свойствах этих соединений.

Это одно из направлений математики, основной раздел называется **теорией графов**. Подробный разбор вопросов топологии электрических цепей не является целью лекции. Мы лишь рассмотрим основные понятия, касающиеся топологии электрических цепей.

**Путь графа** – непрерывная последовательность ветвей, соединяющих пару выбранных узлов;

**Подграф** – часть графа, полученная путем удаления некоторых ветвей исходного графа;

**Контур** – замкнутый путь, проходящий через ряд ветвей и узлов;

**Дерево графа** – подграф, содержащий все узлы графа, но не содержащий контуров;

Ветви связи (хорды) – ветви исходного графа, не вошедшие в дерево. Присоединение каждой ветви связи к дереву дает контур, называемый главным. Каждая ветвь связи входит только в один контур. Поэтому уравнения по второму закону Кирхгофа для главных контуров будут независимыми.

**Сечение** – система ветвей, удаление которых разбивает граф на две несвязные части. Сечение рассматривают как обобщение понятия «узел».

В качестве иллюстрации рассмотренных топологических понятий приведем резистивную цепь, показанную на рис. 7.2.

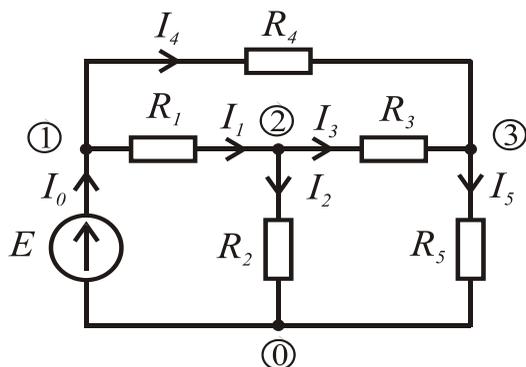


Рис. 7.2

Граф цепи показан на рис. 7.3. На рис. 7.4 показано дерево графа, образованное ветвями 1, 2, 3. Ветви, показанные на рисунке пунктиром, являются хордами.

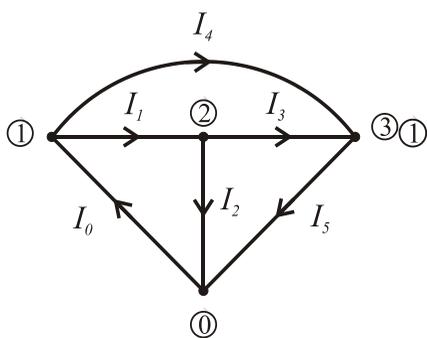


Рис. 7.3

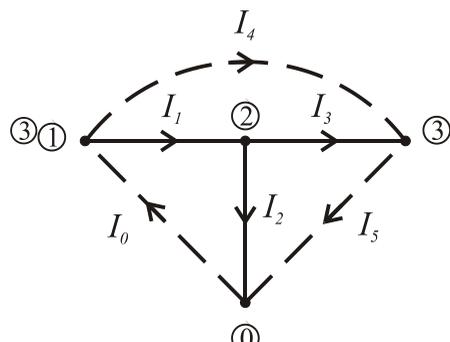


Рис. 7.4

### 7.3. Топологические матрицы

Информацию о графе удобно представлять в виде двумерных массивов, называемых топологическими матрицами.

Матрица инциденций  $[A]$  – таблица, которая содержит  $n_y$  строк и  $n_b$  столбцов. Каждая строка соответствует узлу, а каждый столбец – ветви графа. Если ветвь с номером  $j$  направлена от узла  $i$  то в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце записываем  $+1$ . Если  $j$ -я ветвь направлена к узлу  $i$ , то в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце записываем  $-1$ . Все остальные элементы матрицы инциденций равны нулю.

Матрица инцидентий дает полное описание направленного графа. С помощью матрицы инцидентий удобно записывать уравнения по первому закону Кирхгофа в матричном виде:

$$[A][i^b] = 0.$$

Предположим, что мы знаем напряжения всех узлов цепи относительно базисного узла. Тогда напряжения ветвей цепи можно найти с помощью матрицы инцидентий:

$$[u^b] = [A]^t [u^y].$$

Матрица инцидентий для цепи, показанной на рис. 7.2, имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица главных контуров  $[B]$  описывает соединения ветвей, входящих в независимые контуры. Она представляет таблицу размера  $n_k \times n_b$ . Каждая строка соответствует главному контуру, образованному присоединением к дереву ветви связи, а столбец – ветви. Если  $i$ -я ветвь входит в  $j$ -й контур, то элемент  $b_{ji} = \pm 1$ . Остальные элементы матрицы главных контуров равны нулю. Для  $b_{ji} = \pm 1$  действует правило совпадения (+1) и не совпадения (-1) направления напряжения цепи и направления обхода контура.

Матрица главных контуров является матрицей коэффициентов системы уравнений, записанных в соответствии с вторым законом Кирхгофа для главных контуров. Поэтому система уравнений по второму закону Кирхгофа в матричной форме имеет вид:

$$[B][u^e] = 0.$$

Матрица главных контуров, соответствующая графу, показанному на рис. 7.4, имеет вид:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Столбец, соответствующий ветви связи, содержит только один ненулевой элемент, равный +1. Каждая ветвь дерева входит в два смежных контура. Поэтому столбцы, соответствующие ветвям дерева, содержат два ненулевых элемента, равных +1 и -1.

Топологические матрицы позволяют формализовать запись уравнений по законам Кирхгофа, что очень важно с точки зрения машинных расчетов.

**Рассмотрим алгоритм формирования матрицы инцидентий.** Исходная информация о цепи представляется в виде таблицы соединений. Информация о каждой ветви хранится в виде триплета  $k, i, j$ . Здесь  $k$  – номер ветви,  $i, j$  – номера узлов подключения. Формирование матрицы инцидентий выполняется в следующем порядке.

На первом шаге все элементы матрицы полагаются равными нулю:

$$[A] = 0.$$

Затем просматривается таблица соединений. Если  $k$ -я ветвь включена между узлами с номерами ветви  $i$  и  $j$ , то  $a_{ik} = +1$ ,  $a_{jk} = -1$ .

Формирование матрицы инцидентий заканчивается, когда достигнут конец списка ветвей.

Алгоритм формирования матрицы инцидентий оказывается наиболее простым. Процедура получения матрицы главных контуров оказывается сложнее, поскольку сначала необходимо выбрать дерево графа.

Рассмотрим основные методы моделирования и анализа электрических цепей на ЭВМ.

