

Попова А.И., Попова К.Ю.

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Часть 2

Учебное пособие

Томск 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Часть 2

Учебное пособие

Разработчики:

доцент кафедры КРУ
А.И.Попова

доцент кафедры ТОР
К.Ю.Попова

Томск 2015

Авторы выражают благодарность за полезные рекомендации и помощь, оказанную в подготовке пособия доцентам кафедры ТОР Голеву Б.Ф. и Дмитриеву В.Д. по разделам “Четырехполюсники” и “Длинные линии” .

Рецензент:

доцент кафедры теоретических основ радиотехники ТУСУР, к.т.н. Дмитриев В.Д.

Попова А.И., Попова К.Ю.

под общей редакцией Поповой К. Ю.

Теория электрических цепей. Часть 2: Учебное пособие. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2015.- 160 с.

Изложены теоретические сведения и основные расчетные соотношения, четырехполюсники; длинные линии, переходные процессы. Пособие предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих дисциплины “Основы теории цепей” и “Теория электрических цепей”.

В пособии главы 1, 3, 4 написаны Поповой А.И. в соавторстве с Поповой К.Ю., глава 2 – Поповой К.Ю.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	7
1. ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ	8
1.1 Основы теории четырехполюсников	8
1.1.1 Основные определения и классификация четырехполюсников	8
1.1.2 Основные уравнения четырехполюсников	10
1.1.3 Первичные параметры четырехполюсников	12
1.1.4 Связь между внутренними параметрами четырехполюсника	17
1.1.5 Параметры холостого хода и короткого замыкания	19
1.2 Входные и передаточные функции нагруженных четырехполюсников. Схемные функции	19
1.3 Составные четырехполюсники. Регулярное соединение четырехполюсников	21
1.3.1 Последовательное (или этажное) соединение	21
1.3.2 Параллельное соединение	22
1.3.3 Последовательно-параллельное соединение	23
1.3.4 Параллельно-последовательное соединение	24
1.3.5 Каскадное соединение	24
1.3.6 Регулярное соединение	25
1.4 Характеристические параметры пассивных четырехполюсников	26
1.4.1 Режим согласованного включения четырехполюсников	26
1.4.2 Определение характеристических параметров четырехполюсника через А-параметры	28
1.4.3 Каскадное соединение характеристически согласованных четырехполюсников	31
1.5. Рабочие параметры четырехполюсника	33
1.5.1 Входные сопротивления	33
1.5.2 Рабочая постоянная передачи	35
1.6 Четырехполюсники с обратной связью	37
1.7 Активные четырехполюсники	38
1.7.1 Неавтономные активные четырехполюсники	38
1.7.2 Автономные активные четырехполюсники	43
1.9 Контрольные вопросы	45
2. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	46
2.1 Основные уравнения длинной линии	47
2.1.1 Телеграфные уравнения	47
2.1.2 Падающая и отраженная волны	50
2.2 Характеристика процессов в длинной линии	52
2.2.1 Вторичные параметры длинной линии, выраженные через погонные параметры	52
2.2.2 Линия без искажения	54

2.2.3	Длинная линия, как нагруженный четырехполюсник	56
2.2.4	Уравнения длинной линии, в гиперболических функциях.....	57
2.2.5	Входное сопротивление длинной линии	57
2.2.6	Коэффициент отражения длинной линии	58
2.3	Режимы работы длинной линии.....	58
2.3.1	Линия без потерь.....	60
2.3.2	Режим бегущих волн	60
2.3.3	Режим стоячих волн	62
2.3.4	Режим смешанных волн	70
2.4	Мощность в длинных линиях без потерь.....	75
2.5	Коэффициент полезного действия при согласованной нагрузке.....	77
2.6	Эквивалентные схемы замещения длинной линии	78
2.6.1	Линия как согласующий трансформатор	78
2.6.2	Линия как реактивное сопротивление	79
2.7	Понятие S-параметров четырехполюсника, включенного между длинными линиями.	81
2.8	Контрольные вопросы.....	83
3.	ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.....	83
3.1	Общие сведения о переходных процессах	83
3.1.1	Длительность переходных процессов.....	84
3.1.2	Причины возникновения переходных процессов.....	85
3.1.3	Принципы непрерывности заряда, потокосцепления и энергии в электрической цепи	87
3.1.4	Законы коммутации	87
3.1.5	Начальные условия: независимые и зависимые, нулевые и ненулевые.....	89
3.1.6	Порядок определения граничных условий.....	90
3.2	Математические основы анализа переходных процессов. Классический метод	93
3.2.1	Принужденный и свободный режим.....	93
3.2.2	Характеристическое уравнение.....	96
3.2.3	Корни характеристического уравнения. Связь вида корней и характера свободных составляющих	99
3.2.4	Постоянная времени τ	105
3.2.5	Определение постоянных интегрирования A	106
3.2.6	Порядок анализа переходного процесса классическим методом	107
3.2.7	Применение классического метода в расчетах переходных процессов и его практическая ограниченность	108
3.2.8	Включение цепи с резистором и индуктивностью на постоянное напряжение.....	113
3.2.9	Включение цепи с резистором и индуктивностью на синусоидальное напряжение	116
3.3	Операторный метод анализа цепи в переходном режиме	118

3.3.1	Прямое преобразование Лапласа	119
3.3.2	Свойства преобразования Лапласа.....	119
3.3.3	Операторная схема замещения цепи.....	121
3.3.4	Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме	123
3.3.5	Переход от изображения к оригиналу	125
3.3.6	Порядок расчёта операторным методом	127
3.4	Понятие временных характеристик.....	130
3.5	Контрольные вопросы.....	135
4.	НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ	135
4.1	Нелинейные электрические цепи в режиме постоянного тока.....	135
4.1.1	Нелинейные элементы. Их характеристики и свойства.....	135
4.1.2	Параметры нелинейных резисторов	138
4.2	Методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.....	139
4.2.1	Графические методы расчета.....	140
4.3	Аналитическое представление вольт-амперных характеристик	143
4.3.1	Полиномиальная аппроксимация.....	145
4.4	Нелинейные электрические цепи при гармонических воздействиях.....	146
4.4.1	Преобразования гармонического воздействия в НЭ с полиномиальной аппроксимацией	146
4.4.2	Преобразования гармонического воздействия в НЭ с кусочно-линейной аппроксимацией	148
4.5	Контрольные вопросы.....	151
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	152
	ЛИТЕРАТУРА	153
	ГЛОССАРИЙ.....	154
	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	158

ВВЕДЕНИЕ

Теория электрических цепей (ТЭЦ) является базой для широкого круга радиотехнических дисциплин. В рамках этой дисциплины изучаются основополагающие законы и принципы распространения электромагнитной энергии в радиотехнических цепях.

В представленном пособии изложены основные теоретические сведения и основные расчетные соотношения, необходимые для расчета сложных электрических цепей.

Пособие состоит из 4 глав. В первой главе описываются основные сведения о четырехполюсниках и цепочечных LC-фильтрах. Во второй - цепи с распределенными параметрами (длинные линии). Третья глава раскрывает основные принципы расчета переходных процессов. В четвертой главе кратко представлена информация о нелинейных цепях и методах их расчета.

Пособие предназначено для студентов дистанционной формы обучения, изучающих дисциплины “Основы теории цепей” и “Теория электрических цепей”.

Авторы выражают благодарность за полезные рекомендации и помощь, оказанную в подготовке пособия доцентам кафедры ТОР Голеву Б.Ф. и Дмитриеву В.Д. по разделам “Четырехполюсники” и “Длинные линии” .

1. ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

1.1 Основы теории четырехполюсников

1.1.1 Основные определения и классификация четырехполюсников

Определение. Часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к любым двум парам ее зажимов, токи в которых попарно равны и противоположны по направлению, называется четырехполюсником (ЧП).

Понятием «четыреполюсник» пользуются тогда, когда интересуются величинами токов в двух ветвях или напряжений в двух парах узлов электрической цепи (рис.1.1).

Пример. В качестве четырехполюсника можно рассмотреть: длинную линию, электрический фильтр, трансформатор, усилитель, корректирующее устройство и всякое другое устройство с двумя парами зажимов, включенное между источником и приемником электрической энергии.

Обозначение.



Рис. 1.1. Четыреполюсник



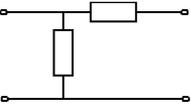
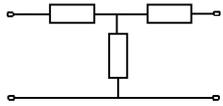
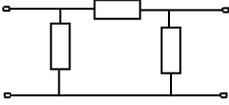
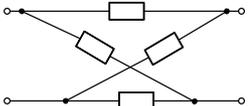
Рис.1.2. Обозначение зажимов четырехполюсника

Определение. Зажимы четырехполюсника, к которым присоединяется источник электрической энергии, называются *входными* (1 и 1'), а зажимы, к которым присоединяется нагрузка, - *выходными* (2 и 2'). Для краткости применяются также термины «вход» и «выход» четырехполюсника (рис.1.2).

Классификация четырехполюсников может быть сведена в таблицу 1.1 в соответствии с рассматриваемыми признаками: по типу элементов, по наличию источников, по структуре [1].

Таблица 1.1.

Признаки классификации четырехполюсников

По типу элементов:			
линейные		нелинейные	
ЧП, в состав которых входят линейные элементы, называются линейными.		ЧП, в состав которых входят нелинейные элементы, называются нелинейными.	
По наличию источников:			
активные		пассивные	
ЧП содержат внутри идеализированные активные элементы (активные включают в себя управляемые и неуправляемые идеализированные источники электрической энергии).		ЧП не содержат внутри идеализированных активных элементов.	
активные		пассивные	
<i>автономные</i>	<i>неавтономные</i>	<i>неавтономные</i>	
Если все выводы ЧП, содержащего неуправляемые источники энергии, соединены между собой (закорочены), то токи, хотя бы части выводов, будут отличны от нуля. Если внешние выводы этого ЧП находятся в режиме холостого хода, то напряжения хотя бы между некоторыми парами полюсов не равны нулю.	ЧП, которые не содержат неуправляемых источников тока или напряжения.	Если в состав ЧП входят только идеализированные пассивные элементы или управляемые источники, то токи короткого замыкания всех выводов ЧП и напряжения холостого хода между его любыми полюсами равны нулю.	
По структуре:			
эквивалентные		неэквивалентные	
Под эквивалентностью двух ЧП понимается возможность взаимной замены их в электрической цепи без изменения токов и напряжений в остальной ее части.		В противном случае ЧП является неэквивалентным.	
симметричные		несимметричные	
ЧП является симметричным в том случае, когда перемена местами его входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой он соединен.		В противном случае ЧП является несимметричным.	
обратимые		необратимые	
ЧП является обратимым, если выполняется теорема обратимости, т.е. отношение напряжения на входе к току на выходе или, что то же самое, передаточное сопротивление входного и выходного контуров не зависит от того, какая зажимов из двух пар является входной и какая, выходной.		В противном случае ЧП является необратимым.	
По способу соединения:			
Г-образный		Т-образный	
П-образный		Мостовой	

Несимметричные – активные (автономные и неавтономные) четырехполюсники всегда необратимы. Симметричные четырехполюсники всегда обратимы.

Линейный четырехполюсник может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующиеся таким образом, что напряжения на обеих парах разомкнутых зажимов четырехполюсника равны нулю.

Приведем пример пассивного четырехполюсника с взаимно компенсирующимися источниками напряжения (ИН) [2].

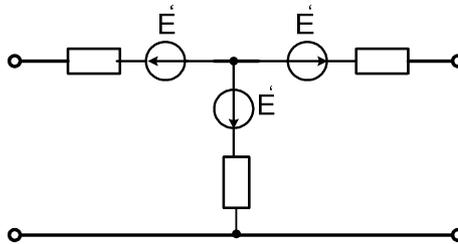


Рис. 1.3. Четырехполюсник, внутри которого действия источников электрической энергии скомпенсированы

На рис. 1.3 изображена схема пассивного четырехполюсника, так как любые две ЭДС взаимно компенсируются в контуре (в уравнениях Кирхгофа эти ЭДС взаимно уничтожаются).

1.1.2 Основные уравнения четырехполюсников

Положим, что имеется четырехполюсник, не содержащий независимых источников электрической энергии. На рис. 1.4 обозначены принятые положительные направления токов и напряжений на зажимах четырехполюсника [2].

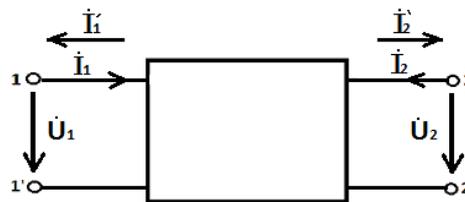


Рис. 1.4. Положительные направления токов в четырехполюснике

Вариант с токами $\dot{i}_1 - \dot{i}_2'$ принято называть *прямой передачей*, и этот вариант используется для уравнений формы $\|A\|$.

Вариант с токами $\dot{i}_1' - \dot{i}_2$ принято называть *обратной передачей*, и этот вариант используется для уравнений формы $\|B\|$.

Вариант с токами $i_1 - i_2$ принято называть **встречным включением**, и этот вариант используется для уравнений форм $\|Y\|$, $\|Z\|$, $\|H\|$, $\|G\|$.

Электрические цепи, присоединенные к зажимам $1-1'$ и $2-2'$, могут быть на основании теоремы о компенсации в любом режиме замещены источниками ЭДС $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$, которые могут рассматриваться как контурные ЭДС, включенные в два независимых контура четырехполюсника, а токи $i_1 = -i_1'$ и $i_2 = -i_2'$ - как контурные токи. В таблице 1.2 приведены все используемые формы уравнений.

Таблица 1.2

Системы уравнений

№ п.п.	Название формы уравнений	Система уравнений В матричной форме	Система уравнений
1.	$\ Y\ $	$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \cdot \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2' = \dot{Y}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \cdot \dot{U}_2 \end{cases}$
2.	$\ Z\ $	$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2' \end{vmatrix}$	$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2' \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2' \end{cases}$
3.	$\ A\ $	$\begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$
4.	$\ B\ $	$\begin{vmatrix} U_2 \\ I_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{B}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \dot{B}_{12} \cdot \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' = \dot{B}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \dot{B}_{22} \cdot \dot{I}_1 \end{cases}$
5.	$\ H\ $	$\begin{vmatrix} U_1 \\ I_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{H}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{H}_{12} \cdot \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2' = \dot{H}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{H}_{22} \cdot \dot{U}_2 \end{cases}$
6.	$\ G\ $	$\begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ I_2' \end{vmatrix}$	$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{G}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \dot{G}_{12} \cdot \dot{I}_2' \\ \dot{U}_2 = \dot{G}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \dot{G}_{12} \cdot \dot{I}_2' \end{cases}$

Величины токов и напряжений, а также параметры матриц $\|A\|$, $\|B\|$, $\|Y\|$, $\|Z\|$, $\|H\|$, $\|G\|$ являются комплексными величинами, зависящими от частоты. Все системы уравнений можно записать в матричном виде, например для формы

$\|Z\| - U=Z \cdot I$, а для формы $\|Y\| - I=Y \cdot U$. Теория четырехполюсников использует аппарат матричной алгебры и позволяет существенно упростить расчеты сложных схем.

Определение. Если четырехполюсники не содержат внутри независимых источников, то это *неавтономные* четырехполюсники. Ниже речь пойдет только о неавтономных линейных пассивных и активных (с зависимыми источниками) четырехполюсниках.

В зависимости от нагрузки четырехполюсник описывается тремя видами параметров:

- 1) *первичными* (или внутренними или собственными), те которые описывают четырехполюсник в режиме холостого хода или режиме короткого замыкания на входе или выходе;
- 2) *характеристическими* (или вторичными) параметрами, те которые описывают четырехполюсник в режиме согласования;
- 3) *рабочими*, те которые описывают четырехполюсник в режиме произвольных нагрузок.

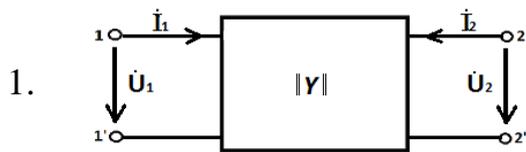
1.1.3 Первичные параметры четырехполюсников

Первичными или внутренними параметрами четырехполюсника являются коэффициенты при токах и напряжениях в системах уравнений $\|Y\|, \|Z\|, \|H\|, \|A\|, \|B\|, \|G\|$. Существует несколько вариантов нахождения первичных параметров четырехполюсника.

Вариант 1. Используется метод, при котором искусственно создается режим короткого замыкания (замкнутые зажимы) или холостого хода (разомкнутые зажимы) на входах или выходах четырехполюсника.

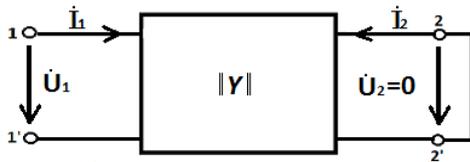
1. Определение параметров формы $\|Y\|$

Рассмотрим на примере системы уравнений формы $\|Y\|$. Изобразим схему четырехполюсника, выберем направления токов и запишем систему уравнений формы $\|Y\|$.



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \cdot \dot{U}_2 & (1) \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \cdot \dot{U}_2 & (2) \end{cases}$$

2. Определим параметр Y_{11} и Y_{21} . Искусственно создадим режим короткого замыкания на выходе четырехполюсника $\dot{U}_2 = 0$, и из уравнения (1) определим Y_{11} , из уравнения (2) определим Y_{21}



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \cdot 0 & (1) \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \cdot 0 & (2) \end{cases}$$

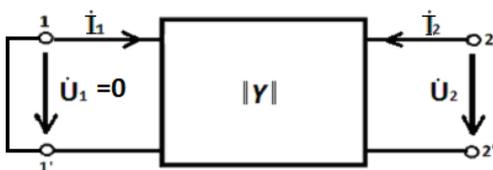
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \cdot \dot{U}_1 & (1) \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \cdot \dot{U}_1 & (2) \end{cases}$$

Параметр Y_{11} – *входная проводимость* со стороны входа.

$$\dot{Y}_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}, \text{ а } \dot{Y}_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}.$$

Параметр Y_{21} – *передаточная проводимость*.

3. Определим параметр Y_{12} и Y_{22} . Искусственно создадим режим короткого замыкания на входе четырехполюсника $\dot{U}_1 = 0$, и из уравнения (1) определим Y_{12} , из уравнения (2) определим Y_{22}



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \cdot 0 + \dot{Y}_{12} \cdot \dot{U}_2 & (1) \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \cdot 0 + \dot{Y}_{22} \cdot \dot{U}_2 & (2) \end{cases}$$

Параметр Y_{12} – *передаточная проводимость*.

$$\dot{I}_1 = \dot{Y}_{12} \cdot \dot{U}_2 \quad (1)$$

Параметр Y_{22} – *входная проводимость* со стороны выхода.

$$\dot{I}'_2 = \dot{Y}_{22} \cdot \dot{U}_2 \quad (2)$$

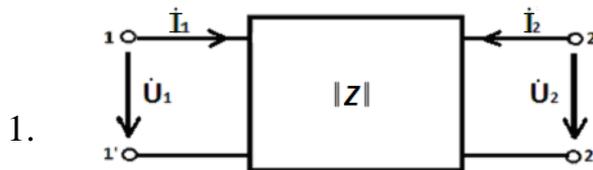
Проводимости измеряются в Сименсах [Сим].

$$\dot{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}, \text{ а } \dot{Y}_{22} = \frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_2}.$$

Вывод. Коэффициенты Y представляют собой входные и передаточные проводимости, измеренные слева и справа при закороченных противоположных жимах 1 и 2. В общем случае – это комплексные величины, зависящие от частоты.

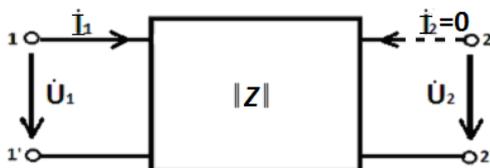
2. Определение параметров формы $\|Z\|$

Вариант 1. Изобразим схему четырехполюсника, выберем направления токов и запишем систему уравнений формы $\|Z\|$.



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 & (1) \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 & (2) \end{cases}$$

2. Определим параметр Z_{11} и Z_{21} . Искусственно создадим режим холостого хода на выходе четырехполюсника $\dot{I}_2 = 0$, и из уравнения (1) определим Z_{11} , из уравнения (2) определим Z_{21}



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot 0 & (1) \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot 0 & (2) \end{cases}$$

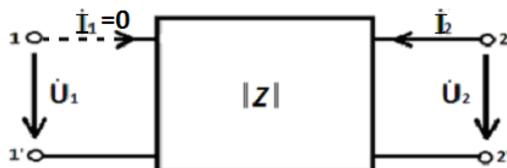
Параметр Z_{11} – *входное сопротивление* со стороны входа.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 & (1) \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 & (2) \end{cases}$$

Параметр Z_{21} – *передаточное сопротивление*.

$$\dot{Z}_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}, \text{ а } \dot{Z}_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}.$$

3. Определим параметр Z_{12} и Z_{22} . Искусственно создадим режим холостого хода на входе четырехполюсника $\dot{I}_1 = 0$, и из уравнения (1) определим Z_{12} , из уравнения (2) определим Z_{22}



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot 0 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 & (1) \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot 0 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 & (1) \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 & (2) \end{cases}$$

Параметр Z_{21} – *передаточное сопротивление*.

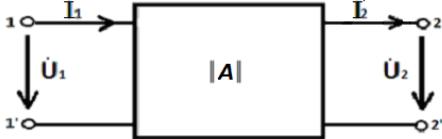
Параметр Z_{22} – *входное сопротивление* со стороны выхода.

$$\dot{Z}_{21} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}, \text{ а } \dot{Z}_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}.$$

Вывод. Коэффициенты Z представляют собой входные сопротивления четырехполюсника при разомкнутых зажимах.

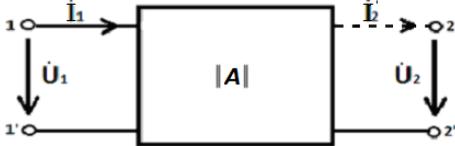
3. Определение параметров формы $\|A\|$

Изобразим схему четырехполюсника, выберем направления токов и запишем систему уравнений формы $\|A\|$.

1. 

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \cdot \dot{I}'_2 & (1) \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \cdot \dot{I}'_2 & (2) \end{cases}$$

2. Определим параметр A_{11} и A_{21} . Искусственно создадим режим холостого хода на выходе четырехполюсника $i'_2 = 0$, и из уравнения (1) определим A_{11} , из уравнения (2) определим A_{21}



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \cdot \dot{I}'_2 & (1) \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \cdot \dot{I}'_2 & (2) \end{cases}$$

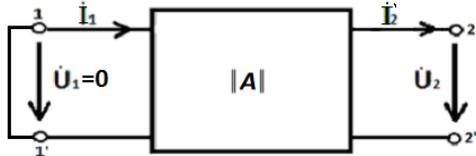
Параметр A_{11} – **обратная величина коэффициента передачи по напряжению.**

Величина безразмерная.

Параметр A_{21} – **передаточная проводимость.**

$$\dot{A}_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}, \text{ а } \dot{A}_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}.$$

3. Определим параметр A_{12} и A_{22} . Искусственно создадим режим короткого замыкания на входе четырехполюсника $i_1 = 0$, и из уравнения (1) определим A_{12} , из уравнения (2) определим A_{22}



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \cdot \dot{I}'_2 & (1) \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \cdot \dot{I}'_2 & (2) \end{cases}$$

Параметр A_{21} – **величина обратная передаточной проводимости.**

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{12} \cdot \dot{I}'_2 & (1) \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{22} \cdot \dot{I}'_2 & (2) \end{cases}$$

Параметр A_{22} – **обратный коэффициент передачи по току.** Величина безразмерная.

$$\dot{A}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}'_2}, \text{ а } \dot{A}_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}'_2}.$$

Определитель, составленный из коэффициентов $\|A\|$, равен:

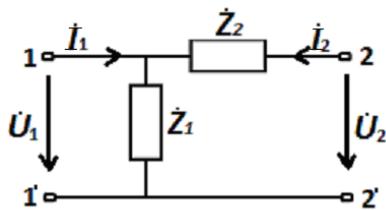
$$|A| = \dot{A}_{11} \cdot \dot{A}_{22} - \dot{A}_{12} \cdot \dot{A}_{21} = \frac{\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{21}}. \text{ В случае обратимого четырехполюсника } \dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21},$$

поэтому $|A| = \dot{A}_{11} \cdot \dot{A}_{22} - \dot{A}_{12} \cdot \dot{A}_{21} = 1$, т.е. только три любых коэффициента в уравнениях формы $\|A\|$ являются независимыми. Если четырехполюсник симметричен, то $\dot{A}_{11} = \dot{A}_{22}$. Очень часто в литературе вводят обозначение параметров $\dot{A}_{11} = \dot{A}$; $\dot{A}_{12} = \dot{B}$; $\dot{A}_{21} = \dot{D}$; $\dot{A}_{22} = \dot{C}$.

Вариант 2. Применение этого варианта допустимо только в случае простых цепей, т.е. ЧП состоящие из двух контуров или двух узлов). В таких ЧП используют методы расчета сложных схем, таких как метод узловых потенциалов (для системы уравнений формы $\|Y\|$) и метод контурных токов (для системы уравнений формы $\|Z\|$) записанные в матричной форме.

1. Нахождение параметров $\|Y\|$ с помощью метода узловых потенциалов

В качестве примера рассмотрим Г-образный четырехполюсник.



1. Обозначим токи в ветвях I и 2 (встречное включение).

2. Составим систему уравнений формы $\|Y\|$.

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 & (1) \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 & (2) \end{cases}$$

Систему уравнений, как и в методе узловых потенциалов, можно записать в матричной форме $I = Y \cdot U$.

3. Запишем матрицу проводимостей $Y = \begin{vmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} \end{vmatrix}$.

Пояснения к примеру. В методе узловых потенциалов матрица Y —матрица проводимостей $Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$, где Y_{11} — собственная проводимость узла 1 равная

$Y_{11} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ сумме проводимостей ветвей, присоединенных к этому узлу;

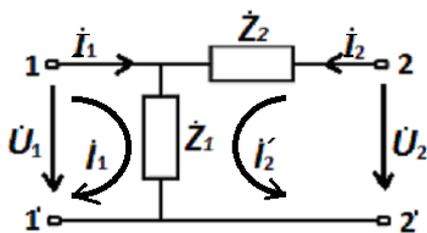
Y_{12} – взаимная проводимость ветви, присоединенная к узлами 1 и 2 и $Y_{12} = -\frac{1}{Z_2}$;

Y_{21} – взаимная проводимость ветви, присоединенная к узлами 2, 1 и $Y_{21} = -\frac{1}{Z_2}$;

Y_{22} – собственная проводимость узла 2 равная $Y_{22} = \frac{1}{Z_2}$.

2. Нахождение параметров $\|Z\|$ с помощью метода контурных токов

Пусть дан Г-образный четырехполюсник.



1. Обозначим токи в ветвях 1 и 2 (встречное включение). Токи i_1 и i_2 являются контурными токами.

2. Составим систему уравнений формы $\|Z\|$.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$$

Систему уравнений, как и в методе контурных токов, можно записать в матричной форме $\dot{U} = \dot{Z} \cdot \dot{I}$.

3. Запишем матрицу сопротивлений $Z = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_1 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \end{vmatrix}$.

1.1.4 Связь между внутренними параметрами четырехполюсника

Если возникают затруднения в нахождении параметров какой-либо формы уравнений, то используют метод, основанный на применении таблиц перехода от системы уравнений с известными параметрами к системе уравнений с определяемыми параметрами. При этом рассчитывают параметры известными методами той системы уравнений, которая не представляет затруднений для рассматриваемого четырехполюсника, а затем используют таблицу перехода к необходимым параметрам (табл.1.3).

Таблица 1.3.

Формулы перехода между системами уравнений

Определяемые параметры	Известные параметры											
	Y		Z		H		G		A		B	
Y	Y_{11}	Y_{12}	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$	$\frac{-Z_{12}}{\Delta_Z}$	$\frac{1}{H_{11}}$	$\frac{-H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{-G_{22}}$	$\frac{G_{12}}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$	$\frac{-\Delta_A}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$	$\frac{-1}{B_{12}}$
	Y_{21}	Y_{22}	$\frac{-Z_{21}}{\Delta_Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$\frac{-G_{21}}{G_{22}}$	$\frac{1}{G_{22}}$	$\frac{-1}{A_{12}}$	$\frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{-\Delta_B}{B_{12}}$	$\frac{B_{22}}{B_{12}}$
Z	$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$	$\frac{-Y_{12}}{\Delta_Y}$	Z_{11}	Z_{12}	$\frac{\Delta_H}{H_{22}}$	$\frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}}$	$\frac{-G_{12}}{G_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$	$\frac{\Delta_A}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$	$\frac{1}{B_{21}}$
	$\frac{-Y_{21}}{\Delta_Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	Z_{21}	Z_{22}	$\frac{-H_{21}}{H_{22}}$	$\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{G_{21}}{G_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{11}}$	$\frac{1}{A_{21}}$	$\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{\Delta_B}{B_{21}}$	$\frac{B_{11}}{B_{21}}$
H	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	H_{11}	H_{12}	$\frac{G_{22}}{\Delta_G}$	$\frac{-G_{12}}{\Delta_G}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$	$\frac{\Delta_A}{A_{22}}$	$\frac{B_{11}}{B_{11}}$	$\frac{1}{B_{11}}$
	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	H_{21}	H_{22}	$\frac{-G_{21}}{\Delta_G}$	$\frac{G_{11}}{\Delta_G}$	$\frac{-1}{A_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{-\Delta_B}{B_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{11}}$
G	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta_H}$	$\frac{-H_{12}}{\Delta_H}$	G_{11}	G_{12}	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$\frac{-\Delta_A}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$	$\frac{-1}{B_{22}}$
	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{-H_{21}}{\Delta_H}$	$\frac{H_{11}}{\Delta_H}$	G_{21}	G_{22}	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{\Delta_B}{B_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{22}}$
A	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$	$\frac{-\Delta_H}{H_{21}}$	$\frac{-H_{12}}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}$	$\frac{G_{22}}{G_{21}}$	A_{11}	A_{12}	$\frac{B_{22}}{\Delta_B}$	$\frac{B_{12}}{\Delta_B}$
	$\frac{-\Delta_Y}{Y_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{-1}{H_{21}}$	$\frac{G_{11}}{G_{21}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{21}}$	A_{21}	A_{22}	$\frac{B_{21}}{\Delta_B}$	$\frac{B_{11}}{\Delta_B}$
B	$\frac{-Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{-1}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$\frac{-\Delta_G}{G_{12}}$	$\frac{-G_{22}}{G_{12}}$	$\frac{A_{22}}{\Delta_A}$	$\frac{A_{12}}{\Delta_A}$	B_{11}	B_{12}
	$\frac{-\Delta_Y}{Y_{12}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{H_{22}}{H_{12}}$	$\frac{\Delta_H}{H_{12}}$	$\frac{-G_{11}}{G_{12}}$	$\frac{-1}{G_{12}}$	$\frac{A_{21}}{\Delta_A}$	$\frac{A_{11}}{\Delta_A}$	B_{21}	B_{22}

1.1.5 Параметры холостого хода и короткого замыкания

Введем индексы «к» и «х» для обозначения режимов короткого замыкания и холостого хода, получим параметры холостого хода и короткого замыкания [2]:

$$Z_{1К} = \frac{1}{Y_{11}}; \quad Z_{2К} = \frac{1}{Y_{22}}; \quad Z_{1X} = Z_{11}; \quad Z_{2X} = Z_{22}.$$

В случае симметричного

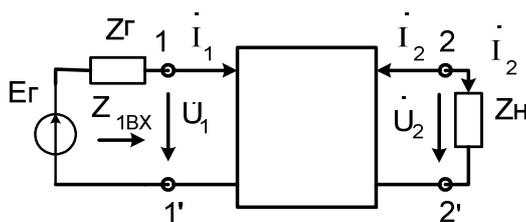
четырёхполюсника $Z_{1К} = Z_{2К}; \quad Z_{1X} = Z_{2X}$. Параметры холостого хода и короткого замыкания могут быть выражены через любую систему коэффициентов используя таблицу 1.3, например через коэффициенты A :

$$Z_{1К} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \quad Z_{2К} = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}; \quad Z_{1X} = Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad Z_{2X} = Z_{22} = \frac{A_{22}}{A_{21}}.$$

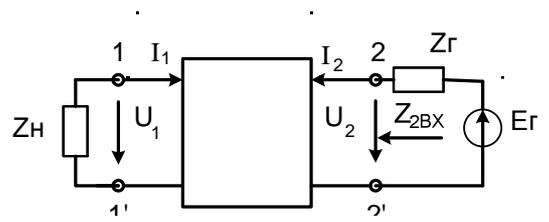
1.2 Входные и передаточные функции нагруженных четырехполюсников.

Схемные функции

Рассмотрим связи между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника, питаемого от источника ЭДС $\dot{E}_Г$ с внутренним сопротивлением $Z_Г$, к выходным зажимам которого подключено сопротивление нагрузки $Z_Н$. При принятых направлениях токов выходное напряжение (рис. 1.5, а) записывается в виде $\dot{U}_2 = -\dot{I}_2 \cdot Z_Н$ или $\dot{U}_2 = \dot{I}'_2 \cdot Z_Н$.



а) со стороны выхода



б) со стороны входа

Рис. 1.5. Произвольная нагрузка четырехполюсника

Входное сопротивление нагруженного четырехполюсника выразим как отношение входного напряжения к входному току $Z_{ВХ} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$. Подставляя уравнения формы $\|A\|$ в это выражение, определим

$$\dot{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}\dot{Z}_H + A_{12}}{A_{21}\dot{Z}_H + A_{22}}. \quad (1.1)$$

Для определения выходного сопротивления рассмотрим аналогичный режим, в котором источник ЭДС \dot{E}_r включен в выходную цепь, а входные зажимы четырехполюсника замкнуты на сопротивление Z_r (рис. 1.5, б). При этом, очевидно, $\dot{U}_1 = -\dot{I}_1 Z_r$. Использование этого выражения и $\|A\|$ - уравнений четырехполюсника приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 Z_r = -A_{21}Z_r\dot{U}_2 + A_{22}Z_r\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2(A_{11} + A_{21}Z_r) &= (A_{12} + A_{22}Z_r)\dot{I}_2. \end{aligned}$$

Отсюда выходное сопротивление четырехполюсника выражается как отношение

$$\dot{Z}_{\text{ВЫХ}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{A_{22}Z_r + A_{12}}{A_{21}Z_r + A_{11}}. \quad (1.2)$$

Входные сопротивления четырехполюсника могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырехполюсника и комплексные сопротивления нагрузок.

Определение: *Передачной функцией, коэффициентом передачи* называется отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин на выходе и входе четырехполюсника при заданном режиме передачи.

Коэффициент передачи по напряжению K_U при питании четырехполюсника со стороны входа (см. рис. 1.5а) определим из первого уравнения $|A|$, поделив числитель и знаменатель на \dot{U}_2

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{11} + A_{12}\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}} = \frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12}}. \quad (1.3)$$

Коэффициент передачи по току K_I найдем из второго уравнения четырехполюсника, числитель и знаменатель на \dot{I}'_2

$$K_1 = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}'_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_H + A_{22}}. \quad (1.4)$$

1.3 Составные четырехполюсники. Регулярное соединение четырехполюсников

В устройствах автоматики, телемеханики и связи четырехполюсные электрические цепи работают в составе сложных электрических систем и соединены друг с другом разными способами, образуя при этом соединении составной (сложный) четырехполюсник.

Определение: *Сложным* называется четырехполюсник, который может быть образован в результате соединения между собой двух и более четырехполюсников. Параметры сложного четырехполюсника могут быть рассчитаны, если известны параметры каждого из составляющих четырехполюсников. В зависимости от схемы соединения четырехполюсников расчет параметров результирующего (эквивалентного) проводят, используя соответствующие уравнения в матричной форме.

Различают несколько видов соединений четырехполюсников:

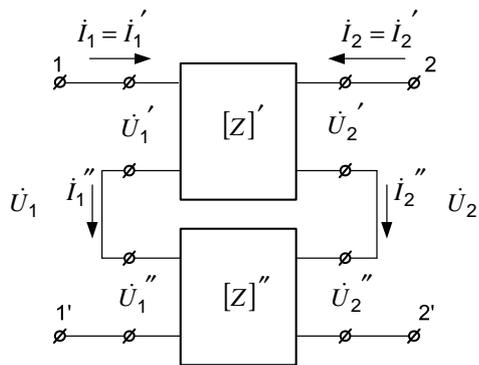
- последовательное;
- параллельное;
- последовательно-параллельное;
- параллельно-последовательное;
- каскадное.

1.3.1 Последовательное (или этапное) соединение

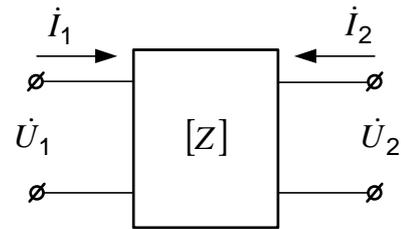
Вид соединений четырехполюсников, изображенный на рис. 1.6 является последовательным.

Для определения параметров последовательного соединения четырехполюсников удобно использовать $\|Z\|$ -параметры отдельных четырехполюсников. Входные и выходные напряжения и токи равны

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1; & \dot{U}_2 &= \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1; & \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2. \end{aligned}$$



а) общий вид соединения



$$[Z] = [Z_1] + [Z_2]$$

б) схема замещения результирующего ЧП

Рис. 1.6. Последовательное соединение четырехполюсников

Определим значения входных и выходных напряжений каждого из четырехполюсников

$$\begin{cases} \dot{U}'_1 = \dot{Z}'_{11} \cdot \dot{I}'_1 + \dot{Z}'_{12} \cdot \dot{I}'_2 \\ \dot{U}'_2 = \dot{Z}'_{21} \cdot \dot{I}'_1 + \dot{Z}'_{22} \cdot \dot{I}'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{U}''_1 = \dot{Z}''_{11} \cdot \dot{I}''_1 + \dot{Z}''_{12} \cdot \dot{I}''_2 \\ \dot{U}''_2 = \dot{Z}''_{21} \cdot \dot{I}''_1 + \dot{Z}''_{22} \cdot \dot{I}''_2 \end{cases}.$$

После подстановки уравнений систем получим систему уравнений результирующего четырехполюсника через $\|Z\|$ -параметры в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [Z] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [Z] = [Z_1] + [Z_2], \text{ т. е. при последовательном соединении } \|Z\|$$

параметры (рис. 6, б) общего четырехполюсника определяются как сумма соответствующих параметров отдельных четырехполюсников, входящих в соединение.

1.3.2 Параллельное соединение

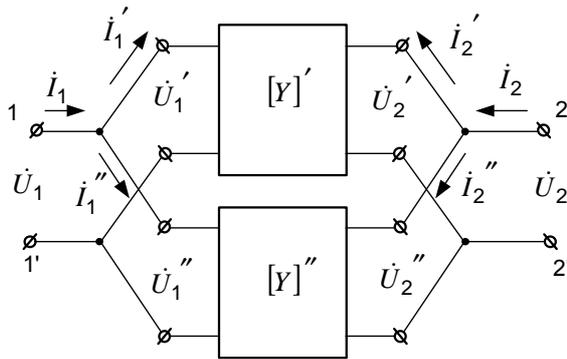
Параллельное соединение четырехполюсников приведено на рис. 1.7.

