Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники

В. А. Томиленко

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Мультимедийное учебное пособие

Рекомендовано ...

ТОМСК 2015

© В. А. Томиленко, 2007, 2014

© Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2007, 2014,2015

Об издании – 1, 2, Содержание

1-Дополнительный титульный экран — сведения об издании

УДК 517
ББК 22.161
Т56

Лаборатория инструментальных систем моделирования и обучения (ЛИСМО) при Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) — програмирование тренажёров и инструментов.

Томиленко В.А.

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2007. - 7.22 Мб. - 1 опт. Компакт-диск (CD-ROM).

В учебном пособии изложен материал по введению в математический анализ и дифференциальному исчислению в объёме, предусмотренном программами технических вузов. Отличительной особенностью данного пособия является наличие тренажёров, инструментов, демонстраций и контролируемых самостоятельных работ.

Войти в папку MathAnalizSlide и программой Adobe Reader 9.1 (Adobe Reader 9.3 – 11 нужно предварительно настраивать для того, чтобы не происходило блокировки запуска RunPlayer.exe и RunTrens.exe из Adobe Reader) запустить файл mathanaliz.pdf. Все остальные приложения (тренажёры, инструменты, демонстрации, контрольные и самостоятельные работы) запускаются из файла mathanaliz.pdf.

Самостоятельное, мультимедийное, локальное, детерминированное, непериодическое учебное пособие.

В составе учебного пособия использованы: Система проведения компьютерных контрольных работ и система самостоятельной подготовки к экзамену по математике (КИМ), автор Магазинников Л.И., созданные в ЛИСМО при ТУСУРе. Сайт wolfram.com — демонстрации.

Минимальные системные требования:

- ОС: Windows XP/Vista/7 с установленными Adobe Reader 9.1 и Wolfram CDF Player;
- Видеосистема: любая SVGA видеокарта и монитор, поддерживающие работу на разрешении 1024 на 768 пиксела;
- CD-ROM привод;
- воспроизведение учебного пособия без установки на жёсткий диск компьютера.

© програмирование тренажёров и инструментов, ТУСУР, 2007

© КИМ, Л. И. Магазинников, 2003

© КИМ, ТУСУР, 2003

2-Дополнительный титульный экран — производственно-технические сведения

Надвыпускные данные

- TexLive 2012, Adobe Reader 9.1, Wolfram CDF Player.
- содержание CD:
  - папка MathAnalizSlide — самостоятельное, мультимедийное, локальное, детерминированное, непериодическое учебное пособие;
  - AdbeRdr 910_ru.exe, CDFPlayer_8.0.1_WIN.exe — свободно распространяемые программы;
  - Readme.txt — инструкция по установке и запуску учебного пособия;
  - Руководство пользователя.pdf (в папке MathAnalizSlide).
- техническая обработка и подготовка материалов – Томиленко В.А.

Выпускные данные

- 7.22 Мб
- один опт. компакт-диск (CD-ROM)
- Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

- Интегральное исчисление
- Дифференциальное исчисление
- Дифференциальное и интегральное исчисление
- Непрерывность
- Теория пределов

Глава 1 АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Глава 2 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Глава 3 ПРЕДЕЛ ОТОБРАЖЕНИЯ

Глава 4 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

Глава 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

Глава 8 ИНСТРУМЕНТЫ

БИОГРАФИИ

- Ферма Пьер
- Барроу Исаак
- Ньютон Исаак
- Лейбниц Готфрид Вильгельм
- Род Бернулли
  - Бернулли Якоб
  - Бернулли Иоганн
- Лопиталь Гийом Франсуа Антуан де
- Тейлор Брук
- Эйлер Леонард
- Лагранж Жозеф Луи
- Коши Огюстен Луи
- Якоби Карл Густав Якоб

- Сильвестр Джеймс Джозеф
- Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм

СПРАВКА

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ВВЕДЕНИЕ

Курс математического анализа обычно строится так: теория пределов, непрерывность, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление.

Историческое же развитие протекало в обратном порядке.

Интегральное исчисление

В трудах древних центральное место занимали задачи на вычисление площадей (квадратур), объемов (кубатур), центров тяжести. Для дальнейшего развития этого направления требовалось исчисление определенных интегралов, с которыми вы уже знакомы из школьного курса математики. Внимание многих математиков XVII в. также было направлено на разработку методов вычисления определенных интегралов.

Первым, кто сказал здесь новое слово после древних, был Иоганн Кеплер (1571- 1630). Он разработал новый метод вычисления площадей и объёмов, радикально, как казалось современникам Кеплера, отличающийся от метода геометрического доказательства Архимеда.

Почти одновременно с Кеплером начал работать над задачами определенного интегрирования Бонавентура Кавальери (1598-1647). Он привлек идею неделимых и получил существенные результаты: ему удалось вычислить определенный интеграл от целой положительной степени аргумента.

Одновременно с ним и независимо от него вычисляли различные определенные интегралы Пьер Ферма́ (1601-1665), Рене Декарт (1596-1650) и др. Ферма́ первый после Архимеда рассматривал настоящие интегральные суммы и сделал большой шаг вперед по сравнению со всеми своими предшественниками, введя разбиение промежутка интегрирования на неравные части. Он же совершал предельные переходы.

Жиль Персонн, известный под фамилией Роберваля (1602-1675), вычислял определенные интегралы примерно так же, как это делал Кавальери, хотя в трактовке понятия бесконечно малой был ближе к Ферма́.

Существенный прогресс в вычислении определенных интегралов связан с именем Блеза Паскаля (1623-1662).

К 70-м годам XVII в. вычисление квадратур, кубатур, центров тяжести уже давно перестало быть новостью, как считали в начале века, когда появились первые кубатуры Кеплера. Тем не менее интегрального исчисления не было. Его и не могло быть, так как каждый новый тип задач вызывал новую интегральную сумму с новым пределом. Отыскание этого предела требовало каждый раз изобретения нового приема. Исчисление могло появиться только после установления взаимной обратности операций интегрирования и дифференцирования, что было установлено позже.

Дифференциальное исчисление

Понятие производной тесно связано с задачами о проведении касательной к кривой и отыскание максимума и минимума функции. Построением касательных занимались еще древние. Известно также, что в “Конических сечениях"Аполлония рассматривались максимумы и минимумы.

Пьер Ферма́ в письмах к Робервалю сообщал, что еще в 1629 г. им разработан способ отыскания экстремумов. Поскольку способ Ферма́ сводит задачу непосредственно к отысканию производной, он обладает очень большой общностью. Можно с полным правом сказать, что способ Ферма́, с необходимыми улучшениями, целиком вошел в позднейший анализ. Рене Декарт тоже решил несколько задач на отыскание экстремумов.

Кинематические способы проведения касательных разработали Роберваль (1644) и Торричелли (1644). Большой вклад в построение анализа внес Христиан Гюйгенс (1629-1695). Эванджелиста Торричелли (1608-1647) умел находить касательные к кривым и прежде всего к параболам, исходя из свойств движения тяжелой точки, движущейся по параболе. Этот кинематический способ проведения касательных подробно развил Роберваль.

Решающее значение для будущего исчисления сыграли работы Б. Паскаля, в частности его “характеристический треугольник как его впоследствии назвал Лейбниц (1646-1716). Так называется прямоугольный треугольник, который дает выражение для дифференциала дуги. В сущности, он встречается уже у Ферма́, но у него особое обозначение имеет только приращение аргумента dx, в то время как Исаак Барроу (1630-1677) вводит обозначение и для приращения функции dy.

Существенное значение для дальнейшего движения вперед имело и прочное усвоение методов аналитической геометрии, что неизмеримо увеличило наглядность всех инфинитезимальных операций. При взгляде“ на чертеж кривой невольно возникала мысль о второй кривой на том же чертеже, кривой, изображающей площадь, ограниченную первой. Рассмотрение же этих двух кривых совместно, вполне естественно, рождало вопрос об их взаимной обусловленности. Вторая кривая получается в результате квадратуры первой. Нельзя ли первую также получить из второй при помощи какой-то операции?"

О том, что эти соображения уже, как говорится, носились в воздухе, свидетельствует хотя бы тот факт, что задачу о взаимном отношении этих кривых поставили перед собой и решили одновременно и независимо друг от друга Торричелли, Д. Грегори (1638-1675) и Барроу. Исследования Торричелли и Д. Грегори обнаружены в рукописях. Прямое влияние на дальнейшее развитие анализа имело решение Барроу, потому что Барроу передал свои результаты Ньютону.

Дифференциальное и интегральное исчисление

В течение вынужденного двухлетнего пребывания в деревне (1665-1667) Ньютон заложил основы высшей математики. Для Ньютона (1643-1727) математика не была абстрактным детищем человеческого ума. Он рассматривал геометрический образ (линию, поверхность, объем) как результат движения точки, линии или поверхности; движение происходит во времени и за сколь угодно малое время точкой (линией или поверхностью) проходится сколько угодно малый путь. Вот этот-то малый путь и приводит к малому приращению линии или чего-нибудь другого, а отношение этого малого приращения линии (пути) к малому времени, за которое этот малый путь пройден, дает скорость. Чтобы получить мгновенную скорость, надо перейти к пределу, т. е. взять "последнее отношение". Толкование физического содержания описанного процесса у Ньютона с течением времени менялось, но это не мешало выработке формального аппарата.

Так получилось, что Ньютон пришел к необходимости находить “последние отношения т. е., по современной терминологии, искать пределы отношений приращений функций к приращению времени. При желании, разумеется, можно вычислить предел отношения приращения одной функции времени к приращению другой функции времени, т. е. вычислить производную функцию по ее аргументу.

Широко и свободно пользуясь теоремой Барроу о взаимности операций дифференцирования и интегрирования и располагая производными многих функций, Ньютон легко нашел квадратуры многих кривых.

В 1684 г. вышла из печати статья Лейбница (1646-1716) с изложением нового дифференциального исчисления. Несмотря на краткость, статья содержала конспект почти полного курса дифференциального исчисления и его приложения к анализу. Символика была разработана так удачно, что сохранилась почти в неизменном виде до наших дней.

Известно, что несколько математиков, например, шотландец Дж. Краг (ум. 1791), француз Лопиталь (1661 - 1704) приступили к изучению статьи Лейбница, но особых успехов не достигли.

В 1687 г. со статьей Лейбница познакомились братья Якоб и Иоганн Бернулли. Они не только полностью уяснили себе содержание ее, но восстановили то, что было пропущено Лейбницем, и получили новые результаты. В дальнейшем Лейбниц писал братьям, что он считает их авторами дифференциального исчисления не в меньшей степени, чем самого себя.

При сравнении метода флюксий Ньютона и дифференциального исчисления Лейбница оказалось, что они, в сущности, суть одно и то же, хотя их авторы идут разными путями. Лейбниц излагал свое учение чисто геометрически. Для него производная функции – это тангенс угла наклона касательной к кривой, изображающей эту функцию. Для того чтобы получить производную функции, следует, по Лейбницу, дать малое приращение аргументу, вычислить соответствующее приращение функции, разделить второе на первое и отбросить члены, в которых осталось приращение функции в любой степени, начиная с первой. О природе приращений в лагере Лейбница единое мнение не выработалось; не было также точного определения бесконечно малой. Только через 300 лет было показано, что существуют расширения действительных чисел, содержащие бесконечно малые элементы, о которых говорил Лейбниц. На этой основе построен современный “нестандартный анализ".

В первые десятилетия XVIII в. появились авторы, следовавшие по тропе, проложенной Ньютоном и Лейбницем. В Англии это были Тейлор (1685-1731) и Маклорен (1698-1746); на континенте Эйлер (1707-1783), Даниил Бернулли (1700-1782).

К 80-м годам XVIII в. тот анализ, который сейчас называется классическим, уже стал зрелой наукой. Эйлер подвел итоги по всем разделам анализа: по введению, по дифференциальному исчислению, по интегральному исчислению и по интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. После этой колоссальной работы Эйлера предстали в законченном виде и формальный аппарат анализа, и техника его приложения к задачам астрономии, механики, гидродинамики, физики и многих других отраслей точных наук.

Такой быстрый прогресс объясняется тем, что Ньютон и Лейбниц, каждый независимо друг от друга, свели основные операции исчисления бесконечно малых к алгоритму.

Разрушив одним ударом традицию двухтысячелетней давности, Ньютон и Лейбниц отводят основную роль дифференцированию и сводят интегрирование к обратной к нему операции. Понадобилось целое XIX столетие и часть XX, чтобы восстановить справедливое равновесие, сделав интегрирование основой общей теории функций действительного переменного и их современных обобщений.