## 7.4. Метод узловых напряжений

В методе узловых напряжений независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного (опорного) узла. Эти величины называют *узловыми напряжениями*. Положительные направления узловых напряжений указываются стрелками от рассматриваемых узлов к базисному. В качестве последнего удобно выбирать заземленный узел или узел, в котором сходится наибольшее число ветвей. Уравнения составляют только на основе первого закона Кирхгофа. Поэтому анализируемая цепь может содержать только источники тока. Если в схеме имеются источники напряжения, они должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

**Матричная форма узловых уравнений.** Узловые уравнения удобно записывать в матричной форме. В общем виде для цепи, имеющей  $n+1$  узел, эти уравнения имеют вид:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix}.$$

В более компактном виде

$$[G][V] = [J].$$

Здесь –  $[V]$  вектор узловых напряжений. Квадратную матрицу коэффициентов  $[G]$  называют *матрицей узловых проводимостей*, а вектор правой части – *вектором узловых токов*.

Элементы на главной диагонали матрицы узловых проводимостей называют *собственными проводимостями узлов*. Собственная проводимость  $i$ -го узла  $g_{ii}$  равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле. Элементы матрицы  $[G]$ , расположенные вне главной диагонали, называют

*взаимными проводимостями.* Взаимная проводимость  $g_{ij}$  между узлами  $i$  и  $j$  равна проводимости ветви, соединяющей эти узлы, взятой со знаком “-“. В пассивной цепи, которая не содержит управляемых источников и идеальных ОУ,  $g_{ij} = g_{ji}$ , и матрица узловых проводимостей симметрична относительно главной диагонали.

Таким образом, если  $k$ -я ветвь включена между узлами  $i$  и  $j$  (рис. 7.5, а), ее проводимость  $G_k$  войдет в элементы матрицы узловых проводимостей, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами  $i$  и  $j$  (рис. 7.5, б).

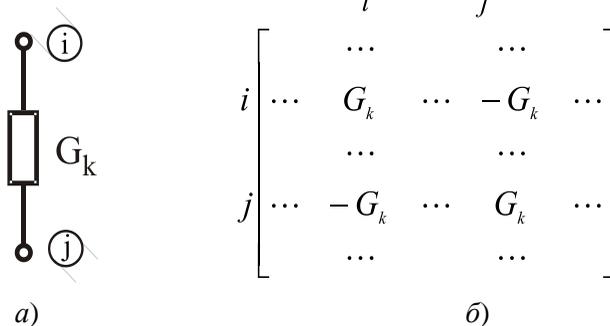


Рис. 7.5

Элементы вектора узловых токов равны алгебраической сумме токов источников, сходящихся в соответствующем узле. Если независимый источник тока  $J_k$  включен между узлами  $m$  и  $n$  (рис. 7.6, а), ток этого источника необходимо учесть в векторе узловых токов так, как показано на рис. 7.6, б.

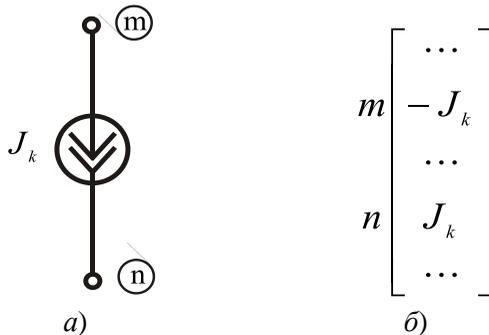


Рис. 7.6

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей и вектора узловых токов не зависят от выбора направлений токов ветвей или нумерации узлов. Они позволяют сформировать узловые уравнения непосредственно по схеме, без предварительной записи уравнений по первому закону Кирхгофа.

**Пример 7.1.** Записать узловые уравнения для цепи, показанной на рис. 7.7.

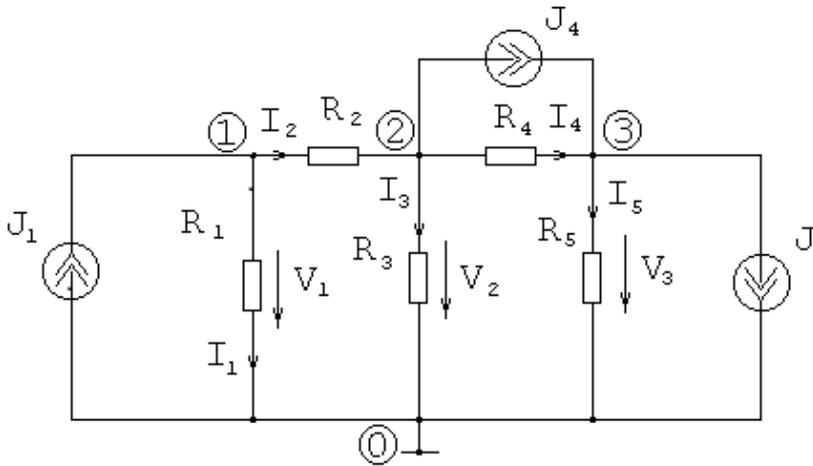


Рис.7.7

Для рассмотренного примера узловые уравнения в матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ -J_4 \\ J_4 - J_5 \end{bmatrix}.$$

**Узловые уравнения для цепей с источниками тока, управляемыми током (ИТУН).** Если ИТУН включен между узлами  $i, j, k, l$  так, как показано на рис. 7.8, его параметр  $S$  войдет в матрицу узловых проводимостей следующим образом:

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \dots \\
 l \\
 \dots \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 i & j \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \dots & S & \dots & S \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & -S & \dots & S
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

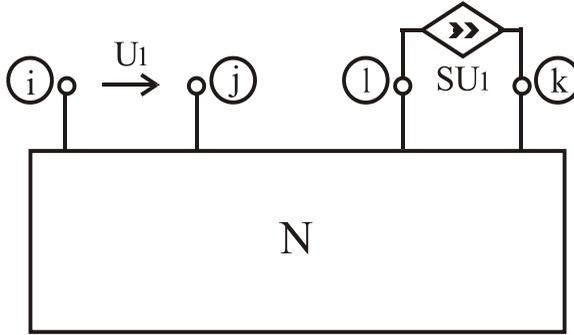


Рис. 7.8

В соответствии с правилом, которое мы сформулировали, узловые уравнения цепи с ИТУН (рис. 7.9) имеют вид:

$$\begin{bmatrix}
 G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\
 -G_2 + S & G_2 + G_3 + G_4 - S & -G_4 \\
 -S & -G_4 + S & G_4 + G_5
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 J_1 \\
 0 \\
 -J_5
 \end{bmatrix}
 .$$

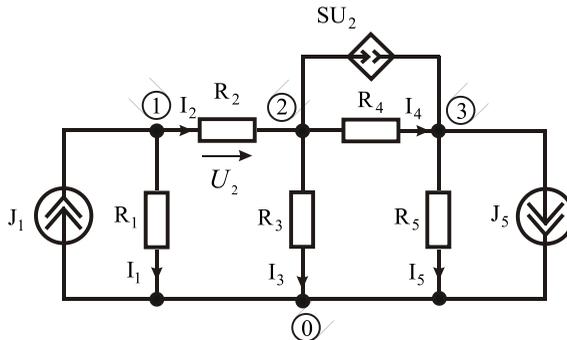


Рис. 7.9

Параметр управляемого источника входит в элементы матрицы узловых проводимостей, которые находятся на пересечении строк 2, 3 и столбцов 1, 2.