Для определения параметров схемы при параллельном соединении пользуются $\|Y\|$ -параметрами отдельных четырехполюсников.

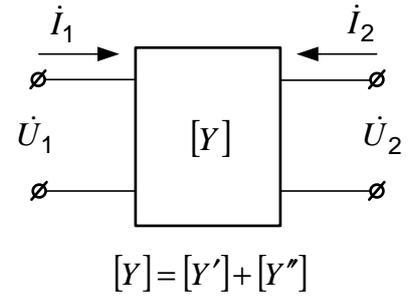
При таком соединении $\|Y\|$ -параметры общего четырехполюсника определяются как сумма соответствующих $\|Y\|$ -параметров четырехполюсников, входящих в соединение, т. е.

$$\begin{aligned} \dot{Y}'_{11} + \dot{Y}''_{11} &= \dot{Y}_{11}; & \dot{Y}'_{12} + \dot{Y}''_{12} &= \dot{Y}_{12}; \\ \dot{Y}'_{21} + \dot{Y}''_{21} &= \dot{Y}_{21}; & \dot{Y}'_{22} + \dot{Y}''_{22} &= \dot{Y}_{22}. \end{aligned}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}'_{11} & \dot{Y}'_{12} \\ \dot{Y}'_{21} & \dot{Y}'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Y}''_{11} & \dot{Y}''_{12} \\ \dot{Y}''_{21} & \dot{Y}''_{22} \end{bmatrix} = [Y'] + [Y''] .$$



а – общий вид соединения



б – схема замещения

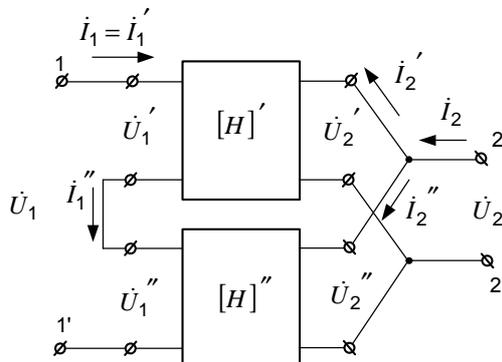
Рис. 1.7. Параллельное соединение четырехполюсников

1.3.3 Последовательно-параллельное соединение

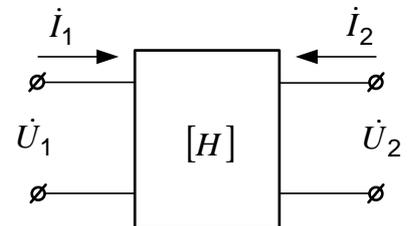
При последовательно-параллельном соединении (рис. 1.8.) для расчетов

используют параметры $[H]$: $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} = [H] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}$, где

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H''_{11} & H''_{12} \\ H''_{21} & H''_{22} \end{bmatrix} = [H'] + [H''] .$$



а– общий вид соединения;



б– схема замещения;

Рис. 1.8. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников

1.3.4 Параллельно-последовательное соединение

При параллельно-последовательном соединении (рис. 1.9.) для расчетов используют $|G|$ -параметры:

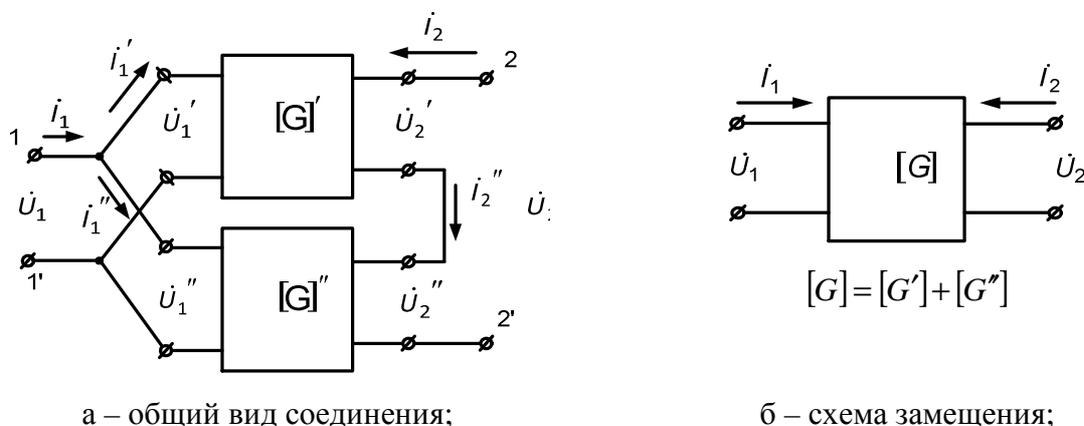


Рис. 1.9. Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [G] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}, \text{ где } [G] = \begin{bmatrix} \dot{G}_{11} & \dot{G}_{12} \\ \dot{G}_{21} & \dot{G}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{G}'_{11} & \dot{G}'_{12} \\ \dot{G}'_{21} & \dot{G}'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{G}''_{11} & \dot{G}''_{12} \\ \dot{G}''_{21} & \dot{G}''_{22} \end{bmatrix} = [G'] + [G''].$$

1.3.5 Каскадное соединение

При каскадном (цепочечном) соединении ЧП (рис. 1.10.) входные зажимы каждого последующего четырехполюсника подключаются к выходным зажимам предыдущего.

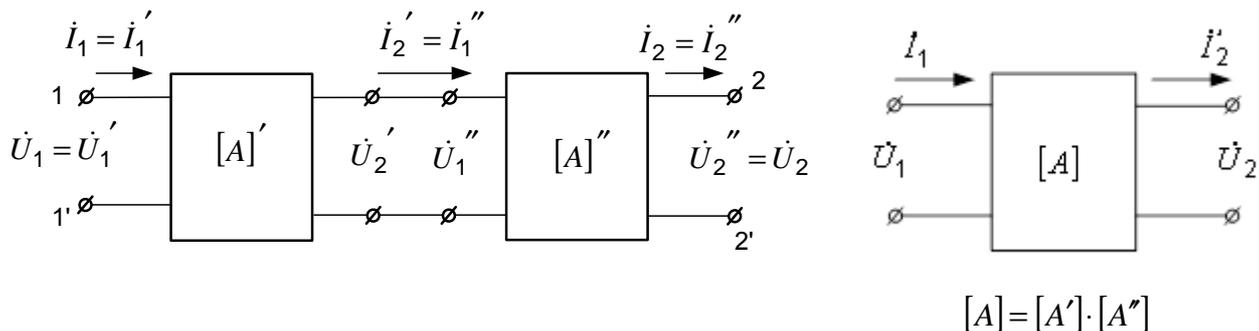
Каскадное соединение является наиболее часто встречающимся в цепях автоматики, связи и телемеханики.

Для определения параметров четырехполюсника, получившегося в результате каскадного соединения через параметры отдельных четырехполюсников наиболее

удобно пользоваться системой $\|A\|$ -параметров: $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}$, где матрица A -

параметров каскадного соединения в целом равна произведению матриц A - параметров его составляющих

$$[A] = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{12} \\ \dot{A}_{21} & \dot{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}'_{11} & \dot{A}'_{12} \\ \dot{A}'_{21} & \dot{A}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{A}''_{11} & \dot{A}''_{12} \\ \dot{A}''_{21} & \dot{A}''_{22} \end{bmatrix} = [A'] \cdot [A''].$$



а – общий вид соединения;

б – схема замещения

Рис. 1.10. Каскадное соединение четырехполюсников

Особенностью определения параметров каскадного соединения является то, что при расчете матрицы $\|A\|$ -параметров соединения менять местами множители $[A']$ и $[A'']$ нельзя.

Описанные выше соотношения для пяти видов соединений четырехполюсников справедливы только при регулярном их соединении.

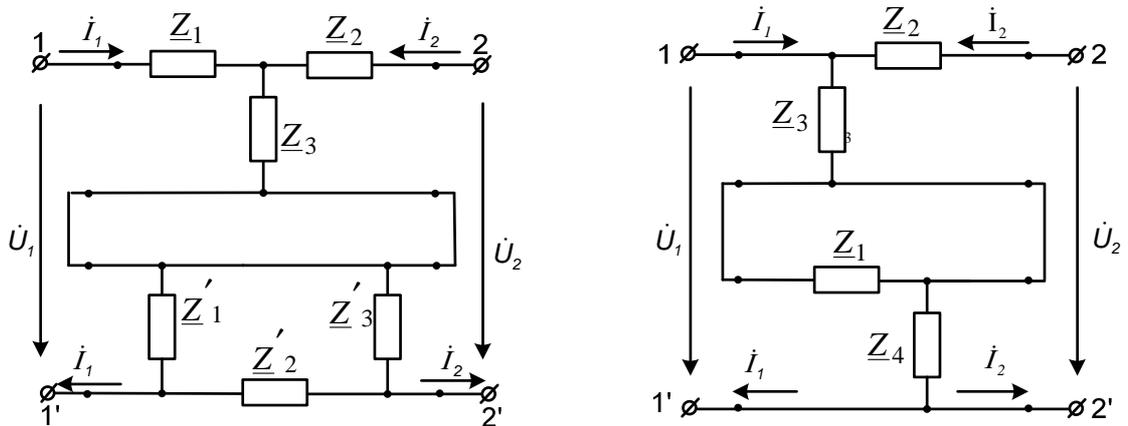
1.3.6 Регулярное соединение

Определение. Регулярное соединение ЧП – это такое соединение, при котором токи, протекающие через оба первичных зажима каждого четырехполюсника, будут равны и противоположны по направлению [3]. Аналогичное правило относится и к выходным зажимам.

Применительно к соединениям простейших схем Т- и П-образных четырехполюсников условие регулярности будет выполняться, если общий провод каждого из четырехполюсников в соединении не замыкает собой элементы другого четырехполюсника. Пример регулярного последовательного соединения Т-образного и П-образного ЧП изображен на рис. 1.11, а.

Но иногда при соединении ЧП условие регулярности не соблюдается, например, на рис. 1.11, б видно, что общий провод верхнего Г-образного четырехполюсника при последовательном соединении с другим ЧП шунтирует (закорачивает) сопротивление Z_1 нижнего Г-образного ЧП, тем самым, изменяя схему нижнего ЧП. Такое соединение является *нерегулярным*, и для

него не применимы соотношения параметров четырехполюсников, описанные выше.



а – регулярное последовательное
(схемы Т и П);

б – нерегулярное последовательное
(схемы Г);

Рис. 1.11. Примеры соединения четырехполюсников

Примерами регулярных соединений четырехполюсников являются:

- 1) каскадное соединение любых четырехполюсников;
- 2) параллельное соединение уравновешенных четырехполюсников. В уравновешенных четырехполюсниках схемы одинаковые, следовательно, сопротивления пропорциональны;
- 3) последовательное соединение четырехполюсников для Т- и П-образных схем с общими закороченными выводами;
- 4) любое соединение четырехполюсников, у одного из которых на входе или выходе присутствует трансформатор;
- 5) любое соединение четырехполюсников, один из которых разорван, т. е. его входные и выходные зажимы электрически не связаны между собой.

1.4 Характеристические параметры пассивных четырехполюсников

1.4.1 Режим согласованного включения четырехполюсников

Наряду с рассмотренными ранее первичными параметрами (коэффициентами в системах уравнений) четырехполюсника при решении

многих задач пользуются *характеристическими* (вторичными) параметрами четырехполюсника.

Определение: *Характеристические параметры* – это параметры, которые определяются в режиме полного согласования. К характеристическим параметрам относятся:

- характеристические сопротивления;
- постоянная передачи (мера передачи);
- коэффициент трансформации.

Известно, что генератор с внутренним сопротивлением $\dot{Z}_Г$ отдает максимальную мощность в нагрузку $\dot{Z}_Н$ при условии $\dot{Z}_Г = \dot{Z}_Н$. Если между генератором и нагрузкой находится четырехполюсник (рис. 1.12), то для передачи максимальной мощности от генератора в четырехполюсник необходимо согласовать входное сопротивление четырехполюсника $\dot{Z}_{ВХ1}$ с внутренним сопротивлением генератора.

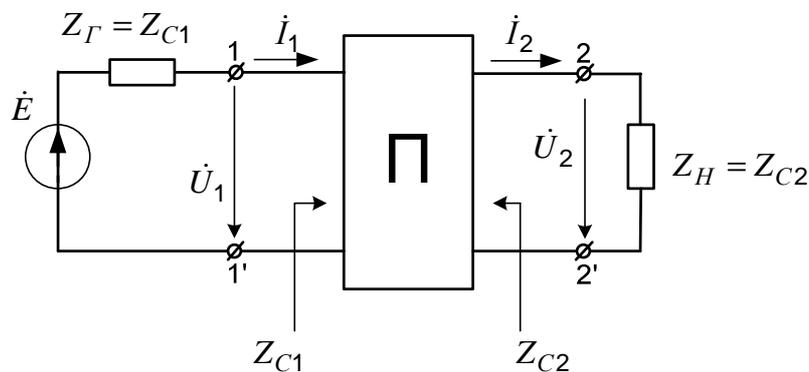


Рис. 1.12. Четырехполюсник, включенный согласованно с генератором и нагрузкой

Это значит, что необходимо выполнить условие $\dot{Z}_Г = \dot{Z}_{ВХ1}$, а для передачи максимальной мощности от четырехполюсника в нагрузку согласовать выходное сопротивление четырехполюсника с сопротивлением нагрузки, т. е. выполнить условие $\dot{Z}_{ВХ2}^* = \dot{Z}_Н$.

Определение. Режим работы четырехполюсника, когда $\dot{Z}_Г = \dot{Z}_{ВХ1}$ и $\dot{Z}_{ВХ2}^* = \dot{Z}_Н$ называется *режимом согласованного включения*.

Этот режим характеризуется отсутствием отраженных сигналов, распространяющихся от нагрузки к генератору

1.4.2 Определение характеристических параметров четырехполюсника через А-параметры

Определение. Сопротивления со стороны зажимов 1-1' и 2-2', определяемые $\|A\|$ - параметрами и описываемые выражением:

$$\dot{Z}_{\text{BX1}} = \frac{A_{11}\dot{Z}_H + A_{12}}{A_{21}\dot{Z}_H + A_{22}} = \dot{Z}_\Gamma; \quad \dot{Z}_{\text{BX2}} = \frac{A_{22}\dot{Z}_\Gamma + A_{12}}{A_{21}\dot{Z}_\Gamma + A_{11}} = \dot{Z}_H. \quad (1.5)$$

называются *характеристическими сопротивлениями* четырехполюсника и обозначаются \dot{Z}_{C1} и \dot{Z}_{C2} . Учитывая, что $\dot{Z}_{\text{BX1}} = \dot{Z}_\Gamma = \dot{Z}_{C1}$ и $\dot{Z}_{\text{BX2}} = \dot{Z}_H = \dot{Z}_{C2}$, получим

$$\dot{Z}_{C1} = \frac{A_{11}\dot{Z}_{C2} + A_{12}}{A_{21}\dot{Z}_{C2} + A_{22}}; \quad \dot{Z}_{C2} = \frac{A_{22}\dot{Z}_{C1} + A_{12}}{A_{21}\dot{Z}_{C1} + A_{11}}. \quad (1.6)$$

Определение. *Характеристическое сопротивление* \dot{Z}_C определяется как среднее геометрическое из входных сопротивлений при коротком замыкании на выходе и холостом ходе на выходе:

$$\dot{Z}_C = \sqrt{\dot{Z}_{\text{BXK3}} \cdot \dot{Z}_{\text{BXXX}}}. \quad (1.7)$$

Решив совместно последние уравнения, найдем характеристические сопротивления через А-параметры:

$$\dot{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad \dot{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}. \quad (1.8)$$

Свойство характеристического сопротивления: если сопротивление нагрузки с одной из сторон четырехполюсника равно характеристическому сопротивлению с той же стороны, то входное сопротивление с другой стороны становится характеристическим, т.е.:

$$\dot{Z}_H = \dot{Z}_{C2}, \text{ то } \dot{Z}_{\text{BX}} = \dot{Z}_\Gamma = \dot{Z}_{C1} \text{ и, наоборот.}$$

При активных характеристических сопротивлениях $\dot{Z}_{C1} = R_{C1}, \dot{Z}_{C2} = R_{C2}$ в режиме согласованной нагрузки генератор отдает четырехполюснику максимальную мощность, а нагрузка получает максимальную мощность от четырехполюсника.

Для получения максимальной мощности при реактивных характеристических сопротивлениях необходимо равенство сопротивлений нагрузки и генератора соответствующим сопряженным комплексам характеристических сопротивлений:

$$\dot{Z}_{C1}^* = \dot{Z}_Г; \dot{Z}_{C2}^* = \dot{Z}_Н.$$

Определение. Величина, определяющая соотношение характеристических сопротивлений четырехполюсника:

$$\sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_{C2}}} = n_T, \quad (1.9)$$

называется *коэффициентом трансформации* четырехполюсника.

Входное сопротивление согласованного четырехполюсника $\dot{Z}_{ВХ1} = \dot{Z}_{C1} = n_T^2 \dot{Z}_{C2} = n_T^2 \dot{Z}_Н$, т. е. согласованный четырехполюсник трансформирует сопротивление нагрузки в n_T^2 раз.

Определение. *Характеристической постоянной передачи* \dot{g}_C называется комплексная величина, показывающая в логарифмических единицах соотношение мощностей сигнала на входе и выходе согласованного четырехполюсника, а также фазовый сдвиг этих сигналов:

$$\dot{g}_C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right) = a_C + jb_C, \quad (1.10)$$

при $\dot{Z}_Г = \dot{Z}_{C1}$ и $\dot{Z}_Н = \dot{Z}_{C2}$, т.е. значения \dot{g}_C, a_C, b_C определяются в режиме полного согласования и индекс «С» подчеркивает этот факт.

Определение. Величина a_C , представляет собой *собственное затухание* (собственное ослабление) четырехполюсника

$$a_c = \left| \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right) \right|. \quad (1.11)$$

Она показывает в логарифмических единицах изменение по модулю полной мощности сигнала при передаче его через согласованно включенный четырехполюсник (см. рис. 1.12). Выражают собственное ослабление в неперах (Неп) или децибелах (дБ).

Ослаблению в 1 Неп соответствует уменьшение действующего значения напряжения или тока в $e = 2,7172$ раза.

На практике для измерения ослабления широко используют децибелы (дБ)

$$a_c = 10 \ln \left| \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right| = 20 \ln \left| \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right| = 20 \ln \left| \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|, \text{ при } \dot{Z}_\Gamma = \dot{Z}_{C1} \text{ и } \dot{Z}_H = \dot{Z}_{C2}. \text{ Для перехода от}$$

одних единиц ослабления к другим можно использовать соотношение:

$$1 \text{ Неп} = 8.686 \text{ дБ} \text{ и } 1 \text{ дБ} = 0.115 \text{ Неп}, 20 \text{ дБ} = 2.3 \text{ Неп}$$

Следует запомнить, что уменьшению мощности в 2 раза (уменьшению напряжения или тока в $\sqrt{2}$ раз) соответствует ослабление в 3 дБ, а уменьшению мощности в 10 раз – ослабление в 10 дБ.

Определение. Величина b_c - (мнимая составляющая постоянной передачи) называется *характеристической постоянной фазы*. Она определяет фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами и выражается в радианах

$$b_c = \frac{1}{2} [(\varphi_{U1} + \varphi_{I1}) - (\varphi_{U2} + \varphi_{I2})]. \quad (1.12)$$

Характеристическое ослабление симметричного четырехполюсника, выраженное в дБ, определяется десятичным логарифмом отношения полных мощностей на входе и на выходе четырехполюсника $g_c = \ln \left| \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right| = \ln \left| \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|$ или

$e^{-g_c} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$. Смысловое значение α_c и β_c в симметричном четырехполюснике

видно из соотношения $e^{-\alpha_c} \cdot e^{-j\beta_c} = |\dot{K}_{Uc}| \cdot e^{j\varphi_{K_{Uc}}}$, где $e^{-\alpha_c} = \left| \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right| = |\dot{K}_{Uc}|$,

$b_c = -\varphi_{K_{Uc}} = (\varphi_{\dot{U}_2} - \varphi_{\dot{U}_1})$. Кроме того, для электрически симметричных

четырёхполюсников выполняется соотношение $\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C2} = \dot{Z}_C = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}$, т.к. внутренние параметры равны $A_{11} = A_{22}$.

Нахождение собственных параметров четырёхполюсников или коэффициентов четырёхполюсника в любой форме позволяет определить, являются ли два четырёхполюсника с различными внутренними схемами электрически эквивалентными.

Определение. Два четырёхполюсника считаются эквивалентными между собой, если для них выполняется одно из следующих условий [4]:

- параметры одной из форм основных уравнений обоих четырёхполюсников равны;
- характеристические параметры четырёхполюсников равны;
- параметры холостого хода и короткого замыкания четырёхполюсника равны.

1.4.3 Каскадное соединение характеристически согласованных четырёхполюсников

В случае каскадного согласованного соединения четырёхполюсников (рис. 1.13) суммарная характеристическая постоянная передачи определяется как:

$$e^{-g_c} = \frac{\dot{U}_4}{\dot{U}_1} \cdot \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}^{(1)}}{\dot{Z}_{C2}^{(3)}}} = e^{-\dot{g}_c^{(1)}} \cdot e^{-\dot{g}_c^{(2)}} \cdot e^{-\dot{g}_c^{(3)}}. \quad (1.13)$$

$$\text{т.е. } \dot{g}_{\text{общ}} = \sum_i \dot{g}_c^{(i)} = \dot{g}_c^{(1)} + \dot{g}_c^{(2)} + \dot{g}_c^{(3)} + \dots + \dot{g}_c^{(i)}$$

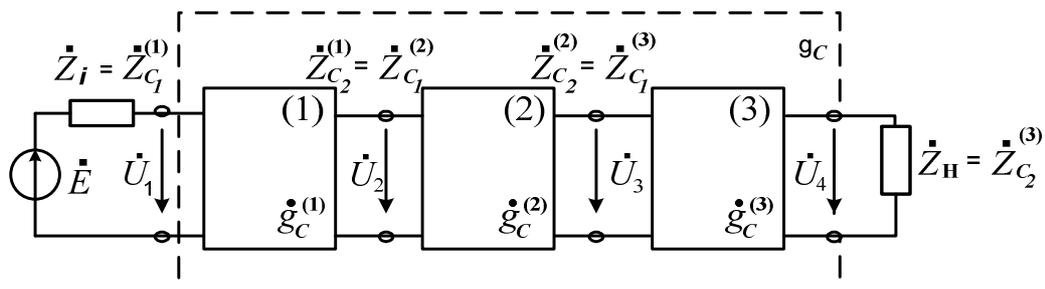


Рис. 1.13. Каскадное соединение четырёхполюсников

При этом \dot{K}_{U_c} всей схемы с каскадным соединением равняется:

$$\dot{K}_{U_c} = \dot{K}_{U_c}^{(1)} \cdot \dot{K}_{U_c}^{(2)} \cdot \dot{K}_{U_c}^{(3)}. \quad (1.14)$$

Для определения характеристической постоянной передачи через параметры четырехполюсника в режиме согласованной нагрузки удобно пользоваться формулой, связывающей характеристические параметры с системой $\|A\|$ - параметров:

$$\dot{g}_c = \ln\left(\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}\right) = \ln\left|\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}\right| + j \arg\left[\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}\right] = a_c + jb_c. \quad (1.15)$$

При изменении направления передачи сигнала в уравнениях $\|A\|$ - параметров меняются местами параметры \dot{A}_{11} и \dot{A}_{22} . Поэтому характеристическая постоянная передачи при смене направления сигнала остается неизменной.

Физически собственное ослабление характеризует изменение амплитуды или действующего значения тока и напряжения при прохождении сигнала через четырехполюсник.

$\|A\|$ -параметры однозначно выражаются через характеристические:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_{C2}}} \cdot ch\dot{g}_c, & \dot{A}_{12} &= \sqrt{\dot{Z}_{C1} \cdot \dot{Z}_{C2}} \cdot sh\dot{g}_c \\ \dot{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\dot{Z}_{C1} \cdot \dot{Z}_{C2}}} sh\dot{g}_c, & \dot{A}_{22} &= \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C2}}{\dot{Z}_{C1}}} \cdot ch\dot{g}_c \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

ПРИМЕЧАНИЕ: Можно выделить три способа определения характеристического затухания и фазовой постоянной:

1) через первичные (внутренние) параметры:

$$e^{g_c} = \sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}. \quad (1.17a)$$

2) в условиях полного согласования четырехполюсника:

$$e^{-g_c} = K_{UC} \cdot \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \quad (1.17б)$$

3) с помощью четырехполюсника в режиме холостого хода:

$$A_{11} = \frac{1}{K_{U_{XX}}} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \cdot chg_c, \quad (1.17в)$$

$$где chg_c = cha_c \cdot cosb_c + jsha_c \cdot sinb_c$$

1.5. Рабочие параметры четырехполюсника

При работе четырехполюсника в составе сложной системы не всегда удается обеспечить его согласование с сопротивлением нагрузки и сопротивлением генератора. Для характеристики работы четырехполюсника (передачи сигнала) при любых значениях сопротивлений нагрузки и генератора недостаточно характеристических параметров. Поэтому для описания работы четырехполюсника в таком режиме вводят понятие *рабочих* (эксплуатационных) параметров: входных сопротивлений \dot{Z}_{BX1} , \dot{Z}_{BX2} со стороны зажимов 1–1' и 2–2' соответственно и рабочей постоянной передачи \dot{g}_c . Частным случаем рабочего режима четырехполюсника является согласованный его режим.

1.5.1 Входные сопротивления

Определение. *Входное сопротивление* представляет собой то сопротивление, которое является нагрузкой для генератора, подключенного к четырехполюснику. Определить его можно разными способами.

Первый способ. Определение входного сопротивления с помощью $\|A\|$ -

параметров $\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}}$ – для прямого направления передачи сигнала.

$\dot{Z}_{BX2} = \frac{\dot{A}_{22}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{11}}$ – при изменении направления передачи энергии (меняются местами \dot{A}_{11} и \dot{A}_{22}).

Второй способ. Определение входного сопротивления с помощью сопротивлений короткого замыкания и холостого хода:

$$\dot{Z}_{\text{BX1}} = \dot{Z}_{\text{1XX}} \frac{\dot{Z}_{\text{H}} + \dot{Z}_{\text{2КЗ}}}{\dot{Z}_{\text{H}} + \dot{Z}_{\text{1XX}}}. \quad (1.18)$$

Третий способ. Входное сопротивление можно выразить, используя характеристические параметры четырехполосника:

$$\dot{Z}_{\text{BX1}} = \dot{Z}_{\text{C1}} \text{cth} \dot{g}_{\text{C}} \frac{\dot{Z}_{\text{H}} + \dot{Z}_{\text{C2}} \text{th} \dot{g}_{\text{C}}}{\dot{Z}_{\text{H}} + \dot{Z}_{\text{C2}} \text{cth} \dot{g}_{\text{C}}}. \quad (1.19)$$

Если сопротивление генератора не равно характеристическому сопротивлению на входе $\dot{Z}_{\text{Г}} \neq \dot{Z}_{\text{C1}}$, то имеет место несогласованность на входе.

Если сопротивление нагрузки не равно характеристическому сопротивлению на выходе $\dot{Z}_{\text{C2}} \neq \dot{Z}_{\text{H}}$, то присутствует несогласованность на выходе.

Определение. Относительная величина несогласованности определяется коэффициентами несогласованности на входе $\dot{p}_{\text{Г}}$ и выходе \dot{p}_{H} :

$$\dot{p}_{\text{Г}} = \frac{(\dot{Z}_{\text{Г}} - \dot{Z}_{\text{C1}})}{(\dot{Z}_{\text{Г}} + \dot{Z}_{\text{C1}})}; \quad \dot{p}_{\text{H}} = \frac{(\dot{Z}_{\text{H}} - \dot{Z}_{\text{C2}})}{(\dot{Z}_{\text{H}} + \dot{Z}_{\text{C2}})}. \quad (1.20)$$

Если ввести понятие *погрешность входного сопротивления*, как относительную величину отклонения \dot{Z}_{BX1} от \dot{Z}_{C1} , которая определяется по формуле

$$\dot{p}_{\text{H}} e^{-2\dot{g}_{\text{C}}} = \frac{(\dot{Z}_{\text{BX1}} - \dot{Z}_{\text{C1}})}{(\dot{Z}_{\text{BX1}} + \dot{Z}_{\text{C1}})}, \quad (1.21)$$

то входное сопротивление можно определить через коэффициент несогласованности

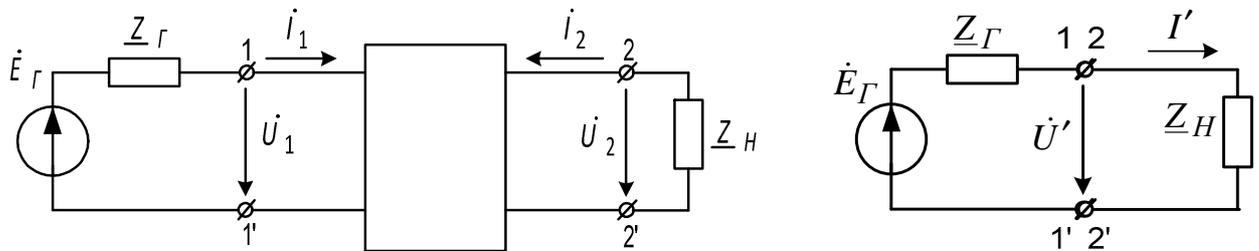
$$\dot{Z}_{\text{BX1}} = \dot{Z}_{\text{C1}} \frac{1 + \dot{p}_{\text{H}} e^{-2\dot{g}_{\text{C}}}}{1 - \dot{p}_{\text{H}} e^{-2\dot{g}_{\text{C}}}}. \quad (1.22)$$

1.5.2 Рабочая постоянная передачи

Определение. Рабочей постоянной передачи при включении четырехполюсника между нагрузкой с сопротивлением \dot{Z}_H и генератором с ЭДС $\dot{E}_Г$ с сопротивлением генератора $\dot{Z}_Г$ называется величина, определяемая соотношением

$$\dot{g}_p = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}' \dot{I}'}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tilde{S}'_0}{\tilde{S}_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{E}_Г^2 / 4\dot{Z}_Г}{\dot{I}_2^2 \dot{Z}_H} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{E}_Г^2}{4\dot{U}_2^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{Z}_H}{\dot{Z}_Г} \right). \quad (1.23)$$

Здесь \dot{U}' и \dot{I}' относятся к схеме (рис. 1.14, б), в которой сопротивление нагрузки берется равным сопротивлению генератора и подключается непосредственно к источнику.



а – включение генератора и нагрузки через четырехполюсник;

б – прямое соединение генератора и нагрузки

Рис. 1.14. К определению рабочей постоянной передачи

Напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{i}_2 относятся к схеме (рис. 1.14, а), в которой нагрузка подключается к источнику ЭДС через четырехполюсник.

Определение. Рабочую постоянную фазы можно определить с учетом $\dot{Z}_Г$ и \dot{Z}_H :

$$\dot{g}_p = \dot{g} + \ln \left(\frac{\dot{Z}_Г + \dot{Z}_{C1}}{2\sqrt{\dot{Z}_Г \dot{Z}_{C1}}} \right) + \ln \left(\frac{\dot{Z}_H + \dot{Z}_{C2}}{2\sqrt{\dot{Z}_H \dot{Z}_{C2}}} \right) + \ln(1 - \dot{p}_Г \dot{p}_H e^{-2\dot{g}}) = a_p + j b_p, \quad (1.24)$$

где b_p - постоянная фазы.

Определение. Для оценки влияния условий согласования четырехполюсника с генератором и нагрузкой на передачу сигнала вводится

понятие *рабочего затухания (рабочего ослабления)* четырехполюсника, Неп, которое определяется выражением (1.26)

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tilde{S}'_0}{\tilde{S}_2} \right|, \quad (1.25)$$

где $\tilde{S}'_0 = \frac{E_\Gamma^2}{4\dot{Z}_\Gamma}$ – максимальная мощность, которую генератор отдает в нагрузку,

согласованную с его внутренним сопротивлением;

$\tilde{S}_2 = I_2^2 \dot{Z}_H$ – мощность, выделяемая в нагрузке, подключенной к выходу четырехполюсника.

Рабочее ослабление можно определить по одной из формул [4]:

$$a_p = \ln \frac{\dot{E}_\Gamma}{2\dot{U}_2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{Z}_H}{\dot{Z}_\Gamma} \right|; \quad (1.26)$$

$$a_p = a_c + \ln \left| \frac{\dot{Z}_\Gamma + \dot{Z}_{C1}}{2\sqrt{\dot{Z}_\Gamma \dot{Z}_{C1}}} \right| + \ln \left| \frac{\dot{Z}_H + \dot{Z}_{C2}}{2\sqrt{\dot{Z}_H \dot{Z}_{C2}}} \right| + \ln |1 - \dot{p}_\Gamma \dot{p}_{HY}^{-2\dot{g}_c}| = a_c + a_1 + a_2 + a_3, \quad (1.27)$$

где a_c – ослабление при согласованном режиме работы четырехполюсника;

a_1 – ослабление вследствие несогласованности на входе четырехполюсника;

a_2 – ослабление вследствие несогласованности на выходе четырехполюсника;

a_3 – ослабление вследствие несогласованности одновременно на входе и выходе.

Выводы.

- Рабочее ослабление при активных сопротивлениях генератора, нагрузки и характеристических сопротивлениях не может быть меньше характеристического ослабления. При реактивных сопротивлениях канала логарифмические составляющие в некоторых случаях могут быть отрицательными и рабочее ослабление может быть меньше характеристического. Это означает, что генератор в согласованном режиме при реактивных сопротивлениях отдает мощность меньше максимально возможной.

- Рабочее ослабление является наиболее общим параметром, характеризующим изменение величины сигнала при прохождении его через несогласованный четырехполюсник.

1.6 Четырехполюсники с обратной связью

Последовательно-параллельное соединение двух четырехполюсников представляет собой один из основных видов цепи с обратной связью.

Определение. Соединение двух четырехполюсников, при котором напряжение на выходе воздействует на входные напряжения основного устройства, называется *цепью с обратной связью*.

Пусть некоторое устройство, которое назовем основным, представляет собой четырехполюсник с передаточной функцией $\dot{K}'(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$. Если выходное напряжение \dot{U}_2 подвести к зажимам другого четырехполюсника, называемого устройством обратной связи, и включить его противоположные зажимы последовательно с входными зажимами основного устройства, то получится система с обратной связью по напряжению.

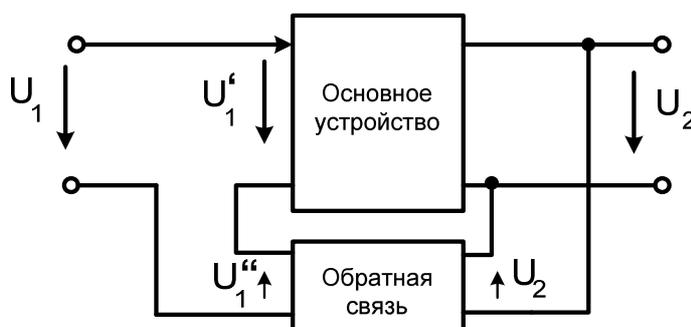


Рис. 1.15. Цепь с обратной связью.

Обозначим передаточную функцию устройства обратной связи через $\dot{K}''(j\omega) = \frac{\dot{U}_1''}{\dot{U}_2}$. Очевидно, $\dot{U}_1 = \dot{U}_1' - \dot{U}_1''$. Следовательно, передаточная функция всей

системы $\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1' - \dot{U}_1''}$ или, если разделить числитель и знаменатель на

$$\dot{U}_1', \quad \dot{K} = \frac{K'}{1 - K'K''}.$$

Если поменять полярность одной из пар зажимов устройства обратной связи, то в знаменателе вместо знака минус получится знак плюс.

Определение. Обратная связь, при которой напряжение, пропорциональное выходному напряжению, добавляется к входному напряжению системы так, что $|\dot{K}| > |\dot{K}'|$ называется *положительной*; если же $|\dot{K}| < |\dot{K}'|$, то обратная связь называется *отрицательной*.

1.7 Активные четырехполюсники

Определение. *Активными* четырехполюсниками являются четырехполюсники, содержащие зависимые или независимые источники.

У пассивных четырехполюсных цепей выполняется принцип взаимности (обратимости), т. е. указанная функция передачи цепи в прямом и обратном направлениях одинакова. Однако на практике преобладают цепи преимущественно с односторонним направлением передачи сигналов.

Это так называемые необратимые цепи, у которых принцип обратимости не выполняется, а схема замещения содержит хотя бы один необратимый элемент, т. е. зависимый источник (ЗИ). Практически все активные четырехполюсники, содержащие источники, являются необратимыми.

По принципу действия активные четырехполюсники можно разделить на две категории: автономные активные и неавтономные активные ЧП.

1.7.1 Неавтономные активные четырехполюсники

Определение. *Неавтономными* четырехполюсниками называются такие ЧП, при замыкании выводов которых токи, протекающие через эти выводы, равны нулю, а при отключении всех выводов от внешних цепей (при холостом ходе) напряжения на этих выводах будут иметь также нулевое значение.

К неавтономным относятся все пассивные четырехполюсники, а также те активные четырехполюсники, которые не содержат неуправляемых источников тока или напряжения.

Определение. *Управляемым (зависимым) источником* считается четырехполюсный элемент, содержащий источник напряжения (э.д.с.) или тока, который управляется напряжением между какими-либо выводами цепи или током в какой-либо ветви.

Графически зависимые источники, в отличие от независимых, изображают «ромбиком». Различают четыре типа управляемых источников, у которых выходная величина не влияет на входную.

1. Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ), – это ЧП, характеризующийся напряжением на выходных зажимах, зависящим от тока ветви, которая считается входной (рис. 1.16, а). Матрица Z-параметров для этого ЧП имеет вид:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{Z}_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

т. е. условие обратимости ЧП не выполняется.

2. Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), – это ЧП (рис. 1.16, б), напряжение на выходных зажимах которого, пропорционально напряжению на входных его зажимах.

3. Источник тока, управляемый током (ИТУТ), – это ЧП (рис. 1.16, в), у которого выходной ток пропорционален входному.

4. Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), – это ЧП (рис. 1.16, г), для которого выходной ток является функцией напряжения на входных выводах.