И теория флюксий Ньютона, и дифференциальное исчисление Лейбница в XVII в. не блистали порядком в своих основах. Не было, например, твердо установлено, что такое “момент"(Ньютон) или “бесконечно малая"(Лейбниц). Воспитанные на Аристотелевой формальной логике, их современники добивались однозначных ответов на вопрос: эти “вещи нули или не нули? И, конечно, не могли добиться точных ответов от авторов.

Принцип бесконечно малых появляется к тому же в двух различных формах в зависимости от того, имеется ли в виду “дифференцирование"или “интегрирование".

Непрерывность

В XVIII в. рассматривались только функции, определенные формально с помощью “аналитических выражений т. е. построенные с помощью алгебраических операций, примененных к переменной и константам, и повторенных в случае надобности бесконечное число раз.

При этом считалось: если функция задана на всем интервале определения единственным “аналитическим выражением то она “непрерывна"; если же интервал определения разделен на несколько частей и функция определена различными “аналитическими выражениями"в каждой из этих частей, то она “разрывна".

Для Эйлера и Лагранжа (1736-1813), функции, которые встречаются в анализе, всегда “непрерывны по крайней мере кусочно-непрерывны, и разложимы в степенной ряд за исключением изолированных точек.

Краеугольным камнем анализа Коши (1789-1857) была концепция предела. Бесконечно малая величина – это переменная величин
предел которой равен нулю.

Функция непрерывная по Коши в интервале, если она на нём конечна и если бесконечно малое изменение переменной вызывает бесконечно малое изменение функции. Это определение Коши непрерывной функции в интервале не позволяло ему различать понятия непрерывности и равномерной непрерывности.

В 1872 году Гейне (1821-1881) разъяснил окончательно понятие равномерной непрерывности.

В современном математическом анализе сначала определяется непрерывность функции в точке из области определения функции, а функция непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Непрерывность функции в точке определяется по Коши: функция непрерывна в точке, если бесконечно малое изменение переменной вызывает бесконечно малое изменение функции.

Теория пределов

У древних переход к пределу производился неоднократно (площадь круга и т. п.), но определения предела не было. Развитие понятия интегральной суммы непосредственно привело к этому необходимому элементу вычисления. Вполне правильно совершал переход к пределу еще Ферма́, но у него процесс перехода не рассматривался как самостоятельный этап вычисления. Переход к пределу в эти годы (середина XVII в.) выполнялся в разных формах – алгебраической и при вычислении определенных интегралов. Отыскание предела в алгебраической задаче имеется у А. Таке (1612- 1680). Он получил сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии, имея формулу для суммы конечного числа членов и неограниченно увеличивая это число. Переход к пределу при вычислении квадратуры кривой в более совершенной форме выполнялся Валлисом (1616-1703).

Одной из самых характерных черт анализа бесконечно малых в XVIII в. была невыясненность его исходных понятий, невозможность объяснить рационально правомерность введенных операций. Взгляды создателей анализа на этот предмет не отличались ни постоянством, ни определенностью. Как Ньютон, так и Лейбниц предприняли множество попыток объяснения своих исчислений, не достигнув успеха.

Виднейшие математики, занимавшиеся в середине XVIII в. проблемой обоснования анализа бесконечно малых, видели свою задачу пока еще только в рационализации его основ, в устранении пробелов, неясностей, мистического оттенка. Среди многих попыток этого периода особенно выделяются теории Эйлера, Даламбера (1717-1783) и Лагранжа (1736-1813).

В обстановке острой борьбы обнаруживалась несостоятельность одного за другим почти всех способов обоснования математического анализа. Только по отношению к понятию предела критика вела не к отказу от концепций, основывающихся на нём, а к их уточнению. Но это понятие трудно и долго входило в анализ, так как всякий раз возникали трудности, связанные с вопросом о существовании предела и о способах эффективного его нахождения. Подобные трудности существовали долго, до конца XIX в., когда был создан “ε, δ - аппарат"теории пределов.

В учебниках Коши (1789-1857) точкой отправления служит понятие предела функции. В них впервые вводится бесконечно малая величина как переменная, предел которой равен нулю.

Непрерывность функции рассматривается как наличие соответствия бесконечно малого приращения функции бесконечно малому приращению аргумента. Через предел вводится понятие производной и определённого интеграла. Здесь еще нет ε, δ -аппарата, но существо дела уже выражено.

В отношении интегрирования работы Коши представляют собой возврат к здоровым традициям античности и первой половины XVII в., но опираются на еще недостаточные технические средства. Определенный интеграл, который слишком долго оставался на втором плане, определяется Коши как предел интегральных сумм и становится понятием первостепенного значения. Для определённого интеграла Коши окончательно устанавливает обозначение $\int_a^b f(x)\,dx$, предложенное Фурье (1768-1830).

Анализ Коши уже во многом напоминает современное изложение основ математического анализа.

В 1861 году Вейерштрасс (1815-1897) ввёл в математический анализ современное определение предела, основанное на аппарате неравенств с ε и δ.

Глава 1

Арифметическое пространство

1.1. Элементы математической логики.

В математике для сокращения записей используются следующие символы:
$\forall$ - квантор общности.
Запись $\forall x$ означает всякий (любой) x;
$\exists$ - квантор существования.
Запись $\exists x$ означает существует x,
а $\exists! x$ - существует единственное x;
$\in$ - отношение принадлежности.
Запись $x \in A$ означает, что x принадлежит A или x элемент A. Запись $x \notin A$ означает, что x не принадлежит A или x не является элементом A .

Высказыванием называется такое предложение, относительно которого имеет смысл говорить истинно оно или ложно. Всякое высказывание может быть либо истинным либо ложным (закон исключённого третьего). Никакое высказывание не может быть истинным и ложным одновременно (закон противоречия). Для сокращения записи высказывания обозначают одной буквой, например, высказывание “Сегодня первое сентября” можно обозначить p.

Отрицанием высказывания p называется высказывание “ p не имеет места”, которое обозначается $\neg p$ и читается: “не p”. Очевидно, что если p истинно, то $\neg p$ – ложно, и наоборот.

Пусть p и q - два высказывания. Конъюнкцией высказываний p и q (обозначение $p \wedge q$) называется высказывание, истинное тогда, и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Высказывание $p \wedge q$ читается: “ p и q ”.

Дизъюнкцией высказываний p и q (обозначение $p \vee q$) называется высказывание, истинное тогда, и только тогда, когда по крайней мере, одно из высказываний p или q истинно.

Высказывание $p \vee q$ читается: “ p или q ”. Составное высказывание “если p, то q” или, что то же самое, “p влечёт q” или “из p следует q” называется импликацией высказываний и обозначается $p \Longrightarrow q$. Если $p \Longrightarrow q$, то p называют посылкой, а q заключением.

Пусть имеет место высказывание $p \implies q$. Тогда говорят, что p является достаточным условием для q, а q необходимым условием для p. Это означает, что p может быть истинно только в том случае, когда истинно q. Если же

$$(p \implies q) \wedge (q \implies p),$$

то q - необходимое и достаточное условие для p, и наоборот. Высказывание “p есть необходимое и достаточное условие для q” обозначается так: $p \iff q$, и читается “p имеет место тогда, и только тогда, когда имеет место q” или “p эквивалентно q”.

В математике рассматриваются также высказывания, содержащие переменные, которые являются истинными при одних значениях переменных и ложными при других. Обозначим через $p(x)$ высказывание $\lg x > 1$. Тогда $p(x)$ является истинным при $x > 10$ и ложным, если $0 < x \leq 10$.

Теоремы - это высказывания. Например:

Теорема 1. *Если* $\forall x \in A$ *имеет место* $p(x)$, *то имеет место и* $q(x)$.

Краткая запись теоремы 1:

$$(\forall x \in A : p(x) \Longrightarrow q(x)).$$

Теорема 2. $(\forall x \in A : p(x) \Longleftrightarrow q(x))$.

Введём сокращение:
вместо $\forall n\,(n > N \Longrightarrow p(n))$
будем писать $\forall n > N : p(n)$.

1.2. Множества.

Понятие множества является первичным и определению не подлежит, его можно лишь пояснить примерами. Например, можно говорить о множестве цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, о множестве натуральных чисел, о множестве букв русского алфавита и так далее.
Множество, являясь с одной стороны, собранием некоторых различных объектов, которые называют элементами множества, в то же время само рассматривается как единое целое, как один предмет.

Объединяя предметы в множество и создавая тем самым новый предмет, мы игнорируем все свойства множества, зависящие от свойств входящих в него предметов, кроме свойства отличаться от всех других множеств, если в нём есть хотя бы один элемент, не содержащийся в другом множестве, или если в нём нет хотя бы одного элемента, присутствующего в другом множестве.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить является он элементом этого множества или нет. Множество задают либо перечислением его элементов, либо указанием свойства, которым обладают элементы этого множества и не обладают объекты, не являющиеся его элементами (характеристическое свойство).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Считается, что каждый элемент связан с содержащим его множеством отношением включения, которое обозначается символом $\in$. Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A или a принадлежит множеству A.

1.2.1. Операции над множеством.

Говорят, что *множество A входит в множество B* (обозначается $A \subseteq B$), если

$$\forall x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

В этом случае множество A называют *подмножеством множества B*. Если же множество A не является подмножеством множества B, то в множестве A есть, по крайней мере, один элемент не принадлежащий множеству B. Поэтому полагают, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Если $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$ и $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$, то множества A и B состоят из одних и тех же элементов.

В этом случае говорят, что *множество* A *равно множеству* B и пишут $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

Объединением множеств A *и* B (обозначают $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B.

Пересечением множеств A *и* B (обозначают $A \cap B$) называется множество, состоящее лишь из всех элементов, принадлежащих одновременно и A и B.

Разностью множеств A и B (обозначают $A \setminus B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Если $B \subseteq A$, то $A \setminus B$ называют дополнением B до A.

Наглядно операции над множествами можно иллюстрировать на схемах Эйлера-Венна (см. Рис. 1.1).

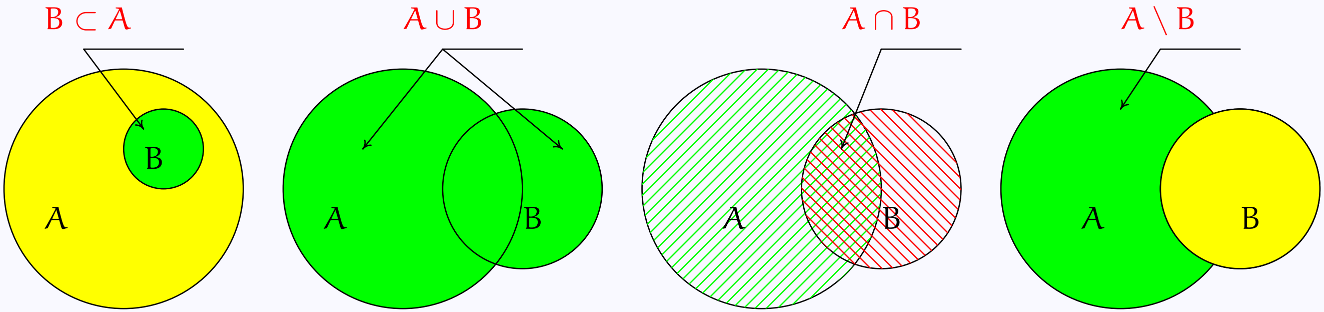


Рис. 1.1. Схемы Эйлера-Венна

Свойства операций над множествами.

1. $A \subset A$.
2. $(A \subset B, B \subset A) \Longleftrightarrow (A = B)$.
3. $(A \subset B, B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C)$.
4. $\forall A\ :\ \emptyset \subset A$.
5. $A \cup A = A$.
6. $A \cup B = B \cup A$.
7. $A \cap A = A$.
8 $A \cap B = B \cap A$.
9. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Все эти свойства доказываются просто. Докажем, для примера, свойство 10, которое равносильно двум включениям:

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

и

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

Доказательство.

Фиксируем произвольное $x \in A \cup (B \cap C)$.
Так как

$$(x \in A \cup (B \cap C)) \overset{\text{Опр.}(\cup)}{\Longrightarrow} (x \in A \text{ или } x \in B \cap C),$$

то рассмотрим два случая.