Заметим, что матрица узловых проводимостей цепи, содержащей управляемые источники, не будет симметричной.

**Алгоритм формирования узловых уравнений.** Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей используются в алгоритме формирования узловых уравнений, основанном на последовательном переборе ветвей.

Алгоритм формирования узловых уравнений включает следующие шаги.

1. Выбираем базисный узел.
2. Остальным узлам присваиваем номера  $1, 2, \dots, n_y - 1$ .
3. Представляем матрицу узловых проводимостей в виде таблицы, имеющей  $(n_y - 1)$  строк и  $(n_y - 1)$  столбцов.
4. Полагаем все элементы матрицы узловых проводимостей и векторы узловых токов равными нулю. Это эквивалентно исключению из схемы всех элементов.
5. Поочередно включаем элементы в схему. Если резистор включен между узлами  $i$  и  $j$ , его проводимость записываем в элементы матрицы, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами  $i$  и  $j$  (см. рис. 7.5). Если резистор включен между узлом  $i$  и базисным, его проводимость записываем в собственную проводимость  $i$ -го узла  $g_{ii}$ . Если между узлами  $m$  и  $n$  включен источник тока, его ток записываем в  $m$ -ю и  $n$ -ю строки вектора узловых токов (см. рис. 7.6).
6. Формирование узловых уравнений заканчивается, когда в схему включены все элементы.

Метод узловых напряжений широко используется в программах машинного анализа электронных схем. Это объясняется простотой алгоритма формирования узловых уравнений и хорошей численной обусловленностью матрицы узловых проводимостей.

## 7.5. Модифицированный метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений применим для цепей, которые содержат только резистивные элементы с ненулевым сопротивлением, независимые источники тока и **источники тока, управляемые напряжением** (ИТУН). Если в схеме имеются другие виды элементов, например независимые источники напряжения или управляемые источники (кроме ИТУН), они должны быть преобразованы в эквивалентные источники тока. Такие элементы называют *нерегулярными*. Кроме того, с помощью метода узловых напряжений мы **не можем в явном виде рассчитать токи ветвей**.

Этих недостатков лишен модифицированный, или расширенный, метод узловых напряжений. Суть этого метода заключается в следующем.

1. Независимыми переменными являются узловые напряжения, а также токи нерегулярных элементов.

2. Система уравнений включает уравнения на основе первого закона Кирхгофа и **компонентные уравнения нерегулярных элементов**.

Расширенные узловые уравнения имеют форму:

$$\begin{bmatrix} [Y] & [M] \\ [N] & [Z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J] \\ [E] \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Матрица коэффициентов в системе уравнений (7.1) разбита на четыре субматрицы. Субматрица  $[Y]$  размера  $(n_y-1) \times (n_y-1)$  является матрицей узловых проводимостей регулярной части цепи. Субматрица  $[M]$  содержит коэффициенты компонентных уравнений,  $[N]$  учитывает токи нерегулярных элементов в уравнениях по первому закону Кирхгофа,  $[Z]$  – субматрица сопротивлений размера  $(n_b \times n_b)$ , ( $n_b$  – число ветвей).

Каждому нерегулярному элементу в расширенной системе уравнений соответствуют дополнительные строка и столбец. Для каждого вида элементов они имеют определенную

форму. В строке записывают коэффициенты компонентного уравнения, а в столбце – коэффициенты уравнений по первому закону Кирхгофа, учитывающих ток нерегулярного элемента. Для каждого такого элемента дополнительные строка и столбец имеют определенную структуру, которые удобно изображать в виде трафаретов или «штампов». «Штампы» основных элементов приведены в табл. 7.1.

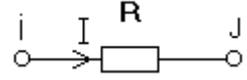
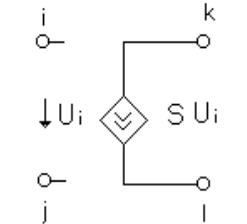
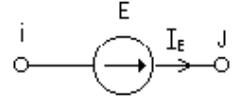
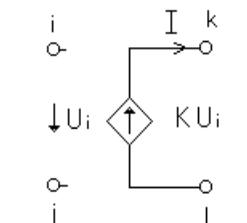
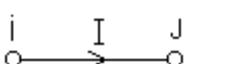
Как правило, число расширенных узловых уравнений значительно превышает число уравнений, составляемых в соответствии с «классическим» методом узловых напряжений. Однако матрица коэффициентов расширенной системы уравнений содержит большое число нулевых элементов. Матрицы, в которых большинство элементов нулевые, называют *разреженными*. Для работы с такими матрицами используют *специальные алгоритмы, которые позволяют не производить операций с нулевыми элементами и не хранить их*. Это позволяет значительно сократить машинное время, необходимое для решения системы уравнений, и память для хранения матрицы коэффициентов. Таким образом, для компьютерного анализа удобен метод, минимизирующий не число уравнений, а число ненулевых элементов в матрице коэффициентов.

Сравнение различных методов анализа электронных схем показывает, что в большинстве случаев матрица коэффициентов модифицированной системы узловых уравнений является наиболее разреженной. Поэтому модифицированный метод узловых напряжений находит широкое применение в программах машинного анализа электронных схем.

## **7.6. Примеры составления модифицированных узловых уравнений**

**Пример 7.2.** Запишем модифицированные узловые уравнения для цепи, показанной на рис. 7.10.

Таблица 7.1

Элемент	Компонентное уравнение	«Штамп»
<b>Резистор</b> 		$i \begin{matrix} i & j \\ \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
<b>Источник тока</b> 		$i \begin{matrix} i & j \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}$
<b>ИТУН</b> 		$k \begin{matrix} i & j \\ \begin{bmatrix} S & -S \\ -S & S \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
<b>Источник напряжения</b> 	$V_j - V_i = E$	$i \begin{matrix} i & j \\ \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$
<b>ИНУН</b> 	$k(V_i - V_j) - V_k - V_l = 0$	$k \begin{matrix} i & j & k & l \\ \begin{bmatrix} & & -1 \\ & & 1 \\ k & -k & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
<b>Короткозамкнутая ветвь</b> 	$V_i - V_j = 0$	$i \begin{matrix} i & j \\ \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

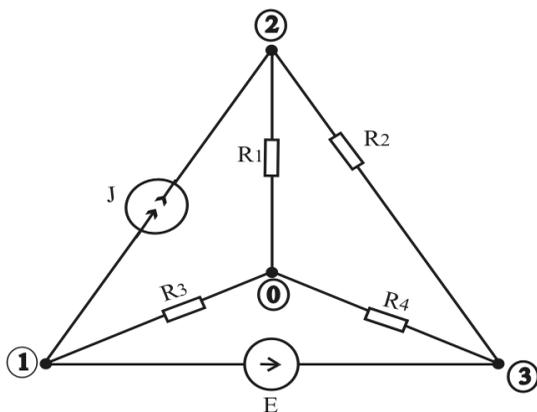


Рис. 7.10

Расширенные узловые уравнения для схемы имеют вид:

$$\begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ +J \\ 0 \\ E \end{bmatrix}.$$

В последней строке записано компонентное уравнение источника напряжения:  $-V_1 + V_3 = E$ . Элементы последнего столбца матрицы коэффициентов учитывают ток нерегулярного элемента ( $I_E$ ) в уравнениях для первого и третьего столбцов.