Управляемые источники обладают следующими свойствами:

– необратимостью;

– нулевой входной мощностью $p_1(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) = 0$;

– способностью в некоторые моменты времени генерировать энергию, например, в схеме ИТУН (рис. 1.16, г):

$$p_{\Sigma}(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) = 0 + u_H (-i_H) = -R_H i_H^2 < 0.$$

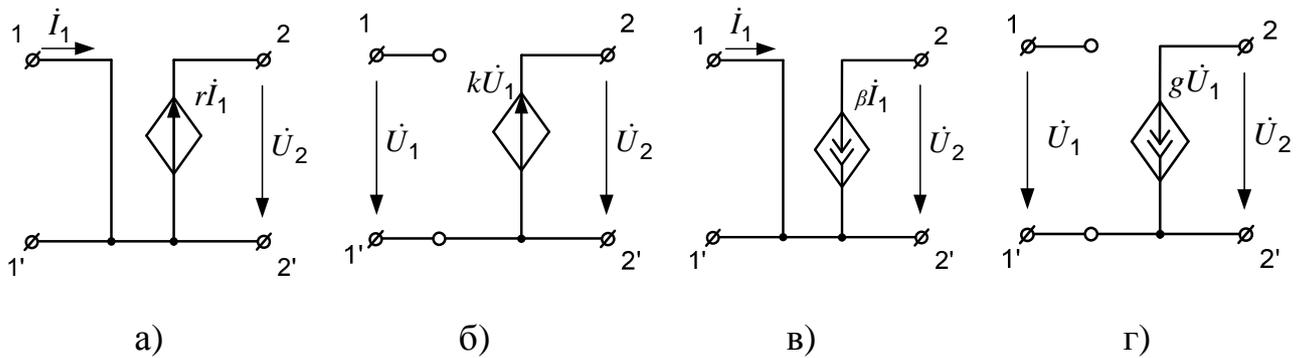


Рис. 1.16. Схемы замещения управляемых источников:
a – ИНУТ; *б* – ИНУН; *в* – ИТУТ; *г* – ИТУН

Следует также отметить, что для четырехполюсников с зависимыми источниками некоторых форм записи параметров не существует.

У неавтономных ЧП, которые являются необратимыми, независимы все четыре параметра, поэтому эквивалентная схема замещения неавтономного ЧП должна содержать 4 элемента, хотя бы один из которых – зависимый источник.

Широкое распространение получили Т-образные и П-образные канонические схемы замещения неавтономных ЧП (рис. 1.17).

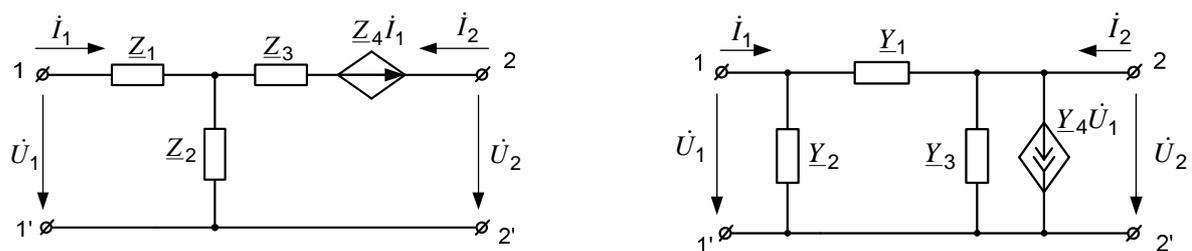
Параметры элементов Т-образной схемы замещения связаны с Z-параметрами ЧП соотношениями

$$Z_1 = \dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{12}; \quad Z_2 = \dot{Z}_{12}; \quad Z_3 = \dot{Z}_{22} - \dot{Z}_{12}; \quad Z_4 = \dot{Z}_{21} - \dot{Z}_{12}.$$

Параметры элементов П-образной схемы замещения связаны с Y-параметрами ЧП аналогично

$$Y_1 = \dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12}; \quad Y_2 = -\dot{Y}_{12}; \quad Y_3 = \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{12}; \quad Y_4 = \dot{Y}_{21} - \dot{Y}_{12}.$$

Полученные схемы замещения и соотношения для них справедливы и для пассивных неавтономных ЧП, для которых согласно условию взаимности $\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}$ и $\dot{Y}_{21} = \dot{Y}_{12}$, и значения э.д.с. и тока управляемых источников равны нулю.



а)

б)

Рис. 1.17. Схемы замещения неавтономных четырехполюсников: а – Т-образная; б – П-образная

При решении ряда практических задач исходя из удобства применения пользуются схемами замещения, которые содержат несколько управляемых источников (рис. 1.18).

Указанные схемы могут быть использованы и для описания пассивных ЧП, однако для пассивных ЧП проще использовать Т- или П-образные эквивалентные схемы замещения с тремя элементами.

Расчет схем неавтономных активных четырехполюсников состоит в следующем: сначала необратимый четырехполюсник представляют эквивалентной схемой с зависимыми источниками, далее применяют любой метод расчета, уравнения используемого метода дополняют уравнениями для зависимых источников.

Например, порядок расчета цепей с необратимыми ЧП методом контурных токов выглядит следующим образом.

1. Используя уравнения Z-формы необратимого ЧП, заменяем его эквивалентной схемой с двумя зависимыми источниками типа ИНУТ (рис. 1.18, а).

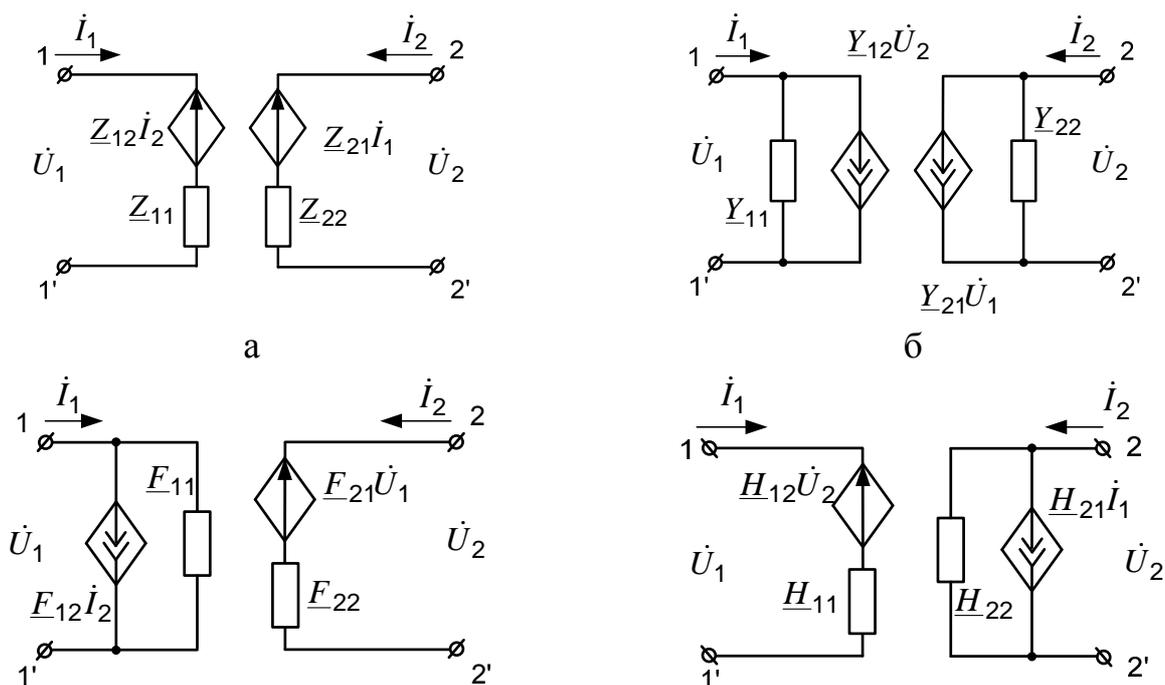


Рис. 1.18. Схемы замещения неавтономных ЧП с двумя источниками: a – через Z -параметры; b – через Y -параметры; c – через F -параметры; d – через H -параметры

Если Z -параметры необратимого ЧП неизвестны, их необходимо определить, используя известные параметры ЧП или схему замещения ЧП.

2. Записываем уравнения по методу контурных токов для полученной схемы, при этом напряжения зависимых источников оставляем в левой части уравнений, используя для них обычное правило знаков второго закона Кирхгофа. Следует отметить, что на практике выгоднее не использовать матричную форму записи уравнений метода контурных токов. Кроме того, при расчете целесообразно выбрать независимые контуры так, чтобы токи ЧП были контурными, и присваивать им первые номера.

3. Выражаем напряжения зависимых источников $\dot{U}_{ЗИ}$ через токи четырехполюсника $\dot{I}_{ЧП}$, а токи четырехполюсника – через контурные токи \dot{I}_K ; получаем уравнения вида $[\dot{U}_{ЗИ}] = [Z_B] \cdot [\dot{I}_K]$, подставляя которые в записанное уравнение контурных токов, находим обобщенные уравнения формализованного метода контурных токов.

Примером активного неавтономного четырехполюсника может служить операционный усилитель.

Определение. *Операционный усилитель (ОУ)* – это устройство, имеющее дифференциальный вход с очень большим входным сопротивлением, малое выходное сопротивление и высокий коэффициент усиления.

Обозначение и схема замещения ОУ на линейном участке его работы представлена на рис. 1.19. Э.д.с. управляемого источника в схеме усилителя

$$\dot{E} = -k_B \dot{U}_{ВХ} = k_B (\dot{U}_3 - \dot{U}_1), \quad (1.32)$$

где k_B – внутренний коэффициент усиления, достигающий значений порядка 10^5 . Входное сопротивление $R_{ВХ}$ больше выходного $R_{ВЫХ}$ на

несколько порядков. У идеального ОУ R_{BX} считают бесконечно большим, $R_{ВЫХ}$ – равным нулю и коэффициент усиления $k_B \rightarrow \infty$.

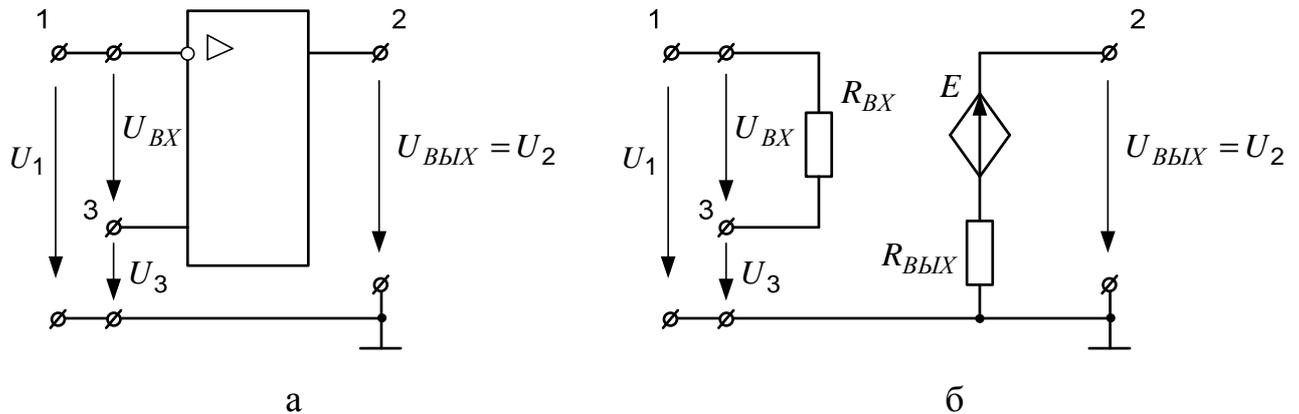


Рис. 1.19. Операционный усилитель: а – обозначение ОУ на схеме; б – схема замещения

Операционные усилители изготавливаются в виде интегральных микросхем и находят применение в электронных устройствах различного назначения, в частности для реализации управляемых источников, для выполнения математических операций, при создании активных фильтров и т. д.

К активным невзаимным четырехполюсникам частного вида относят также гиратор (инвертор сопротивления) и конвертор сопротивления.

Определение. *Гиратор* представляет собой необратимый четырехполюсник, входное сопротивление которого обратно сопротивлению нагрузки, подключенной к его выходу.

Определение. *Конвертор сопротивления* – это четырехполюсник, входное сопротивление которого пропорционально сопротивлению нагрузки. Подробно схемы замещения и свойства этих элементов описаны в [2, 3, 7].

1.7.2 Автономные активные четырехполюсники

Определение. У автономных активных четырехполюсников могут быть напряжения и токи на первичных и вторичных выводах при отсутствии внешних источников, подключенных к первичным, вторичным или тем и другим выводам. То есть автономные четырехполюсники содержат неуправляемые источники.

Для того чтобы охарактеризовать автономный активный ЧП, каждая из систем уравнений четырехполюсника должна быть дополнена слагаемыми, учитывающими наличие независимых источников у четырехполюсника, например, для системы A -параметров

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2 + \dot{N} \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2 + \dot{M} \end{cases} \quad (1.33)$$

В частности для режима КЗ на первичных и вторичных зажимах ЧП $\dot{U}_1 = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$, из системы (1.33) коэффициенты равны

$$\dot{M} = -\dot{A}_{12}\dot{I}_{2К}, \quad \dot{N} = \dot{I}_{1К} - \dot{A}_{22}\dot{I}_{2К} \quad (1.34)$$

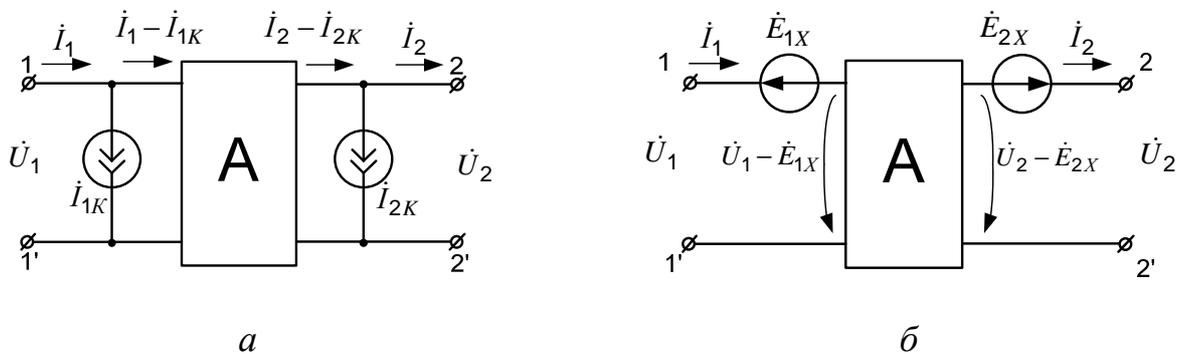


Рис. 1.20. Схемы замещения автономных активных четырехполюсников:
a – полученная из режима КЗ, *б* – полученная из режима ХХ

Следовательно, автономный активный ЧП можно заменить неавтономным с теми же коэффициентами \dot{A}_{11} , \dot{A}_{12} , \dot{A}_{21} , \dot{A}_{22} с двумя дополнительными источниками тока (рис. 1.20, *a*).

Аналогично из режима холостого хода можно вывести, что автономный активный ЧП может быть заменен неавтономным, с включенными дополнительными источниками напряжения, равными напряжениям холостого хода (рис. 1.20, *б*).

Выводы.

- Активные четырехполюсники с независимыми источниками в общем случае характеризуются шестью параметрами. Четыре из них представляют собой первичные параметры неавтономного четырехполюсника, получающегося из данного автономного путем

выключения всех независимых источников, а два параметра являются либо напряжениями XX , либо токами KZ , измеряемыми при одновременном размыкании или одновременном закорачивании внешних по отношению к автономному ЧП ветвей.

1.9 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение четырехполюсника;
- 2) Какие параметры называются первичными?
- 3) Дайте определение вторичных параметров;
- 4) Укажите типы соединения четырехполюсников ;
- 5) Что такое характеристические параметры?
- 6) Что такое рабочие параметры?

2. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Определение: Цепи с распределенными параметрами (ЦРП) – это электрические цепи, линейные размеры которых сравнимы с длиной волны электромагнитных колебаний, распространяемых в цепях. Токи и напряжения в ЦРП являются функциями не только времени, но и координаты, вследствие чего расчеты методами теории цепей с сосредоточенными параметрами к таким цепям не применимы. Приходится прибегать к методам электродинамики, что многократно усложняет расчеты. По сути, каждый расчет становится сложной исследуемой задачей.

И все же, есть один класс (ЦРП), так называемые длинные линии (ДЛ), электромагнитные процессы, в которых удастся исследовать методами теории цепей с сосредоточенными параметрами с использованием понятий ток и напряжение.

Длинные линии применяются для передачи электромагнитной энергии от передатчика к антенне, и от антенны к приемнику, и в некоторых специальных устройствах. Конструктивно они выполняются в виде **двухпроводной линии**, их часто называют фидерами (рис.2.1а).

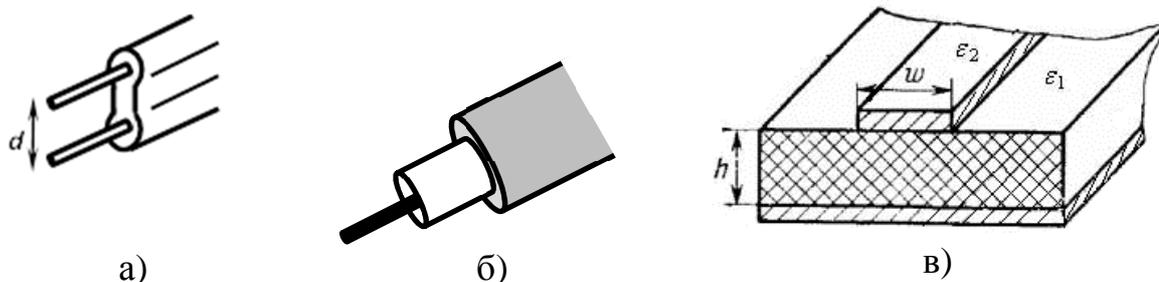


Рис.2.1. Конструкции длинных линий

- в виде коаксиального кабеля, когда центральный проводник находится внутри цилиндрической поверхности (рис.2.1б);
- в виде полосовой линии, размещенной над проводящей поверхностью (рис. 2.1 в), и др.

Главная конструктивная особенность ДЛ - поперечные размеры, то есть расстояние между проводниками много меньше длины волны

электромагнитных колебаний распространяемых в линии, в то время как продольные размеры соизмеримы с длиной волны в линии.

Электрические особенности длинной линии:

- 1) напряжение и ток являются функциями времени t и координаты Y ;
- 2) параметры R_0, g_0, L_0, C_0 распределены по длине. Если распределение равномерное то линия называется **однородной**, и характеризуется **погонными** (первичными) параметрами: $R_0, \frac{\text{Ом}}{\text{м}}; g_0, \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}; L_0, \frac{\text{Гн}}{\text{м}}; C_0, \frac{\text{Ф}}{\text{м}};$

В дальнейшем, при исследовании длинных линий под R_0, g_0, L_0, C_0 будем считать в виду погонные параметры.

Основные задачи исследования длинных линий:

- 1) Математически описать процессы в длинной линии с помощью понятий ток и напряжение;
- 2) Получить уравнения распределения тока и напряжения в длинной линии, выраженные через первичные (погонные) параметры R_0, g_0, L_0, C_0 и вторичные (характеристические) параметры — волновое сопротивление Z_B и постоянную распространения $\gamma = \alpha + j\beta$;

ПРИМЕЧАНИЕ: Для сокращения обозначений индекс 0 при первичных параметрах линии в дальнейшем опустим.

- 3) исследовать режимы работы длинной линии в зависимости от сопротивления нагрузки Z_H и координаты S ;
- 4) рассмотреть некоторые примеры применения длинной линии.

2.1 Основные уравнения длинной линии

2.1.1 Телеграфные уравнения

Исходные данные:

- Длинная линия однородная с погонными параметрами R, g, L, C ;
- входное воздействие гармоническое;
- метод исследования — символический;

Выделим на расстоянии s от нагрузки элементарный участок длины линии ds (рис.2.2) и представим его эквивалентную схему (рис.2.3).

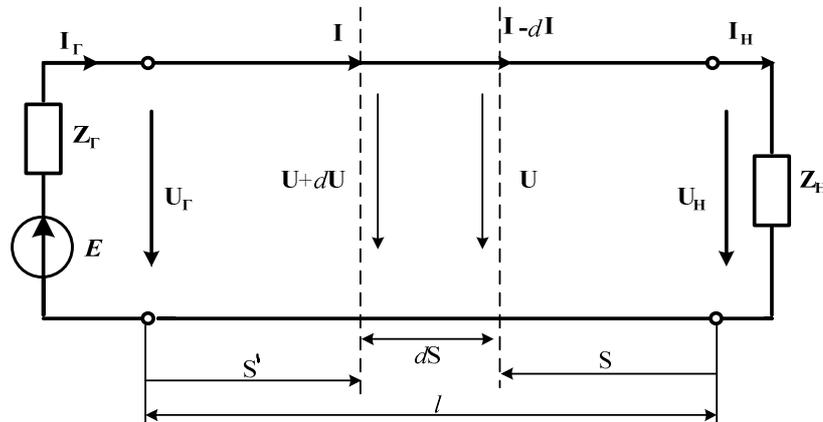


Рис. 2.2 Структурная схема длинной линии

На рис.2.3а изображена эквивалентная схема замещения элементарного участка ds длинной линии. Проводники обладают индуктивностью Lds и сопротивлением Rds , Cds — емкость между проводниками, а gds — проводимость изоляции [2].

На рис. 2.3б $\dot{Z}_0 = R + j\omega L$ - погонное комплексное сопротивление, $\dot{Y}_0 = G + j\omega C$ погонная комплексная проводимость.

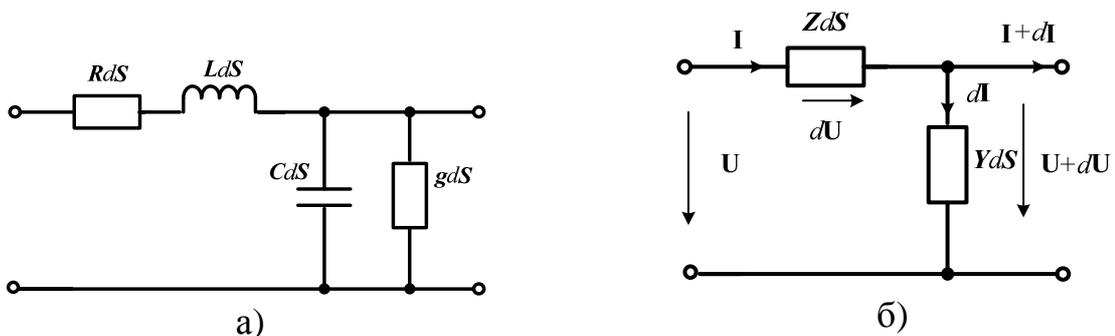


Рис.2.3 Эквивалентная (а) и комплексная (б) схемы замещения элементарного участка ds длинной линии

Выразим токи и напряжения в любом сечении ds через параметры Z и Y . Для этого найдем изменения напряжения и тока на участке ds , используя уравнения второго и первого закона Кирхгофа [1].

$$\begin{cases} d\dot{U} = -\dot{i} \cdot \dot{Z}_0 \cdot ds \\ d\dot{i} = -\dot{U} \cdot \dot{Y}_0 \cdot ds \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{d\dot{U}}{ds} = \dot{i} \cdot \dot{Z}_0, \\ \frac{d\dot{i}}{ds} = \dot{U} \cdot \dot{Y}_0. \end{cases} \quad (2.1) \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) называются **первым и вторым телеграфным уравнением**, соответственно.

Продифференцируем (2.1) и (2.2) еще раз по dY :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dS^2} = Z \cdot \frac{d\dot{I}}{dS}, \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dS^2} = Y \cdot \frac{d\dot{U}}{dS}. \end{cases} \quad (2.3)$$

С учетом выражений (2.1) и (2.2) получим следующие выражения (2.5), (2.6):

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dS^2} - Z \cdot Y \cdot \dot{U} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dS^2} - Z \cdot Y \cdot \dot{I} = 0. \quad (2.6)$$

В итоге получили два **однородных (волновых) дифференциальных уравнения (уравнения Гельмгольца)**, причем оба уравнения имеют одинаковое характеристическое уравнение:

$$P^2 - Z \cdot Y = 0, \text{ где} \\ P_{1,2} = \pm \gamma, \quad \gamma = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}, \quad (2.7)$$

$\gamma = \alpha + j\beta$ – коэффициент распространения;

α – коэффициент затухания, характеризующий потери в линии (насколько ослабнет сигнал при прохождении через линию);

β – коэффициент фазы, характеризующий изменение фазы выходного сигнала.

Решение однородного дифференциального уравнения (2.5) находится в виде следующего уравнения:

$$\dot{U}(s) = A_1 \cdot e^{\gamma s} + A_2 \cdot e^{-\gamma s}. \quad (2.8)$$

ПРИМЕЧАНИЕ: *Отсчет s ведется от нагрузки Z_H . В других источниках [2, 5] координата s обозначается символом u , однако принципиального различия между обозначениями нет.*

2.1.2 Падающая и отраженная волны

Согласно выражению (2.8), постоянные интегрирования A_1 и A_2 имеют размерность комплексных напряжений, а напряжение сечения $\dot{U}(s)$ в сечении s есть результат суммирования (интерференция) двух волн:

$$\text{Падающей} - \dot{U}_{\text{пад}} = A_1 \cdot e^{\gamma s} \text{ и } \text{отраженной} - \dot{U}_{\text{отр}} = A_2 \cdot e^{-\gamma s}$$

Определение: *Падающая волна* – электромагнитная волна, распространяющаяся от источника к нагрузке.

Определение: *Отраженная волна* – электромагнитная волна, распространяющаяся от нагрузки к источнику сигнала.

Исходя из вышесказанного, уравнение (2.8) принимает вид:

$$\dot{U}(s) = \dot{U}_{\text{пад}} \cdot e^{\gamma s} + \dot{U}_{\text{отр}} \cdot e^{-\gamma s}. \quad (2.8a)$$

Распределения напряжения вдоль линии для линии без потерь представлено согласно выражению (2.9a) на Рис.2.4.

Для решения уравнения (2.6) продифференцируем уравнение (2.8a) по ds :

$$\frac{d\dot{U}(s)}{ds} = \gamma \cdot \dot{U}_{\text{пад}} \cdot e^{\gamma s} + \gamma \cdot \dot{U}_{\text{отр}} \cdot e^{-\gamma s}.$$

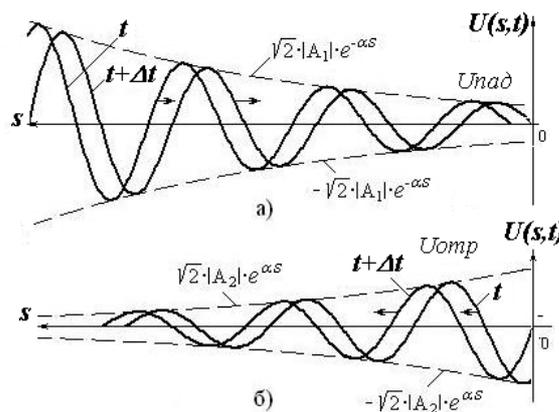


Рис. 2.4 Распределение напряжения вдоль длинной линии без потерь: а) Падающая волна, б) Отраженная волна

С учетом выражения (2.1) окончательно получим:

$$\dot{I}(s) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_B} \cdot e^{\gamma s} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{Z_B} \cdot e^{-\gamma s}, \quad (2.9)$$

где $Z_B = \frac{Z}{Y} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{(R+j\omega L)}{(G+j\omega C)}}$ - **волновое характеристическое**

сопротивление длинной линии, определяемое только конструктивно-технологическими факторами самой линии. Для линии без потерь: $R=0, g=0$, а, значит, $Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$.

Определение: Коэффициент распространения, γ и волновое сопротивление, Z_B — это **вторичные параметры длинной линии**.

По аналогии с напряжением ток в сечении s находится как сумма падающего и отраженного тока:

$$i(s) = i_{\text{пад}} \cdot e^{\gamma s} - i_{\text{отр}} \cdot e^{-\gamma s}, \quad (2.9a)$$

где $i_{\text{пад}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_B}, \quad i_{\text{отр}} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{Z_B}$

Знак «-» перед $i_{\text{отр}}$ в выражении (2.9a) означает, что фаза отраженного от нагрузки тока всегда противоположно фазе отраженного напряжения.

Остановимся подробнее на выражениях (2.8a) и (2.9a).

Мгновенное напряжение **падающей волны** зависит от времени и координаты s . Тогда падающую волну можно описать следующим выражением:

$$U_{\text{пад}}(t, s) = \text{Re}(U_{\text{пад}} \cdot e^{j\varphi_{\text{пад}}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{(\alpha+j\beta) \cdot s}) = U_{\text{пад}} \cdot e^{\alpha \cdot s} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{\text{пад}} + \beta s) \quad (2.10)$$

Аналогично, **отраженная волна** характеризуется выражением:

$$U_{\text{отр}}(t, s) = \text{Re}(U_{\text{отр}} \cdot e^{j\varphi_{\text{отр}}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-(\alpha+j\beta) \cdot s}) = U_{\text{отр}} \cdot e^{-\alpha \cdot s} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{\text{отр}} - \beta s) \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.10) следует, что амплитуда падающей волны напряжение растет по мере удаления сечения s от нагрузки, то есть по мере приближения к источнику сигнала, и достигает максимального значения на входе линии. Из уравнения (2.11) следует, что амплитуда отраженной волны уменьшается по мере удаления от нагрузки вследствие потерь в линии. Это естественно, так как источником падающей волны являются источник сигнала, подключенный к входу линии, а источником отраженной является падающая волна, достигшая нагрузки, и, в силу особых причин, которые будут рассмотрены позднее,

полностью или частично отразившаяся от нагрузки. Так луч света отражается от зеркальной или шероховатой поверхности.

Амплитуда напряжения в сечении s есть результат когерентного сложение напряжений падающий и отраженный волн, то есть результат интерференции $\dot{U}_{\text{пад}}(s)$ и $\dot{U}_{\text{отр}}(s)$.

2.2 Характеристика процессов в длинной линии

2.2.1 Вторичные параметры длинной линии, выраженные через погонные параметры

Определение: *Волновое сопротивление линии* (Z_B) - это сопротивление, которое ощущает электромагнитная волна при распространении вдоль бесконечной линии, или ощущают отраженная и падающая волна в ДЛ конечной длины.

$$Z_B = \frac{Z}{Y} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{(R+j\omega L)}{(G+j\omega C)}}, \quad (2.12)$$

где R ; L ; G ; C - погонные (первичные) параметры линии. В общем случае волновое сопротивление - комплексная величина, зависящая от частоты входного сигнала.

Для линии без потерь: $R=0$, $G=0$, а, значит, $Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$.

Определение: *Коэффициент (постоянная) распространения* (γ): представим выражение (2.7) в следующем виде

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} \cdot \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)^{-1/2}. \quad (2.7a)$$

При этом, как правило, выполняются условия: $\omega L \gg R$ и $\omega C \gg G$

Разлагая в ряд Маклорена, получим приближенное выражение коэффициента распространения:

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{LC} \cdot \left(1 - j\frac{R}{2\omega L}\right) \cdot \left(1 - j\frac{G}{2\omega C}\right)$$

В общем случае постоянную распространения можно представить в виде: $\gamma = \alpha + j\beta$. Каждое из слагаемых имеет отдельный физический смысл. Таким образом, α - коэффициент затухания (потерь), β - коэффициент фазы.

Определение: *Коэффициент затухания (потерь) (α)*, который характеризует потери в линии, т.е. уменьшение амплитуды сигнала при прохождении через ДЛ и определяется выражением (2.13):

$$\alpha = \operatorname{Re}(\gamma) \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R}{2\rho} + \frac{g\rho}{2}, \quad (2.13)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

ПРИМЕЧАНИЕ: 1) В общем случае коэффициент затухания измеряется в децибелах (дБ) на единицу длины. В идеальной линии без потерь $\alpha = 0$;

2) Из выражения(2.13) вовсе не следует, что α не зависит от частоты: входящие в него погонные параметры R и G сами зависят от частоты.

Определение: *Коэффициент фазы (β)* - показывает изменение фазы сигнала в зависимости от координаты и определяется выражением (2.14):

$$\beta = \operatorname{Im}(\gamma) \cong \omega\sqrt{LC}. \quad (2.14)$$

ПРИМЕЧАНИЕ: *Коэффициент фазы* измеряется в радианах (градусах) на единицу длины.

Определение: *Фазовая скорость (V_ϕ)* - скорость, с которой в линии распространяется состояние равной фазы падающей или отраженной волны, т.е. скорость, с которой распространяется, например, нуль напряжения или нуль тока отраженной волны.

$$V_\phi = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{\theta = const} \quad (2.15)$$

Для определения фазовой скорости воспользуемся уравнением (2.11):

$$U_{отр}(t, s) = U_{отр} \cdot e^{-\alpha \cdot s} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{отр} - \beta s)$$

Из условия состояния равной фазы :

$$\theta = \omega t + \varphi_{отр} - \beta s = const$$

Следует равенство $\frac{d\theta}{dt} = \omega - \beta \frac{ds}{dt} = 0$, и с учетом (2.11) получим:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.15a)$$

Фазовая скорость, выраженная через первичные параметры, имеет вид:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.15б)$$

Определение: Групповая скорость есть скорость перемещения волнового пакета, т.е. пакета, образованного группой волн. Поскольку энергия радиосигнала сосредоточена в этом волновом пакете, групповую скорость стали отождествлять со скоростью переноса энергии волной. Однако этот термин не применим при монохромном излучении.

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}. \quad (2.16)$$

Определение: Длина волны - расстояние в линии передачи, на котором фаза электромагнитной волны вдоль направления распространения меняется на 2π . Длина волны в линии определяется выражениями:

$$\lambda = V_{\phi} \cdot T = \frac{V_{\phi}}{f_r} = \frac{\omega}{\beta} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (2.17)$$

Примечание: В воздушной линии скорость распространения волны равна скорости распространения света, тогда длина линии можно определить выражением $\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f_r} = \frac{3 \cdot 10^8}{f_r}$.

2.2.2 Линия без искажения

Условиями неискаженной линии передачи являются:

- а) $\alpha(\omega) = const$ – не зависит от частоты;
- б) $V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = const$ – не зависит от частоты.
- в) $Z_B = const$ – не зависит от частоты

При этом сигнал будет претерпевать только задержку во времени и масштабное изменение амплитуды, но без изменения формы (рис. 2.5):

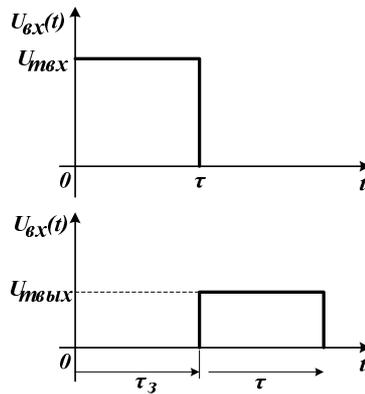


Рис.2.5 Изменение импульса входного сигнала при прохождении через линию без потерь

Запишем постоянную распространения γ в виде:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \sqrt{R \cdot g \cdot \left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right) \cdot \left(1 + j\omega \frac{C}{g}\right)}$$

Условия а) и б) выполняются одновременно только в случае, если выполняется равенство:

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{g},$$

Тогда коэффициент затухания равен: $\alpha = \sqrt{R \cdot g}$, а коэффициент фазы $\beta = \omega = \sqrt{LC}$, соответственно, волновое сопротивление в линии без искажений определяется:

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{R}{L} + j\omega}}{\sqrt{\frac{C}{g} + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

ПРИМЕЧАНИЕ: Обычно в технике $\frac{L}{R} \ll \frac{C}{g}$, а, значит, искажения в линиях неизбежны. Чтобы исправить это положение английский инженер Хэвисайд предложил к отрезку ДЛ длиной s_0 добавить сосредоточенную индуктивность (rippep) L_n такой величины, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{L \cdot s_0 + L_n}{R \cdot s_0} = \frac{C \cdot s_0}{g \cdot s_0}$$

Тогда:

$$L_n = \frac{C \cdot R \cdot s_0}{g} - L \cdot s_0$$

И линия становится неискажающей!

2.2.3 Длинная линия, как нагруженный четырехполюсник

Уравнения (2.8а) и (2.9) напряжения и тока в линии удобны для анализа физических процессов в линии. На практике при расчете токов и напряжений пользуется уравнениями длинной линии как нагруженного четырёхполюсника (см. п.1), чтобы найти постоянные интегрирования в уравнениях (8а) и (9):

$$\dot{U}(s) = \dot{U}_{\text{пад}} \cdot e^{\gamma s} + \dot{U}_{\text{отр}} \cdot e^{-\gamma s}. \quad (2.8а)$$

$$\dot{i}(s) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_B} \cdot e^{\gamma s} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{Z_B} \cdot e^{-\gamma s}, \quad (2.9)$$

Положим $S=0$, тогда $\dot{U}(0) = \dot{U}_H$, $\dot{i}(0) = \dot{I}_H$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{U}_H = \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}, \\ \dot{I}_H = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_B} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{Z_B}. \end{cases} \quad (2.8б)$$

$$(2.9б)$$

Откуда следует:

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \frac{\dot{U}_H + \dot{I}_H \cdot Z_B}{2}, \quad (2.17)$$

$$\dot{U}_{\text{отр}} = \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H \cdot Z_B}{2}, \quad (2.18)$$

С учетом (2.18) и (2.19) уравнения (2.8а) и (2.9) запишутся в виде:

$$\dot{U}(s) = \frac{\dot{U}_H + \dot{I}_H \cdot Z_B}{2} \cdot e^{\gamma s} + \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H \cdot Z_B}{2} \cdot e^{-\gamma s}. \quad (2.8в)$$

$$\dot{i}(s) = \frac{\dot{U}_H + \dot{I}_H \cdot Z_B}{2Z_B} \cdot e^{\gamma s} - \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H \cdot Z_B}{2Z_B} \cdot e^{-\gamma s}, \quad (2.9в)$$

После перегруппирования отдельных слагаемых уравнений (2.8в) и (2.9в) получаются следующие выражения:

$$\dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \left(\frac{e^{\gamma s} + e^{-\gamma s}}{2} \right) + \dot{I}_H \cdot Z_B \cdot \left(\frac{e^{\gamma s} - e^{-\gamma s}}{2} \right). \quad (2.8г)$$

$$\dot{i}(s) = \frac{\dot{U}_H}{Z_B} \cdot \left(\frac{e^{\gamma s} + e^{-\gamma s}}{2} \right) - \dot{I}_H \cdot \left(\frac{e^{\gamma s} - e^{-\gamma s}}{2} \right). \quad (2.9г)$$

Система уравнений (2.8г) и (2.9г), согласно теории четырехполюсников, является системой А-параметров:

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{A}_{11} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \cdot \dot{I}'_2 \\ \dot{i}(s) = \dot{A}_{21} \cdot \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \cdot \dot{I}'_2 \end{cases}$$

где $\dot{A}_{11} = \frac{e^{\gamma s} + e^{-\gamma s}}{2}$, $\dot{A}_{12} = Z_B \cdot \left(\frac{e^{\gamma s} - e^{-\gamma s}}{2} \right)$, $\dot{A}_{21} = \frac{e^{\gamma s} + e^{-\gamma s}}{2Z_B}$, $\dot{A}_{22} = -\left(\frac{e^{\gamma s} - e^{-\gamma s}}{2} \right)$,

2.2.4 Уравнения длинной линии, в гиперболических функциях

Так как для уравнений (2.8г) и (2.9г) выражения в скобках не что иное, как гиперболические функции $ch(\gamma s)$, $sh(\gamma s)$, соответственно, то окончательно получим:

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot ch(\gamma s) + \dot{I}_H \cdot Z_B \cdot sh(\gamma s), \\ \dot{I}(s) = \frac{\dot{U}_H}{Z_B} \cdot ch(\gamma s) - \dot{I}_H \cdot sh(\gamma s), \end{cases} \quad (2.19)$$

2.2.5 Входное сопротивление длинной линии

По отношению к зажимам генератора сигнала линия вместе с нагрузкой выступает как двухполюсник (рис. 2.6).