Если

$$(x \in A) \stackrel{\text{Опр.}(\cup)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in A \cup B \text{ и } x \in A \cup C) \stackrel{\text{Опр.}(\cap)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)).$$

Если же

$$(x \in B \cap C) \overset{\text{Опр.}(\cap)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in B \text{ и } x \in C) \overset{\text{Опр.}(\cup)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in A \cup B \text{ и } x \in A \cup C) \overset{\text{Опр.}(\cap)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)).$$

Итак, мы доказали, что

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

Докажем, далее, обратное включение.

Фиксируем $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$

Рассмотрим также два возможных случая.

Если

$$(x \in A) \overset{\text{Опр.}(\cup)}{\Longrightarrow} (x \in A \cup (B \cap C)).$$

Если же

$$(x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ и } x \notin A) \overset{\text{Опр.}(\cap)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in B \text{ и } x \in C) \overset{\text{Опр.}(\cap)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in B \cap C) \overset{\text{Опр.}(\cup)}{\Longrightarrow}$$

$$(x \in A \cup (B \cap C)).$$

Доказано второе включение

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

Свойство 10 доказано.

1.3. Множество вещественных чисел.

Определение 1. Символ вида

$$c_0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots,$$

где c_0 - целое число, а c_n - одна из цифр

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ (n = 1, 2, 3, \dots),$$

называется бесконечной десятичной дробью. Для каждой конечной десятичной дроби существует равная ей бесконечная десятичная дробь. Например, $0.1 = 0.0(9)$, $2.35 = 2.34(9)$ и т. д. Множество десятичных дробей с таким отношением равенства называется *множеством вещественных чисел*. Две равные дроби обозначают одно и тоже вещественное число.

Общеприняты обозначения:
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел,
$\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел.

Очевидно, что

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.}$$

На множестве действительных чисел определены операции сложения и умножения обладающие свойствами:

Коммутативность	
(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ (x + y = y + x)$	(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ (x \cdot y = y \cdot x)$
Ассоциативность	
(2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$ $x + (y + z) = (x + y) + z$	(6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Существование нейтрального элемента	
(3) $\forall x \in \mathbb{R}:\ x + 0 = x$	(7) $\forall x \in \mathbb{R}:\ x \cdot 1 = x$
Существование противоположного элемента	*Существование обратного элемента*
(4) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y:\ x + y = 0$ *Обозначение:* $y = -x$.	(8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\, \exists y:\ x \cdot y = 1$. *Обозначение:* $y = x^{-1}$.
Дистрибутивный закон	
(9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	

Следующие аксиомы определяют свойства порядка на множестве вещественных чисел.

10. $\forall x, y \in \mathbb{R}:$ (либо $x < y$, либо $x > y$, либо $x = y$) (упорядоченность множества $\mathbb{R}$. Запись $x \leq y$ означает, что либо $x < y$ либо $x = y$);

11. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x;$
(рефлексивность отношения порядка);
12. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad : ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Longrightarrow (x = y);$
(антисимметричность отношения порядка);
13. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad : ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Longrightarrow (x \leq z);$
(транзитивность отношения порядка);
14. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad : ((x \leq y) \Longrightarrow (x + z \leq y + z);$
(согласованность порядка с операцией сложения);
15. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad : ((x \geq 0) \wedge (y \geq z)) \Longrightarrow (x \cdot y \geq x \cdot z);$
(согласованность порядка с операцией умножения);
16. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$((x > 0) \wedge (y > 0)) \Longrightarrow (n \cdot x > y);$$

(аксиома Архимеда);
17. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists r \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$(x < y) \Longrightarrow (x < r < y)$$

(плотность множества рациональных чисел во множестве вещественных чисел).

Определение 2. *Абсолютной величиной (модулем) вещественного числа* a, обозначение $|a|$, называется неотрицательное число, равное a, если $a \geq 0$, и равное $-a$, если $a < 0$.

Отметим следующие свойства модуля вещественного числа:

1. $\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \max\{a, -a\}$;
2. $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq |a|$;
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$;

- модуль суммы чисел не больше суммы их модулей;

4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

- модуль произведения чисел равен произведению их модулей;

5. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;

- модуль частного равен частному модулей;

6. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b| \geq ||a| - |b||$.

Множество вещественных чисел можно дополнить символами $+\infty$ (читается: 'Плюс бесконечность'), $-\infty$ (читается: 'Минус бесконечность'). Операции с этими символами определяются следующим образом:

1. $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty$;
2. $\forall a \in \mathbb{R} : a + (\pm\infty) = \pm\infty$;
3. $\forall a \in \mathbb{R} : a - (\pm\infty) = \mp\infty$;
4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
6. $\forall a \in (0, +\infty) : a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$;
7. $\forall a \in (-\infty, 0) : a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$;
8. $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
9. $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;
10. $\forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} = 0$;
11. $\forall a \in (0, +\infty) : \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$;
12. $\forall a \in (-\infty, 0) : \frac{\pm\infty}{a} = \mp\infty$.

Операции

$$(+\infty) - (+\infty),$$
$$(+\infty) + (-\infty),$$
$$(-\infty) - (-\infty),$$
$$\frac{0}{0},$$
$$\frac{\infty}{\infty},$$
$$0 \cdot (\pm\infty)$$
$$\infty^0$$
$$1^\infty$$

не определены.

1.4. Линейные пространства.

Термин "пространство"по существу эквивалентен термину "множество". Отличие состоит в том, что термин пространство "в чистом виде"употребляется редко, а чаще всего в сочетании с другими терминами, например: топологическое пространство, линейное пространство, метрическое пространство и т.д. На следующей схеме показаны некоторые из изучаемых в математике пространств. Стрелки имеют следующий смысл: то пространство на которое указывает стрелка является частным случаем того, из которого она "исходит".

1.4.1. Определение линейного пространства.

Пусть $\mathbb{L}$ - множество элементов произвольной природы.

Определение 3. Говорят, что на множестве $\mathbb{L}$ введена *линейная структура*, если на нём определены две операции:

1. Операция сложения, позволяющая для любых двух $x, y \in L$ построить третий элемент из L, называемый суммой элементов и обозначаемый $x + y$;

1. Операция сложения, позволяющая для любых двух $x, y \in L$ построить третий элемент из L, называемый суммой элементов и обозначаемый $x + y$;

2. Операция умножения элемента из L на число, позволяющая построить для любого $x \in L$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ элемент из L, называемый произведением x на число λ и обозначаемый $\lambda \cdot x$.

1. Операция сложения, позволяющая для любых двух $x, y \in L$ построить третий элемент из L, называемый суммой элементов и обозначаемый $x + y$;

2. Операция умножения элемента из L на число, позволяющая построить для любого $x \in L$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ элемент из L, называемый произведением x на число λ и обозначаемый $\lambda \cdot x$.

При этом операции должны удовлетворять аксиомам:

1. $\forall x, y \in L : x + y = y + x$
(переместительный или коммутативный закон сложения);
2. $\forall x, y, z \in L : (x + y) + z = x + (y + z)$
(сочетательный или ассоциативный закон сложения);
3.$\exists \bar{0} \in L$ такой, что $\forall x \in L : x + \bar{0} = x$
(аксиома существования нулевого элемента);
4.$\forall x \in L$ $\exists y \in L$ такой, что $x + y = \bar{0}$
(y называется противоположным элементом и обозначается $(-x)$);

5. $\forall x \in L : 1 \cdot x = x$
(тождественное преобразование);
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall x \in L : \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall x \in L : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
8. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall x, y \in L : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Определение 4. Множество L с введённой на нём линейной структурой называется *линейным пространством*, т.е.

$$<\mathrm{L},\text{линейная структура на } \mathrm{L}> \overset{\text{обоз.}}{=} \mathbb{L}.$$

Элементы линейных пространств называют *векторами*.

1.4.2. Арифметическое пространство.

1. Линейное пространство вещественных чисел.

На множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел введём линейную структуру. Для этого нужно на множестве $\mathbb{R}$ задать две операции. В качестве этих операций возьмём известные нам операции сложения и умножения вещественных чисел. При этом аксиомы 1 - 8 из определения 3 – это известные нам свойства вещественных чисел.

Линейное пространство вещественных чисел будем обозначать также как и множество вещественных чисел буквой $\mathbb{R}$.

Определение 5. Говорят, что задана *ось*, если заданы:

1. прямая Π;
2. точка отсчёта $O \in \Pi$;
3. направление отсчёта $[OE)$;
4. единица масштаба $|OE| = 1$.

S

Геометрической интерпретацией линейного пространства $\mathbb{R}$ является ось. (Пространство $\mathbb{R}$ одно, а интерпретаций много). Рассуждения, проводимые с элементами пространства $\mathbb{R}$, удобно иллюстрировать на оси.

2. Арифметическое пространство.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано.

Определение 6. *Упорядоченной n - кой* называется совокупность n чисел, в которой указан порядок расположения этих элементов.

Упорядоченные n - ки будем обозначать

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T.$$

Элементы $x^1, x^2, \dots, x^n$ называются *компонентами* упорядоченной n - ки $(x^1, x^2, \dots, x^n)^T$. Обозначим множество упорядоченных n - нок через R^n:

$$R^n := \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^n)^T \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{R} \right\}.$$

На множестве R^n введём линейную структуру. Для этого нужно определить две операции.

Операцию сложения определим так:

$$\forall (x^1, x^2, \ldots, x^n)^\top, (y^1, y^2, \ldots, y^n)^\top \in R^n \;:$$

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n)^\top + (y^1, y^2, \ldots, y^n)^\top \overset{\text{опр.}}{:=} (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)^\top.$$

Операцию умножения определим следующим образом:
$\forall (x^1, x^2, \ldots, x^n)^\top \in R^n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \;:$

$$\alpha \cdot (x^1, x^2, \ldots, x^n)^\top \overset{\text{опр.}}{:=} (\alpha \cdot x^1, \alpha \cdot x^2, \ldots, \alpha \cdot x^n)^\top.$$

Легко видеть, что для определённых так операций выполнены аксиомы 1 - 8 из определения 3.

Убедиться в справедливости аксиом 1 - 8 из определения 3, для определённых выше операций сложения упорядоченных n—ок и умножения упорядоченной n—ки на число, самостоятельно.

Итак, на множестве R^n мы ввели линейную структуру. Полученное линейное пространство мы будем обозначать $\mathbb{R}^n$ и называть *арифметическим пространством*.

Между множеством упорядоченных пар и множеством точек на плоскости с введённой декартовой системой координат можно установить взаимно однозначное соответствие (метод координат на плоскости). Именно, каждой упорядоченной паре чисел $(x, y)^{\mathsf{T}}$ мы сопоставим точку плоскости с координатами (x, y). Поэтому удобной геометрической интерпретацией пространства $\mathbb{R}^2$ является плоскость с введённой декартовой системой координат Oxy.
Геометрической интерпретацией пространства $\mathbb{R}^3$ является пространство геометрических точек с введённой декартовой системой координат $Oxyz$.

1.4.3. Расстояние в арифметическом пространстве.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и

$x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^\mathsf{T}, y = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$.

Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть также *точками* пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 7. *Расстоянием между точками* $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется число, обозначаемое $d(x; y)$, и вычисляемое по формуле

$$d(x;y) = \\ = \sqrt{(\eta^1-\xi^1)^2+(\eta^2-\xi^2)^2+\cdots+(\eta^n-\xi^n)^2} = \\ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\eta^j-\xi^j)^2}.$$

Частные случаи.

1. $n = 1, x = (\xi^1), y = (\eta^1) \in \mathbb{R}$,
$d(x;y) = \sqrt{(\eta^1 - \xi^1)^2} = \sqrt{(y-x)^2} = |y - x|$.

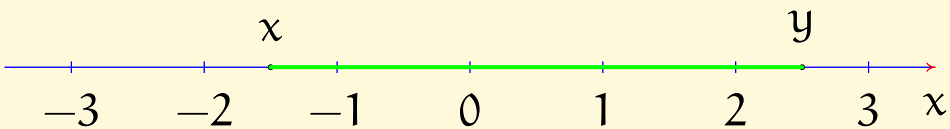


Рис. 1.2. Расстояние в $\mathbb{R}$.

$d(x;y)$ - длина отрезка xy.