### 7.7. Метод переменных состояния

Наличие интегралов в уравнениях, описывающих ЭЦ и составленных методами узловых потенциалов или контурных токов, значительно затрудняет решение этих уравнений на ЭВМ. Поэтому представляет интерес попытка составить уравнения ЭЦ таким образом, чтобы они не содержали интегралов. Интегралы в уравнениях модели цепи возникают только тогда, когда напряжение на емкости выражено через

ток или ток индуктивности — через напряжение ( $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$ ,  $i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$ ).

Если в качестве независимых переменных выбрать не узловые напряжения или контурные токи, а напряжения емкостей и токи индуктивностей, то уравнения модели цепи не будут содержать интегралов от неизвестных функций времени. Такие уравнения называются *уравнениями состояния*, а независимые переменные (токи индуктивностей и напряжения емкостей) — *переменными состояния*.

**Формирование уравнений состояния.** Рассмотрим методику формирования уравнений по следующим шагам.

Временно заменяют каждую индуктивность  $L_j$  идеальным источником тока величиной  $J_j$ , а каждую емкость  $C_k$  — идеальным источником напряжения  $u_k$ .

В полученной цепи, состоящей лишь из сопротивлений и источников, определяют напряжения  $u_j(t)$  (на источниках тока, заменяющих индуктивности) и токи  $i_k(t)$  (через источники напряжения, заменяющие емкости). В результате можно записать систему уравнений, представляющую взвешенную сумму токов индуктивностей  $i_j(t)$ , напряжений на емкостях  $u_k(t)$  и параметров независимых источников.

В левой части каждого из этих уравнений производят замену:

$$u_j(t) = L_j \frac{di_j(t)}{dt}; \quad i_k(t) = C_k \frac{du_k(t)}{dt}, \quad (7.2)$$

в результате которой получается система дифференциальных уравнений первого порядка, выраженных через переменные состояния — токи в индуктивностях и напряжения на емкостях.

**Пример 7.3.** Рассмотрим методику формирования уравнений состояния на примере последовательной  $RLC$ -цепи (рис.7.11, а). Заменяя индуктивность и емкость идеальными источниками соответственно тока и напряжения, получим схему (рис. 7.11, б).

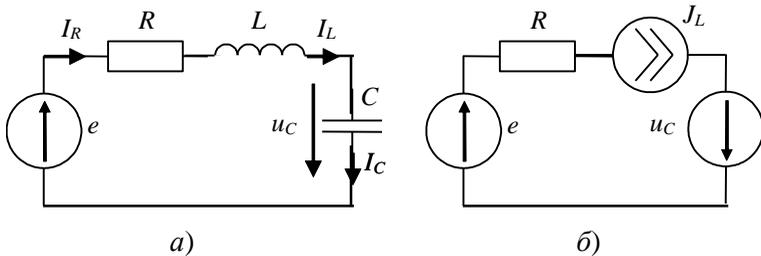


Рис. 7.11

Тогда уравнения законов Кирхгофа, записанные для резистивной цепи с источниками:

$$u_L = -i_L R - u_C + e; \quad i_C = i_L = i_R.$$

Подставив значения  $u_L$  и  $i_C$  из (7.2) и разделив правые части на коэффициенты при производных, получим:

$$di_L / dt = -Ri_L / L - u_C / L + e / L; \quad du_C / dt = i_L / C.$$

В матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ или } \frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y + \mathbf{B}u_s. \quad (7.3)$$

Здесь  $y = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$  — вектор переменных состояния;  $u_s = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$  —

вектор внешних воздействий;  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$  и  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  —

матрицы, элементы которых определяются параметрами пассивных элементов цепи.

Выражение (7.3) представляет собой стандартную форму записи уравнений состояния цепи, не содержащей зависимых источников энергии. Очевидно, число независимых уравнений, составленных по методу переменных состояния, будет равно числу независимо включенных реактивных элементов, т. е. *порядку сложности цепи*. Если исследуемая цепь содер-

жит топологические вырождения, к которым относятся контуры из емкостей и звезды из индуктивностей, то система уравнений модели цепи кроме уравнений (7.3), содержит алгебраические уравнения, составленные по первому или второму законам Кирхгофа для соответствующих контуров или звезд.

Матрицы **A** и **B**, входящие в состав уравнений состояния цепи, могут быть выражены через компонентные и топологические матрицы. Для этого в дополнение к ранее введенным топологическим характеристикам электрической цепи введем понятие *собственного дерева*.

*Собственным деревом графа электрической цепи* называют дерево, которое содержит все источники и все емкостные элементы и не содержит источников тока и индуктивных элементов. Для цепей без топологических вырождений (емкостных контуров и индуктивных сечений), всегда можно построить по крайней мере одно дерево. Граф цепи (рис. 7.12, а) имеет три различных собственных дерева, одно из которых приведено на рис. 7.12, б.

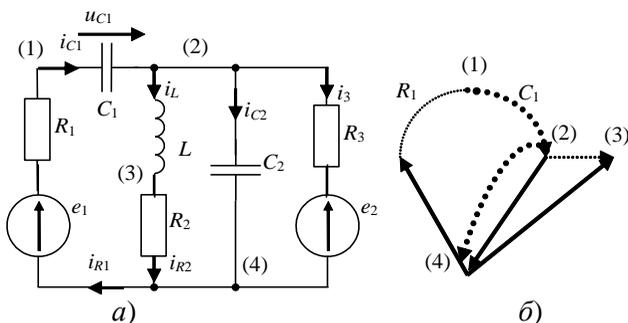


Рис.7.12

Матрица сечений-хорд  $\mathbf{Q}_X$ , соответствующая какому-либо собственному дереву графа, может быть выделена из матрицы главных сечений. Для ее построения пронумеруем ветви графа в следующем порядке:

- 1) ветви с источниками напряжения;
- 2) ветви с емкостными элементами;

- 3) ветви с резистивными элементами, входящие в собственное дерево;
- 4) ветви с резистивными элементами, не входящие в собственное дерево;
- 5) ветви с индуктивными элементами;
- 6) ветви с источниками тока.