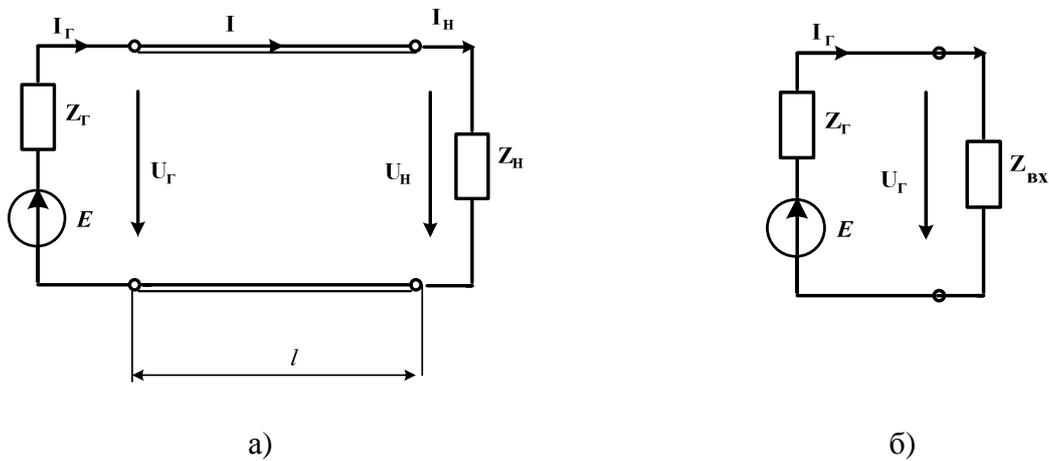


Рис. 2.6 Длинная линия: а) эквивалентная схема, б) схема замещения линии

Характер входного сопротивления двухполюсника определяется степенью поглощаемости энергии, поступающей на вход от генератора сигнала:

- входное сопротивление **чисто активное**, если энергия поглощается полностью;
- входное сопротивление **чисто реактивное**, если энергия не поглощается совсем;
- входное сопротивление имеет **комплексный характер**, если энергия поглощается частично, а частично отражается;

В общем случае входное сопротивление рассчитывается с помощью закона Ома, где ток и напряжение определяются системой уравнений (2.19):

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{\dot{U}(s)}{i(s)} = Z_B \cdot \frac{Z_H + Z_B \cdot th(\gamma s)}{Z_B + Z_H \cdot th(\gamma s)}, \quad (2.20)$$

Таким образом, в режиме холостого хода $Z_H = \infty$ входное сопротивление определяется выражением (2.20 а):

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{Z_B}{th(\gamma s)} \quad (2.20 \text{ а})$$

В режиме короткого замыкания $Z_H = 0$ входное сопротивление определяется выражением (2.20 б):

$$Z_{\text{вх}}(s) = Z_B \cdot th(\gamma s) \quad (2.20 \text{ б})$$

2.2.6 Коэффициент отражения длинной линии

Введем понятие коэффициента отражения напряжения.

Определение *Коэффициентом отражения* волны в длинной линии называют комплексную величину, равную отношению комплексных (действующих или амплитудных) значений напряжений или токов отражённой и падающей волн сечения линии $S=0$:

$$\dot{\Gamma}_U = |\Gamma_U| \cdot e^{j\varphi_\Gamma} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}}, \quad (2.21)$$

На основании (2.8б) и (2.9б) запишем:

$$Z_H = \frac{\dot{U}_H}{i_H} = \frac{1}{Z_B} \cdot \frac{\dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}} - \dot{U}_{\text{отр}}},$$

Откуда:

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}. \quad (2.21a)$$

Коэффициент отражения по току находится аналогично:

$$\dot{\Gamma}_i = \frac{i_{\text{отр}}}{i_{\text{пад}}} = \frac{Z_B - Z_H}{Z_B + Z_H} = -\dot{\Gamma}_U,$$

Обычно используется понятие коэффициента отражения по напряжению, и индекс опускают, т.е. $\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_U$.

2.3 Режимы работы длинной линии

В зависимости от типа нагрузки разделяют 3 режима в линии:

1) $Z_H = Z_B$, тогда согласно выражению (2.21а):

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = 0$$

Определение: В линии наблюдаются только падающие волны, энергия которых полностью поглощается нагрузкой. Такой режим называется **режимом бегущих волн** (РБВ).

$$2) \quad |\dot{\Gamma}| = \left| \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} \right| = 1, \text{ т.е. } |\dot{U}_{\text{отр}}| = |\dot{U}_{\text{пад}}|$$

Определение: Режим в линии, при котором $|\dot{U}_{\text{отр}}| = |\dot{U}_{\text{пад}}|$ на нагрузке называется **режимом стоячих волн** (РСВ). При этом в линии наблюдаются падающие и отраженные волны. Энергия, при таком режиме полностью отражается от нагрузки.

При таком режиме возможны следующие варианты:

а. $Z_{\text{H}} = 0$ – **короткое замыкание по выходу.**

$$\Gamma = -1, \text{ т.е. } \dot{U}_{\text{отр}} = -\dot{U}_{\text{пад}}, \dot{U}_{\text{H}} = 0 \quad (\Gamma_i = 1, \text{ т.е. } \dot{I}_{\text{отр}} = \dot{I}_{\text{пад}}, \dot{I}_{\text{H}} = 2\dot{I}_{\text{пад}})$$

б. $Z_{\text{H}} = \infty$ – **холостой ход на выходе.**

$$\Gamma = 1, \text{ т.е. } \dot{U}_{\text{отр}} = \dot{U}_{\text{пад}}, \dot{U}_{\text{H}} = 2\dot{U}_{\text{пад}} \quad (\Gamma_i = 1, \text{ т.е. } \dot{I}_{\text{отр}} = \dot{I}_{\text{пад}}, \dot{I}_{\text{H}} = 2\dot{I}_{\text{пад}})$$

с. $Z_{\text{H}} = \pm jX$ – **нагрузка реактивная.**

$$|\Gamma| = 1, \text{ т.е. } \varphi_{\text{P}} \neq 0, \quad 0 < |\dot{U}_{\text{H}}| < 2|\dot{U}_{\text{пад}}|$$

3) $0 < |\Gamma| < 1, |\dot{U}_{\text{отр}}| < |\dot{U}_{\text{пад}}|$ - это **режим смешанных волн**. Энергия падающих волн частично поглощается нагрузкой, частично отражается и возвращается в линию. Подобный режим возможен только в двух случаях:

а. Нагрузка **активная, но не равна волновому сопротивлению линии**
 $R_{\text{H}} \neq Z_{\text{B}}$:

б. Нагрузка **комплексная** $Z_{\text{H}} = R_{\text{H}} + jX_{\text{H}}$

В таблице 3.1 нагрузки сгруппированы по признаку поглощения или отражения энергии.

Режимы работы ЛБП

Название режима	Нагрузка	$ \Gamma $	Энергия нагрузкой	Характер входного сопротивления
РБВ	$\dot{Z}_H = \rho$	0	поглощается полностью	чисто активный
РСВ	к.з. ($Z_H=0$) х.х. ($Z_H=\infty$) $Z_H = \pm jX_H$	1	не поглощается	чисто реактивный
РСМВ	$\dot{Z}_H = R_H < \rho$ $\dot{Z}_H = R_H > \rho$ $\dot{Z}_H = R_H \pm jX_H$	$< \pm 1$	поглощается частично	комплексный

Исследуем указанные режимы подробнее.

2.3.1 Линия без потерь

На практике предпринимаются все меры для уменьшения потерь энергии в линии за счет уменьшения погонного сопротивления проводников и проводимости изоляции. Поэтому в первом приближении можно принять, что потери в линии отсутствуют. Полагая в (2.19):

$$\alpha = 0, \gamma = j\beta, Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

Учитывая что, $ch(j\beta) = \cos\beta$, а $sh(j\beta) = j\sin\beta$, получим уравнение для комплексного напряжения тока и входного сопротивления в сечении S линии без потерь:

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \cos(\beta s) + j\rho \cdot \dot{I}_H \cdot \sin(\beta s), & (2.22) \\ \dot{I}(s) = j \frac{\dot{U}_H}{\rho} \cdot \sin(\beta s) + \dot{I}_H \cdot \cos(\beta s), & (2.23) \end{cases}$$

$$Z_{вх}(s) = \rho \cdot \frac{Z_H + j\rho \cdot \operatorname{tg}(\beta s)}{\rho + jZ_H \cdot \operatorname{tg}(\beta s)}. \quad (3.24)$$

Этими уравнениями будем пользоваться при исследовании режимов работы длинной линии.

2.3.2 Режим бегущих волн

Условия: 1) Линия без потерь $\alpha = 0$;

2) Тип нагрузки: $Z_H = \rho$

Ранее было показано, что в режиме бегущих волн выполняется условие:

$$\dot{U}_{отр} = 0, \quad \Gamma = \frac{\dot{U}_{отр}}{\dot{U}_{пад}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = 0, \text{ откуда } Z_H = \rho$$

В уравнениях(23) вынесем общий множитель \dot{U}_H и \dot{I}_H , соответственно

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot (\cos(\beta s) + j\rho \cdot \frac{\dot{I}_H}{\dot{U}_H} \cdot \sin(\beta s)), \\ \dot{I}(s) = \dot{I}_H \cdot (\cos(\beta s) + j \frac{\dot{U}_H}{\dot{I}_H \cdot \rho} \cdot \sin(\beta s)), \end{cases}$$

Или
$$\dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot e^{j\beta s}, \quad (2.25)$$

$$\dot{I}(s) = \dot{I}_H \cdot e^{j\beta s}, \quad (2.26)$$

$$\dot{I}_{вх}(s) = \rho. \quad (2.27)$$

Мгновенные токи и напряжения в любом сечения определяются выражением

$$U(s, t) = \text{Re}(\dot{U}_H \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\beta s}) = U_m \cdot \cos(\omega t + \beta s),$$

$$i(s, t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \beta s).$$

Выводы:

- 1) При условии $Z_H = Z_B = \rho$ в линии существуют только падающей волны напряжения и тока. Отсюда название **режим бегущих волн**;
- 2) Амплитуды напряжения в линии без потерь в РБВ одинаковы в любом сечении s , а мгновенные напряжения и токи совпадают по фазе (Рис.2.7а);
- 3) Входное сопротивление в РБВ равно волновому сопротивлению в любом сечении s (Рис. 2.7б).

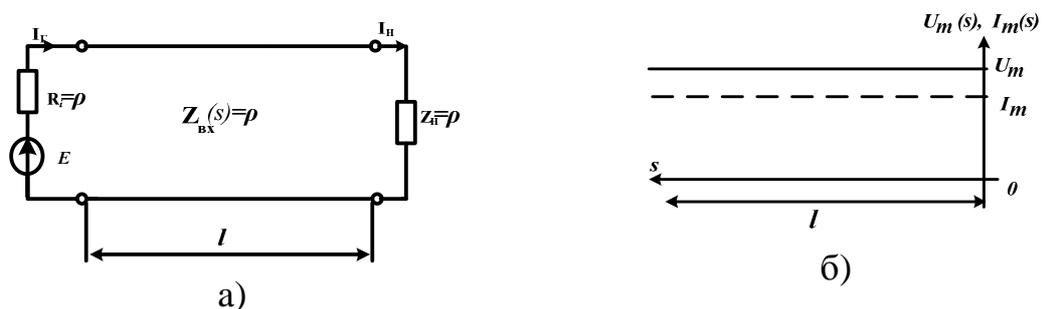


Рис. 2.7 Распределение тока и напряжения в линии без потерь при $Z_B = \rho$: а) схема замещения линии, б) напряжение и ток вдоль линии

2.3.3 Режим стоячих волн

Рассмотрим линию при следующих условиях:

1) Линия без потерь $\alpha = 0$;

2) $Z_B = \rho$

3) Тип нагрузки: а) $Z_H = \infty$; б) $Z_H = 0$; в) $Z_H = \pm jX$.

Вариант 1: $Z_H = \infty$;

$$\Gamma_U = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho} = +1, \quad \dot{U}_{отр} = \dot{U}_{пад} \quad \dot{U}_H = \dot{U}_{пад} - \dot{U}_{отр} = 2\dot{U}_{пад}$$

В свою очередь, коэффициент отражения по току:

$$\Gamma_i = -1, \quad \dot{I}_{отр} = -\dot{I}_{пад} \quad ; \quad \dot{I}_H = \dot{I}_{пад} - \dot{I}_{отр} = 0$$

Распределение напряжения и тока вдоль линии:

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \cos(\beta s) + j\rho \cdot \dot{I}_H \cdot \sin(\beta s), \\ \dot{I}(s) = j \frac{\dot{U}_H}{\rho} \cdot \sin(\beta s) + \dot{I}_H \cdot \cos(\beta s), \end{cases}$$

Таким образом, выражения для напряжения и тока вдоль линии, а также входное сопротивление согласно закону Ома имеют вид:

$$\dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \cos(\beta s) = 2\dot{U}_{пад} \cdot \cos(\beta s), \quad (2.28)$$

$$\dot{I}(s) = j \frac{\dot{U}_H}{\rho} \cdot \sin(\beta s), \quad (2.29)$$

$$Z_{вх}(s) = -j\rho \cdot \operatorname{ctg}(\beta s), \quad (2.30)$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

Пример: Определить напряжение на конце разомкнутой линии без потерь в общем виде, если известны входное сопротивление участка цепи $Z_{вх}$, внутреннее сопротивление генератора R_i и напряжение генератора.

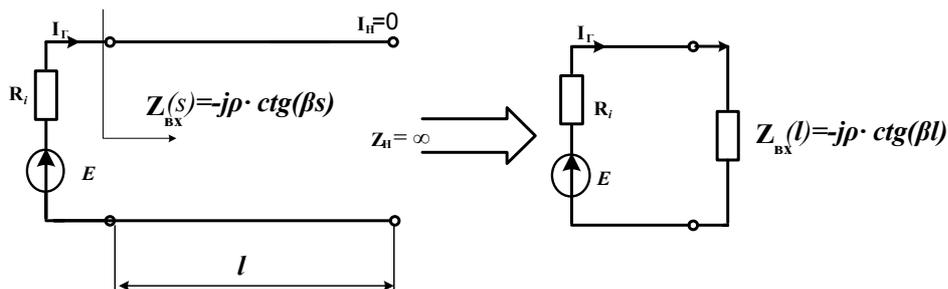


Рис. 2.8 Схема замещения линии

Решение: Согласно закону Ома, напряжение на входе можно записать выражением (*), с другой стороны, принимая, что в качестве нагрузки – холостой ход и используя выражение (2.23), напряжение на входе опишем выражение (**). Приравняв оба выражения, выразим выражение для напряжения на конце линии (***)

$$U_{\text{вх}} = \frac{E \cdot Z_{\text{вх}}}{R_i + Z_{\text{вх}}}; \quad (*) \quad \dot{U}_H = \frac{E \cdot Z_{\text{вх}}}{(R_i + Z_{\text{вх}}) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right)}; \quad (***)$$

$$U_{\text{вх}} = U_H \cdot \cos(\beta l) = U_H \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right); \quad (**)$$

Подставив значения координаты $y = 0; \frac{\lambda}{4}; \frac{\lambda}{2}$ и т.д. в выражения (***) и (23), получим следующие значения:

$$s = 0; |\dot{U}_{\text{вх}}(0)| = |\dot{U}_H|; i_H = 0; \dot{Z}_{\text{вх}}(0) = -j\infty;$$

$$s = \frac{\lambda}{4}; |\dot{U}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{4}\right)| = 0; i_H\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\dot{U}_H}{\rho}; \dot{Z}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 0;$$

$$s = \frac{\lambda}{2}; |\dot{U}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)| = |\dot{U}_H|; i_H\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0; \dot{Z}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = j\infty \text{ и т.д.}$$

По полученным данным построим графики распределение напряжения и тока, а также входного сопротивления вдоль линии (Рис.2.8а и б).

ПРИМЕЧАНИЕ: На Рис.2.8 а для графиков распределения тока и напряжения вдоль линии наблюдаются точки максимального значения и нуля, которые называются **пучностями** и **узлами**, соответственно. **Пучности** образуются в точках, где падающая и отраженные волны встречаются в фазе, а в **узлах** волны встречаются в противофазе

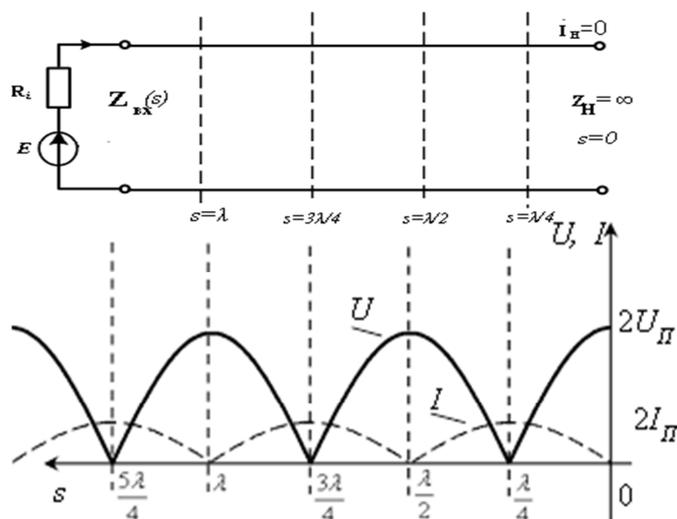


Рис.2.8а Распределение напряжения и тока вдоль линии при $Z_H = \infty$;

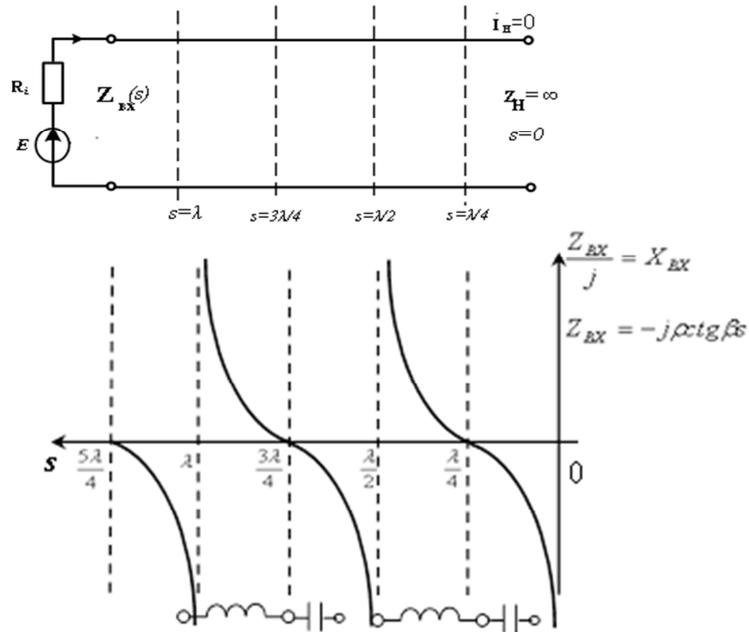


Рис.2.8б Распределение входного сопротивления вдоль линии $Z_H = \infty$;

Вариант 2: $Z_H = 0$;

$$\Gamma_U = \frac{0-\rho}{0+\rho} = -1, \quad \dot{U}_{отр} = -\dot{U}_{пад} \quad \dot{U}_H = \dot{U}_{пад} - \dot{U}_{отр} = 0$$

В свою очередь, коэффициент отражения по току:

$$\Gamma_i = 1, \quad \dot{I}_{отр} = \dot{I}_{пад} ; \quad \dot{I}_H = \dot{I}_{пад} + \dot{I}_{отр} = 2\dot{I}_{пад}$$

Распределение напряжения и тока вдоль линии с учетом нагрузки:

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \cos(\beta s) + j\rho \cdot \dot{I}_H \cdot \sin(\beta s), \\ \dot{I}(s) = j \frac{\dot{U}_H}{\rho} \sin(\beta s) + \dot{I}_H \cdot \cos(\beta s), \end{cases}$$

Тогда распределение напряжения, тока и входного сопротивления при короткозамкнутой нагрузке описывается выражениями (2.31) – (2.33), соответственно:

$$\dot{U}(s) = j\rho \cdot \dot{I}_H \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s\right), \quad (2.31)$$

$$\dot{I}(s) = \dot{I}_H \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s\right), \quad (2.32)$$

$$Z_{BX}(s) = j\rho \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s\right) = jX, \quad (2.33)$$

Подставив в выражения (2. в качестве у значения $0; \frac{\lambda}{4}; \frac{\lambda}{2}$, получим графики распределения тока, напряжения и входного сопротивления вдоль линии при нагрузке $Z_H = 0$ (Рис.2.9а, 2.9б)

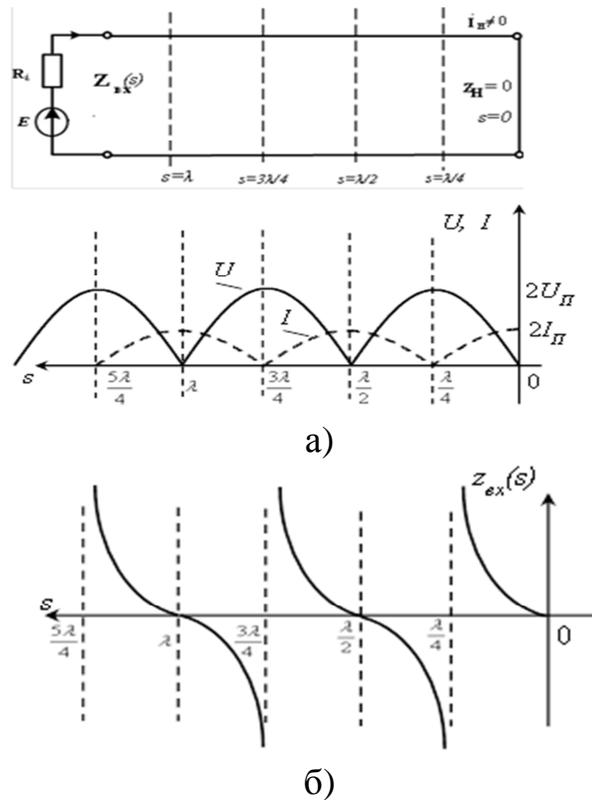


Рис.2.9 Режим стоячих волн при $Z_H = 0$

Вариант 3: $Z_H = \pm jX_H$, тогда коэффициент отражения является комплексным и определяется выражением: $\Gamma_U = \frac{\pm jX_H - \rho}{\pm jX_H + \rho} = |\Gamma|$, $\varphi_\Gamma = \arctg\left(\frac{2X_H\rho}{X_H^2 - \rho^2}\right)$.

Математическое описание распределения напряжения и тока вдоль линии при таком типе нагрузки определяется из выражений (2.23), путем математических операций:

$$\begin{cases} \dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}s\right) + \frac{\rho}{|X_H|} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}s\right) \right), \\ \dot{I}(s) = \dot{I}_H \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}s\right) - \frac{|X_H|}{\rho} \sin\left(\beta s\right) \right), \end{cases}$$

С помощью тригонометрических преобразований эти формулы приводятся к следующему виду:

$$\dot{U}(s) = \dot{U}_H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{|X_H|}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}s - \psi\right), \quad (2.34)$$

$$\dot{I}(s) = -\dot{I}_H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{|X_H|}{\rho}\right)^2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}s - \psi\right), \quad (2.35)$$

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{\dot{U}(s)}{i(s)} = -j\rho \cdot \text{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} s - \psi \right), \quad (2.36)$$

где $\psi = \pm \arctg \frac{\rho}{|X_H|}$.

Как и следовало ожидать входное сопротивление линии, нагруженной на реактивное сопротивление чисто реактивное, то есть в линии также наблюдается режим стоячих волн. В узле и пучности напряжение определяется следующим образом:

$$U_{\text{уз}} = 0; U_{\text{пуч}} = 2U_{\text{пад}} = U_H \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{|X_H|} \right)^2}.$$

В свою очередь узлы напряжения расположатся в точках, для которых выполняется условие: $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} s - \psi\right) = 0$, т.е. координата узла определяется выражением:

$$s_{\text{узл}} = (2\pi m + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} + \frac{\psi\lambda}{2\pi},$$

где $m=0,1,2 \dots$

Если линия нагружена на индуктивное сопротивление, то есть $X_H > 0$, то $\psi > 0$, а, значит, первым от нагрузки узел будет наблюдаться в промежутке от $\lambda/4$ до $\lambda/2$ ($\frac{\lambda}{4} < s_0 < \lambda/2$).

На Рисунке изображено распределение действующих значений напряжения и тока в линии, нагруженной на индуктивность:

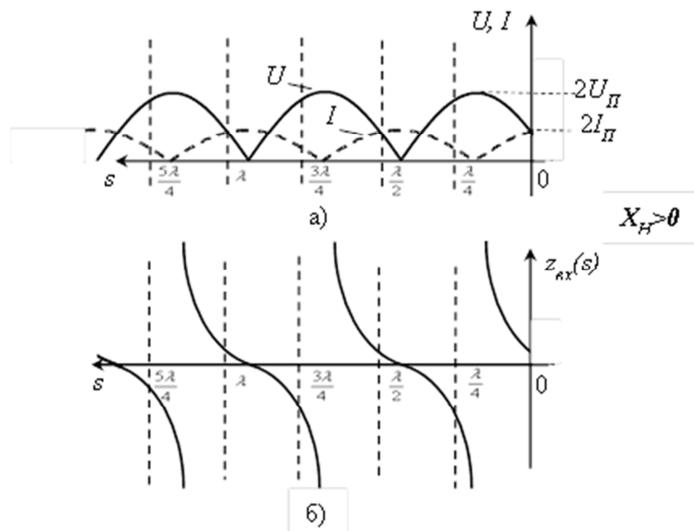


Рис. 2.10 Распределение действующих значений напряжения и тока (а) и входного сопротивления (б) в линии, нагруженной на индуктивность.

При емкостном сопротивлении нагрузки, т.е. $X_H < 0$, то $\psi < 0$, ближайший от нагрузки узел будет наблюдаться в промежутке $0 < s_0 < \frac{\lambda}{4}$. Распределения напряжения, тока и входного сопротивления для такого случая представлены на рисунке 2.11 а, б.

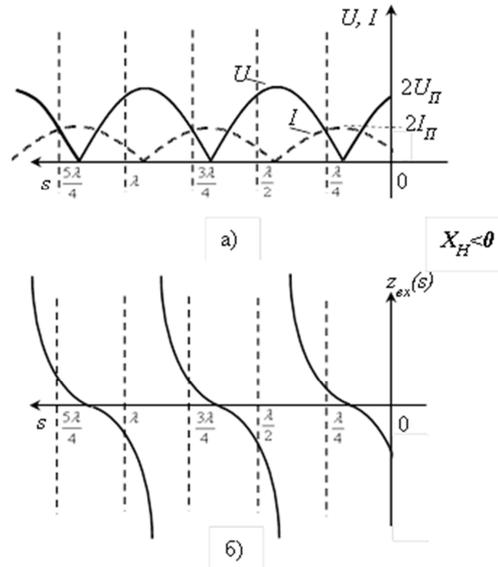


Рис. 2.11 Распределение действующих значений напряжения и тока (а) и входного сопротивления (б) в линии, нагруженной на индуктивность.

Задача о распределении токов и напряжения в линии, нагруженной на реактивное сопротивление, значительно упростится и может быть сведена к ранее рассмотренным вариантам.

Пучности напряжения будут наблюдаться при условии: $\frac{2\pi}{\lambda} s_{\text{пуч}} - \psi = 0 + \pi n$. Узлы напряжения наблюдаются в точках, для которых выполняется условие: $\frac{2\pi}{\lambda} s_{\text{узл}} - \psi = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Нагрузка при этом может иметь как индуктивный, так и емкостной характер.

Рассмотрим подробнее оба варианта:

а) $X_H > 0$

Заменим сопротивление $Z_H = jX$ отрезком длиной линии с волновым сопротивлением ρ :

$$jX = j\rho \cdot \operatorname{tg}(\beta s_0) = j\rho \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{s_0}{\lambda} \cdot 2\pi\right) \rightarrow s_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{X}{\rho}$$

Удлиним линию на этот короткозамкнутый отрезок и получим вариант рассмотренный ранее ($Z_H = 0$, кз) (Рис.2.12). Таким образом, задача о

распределении напряжения тока и реактивного сопротивления сводится к аналогичной задаче короткозамкнутой линии

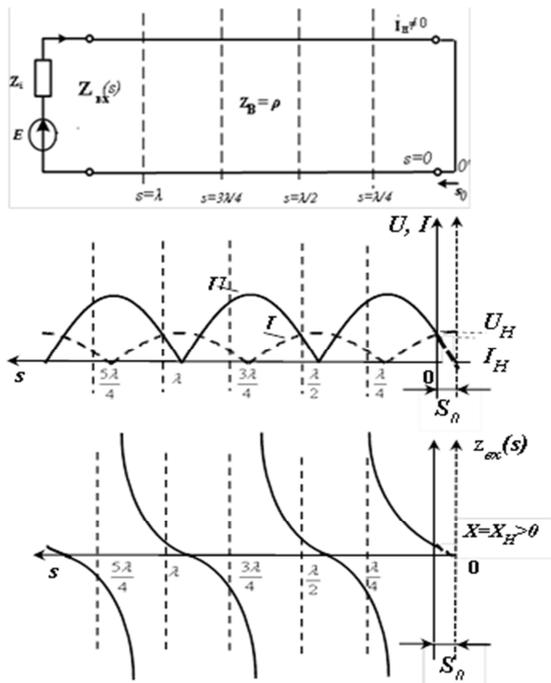


Рис.2.12 Распределение напряжения, тока и входного сопротивления в линии, нагруженной на $X_H > 0$

б) Заменим сопротивление отрезка разомкнутой линии длиной s_0

$$jX = -j\rho \cdot \text{ctg}(\beta s_0) = j\rho \cdot \text{tg}\left(\frac{s_0}{\lambda} \cdot 2\pi\right) \rightarrow s_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \text{arctg} \frac{X}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \text{arctg} \frac{X}{\rho}}$$

Распределение напряжения и токов в линия нагружена на реактивное сопротивление аналогично разомкнутой на конце, удлинненной на s_0

Выводы:

- 1) $U_{\text{пуч}} = 2U_{\text{пад}} = U_H \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{|X_H|}\right)^2}$;
- 2) пучности и узлы чередуются через $\lambda/4$;
- 3) напряжение на нагрузке изменяется $0 < |U_H| < U_{\text{пуч}}$;
- 4) ток нагрузки принимает значения: $0 < |I_H| < I_{\text{пуч}}$;
- 5) координата узла определяется:

$$s_{\text{узел нагр}} = \frac{\lambda}{2} - s_0 + \frac{n\lambda}{2}$$

б) Распределение напряжения, тока и входного сопротивления в линии, нагруженной на $X_H < 0$ аналогично разомкнутой на конце ДЛ, удлинненной на s_0

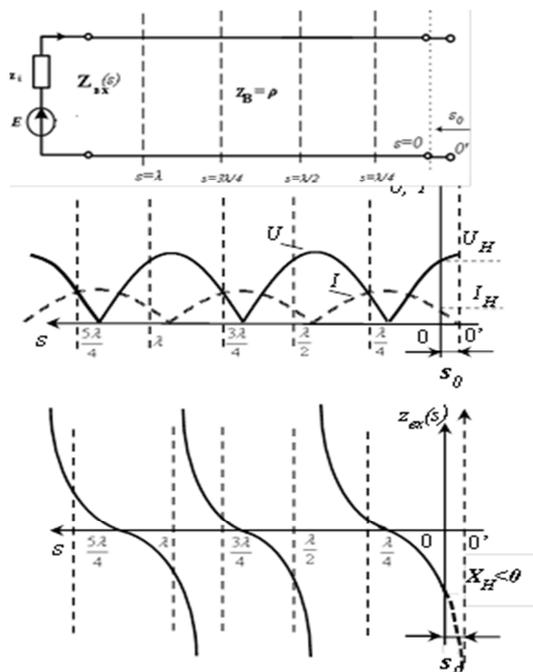


Рис.2.13 Распределение напряжения, тока и входного сопротивления в линии, нагруженной на $X_H < 0$

Распределение напряжения токов в режиме стоячих волн можно совместить на одном графике (Рис.2.14):

- $Z_H = \infty$ - начало координат $\theta_{хх}$;
- $Z_H = 0$ - начало координат $\theta_{кз}$ (сдвинуто на $\frac{\lambda}{4}$);
- $Z_H = jX; X < 0$ - начало координат сдвинуто на $s_0 < \frac{\lambda}{4}$;
- $Z_H = jX; X > 0$ - начало координат сдвинуто на $\frac{\lambda}{4} < s_0 < \frac{\lambda}{2}$;

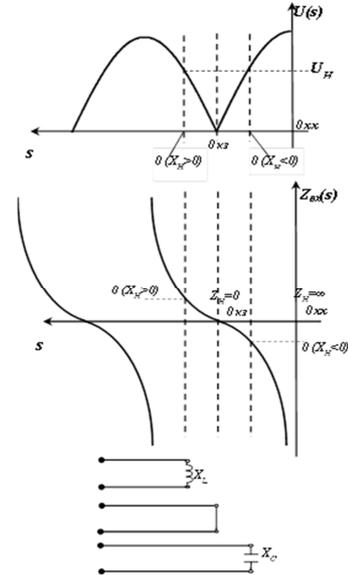


Рис.2.14 Распределение напряжения и входного сопротивления в линии

Исходя из вышесказанного общий вид коэффициента отражения в линии, нагруженной на чисто реактивное сопротивление определяется выражением (2.37):

$$\Gamma = \frac{\pm jx_H - \rho}{\pm jx_H + \rho} = -\frac{\rho \mp jx_H}{\rho \pm jx_H} = 1 \cdot e^{j(\pi \mp 2\varphi_\Gamma)}, \quad (2.37)$$

где $\varphi_\Gamma = \arctg \frac{x_H}{\rho}$, причем $0 < \varphi_\Gamma \leq \pi/2$.

Используя выражения (2.8в) и (2.9в), запишем комплексную амплитуду напряжения и тока в любом сечении линии:

$$\begin{aligned} \dot{U}(s) &= \frac{\dot{U}_2 + \rho \cdot \dot{I}_2}{2} (e^{j\beta s} + \Gamma \cdot e^{-j\beta s}) = \frac{\rho \pm jx_H}{\pm j2x_H} \dot{U}_2 \left(e^{j\beta s} - \frac{\rho \mp jx_H}{\rho \pm jx_H} e^{-j\beta s} \right) = \\ &= \pm \dot{U}_2 \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{x_H} \cdot \sin(\beta s \pm \varphi_\Gamma) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Тогда модуль напряжения в любом сечении линии можно определить следующим выражением:

$$|\dot{U}(s)| = U_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{x_H} \cdot \left| \sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda} \pm \varphi_\Gamma\right) \right|. \quad (2.38a)$$

Таким же образом запишем выражения для амплитуды тока в любом сечении линии:

$$\begin{aligned}
i(s) &= \frac{\dot{U}_2 + \rho \cdot \dot{I}_2}{2} (e^{j\beta s} - \Gamma \cdot e^{-j\beta s}) = \frac{\rho \pm jx_H}{2\rho} \cdot \dot{I}_2 \cdot \left(e^{j\beta s} + \frac{\rho \mp jX_H}{\rho \pm jX_H} \cdot e^{-j\beta s} \right) = \\
&= \dot{I}_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{\rho} \cdot \cos(\beta s \pm \varphi_\Gamma). \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$|i(s)| = I_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{\rho} \cdot \left| \cos\left(\frac{2\pi s}{\lambda} \pm \varphi_\Gamma\right) \right|. \tag{2.39a}$$

Переходя к функциям времени, выражения (2.38) и (2.39) преобразовываются к следующему виду:

$$\begin{aligned}
u(t, s) &= \pm \dot{U}_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{x_H} \cdot \sin(\beta s \pm \varphi_\Gamma) \cdot \cos(\omega t + \varphi_{U_2}) = \\
&= 2U_\Pi \cdot \cos\left(\beta s - \frac{\varphi_\Gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_{U_\Pi} + \frac{\varphi_\Gamma}{2}\right). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t, s) &= \dot{I}_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{\rho} \cdot \cos(\beta s \pm \varphi_\Gamma) \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_{U_2} \mp \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= 2I_\Pi \cdot \cos\left(\beta s - \frac{\varphi_\Gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_{I_\Pi} + \frac{\varphi_\Gamma}{2}\right).. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

$$\text{где } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\pm jx_H} = \frac{U_2}{x_H} \cdot e^{j(\varphi_{U_2} \mp \frac{\pi}{2})} = I_2 \cdot e^{j(\varphi_{U_2} \mp \frac{\pi}{2})}$$

ПРИМЕЧАНИЕ: Во всех выражениях верхние знаки соответствуют индуктивной нагрузке, а нижние – емкостной.

Общее выражение для входного сопротивления определим с помощью закона Ома для выражений (2.38) и (2.39):

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{\dot{U}(s)}{i(s)} = \frac{\pm \dot{U}_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{x_H} \cdot \sin(\beta s \pm \varphi_\Gamma)}{\dot{I}_2 \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + x_H^2}}{\rho} \cdot \cos(\beta s \pm \varphi_\Gamma)} = j\rho \cdot \operatorname{tg}(\beta s \pm \varphi_\Gamma) = jx_{\text{вх}}. \tag{2.42}$$

Согласно выражению (2.42), входное сопротивление длинной линии, нагруженной на реактивное сопротивление, в любом сечении имеет реактивный характер.

2.3.4 Режим смешанных волн

Имеет место частичное поглощение энергии в нагрузке, поэтому выполняется условие: $|\dot{U}_{\text{отр}}| < |\dot{U}_{\text{пад}}|$, $|\Gamma| < 1$. Там где падающая $\dot{U}_{\text{пад}}$ и отраженная $\dot{U}_{\text{отр}}$ волна суммируются фазе вместо пучности в РСВ имеет место **максимум** (Рис. 2.16):

$$\dot{U}_{max} = |\dot{U}_{отр}| + |\dot{U}_{пад}| = \dot{U}_{пад} \cdot (1 + |\dot{\Gamma}|),$$

там где вычитаются (волны находятся в противофазе) – вместо узла в РСВ **минимум** (Рис. 14):

$$\dot{U}_{min} = |\dot{U}_{отр}| - |\dot{U}_{пад}| = \dot{U}_{пад} \cdot (1 - |\dot{\Gamma}|),$$

Степень согласования нагрузки с линией является коэффициент, называемый **коэффициентом стоячей волны (КСВ)**:

$$КСВ = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{U_{пад} + U_{отр}}{U_{пад} - U_{отр}} = U_{пад} (1 - |\dot{\Gamma}|) = \frac{1}{КБВ}, \quad (2.43)$$

ПРИМЕЧАНИЕ: По величине коэффициента бегущей волны (КБВ) можно судить о том, во сколько раз сопротивление нагрузки больше или меньше волнового сопротивления линии. Определив КБВ экспериментальным путем, легко ответить на вопрос, во сколько раз нужно изменить сопротивление нагрузки или волновое сопротивление линии для того, чтобы получить полное согласование.

Согласно п. 2.3 нагрузка в РСМВ может быть двух типов: 1) **активная, но не равна волновому сопротивлению линии** $R_H \neq Z_B$; 2) **нагрузка комплексная** $Z_H = R_H + jX_H$.