2. $n = 2, x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$

$$d(x;y) = \sqrt{(\eta^1 - \xi^1)^2 + (\eta^2 - \xi^2)^2}.$$

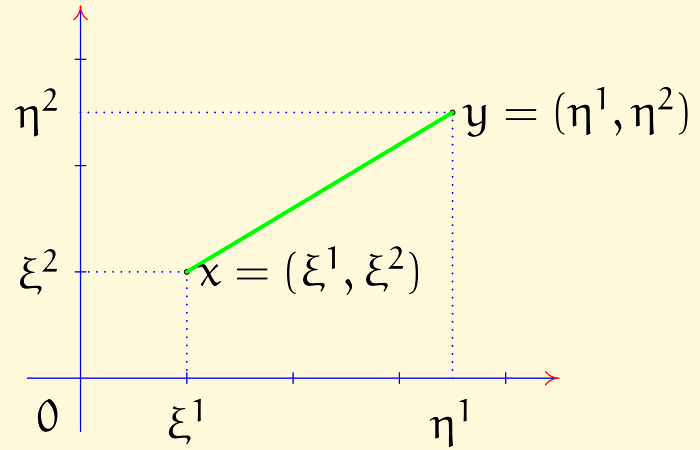


Рис. 1.3. Расстояние в $\mathbb{R}^2$.

$d(x;y)$ - длина отрезка xy.

3. $n = 3, x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$d(x; y) = \sqrt{(\eta^1 - \xi^1)^2 + (\eta^2 - \xi^2)^2 + (\eta^3 - \xi^3)^2}.$$

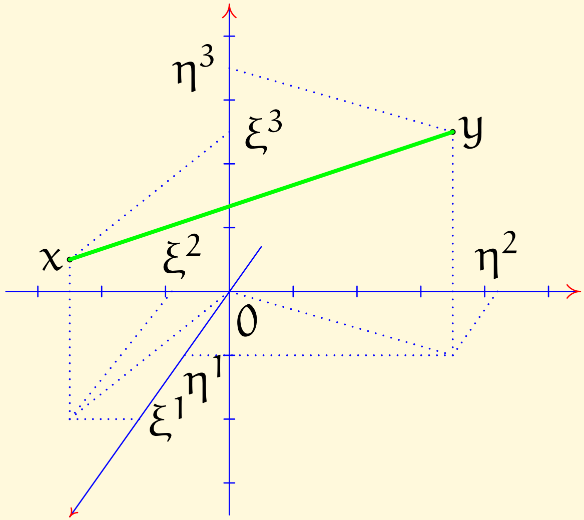


Рис. 1.4. Расстояние в $\mathbb{R}^3$.

$d(x; y)$ - длина отрезка xy.

Свойства расстояния:

1. $d(x;y) = 0$ тогда, и только тогда, когда $x = y$;

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x;y) \geq 0$;

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x;y) = d(y;x)$; (симметричность);

4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z)$ (неравенство треугольника).

Неравенство треугольника

1.4.4. Окрестность точки в арифметическом пространстве.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ фиксированы.

Определение 8. Множество точек

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x_0; x) < \varepsilon\}$$

называется *ε - окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$* и обозначается $U_\varepsilon(x_0)$, т.е.

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{опр.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x_0; x) < \varepsilon\}.$$

Частные случаи.

1. $n = 1$, $U_\varepsilon(x_0) \overset{\text{опр.}8}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.

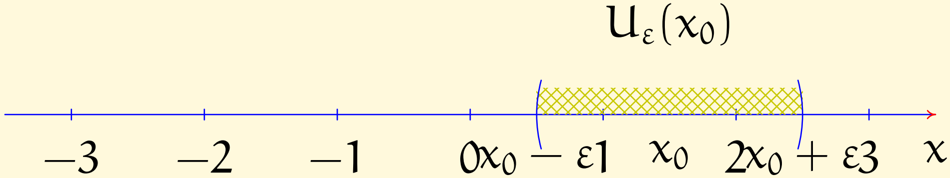


Рис. 1.5. Окрестность точки в $\mathbb{R}$

$U_\varepsilon(x_0)$ - интервал с центром в точке x_0 и плечом ε.

2. $n = 2, x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \xi_0^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$

$$U_\varepsilon(x_0) \overset{\text{опр.}8}{=}$$
$$= \{x = (\xi^1, \xi^2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi^1 - \xi_0^1)^2 + (\xi^2 - \xi_0^2)^2 < \varepsilon^2\}.$$

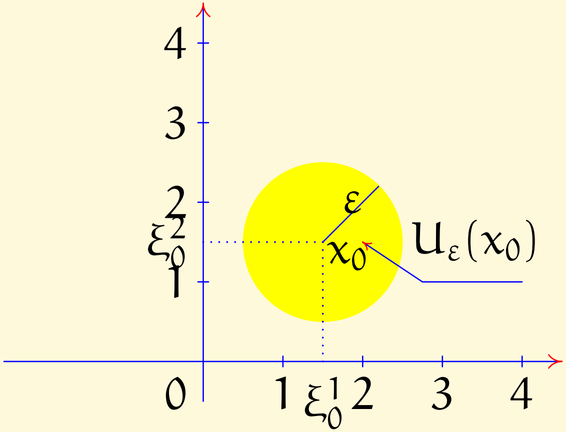


Рис. 1.6. Окрестность точки в $\mathbb{R}^2$

$U_\varepsilon(x_0)$ - круг радиуса ε с центром в точке x_0.

3. $U_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^3$ – шар радиуса ε с центром в точке x_0.

4. Часто ε - окрестность точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем изображать так:

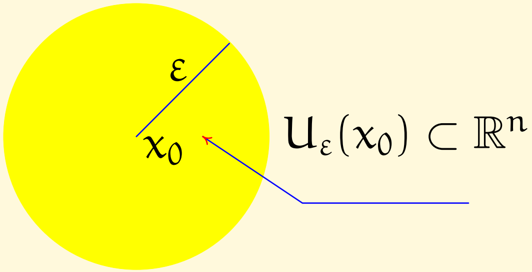


Рис. 1.7. Окрестность точки в $\mathbb{R}^n$

1.4.5. Окрестность бесконечно удалённой точки в арифметическом пространстве.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ фиксированы.
Определение 9. Множество точек

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(\bar{0}; x) > \varepsilon\}$$

где $\bar{0}$ - нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$, называется *ε - окрестностью бесконечно удалённой точки в пространстве $\mathbb{R}^n$* и обозначается $U_\varepsilon(\infty)$, т.е.

$$U_\varepsilon(\infty) \overset{\text{опр.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(\bar{0}; x) > \varepsilon\}.$$

Частные случаи.

1. $n = 1$,

$$U_\varepsilon(\infty) \overset{\text{опр.}9}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| > \varepsilon\} =$$
$$= (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty).$$

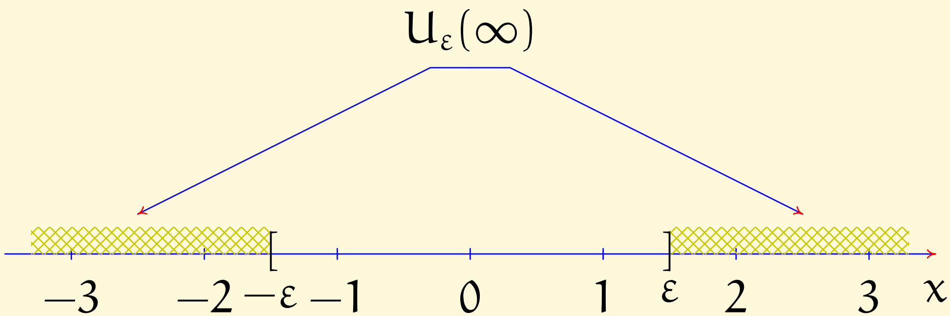


Рис. 1.8. Окрестность бесконечно удалённой точки в $\mathbb{R}$

$U_\varepsilon(\infty)$ – внешность сегмента с центром в точке 0 и плечом ε.

2. $n = 2, x = (\xi^1, \xi^2)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$U_\varepsilon(\infty) \overset{\text{опр.}9}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi^1 - 0)^2 + (\xi^2 - 0)^2 > \varepsilon^2\}.$$

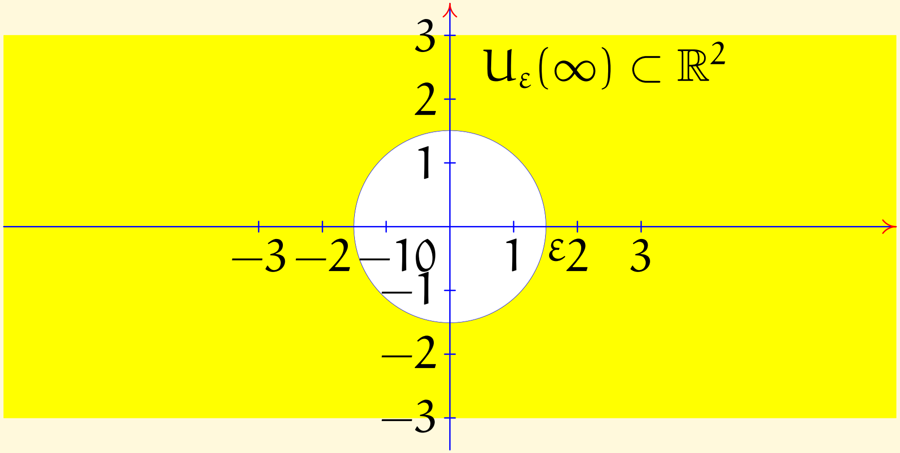


Рис. 1.9. Окрестность бесконечно удалённой точки в $\mathbb{R}^2$

$U_\varepsilon(\infty)$ - внешность круга (вместе с ограничивающей окружностью) радиуса ε с центром в точке $(0, 0)$.

3. $n = 3,\ x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$

$U_\varepsilon(\infty)$ - внешность шара (вместе с ограничивающей сферой) радиуса ε с центром в точке $O(0,0,0)$.

4. Часто $U_\varepsilon(\infty)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем изображать так:

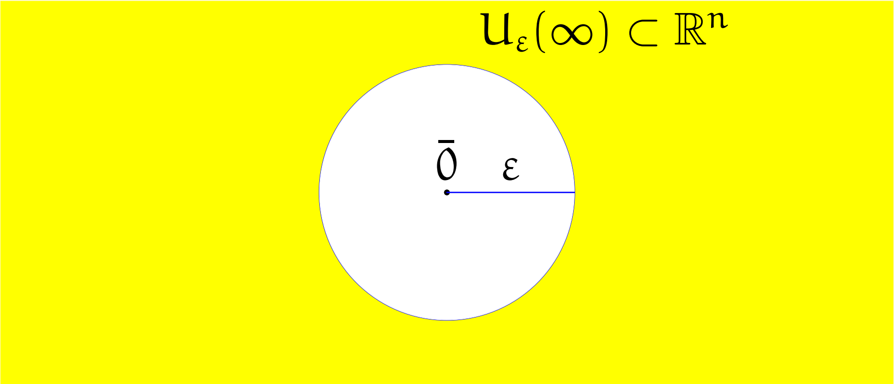


Рис. 1.10. Окрестность бесконечно удалённой точки в $\mathbb{R}^n$

1.4.6. Множества в арифметическом пространстве.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 10. Точка $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ называется *изолированной точкой множества* D, если в некоторой её ε - окрестности нет точек множества D, отличных от точки x_0.

Определение 11. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* D (*точкой сгущения множества* D), если в каждой её ε - окрестности есть точки множества D, отличные от точки x_0.

Определение 12. Бесконечно удалённая точка пространства $\mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* D (*точкой сгущения множества* D), если в каждой ε - окрестности бесконечно удалённой точки есть точки множества D.

Определение 13. Точка, в любой ε - окрестности которой есть как точки множества D так и точки, не принадлежащие множеству D, называется *граничной точкой множества* D.

Определение 14. Точка $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* D, если существует ε - окрестность точки x_0, состоящая лишь из точек множества D.

Определение 15. Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым множеством*.

Определение 16. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым множеством*.

Определение 17. Множество D называется *ограниченным*, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что

$$D \subset U_{\varepsilon}(\bar{0}),$$

где $\bar{0}$ - нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

Глава 2

Предел последовательности

2.1. Последовательности в арифметическом пространстве.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ фиксировано.
Если каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие точка $x_n \in \mathbb{R}^k$, то будем говорить, что в $\mathbb{R}^k$ задана *последовательность точек*, или просто *последовательность*. Обозначение последовательности: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,\}$ или сокращенно:(x_n). x_n называют *общим членом* последовательности.

Примеры последовательностей:

1. $x_n = \frac{1}{n}, \ (x_n), \ x_n \in \mathbb{R}$;

2. $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)^{\mathsf{T}}, \ (x_n), \ x_n \in \mathbb{R}^2$;

3. $x_n = \left(n, \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\mathsf{T}}, \ (x_n), \ x_n \in \mathbb{R}^3$.