Составим матрицу главных сечений графа рассматриваемой цепи, располагая столбцы в порядке возрастания номеров ветвей, а строки — в порядке возрастания номеров ветвей дерева. Для собственного дерева цепи (рис. 7.9, б) матрица главных сечений

$$\mathbf{Q} = \left[ \begin{array}{ccccc|ccc|c} e_1 & C_1 & C_2 & R_1 & e_2 & R_1 & R_3 & L & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & C_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & e_2 \end{array} \right] = \mathbf{Q}_B | \mathbf{Q}_X,$$

где  $\mathbf{Q}_B$  — единичная матрица, число строк и столбцов, которой равно числу ветвей дерева;  $\mathbf{Q}_X$  — искомая матрица сечений-хорд. Элементы, входящие в какой-либо столбец матрицы  $\mathbf{Q}_X$ , показывают, какие ветви дерева и с какой ориентацией входят в главный контур, который замыкается главной ветвью, соответствующей рассматриваемому столбцу. Элемент  $q_{ij}$ , находящийся на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца, равен нулю, если  $i$ -я ветвь дерева не входит в главный контур, соответствующий  $j$ -ой главной ветви;  $q_{ij} = -1$ , если  $i$ -я ветвь дерева входит в главный контур, соответствующий  $j$ -ой главной ветви, и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура;  $q_{ij} = 1$ , если  $i$ -я ветвь дерева входит в  $j$ -й главный контур, а ее направление противоположно направлению обхода контура.

Матрица сечений-хорд  $\mathbf{Q}_X$  позволяет выразить токи ветвей дерева  $i_B$  через токи главных ветвей  $i_X$ , а напряжения главных ветвей  $u_X$  — через напряжения ветвей дерева  $u_B$ :

$$\mathbf{i}_B = -\mathbf{Q}_X \mathbf{i}_X; \quad \mathbf{u}_X = \mathbf{Q}_X^t \mathbf{u}_B.$$

Для собственного дерева (рис. 7.9, б) можно записать:

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_{e_2} \\ i_{C_1} \\ i_{C_2} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_1} \\ i_{R_3} \\ i_L \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_{R_1} \\ u_{R_3} \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 \\ -e_2 \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ u_{R_2} \end{bmatrix}.$$

Исключив из найденных уравнений все переменные, кроме переменных состояния, и учитывая, что

$$i_{C_1} = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt}; \quad i_{C_2} = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad \text{получим:}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_{C_2} - R_2 i_L; \quad C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{u_{C_1} + u_{C_2} - e_1}{R_1};$$

$$C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = -i_L - \frac{u_{C_1}}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) u_{C_2} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_3},$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \\ 1 & \frac{1}{R_1} & \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}.$$

Разделив правую часть матричного уравнения на диагональную матрицу при производной от переменных состояния, получим уравнение в стандартном виде, соответствующее (7.3).

***Решение уравнений состояния во временной области.***

После того как модель цепи определена в какой-либо форме, например, в форме уравнений состояния, необходимо ее решать методом, обеспечивающим требуемую точность вычислений при минимуме затрат времени.

Наиболее распространенным способом вычисления фазовых координат (переменных состояния) систем дифференциальных уравнений (СДУ) модели цепи является *численное интегрирование*. Поскольку независимой переменной при компьютерном моделировании является время, то математическая модель электрической цепи в общем (неявном) виде может быть записана в виде векторного уравнения

$$\Psi\left(\frac{d\mathbf{Y}}{dt}, \mathbf{Y}, t\right) = 0, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{Y}$  — вектор фазовых координат;  $d\mathbf{Y}/dt$  — производная вектора фазовых координат;  $t$  — время (независимая переменная);  $\Psi$  — векторный оператор, соответствующий структуре модели цепи.

Суть любого метода численного интегрирования состоит в том, что вместо точного решения (7.4) находят последовательность приближенных значений фазовых координат (переменных состояния) в дискретные моменты времени. Для этого заданный интервал интегрирования разбивают на последовательные участки (шаги интегрирования). Проиллюстрируем процесс интегрирования с помощью геометрической интерпретации метода Эйлера (рис. 7.13) для СДУ первого порядка в форме Коши

$$y' = f(y, t). \quad (7.5)$$

Правая часть (7.5) представляет собой выражение, по которому для любого значения  $y(t)$  можно вычислить  $y'(y, t)$  в произвольный момент времени  $t_n$ . Какое из множества возможных значений будет получено в результате решения, определяется заданными начальными условиями  $(y_0, t_0)$ , т. е. исходной точкой на плоскости  $y, t$ .

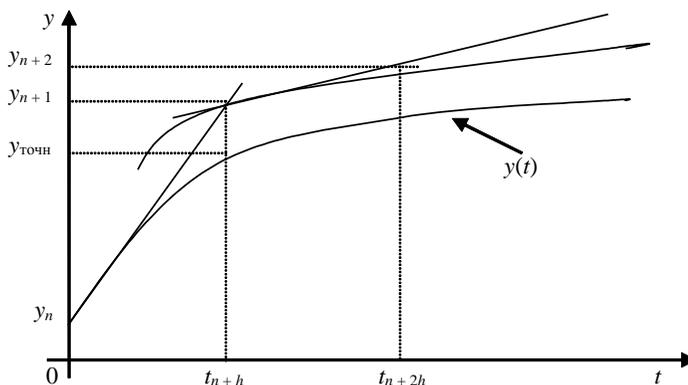


Рис. 7.13

В каждой точке интегрирования по выражению (7.5) определяется значение  $y'(t_n)$  – касательная к искомой кривой (рис. 7.13). Далее по формуле Эйлера

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) \quad (7.6)$$

вычисляется значение интегрируемой функции в точке  $t_{n+1} = t_n + h$ .

С помощью полученного значения  $y(t_{n+1})$  можно определить  $y'(t_{n+1})$  и повторить процесс вычисления искомой функции в точке  $y(t_{n+2})$ . Интегрирование продолжается до конца интервала  $[t_n, t_k]$ .

Алгоритм численного решения СДУ модели цепи в форме (7.5) представлен блок-схемой (рис.7.14). Интегрирование может потребовать большого числа точек (шагов). Для оценки поведения неизвестных достаточно  $Np$  точек (нескольких десятков). Тогда шаг индикации решения определяется по формуле  $h_p = (t_k - t_0)/(Np - 1)$ . Более точными методами низких порядков (первого, второго) являются улучшенный метод Эйлера, метод трапеций, метод Адамса, метод Рунге-Кутты.