1) Линия без потерь, нагруженная на активное сопротивление

Пусть длинная линия без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = \rho$ согласована на входе ($Z_{\Gamma} = \rho$) и нагружена на активное сопротивление $Z_H \neq \rho$ (Рис. 2.15).

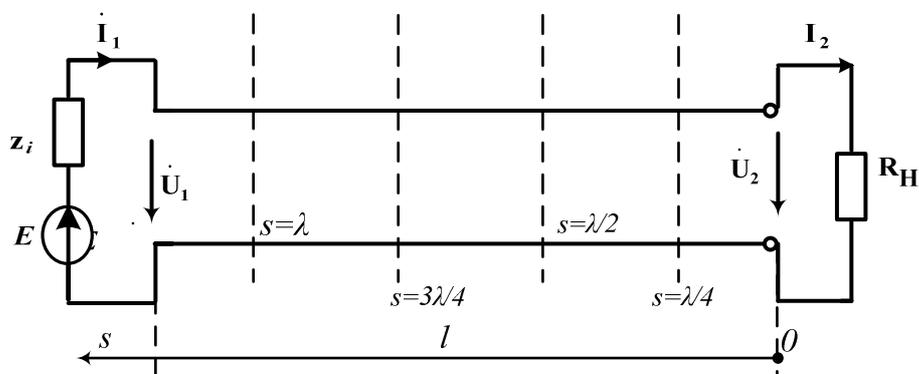


Рис.2.15 Длинная линия, нагруженная на активное сопротивление

Тогда напряжение и ток в каждом сечении линии подчиняется следующим выражениям:

$$\dot{U}(s) = \dot{U}_H \left(\cos(\beta s) + j \frac{\rho}{R_H} \sin(\beta s) \right), \quad (2.44)$$

$$\dot{I}(s) = \dot{I}_H \left(\cos(\beta s) + j \frac{R_H}{\rho} \sin(\beta s) \right). \quad (2.45)$$

Модули тока и напряжения имеют вид:

$$|\dot{U}(s)| = U_H \sqrt{\cos^2(\beta s) + \left(\frac{\rho}{R_H}\right)^2 \cdot \sin^2(\beta s)}, \quad (2.44a)$$

$$|\dot{I}(s)| = I_H \sqrt{\cos^2(\beta s) + \left(\frac{R_H}{\rho}\right)^2 \cdot \sin^2(\beta s)}. \quad (2.45a)$$

Входное сопротивление линии без потерь, нагруженной на активное сопротивление $R_H \neq \rho$ имеет вид:

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(s) = \frac{R_H + j\rho \cdot \text{tg}(\beta s)}{\rho + jR_H \cdot \text{tg}(\beta s)} \cdot \rho = \rho \cdot \sqrt{\frac{R_H^2 + \rho^2 \cdot \text{tg}^2(\beta s)}{\rho^2 + R_H^2 \cdot \text{tg}^2(\beta s)}} \cdot e^{j\varphi z}. \quad (2.46)$$

На рис. 2.15 представлено распределение напряжения, тока и входного сопротивления в ДЛ в РСМВ при $Z_H < \rho$.

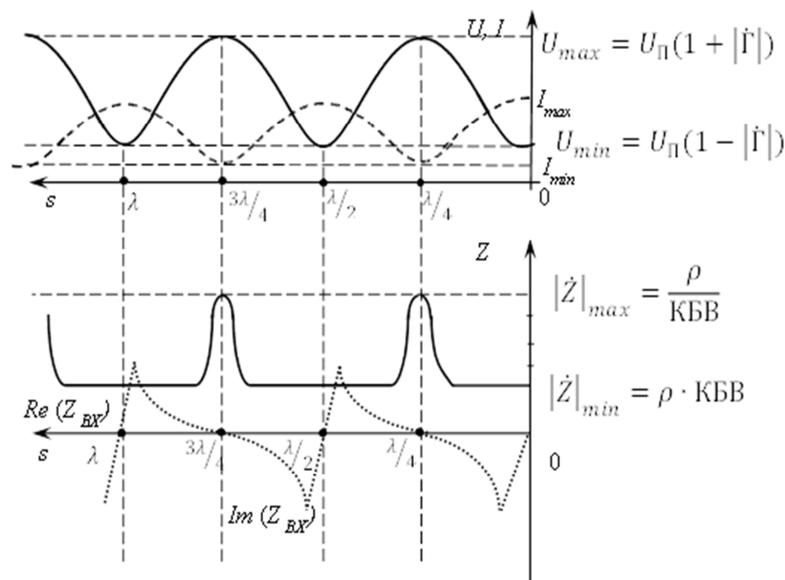


Рис.2.16 Распределение напряжения, тока и входного сопротивления в ДЛ в РСМВ при $Z_H < \rho$

Таким образом, входное сопротивление является комплексной величиной и изменяется периодически вдоль линии. На конце линии и на расстояниях кратных целому числу полуволн выполняется условие:

$$\beta s = 2\pi \cdot \frac{s}{\lambda} = k\pi, k = 0, 1, 2 \dots, \text{ при котором } tg(\beta s) = 0,$$

входное сопротивление является чисто активным и равным сопротивлению нагрузки R_H . На расстояниях кратных нечетному числу четвертей длин волн от конца линии, когда выполняется условие $\beta s = 2\pi \cdot \frac{s}{\lambda} = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2 \dots$, при котором $tg(\beta s) = \pm\infty$ входное сопротивление также становится чисто активным и равным $Z_{вх} = \frac{\rho^2}{R_H}$.

Если $R_H > \rho$, то входное сопротивление $Z_{вх}$ в точках длинной линии минимально и меньше ρ , а в остальных точках модуль входного сопротивления удовлетворяет условию: $\frac{\rho^2}{R_H} < |Z_{вх}| < R_H$. Фаза входного сопротивления на нечетных от конца линии отрезках длиной $\frac{\lambda}{4}$ отрицательная, а на четных - положительная. То есть входное сопротивление на нечетных отрезка имеет **емкостный** характер, а на четных - **индуктивный**.

Если же $R_H < \rho$, то в точках, расположенных на расстояниях, кратных нечетному числу четвертей длин волн от конца линии, входное сопротивление максимально и больше ρ . В остальных точках длинной линии при $R_H < \rho$, модуль входного сопротивления удовлетворяет условию: $\frac{\rho^2}{R_H} > |Z_{вх}| > R_H$. Само входное сопротивление на нечетных от конца линии отрезках имеет индуктивный характер, а на четных - емкостный.

При условии $R_H < \rho$ коэффициент отражения $\Gamma = \frac{R_H - \rho}{R_H + \rho} = \frac{\sqrt{(R_H - \rho)^2}}{\sqrt{(R_H + \rho)^2}} < 1$, $\varphi_\Gamma = +\pi$. При $R_H > \rho$ коэффициент отражения $\Gamma = \frac{R_H - \rho}{R_H + \rho} > 1$.

2) Линия без потерь, нагруженная на комплексное сопротивление

Пусть длинная линия без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = \rho$ согласована на входе ($Z_\Gamma = \rho$) и нагружена на комплексное сопротивление $Z_H = R_H \pm jx_H = \sqrt{R_H^2 + x_H^2} \cdot e^{\pm j\varphi_H}$, где $\varphi_H = \pm \arctg \frac{x_H}{R_H}$. Здесь $x_H > 0$ соответствует индуктивному характеру нагрузки, $x_H < 0$ – емкостному (Рис.

2.16). Для упрощения записи знак, определяющий тип реактивной части нагрузки опустим.

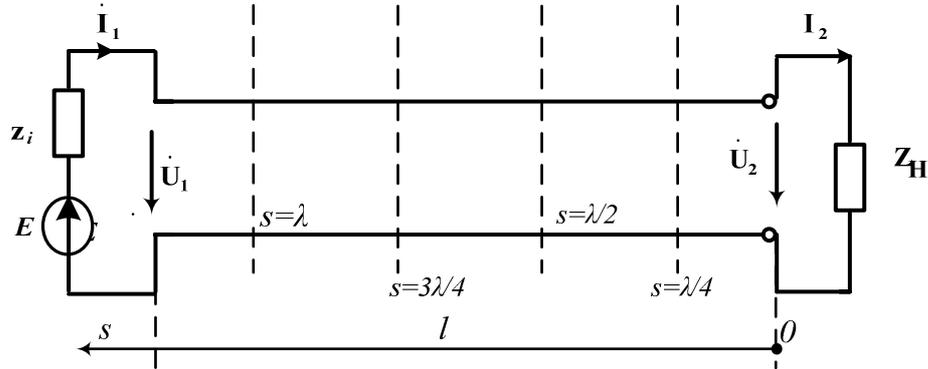


Рис.2.17 Длинная линия, нагруженная на комплексное сопротивление

В этом случае согласно формуле (2.21) коэффициент отражения от конца длинной линии будет равен:

$$\dot{\Gamma} = \frac{R_H \pm jx_H - \rho}{R_H \pm jx_H + \rho} = \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + x_H^2}{(R_H + \rho)^2 + x_H^2}} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (2.47)$$

где $\varphi_1 = \arctg \frac{\pm x_H}{R_H - \rho}$, $\varphi_2 = \arctg \frac{\pm x_H}{R_H + \rho}$, причем $|\dot{\Gamma}| < 1$.

найдем комплексную амплитуду напряжения в произвольном сечении s через комплексную амплитуду напряжения на конце длинной линии, используя формулы (2.8в) и (2.47):

$$\begin{aligned} \dot{U}(s) &= \frac{\dot{U}_2 + \rho \cdot \dot{I}_2}{2} (e^{j\beta s} + \dot{\Gamma} \cdot e^{-j\beta s}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{U}_2}{R_H \pm jx_H} \cdot [R_H \cdot (e^{j\beta s} + e^{-j\beta s}) + \rho \cdot (e^{j\beta s} - e^{-j\beta s}) \pm \\ & jx_H (e^{j\beta s} + e^{-j\beta s})] = \frac{\dot{U}_2}{R_H \pm jx_H} \cdot [R_H \cos(\beta s) \mp j\rho \sin(\beta s) \pm jx_H \cos(\beta s)] \end{aligned} \quad (2.48 \text{ а})$$

Модуль напряжения в любом сечении длинной линии будет определяться выражением:

$$|\dot{U}(s)| = U_2 \cdot \sqrt{\cos^2(\beta s) + \frac{\rho^2}{R_H^2 + x_H^2} \sin^2(\beta s) + \frac{\rho \cdot x_H}{R_H^2 + x_H^2} \sin(2\beta s)} \cdot e^{j(\varphi + \psi)}, \quad (2.48 \text{ б})$$

где $\varphi = \varphi_{U_2} - \varphi_H$, $\psi = \arctg \frac{\rho \cdot \sin(\beta s) + x_H \cos(\beta s)}{R_H \cos(\beta s)}$.

Мгновенное значение напряжения в каждом сечении длинной линии определяется выражением:

$$\dot{U}(s) = U_2 \cdot \sqrt{\cos^2(\beta s) + \frac{\rho^2}{R_H^2 + x_H^2} \sin^2(\beta s) + \frac{\rho \cdot x_H}{R_H^2 + x_H^2} \sin(2\beta s)} \times \cos(\omega t + \varphi + \psi), \quad (2.48 \text{ в})$$

Ток в каждом сечении длинной линии определяется подобным образом, используя выражения (2.39) и (2.47).

Используя выражения (2.20), (3.24), формула для определения входного сопротивления в РСМВ при комплексной нагрузке приобретает вид:

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{\dot{U}(s)}{\dot{I}(s)} = \frac{Z_H + j\rho \cdot \text{tg}(\beta s)}{1 + j\frac{Z_H}{\rho} \cdot \text{tg}(\beta s)} = \frac{R_H + j[x_H + \rho \cdot \text{tg}(\beta s)]}{\rho - x_H \cdot \text{tg}(\beta s) + jR_H \cdot \text{tg}(\beta s)}. \quad (2.49)$$

Таким образом, все режимы в линии при различных типах активной нагрузки можно свести в единую таблицу:

Таблица 2.2.

Распределение амплитуд напряжений и токов вдоль линии для разных активных нагрузок

Режим	Распределение U(s)	Нагрузка	$ \dot{\Gamma} $	φ_{Γ}
РСВ		$R_H \Big _{\text{к.з.}} = 0$	1	180^0
		$R_H \Big _{\text{х.х.}} = \infty$	1	0^0
РСМВ		$R_H < \rho$	Менее 1	180^0
		$R_H > \rho$	Менее 1	0^0
РБВ		$R_H = \rho$	0	0^0

2.4 Мощность в длинных линиях без потерь

При наличии стоячих волн со словами, когда амплитуда падающей и отраженной волны одинаковы, а именно при холостом ходе, коротком

замыкании или чисто реактивной нагрузке, мощность в узлах напряжения и тока равна нулю. В остальных линии мощность реактивная, так как напряжение ток сдвинуты по фазе 90^0 .

В этом случае энергия не передается вдоль линии, а происходит лишь обмен энергией между электрическим и магнитным полями на участках линий, ограниченных узлами напряжения и тока [2].

Согласно теории цепей с распределенными параметрами минимум и максимум напряжения и тока можно описать через коэффициент отражения:

$$\begin{cases} U_{max} = \frac{1}{2} U \left| 1 + \frac{z_B}{z_H} \right| (1 + |\dot{\Gamma}|); \\ U_{min} = \frac{1}{2} U \left| 1 + \frac{z_B}{z_H} \right| (1 - |\dot{\Gamma}|). \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\begin{cases} I_{max} = \frac{1}{2z_B} U \left| 1 + \frac{z_B}{z_H} \right| (1 + |\dot{\Gamma}|); \\ I_{min} = \frac{1}{2z_B} U \left| 1 + \frac{z_B}{z_H} \right| (1 - |\dot{\Gamma}|). \end{cases} \quad (2.51)$$

Тогда можно выделить несколько равенств:

$$\begin{cases} \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{U_{min}}{I_{min}} = z_B; \\ \frac{U_{max}}{I_{min}} = z_B \cdot \frac{1+|\dot{\Gamma}|}{1-|\dot{\Gamma}|} = R_{max}; \\ \frac{U_{min}}{I_{max}} = z_B \cdot \frac{1-|\dot{\Gamma}|}{1+|\dot{\Gamma}|} = R_{min}. \end{cases} \quad (2.52)$$

Если потери в линии отсутствуют, то вся активная мощность поступает в приемник, следовательно:

$$P = R_{max} \cdot I_{min}^2 = R_{min} \cdot I_{max}^2,$$

Или

$$P^2 = R_{max} \cdot R_{min} \cdot (I_{min} \cdot I_{max})^2. \quad (2.53)$$

Тогда с общего определения мощности:

$$P = z_B \cdot I_{min} \cdot I_{max} = \frac{1}{z_B} U_{min} \cdot U_{max}. \quad (2.54)$$

Выражения показывают, что при предельно допустимом напряжении передаваемая активная мощность тем больше чем выше коэффициент бегущей волны, то есть чем меньше отражений. Максимум передаваемой мощности

наступает при согласованной нагрузке $z_H = z_B$, когда коэффициент бегущей волны равен единице (КБВ=1).

При не согласовано подобранной нагрузке в линии часть энергии затрачивается на отражение, поскольку действующее значение напряжения падающей (U_{Π}) и отраженной (U_0) волны для всех точек линии без потерь неизменны, то очевидно:

$$\begin{cases} U_{max} = U_{\Pi} + U_0; \\ U_{min} = U_{\Pi} - U_0. \end{cases}$$

Откуда

$$КБВ = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{U_{\Pi} - U_0}{U_{\Pi} + U_0}. \quad (2.55)$$

Мощность определяется через падающую и отраженную волны следующим выражением:

$$P = \frac{1}{z_B} (U_{\Pi} + U_0)(U_{\Pi} - U_0) = \frac{1}{z_B} (U_{\Pi}^2 - U_0^2). \quad (2.56)$$

Отсюда видно, что мощность падающей волны ($P_{\Pi} = U_{\Pi}^2 / z_B$) складывается из полезной мощности (P), потребляемой приемником, и мощность отраженной волны ($P_0 = U_0^2 / z_B$).

Отношение полезной мощности к мощности падающей волны определяется соотношением:

$$\frac{P}{P_{\Pi}} = \frac{P_{\Pi} - P_0}{P_{\Pi}} = \frac{U_{\Pi}^2 - U_0^2}{U_{\Pi}^2} = 1 - \frac{U_0^2}{U_{\Pi}^2} = 1 - |\Gamma|^2. \quad (2.57)$$

2.5 Коэффициент полезного действия при согласованной нагрузке

Определение: КПД линии - это характеристика эффективности линии в отношении передачи энергии от входа к нагрузке. Численно КПД равен отношению передаваемой в нагрузку активной мощности ко всей активной мощности, поступившей в линию.

Чтобы передача энергии осуществлялась с наименьшими потерями, линия должна работать в режиме бегущей волны.

Активная мощность P_2 в конце линии определяется выражением:

$$P_2 = I_2 \cdot U_2 \cdot \cos(\varphi_{U_2} - \varphi_{I_2}) = I_2 \cdot U_2 \cdot \cos \varphi_B$$

где φ_B – аргумент волнового сопротивления

При согласованной нагрузке разность фаз между входным током и напряжением также равен φ_B , тогда активная мощность, поступающая в линию определяется выражением:

$$P_1 = I_1 \cdot U_1 \cdot \cos \varphi_B = I_2 \cdot U_2 \cdot e^{2\alpha l} \cdot \cos \varphi_B$$

Тогда КПД линии определяется выражением:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (2.58)$$

2.6 Эквивалентные схемы замещения длинной линии

Длинные линии служат не только для передачи энергии от генератора к антенне и от антенны к приемнику; они находят широкое применение в качестве колебательных систем, согласующих устройств, фильтров и коммутирующих систем.

2.6.1 Линия как согласующий трансформатор

Трансформатор (от лат. *transformo* — преобразовывать) - это устройство, позволяющее согласовать различные отрезки длинных линий с разными волновыми сопротивлениями.

К нагрузке подключается короткозамкнутая или разомкнутая линия (трансформатор), длина которой близка к четверти волны. Основная питающая линия присоединяется к шлейфу.

Для согласования линии с чисто активной нагрузкой (небольшое реактивное сопротивление может быть компенсировано так же, как это производилось при работе с первым типом трансформатора) применяют так называемые *четвертьволновые трансформаторы* (Рис. 2.18).

При этом определяется входное сопротивление $R_{вх}$ трансформатора для согласования его с основной линией:

$$R_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{втр}}^2}{R_{\text{н}}}, \quad (2.59)$$

где $Z_{\text{втр}}$ - волновое сопротивление трансформатора

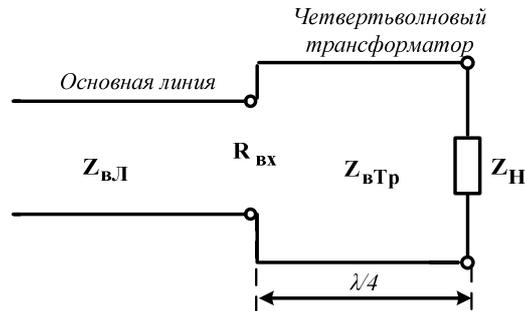


Рис.2.18 Согласование нагрузки с линией с помощью четвертьволнового трансформатора

Подбирая волновое сопротивление линии трансформатора, можно сделать его входное сопротивление равным волновому сопротивлению питающей линии. При этом волновое сопротивление линии трансформатора

$$Z_{\text{втр}} = \sqrt{R_{\text{н}} \cdot Z_{\text{вЛ}}}. \quad (2.60)$$

где $Z_{\text{вЛ}}$ - волновое сопротивление согласуемой линии.

В тех случаях, когда сопротивление нагрузки непосредственно узнать нельзя, нагрузку подключают к питающей линии и измеряют коэффициент бегущей волны:

$$\text{КБВ} = \frac{R_{\text{н}}}{Z_{\text{вЛ}}}$$

Отсюда сопротивление нагрузки:

$$R_{\text{н}} = \text{КБВ} \cdot Z_{\text{вЛ}}. \quad (2.61)$$

Подставив это равенство в формулу (2.60), получим выражение для определения волнового сопротивления трансформатора:

$$Z_{\text{втр}} = Z_{\text{вЛ}} \cdot \sqrt{\text{КБВ}}. \quad (2.62)$$

Чтобы иметь возможность перестраивать трансформатор на различные волны, его часто выполняют в виде раздвижных трубок.

2.6.2 Линия как реактивное сопротивление

Использование участков линии для согласования с другими частями линии доказывается в п.3.2 (входное сопротивление участков цепи).

В зависимости от длины и от того, замкнуты или оставлены открытыми конечные зажимы, участки линии могут создавать индуктивное или емкостное реактивное сопротивление, которое на сантиметровых волнах (СВЧ-диапазон) значительно превосходит традиционные элементы с сосредоточенными параметрами.

Данный метод, например, используется для согласования линии с нагрузкой. Допустим, что волновое сопротивление линии и нагрузка не равны друг другу (Рис. 2.18а). Тогда параллельно к линии подключается участок линии (разомкнутый или замкнутый), который позволит, в зависимости от длины этого участка линии подключить параллельно нагрузке реактивность (Рис.2.18б).

Для получения согласования, прежде всего, необходимо настроить цепь нагрузка-согласующая линия. Если нагрузка представляет собой чисто активное сопротивление, то длина согласующей линии устанавливается вначале равной $\frac{\lambda}{4}$. При нагрузке с реактивной составляющей длина согласующей линии берется несколько больше или меньше $\frac{\lambda}{4}$. В этом случае шлейф становится эквивалентен некоторой дополнительной реактивной нагрузке, сопротивление которой подбирается равным по величине и обратным по характеру реактивной составляющей сопротивления **нагрузки**.

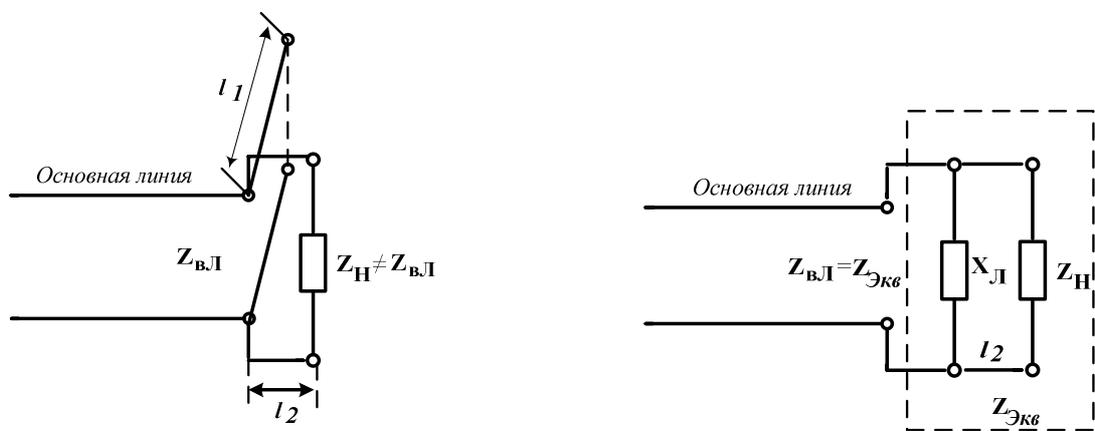


Рис.2.18 а) согласование нагрузки с линией с помощью параллельного отрезка линии; б) эквивалентная схема замещения.

Рассмотрим случай, когда концы линии замкнуты:

– штырь, длина которого меньше $\lambda/4$, действует как индуктивность (рис.2.19а), но при длине, точно равной $\lambda/4$, действует как изолятор;

– штырь, длина которого больше $\lambda/4$, но меньше $\lambda/2$, действует как емкость (РИС.2.19а), но при длине, точно равной $\lambda/2$, действует как короткозамкнутая цепь. Для более длинных отрезков характер действия плавно изменяется вдоль значения $\lambda/4$. Например, линия, длина которой больше $\lambda/2$, но меньше $3\lambda/4$, снова действует как индуктивность. Если конец линии оставить разомкнутым (открытая цепь), то характер действия линии будет противоположным по отношению к описанному выше (Рис.2.19 б).

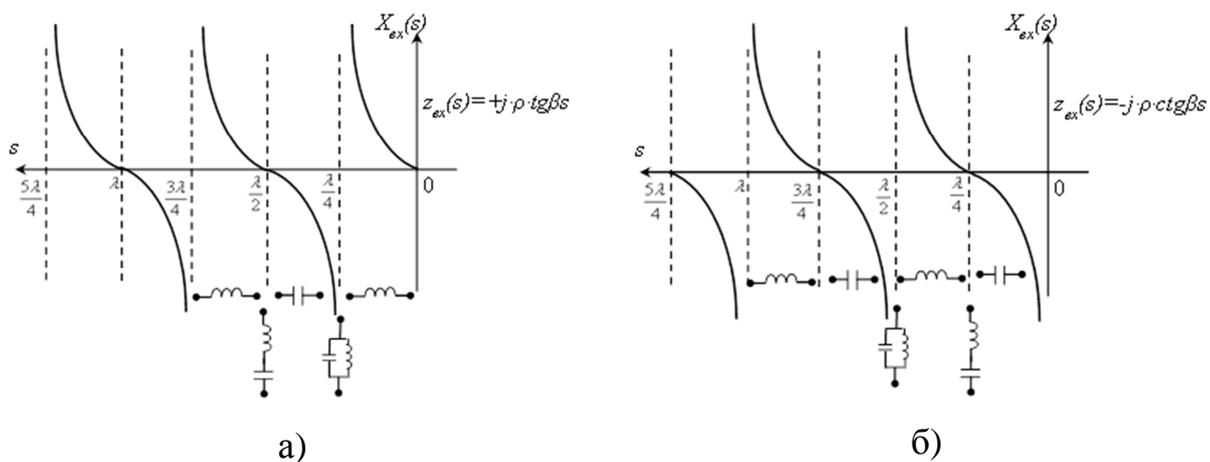


Рис.2.19 Распределение входного сопротивления вдоль длинной линии при коротком замыкании на выходе

2.7 Понятие S-параметров четырехполюсника, включенного между длинными линиями.

Представим линию в качестве четырехполюсника, согласованного со входных зажимов и со стороны нагрузки (Рис. 2.20):

Рис.2.20 Схема представления устройства через S-параметры

Согласно теории четырехполюсников, напряжения падающих и отраженных волн для схемы Рис. 2.20 через S-параметры четырёхполюсника связаны соотношением:

$$\dot{U}_{1\text{отр}} = \dot{S}_{11} \dot{U}_{1\text{пад}} + \dot{S}_{12} \dot{U}_{2\text{отр}}, \quad (2.63)$$

$$\dot{U}_{2\text{пад}} = \dot{S}_{21} \dot{U}_{1\text{пад}} + \dot{S}_{22} \dot{U}_{2\text{отр}}. \quad (2.64)$$

где: \dot{S}_{11} и \dot{S}_{22} - коэффициенты отражения по входу и выходу четырёхполюсника при согласованных нагрузках; \dot{S}_{12} и \dot{S}_{21} - коэффициенты передачи напряжения при согласованных нагрузках.

Из системы уравнений (2.62) и (2.63) S-параметры определяются через следующие соотношения:

$$\dot{S}_{11} = \dot{U}_{1\text{отр}} / \dot{U}_{1\text{пад}} \text{ при } \dot{U}_{2\text{отр}} = 0 \text{ - коэффициент отражения по входу;}$$

$$\dot{S}_{22} = \dot{U}_{2\text{пад}} / \dot{U}_{2\text{отр}} \text{ при } \dot{U}_{1\text{пад}} = 0 \text{ - коэффициент отражения по выходу;}$$

$$\dot{S}_{21} = \dot{U}_{2\text{пад}} / \dot{U}_{1\text{пад}} \text{ при } \dot{U}_{2\text{отр}} = 0 \text{ - прямой коэффициент передачи с входа на выход;}$$

$$\dot{S}_{12} = \dot{U}_{1\text{отр}} / \dot{U}_{2\text{отр}} \text{ при } \dot{U}_{1\text{пад}} = 0 \text{ - обратный коэффициент передачи с выхода на}$$

вход.

Для линейных устройств S-параметры не зависят от амплитуды падающих и отражённых волн, а определяются элементами и структурой самого устройства. Систему уравнений (2.63) и (2.64) можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{отр}} \\ \dot{U}_{2\text{отр}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{пад}} \\ \dot{U}_{2\text{пад}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

S-параметры являются комплексными величинами и могут быть записаны в виде :

$$\dot{S}_{11} = |S_{11}| \cdot e^{j\varphi_{11}}, \dot{S}_{12} = |S_{12}| \cdot e^{j\varphi_{12}}, \dot{S}_{21} = |S_{21}| \cdot e^{j\varphi_{21}}, \dot{S}_{22} = |S_{22}| \cdot e^{j\varphi_{22}}. \quad (2.66)$$

где: $|S_{11}|$, $|S_{12}|$, $|S_{21}|$, $|S_{22}|$ - модули S-параметров, частотная зависимость, которых представляет амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) коэффициентов

отражения и коэффициентов передачи; $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}$ - аргумент (фаза)-S-параметров, частотная зависимость которых является фазо-частотная характеристика (ФЧХ) соответствующих коэффициентов.

2.8 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение цепи с распределенными параметрами.
- 2) Что такое первичные параметры линии?
- 3) Какая линия является однородной?
- 4) Запишите телеграфные уравнения.
- 5) Дайте определение падающей волны.
- 6) Дайте определение отраженной волны.
- 7) Что такое вторичные параметры?
- 8) Запишите условие линии без потерь

3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

3.1 Общие сведения о переходных процессах

Определение. Установившимся режимом называется такое состояние электрической цепи (схемы), при котором наблюдается равновесие между действием на цепь источников энергии и реакцией элементов цепи на это действие.

В установившемся режиме токи и напряжения в элементах цепи могут существовать неограниченно долго, не изменяя своих величин и характеристик. При этом энергетическое состояние каждого элемента цепи может быть однозначно определено для любого момента времени.

Определение. Переходный процесс (ПП) - это процесс перехода электрической цепи с накопителем энергии от одного установившегося режима работы к другому, вызванного изменением параметров или конфигурации схемы электрической цепи (ЭЦ).

Переходные процессы возникают при любых изменениях режима электрической цепи: при подключении и отключении цепи, при изменении нагрузки, при возникновении аварийных режимов (короткое замыкание, обрыв провода и т.д.). Изменения в электрической цепи можно представить в виде тех или иных переключений, называемых в общем случае коммутацией.

Определение. Коммутация - это процесс замыкания и размыкания электронных реле, механических переключателей. Время срабатывания контактов реле считается бесконечно малым и в расчетах не учитывается [2].

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего до коммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему после коммутационному режиму [1].

3.1.1 Длительность переходных процессов

Переходные процессы обычно быстро протекающие: длительность их составляет десятые, сотые, а иногда и миллиардные доли секунды. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд. Тем не менее, изучение переходных процессов весьма важно, так как позволяет установить, как деформируется по форме и амплитуде сигнал. выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического сигнала. Анализ искажений импульсов при прохождении через канал связи в радиотехнических устройствах основан и на теории переходных процессах.

На рис. 3.1 представлены различные режимы переходного процесса . В целом все время можно разделить на три режима: 1) $t=0_-$ - старый установившийся режим до коммутации; 2) $t=0_+$ - режим после коммутации (сам переходный процесс); 3) $t=\infty$ - новый установившийся режим после коммутации.

Шкала времени	$t = 0_-$ $t = 0$ $t = 0_+$ $t = (3...5)t_{\text{ПП}}$ $t = \infty$					
Режимы	установившийся режим	до коммутации	момент коммутации	после коммутации	переходный процесс	установившийся режим (новый)

Рис. 3.1. Пояснения к времени переходного процесса и режимам работы схемы.

Время переходного процесса ($t_{\text{ПП}}$) обусловлено временем перераспределения энергии электрического и магнитного полей накопителя. В цепях без накопителей энергии переходные процессы отсутствуют. При замыкании реле $t=0$ установившийся режим устанавливается сразу.



Рис. 3.2. Примеры схем с переходными процессами.

На рис. 3.2, а приведен пример, в котором ключ S – разомкнут (схема до коммутации). На рис. 3.2, б - ключ S - замкнут (схема после коммутации). На рис. 3.2, а, б присутствует источник электродвижущей силы (э.д.с.). Источник э.д.с. в схемах может быть:

- 1) $E = const$ - постоянное напряжение;
- 2) $E = e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ - гармоническое колебание;
- 3) частный случай $E = 0$ - короткое замыкание.

3.1.2 Причины возникновения переходных процессов

В общем случае в электрической цепи переходные процессы могут возникать, если в цепи имеются индуктивные и емкостные элементы, обладающие способностью накапливать или отдавать энергию магнитного или электрического поля. В момент коммутации, когда начинается переходный процесс, происходит перераспределение энергии между индуктивными,

емкостными элементами цепи и внешними источниками энергии, подключенными к цепи. При этом часть энергии безвозвратно преобразуется в другие виды энергий (например, в тепловую на активном сопротивлении).

После окончания переходного процесса устанавливается новый установившийся режим, который определяется только внешними источниками энергии. При отключении внешних источников энергии переходный процесс может возникать за счет энергии электромагнитного поля, накопленной до начала переходного режима в индуктивных и емкостных элементах цепи.

Изменения энергии магнитного и электрического полей не могут происходить мгновенно, и, следовательно, не могут мгновенно протекать процессы в момент коммутации. В самом деле, скачкообразное (мгновенное) изменение энергии в индуктивном и емкостном элементе приводит к необходимости иметь бесконечно большие мощности $p(t) = \frac{dW(t)}{dt}$, что практически невозможно, ибо в реальных электрических цепях бесконечно большой мощности не существует.

Таким образом, переходные процессы не могут протекать мгновенно, так как невозможно в принципе мгновенно изменять энергию, накопленную в электромагнитном поле цепи. Теоретически переходные процессы заканчиваются за время $t \rightarrow \infty$. Практически же переходные процессы являются быстротекающими, и их длительность обычно составляет доли секунды. Так как энергия магнитного $W_M(t)$ и электрического полей $W_E(t)$ описывается

выражениями: $W_M(t) = W_L(t) = \frac{L \cdot i_L^2(t)}{2}$ - энергия, запасенная в катушке

индуктивности, $W_E(t) = W_C(t) = \frac{C \cdot u_c^2(t)}{2}$ - энергия, запасенная в конденсаторе,

то ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться мгновенно при условии, что емкость и индуктивность являются постоянными.

На этом основаны законы коммутации.

3.1.3 Принципы непрерывности заряда, потокосцепления и энергии в электрической цепи

Переход реальной электрической цепи от одного установившегося режима другому не может происходить мгновенно, скачком. Это связано с тем, что любой реальный источник энергии может обладать только конечной мощностью. Суммарная энергия, запасенная в цепи, представляет собой непрерывную функцию времени и может изменяться плавно.

$$W_L(t) = \frac{L \cdot i_L^2(t)}{2} - \text{энергия, запасенная в индуктивности,}$$

$$W_C(t) = \frac{C \cdot u_c^2(t)}{2} - \text{энергия, запасенная в ёмкости.}$$

Следовательно, суммарные потокосцепления и заряд цепи также являются непрерывными функциями времени, и представлены равенствами:

$$\sum \Psi(0_+) = \sum \Psi(0_-) \quad - \text{закон сохранения потокосцепления;}$$

$$\sum q(0_+) = \sum q(0_-) \quad - \text{закон сохранения заряда,}$$

где $\Psi(t)$ - потокосцепления индуктивности; $q(t)$ - заряд емкости.

Это положение известно как принцип непрерывности во времени суммарного потокосцепления и суммарного электрического заряда.

Из этого принципа непосредственно следует вывод о непрерывности токов и индуктивных катушек и напряжений конденсаторов, который формируется в виде законов коммутации.

3.1.4 Законы коммутации

Первый закон коммутации. Ток через индуктивности момент коммутации сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$i_L(0) = i_L(0_-) \quad \text{и} \quad i_L(0_+) = i_L(0), \quad (3.1)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Доказательство.

Напряжение на катушке равно $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$ и если бы ток через катушку менялся скачкообразно, $i_L(t) = \begin{cases} 1(t), & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$, то напряжение на катушке $u_L(t) = L \cdot \frac{d1(t)}{dt} = L \cdot \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0 \\ 0, & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$ было бы бесконечно большим, и наблюдалось бы нарушение 2-го закона Кирхгофа для контура, где находится катушка индуктивности, т.к. мощность потребляемая (выделяемая) катушкой индуктивности равна бесконечности:

$$p_L(t) = u_L(t) \cdot i_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \cdot i_L(t) = L \cdot \delta(t) \cdot i_L(t) = L \cdot \infty \cdot i_L(t) = \infty.$$

Следовательно, мгновенное изменение энергии в момент коммутации невозможно, т.к. энергия индуктивности увеличивается и уменьшается постепенно.

Второй закон коммутации. Напряжение на емкости в момент коммутации сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$u_C(0) = u_C(0_-) \quad \text{и} \quad u_C(0_+) = u_C(0), \quad (3.2)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Доказательство. Ток через конденсатор $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$ и если бы напряжение на конденсаторе менялось бы скачкообразно $u_C(t) = \begin{cases} 1(t), & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$, то ток через конденсатор стал бы бесконечно большим, что привело бы к нарушению 1-го закона Кирхгофа для узла, к которому подключен этот конденсатор, т.к. мощность, потребляемая (выделяемая) конденсатором равна бесконечности:

$$p_C(t) = u_C(t) \cdot i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \cdot u_C(t) = C \cdot \delta(t) \cdot u_C(t) = C \cdot \infty \cdot u_C(t) = \infty.$$

Следовательно, мгновенное изменение энергии в момент коммутации невозможно, т.к. энергия конденсатора увеличивается и уменьшается постепенно [3].

Выводы:

1) В цепях, содержащих накопители энергии, возникают переходные процессы изменения токов и напряжений от начальных значений к конечным. Изменение величин токов и напряжений требует определенного времени в цепи.

2) В электрических цепях с резистивными элементами энергия электромагнитного поля не запасается, вследствие чего в них переходные процессы не возникают, т.е. в таких цепях стационарные режимы устанавливаются мгновенно, скачком.

3) В действительности любой элемент цепи обладает каким-то сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C , т.е. в реальных электротехнических устройствах существуют тепловые потери, обусловленные прохождением тока и наличием сопротивления R , а также магнитные и электрические поля.

4) Переходные процессы в реальных электротехнических устройствах можно ускорять или замедлять путем подбора соответствующих параметров элементов цепей, а также за счет применения специальных устройств.

3.1.5 Начальные условия: независимые и зависимые, нулевые и ненулевые

Определение. Значение тока через индуктивность $i_L(0)$ и напряжение на ёмкости $u_C(0)$ в момент коммутации (при $t=0$) называются **независимыми начальными условиями (ННУ)**. Их значения не зависят от коммутации, то есть не меняются в момент коммутации.

Определение. Величины, зависящие от коммутации (в момент коммутации изменяются скачком), - значение тока через ёмкость $i_C(0_+)$ и напряжение на

индуктивности $u_L(0_+)$, а также токов и напряжений на других элементах электрической цепи называются **зависимыми начальными условиями (ЗНУ)**.