Определение 18. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$, *сходится к точке* $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$:

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon.$$

Определение 19. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$, *сходится к точке* $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если $\forall U_\varepsilon(x_0)\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$:

$$x_n \in U_\varepsilon(x_0).$$

Определение 20. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$, *сходится к точке* $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если вне каждой $U_\varepsilon(x_0)$ находится лишь конечное число точек последовательности (x_n).

Пусть задана последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$. По отношению к ней можно поставить по крайней мере три следующих вопроса:

1. Существует ли точка в пространстве $\mathbb{R}^k$ к которой последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$, сходится?

2. Если существует, то одна или много?

3. Если одна, то как её найти? Если много, то как их описать?

Пример 1. Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ сходится к числу 0.

Решение. Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$. Решение задачи состоит в нахождении числа $N(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$ такого, что $\forall n > N(\varepsilon_0)$:

$$d(0, x_n) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon_0.$$

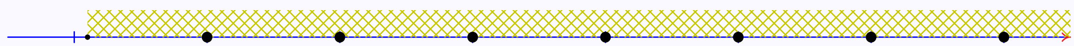
Следовательно, число

$$N(\varepsilon_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_0}, & \text{если } \dfrac{1}{\varepsilon_0} \in \mathbb{N}, \\ \left[\dfrac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1, & \text{если } \dfrac{1}{\varepsilon_0} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

является наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим условию:

$$\forall n > N(\varepsilon_0) : \frac{1}{n} < \varepsilon_0.$$

Решения неравенства $\frac{1}{x} < \varepsilon_0, x \in \mathbb{R}$



$\frac{1}{\varepsilon_0}$

• – решения неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon_0, n \in \mathbb{N}$

Рис. 2.1. Выбор числа $N(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$.

Заметим, что для решения задачи нам не обязательно выбирать самое маленькое из множества $\left\{n \in \mathbb{N} \mid n > \frac{1}{\varepsilon_0}\right\}$.

Итак, положим $N(\varepsilon_0) = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1$ или $N(\varepsilon_0) = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 5$ или $N(\varepsilon_0) = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 100$.

Тогда $\forall n > N(\varepsilon_0) : d(0, x_n) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon_0$.

Из выделенного синим цветом следует, по определению 18, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится к 0.

Тот факт, что (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$, сходится к точке $x_0 \in \mathbb{R}^k$, будем кратко записывать так: $\lim x_n = x_0$ или $x_n \to x_0$.

Здесь lim есть сокращённое обозначение латинского слова limes - предел. Стрелка $\to$ заменяет слова “сходится” или “стремится”.

Пример 2. Показать, что число 1 не является пределом последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$.

Решение. S

Число 1 является пределом последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$, если вне каждой $U_\varepsilon(1)$ находится лишь конечное число точек последовательности (x_n).

Число 1 не является пределом последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$, если существует $U_\varepsilon(1)$, вне которой находится бесконечно много точек последовательности (x_n).

Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

S

Тогда вне $U_{\varepsilon_0}(1)$ лежат все члены последовательности с чётными номерами, т.е. бесконечное множество членов последовательности.

Итак, мы построили $U_{\varepsilon_0}(1)$, вне которой находится бесконечное множество членов последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$.

Следовательно, в силу определения 20, число 1 не является пределом данной последовательности.

Пример 3. Показать, что число (-1) не является пределом последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$.

Решение.

S

Число -1 является пределом последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$, если вне каждой $U_\varepsilon(-1)$ находится лишь конечное число точек последовательности (x_n).

Число -1 не является пределом последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$, если существует $U_\varepsilon(-1)$, вне которой находится бесконечно много точек последовательности (x_n).

Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

S

Тогда вне $U_{\varepsilon_0}(-1)$ лежат все члены последовательности с нечётными номерами, т.е. бесконечное множество членов последовательности.

Итак, мы построили $U_{\varepsilon_0}(-1)$, вне которой находится бесконечное множество членов последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$.

Следовательно, в силу определения 20, число (-1) не является пределом данной последовательности.

Определение 21. Будем говорить, что $(x_n), x_n \in \mathbb{R}^k$ *стремится к бесконечно удаленной точке*, или *стремится к* ∞, если вне каждой $U_\varepsilon(\infty)$ находится лишь конечное число точек последовательности (x_n).

Тот факт, что (x_n) стремится к бесконечности, будем кратко записывать так:

$$\lim x_n = \infty \text{ или } x_n \to \infty.$$

Определение 22. Если существует точка $x_0 \in \mathbb{R}^k$ такая, что $x_n \to x_0$, то последовательность (x_n) называется *сходящейся*. В противном случае $(x_n), x_n \in \mathbb{R}^k$, называется *расходящейся*.

Заметим, что если последовательность (x_n) стремится к бесконечности, то эта последовательность - расходящаяся.

Пример 4. Показать, что последовательность $x_n = (-1)^{n-1}$ расходится.

Решение. Предположим, что $\exists a \in \mathbb{R}$, к которому сходится последовательность $x_n = (-1)^{n-1}$. Тогда $a \neq 1$ (см. пример 2) и $a \neq -1$ (см. пример 3). S

Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{\min\{d(a;1), d(a;-1)\}}{3} > 0$. S

Тогда вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ лежат все члены последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$, т.е. бесконечное множество членов последовательности. S

Итак, мы построили $U_{\varepsilon_0}(a)$, вне которой находится бесконечное множество членов последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$.

Следовательно, в силу определения 20, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}$ не сходится к числу a.

Тогда, в силу определения 22, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}$ расходится.

Теорема 3. *Последовательность в* $\mathbb{R}^k$ *может иметь только единственный предел.*

Доказательство. Доказательство будем вести методом от противного.

Пусть $x_n \to x_0$ и $x_n \to x_1$, причём $x_0 \neq x_1$. S

Возьмем $\varepsilon = \frac{d(x_0;x_1)}{3}$.

Тогда S

$$U_\varepsilon(x_0) \cap U_\varepsilon(x_1) = \emptyset.$$

$$(x_n \to x_0) \overset{\text{Опр. 18}}{\Longrightarrow}$$
$$(\exists N_0 = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_0 : x_n \in U_\varepsilon(x_0).)$$
$$(x_n \to x_1) \overset{\text{Опр. 18}}{\Longrightarrow}$$
$$(\exists N_1 = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_1 : x_n \in U_\varepsilon(x_1).)$$

Тогда

$$\forall n' > \max\{N_0, N_1\} \ : \ x_{n'} \in U_\varepsilon(x_0) \cap U_\varepsilon(x_1),$$

что противоречит условию S

$$U_\varepsilon(x_0) \cap U_\varepsilon(x_1) = \emptyset.$$

$\square$

Определение 23. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^k$ называется *ограниченной*, если $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : d(\bar{0}, x_n) \leq M$.

Теорема 4. *Каждая сходящаяся последовательность в* $\mathbb{R}^{\mathrm{k}}$ *ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^k$ и фиксируем $\varepsilon_0 = 1$. Тогда

$$(x_n \to x_0) \overset{\text{опр. } 18}{\Longrightarrow}$$

$$(\exists N_0 = N(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_0 : d(x_0; x_n) < \varepsilon_0) \overset{\text{Св-во } 4}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall n > N_0 : d(\bar{0}; x_n) \le d(\bar{0}; x_0) + d(x_0; x_n) < d(\bar{0}; x_0) + 1\right)$$

Положим

$$M = \max\Big\{d(\bar{0}; x_1), d(\bar{0}; x_2), \ldots$$
$$\ldots, d(\bar{0}; x_{N_0}), d(\bar{0}; x_0) + 1\Big\}.$$

Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ d(\bar{0}, x_n) \le M.$

$\square$

Пример 5. Показать, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограниченная.

Решение.

Пользуясь формулой бинома Ньютона, запишем:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\frac{1}{n^k} +$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}\frac{1}{n^n} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\\
&+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\\
&+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\\
&< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<\\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\\
&\overset{10.8}{=} 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \, : \, 0 < x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Итак, мы показали существование числа $M = 3$ такого, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \, : \, |x_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| < 3,$$

т.е. последовательность x_n ограниченная.

Лемма 1. *Пусть* $x = \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^k\right)^T$, $y = \left(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^k\right)^T \in \mathbb{R}^k$ *произвольные точки. Тогда*

$$\max_{1 \le j \le k} \left|\eta^j - \xi^j\right| \le d(x; y), \tag{2.1}$$

$$d(x; y) \le \sqrt{k} \max_{1 \le j \le k} \left|\eta^j - \xi^j\right| \tag{2.2}$$

Доказать лемму самостоятельно.

Теорема 5. *Пусть даны последовательность* (x_n), $x_n = \left(\xi_n^1, \xi_n^2, \ldots, \xi_n^k\right)^T \in \mathbb{R}^k$ *и точка* $x_0 = \left(\xi_0^1, \xi_0^2, \ldots, \xi_0^k\right)^T \in \mathbb{R}^k$. *Последовательность* (x_n) *сходится к точке* x_0 *тогда, и только тогда, когда*

$$\xi_n^1 \to \xi_0^1, \xi_n^2 \to \xi_0^2, \ldots, \xi_n^k \to \xi_0^k.$$

Доказательство. Необходимость.

$$(x_n \to x_0) \overset{?}{\Longrightarrow} \left(\xi_n^1 \to \xi_0^1, \xi_n^2 \to \xi_0^2, \ldots, \xi_n^k \to \xi_0^k\right).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

$$(x_n \to x_0) \overset{\text{опр. } 18}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N : d(x_0; x_n) < \varepsilon\right) \overset{(2.1)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall n > N : \max_{1 \le i \le k} \left|\xi_n^i - \xi_0^i\right| < \varepsilon\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\forall n > N : \left|\xi_n^j - \xi_0^j\right| < \varepsilon\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 18, что $\xi_n^j \to \xi_0^j$.

Достаточность.

$$\left(\xi_n^1 \to \xi_0^1, \xi_n^2 \to \xi_0^2, \ldots, \xi_n^k \to \xi_0^k\right) \overset{?}{\Longrightarrow} (x_n \to x_0).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l}
(\xi_n^1 \to \xi_0^1) \overset{\text{опр. }18}{\Longrightarrow} \left(\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_1 : \left|\xi_n^1 - \xi_0^1\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right) \\
(\xi_n^2 \to \xi_0^2) \overset{\text{опр. }18}{\Longrightarrow} \left(\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_2 : \left|\xi_n^2 - \xi_0^2\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right) \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\xi_n^k \to \xi_0^k) \overset{\text{опр. }18}{\Longrightarrow} \left(\exists N_k = N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_k : \left|\xi_n^k - \xi_0^k\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)
\end{array}\right\} \overset{(2.2)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_k\} \text{ такое, что } \forall n > N : d(x_0; x_n) < \varepsilon\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 18, что $x_n \to x_0$. $\square$

Из теоремы 5 следует, что нахождение предела последовательности $(x_n), x_n = \left(\xi_n^1, \xi_n^2, \ldots, \xi_n^k\right)^T \in \mathbb{R}^k$ сводится к нахождению пределов k числовых последовательностей $\left(\xi_n^i\right), \xi_n^i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, k$.

2.2. Числовые последовательности.

Напомним, что если $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$d(x; y) = |x - y|.$$

Определение 24. *Последовательность* (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *сходится к числу* a, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N \; : \; |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение 25. *Последовательность* (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *сходится к числу* a, если $\forall U_\varepsilon(a)$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$: $x_n \in U_\varepsilon(a)$.

Определение 26. *Последовательность* (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *сходится к числу* a, если вне любой $U_\varepsilon(a)$ находится лишь конечное число точек последовательности (x_n).

Пример 6. Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n^5+4n+1}$ сходится к числу 0.

Решение.

Что нужно показать?

$$\left(\lim \frac{1}{n^5+4n+1} = 0\right) \overset{24}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N\ : \left|\frac{1}{n^5+4n+1} - 0\right| < \varepsilon.\right)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$.

Решение задачи состоит в том, что нужно указать число $N_0 = N(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N_0 \;:\; \frac{1}{n^5+4n+1} < \varepsilon_0$.

Это означает, что нужно построить интервал $(N_0, +\infty)$, все натуральные числа которого являются решениями неравенства

$$\frac{1}{n^5 + 4n + 1} < \varepsilon_0.$$

При этом число N_0 может изначально выбрано сколь угодно большим.

Следует обратить внимание на то, что мы не решаем неравенство $\frac{1}{n^5+4n+1} < \varepsilon_0$, т.е. не находим множества всех тех и только тех значений $n \in \mathbb{N}$, для которых оно верно. Нас интересует только существование подмножества решений неравенства $\frac{1}{n^5+4n+1} < \varepsilon_0$, для которого бесконечно удалённая точка является предельной. Построение же этого подмножества решений значительно проще чем нахождение всех решение неравенства.