Алгоритм реализован во многих программах. В частности, в системе автоматизированного моделирования МАРС, разработанной на кафедре ТОЭ ТУСУР [16, 17], используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка:

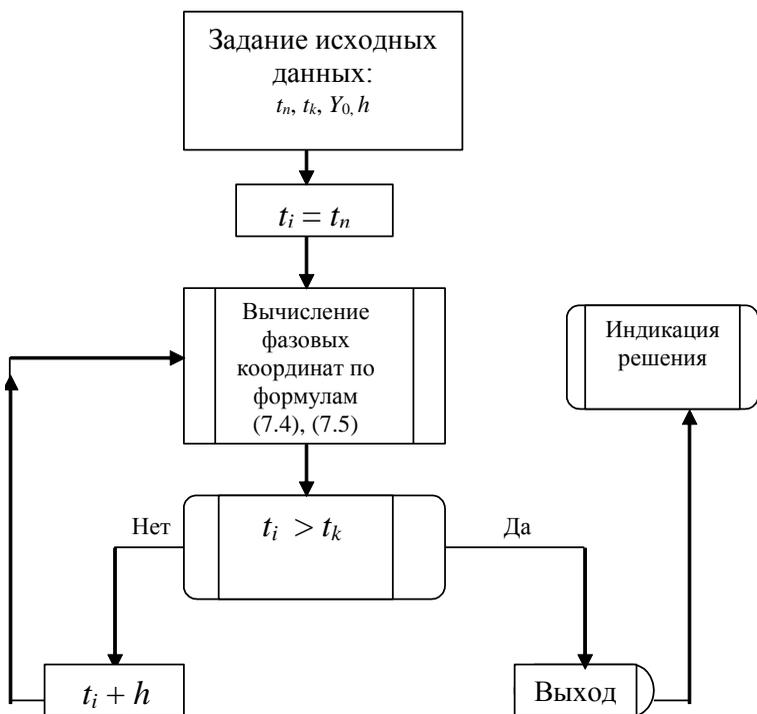


Рис. 7.14

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4),$$

где  $m_1 = h f(y_n, t_n)$ ;  $m_2 = h f(y_n + m_1/2, t_n + h/2)$ ;

$m_3 = h f(y_n + m_2/2, t_n + h/2)$ ;  $m_4 = h f(y_n + m_3, t_n + h)$ .

При таком способе решения существенно (по сравнению с методом Эйлера) снижается погрешность вычислений, что позволяет увеличить шаг вычислений. Методическая погрешность данного алгоритма пропорциональна  $h^5$ . Для повышения точности необходимо уменьшить шаг. Однако с ростом числа шагов погрешность вычислений может увеличиваться за счет погрешности округлений.

Решение уравнений состояния в общем случае представляет собой сложную проблему. В векторно-матричной форме эти уравнения имеют вид:

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y + \mathbf{B}u_s.$$

Важную роль в процессе интегрирования играют собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  в уравнении (7.3) или, что аналогично, постоянные времени цепи ( $\tau_L = L/R$ ;  $\tau_C = RC$ ). Если разброс их значений достаточно велик (более трех порядков), то такие уравнения называются жесткими и решают их неявными методами с формированием матриц Якоби  $\mathbf{J} = [\partial f_i / \partial y_j]$ .

Порядок пользования программой следующий. Вначале определяются коэффициенты матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в численном виде и устанавливается величина шага  $h$ . Далее определяются постоянные времени отдельных  $RL$ - и  $RC$ -ветвей. Шаг выбирается из соотношения  $h < \frac{\tau_{\min}}{3 \div 5}$ , где  $\tau_{\min} = \frac{1}{|p_{\max}|}$  (или  $\tau_{\min} \frac{1}{\alpha}$  — при комплексно-сопряженных корнях). Если источники энергии в цепи гармонические, то необходимо определить их периоды  $T$  и сравнить с  $\tau_{\min}$ : если  $T \leq 5\tau_{\min}$ , то следует выбрать  $h \leq \frac{T}{15}$ . После выбора величины  $h$  в программу записывают начальные значения переменных состояния, которые должны быть заранее рассчитаны.

**Пример 7.4.** Решить линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{5}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{5}{2}; \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2$$

при нулевых начальных условиях  $y_{10} = y_{20} = 0$ .

*Решение.* Матрица Якоби для данной системы имеет собственные значения  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1/6$ , которым соответствуют постоянные времени  $\tau_1 = 1$  и  $\tau_2 = 6$ . Аналитическое решение приведенной системы:

$$y_1 = -2e^{-t} - 3e^{-(1/6)t} + 5; \quad y_2 = e^{-t} - 6e^{-(1/6)t} + 5.$$

Решим данную систему явным методом при постоянной величине шага интегрирования  $h = 0,3$  с.

В табл. 7.2 приведены результаты расчета для одной из переменных  $y_1$ , причем  $y_1^*$  — точное решение,  $y_1^j$  и  $\varepsilon_j$  — числовое решение и полная ошибка на каждом шаге интегрирования для явного метода Эйлера.

Таблица 7.2

$t$	$y_1^*$	$y_1^j$	$\varepsilon_j$
0,30	0,6647	0,7499	-0,0853
0,60	1,1879	1,3125	-0,1246
0,90	1,6047	1,7419	-0,1371
1,20	1,9414	2,0763	-0,1349
1,50	2,2225	2,3425	-0,1252

Из табл. 7.2 видно, что решение устойчиво. Нетрудно убедиться, что решение может стать неустойчивым уже при шаге  $h > 2\tau_1$ .

## 7.8. Анализ уравнений состояния в частотной области

Получение амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ) возможно на основе уравнений, записанных в виде (7.3), то есть в виде СДУ, при гармоническом воздействии на входе цепи.

Поскольку модель электрической цепи линейна, целесообразно записать ее относительно приращений:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (7.7)$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор приращений переменных состояния относительно значений этих переменных без воздействия сигнала (в статическом состоянии);  $\mathbf{U}$  — вектор переменных, составляющих входные воздействия;  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — постоянные матрицы.

Учитываем, что  $\mathbf{V}(0) = 0$  и применяем преобразование Лапласа к (7.7):

$$p\mathbf{V}(p) = \mathbf{A}\mathbf{V}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p), \quad (7.8)$$

где  $\mathbf{V}(p)$  и  $\mathbf{U}(p)$  – преобразованные по Лапласу векторы  $\mathbf{V}(t)$  и  $\mathbf{U}(t)$ .

Заменив  $p$  в (7.8) на  $j\omega$ , получим модель цепи в частотной области:

$$(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}(j\omega) = \mathbf{B}\mathbf{U}(j\omega), \quad (7.9)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица того же порядка, что и матрица  $\mathbf{A}$ .

Решение этой системы уравнений позволяет определить значение  $\mathbf{V}(j\omega)$  для избранного ряда частот. Построение АЧХ и ФЧХ сводится к нахождению модуля и аргумента комплексного значения  $\mathbf{V}(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$  на заданных частотах  $\omega$  при единичной амплитуде воздействия.

## 7.9. Анализ нелинейных цепей

Одна из важнейших задач анализа нелинейных цепей заключается в определении рабочих точек или точек смещения электронных приборов. *Рабочей точкой* нелинейного элемента называют значения постоянных напряжения и тока, изображаемых в виде точки на его вольт-амперной характеристике.