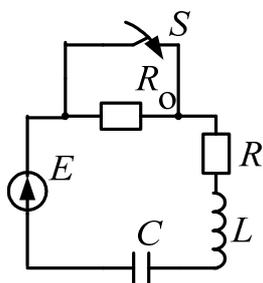
Определение. Все величины при $t \rightarrow \infty$ - $i_L(\infty), u_L(\infty), u_C(\infty)$ и т.д. - называют **конечными условиями (КУ)**. Здесь момент времени $t = \infty$ соответствует окончанию переходного процесса.

Определение. В совокупности ННУ, ЗНУ и КУ называют **граничными условиями (ГУ)**.

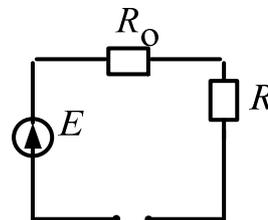
Определение. Если $i_L(0_-) = 0$ или $u_C(0_-) = 0$ (для электрической цепи с одним накопителем энергии) ННУ являются **нулевыми**, в противном случае ННУ - **ненулевые условия**. Для электрической цепи с двумя накопителями (цепь II-порядка) энергии если $i_L(0_-) = 0$ и $u_C(0_-) = 0$, то ННУ являются **нулевыми**.

3.1.6 Порядок определения граничных условий

Пример. Пусть в некоторой цепи (рис. 3.3, а) внезапно изменяется сопротивление. До коммутации в цепи существовали сопротивления R_0 и R , после коммутации остается только R . Значение $E = const$. Требуется определить граничные условия.



а



б



Рис. 3.3. Электрическая цепь, рассматриваемая в примере.

План расчета граничных условий:

1. Исследовать цепь до коммутации (время $t=0_-$). Для этого зарисовать эквивалентную схему замещения цепи до коммутации (учесть состояние ключа S - замкнут/разомкнут, действие источника питания E - постоянное/переменное). Рассчитать токи и напряжения в соответствии с вырожденной схемой.

Согласно определению ПП, цепь до коммутации находится в старом установившемся режиме. Для примера на рис. 3.3, а к цепи подключен источник постоянного э.д.с. Тогда схема преобразуется в вырожденную (рис. 3.3, б), т.е. индуктивность заменяется короткозамкнутым отрезком, а ёмкость – разрывом. В такой схеме ННУ $i_L(0_-) = i(0_-) = 0$, а $u_C(0_-) = E$. ЗНУ до коммутации (время $t=0_-$) ток через ёмкость $i_C(0_-) = i_L(0_-) = 0$, напряжение на индуктивности $u_L(0_-) = 0$, и напряжение на сопротивлении по закону Ома $u_R(0_-) = i(0_-) \cdot R = 0$.

2. Исследовать цепь в момент после коммутации (время $t=0_+$): Зарисовать эквивалентную схему замещения цепи после коммутации (состояние ключа S - замкнут, воздействие $E = \text{const}$, законы коммутации). Цепь находится в неустановившемся режиме. Произвести расчет токов и напряжений любым удобным методом (законы Кирхгофа, МКТ, МУП и т.д.)

В момент коммутации после замыкания ключа S , рассмотрим схему (рис. 3.3, в). Элементы не изменяются, т.к. режим неустановившийся. Составим уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$E = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t), \quad (3.3)$$

где $u_R(t) = i_L(t)R$ падение напряжения на сопротивлении,

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \text{ - падение напряжения на индуктивности,}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \text{ - падение напряжения на ёмкости. Следовательно (3.3)}$$

запишем как $E = i_L(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i_C(t) dt.$

Из законов коммутации в момент $t=0_+$ определяем ННУ: $i_L(0) = i_L(0_-) = 0$ и $u_C(0) = u_C(0_-) = E$, а также ЗНУ, используя уравнение (3.3):

$$E = i_L(0_+) \cdot R + u_L(0_+) + u_C(0_+) = 0 \cdot R + u_L(0_+) + E.$$

Тогда $u_R(0_+) = 0$, $u_C(0_+) = E$, а $u_L(0_+) = E - u_C(0_+) = E - E$.

3. Исследовать цепи в новом установившемся режиме (время $t=\infty$): Здесь исследовать цепь после коммутации. Учесть воздействие (постоянное/гармоническое и т.д.). Рассчитать токи и напряжения на основе вырожденной схемы любым удобным методом (законы Кирхгофа, МКТ, МУП и т.д.)

В установившемся режиме при подключении постоянного э.д.с. схему следует перерисовать, также заменив индуктивность – короткозамкнутым отрезком, а ёмкость – разрывом (рис. 3.3, б). В такой схеме ННУ $i_L(t = \infty) = 0$, а $u_C(t = \infty) = E$. Найденные величины занесем в таблицу граничных условий.

Таблица 3.1.

Граничные условия

Значения величин токов и напряжений	$t=0_-$ (до коммутации)	$t=0$ (момент коммутации)	$t=\infty$ (установившийся режим)
$i_L(t)$	0	0	0
$u_C(t)$	E	E	E

3.2 Математические основы анализа переходных процессов. Классический метод

Задача исследования переходных процессов заключается в том, чтобы выяснить, по какому закону и как долго будет наблюдаться заметное отклонение токов в ветвях и напряжений на участках цепи от их установившихся значений. Так, например, если в исследуемой ветви некоторой цепи до коммутации существовал постоянный ток I_1 , а в установившемся режиме после коммутации он стал I_2 , то нас будет интересовать закон изменения переходного тока $i(t)$ между моментом коммутации ($t=0$). Кроме того, необходимо найти неизвестный нам момент времени t_1 , когда переходный процесс можно считать закончившимся.

При анализе переходных процессов в электрических цепях считается, что:

1) время переходного процесса, теоретически бесконечно длительное, (переходный режим асимптотически приближается к новому установившемуся режиму), ограничивают условным пределом – длительностью переходного процесса;

2) установившийся режим после коммутации рассчитывают при теоретическом условии $t \rightarrow \infty$, т.е. после коммутации прошло бесконечно большое время.

Установившийся режим до коммутации рассчитывают обычно в предположении, что к моменту коммутации в цепи закончился предыдущий переходный процесс. Хотя иногда приходится анализировать переходные процессы, возникающие в цепи, когда предыдущий переходный процесс, вызванный прежними коммутациями, еще не закончился. Но это не изменяет теоретическую постановку задачи.

3.2.1 Принужденный и свободный режим

Анализ переходных процессов производят путем решения дифференциальных уравнений, составленных для исследуемой электрической цепи на основе законов Кирхгофа или метода контурных токов.

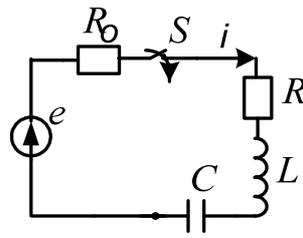


Рис. 3.4 Последовательная RLC -цепь. Ключ S замыкается

Пусть в некоторой цепи (рис. 3.4) при замыкании ключа S к источнику э.д.с. e подключаются сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Требуется определить переходный ток i .

Электрическое состояние схемы после коммутации описывается интегро-дифференциальным уравнением, записанным на основании II закона Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений:

$$L \frac{di(t)}{dt} + (R_0 + R)i(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = e. \quad (3.4)$$

Если это уравнение продифференцировать по времени получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, у которого в качестве постоянных коэффициентов выступают параметры цепи или их комбинации:

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + (R_0 + R) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de}{dt}. \quad (3.5)$$

Из математики известно, что полное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами находят в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Поскольку в правой части дифференциальных уравнений, описывающих электрическое состояние цепей, обычно находится напряжение источника (внешняя вынуждающая сила), то частное решение находят из анализа установившегося режима после коммутации.

Определение. *Принужденным режимом* называется такой режим, при котором частное решение дифференциального уравнения (3.5) определяют из анализа установившегося режима после коммутации. Отсюда токи или напряжения, найденные в данном режиме, называют принужденными.

Расчет принужденного режима, когда внешние источники вырабатывают постоянную или синусоидальную э.д.с., не представляет трудностей и может быть осуществлен любым известным методом.

Однородное дифференциальное уравнение получают из выражения (3.5) путем "освобождения" его от правой части. Физически это означает, что исследуемая цепь "освобождается" от внешней вынуждающей силы.

Определение. Токи или напряжения, найденные при решении однородного дифференциального уравнения, называются *свободными*.

Свободные токи и напряжения являются результатом действия внутренних источников схемы: э.д.с. самоиндукции, возникающих в катушках, и напряжений на конденсаторах, когда и те, и другие не уравновешены внешними источниками.

Схематически анализ переходного процесса может быть представлен как результат наложения двух режимов: принужденного и свободного.

Определение. Действительный (переходный) ток в соответствии с принципом суперпозиции равен сумме установившегося (принужденного) и свободного токов: $i(t) = i_{уст}(t) + i_{св}(t)$.

Заметим, что физически существуют только переходные токи и напряжения, а разложение их на свободные и принужденные составляющие является математическим приемом, позволяющим упростить расчет переходных процессов в линейных цепях. Напомним, что принцип суперпозиции применим лишь к линейным цепям.

Существуют различные методы решения однородного дифференциального уравнения, полученного из выражения (3.5):

$$\frac{d^2 i_{св}(t)}{dt^2} + \frac{(R_0 + R)}{L} \frac{di_{св}(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_{св}(t) = 0 . \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) алгебраизуем, заменив производную $\frac{d}{dt} \rightarrow p$ оператором $\langle p \rangle$. Выполненная замена позволит уравнение (3.6) свести к алгебраическому

уравнению 2-ой степени, причем степень полинома зависит от количества накопителей энергии в схеме

$$p^2 + \frac{(R_0 + R)}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (3.7)$$

Полученное уравнение является характеристическим, и для нахождения решения необходимо найти его корни p_1 и p_2 . Решением уравнения (3.6) является выражение вида [7]:

$$i_{CB}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (3.8)$$

где число слагаемых равно порядку дифференциального уравнения, A_1, A_2 постоянные интегрирования, которые находят из начальных условий с помощью законов коммутации.

3.2.2 Характеристическое уравнение

Определение. Однородное дифференциальное уравнение (3.6), в котором проведена алгебраизация путем замены производных токов n -ой степени $\frac{d^n i(t)}{dt^n} \rightarrow p^n$ или производных напряжений $\frac{d^n u(t)}{dt^n} \rightarrow p^n$ оператором $\langle p \rangle$ n -ой степени называется **характеристическим** (3.7). Характеристическое уравнение можно составить различными методами:

1. классическим методом;
2. способом, который заключается в приравнении нулю главного определителя системы уравнений Кирхгофа для свободных составляющих переменных;
3. инженерным способом, который заключается в приравнении нулю входного операторного сопротивления схемы относительно любой ее ветви.

1. Первый метод – классический, когда характеристическое уравнение составляется строго в соответствии с дифференциальным по классической схеме. При расчете переходных процессов в сложной схеме составляется система из “ m ” дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы

цепи после коммутации. Так как корни характеристического уравнения являются общими для всех переменных, то решение системы дифференциальных уравнений выполняется относительно любой переменной (по выбору). В результате решения получают неоднородное дифференциальное уравнение с одной переменной. Составляют характеристическое уравнение в соответствии с полученным дифференциальным и определяют его корни.

Пример. Составить характеристическое уравнение и определить его корни для переменных в схеме рис. 3.5. Параметры элементов заданы в общем виде.

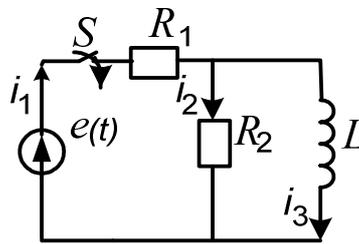


Рис. 3.5. Электрическая схема

Система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L \frac{di_3}{dt} = e(t) & (1) \Rightarrow i_1 = \frac{e(t)}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ -i_2 R_2 + L \frac{di_3}{dt} = 0 & (2) \Rightarrow i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad (3.9)$$

Решим систему уравнений относительно переменной i_3 , в результате получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{e(t)}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} - i_3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3 = \frac{1}{R_1} \cdot e(t) \quad (3.10)$$

Алгебраизуем уравнение (3.10), заменив производную тока $i_3 \frac{d}{dt} \rightarrow p$ оператором $\langle p \rangle$, получим характеристическое уравнение и найдем его корень:

$$p\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \quad [c^{-1}] \quad (3.11)$$

2. Второй способ составления характеристического уравнения заключается в приравнивании нулю главного определителя системы уравнений Кирхгофа для свободных составляющих переменных.

Пусть свободная составляющая произвольного тока имеет вид $i_{\text{кСВ}} = A_{\text{к}} e^{pt}$,

$$\text{тогда: } \frac{di_{\text{кСВ}}}{dt} = p \cdot A_{\text{к}} e^{pt} = p \cdot i_{\text{кСВ}} \quad ; \quad \text{а } \int i_{\text{кСВ}} dt = \int A_{\text{к}} e^{pt} dt = \frac{1}{p} A_{\text{к}} e^{pt} = \frac{1}{p} i_{\text{кСВ}} \quad .$$

Система уравнений для свободных составляющих получается из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа (3.9) путем замены производных от переменных на множитель $\langle p \rangle$, и интегралов (если они присутствуют в системе уравнений) – на $\left\langle \frac{1}{p} \right\rangle$. Для рассматриваемого примера система уравнений для свободных составляющих имеет вид:

$$\begin{cases} i_{1\text{СВ}} \cdot R_1 + 0 + p \cdot L \cdot i_{3\text{СВ}} = 0 \\ 0 + i_{2\text{СВ}} \cdot R_2 + p \cdot L \cdot i_{3\text{СВ}} = 0. \\ i_{1\text{СВ}} - i_{2\text{СВ}} - i_{3\text{СВ}} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Составим определитель для системы уравнений (3.11) и приравняем его к нулю, при этом характеристическое уравнение и его корень:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & pL \\ 0 & -R_2 & pL \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot pL - R_2 \cdot pL = 0 \Rightarrow p = \frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}. \quad (3.13)$$

3. Инженерный способ составления характеристического уравнения заключается в приравнивании к нулю входного операторного сопротивления (входной операторной проводимости) схемы относительно любой ее ветви.

Операторное сопротивление элемента получается из его комплексного сопротивления путем простой замены множителя $j\omega$ на p , следовательно:

$$Z_R(p) = R; \quad Z_L(p) = pL; \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}. \quad \text{Для рассматриваемого примера:}$$

$$\begin{aligned}
Z_1(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot pL}{R_2 + pL} = 0 &\Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}; \\
Z_2(p) = R_2 + \frac{R_1 \cdot pL}{R_1 + pL} = 0 &\Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}; \\
Z_3(p) = pL + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0 &\Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Третий способ является наиболее простым и экономичным, поэтому он чаще других применяется при расчете переходных процессов в электрических цепях.

3.2.3 Корни характеристического уравнения. Связь вида корней и характера свободных составляющих

Определение. *Корень* - это значение переменной p , обращающее *характеристическое уравнение* в верное равенство.

Корни характеристического уравнения характеризуют свободный переходной процесс в схеме без источников энергии. Такой процесс протекает с потерями энергии и поэтому затухает во времени. Из этого следует, что корни характеристического уравнения должны быть отрицательными или иметь отрицательную вещественную часть.

В общем случае порядок дифференциального уравнения, которым описывается переходный процесс в схеме, и, следовательно, степень характеристического уравнения и число его корней равны числу независимых начальных условий, или числу независимых накопителей энергии (катушек L и конденсаторов C).

Пусть в некоторой цепи (рис. 3.6) при замыкании ключа S к источнику э.д.с. e подключаются сопротивление R , катушка индуктивности L и конденсатор емкостью C . Составить характеристическое уравнение, найти корни этого уравнения, определить переходный ток i .

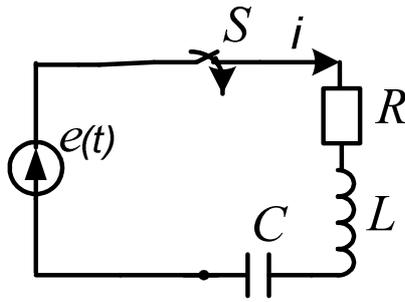


Рис. 3.6. Электрическая схема последовательной RLC - цепи

После коммутации на основании II закона Кирхгофа составим интегро-дифференциальное уравнение для мгновенных токов и напряжений, описывающих электрическое состояние схемы:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t). \quad (3.15)$$

Продифференцировав по времени выражение (3.15), получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, у которого в качестве постоянных коэффициентов выступают параметры цепи:

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}. \quad (3.16)$$

Полное решение линейного дифференциального уравнения (3.16) находят в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения. Частное решение находят из анализа установившегося режима после коммутации, а для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение классическим методом (п.п.3.10)

$$\frac{d^2i_{CB}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_{CB}(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_{CB}(t) = 0.$$

$$p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0 \quad (3.17)$$

Полученное характеристическое уравнение имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (3.18)$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания, а $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ резонансная частота.

В зависимости от соотношения между величинами ω_0 и α , или, то же самое, в зависимости от добротности цепи, $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\alpha}$. Корни характеристического уравнения (3.17) могут быть вещественными различными, комплексно-сопряженными или вещественными одинаковыми (кратными). Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. Вещественные различные корни.

При малой добротности последовательной RLC – цепи ($Q < \frac{1}{2}$, т.е. $R > 2\rho$ и $\alpha > \omega_0$) характеристическое уравнение (3.17) имеет два различных вещественных отрицательных корня, а выражение для свободной составляющей тока цепи после коммутации ($t \geq 0$) содержит два экспоненциальных члена:

$$i_{\text{СВ}}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (3.19)$$

а действительный переходный ток равен:

$$i(t) = i_{\text{СВ}}(t) + i_{\text{УСТ}} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i_{\text{УСТ}} \quad (3.20)$$

Дифференцируя правую и левую части выражения (3.20) и используя независимые $[i(0_+) = i_L(0_+) = 0]$ и зависимые $[\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u_L(t = 0_+) = \frac{E}{L}]$ начальные, а также граничные при $t = \infty$ условия, составляем уравнения для определения постоянных интегрирования A_1, A_2 :

$$\begin{cases} i(0) = i_{CB}(0) + i_{YCT}(t = \infty); \\ \frac{di(t)}{dt} = \frac{di_{CB}(t)}{dt} + \frac{di_{YCT}}{dt}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \frac{di_{CB}(t)}{dt} = p_1 \cdot A_1 e^{p_1 t} + p_2 \cdot A_2 e^{p_2 t}, \quad \text{а} \quad i_{YCT}(t = \infty) = 0.$$

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2; \\ \frac{E}{L} = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}; \\ A_2 &= \frac{-E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-E}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}. \end{aligned}$$

(3.21)

С учетом уравнения (3.20) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид:

$$i(t) = i_{CB}(t) + i_{YCT} = \frac{E}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (3.22)$$

Расположение корней p_1 и p_2 характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного p и зависимость нормированного тока исследуемой цепи от времени $\bar{i}(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} i(t) = e^{p_1 t} - e^{p_2 t} = \bar{i}^{(1)} + \bar{i}^{(2)}$ приведены на

рис. 3.7, а. Переходный процесс в цепи носит *апериодический* (неколебательный) характер, причем вследствие того, что $|p_1| < |p_2|$, вторая составляющая нормированного тока цепи $\bar{i}^{(2)}$ затухает быстрее, чем первая $\bar{i}^{(1)}$.

Случай 2. Комплексно-сопряженные корни.

При большой добротности последовательной RLC – цепи ($Q > \frac{1}{2}$, т.е. $R < 2\rho$ и $\alpha < \omega_0$) характеристическое уравнение (3.17) имеет два комплексно-сопряженных корня: $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – частота свободных колебаний в цепи. Ток в цепи после коммутации определяется выражением (3.19), которое после нахождения постоянных интегрирования

$$A_1 = \frac{E}{2j\omega L}, \quad A_2 = \frac{-E}{2j\omega L}, \quad \text{может быть с учетом соответствия}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

преобразовано

к

виду

$$i_{CB}(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t = I_m(t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } I_m(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t}.$$

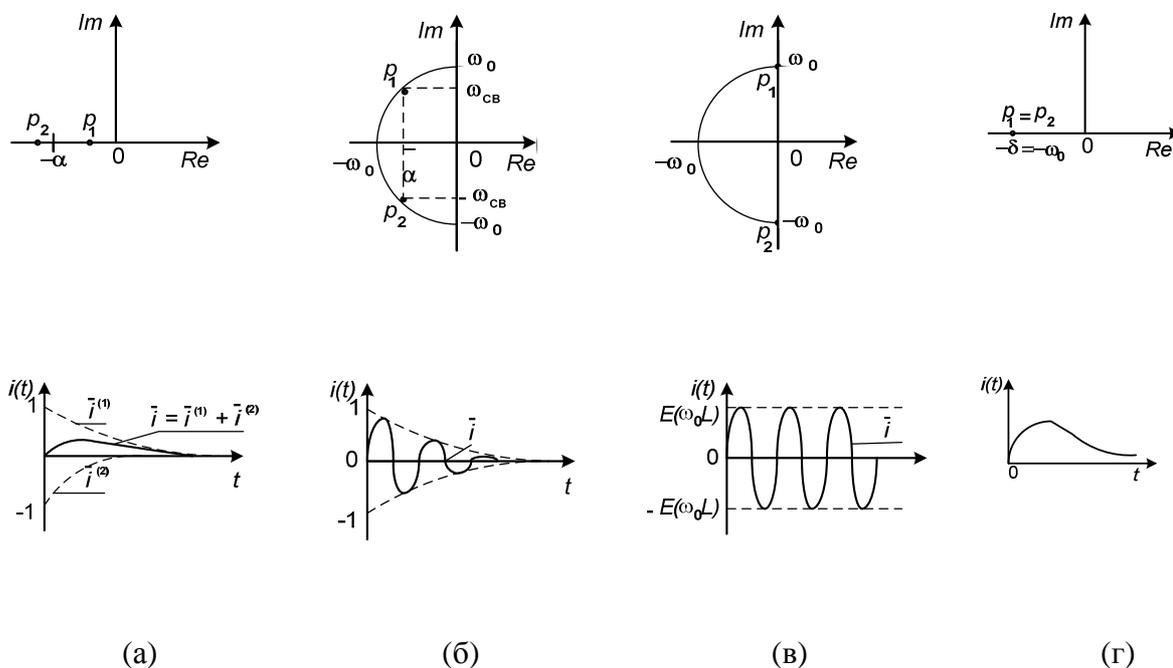


Рис. 3.7 Расположение корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного и зависимость свободной составляющей тока последовательной RLC – цепи от времени: а) - $\alpha > \omega_0$; б) - $\alpha < \omega_0$; в) - $\alpha = 0$; г) - $\alpha = \omega_0$.

Расположение корней $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного p и зависимость тока цепи от времени показаны на рис. 3.7, б. Корни характеристического уравнения расположены симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости на полуокружности радиусом, численно равным резонансной частоте последовательного колебательного контура ω_0 .

Выводы:

1) При включении в последовательную RLC - цепь с высокой добротностью идеального источника постоянного напряжения переходные процессы в ней имеют *колебательный* характер.

2) Колебательный характер переходного процесса в цепи связан с периодическим обменом энергии между емкостью и индуктивностью, а затухание колебаний объясняется потерями энергии в сопротивлении.

3) Ток в цепи представляет собой затухающую гармоническую функцию (точнее квазигармоническую функцию), амплитуда которой $I_m(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t}$ экспоненциально уменьшается во времени.

4) Чем меньше коэффициент затухания α , тем ближе к мнимой оси расположены корни уравнения, меньше различие между ω и ω_0 и медленнее затухание свободных процессов.

5) В пределе, при $\alpha = 0$, корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси, частота свободных колебаний совпадает с резонансной частотой цепи, а колебательные процессы в цепи носят *незатухающий* характер (рис. 3.7, в).

б) Резонансная частота RLC - цепи численно равна частоте свободных колебаний для случая, когда коэффициент затухания $\alpha = 0$.

Случай 3. Кратные корни.

При добротности $Q = \frac{1}{2}$, т.е. $R = 2\rho$ и $\alpha = \omega_0$ характеристическое уравнение (3.17) имеет два одинаковых вещественных отрицательных корня, $p_1 = p_2 = -\alpha$, расположенных на отрицательной вещественной полуоси в плоскости комплексного переменного (рис. 3.7, г) выражение для свободной составляющей тока цепи после коммутации ($t \geq 0$) содержит два экспоненциальных члена:

$$i_{CB}(t) = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{-\alpha t}. \quad (3.23)$$

Определяя с помощью зависимых начальных условий значения постоянных интегрирования $A_1 = 0$; $A_2 = \frac{E}{L}$ и подставляя их в выражение (3.23), окончательно получаем $i(t) = \frac{E}{L}te^{-\alpha t}$.

Как и в случае вещественных различных корней, переходный процесс в цепи при одинаковых вещественных корнях имеет аperiодический характер (рис. 3.7, г), поэтому условие $Q = \frac{1}{2}$ является предельным случаем существования в цепи аperiодических свободных процессов.

Выводы.

1) Режим работы цепи на границе между колебательным и аperiодическим переходными процессами называется *критическим*.

2) Характер переходных процессов в последовательной RLC - цепи полностью определяется расположением корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного.

3) Зависимость характера переходных процессов от расположения корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного присуща не только последовательной RLC -цепи, она является общим свойством линейных электрических цепей любого порядка сложности.

3.2.4 Постоянная времени τ

На рис. 3.8. штриховыми линиями показаны кривые $\pm I_m(t)$, которые характеризуют закон изменения амплитуды тока во времени. Эти кривые называются *огibaющими*.

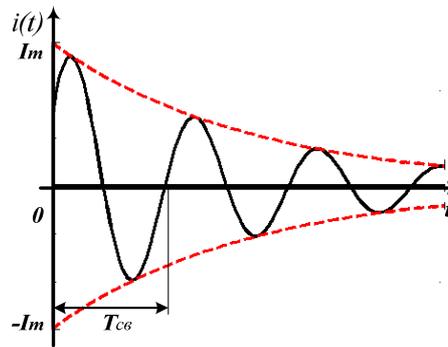


Рис.3.8. Графическое определение постоянной времени.

Определение. Графически, величина, численно равная длине подкасательной к огибающей тока $\pm I_m(t)$ называется *постоянной времени* τ последовательной RLC –цепи.

Определение. Время $t = \tau$, в течении которого свободная составляющая тока или напряжения, убывает в $e = 2,718$ раз по сравнению с начальным значением, называется постоянной времени и равна в общем случае $\tau = \frac{1}{|p|}$, для последовательной RLC - цепи

$$\tau = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{2L}{R} = \frac{2Q}{\omega_0}. \quad (3.24)$$

Из выражения (3.24) следует, что постоянная времени последовательной RLC - цепи пропорциональна половине полосы пропускания одиночного колебательного контура на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{\Pi_\omega}$.

Выводы:

Чем уже полоса пропускания контура, тем медленнее затухают в нем свободные составляющие токов и напряжений.

3.2.5 Определение постоянных интегрирования A

Общий вид решения для любой переменной при расчете переходного процесса может быть составлен только из анализа схемы цепи, без составления и решения системы дифференциальных уравнений:

$$i(t) = i_{CB}(t) + i_{уст} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i_{уст}$$

Определение постоянных интегрирования производится на заключительном этапе расчета переходного процесса, когда остальные составляющие решения уже найдены. Постоянные интегрирования определяются путем подстановки в решение для искомой функции соответствующих начальных условий.

Пусть решение для искомой функции $i(t)$ содержит только одну постоянную интегрирования: $i(t) = i_{CB}(t) + i_{УСТ} = A \cdot e^{pt} + i_{УСТ}$.

Постоянная интегрирования находится путем подстановки в решение начального условия для самой функции, т.е. $i(0)$:

$$i(0) = i_{CB}(0) + i_{УСТ}(t = \infty) = A + I_{УСТ} \Rightarrow A = i(0) - I_{УСТ}.$$

Пусть решение для искомой функции $i(t)$ содержит две постоянных интегрирования и имеет вид:

$$i(t) = i_{CB}(t) + i_{УСТ} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i_{УСТ}$$

Постоянные интегрирования в этом случае находятся путем подстановки в решение начальных условий для самой функции $i(0)$ и для ее первой производной $di/dt(0)$:

$$\begin{cases} i(0) = i_{CB}(0) + i_{УСТ}(t = \infty); \\ \frac{di}{dt}(0) = p_1 \cdot A_1 e^{p_1 \cdot (t=0)} + p_2 \cdot A_2 e^{p_2 \cdot (t=0)} + I_{УСТ}. \end{cases}$$

В результате совместного решения этой системы уравнений определяют искомые постоянные интегрирования A_1 и A_2 .

3.2.6 Порядок анализа переходного процесса классическим методом

Система интегро-дифференциальных уравнений, составленных в соответствии с законами Кирхгофа или методом контурных токов, может быть сведена путем подстановки к одному дифференциальному уравнению, которое используется для составления характеристического уравнения.

Порядок дифференциального, следовательно, и характеристического уравнения зависит от числа реактивных элементов приведенной схемы. Главная трудность в решения задачи классическим методом для уравнений высоких

порядков состоит в отыскании корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования. Поэтому для решения уравнений порядка выше второго применяют другие методы, в частности операторный метод, основанный на применении преобразования Лапласа и исключающий трудоемкую процедуру отыскания постоянных интегрирования.

Для практических целей при анализе переходных процессов в любой схеме классическим методом может быть рекомендован следующий порядок:

1. Рассчитать граничные условия и заполнить таблицу граничных условий.
2. Составить дифференциальные уравнения для свободного процесса ($E = 0$) в схеме после коммутации по законам Кирхгофа или по методу контурных токов.

3. Алгебраизировать данные уравнения, получить характеристическое уравнение и найти его корни.

4. Записать общие выражения для искомых напряжений и токов в соответствии с видом корней характеристического уравнения.

5. Переписать величины, полученные в п. 4, и производные от них при $t = 0$.

6. Подставить начальные условия из п. 1 в уравнения п. 5 и найти постоянные интегрирования.

7. Записать законы изменения искомых токов и напряжений.

8. Представить графики переходных токов и напряжений.

Отработаем порядок анализа переходного процесса классическим методом на примерах.

3.2.7 Применение классического метода в расчетах переходных процессов и его практическая ограниченность

В данном параграфе предполагается не только практическое знакомство с классическим методом расчета переходных процессов, но и особенности этих процессов в рассматриваемых задачах.

Переходные процессы в электрических цепях с последовательно соединенными резисторами и индуктивностями

а) Короткое замыкание в цепи с резистором и индуктивностью

Рассчитаем переходные процессы в цепи, изображенной на рис. 3.9, происходящие после замыкания ключа.

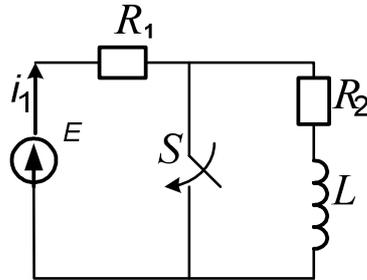


Рис. 3.9. RL – цепь в режиме короткого замыкания

1. Определим переходной ток через индуктивность.

Воспользуемся порядком анализа переходных процессов (п.3.1).

1. Рассчитаем граничные условия и заполним таблицу граничных условий:

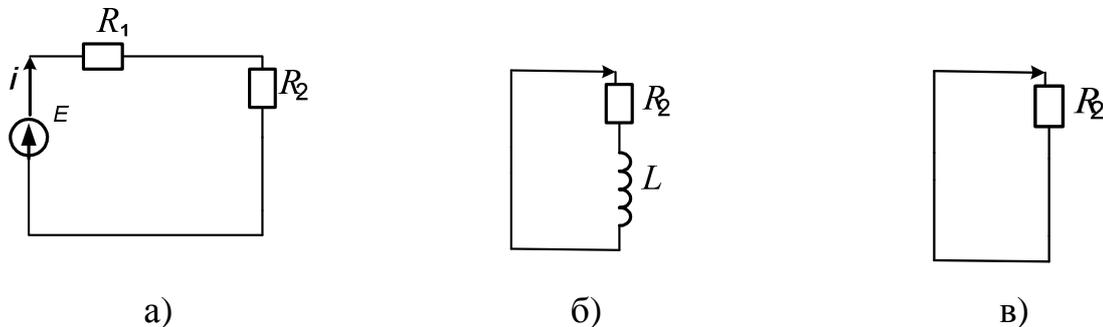


Рис. 3.10 Электрические схемы, поясняющие расчеты граничных условий

1) рассчитаем установившийся режим в цепи до коммутации (до замыкания ключа) в момент $t = 0$ (рис.3.10 а) и определим из него независимое начальное условие — ток через катушку, непосредственно предшествующий коммутации $i(0_-) = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$;

2) рассчитаем зависимые начальные условия в момент времени $t = 0_+$ (рис.3.10 б) — напряжение на индуктивности $u_L(0_+)$ при условии выполнения

законов коммутации, а именно, $i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$. Составим уравнение

по 2-му закону Кирхгофа: $u_L(0_+) + i(0_+) \cdot R_2 = 0 \Rightarrow u_L(0_+) = -\frac{ER_2}{(R_1 + R_2)}$;

3) рассчитаем установившийся режим в цепи после коммутации в момент $t = \infty$ (рис. 3.10 в) – ток через индуктивность $i(t = \infty) = i_{уст} = 0$;

4) составим таблицу граничных условий

Таблица 3.2

Граничные условия

Значения переменных схем	Время		
	$t = 0_-$	$t = 0$	$t = \infty$
$i(t)$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)}$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)}$	0
$u_L(t)$	0	$-\frac{ER_2}{(R_1 + R_2)}$	0

2. Составим дифференциальное уравнение для нахождения свободной составляющей (при $E = 0$) в схеме после коммутации (рис. 3.10 б) по 2-му закону Кирхгофа:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_2 \cdot i(t) = 0$$

3. Алгебраизуем уравнение, заменив производную тока на оператор p $\frac{d}{dt} \rightarrow p$, получим характеристическое уравнение и найдем корень

$$\text{характеристического уравнения: } Lp + R_2 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_2}{L} [c^{-1}].$$

4. Запишем общие выражения для искомого тока $i(t) = i_{св}(t) + i_{уст} = A \cdot e^{pt} + i_{уст}$, где A – постоянная интегрирования.

5. Перепишем величины, полученные в п. 4 при $t = 0$. Производную тока от тока находить нет необходимости, поскольку для нахождения постоянной интегрирования достаточно одного уравнения:

$$i(0) = i_{св}(0) + i_{уст}(t = \infty) = A + I_{уст} \Rightarrow A = i(0) - I_{уст}$$

6. Подставим начальные условия из п. 1 в уравнение п. 5, найдем постоянную интегрирования $A = i(0) - I_{уст} = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$ и постоянную времени

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R_2}.$$

7. Запишем закон изменения искомого тока

$$i(t) = \frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_2 t}{L}} = \frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

8. Расчеты значений переходного тока внесем в таблицу 3.6. и построим график рис. 3.11 а:

Таблица 3.3

Расчет графика переходного тока

Переменные	Время					
	$t = 0$	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)}$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-1}$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-2}$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-3}$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-4}$	$\frac{E}{(R_1 + R_2)} e^{-5}$
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0.368	0.135	0.05	0.018	0.007

II. Определим э.д.с. самоиндукции индуктивности.

Поскольку э.д.с. самоиндукции связана с током через индуктивность соотношением: $e_L = -L \frac{di(t)}{dt} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, при $t \geq 0$. В момент коммутации эта э.д.с. равна напряжению на сопротивлении R_2 , а в дальнейшем уменьшается по экспоненциальному закону (рис. 3.11 б)

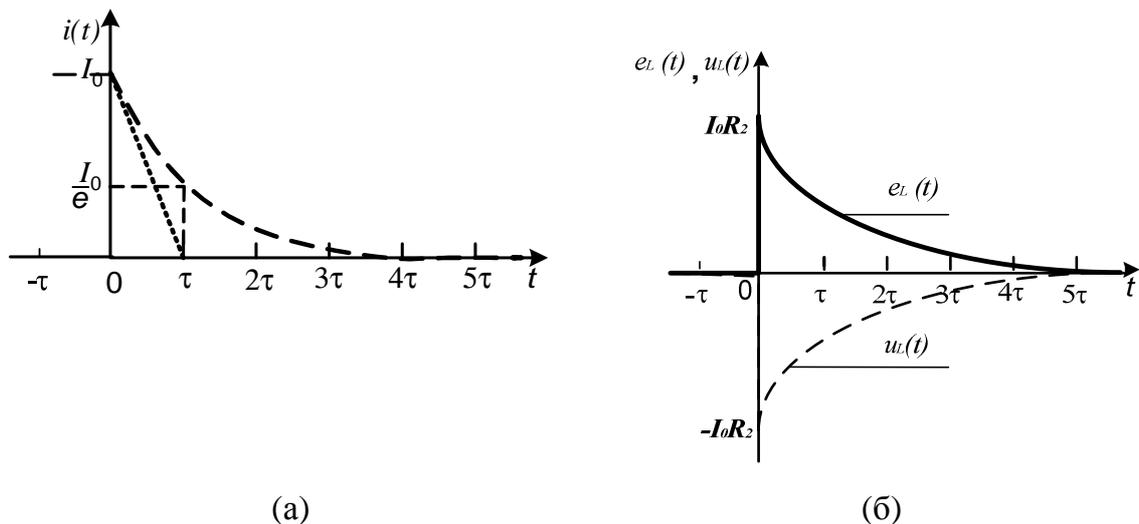


Рис. 3.11 Переходные процессы в RL -цепи с коротким замыканием: а) ток через катушку; б) э.д.с. самоиндукции и напряжение на катушке.

Выводы.

- При коротком замыкании в рассматриваемой цепи ток в ней изменяется по экспоненциальному закону, уменьшаясь от начального значения до нуля.

- Скорость изменения тока определяется постоянной времени цепи, которая равна индуктивности катушки, деленной на активное сопротивление цепи.

- Практически можно считать, что переходный процесс заканчивается при $t \approx (3...5)\tau$, когда первоначальное значение тока уменьшается по модулю на порядок.

- Напряжение на индуктивности в начальный момент времени равно напряжению на активном сопротивлении: $u_L(0_+) = I_0 R_2$.

- С энергетической точки зрения рассматриваемый переходный процесс характеризуется расходом энергии магнитного поля индуктивности на тепловые потери в резисторе. Следует отметить, что сопротивление резистора влияет не на количество выделенной теплоты W , а на начальное значение напряжения индуктивности и длительность процесса, а именно:

$$W = \int_0^{\infty} p(t) dt = \int_0^{\infty} i(t)^2 R_2 dt = I_0^2 R_2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{LI_0^2}{2}.$$

3.2.8 Включение цепи с резистором и индуктивностью на постоянное напряжение

Дана электрическая схема RL -цепи, к которой подключено постоянное напряжение $E=const$. Рассчитать переходный ток через индуктивность и напряжение на индуктивности.

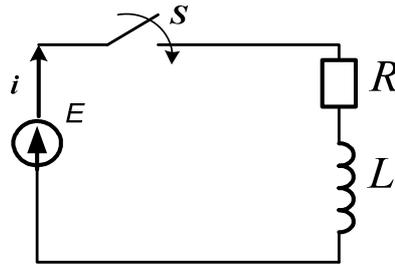


Рис. 3.12. Электрическая схема RL –цепи с постоянным напряжением E .

1. Определим переходной ток через индуктивность.

Воспользуемся порядком анализа переходных процессов (п.3.1).