Для построения интервал $(N_0, +\infty)$, все натуральные числа которого являются решениями неравенства $\frac{1}{n^5+4n+1} < \varepsilon_0$, нужно построить (придумать, создать) функцию $\varphi(n)$ натурального аргумента, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\forall n > N_1 \ : \ \frac{1}{n^5+4n+1} < \varphi(n)$, где $N_1 \in \mathbb{N}$ – некоторое натуральное число;

2. Легко находятся все решения неравенства $\varphi(n) < \varepsilon_0$;

3. Все натуральные числа некоторого интервала $(N_2(\varepsilon_0), +\infty)$ являются решениями неравенства $\varphi(n) < \varepsilon_0$, т.е. бесконечно удалённая точка является предельной точкой множества решений неравенства $\varphi(n) < \varepsilon_0$.

Полагая $N_0 = N(\varepsilon_0) = \max\{N_1, N_2(\varepsilon_0)\}$ мы получим, что $\forall n > N_0$:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \frac{1}{n^5+4n+1} < \varphi(n) \\ 3. & \varphi(n) < \varepsilon_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\frac{1}{n^5+4n+1} < \varepsilon_0\right)$$

Выбор функции $\varphi(n)$, удовлетворяющей условиям 1 - 3, не является однозначным. Это, как правило, довольно трудный шаг при решении таких примеров.

Можно взять $\varphi(n) = \frac{1}{n^5}, \varphi(n) = \frac{1}{n^4}$, $\varphi(n) = \frac{1}{n^3}, \varphi(n) = \frac{1}{n^2}, \varphi(n) = \frac{1}{n}, \varphi(n) = \frac{1}{n+1}$ и так далее.

Выбираем $\varphi(n) = \frac{1}{n}$. Тогда:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{1}{n^5+4n+1} < \frac{1}{n}$;

2. $\left(\frac{1}{n} < \varepsilon_0\right) \Longleftrightarrow \left(n > \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$;

3. $N_2(\varepsilon_0) = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1.$

Полагая

$$N_0 = N(\varepsilon_0) = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1\right\} = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1,$$

получим, что $\forall n > N_0 \ : \ \frac{1}{n^5+4n+1} < \varepsilon_0$.

Пример 7. Показать, что $\forall a \in \mathbb{R}, a > 1$, последовательность $x_n = \sqrt[n]{a}$ сходится к единице.

Пример 8. Показать, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n}$ сходится к единице.

Пример 9. Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ сходится к нулю.

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Доказать по определению

$$\lim \frac{1}{n^k}$$

Теорема 6. *Если* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство.

$$(x_n \to a) \overset{?}{\Longrightarrow} (|x_n| \to |a|) \overset{\text{опр.}24}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N \; : \; \big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$(x_n \to a) \overset{\text{опр.}24}{\Longrightarrow}$$

$$(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N \; : \; |x_n - a| < \varepsilon) \overset{10.15}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall n > N \; : \; \Big||x_n| - |a|\Big| \le |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 24, что $|x_n| \to |a|$. $\square$

Замечание. Верно ли утверждение:

$$(|x_n| \to |a|) \overset{?}{\Longrightarrow} (x_n \to a).$$

Нет, не верное.
Пример: $x_n = (-1)^{n-1}$. Последовательность (x_n) расходится (см. пример 4), а последовательность $(|x_n|), |x_n| = 1$, очевидно, сходится к единице.

2.2.1. Бесконечно малые числовые последовательности.

Определение 27. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, называется *бесконечно малой*, если $\lim x_n = 0$.

Определение 28. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, называется *бесконечно малой*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$: $|x_n| < \varepsilon$.

Общие члены бесконечно малых последовательностей будем обозначать буквами греческого алфавита, например, α_n, β_n, γ_n, $\ldots$.

Пример 10. Показать, что $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1$, последовательность $\alpha_n = q^n$ бесконечно малая.

Пример 11. Показать, что $\forall b \in \mathbb{R}, b > 1$, последовательность $\alpha_n = \frac{n}{b^n}$ бесконечно малая.

Теорема 7. *Для того чтобы последовательность* (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *сходилась к числу* a, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \to 0.$$

Доказательство. Необходимость.

$$(x_n \to a) \overset{?}{\Longrightarrow} (x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n \to 0).$$

Разность $x_n - a$, обозначим α_n, то есть

$$x_n - a := \alpha_n.$$

Покажем, что $(\alpha_n \to 0)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$(x_n \to a) \overset{\text{опр.}24}{\Longrightarrow}$$

$$(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon) \overset{\text{обоз.}}{\Longrightarrow}$$
$$(\forall n > N : |\alpha_n| < \varepsilon).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 28, что $\alpha_n \to 0$.

Достаточность.

$$(x_n = a + \alpha_n, \alpha_n \to 0) \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$(x_n \to a) \overset{\text{опр.}24}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$(x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n \to 0) \Longleftrightarrow$$

$$(\alpha_n = x_n - a,\ \alpha_n \to 0) \overset{\text{опр.}28}{\Longrightarrow}$$

$$(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 24, что $x_n \to a$. $\square$

2.2.2. Бесконечно большие числовые последовательности.

Определение 29. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *стремится к бесконечности*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N\ :\ |x_n| > \varepsilon$.

Тот факт, что $(x_n), x_n \in \mathbb{R}$, стремится к бесконечности, будем кратко записывать так: $\lim x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$.

Определение 30. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *стремится к "плюс бесконечности"*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N\ :\ x_n > \varepsilon$.

Тот факт, что $(x_n), x_n \in \mathbb{R}$, стремится к плюс бесконечности, будем кратко записывать так: $\lim x_n = +\infty$ или $x_n \to +\infty$.

Определение 31. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *стремится к “минус бесконечности”*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N\ :\ x_n < -\varepsilon$.

Тот факт, что $(x_n), x_n \in \mathbb{R}$, стремится к минус бесконечности, будем кратко записывать так:
$\lim x_n = -\infty$ или $x_n \to -\infty$.

Замечание.

Если $\lim x_n = \infty$ или $\lim x_n = \pm\infty$, то (x_n) расходится.

Определение 32. Последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, называется *бесконечно большой*, если она стремится к ∞ или $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 12. Показать, что $\lim (-1)^n n^2 = \infty$.

Пример 13. Показать, что $\lim n^n = +\infty$.

2.2.2.1. Доказать, по определению, что последовательность бесконечно большая.

Доказать, что $\lim n^k = +\infty$

Доказать, что $\lim(-1)^n n^k = \infty$

Доказать, что $\lim \sqrt[k]{n} = +\infty$

Доказать, что $\lim \sqrt[k]{\ln n} = +\infty$

Доказать, что $\lim n! = +\infty$

Доказать, что $\lim a^n = +\infty$

Доказать, что $\lim n^n = +\infty$

Доказать, что $\lim \left(n^k + an + b\right) = +\infty$

2.2.3. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми числовыми последовательностями.

Теорема 8. *Если последовательность* (α_n), $\alpha_n \in \mathbb{R}$, *бесконечно малая и все её члены отличны от нуля, то последовательность* (x_n), $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$, *бесконечно большая. И наоборот, если* (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, *бесконечно большая и* $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \neq 0$, *то последовательность* (α_n), $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$, *бесконечно малая.*

Доказательство. Первая часть.

$$\left(\alpha_n \to 0 \text{ и } \alpha_n \neq 0\right) \overset{?}{\Longrightarrow} \left(x_n = \frac{1}{\alpha_n} \to \infty.\right) \overset{\text{опр.}29}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |x_n| > \varepsilon.\right)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$.

$$\left(\alpha_n \to 0\right) \overset{\text{опр.}24}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\exists N_0 = N\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N_0 : |\alpha_n| < \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall n > N_0 \ : \ |x_n| = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > \varepsilon_0.\right)$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 29, что $x_n \to \infty$.

Вторая часть доказательства.

$$(x_n \to \infty \text{ и } x_n \neq 0) \overset{?}{\Longrightarrow} \left(\alpha_n = \frac{1}{x_n} \to 0\right) \overset{\text{опр.}24}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |\alpha_n| < \varepsilon.)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$.

$$(x_n \to \infty) \overset{\text{опр.}29}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\exists N_0 = N\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N_0 : |x_n| > \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall n > N_0\ :\ |\alpha_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon_0.\right)$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 24, что $\alpha_n \to 0$. $\square$

Пример 14. Показать, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n!}$ бесконечно большая.

Решение. Так как $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ бесконечно малая последовательность (см. пример 9), то, в силу теоремы 8, $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ бесконечно большая последовательность.

Пример 15. Показать, что последовательность $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ бесконечно малая.

Решение. Так как $\left((-1)^n n^2\right)$ бесконечно большая последовательность (см. пример 12), то, в силу теоремы 8, $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$ бесконечно малая последовательность.

2.2.4. Операции над числовыми последовательностями.

Пусть заданы две последовательности $(x_n), (y_n),\ x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Определение 33. *Суммой* и *произведением* двух последовательностей $(x_n), (y_n)$ называются последовательности

$$(x_n + y_n),\ (x_n \cdot y_n).$$

Определение 34. *Частным* двух последовательностей $(x_n), (y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ y_n \neq 0$, называется последовательность

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right).$$

2.2.5. Теоремы о бесконечно малых числовых последовательностях.

Теорема 9. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство.

$$(\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0) \overset{?}{\Longrightarrow} (\alpha_n + \beta_n \to 0).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha_n \to 0) \overset{\text{опр.}28}{\Longrightarrow} \left(\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_1 \ : \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ (\beta_n \to 0) \overset{\text{опр.}28}{\Longrightarrow} \left(\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_2 \ : \ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(\exists N = \max\{N_1, N_2\} \text{ такое, что } \forall n > N \ : \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{10.13}{\Longrightarrow}$$

$$(\forall n > N \ : \ |\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 28, что $(\alpha_n + \beta_n)$ бесконечно малая последовательность. $\square$

Теорема 10. *Сумма любого фиксированного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Теорема 10 доказывается методом математической индукции. Доказать самостоятельно. $\square$

Теорема 11. *Произведение ограниченной* (x_n) *и бесконечно малой* (α_n) *последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$((x_n) - \text{ограниченная}) \overset{\text{опр.}23}{\Longleftrightarrow} (\exists M \in \mathbb{R} \text{ такое, что } \forall n \in \mathbb{N} \ : \ |x_n| \le M)$$

и

$$(\alpha_n \to 0) \overset{\text{опр.}28}{\Longrightarrow} \left(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}\right) \Longrightarrow \left(\forall n > N \ : \ |x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 28, что $(x_n \cdot \alpha_n)$ бесконечно малая последовательность. $\square$

Следствие 11.1. *Произведение сходящейся и бесконечно малой последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

В силу теоремы 4 каждая сходящаяся последовательность ограничена.

Следствие 11.2. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Бесконечно малая последовательность – сходящаяся последовательность.

Следствие 11.3. *Произведение любого фиксированного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказать самостоятельно методом математической индукции.

2.2.6. Теоремы о пределах.

Теорема 12. *Сумма двух сходящихся последовательностей есть сходящиеся последовательность, её предел равен сумме пределов слагаемых.*

Доказательство.

Пусть $x_n \to a \in \mathbb{R}$ и $y_n \to b \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

$$\left.\begin{array}{l} (x_n \to a) \overset{7}{\Longrightarrow} (x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n \to 0) \\ (y_n \to b) \overset{7}{\Longrightarrow} (y_n = b + \beta_n,\ \beta_n \to 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$(x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n),\ \alpha_n \to 0,$$

$$\beta_n \to 0) \overset{9}{\Longrightarrow}$$

$$(x_n + y_n = (a + b) + \gamma_n,\ \gamma_n = \alpha_n + \beta_n \to 0) \overset{7}{\Longrightarrow}$$

$$(\lim\,(x_n + y_n) = a + b)\,.$$

$\square$

Замечание. Верно ли утверждение:
Если последовательность $(x_n + y_n)$ сходится, то сходится последовательность (x_n) и (или) сходится последовательность (y_n)?

Нет, не верное.
Пример:

Последовательности $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ и $y_n = (-1)^{n+1}$ расходятся, а последовательность $x_n + y_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Теорема 13. *Произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, её предел равен произведению пределов сомножителей.*

Доказательство.