Рабочую точку определяют при действии постоянных источников напряжения и тока. При этом индуктивные элементы заменяют короткими замыканиями, а емкостные – разрывом.

Простейшим является графический метод определения рабочей точки. В соответствии с этим методом рабочая точка находится на пересечении ВАХ нелинейной подсхемы и нагрузочной прямой линейной цепи.

Рассмотрим графический метод определения рабочей точки. Выделим в анализируемой цепи две подсхемы: линейную  $N_a$  и нелинейную  $N_b$  (рис. 7.15).

Для выбранных направлений напряжений и токов справедливы равенства:

$$I_a = I_b = I; \quad U_a = U_b = U. \quad (7.10)$$

Представим линейную часть цепи по схеме эквивалентного генератора (рис. 7.16).

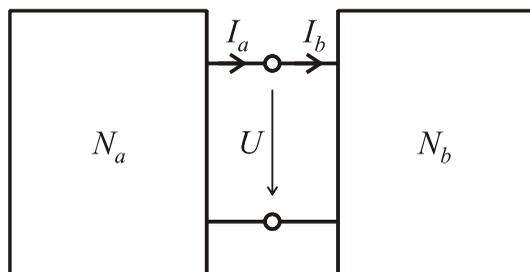


Рис. 7.15

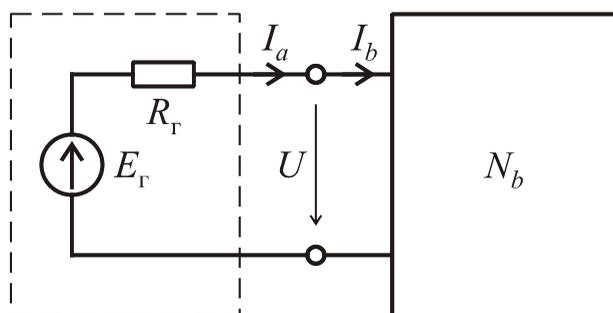


Рис. 7.16

ВАХ линейной подсистемы представляет прямую, проходящую через точки на осях напряжений и токов, соответствующие режимам холостого хода и короткого замыкания (рис. 7.17). Ее называют *нагрузочной прямой*.

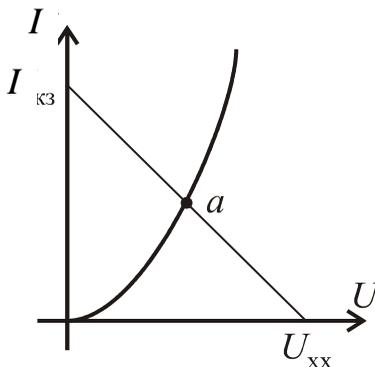


Рис. 7.17

В соответствии с равенствами (7.10) рабочая точка находится на пересечении ВАХ нелинейной подсистемы  $N_b$  и нагрузочной прямой (точка  $a$  на рис. 7.17).

Графический метод определения рабочей точки является приближенным и применяется на практике только для цепей простой конфигурации. Его достоинствами являются простота и наглядность. Графический метод можно использовать для определения начального приближения, а затем для получения точного решения применить численный метод.

**Пример 7.5.** Рассмотрим пример определения рабочей точки нелинейного элемента. Цепь, показанная на рис. 7.18 имеет параметры:  $E = 2\text{В}$ ,  $R = 25\text{ Ом}$ . ВАХ нелинейного элемента:  $I(U) = 0.04 U^2$ .

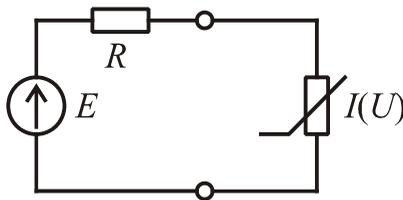


Рис. 7.18

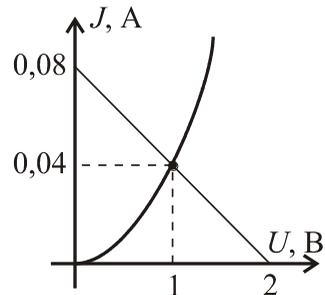


Рис. 7.19

Напряжение холостого хода линейного двухполюсника

$U_{\text{хх}} = 2\text{ В}$ . Ток короткого замыкания  $I_{\text{кз}} = \frac{E}{R} = 0.08\text{ А}$ .

Нагрузочная характеристика цепи смещения – прямая, проходящая через точки с координатами  $(0, 0.08)$  и  $(2, 0)$  на рис. 7.19. Рабочая точка находится на пересечении нагрузочной прямой и ВАХ нелинейного резистора. Ее координаты  $(1, 0.04)$ .

**Численное решение уравнений нелинейных резистивных цепей. Метод Ньютона – Рафсона.** Наиболее распространенным методом решения уравнений, описывающих по-

230

ведение нелинейных резистивных цепей, является метод Ньютона-Рафсона. Это итерационный метод решения нелинейных уравнений, записанных в виде

$$f(x) = 0. \quad (7.11)$$

Предположим, что  $x_k$  является приближенным значением корня уравнения (7.11). В окрестности  $x_{k+1}$  функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + hf'(x_k) + 0,5h^2 f''(x_k) + \dots \quad (7.12)$$

Символом ' в последней формуле обозначена операция дифференцирования. Отбросим в (7.12) нелинейные слагаемые. Полагая, что уточненное значение корня  $x_{k+1} = x_k + h$  является истинным, найдем значение поправки:

$$h = -f(x_k) / f'(x_k).$$

Решение уравнения (7.11) начинают с того, что определяют начальное приближение корня  $x_0$ . Уточненное значение  $x_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется по формуле

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k). \quad (7.13)$$

Расчет повторяют до тех пор, пока поправка не станет меньше заданной постоянной  $\varepsilon$ :

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

Равенство (7.13) называют уравнением Ньютона-Рафсона.

Метод Ньютона-Рафсона имеет быструю сходимость в том случае, если начальное приближение выбрано достаточно близко от истинного решения. Однако если начальное приближение далеко от точного решения, итерации Ньютона-Рафсона могут не сходиться совсем.

Данный метод имеет простую геометрическую интерпретацию. Обратимся к рис. 7.20, на котором изображен график функции  $f(x)$ . Отбрасыванию нелинейных слагаемых в

формуле (7.12) соответствует замена функции  $f(x)$  касательной в точке с координатами  $\{x_1, f(x_1)\}$ . Проведя касательную до пересечения с осью  $x$ , найдем поправку  $h$  и уточненное значение корня  $x_2$  (рис. 7.20).