1. Рассчитаем граничные условия и заполним таблицу граничных условий:

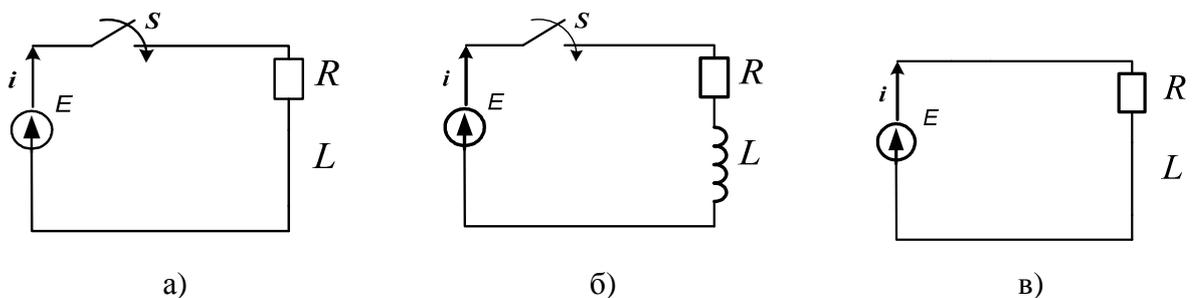


Рис. 3.13. Электрические схемы, поясняющие расчеты граничных условий

1) рассчитаем установившийся режим в цепи до коммутации (до замыкания ключа) в момент $t = 0$ (рис. 3.13 а) и определим из него независимое начальное условие — ток через индуктивность, непосредственно предшествующий коммутации $i(0_-) = 0$;

2) рассчитаем зависимые начальные условия в момент времени $t = 0_+$ (рис.3.13 б) — напряжение на индуктивности $u_L(0_+)$ при условии

выполнения законов коммутации, а именно, $i(0_+) = i(0_-) = 0$. Составим уравнение по 2-му закону Кирхгофа:
 $u_L(0_+) + i(0_+) \cdot R_2 = E \Rightarrow u_L(0_+) = E$;

3) рассчитаем установившийся режим в цепи после коммутации в момент $t = \infty$ (рис.3.13 в) – ток через индуктивность $i(t = \infty) = I_{уст} = \frac{E}{R}$;

4) заполним таблицу граничных условий

Таблица 3.4

Граничные условия

Значения переменных схем	Время		
	$t = 0_-$	$t = 0$	$t = \infty$
$i(t)$	0	0	$\frac{E}{R}$
$u_L(t)$	0	E	0

2. Составим дифференциальное уравнение для нахождения свободной составляющей (при $E = 0$) в схеме после коммутации (рис. 3.13 б) по 2-му закону Кирхгофа:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = 0 .$$

3. Алгебраизуем уравнение, заменив производную тока на оператор p $\frac{d}{dt} \rightarrow p$, получим характеристическое уравнение и найдем корень характеристического уравнения: $Lp + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} [c^{-1}]$.

4. Запишем общие выражения для искомого тока $i(t) = i_{св}(t) + i_{уст} = A \cdot e^{pt} + i_{уст}$, где A – постоянная интегрирования.

5. Перепишем величины, полученные в п. 4 при $t = 0$. Производную от тока находить нет необходимости, поскольку для нахождения постоянной интегрирования достаточно одного уравнения:
 $i(0) = i_{св}(0) + i_{уст}(t = \infty) = A + I_{уст} \Rightarrow A = i(0) - I_{уст}$, где $i(0) = 0$.

6. Подставим начальные условия из п. 1 в уравнение п. 5, найдем постоянную интегрирования $A = i(0) - I_{уст} = \frac{-E}{R}$ и постоянную времени

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R}.$$

7. Запишем закон изменения переходного тока

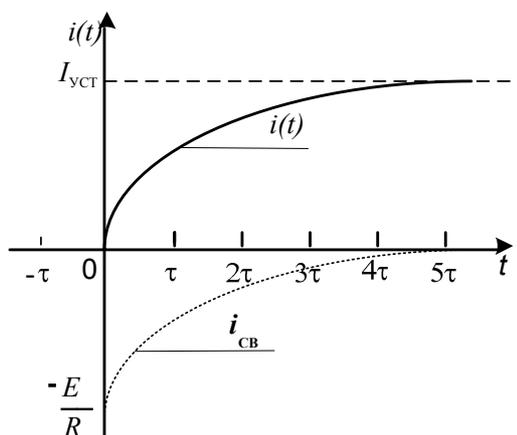
$$i(t) = \frac{-E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

8. Расчеты значений переходного тока внесем в таблицу 3.5. и построим график рис. 3.14 а:

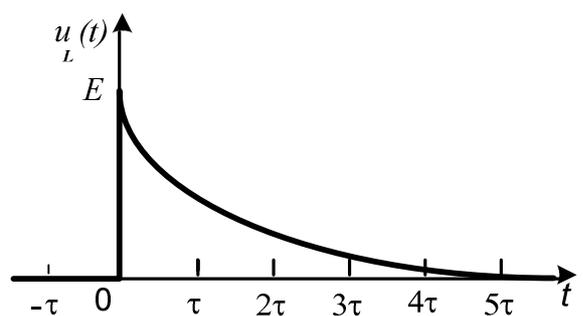
Таблица 3.5

Расчет графика переходного тока

Переменные	Время					
	$t = 0$	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$	$t = 5\tau$
$i(t)$	0	$\frac{E}{R}(1 - e^{-1})$	$\frac{E}{R}(1 - e^{-2})$	$\frac{E}{R}(1 - e^{-3})$	$\frac{E}{R}(1 - e^{-4})$	$\frac{E}{R}(1 - e^{-5})$



(а)



(б)

Рис. 3.13. Переходные процессы в RL -цепи с постоянным напряжением: а) ток через индуктивность; б) напряжение на индуктивности.

II. Определим напряжение на индуктивности.

Напряжение на индуктивности определяется $u_L = L \frac{di(t)}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}}$, при $t \geq 0$.

График переходного напряжения представлен на графике рис. 3.14 б.

Выводы.

• При включении рассматриваемого контура под постоянное напряжение ток в нем нарастает от нуля до установившегося значения. Скорость нарастания

тока равная $\frac{di(t)}{dt} = \frac{E}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$, изменяется по экспоненте с отрицательным показателем.

• В момент $t = 0$ скорость нарастания тока максимальна и равна $\frac{di(t=0)}{dt} = \frac{E}{L}$ [А/с], со временем она падает практически до нуля, процесс выходит на установившийся режим.

• В первый после коммутации момент $t = 0_+$ ток в цепи равен нулю $i(0_+) = i(0_-) = 0$, а напряжение на катушке максимально $u_L = E$, далее ток экспоненциально стремится к установившемуся значению, а напряжение экспоненциально снижается до нуля.

3.2.9 Включение цепи с резистором и индуктивностью на синусоидальное напряжение

Дана электрическая схема RL -цепи, к которой подключено постоянное напряжение $e(t) = E \cdot \cos(\omega t + \Psi)$. Рассчитать переходный ток через индуктивность.

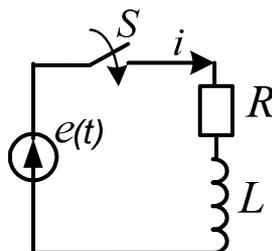


Рис. 3.15 Электрическая схема RL – цепи с переменным напряжением $e(t)$.

1. Рассчитаем граничные условия: если напряжение источника цепи

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \Psi), \text{ то установившийся ток } i_{уст}(t) = \frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\omega t + \Psi - \varphi),$$

где: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ – полное сопротивление цепи; $\varphi = \arg \operatorname{tg} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$ – угол сдвига

фаз между напряжением и током.

Выполнили п.п. 2 - 4, определили, что свободный ток определяется

$$i_{св}(t) = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-t/\tau}, \quad \text{а полный переходной ток}$$

$$i(t) = i_{св}(t) + i_{уст} = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\omega t + \Psi - \varphi).$$

п.п. 5.-6. Используя независимые начальные условия при $t = 0$ $i(0_+) = i(0_-) = 0$,

$$\text{находим постоянную интегрирования: } A = -\frac{E_m}{Z} \cdot \sin(\Psi - \varphi).$$

7. Переходный ток равен:

$$i(t) = i_{св}(t) + i_{уст} = -\frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\Psi - \varphi) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\omega t + \Psi - \varphi).$$

8. Рассчитаем значения переходного тока и построим график. Зависимости переходного тока от времени при различных значениях разностей $\Psi - \varphi$ показаны на рис. 3.16 а.

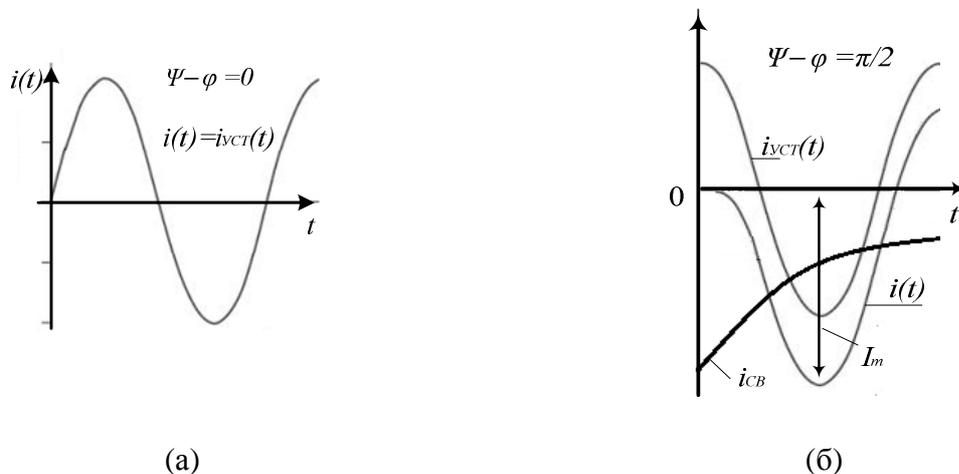


Рис. 3.16 Переходные процессы в RL -цепи с гармоническим напряжением

Анализ графиков рис. 3.16 позволяет сделать следующие выводы.

Выводы.

- Если в момент включения установившийся ток равен нулю (а это наблюдается при аргументах $\Psi - \varphi = 0$ или $\Psi - \varphi = \pi$), то свободная составляющая тока равна нулю и в цепи сразу возникает установившийся режим: $i(t) = i_{\text{СВ}}(t) + i_{\text{УСТ}} = \frac{E_m}{Z} \cdot \sin \omega t = I_m \sin \omega t$.

- Если в момент включения установившийся ток имеет наибольшее значение ($\Psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$), то и свободный ток достигает максимального по модулю значения, однако ни при каких условиях он не может превышать удвоенной амплитуды установившегося тока (рис. 3.16 б).

- Классический метод анализа применяют обычно для анализа процессов в несложных электрических цепях из-за большого количества расчетов.

3.3 Операторный метод анализа цепи в переходном режиме

Определение: *Операторный метод* — это метод расчёта переходных процессов в электрических цепях, основанный на переносе расчёта переходного процесса из области функций действительной переменной (времени, t) в область функций комплексного переменного (либо операторной переменной), в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические.

Таким образом, смысл операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной времени t , называемую **оригиналом** ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = -\delta + j\omega$, которую называют **изображением**. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p , а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых

переменных, т.е. происходит алгебраизация интегро-дифференциальных уравнений послекоммутационной системы. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода возвращаются к оригиналам цепи.

Основным моментом при расчете операторным методом является только определение независимых начальных условий. Далее на основе ННУ происходит переход от оригинала к изображению, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом.

3.3.1 Прямое преобразование Лапласа

Переход от функции времени $f(t)$ (оригинал) к некоторой комплексной функции $F(p)$ осуществляется с помощью преобразования Лапласа.

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с **прямым преобразованием Лапласа:**

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt. \quad (3.26)$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается, как:

$$F(p) \doteq f(t) \quad \text{или} \quad F(p) = L\{f(t)\}$$

3.3.2 Свойства преобразования Лапласа

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n F_k(p).$$

2. При умножении оригинала на коэффициент на тот же коэффициент умножается изображение:

$$A \cdot f(t) \doteq A \cdot F(p).$$

3. Произведение изображения функции $f(t)$ и экспоненты $e^{-\alpha t}$, соответствует сумме их изображений:

$$e^{-\alpha t} \cdot f(t) \doteq F(p + \alpha).$$

4. Изображение $F(p)$ производной функции $f(t)=df/dt$ имеет следующий вид [7]:

$$\frac{df(t)}{dt} \doteq p \cdot F(p) - f(0).$$

5. Изображение $F(p)$ второй производной функции $f''(t) = d^2f/dt^2$ имеет следующий вид [7]:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \doteq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

6. Изображение интеграла функции имеет следующий вид [7]:

$$\int f(t) \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

В качестве примера в табл. 3.5 приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе нестационарных режимов.

Таблица 3.5

Таблица соответствия

Оригинал	$f(t)$	E	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$sh \alpha t$	$ch \alpha t$
Изображение	$F(p)$	$\frac{E}{p}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Исходя из свойств производной функции и интеграла функции, можно установить соответствие между оригиналом и изображением для напряжения на индуктивности:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt},$$

Тогда изображение для напряжения на индуктивности определяется свойством 2 и 5:

$$U_L(p) = \int_0^t L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \cdot e^{-pt} dt = L \cdot p \cdot I_L(p) - Li_L(0).$$

$$U_L(p) = L \cdot p \cdot I_L(p) - Li_L(0) \tag{3.27}$$

Изображение напряжение на емкости определяется следующим образом:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_c(t) dt,$$
$$U_c(p) = \int_0^t \frac{1}{C} \cdot \int i_c(t) dt \cdot e^{-pt} dt = \frac{I_c(p)}{pC} + \frac{U_c(0)}{p}.$$
$$U_c(p) = \frac{I_c(p)}{pC} + \frac{U_c(0)}{p} \quad (3.28)$$

Определим изображение напряжения на сопротивлении. Согласно закону Ома: $U_R(t) = R \cdot i_R(t)$ и свойству линейности изображения получаем изображение напряжения на сопротивлении:

$$U_R(p) = \int_0^t R \cdot i_R(t) = R \cdot I_R(p). \quad (3.29)$$

Выводы:

1) Согласно выражению (3.27), при переходе от оригинала $u_L(t)$ к его изображению необходимо последовательно с индуктивностью подключить источник э.д.с., численно равный $Li_L(0)$. Причем направление э.д.с. должно совпадать с направлением тока в ветви, содержащей индуктивность (табл. 3.6);

2) Согласно выражению (3.28), при переходе от оригинала $u_C(t)$ к его изображению необходимо последовательно с емкостью подключить источник э.д.с., численно равный $\frac{U_C(0)}{p}$. При этом направление э.д.с. должно быть противоположным направлению тока на емкости (табл. 3.6);

3.3.3 Операторная схема замещения цепи

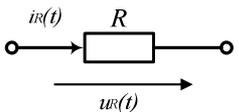
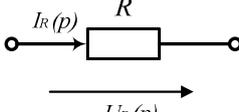
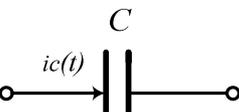
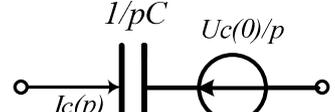
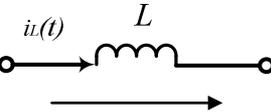
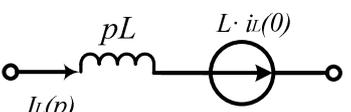
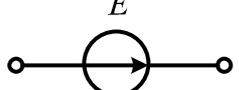
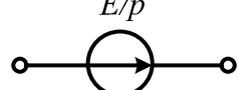
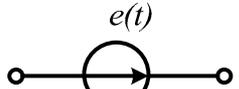
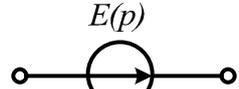
Таким образом, при переходе от изображения к оригиналу цепи необходимо составить **операторную схему замещения** цепи **после коммутации**. Для этого необходимо поставить в соответствие элементу цепи его операторное изображение, которое представлено в табл. 3.6.

Пользуясь этой таблицей соответствия, легко построить операторную расчетную цепь, которая в дальнейшем рассчитывается относительно искомых токов и напряжений. Согласно таблице 3.6 расчет переходного процесса

операторным методом целесообразно начинать с определения ННУ, далее следует составление операторной схемы замещения, минуя этап составления системы интегро-дифференциальных уравнений.

Таблица 3.6

Таблица перехода от оригинала и изображению элементов теории цепей

Оригинал	Изображение
 $u_R(t) = R \cdot i_R(t).$	 $U_R(p) = R \cdot I_R(p).$
 $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt$	 $U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{U_C(0)}{p}$
 $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	 $U_L(p) = L \cdot p \cdot I_L(p) - Li_L(0)$
	
	

Операторная расчетная схема замещения позволяет найти изображения токов и напряжений всех ветвей. Для расчета могут быть применены все известные методы расчета цепей постоянного тока: законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод наложения, простейшие преобразования и т.д.

3.3.4 Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Рассмотрим выражение (3.27):

$$U_L(p) = L \cdot p \cdot I_L(p) - Li_L(0)$$

В выражении одно слагаемое соответствует значению тока на индуктивности в цепи до коммутации $Li_L(0)$, а второе определяет связь изображения тока в цепи и изображения элемента цепи $L \cdot p \cdot I_L(p)$. Если представить данное слагаемое выражением (3.30), получаем закон Ома в операторной форме для индуктивности.

$$L \cdot p \cdot I_L(p) = Z_L(p) \cdot I_L(p) = U'_L(p). \quad (3.30)$$

Тогда множитель $Z_L(p) = p \cdot L$ можно обозначить как **операторное изображение индуктивности**.

Аналогичным образом можно выделить связь изображений тока и напряжения на емкости через **операторное изображение емкости**:

$$U'_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} = Z_C(p) \cdot I_C(p), \quad (3.31)$$

где $Z_C(p) = \frac{1}{pC}$ - операторное изображение емкости.

Докажем на примере (рис.3.17 а) выполнение закона Ома в операторной форме. Предположим некоторый участок цепи (рис. 3.17 а) был подвержен коммутации (рис.3.17 б).

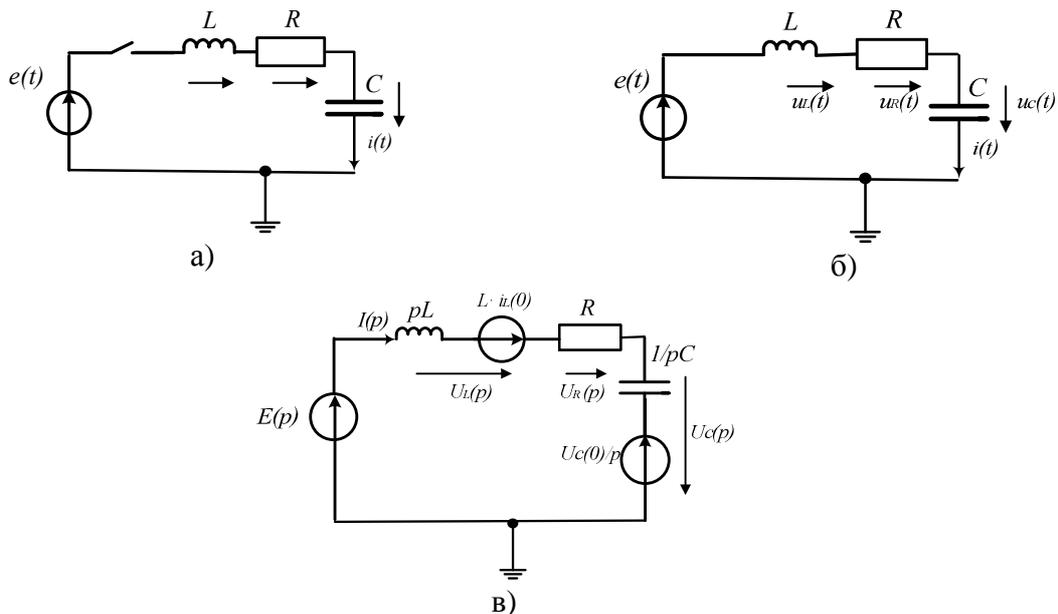


Рис. 3.17 Операторная схема участка цепи: а) цепь до коммутации (оригинал), б) схема цепи после коммутации, в) операторная схема замещения цепи (изображение)

Запишем уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = e(t),$$

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = e(t).$$

Воспользуемся прямым преобразованием Лапласа и получим:

$$L \cdot p \cdot I(p) - Li_L(0) + R \cdot I(p) + \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{U_C(0)}{p} = E(p)$$

Приведем подобные в выражении:

$$I(p) \cdot \left(pL + R + \frac{1}{pC} \right) = E(p) + Li_L(0) - \frac{U_C(0)}{p}$$

Тогда :

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \frac{U_C(0)}{p}}{\left(pL + R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{U_\Sigma(p)}{Z(p)}. \quad (3.32)$$

Таким образом, выражение (3.32) является **законом Ома** в операторной форме, где $Z(p) = pL + R + \frac{1}{pC}$ - **операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи**.

Следует обратить внимание, что операторное сопротивление $Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению $Z(j\omega)$ ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$.

В соответствии с выражением (3.32) для ветви на рис. 3.17 б можно нарисовать операторную схему замещения, представленную на рис. 3.17 в.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (3.33)$$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура:

$$\sum_{k=1}^m E_k(p) = \sum_{k=1}^n U_k(p). \quad (3.34)$$

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета ненулевых начальных условий (если они имеют место). С их учетом этого условия выражение (3.34) может быть переписано в развернутом виде:

$$\sum_{k=1}^m (E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{U_{Ck}(0)}{p}) = \sum_{k=1}^n Z_k(p) \cdot I_k(p). \quad (3.34a)$$

3.3.5 Переход от изображения к оригиналу

Обратное преобразование Лапласа.

В общем случае после определения операторной схемы замещения, задача расчета операторным методом сводится к расчету изображений искомых токов и напряжений исследуемой цепи.

Все найденные операторные изображения токов и напряжений имеют однотипный характер в виде дробно-рациональной функции (3.35), где полином числителя по степеням p делится на полином знаменателя:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (3.35)$$

Выражение (3.35) является изображением искомой функции. Следующим шагом в расчете операторным методом является переход от изображения к оригиналу, который можно осуществить различными способами:

- с помощью **обратного преобразования Лапласа** (3.36):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp, \quad (3.36)$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения и сокращенно записывается, как: $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$. Однако на практике этот способ применяется редко;

- с помощью **Теоремы разложения**:

В большинстве случаев для выражения (3.35) выполняется условие $n > m$, т.е. степень числителя меньше степени знаменателя и дробь правильная. Та часть решения, которая определяется правильной дробью, позволяет найти

оригинал путем применения Теоремы разложения, основанной на возможности представления дробно-рациональной функции в виде суммы простейших дробей. В общем случае Формула обратного преобразования для выражения (3.35) имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}, \quad (3.37)$$

где p_k - корни знаменателя, которые находятся из уравнения $F_2(p) = 0$; $F'_2(p_k)$ - производная от знаменателя по переменной p , где вместо p подставлен корень p_k ; $F_1(p_k)$ - полином числителя, где вместо оператора p подставлен корень p_k .

Возникают ситуации, когда в полиноме $F_2(p)$ выражения (3.35) слагаемое $b_0 = 0$. Тогда множитель p можно вынести за скобку, и знаменатель принимает вид $F_2(p) = p \cdot F_3$. Т.е. будет иметь следующий вид:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_3(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p}. \quad (3.35a)$$

В этом случае при наличии n корней первый корень уравнения $p \cdot F_3(p) = 0$ будет нулевым: $p_1 = 0$. Для этого частного случая Теорема разложения принимает вид:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F'_3(p_k)} e^{p_k t}, \quad (3.38)$$

т.е. в решении появляется слагаемое, которое не зависит от времени. Это слагаемое соответствует принужденной составляющей искомого тока или напряжения.

Если же степени полинома в выражении (3.35) равны, то нужно путем деления полиномов выделить целую часть, и от этой части обратное преобразование Лапласа приводит к появлению в решении дельта-функции.

3.3.6 Порядок расчёта операторным методом

Таким образом, расчет переходного процесса операторным методом сводится к следующим действиям:

1. определяются независимые начальные условия;
2. вычерчивается операторная схема замещения в цепи после коммутации, при этом электрические сопротивления заменяются эквивалентными операторными сопротивлениями (табл.3.6) , источники тока и источники ЭДС заменяются соответствующими операторными ЭДС, при этом следует помнить, что *при ненулевых начальных условиях* на месте реактивных сопротивлений помимо операторных сопротивлений появляются дополнительные операторные ЭДС;
3. находятся операторные функции токов и напряжений в цепи любым из методов расчёта электрической цепи (МКТ, МУП и пр.) с помощью решения обыкновенных алгебраических уравнений и их систем;
4. производится преобразование найденных операторных функций токов и напряжений в функцию действительного переменного с помощью методов операционного исчисления (обратное преобразование Лапласа, таблицы соответствия, теорема разложения).

Пример: В общем виде рассчитать переходный процесс напряжения и тока на емкости для схемы, представленной на рис. (3.17а), если известны значения параметров цепи R, L, C , а также в цепи действует источник постоянного э.д.с., амплитуда которого равна E . Воспользуемся порядком расчета операторным методом.

- 1) определяем независимые начальные условия. В нашем случае, так как ключ разомкнут, то ННУ нулевые, т.е. $i_L(0) = 0$ и $U_C(0)$.
- 2) зарисовываем операторную схему замещения для цепи после коммутации, используя табл.3.6, которая представлена на рис.3.18.

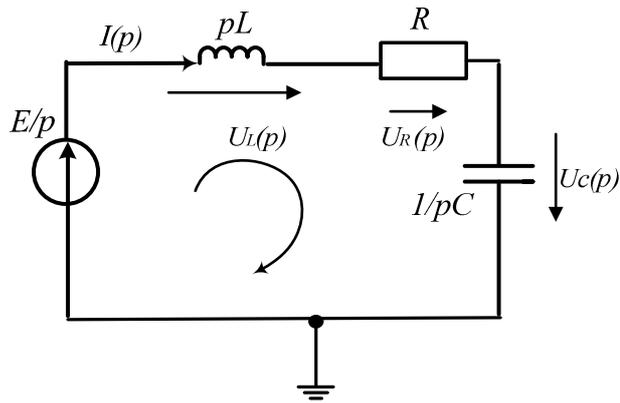


Рис. 3.18 Операторная схема замещения участка цепи

На рис.3.18 отсутствуют источники э.д.с рядом с реактивными сопротивлениями. Это связано с тем, что независимые начальные условия были нулевыми. Так как рассматривается цепь после коммутации, то ключ замкнут.

3) определяем операторные функции токов и напряжений:

Так как по заданию необходимо определить напряжение на емкости, то по закону Ома в операторной форме напряжение определяется по выражению:

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC},$$

Тогда определение изображения напряжения на емкости сводится к определению изображения тока в цепи. Запишем уравнение по II-му закону Кирхгофа:

$$L \cdot p \cdot I(p) + R \cdot I(p) + \frac{I_C(p)}{pC} = \frac{E}{p}$$

Приводим подобные в выражении:

$$I(p) \cdot \left(pL + R + \frac{1}{pC} \right) = \frac{E}{p}$$

Тогда после приведения к общему знаменателю, ток в цепи имеет следующий вид:

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{\left(pL + R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{\frac{E}{p}}{\left(\frac{p^2 LC + pCR + 1}{pC} \right)} = \frac{E \cdot C}{p^2 LC + pCR + 1}.$$

Тогда напряжение на емкости имеет вид:

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} = \frac{E \cdot C}{(p^2 LC + pCR + 1) \cdot pC} = \frac{E}{p(p^2 LC + pCR + 1)},$$

Таким образом, выражения (1), (2) являются операторными функциями тока и напряжения на емкости, соответственно.

4) произведем преобразование найденных операторных функций тока и напряжения в функцию действительного переменного (оригинал) с помощью Теоремы разложения:

Для функции тока воспользуемся выражением (3.37), так общий вид выражения (1) соответствует выражению (3.35), причем $F_1(p) = E \cdot C$, $F_2(p) = p^2 LC + pCR + 1$.

Определим корни характеристического уравнения. Для этого приравняем $F_2(p) = 0$, получаем:

$$p^2 LC + pCR + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(CR)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Так как корней уравнения два, то слагаемых в выражении (3.37) будет два. Согласно выражению (3.37) необходимо найти производную $F_2(p)$:

$$F'_2(p) = 2pLC + RC$$

Тогда в выражение (3.37) подставим все известные значения и получим временную функцию тока:

$$i_C(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} = \frac{E \cdot C}{2p_1 \cdot LC + RC} \cdot e^{p_1 t} + \frac{E \cdot C}{2p_2 \cdot LC + RC} \cdot e^{p_2 t}.$$

Аналогичным образом определяется напряжение на емкости, единственным отличием является вид операторной функции (3.35а):

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_3(p)},$$

где $F_1(p) = E$, $F_3(p) = p^2 LC + pCR + 1$.

Аналогично определяются корни уравнения, полученного путем приравнивания знаменателя к нулю. Однако в случае с напряжением на емкости получаем три корня уравнения:

$$p \cdot (p^2 LC + pCR + 1) = 0 \Rightarrow p_1 = 0; p_{2,3} = \frac{-RC \pm \sqrt{(CR)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

$$F'_3(p) = (p^2 LC + pCR + 1)' = 2pLC + RC.$$

Таким образом, оригинал определяется с помощью выражения (3.38):

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F'_3(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= \frac{E}{2 \cdot 0 \cdot LC + RC} + \frac{E}{2 \cdot p_1 \cdot LC + RC} \cdot e^{p_1 t} + \frac{E}{2 \cdot p_2 \cdot LC + RC} \cdot e^{p_2 t}. \end{aligned}$$

$$U_C(t) = \frac{E}{RC} + \frac{E}{2 \cdot p_1 \cdot LC + RC} \cdot e^{p_1 t} + \frac{E}{2 \cdot p_2 \cdot LC + RC} \cdot e^{p_2 t}. \quad (5)$$

Таким образом, выражения (4) и (5) полностью определяют переходный процесс тока и напряжения на емкости.

3.4 Понятие временных характеристик

Для оценки динамических свойств системы и работы отдельных звеньев схемы принято исследовать их реакцию на *типовые входные воздействия*, называемые *испытательными сигналами*, которые наиболее полно отражают особенности реальных возмущений. Во - первых, это позволяет сравнивать отдельные элементы между собой с точки зрения их динамических свойств. Во - вторых, зная реакцию системы на типовые воздействия, можно судить о том, как она будет вести себя при сложных изменениях входной величины.

Наиболее распространенными типовыми воздействиями являются [1]:

- *единичная функция (ступенчатая)*,
- *единичный импульс*;
- *гармонический*.

Прохождение испытательного гармонического сигнала через элементы электрической схемы системы рассмотрено ранее, поэтому в данном пособии будут рассмотрены реакции на другие два типовых воздействия.

Единичная ступень. Особо важное значение придают ступенчатому воздействию (единичную ступень) (рис.3.19), которое можно описать выражением

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Все остальные воздействия могут быть сведены к нему. Так, например, реальный импульсный сигнал может быть представлен двумя ступенчатыми сигналами одинаковой величины, но противоположными по знаку, поданными один за другим через интервал времени Δt (рис.3.20).

Рис.3.19 Единичная ступень.

Рис.3.20 Импульсный сигнал, как сумма двух единичных ступеней.

Единичный импульс. На рис. 3.21 изображен прямоугольный импульс малой длительности Δ , с амплитудой $\frac{1}{\Delta}$, называемый единичным импульсом.

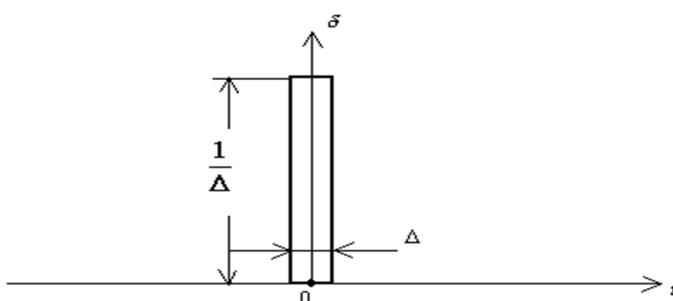


Рис. 3.21 Единичный импульс

Очевидно, что площадь такого импульса равна единице. Устремляя $\Delta \rightarrow 0$, в пределе будем иметь единичный импульс или дельта-функцию $\delta(t)$ (дельта-функция Дирака). Она обладает следующими свойствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.XX2)$$

Единичный импульс физически представляет собой очень узкий импульс, ширина которого стремится к нулю, а высота - к бесконечности, ограничивающий единичную площадь. Дельта-импульс представляет собой производную от единичного ступенчатого сигнала: $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$.

Операторное изображение единичной ступени и единичного импульса имеет вид [2]:

$$1(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\bullet p}; \quad \delta(t) \stackrel{\bullet}{=} 1. \quad (3.40)$$

Заметим, что дельта-импульс имеет размерность обратную времени t [сек⁻¹].

Связь между выходным процессом и входными воздействиями во временной области записывается посредством временных характеристик.

Определение. *Временной характеристикой* называется реакция системы на типовое воздействие при нулевых начальных условиях.

Определение. Реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях называется *импульсной характеристикой* $g(t)$.

Так как свойства стационарной системы с течением времени не меняются, то единичный импульс $\delta(t - \tau)$, приложенный в момент времени $(t - \tau)$, вызовет реакцию $g(t - \tau)$, аналогичную по форме, но сдвинутую по времени на интервал τ (рис. 3.22).

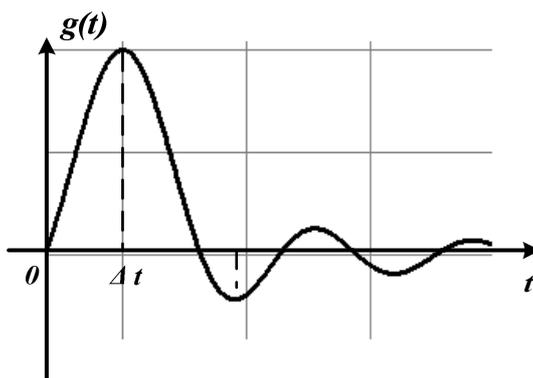


Рис. 3.22 Импульсная характеристика при $\tau = 0$

Определение. *Переходной характеристикой* $h(t)$ называется реакция системы при нулевых начальных условиях на единичную функцию.

Форма *переходной характеристики* $h(t)$ у стационарной системы не зависит от момента приложения воздействия и может иметь колебательный или монотонный характер (рис. 3.23).

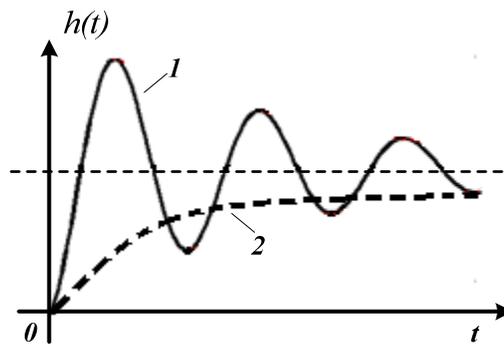


Рис. 3.23. Переходная характеристика:
1-колебательный характер; 2- монотонный.

Использование понятий переходной и импульсной характеристик цепи позволяет свести расчет реакции цепи от действия непериодического сигнала произвольной формы к определению реакции цепи на простейшее воздействие типа единичной $1(t)$ или импульсной функции $\delta(t)$, с помощью которых аппроксимируется исходный сигнал. При этом результирующая реакция линейной цепи находится (с использованием принципа наложения) как сумма реакций цепи на элементарные воздействия $1(t)$ или $\delta(t)$.

Между переходной $h(t)$ и импульсной $g(t)$ характеристиками линейной пассивной цепи существует определенная связь

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = h'(t), \quad (3.41)$$

т.е. импульсная характеристика является производной от переходной характеристики цепи. Уравнение (3.41) справедливо для случая, когда $h(0) = 0$ (нулевые начальные условия для цепи). Если же $h(0) \neq 0$, то представив $g(t)$ в виде $h(t) = h_1(t) + h(0) \cdot 1(t)$, где $h_1(0) = 0$, получим уравнение связи для этого случая:

$$g(t) = h'(t) = h_1'(t) + h(0) \cdot \delta(t). \quad (3.42)$$

Для нахождения переходных и импульсных характеристик цепи можно использовать как классический, так и операторный методы [3].

Пример 1.

Найдем классическим методом переходную характеристику по напряжению для цепи (рис. 3.24).

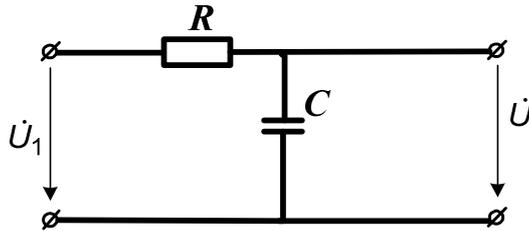


Рис. 3.24. Электрическая схема к примеру 1

Решение.

Численно $h(t)$ для данной цепи совпадает с напряжением на емкости при включении ее в момент $t = 0$ к источнику напряжения $U_1 = 1 \text{ В}$

$h_C(t) = u_C(t)|_{U_1=1(t)} = u_2(t)$. Закон изменения напряжения

$u_C(t) = U_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ при $U_1 = 1 \text{ В}$; $u_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$. Следовательно,

$$h_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Пример 2.

Найдем операторным методом переходную характеристику по напряжению для цепи (рис. 3.24).

Решение.

Определим операторным методом переходную характеристику $h_C(t)$ RC-цепи. Для данной цепи в соответствии с законом Ома в операторной форме

можем записать: $h_C(t) \stackrel{\bullet}{=} U_C(p) \Big|_{U_1(p)=\frac{1}{p}} = I(p) \cdot \frac{1}{pC}$.

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{p \left(R + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{C}{1 + RCp}. \text{ Окончательно получаем}$$

$$U_C(p) = \frac{1}{(1 + RCp)p}. \text{ Отсюда по теореме разложения (3.37) находим:}$$

$$U_C(p) \stackrel{\bullet}{=} h_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ т.е. то же значение, что и полученное классическим}$$

методом.

3.5 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение установившегося процесса.
- 2) Дайте определение коммутации
- 3) Дайте определение переходного процесса.
- 4) Что такое длительность ПП?
- 5) Сформулируйте порядок определения граничных условий.
- 6) Особенности расчета ПП классическим методом.
- 7) Особенности расчета ПП операторным методом

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

4.1 Нелинейные электрические цепи в режиме постоянного тока

4.1.1 Нелинейные элементы. Их характеристики и свойства

Определение. *Нелинейными электрическими цепями* называются такие цепи, в которых реакции и воздействие связаны нелинейными зависимостями.

Подобные цепи содержат один или несколько нелинейных элементов, замена которых линейными моделями приводит к недопустимому нарушению количественной и качественной картины колебаний в цепях.

Определение. Резистивными нелинейными цепями называются цепи, в которые входят хотя бы один нелинейный безинерционный резистивный двухполюсник или многополюсник, хотя бы один источник напряжения или тока и то или иное число резистивных сопротивлений.

В соответствии с этим модель нелинейной резистивной цепи не содержит реактивных элементов. Для построения многих функциональных аппаратуры связи используется большой класс нелинейных двухполюсных полупроводниковых и электронных приборов, называемых диодами.