Пусть $x_n \to a \in \mathbb{R}$ и $y_n \to b \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

$$\left.\begin{array}{l} (x_n \to a) \overset{7}{\Longrightarrow} (x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n \to 0) \\ (y_n \to b) \overset{7}{\Longrightarrow} (y_n = b + \beta_n,\ \beta_n \to 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Big(x_n \cdot y_n = (a \cdot b) + (b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n),$$

$$\alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0\Big) \overset{119}{\Longrightarrow}$$

$$\Big(x_n \cdot y_n = (a \cdot b) + \gamma_n,$$

$$\gamma_n = b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n \to 0\Big) \overset{7}{\Longrightarrow}$$

$$\Big(\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b\Big). \quad \square$$

Следствие 13.1. $\lim (C \cdot x_n) = C \cdot \lim x_n$.

Замечание. Верно ли утверждение:
Если последовательность $(x_n \cdot y_n)$ сходится, то сходится последовательность (x_n) и (или) сходится последовательность (y_n)?
Нет, не верное.
Пример:
Последовательности $x_n = (-1)^n$ и $y_n = (-1)^n$ расходятся, а последовательность $x_n \cdot y_n = 1 \to 1$.

Лемма 2. *Если* $\lim x_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *то существуют числа* $K > 0$ *и* $N = N(K) \in \mathbb{N}$ *такие, что* $\forall n > N \ : \ |x_n| > K$.

Доказательство. Положим $K = \frac{|a|}{2}$.

$$(x_n \to a) \overset{6}{\Longrightarrow} (|x_n| \to |a|) \overset{\text{опр.}24}{\Longrightarrow}$$

$$\Bigg(\exists N = N(K) \in \mathbb{N} \text{ такое,что}$$

$$\forall n > N \;:\; ||x_n| - |a|| < K = \frac{|a|}{2}\Bigg) \Longrightarrow$$

$$\left(\forall n > N \;:\; \frac{|a|}{2} < |x_n| < \frac{3 \cdot |a|}{2}\right).$$

$\square$

Из леммы 2 следует, что если предел последовательности не равен нулю, то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности отличны от нуля.

Определение 35. Последовательность (x_n) называется *отделимой от нуля*, если $\exists K > 0$ и $\exists N = N(K) \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall n > N \ : \ |x_n| > K.$$

Из леммы 2 следует, что если

$$\lim x_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

то последовательность (x_n) *отделима от нуля.*

Лемма 3. *Если* $\lim x_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и все члены последовательности отличны от нуля, то последовательность* $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ *ограниченная.*

Доказательство.

$$(x_n \to a) \overset{2}{\Longrightarrow} (\exists > 0, \exists N = N(K) \in \mathbb{N} \text{ такие, что } \forall n > N \; : \; |x_n| > K) \Longrightarrow$$

$$\left(\forall n > N \; : \; \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{K}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\exists M = \max\left\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \dots, \frac{1}{|x_N|}, \frac{1}{K}\right\} \text{ такое, что } \forall n \in \mathbb{N} \; : \; \left|\frac{1}{x_n}\right| < M\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 23, что последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ ограниченная. $\square$

Теорема 14. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся*, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, *причём* $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0$ *и* $b \neq 0$, *то последовательность* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *сходится и её предел равен отношению пределов последовательностей* (x_n) *и* (y_n).

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}(x_n \to a) \overset{7}{\Longrightarrow} (x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n \to 0) \\ (y_n \to b) \overset{7}{\Longrightarrow} (y_n = b + \beta_n,\ \beta_n \to 0)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n} \cdot \frac{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n}{b},\right.$$

$$\left.\alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0\right)$$

Так как последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ ограничена (лемма 3), а $\frac{b\cdot\alpha_n-a\cdot\beta_n}{b}\to 0$ (см. теоремы 11 и 9), то последовательность $\frac{b\cdot\alpha_n-a\cdot\beta_n}{b\cdot y_n}$ - бесконечно малая (по теореме 11). Тогда, в силу теоремы 7, получаем, что

$$\frac{x_n}{y_n}\to\frac{a}{b}\quad\text{или}\quad\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

$\square$

2.2.7. О неопределённостях.

При рассмотрении теорем о пределах мы не рассматривали последовательности стремящиеся к бесконечности, а также случай, когда при отыскании предела частного последовательность, стоящая в знаменателе, сходится к нулю.

Теорема 15. *Если* $x_n \to \pm\infty$ *и* $y_n \to \pm\infty$, *то*

$$x_n + y_n \to \pm\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случай когда

$$\lim x_n = +\infty \text{ и } \lim y_n = +\infty.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} (x_n \to +\infty) \overset{\text{опр.}30}{\Longrightarrow} \\ (\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N_1 \ : \ x_n > \varepsilon) \\ (y_n \to +\infty) \overset{\text{опр.}30}{\Longrightarrow} \\ (\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N_2 \ : \ y_n > \varepsilon) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$(\exists N = \max\{N_1, N_2\} \text{ т.ч. } \forall n > N \ : \ x_n + y_n > \varepsilon).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 30, что $x_n + y_n \to +\infty$. Аналогично доказывается случай когда $x_n \to -\infty$ и $y_n \to -\infty$. $\square$

Теорема 16. *Если* (x_n) *ограниченная и* (y_n) *бесконечно большая последовательности, то* $(x_n + y_n)$ *- бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \left((x_n) - \text{ограниченная}\right) \overset{\text{опр.}23}{\Longleftrightarrow} \\ \left(\exists M \in \mathbb{R} \text{ такое, что } \forall n \in \mathbb{N} \; : \; |x_n| \le M\right) \\ \left(y_n \to \infty\right) \overset{\text{опр.}29}{\Longrightarrow} \\ \left(\exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N \; : \; |y_n| > \varepsilon + M\right) \end{array}\right\} \overset{10.15}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall n > N \; : \; |x_n + y_n| = |y_n - (-x_n)| \ge \right.$$
$$\left. \ge ||y_n| - |-x_n|| > |\varepsilon + M - M| = \varepsilon\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 29, что $x_n + y_n \to \infty$. $\square$

Теорема 17. *Если последовательность* (x_n) *отделима от нуля, а последовательность* (y_n) *- бесконечно большая, то последовательность* $(x_n \cdot y_n)$ *- бесконечно большая.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \left((x_n) - \text{отделима от нуля}\right) \overset{\text{опр.}35}{\Longleftrightarrow} \\ \quad (\exists K > 0\ \exists N_1 = N_1(K) \in \mathbb{N}\ \text{ такие, что} \\ \qquad\qquad \forall n > N_1\ :\ |x_n| > K) \\ (y_n \to \infty) \overset{\text{опр.}29}{\Longrightarrow} \\ \qquad \left(\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \text{т.ч.}\ \forall n > N_2\ :\ |y_n| > \frac{\varepsilon}{K}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Bigl(\exists N = \max\{N_1, N_2\}\ \text{такое, что}\ \forall n > N\ : \\ |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| > \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon\Bigr).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 29, что $x_n \cdot y_n \to \infty$. $\square$

Следствие 17.1. *Произведение последовательности сходящейся к числу* a $(a \neq 0)$ *и бесконечно большой последовательности есть бесконечно большая последовательность.*

Следствие 17.2. *Произведение двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.*

2.2.7.1. О сравнении бесконечно больших числовых последовательностей.

Пусть (x_n) и (y_n) бесконечно большие числовые последовательности, причём $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq 0$.

Что можно сказать о пределе последовательности $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$?

1. $x_n = n \to +\infty, \quad y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} \to 1;$$

1. $x_n = n \to +\infty, \;\; y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} \to 1;$$

2. $x_n = n \to +\infty, \;\; y_n = n^2 \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

1. $x_n = n \to +\infty, \;\; y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} \to 1;$$

2. $x_n = n \to +\infty, \;\; y_n = n^2 \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

3. $x_n = n^2 \to +\infty, \;\; y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty;$$

1. $x_n = n \to +\infty, \quad y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} \to 1;$$

2. $x_n = n \to +\infty, \quad y_n = n^2 \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

3. $x_n = n^2 \to +\infty, \quad y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty;$$

4. $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n \to \infty, \quad y_n = n \to +\infty,$

$$\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n-1} \text{ предела не имеет.}$$

Приведённые примеры показывают, что о пределе частного двух бесконечно больших числовых последовательностей в общем случае ничего определённого сказать нельзя. В этом случаи говорят, что имеет место *неопределённость вида* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. А *раскрыть неопределённость вида* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ означает: в каждом конкретном случае, в зависимости от заданных бесконечно больших последовательностей (x_n) и (y_n), решить вопрос о пределе последовательности $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$.

Пусть (x_n) и (y_n) бесконечно большие числовые последовательности, причём

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; y_n \neq 0.$$

Определение 36. Говорят, что бесконечно большие числовые последовательности (x_n) и (y_n) *одного порядка роста*, если $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall n > N \;:\; 0 < h_1 < \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < h_2.$$

Теорема 18. *Пусть* (x_n) *и* (y_n) *бесконечно большие числовые последовательности, причём*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; y_n \neq 0.$$

Если $\lim \frac{x_n}{y_n}$ *конечен и отличен от нуля, то последовательности* (x_n) *и* (y_n) *бесконечно большие одного порядка роста.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon_0 = \dfrac{|a|}{2}$.

$$\left(\lim \frac{x_n}{y_n} = a \neq 0\right) \xRightarrow{6} \left(\lim \left|\frac{x_n}{y_n}\right| = |a|\right) \xRightarrow{\text{опр.}24}$$

$$\left(\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N_0 : \left|\left|\frac{x_n}{y_n}\right| - |a|\right| < \frac{|a|}{2}\right) \xRightarrow{10.16}$$

$$\left(\forall n > N_0 : 0 < \underbrace{\frac{|a|}{2}}_{h_1} < \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \underbrace{\frac{3|a|}{2}}_{h_2}\right)$$

Из выделенного синим цветом, в силу определения 36, следует утверждение теоремы. $\square$

Определение 37. Пусть (x_n) и (y_n) бесконечно большие числовые последовательности, причём $\forall n \in \mathbb{N},\ \ y_n \neq 0$.
Если $\lim \frac{x_n}{y_n}$ равен нулю, то говорят, что последовательность (y_n) *бесконечно большая более высокого порядка роста, чем последовательность* (x_n) (или последовательность (x_n) *бесконечно большая более низкого порядка роста, чем последовательность* (y_n)).

Тот факт, что последовательность (x_n) *бесконечно большая более низкого порядка роста, чем последовательность* (y_n) записывают так: $x_n \ll y_n$.

Определение 38. Пусть (x_n) и (y_n) бесконечно большие числовые последовательности, причём $\forall n \in \mathbb{N},\ \ y_n \neq 0$.
Если $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$, то говорят, что последовательности (x_n) и (y_n) *эквивалентные* и пишут $x_n \sim y_n$.

Пусть $a \in \mathbb{R}, a > 1$ произвольное.

Определение 39. Последовательности вида:

$$(\ln \ln n)\,, (\ln n)\,, (n)\,, (a^n)\,, (n!)\,, (n^n)$$

назовем *образующими*.

Можно показать, что $\forall k, l, m, r, s, i, j, p, q \in \mathbb{N}$ имеет место *шкала порядков роста последовательностей*:

$$\cdots \ll (\ln\ln n)^{\frac{k}{m}} \ll \cdots \ll (\ln n)^{\frac{r}{s}} \ll \cdots \ll n^{\frac{i}{j}} \ll \cdots$$
$$\cdots \ll (a^n)^{\frac{p}{q}} \ll \cdots \ll n! \ll \cdots \ll n^n \ll \cdots \qquad (2.3)$$

Замечания к шкале порядков роста последовательностей:

1. Шкала содержит лишь малую часть бесконечно больших последовательностей и может быть расширена. Но она содержит все нужные нам при решении задач этого учебника последовательности.

2. Очевидно, что из двух последовательностей, относящихся к одному узлу шкалы, большим порядком роста обладает последовательность с большим показателем. Например: $n \ll n^2, (\ln n)^{\frac{1}{2}} \ll (\ln n)^{\frac{3}{4}}$.

Определение 40. Если последовательность (z_n) можно представить в виде произведения образующей последовательности в рациональной степени и ограниченной отделимой от нуля последовательности, то образующую последовательность в рациональной степени назовём *доминантой последовательности* (z_n) (от лат. dominantis - важнейшая часть чего либо).

Замечания:

1. Если последовательность (z_n) имеет доминанту, то последовательность (z_n) бесконечно большая.

2. Не всякая последовательность имеет доминанту.