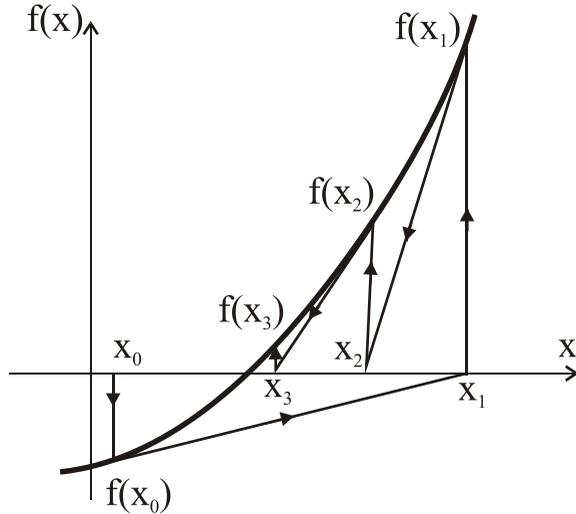


Рис. 7.20

**Пример 7.6. Расчет нелинейной резистивной цепи методом Ньютона-Рафсона.** Цепь, показанная на рис. 7.21, имеет следующие параметры:  $J = 80 \text{ мА}$ ,  $G = 0.04 \text{ Сим}$ . Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается выражением:  $I(U) = 0.04U^2$ . Необходимо определить рабочую точку нелинейного элемента.

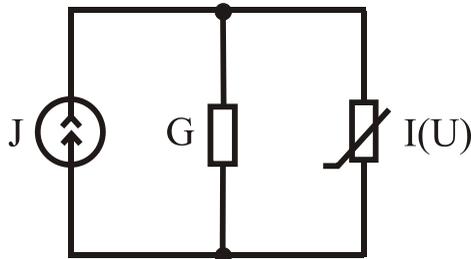


Рис. 7.21

*Решение.* В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$-J + GU + 0.04U^2 = 0.$$

Итак, нелинейное уравнение имеет вид:

$$f(U) = -0.08 + 0.04U + 0.04U^2 = 0.$$

Производная определяется уравнением:

$$f'(U) = 0.04 + 0.08U.$$

Выберем начальное приближение  $U_0 = 0$ . Уточненное решение на первом шаге:

$$U_1 = U_0 - \frac{f(U_0)}{f'(U_0)} = 0 + \frac{0.08}{0.04} = 2.$$

На втором шаге

$$U_2 = U_1 - \frac{f(U_1)}{f'(U_1)} = 2 - \frac{0.16}{0.2} = 1.2.$$

На третьем и четвертом шагах получим:  $U_3 = 1.012$ ,  $U_4 = 1$ . Таким образом, напряжение нелинейного элемента  $U = 1$  В.

Метод Ньютона-Рафсона можно использовать и для решения систем нелинейных уравнений. Обозначим  $[x^k]$  – вектор переменных на  $k$ -м шаге. В этом случае уравнение (7.13) примет вид:

$$[x^{(k+1)}] = [x^k] - [J(x^k)]^{-1} [f(x^k)]. \quad (7.14)$$

Здесь  $[J(x)]$  – матрица Якоби, элементы которой равны частным производным  $df_i / dx_j$ .

Равенство (7.14) называют  $n$ -мерным аналогом уравнения Ньютона-Рафсона.

Обращение матрицы Якоби в формуле (7.14) требует значительного количества операций. С вычислительной точки зрения более эффективно решить систему линейных уравнений:

$$[J(x^k)][x^{(k+1)}] = [J(x^k)][x^{(k)}] - [f(x^k)]. \quad (7.15)$$

Как и в одномерном случае, в  $n$ -мерном случае метод Ньютона-Рафсона обеспечивает быструю сходимость в тех случаях, когда начальное приближение выбрано достаточно близко к истинному решению. Однако объем вычислений при решении многомерной задачи резко возрастает, поскольку на каждом шаге требуется *вычислять  $n^2$  производных* в матрице Якоби.

Рассмотрим основные этапы процедуры решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона.

1. Выбираем максимальное число итераций  $m$  и допустимую величину ошибки  $\varepsilon$ .

2. Выбираем начальное приближение  $[x^{(0)}]$ .

3. Решаем уравнение (7.17) и находим уточненное решение  $[x^{(1)}]$ .

4. Если  $\| [x^{(k+1)}] - [x^{(k)}] \| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i^{k+1} - x_i^k)^2} < \varepsilon$ , ре-

шение найдено. Если неравенство не выполняется, повторяем шаг 3, используя уточненное значение вектора переменных.

5. Если число итераций превысило  $m$  и решение не найдено, выбирается новое начальное приближение, и процедура решения повторяется.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Купцов А.М. Линейные электрические цепи. Основы теории для самостоятельного изучения. — Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1998. — 222 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1984. — 559 с.
3. Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники. Том 2 /К.С. Демирчан, Н.В. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. — Спб.: Питер, 2003. — 576 с.
4. Автоматизация функционального проектирования электромеханических систем и устройств преобразовательной техники /В.М. Дмитриев, Т.Н. Зайченко, Ю.А. Шурыгин и др. — Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2000. — 291 с.
5. Пулькин С.П. Вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1974. — 299 с.
6. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. — М.: Бинум, 1994.— 381 с.
7. Теоретические основы электротехники. Ч. 1: Установившиеся режимы в линейных электрических цепях. /В.М. Дмитриев, Н.В. Кобрина, Н.П. Фикс и др. — Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2000. — 220 с.
8. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля. — М.: Высшая школа, 1989.— 278 с.
9. Глазенко Т.А. Электротехника и основы электроники /Т.А. Глазенко, В.А. Прянешников. — М.: Высшая школа, 1985. — 175 с.
10. Баскаков С.Н. Основы электродинамики. — М.: Советское радио, 1973. — 248 с.
11. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высшая школа, 1973. — 231 с.
12. Татур Т.А. Электромагнитное поле в реальных средах. — Киев: Наукова думка, 1976. — 35 с.
13. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960. — 431 с.

14. Атабеков Г.И. Электромагнитное поле /Г.И. Атабеков, С.Р. Купалян, А.Б. Тимофеев, С.С. Хухриков — М.: Энергия, 1973. — 463 с.

15. Карлашук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. — М.: Солон-Р, 2000.— 506 с.

16. Дмитриев В.М. МАРС – среда моделирования технических устройств и систем /В.М. Дмитриев, А.В. Шутенков, Т.Н. Зайченко, Т.В. Ганджа. – Томск: В-Спектр, 2011. – 278 с.

17. Система автоматизации моделирования управляемого электропривода /В.М. Дмитриев, Т.Н. Зайченко, В.М. Зюзьков и др. — Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1997. — 92 с.

*Вячеслав Михайлович Дмитриев,  
Александр Васильевич Шутенков  
Тарас Викторович Ганджа,  
Елена Борисовна Шандарова*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Часть 2

Переходные и статические режимы  
в линейных и нелинейных цепях.

Электромагнитное поле

*Учебное пособие*