Единственной электрической характеристикой диода является его вольт-амперная характеристика (ВАХ).

Определение. Вольт-амперная характеристика – зависимость постоянного тока в диоде от постоянного напряжения на его зажимах $i(t) = f(U)$ при согласованном выборе положительных направлений напряжения и тока.

Отличительные характеристик особенности вольт-амперных некоторых типов диодов различного назначения и их условные (схемные) обозначения приведены на рис. 4.1.

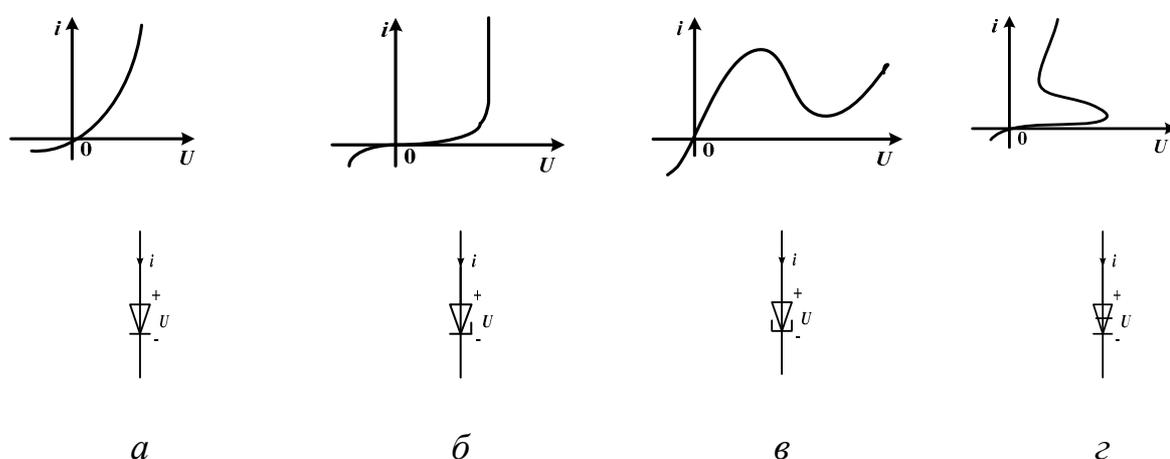


Рис. 4.1. ВАХ нелинейных двухполюсных полупроводниковых элементов:

a – выпрямительного диода; *б*-стабилитрона; *в*-туннельного диода; *г*-динистора.

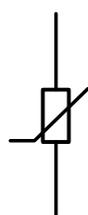


Рис. 4.2. Схемное изображение нелинейного резистивного двухполюсника

Характеристики рис. 4.1, *a*, *б* получили наименование однозначных, а рис. 4.1, *в*, *г* – многозначных, так как у них одному и тому же значению тока (рис. 4.1, *в*) или напряжения (рис. 4.1, *г*) соответствуют разные напряжения и токи.

В последующем, нелинейные резистивные двухполюсники, будем называть нелинейными резисторами, схемное изображение, которого приведено на рис.4.2.

Некоторые из нелинейных элементов (НЭ) относятся к управляемым и управляющей величиной может быть, например, внешняя температура, давление или освещенность. Свойства таких резисторов определяются не одной, а семейством ВАХ, каждая из которых соответствует различным значениям управляющей величины.

Транзисторы, электронные лампы, тиристоры и некоторые другие полупроводниковые и электронные приборы могут рассматриваться как нелинейные резистивные четырехполюсники.

Нелинейный четырехполюсник, как и линейный, описывается двумя уравнениями, которые связывают напряжения и токи на его входе и выходе. При анализе транзисторов часто используется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(i_1, u_2), \\ i_2 = f_2(i_1, u_2), \end{cases} \quad (4.1)$$

где u_1 и i_1 - входные напряжение и ток; u_2 и i_2 - выходные напряжение и токи.

Например, в схеме с общим эмиттером (рис.4.3) $u_1 = u_{ЭБ}$ - напряжение между эмиттером и базой; $i_1 = i_B$ - ток базы; $u_2 = u_{КЭ}$ - напряжение между коллектором и эмиттером.

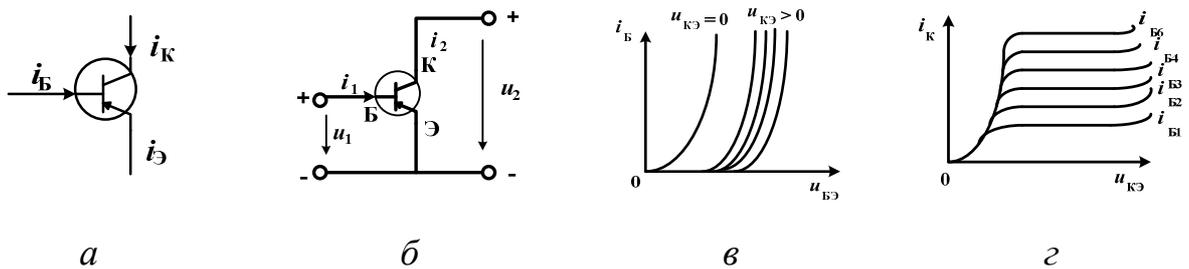


Рис. 4.3. Схематичное изображение нелинейного четырехполюсника и его вольт-амперные характеристики: а - схематичное изображение транзистора; б- включение транзистора с общим эмиттером; в, г - входная и выходная вольт-амперная характеристики.

4.1.2 Параметры нелинейных резисторов

Принято говорить, что ВАХ транзистора управляются током или напряжением. Так, выходная ВАХ транзистора в схеме с общим эмиттером (ОЭ) управляется током базы (рис. 4.3, з).

ВАХ нелинейных полупроводниковых и электронных приборов находятся, как правило, в результате измерений и приводятся в соответствующих справочниках в виде усредненных графических зависимостей, поскольку возникает большой технологический разброс характеристик различных образцов прибора одного и того же типа. Эти характеристики являются *статическими*, т.е. характеристиками режима постоянного тока.

Для резистивных НЭ важным параметром является их сопротивление, которое в отличие от линейных резисторов не является постоянным, а зависит от того, в какой точке ВАХ оно определяется. Различают два вида сопротивлений: статическое и дифференциальное (динамическое).

Определение. Статическое сопротивление $R_{СТ}$ определяется как (рис.4.4)

$$R_{СТ} = \frac{U_0}{I_0} = m_{СТ} \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2)$$

где U_0 - приложенное к НЭ постоянное напряжение; I_0 - протекающий через НЭ постоянный ток; α - угол наклона; $m_{СТ}$ - масштабный множитель. Это сопротивление характеризуется тангенсом угла наклона прямой, проходящей через начало координат и рабочую точку (U_0, I_0) на ВАХ НЭ.

Определение. Под **дифференциальным сопротивлением** понимается отношение бесконечно малого приращения напряжения к соответствующему приращению тока

$$R_d = \frac{du}{di} = m_R \operatorname{tg} \beta. \quad (4.3)$$

Следует отметить, что у неуправляемого нелинейного резистора $R_{СТ} > 0$ всегда, а R_d может принимать и отрицательные значения (участок B-C ВАХ на рис. 4.4.).

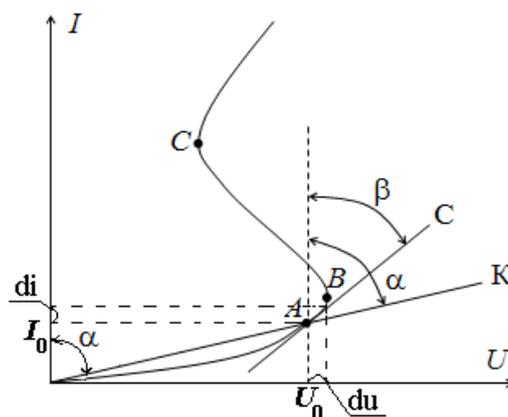


Рис.4.4. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента

На рис. 4.4 показано, как по статической ВАХ определяются параметры нелинейного элемента. Графически $R_{ст}$ определяется тангенсом угла α , а $R_{диф}$ – тангенсом угла β . На графике: A – рабочая точка; прямая K – подкасательная, проходящая через начало координат и рабочую точку A , прямая C – касательная к вольт-амперной характеристике в точке A .

Статическое и дифференциальное сопротивления не равны друг другу и зависят от положения рабочей точки на вольтамперной характеристике. статическое сопротивление у неуправляемого элемента всегда конечно и положительно. Дифференциальное сопротивление может равняться нулю (точка B), бесконечности и даже становиться отрицательной (на падающем участке BC).

4.2 Методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока

Электрическое состояние нелинейных цепей описывается на основании законов Кирхгофа, которые имеют общий характер. При этом следует помнить, что для нелинейных цепей принцип наложения неприменим. В этой связи методы расчета, разработанные для линейных схем на основе законов Кирхгофа и принципа наложения, в общем случае не распространяются на нелинейные цепи.

Общих методов расчета нелинейных цепей не существует. Известные приемы и способы имеют различные возможности и области применения. В общем случае при анализе нелинейной цепи описывающая ее система нелинейных уравнений может быть решена следующими методами:

- графическими;
- аналитическими;
- графо-аналитическими;
- итерационными.

4.2.1 Графические методы расчета

При использовании этих методов задача решается путем графических построений на плоскости. При этом характеристики всех ветвей цепи следует записать в функции одного общего аргумента. Благодаря этому система уравнений сводится к одному нелинейному уравнению с одним неизвестным. Формально при расчете различают цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединениями.

а) Цепи с последовательным соединением резистивных элементов.

При последовательном соединении нелинейных резисторов в качестве общего аргумента принимается ток, протекающий через последовательно соединенные элементы. Расчет проводится в следующей последовательности. По заданным ВАХ $U_i(I)$ отдельных резисторов в системе декартовых координат строится результирующая зависимость $U(I) = \sum U_i(I)$. Затем на оси напряжений откладывается точка, соответствующая в выбранном масштабе заданной величине напряжения на входе цепи, из которой восстанавливается перпендикуляр до пересечения с зависимостью $U(I)$. Из точки пересечения перпендикуляра с кривой $U(I)$ опускается ортогональ на ось токов – полученная точка соответствует искомому току в цепи, по найденному значению которого с использованием зависимостей $U_i(I)$ определяются напряжения U_i на отдельных резистивных элементах.

Применение указанной методики иллюстрируют графические построения на рис. 4.5, б, соответствующие цепи на рис. 4.5, а.

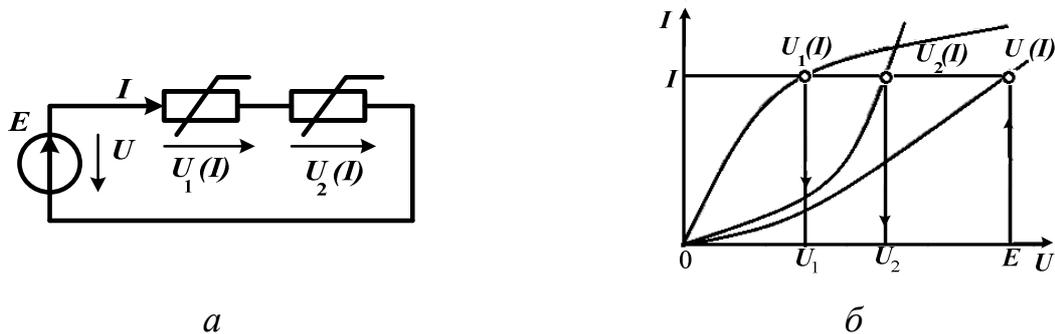


Рис. 4.5. Схема замещения нелинейной цепи (а) и графическое решение (б)

Графическое решение для последовательной нелинейной цепи с двумя резистивными элементами может быть проведено и другим методом – методом пересечений.

В этом случае один из нелинейных резисторов, например, с ВАХ $U_1(I)$ на рис. 4.5, а, считается внутренним сопротивлением источника с э.д.с. E , а другой – нагрузкой. Тогда на основании соотношения $E - U_1(I) = U_2(I)$ точка (а) (см. рис. 4.6) пересечения кривых $I(E - U_1)$ и $U_2(I)$ определяет режим работы цепи.

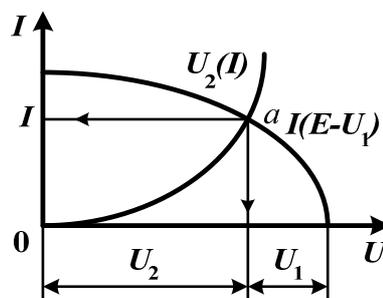


Рис. 4.6. Графическое решение для последовательной нелинейной цепи с двумя резистивными элементами

Кривая $I(E - U_1)$ строится путем вычитания абсцисс ВАХ $U_1(I)$ из э.д.с. E для различных значений тока.

Использование данного метода наиболее рационально при последовательном соединении линейного и нелинейного резисторов. В этом

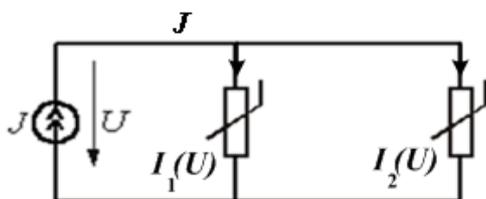
случае линейный резистор принимается за внутреннее сопротивление источника, и линейная ВАХ последнего строится по двум точкам.

б) Цепи с параллельным соединением резистивных элементов.

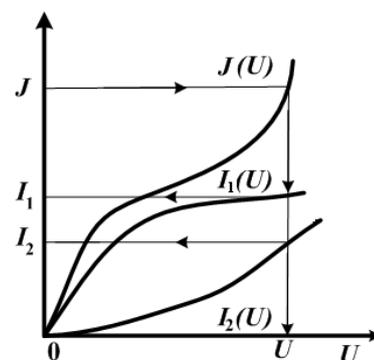
При параллельном соединении нелинейных резисторов в качестве общего аргумента принимается напряжение, приложенное к параллельно соединенным элементам. Расчет проводится в следующей последовательности.

По заданным ВАХ $I_i(U)$ отдельных резисторов в системе декартовых координат строится результирующая зависимость $I(U) = \sum I_i(U)$. Затем на оси токов откладывается точка, соответствующая в выбранном масштабе заданной величине тока источника на входе цепи. При наличии на входе цепи источника напряжения задача решается сразу путем восстановления перпендикуляра из точки, соответствующей заданному напряжению источника, до пересечения с ВАХ $I_i(U)$, из которой восстанавливается перпендикуляр до пересечения с зависимостью $I(U)$. Из точки пересечения перпендикуляра с кривой $I(U)$ опускается ортогональ на ось напряжений – полученная точка соответствует напряжению на нелинейных резисторах, по найденному значению которого с использованием зависимостей $I_i(U)$ определяются токи I_i в ветвях с отдельными резистивными элементами.

Использование данной методики иллюстрируют графические построения на рис. 4.6, б, соответствующие цепи на рис. 4.6, а.



а



б

Рис. 4.6 Графическое решение для параллельной нелинейной цепи

в) Цепи с последовательно-параллельным (смешанным) соединением резистивных элементов.

1. Расчет таких цепей производится в следующей последовательности: исходная схема сводится к цепи с последовательным соединением резисторов, для чего строится результирующая ВАХ параллельно соединенных элементов, как это показано в пункте б).

2. Проводится расчет полученной схемы с последовательным соединением резистивных элементов (см. пункт а), на основании которого затем определяются токи в исходных параллельных ветвях.

4.3 Аналитическое представление вольт-амперных характеристик

Часто необходимо иметь аналитические выражения для вольт-амперных характеристик нелинейных элементов. Эти выражения могут лишь приближенно представлять ВАХ, поскольку физические закономерности, которым подчиняются зависимости между напряжениями и токами в электронных и полупроводниковых приборах, не выражаются аналитически.

Задача приближенного аналитического представления функции, заданной графически или таблицей значений, в заданных пределах изменения ее аргумента (независимой переменной) предполагает:

1) выбор аппроксимирующей функции, т. е. функции, с помощью которой приближенно представляется заданная зависимость;

2) выбор критерия оценки «близости» этой зависимости и аппроксимирующей ее функция.

В качестве аппроксимирующих функций используются, чаще всего, алгебраические полиномы, некоторые дробные рациональные и трансцендентные функции или совокупность отрезков прямых линий.

Будем считать, что ВАХ нелинейного элемента $i = F(u)$ задана графически, т. е. определена в каждой точке интервала $U_{\min} \leq u \leq \dots \leq U_{\max}$ и

представляет собой однозначную непрерывную функцию переменной u . Тогда задача аналитического представления вольт-амперной характеристики может рассматриваться как задача аппроксимации заданной функции $\zeta(x)$ выбранной аппроксимирующей функцией $f(x)$.

О близости аппроксимирующей $f(x)$ и аппроксимируемой $\zeta(x)$ функций или, иными словами, о погрешности аппроксимации, обычно судят по наибольшему абсолютному значению разности между этими функциями в интервале аппроксимации $a \leq x \leq b$, т. е. по величине

$$\Lambda = \max|f(x) - \zeta(x)|.$$

Часто критерием близости выбирается среднее квадратическое значение разности между указанными функциями в интервале аппроксимации, т. е. величина

$$\Lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \zeta(x)]^2 dx.$$

Иногда под близостью двух функций $f(x)$ и $\zeta(x)$ понимают совпадение в заданной точке $x = X_0$ самих функций и $n + 1$ их производных.

Наиболее распространенным способом приближения аналитической функции к заданной является интерполяция (метод выбранных точек), когда добиваются совпадения функций $f(x)$ и $\zeta(x)$ в выбранных точках (узлах интерполяции) x_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Погрешность аппроксимации может быть меньше, если число варьируемых параметров входит в аппроксимирующую функцию будет больше, т. е., например, чем выше степень аппроксимирующего полинома или чем больше число отрезков прямых содержит аппроксимирующая линейно-ломаная функция. Одновременно с этим, естественно, растет объем вычислений как при решении задачи аппроксимации, так и при последующем анализе нелинейной цепи. Простота этого анализа наряду с особенностями аппроксимируемой функции в пределах интервала аппроксимации служит одним из важнейших критериев при выборе типа аппроксимирующей функции.

В задачах аппроксимации вольт-амперных характеристик электронных и полупроводниковых приборов нет необходимости стремиться к высокой точности их воспроизведения, как правило, ввиду значительного разброса характеристик приборов от образца к образцу и существенного влияния на них дестабилизирующих факторов, например, температуры в полупроводниковых приборах. В большинстве случаев достаточно «правильно» воспроизвести общий усредненный характер зависимости $i = F(u)$ в пределах ее рабочего интервала.

4.3.1 Полиномиальная аппроксимация

В качестве аппроксимирующей функции в задачах аналитического представления вольт-амперных характеристик очень часто используются алгебраические полиномы $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, той или иной степени.

Постоянные $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ представляют собой варьируемые параметры, значения которых выбираются такими, чтобы в интервале аппроксимации $a \leq x \leq b$ свести к минимуму погрешность аппроксимации в соответствии с выбранным критерием близости.

В простейшем случае критерием близости может служить совпадение значений аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в возможно большем числе выбранных точек, расположенных в интервале аппроксимации. Соответствующий метод приближенного воспроизведения функций носит, как мы уже упоминали, название *интерполирования*, а дискретные точки, в которых требуется точное совпадение функций $f(x)$ и $\zeta(x)$, называются *узлами интерполирования*. Их число на единицу превышает степень интерполирующего полинома. Действительно, записывая равенство функций $f(x_k) = \zeta(x_k)$ в каждом из узлов интерполирования $x_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$, получим систему из $n + 1$ линейных уравнений:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos 2x], \quad \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x. \quad (4.7)$$

Тогда $i_{\text{ВЫХ}}(t) = a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + \frac{(a_2 U_{m1}^2)}{2} + \frac{(a_2 U_{m1}^2)}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{(3a_3 U_{m1}^3)}{4} \cos \omega_1 t +$

$$+ \frac{(a_3 U_{m1}^3)}{4} \cos 3\omega_1 t + \frac{(3a_3 U_{m1}^3)}{4} \cos \omega_1 t = [a_0 + \frac{(a_1 U_{m1}^2)}{2}] +$$

$$+ [a_1 U_{m1} + \frac{(3a_3 U_{m1}^3)}{4}] \cdot \cos \omega_1 t + \frac{(a_2 U_{m1}^2)}{2} \cdot \cos 2\omega_1 t + \frac{(a_3 U_{m1}^3)}{4} \cdot \cos 3\omega_1 t. \quad (4.8)$$

Из полученного выражения видно, что спектр выходного содержит четыре составляющие:

а) постоянную составляющую

$$J_0 = a_0 + \frac{(a_1 U_{m1}^2)}{2}, \quad (4.9)$$

т.е. значение амплитуды тока на нулевой частоте ($\omega=0$);

б) колебание с частотой, равной частоте входного сигнала ($\omega=\omega_1$), и амплитудой

$$J_{m1} = a_1 U_{m1} + \frac{(3a_3 U_{m1}^2)}{4}, \quad (4.10)$$

называемое *первой* гармоникой;

в) колебания новых частот - удвоенной и утроенной по сравнению с частотой входного сигнала, $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_3 = 3\omega_1$, называемые *высшими* гармониками. Последние имеют амплитуды, как видно из выражения (4.8):

$$J_{m2} = \frac{(a_2 U_{m1}^2)}{2}, \quad \text{и} \quad J_{m3} = \frac{(a_3 U_{m1}^3)}{4}. \quad (4.11)$$

Таким образом, выходной ток НЭ равен

$$i_{\text{ВЫХ}}(t) = J_0 + J_{m1} \cdot \cos \omega_1 t + J_{m2} \cdot \cos 2\omega_1 t + J_{m3} \cdot \cos 3\omega_1 t$$

и его спектр более богатый по сравнению со спектром воздействия. При этом форма сигнала на выходе отличается от синусоидальной функции, т.е. возникли нелинейные искажения.

$$i(t) = J_0 + J_{m1} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + J_{m2} \cdot \cos(2\omega_0 t + \varphi_1) + \dots$$

т.е. в общем случае он содержит постоянную составляющую J_0 и колебания кратных частот $n\omega_0$ ($n=2, 3, \dots$), называемые *высшими* гармониками.

Изменяя напряжение смещения E_{CM} , можно выбирать в качестве рабочего участка характеристики с желаемой формой (т.е., вид полинома). Обычно величину E_{CM} выбирают такой, чтобы нелинейность НЭ проявлялась достаточно сильно (транзистор вносил в сигнал большие нелинейные искажения).

4.4.2 Преобразования гармонического воздействия в НЭ с кусочно-линейной аппроксимацией

При большой амплитуде входного сигнала удобно использовать кусочно-линейную аппроксимацию характеристики НЭ, т.к. кривизной ее начального участка можно пренебречь. Для расчета спектральных составляющих тока НЭ в этом случае используют метод угла отсечки. Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть характеристика НЭ $i_{\text{ВЫХ}}(t) = f(u_{\text{ВХ}})$, входящего в УЧ, имеет кусочно-линейную аппроксимацию:

$$i_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } u_{\text{ВХ}} < U_0 \\ S \cdot (u_{\text{ВХ}} - U_0), & \text{при } u_{\text{ВХ}} > U_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

где $u_{\text{ВХ}}$ – напряжение на входе НЭ;

S - крутизна наклонного участка характеристики;

U_0 - напряжение отсечки.

График тока на выходе НЭ имеет вид косинусоидальных импульсов и определяется двумя параметрами: высотой $I_{\text{МАХ}}$ и шириной, которую принято характеризовать углом отсечки. Углом отсечки называется половина части периода, в течение которой протекает ток (или та часть периода, в пределах которого ток изменяется от максимального значения до нулевого).

Следовательно, можно написать

$$U_0 = E_{CM} + U \cdot \cos \Theta. \quad (4.13)$$

Откуда

$$\cos \Theta = \frac{U_0 - E}{U}, \quad \text{т.е.} \quad \Theta = \arccos \frac{U_0 - E}{U}. \quad (4.14)$$

Угол отсечки может принимать значения от нуля (ток не проходит) до π (линейный режим работы схемы). При $E_{CM} = U_0$ имеем $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (проходят положительные полупериоды входного сигнала).

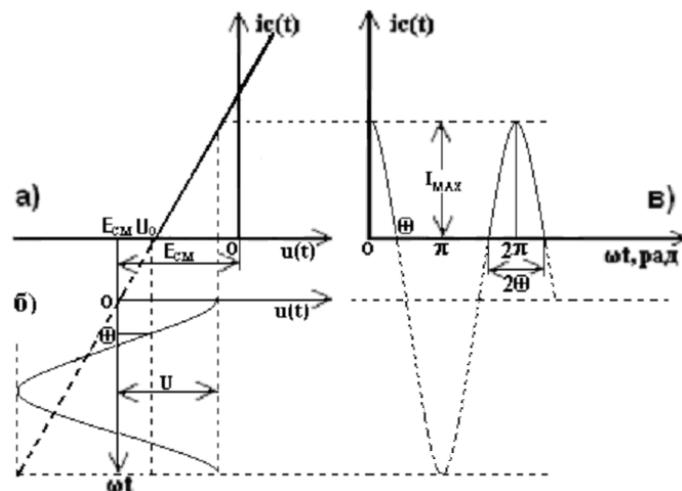


Рис. 4.7. Аппроксимирующая кривая и временные диаграммы:

- а) кусочно-линейная аппроксимация вольт-амперной характеристики;;
- б) входного напряжения $u_{ВХ}(t)$; в) - тока на выходе НЭ.

Если на вход НЭ поступает гармонический сигнал и выбрано напряжение смещения равным E_{CM} , то применяя для построения $i_{ВЫХ}$ метод проекций, удобно сначала (пунктирная линия) определить ток, который получился бы, если бы характеристика НЭ была линейной с крутизной S при любых значениях $u_{ВХ}$ (рис.4.7).

Известно, что периодический сигнал $i_{ВЫХ}(t)$ может быть представлен в виде бесконечного ряда гармонических (спектральных) составляющих с частотами, кратными частоте входного колебания ω_l (ряда Фурье).

$$i_{ВЫХ}(t) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{mn} \cdot \cos(n \cdot \omega_l \cdot t + \varphi_n). \quad (4.15)$$

Постоянную составляющую и амплитуды гармоник можно определить с учетом как

$$\left. \begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} I_{MAX} \frac{\cos \omega t - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} d\omega t = I_{MAX} \alpha_0(\Theta) \\ J_{m1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} I_{MAX} \frac{\cos \omega t - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \cos \omega t \cdot d\omega t = I_{MAX} \alpha_1(\Theta) \\ J_{mn} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} I_{MAX} \frac{\cos \omega t - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \cos n\omega t \cdot d\omega t = I_{MAX} \alpha_n(\Theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Коэффициенты пропорциональности зависят только от угла отсечки Θ и называются коэффициентами Берга первого рода. Они рассчитываются по формулам

$$\alpha_0(\Theta) = \frac{\sin \Theta - \Theta \cdot \cos \Theta}{\pi \cdot (1 - \cos \Theta)}, \quad \alpha_1(\Theta) = \frac{\Theta - \sin \Theta \cdot \cos \Theta}{\pi \cdot (1 - \cos \Theta)}, \quad (4.17)$$

$$\alpha_n(\Theta) = \frac{2 \cdot (\sin \Theta \cdot \cos \Theta - n \cdot \cos n\Theta \cdot \sin \Theta)}{\pi \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot (1 - \cos \Theta)}, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

и приближенно могут быть найдены по графикам (см. [1] стр.57 или Приложение. рис.П.1.).

По рисунку 4.8 видно, что Θ , а следовательно, и амплитуды гармоник J_{mn} , зависят от положения рабочей точки, определяемого напряжением смещения E_{CM} . Применительно к умножению представляет интерес зависимость амплитуд высших гармоник ($J_{m1}, J_{m2}, J_{m3}, J_{m4}$) от напряжения смещения E_{CM} .

Для достижения различных углов отсечки при неизменном значении тока I_{MAX} нужно одновременно изменять и смещение, и амплитуду U так, чтобы максимальное значение напряжения, соответствующее моменту $t=0$, сохранялось неизменным.

Проанализируем зависимость, приведенную на рис. 4.8. качественно. Рассмотрим два крайних случая – малое смещение E_{CM}^3 , при котором весь входной сигнал попадает в область отсечки НЭ ($\Theta_3 = 0$), и большое напряжение смещения E_{CM}^1 , при котором сигнал частично выходит на

линейный участок характеристики НЭ ($\Theta_1 > 90^\circ$). На рис. 4.8 показаны напряжения u_1 , u_2 , u_3 , обеспечивающие достижение различных углов: соответственно $\Theta_1 > 90^\circ$, $\Theta_2 = 90^\circ$, $\Theta_3 = 0$.

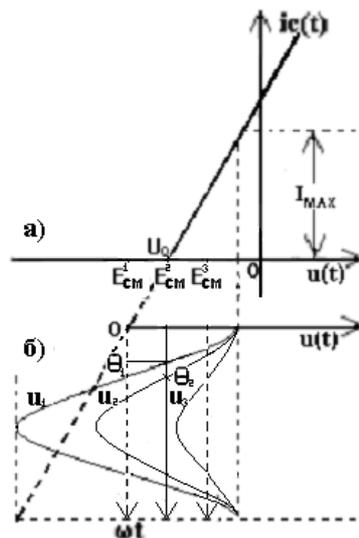


Рис.4.8. График изменения входных напряжений.

Между ними существует некоторое оптимальное значение E_{OPT} , при котором в спектре тока НЭ будет наблюдаться максимум амплитуды n -ой гармоники.

4.5 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение нелинейной электрической цепи
- 2) Поясните термин «статическое сопротивление».
- 3) Как рассчитать общее напряжение последовательного соединения двух нелинейных сопротивлений графическим методом ?
- 4) Что такое полиномиальная аппроксимация?
- 5) Что такое вольт-амперная характеристика нелинейного элемента

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методическом пособии рассмотрены основные методы определения параметров четырехполюсников и различных схем их соединений, режимы передачи сигналов в цепях с распределенными параметрами, расчеты переходных процессов классическим и операторным методами, введены определения временных характеристик и приведены примеры их нахождения, рассмотрены прохождение постоянного и гармонического воздействия через нелинейные цепи.

В настоящее время теория четырехполюсников успешно применяется при решении задач различных типов, например, при анализе свойств сложных разветвленных электрических цепей, фильтров и многих электронных приборов (транзисторов, усилителей). Также эту теорию используют для создания электрических цепей с определенными передающими свойствами, в том числе в цепях с распределенными параметрами и нелинейных цепях.

В пособии уделено внимание переходным процессам и их расчетам, приведены примеры. Кроме этого, рассмотрены типовые тестовые воздействия и отклики электрических цепей на эти воздействия, в виде временных характеристик, которые используются для оценки качества работы отдельных звеньев системы. Введены теоретические основы нелинейных цепей, прохождение постоянного и гармонического воздействий через нелинейные элементы, возможности преобразования входных воздействий.

Надеемся, что материал, изложенный в этом пособии, поможет студентам успешно и в полной мере освоить основные разделы дисциплины «Теория электрических цепей».

ЛИТЕРАТУРА

1. Фриск В.В. Основы теории цепей./ Учебное пособие.- М.: ИП РадиоСофт, 2002 – 288с.;
2. Атабеков Г.И. Основы теории цепей: Учебник. 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 432 с.: ил. – (Учебник для вузов. Специальная литература);
3. . Основы теории цепей. Часть.2: Схемные функции. Резонансные цепи. Четырехполюсники и LC-фильтры. Длинные линии: Учебное пособие/ Под общей редакцией Мельниковой И.В. – Томск: Томск межвузовский центр дистанционного образования, 2001. – 186 с.
4. Расчет четырехполюсников. Практикум: Учебное пособие/ Бузмакова, Л.В., Скорик, В.Г.- Хабаровск, Центр дистанционного образования, 2009.– 44 с.
5. Попов, В. П. Основы теории цепей: учеб. для вузов / В.П. Попов. – 4 изд. испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 575 с.
6. Основы теории цепей: учеб. для вузов / В.П. Бакалов [и др.]. – М. : Радио и связь, 2000. – 530 с.
7. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
8. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей / В.С. Андреев. – М.: Связь, 1972. – 328с.

ГЛОССАРИЙ

Активный четырехполюсник - это четырехполюсник, содержащий зависимые или независимые источники.

Волновое сопротивление линии (Z_B) - это сопротивление, которое ощущает электромагнитная волна при распространении вдоль бесконечной линии, или ощущают отраженная и падающая волна в ДЛ конечной длины.

Временной характеристикой называется реакция системы на типовое воздействие при нулевых начальных условиях.

Длина волны - расстояние в линии передачи, на котором фаза электромагнитной волны вдоль направления распространения меняется на 2π .

Зависимыми начальными условиями (ЗНУ) называются величины, зависящие от коммутации (в момент коммутации изменяются скачком), - значение тока через ёмкость $i_C(0_+)$ и напряжение на индуктивности $u_L(0_+)$, а также токов и напряжений на других элементах электрической цепи.

Импульсной характеристикой называется реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях.

Коммутация - это процесс замыкания и размыкания электронных реле, механических переключателей.

Конвертор сопротивления – это четырехполюсник, входное сопротивление которого пропорционально сопротивлению нагрузки.

КПД линии - это характеристика эффективности линии в отношении передачи энергии от входа к нагрузке. Численно КПД равен отношению передаваемой в нагрузку активной мощности ко всей активной мощности, поступившей в линию.

Коэффициент затухания (потерь) (α), который характеризует потери в линии, т.е. уменьшение амплитуды сигнала при прохождении через ДЛ.

Коэффициентом отражения волны в длинной линии называют комплексную величину, равную отношению комплексных (действующих или

амплитудных) значений напряжений или токов отражённой и падающей волн на нагрузке.

Коэффициент фазы (β) - показывает изменение фазы сигнала в зависимости от координаты.

Неавтономный четырехполюсник - это четырехполюсник, который не содержит внутри независимых источников.

Независимыми начальными условиями (ННУ) называются токи и напряжения, независимые от коммутации, т.е. значение тока через индуктивность $i_L(0)$ и напряжение на ёмкости $u_C(0)$.

Нелинейными электрическими цепями называются такие цепи, в которых реакции и воздействие связаны нелинейными зависимостями.

Отражённая волна – это электромагнитная волна, распространяющаяся от нагрузки к источнику сигнала.

Падающая волна – это электромагнитная волна, распространяющаяся от источника к нагрузке.

Первичные (или внутренние или собственные) параметры четырехполюсника – это параметры, которые описывают четырехполюсник в режиме холостого хода или режиме короткого замыкания на входе или выходе.

Передачная функция, коэффициент передачи называется отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин на выходе и входе четырехполюсника при заданном режиме передачи.

Переходный процесс (ПП) - это процесс перехода электрической цепи с накопителем энергии от одного установившегося режима работы к другому, вызванного изменением параметров или конфигурации схемы электрической цепи.

Переходной характеристикой называется реакция системы при нулевых начальных условиях на единичную функцию.

Постоянной времени цепи называется время $t = \tau$, в течение которого свободная составляющая тока или напряжения, убывает в $e = 2,718$ раз по сравнению с начальным значением.

Рабочие параметры четырехполюсника - параметры, которые описывают четырехполюсник в режиме произвольных нагрузок.

Режим бегущих волн (РБВ) – это режим в линии, при котором наблюдаются только падающие волны, а энергия волны полностью поглощается нагрузкой.

Режим смешанных волн - это режим, при котором энергия падающих волн частично поглощается нагрузкой, частично отражается и возвращается в линию.

Режим согласованного включения – это режим работы четырехполюсника, когда выполняется условие $\dot{Z}_Г = \dot{Z}_{ВХ1}$ и $\dot{Z}_{ВХ2} = \dot{Z}_Н$.

Режим стоячих волн (РСВ) – это режим в линии, при котором в линии наблюдаются падающие и отраженные волны. Энергия, при таком режиме полностью отражается от нагрузки.

Сложный четырехполюсник – это четырехполюсник, который может быть образован в результате соединения между собой двух и более четырехполюсников.

Трансформатор - это устройство, позволяющее согласовать различные отрезки длинных линий с разными волновыми сопротивлениями.

Характеристические (или вторичные) параметры четырехполюсника – это параметры, которые описывают четырехполюсник в режиме полного согласования.

Характеристической постоянной передачи \dot{g}_c называется комплексная величина, показывающая в логарифмических единицах соотношение мощностей сигнала на входе и выходе согласованного четырехполюсника.

Характеристическое сопротивление Z_c - это сопротивление, которое определяется как среднее геометрическое из входных сопротивлений при коротком замыкании на выходе и холостом ходе на выходе.

Четырехполюсник – это часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к любым двум парам ее зажимов, токи в которых попарно равны и противоположны по направлению.

Фазовая скорость (V_ϕ) - скорость, с которой в линии распространяется состояние равной фазы падающей или отраженной волны.

Установившийся режим - это такое состояние электрической цепи (схемы), при котором наблюдается равновесие между действием на цепь источников энергии и реакцией элементов цепи на это действие.

Цепь с обратной связью – это соединение двух четырехполюсников, при котором напряжение на выходе воздействует на входные напряжения основного устройства.

Цепи с распределенными параметрами (ЦРП) – это электрические цепи, линейные размеры которых сравнимы с длиной волны электромагнитных колебаний, распространяемых в цепях.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Волна

- отраженная 58
- падающая 58

Затухание

- собственное 28

Коммутация 91

Конвертор сопротивления 42

Коэффициент

- затухания (потерь) 61
- несогласованности 33
- передачи по напряжению 19
- передачи по току 20
- полезного действия 85
- распространения 61
- трансформации 28
- фазы 61

Линия

- без потерь 68
- длинная 54
- с распределенными параметрами 54

Метод расчета ПП

- классический 100
- операторный 125

Мощность в длинной линии 83

Параметры четырехполюсника;

- первичные 11;
- вторичные 11, 26;
- характеристические 11, 26
- рабочие 11, 32;
- холостого хода и короткого замыкания 18;

Погрешность входного сопротивления 33

Постоянная передачи

- рабочая;
- характеристическая 28

Постоянная фазы

- рабочая
- характеристическая 29

Процесс

- переходный 91

Режим

- согласованного включения 27
- бегущей волны 68
- смешанных волн 78
- стоячих волн 70

-установившийся 91

Соединение четырехполюсников

- каскадное 23
- нерегулярное 24
- параллельное 21
- параллельно-последовательное 23
- последовательное 20
- последовательно-параллельное 22
- регулярное 20, 24
- этажное 20

Сопротивление 19

- входное 19, 32
- выходное 19
- дифференциальное 145
- статическое 145
- характеристическое 27, 45
- характеристическое волновое 59

Скорость

- фазовая 61
- групповая 62

Трансформатор 86

Усилитель операционный 41

Уравнения

- телеграфные 56
- дифференциальные 57

Условия

- зависимые начальные 97
- независимые начальные 97

Функция 18

- входная 18
- дельта 138
- передаточная 18, 19

Характеристика

- временная 138
- вольт-амперная 142
- импульсная 139
- переходная 139

Четырехполюсник 7

- линейный -8;
- нелинейный - 8;
- симметричный - 8;
- сложный 20;
- несимметричный -8;
- активный -8, 37
- пассивный -8;
- обратимый 8;

- необратимый -8;
- автономный – 8, 38;
- неавтономный -11, 37
- эквивалентный
- с обратной связью 36

Цепь

- нелинейная 142
- с распределенными параметрами 54

S-параметры 89