3. Зная доминанты бесконечно больших последовательностей их легко сравнивать между собой по порядку роста, опираясь при этом на шкалу порядков роста последовательностей.

Пример 16. Выделить доминанту последовательности

$$x_n = 5n^5 + n^3 - 3n + 1.$$

Решение. Представим последовательность (x_n) в виде $x_n = 5n^5 + n^3 - 3n + 1 = n^5 \cdot \left(5 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)$.

Так как $\lim \left(5 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right) = 5$, то (см. теорему 4 и лемму 2) последовательность $\left(5 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)$ ограниченная и отделимая от нуля, а последовательность (n) является образующей.

Итак, доминантой последовательности (x_n) является последовательность $\left(n^5\right)$.

тренажёр – инструмент

Выделить доминанту последовательности

$$a_0 n^5 + a_1 n^4 + a_2 n^3 + a_3 n^2 + a_4 n + a_5$$

тренажёр – инструмент

Выделить доминанту последовательности

$$\sqrt[k]{an^m + bn^l + c}$$

тренажёр – инструмент

Выделить доминанту последовательности

$$\sqrt[k]{an^m + bn^l + c} - \sqrt[s]{dn^r + en^t + f}$$

Пример 17. Найти

$$\lim \frac{n+1}{n}.$$

Решение. Последовательности $x_n = n + 1$ и $y_n = n$ бесконечно большие. Для раскрытия неопределённости $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ воспользуемся приёмом: в числителе и знаменателе выделим доминанты. Тогда получим

$$\lim \frac{n+1}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = \\ = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

т.к. последовательность $\lim \frac{1}{n} = 0$. В дальнейшем приём, который мы использовали при решении примера 17, будем называть – "*Метод доминант*."

Пример 18. Найти

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n^2+1}.$$

Решение. Последовательности $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}$ и $y_n = n^2 + 1$ бесконечно большие. Для раскрытия неопределённости $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ воспользуемся "Методом доминант". Тогда получим

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{n\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0,$$

т.к. доминанта знаменателя имеет более высокий порядок роста, чем доминанта числителя $\left(n \ll n^2\right)$.

Пример 19. Найти

$$\lim \frac{2^n - 1}{3^n + 1}.$$

Решение. Последовательности $x_n = 2^n - 1$ и $y_n = 3^n + 1$ бесконечно большие. Для раскрытия неопределённости $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ воспользуемся "Методом доминант". Тогда получим

$$\lim \frac{2^n - 1}{3^n + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{2^n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = 0,$$

т.к. доминанта знаменателя имеет более высокий порядок роста, чем доминанта числителя $(2^n \ll 3^n)$.

Пример 20. Найти

$$\lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n^2\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}.$$

Решение. Последовательности $x_n = \left(\sqrt{n^2+1}+n^2\right)^2$ и $y_n = \sqrt[3]{n^6+1}$ бесконечно большие. Для раскрытия неопределённости $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ воспользуемся "Методом доминант".

Тогда получим

$$\lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n^2\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim \frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^6}\right)^{\frac{1}{3}}} = \infty,$$

т.к. доминанта числителя имеет более высокий порядок роста, чем доминанта знаменателя $\left(n^2 \ll n^4\right)$.

2.2.7.2. О разности бесконечно больших последовательностей.

Пусть $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$.

Что можно сказать про предел последовательности $(x_n - y_n)$?

1. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + n \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = n \to +\infty;$

1. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + n \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = n \to +\infty;$

2. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + 5 \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = 5 \to 5;$

1. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + n \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = n \to +\infty;$

2. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + 5 \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = 5 \to 5;$

3. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + \frac{1}{n} \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0;$

1. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + n \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = n \to +\infty;$

2. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + 5 \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = 5 \to 5;$

3. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + \frac{1}{n} \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0;$

4. $\left.\begin{array}{l} x_n = n^2 + (-1)^{n-1} \to +\infty \\ y_n = n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n - y_n = (-1)^{n-1}$ - предела не имеет.

Приведённые примеры показывают, что если $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$, то последовательность $(x_n - y_n)$ может сходится, может стремится к ∞ или вообще не иметь предела. Всё зависит от заданных бесконечно больших последовательностей (x_n) и (y_n). В этом случае говорят, что имеет место *неопределённость вида* $(\infty-\infty)$. *Раскрыть неопределённость вида* $(\infty - \infty)$ означает: в каждом конкретном случае, в зависимости от заданных бесконечно больших последовательностей x_n и y_n, решить вопрос о пределе последовательности $(x_n - y_n)$.

Теорема 19. *Пусть* $x_n \to \pm\infty$ *и* $y_n \to \infty$, *причём* (x_n) *есть последовательность более высокого порядка роста чем последовательность* (y_n). *Тогда* $(x_n - y_n)$ *и* (x_n) *есть эквивалентные бесконечно большие последовательности.*

Доказательство. Запишем $x_n - y_n = x_n \cdot \left(1 - \frac{y_n}{x_n}\right)$. Так как (x_n) есть последовательность более высокого порядка роста чем последовательность (y_n), то, по определению 37, $\lim \frac{y_n}{x_n} = 0$. В силу теоремы 17, последовательность $x_n \cdot \left(1 - \frac{y_n}{x_n}\right)$ бесконечно большая и, учитывая, что для всех достаточно больших номеров $1 - \frac{y_n}{x_n} > 0$, получаем, что $x_n - y_n \to \pm\infty$. Так как $\lim \frac{x_n - y_n}{x_n} = \lim \left(1 - \frac{y_n}{x_n}\right) = 1$, то последовательности $(x_n - y_n)$ и (x_n), по определению 38, эквивалентные. $\square$

Итак, в силу теоремы 19, только тогда, когда бесконечно большие последовательности (x_n) и (y_n) одного порядка роста, возникают трудности с нахождением предела последовательности $(x_n - y_n)$.

Пример 21. Найти

$$\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right). \tag{2.4}$$

Решение. Последовательности $x_n = \sqrt{n+1}$ и $y_n = \sqrt{n}$ эквивалентные бесконечно большие последовательности $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся приёмом, основанном на формуле:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Сомножители $(a-b)$ и $(a+b)$ называют *сопряжёнными*. Перепишем (2.4) в виде $\lim \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$ и домножим числитель и знаменатель на выражение $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ сопряжённое $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Тогда получим

$$\lim \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = (\infty - \infty) \overset{10.17}{=}$$

$$= \lim \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

т.к. последовательность $z_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ бесконечно большая. В дальнейшем приём, который мы использовали при решении примера 21, будем называть методом *“Умножить на сопряжённое”*.

Пример 22. Найти $\lim \left(\sqrt{4n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Решение. Последовательности $x_n = \sqrt{4n+1}$ и $y_n = \sqrt{n}$ бесконечно большие одного порядка роста $\left(\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \sqrt{\frac{4n+1}{n}} = 2\right)$. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся методом "Умножить на сопряжённое".

Тогда получим

$$\lim \frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{n}}{1} = (\infty - \infty) \overset{10.17}{=}$$

$$= \lim \frac{(4n+1)-n}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{3n+1}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = +\infty,$$

т.к. доминанта числителя имеет более высокий порядок роста чем доминанта знаменателя ($\sqrt{n} \ll n$).

Второй способ решения.

Для раскрытия неопределённости воспользуемся "Методом доминант". Тогда получим

$$\lim\left(\sqrt{4n+1}-\sqrt{n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-1\right)=+\infty,$$

как произведение бесконечно большой последовательности на сходящуюся к единице последовательность (см. следствие 1 теоремы 17).

Пример 23. Найти

$$\lim \left(\sqrt[3]{n+a} - \sqrt[3]{n} \right). \tag{2.5}$$

Пример 24. Найти $\lim \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+3} - \sqrt{n^3-1}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Предел последовательности.

2.2.8. О переходе к пределу в неравенствах.

Теорема 20. *Если последовательность* (x_n) *сходится* *и* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0$, *то*

$$\lim x_n \geq 0.$$

Доказательство. Метод от противного.
Допустим, что $\lim x_n = -|a| < 0$.
Зафиксируем $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$.

$$\left(\lim x_n = -|a|\right) \overset{\text{опр.}25}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N \ : \ |x_n + |a|| < \frac{|a|}{2}\right)$$

$$\overset{10.16}{\Longrightarrow} \left(\forall n > N \ : \ x_n < -\frac{|a|}{2}\right).$$

Выделенное синим цветом противоречит условию теоремы, $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \geq 0$. Следовательно, наше предположение не верное. $\square$

Замечание. Имеет ли место утверждение:

$$\left.\begin{array}{l}((x_n)\text{- сходится})\\ (\forall n\in\mathbb{N}\ :\ x_n>0)\end{array}\right\}\overset{?}{\Longrightarrow}(\lim x_n>0)?$$

Нет, это утверждение не верно. Предел последовательности может быть равен нулю, и в случае, когда все члены последовательности положительны.

Пример:

$x_n=\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}\ :\ \frac{1}{n}>0$, но $\lim\frac{1}{n}=0$.

Теорема 21. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся и* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le y_n$ $(x_n < y_n)$, *то*

$$\lim x_n \le \lim y_n.$$

Доказательство.

Обозначим через $z_n = y_n - x_n$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} ((x_n)\text{- сходится}) \\ ((y_n)\text{- сходится}) \\ (\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \le y_n) \end{array}\right\} \overset{12}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ((z_n)\text{- сходится}) \\ (\forall n \in \mathbb{N} \ : \ z_n \ge 0) \end{array}\right\} \overset{20}{\Longrightarrow}$$

$$(\lim z_n \ge 0) \Longrightarrow$$

$$(\lim x_n \le \lim y_n).$$

$\square$

Теорема 22. *Пусть последовательности* (x_n) *и* (z_n) *сходятся и имеют равные пределы :*

$$\lim x_n = \lim z_n = a.$$

Если

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \leq y_n \leq z_n,$$

то последовательность (y_n) *сходится и её предел равен* a.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l}(\lim x_n = a) \overset{\text{опр.}25}{\Longrightarrow} \\ (\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_1 \ : \ x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)) \\ (\lim z_n = a) \overset{\text{опр.}25}{\Longrightarrow} \\ (\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N_2 \ : \ z_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)) \\ \hfill (\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \le y_n \le z_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(\exists N = \max\{N_1, N_2\} \text{ такое, что } \forall n > N \ : \ y_n \in \underbrace{(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)}_{U_\varepsilon(a)}\right)$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 25, что $\lim y_n = a$. $\square$

Пример 25. Показать, что

$$\lim \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Решение. Очевидно следующее неравенство

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Так как $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (см. пример 10), то, в силу теоремы 22, $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

Пример 26. Показать, что

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Пример 27. Показать, что

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

2.2.9. Монотонные последовательности.

Определение 41. Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ (обозначение $(x_n) \Uparrow$);

неубывающей, если

$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ (обозначение $(x_n) \uparrow$);

невозрастающей, если

$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$ (обозначение $(x_n) \downarrow$);

убывающей, если

$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ (обозначение $(x_n) \Downarrow$).

Определение 42. Последовательность (x_n) называется *монотонной*, если она возрастающая или неубывающая или невозрастающая или убывающая.

Определение 43. Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \le M$.

Легко видеть, что если монотонно возрастающая последовательность ограничена сверху, то она ограничена.

Определение 44. Последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ M \leq x_n$.

Легко видеть, что если монотонно убывающая последовательность ограничена снизу, то она ограничена.

Определение 45. Обозначим через

$$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}.$$

Если

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots,$$

то говорят, что имеется последовательность *вложенных отрезков*.

Лемма 4. *(Больцано-Коши-Кантора). Для любой последовательности*

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

вложенных отрезков найдётся точка $c \in \mathbb{R}$, *принадлежащая всем этим отрезкам. Если, кроме того, известно, что для любого* $\varepsilon > 0$ *в последовательности можно найти отрезок, длина которого меньше* ε, *то* c — *единственная общая точка всех отрезков.*

Без доказательства.

Теорема 23. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Последовательность (x_n) — ограниченная , т.е. существует $[a, b]$ такой, что $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; x_n \in [a, b]$.
Делим отрезок $[a, b]$ пополам. В силу монотонности последовательности (x_n), только один из двух полученных в результате деления отрезков содержит бесконечно много членов последовательности (x_n). Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$, $[a, b] \supset [a_1, b_1]$, и с этим отрезком поступаем теперь так же, как с исходным отрезком $[a, b]$, т.е. делим его пополам, и продолжаем процесс дальше.

Мы построили последовательность

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$$

вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Тогда, в силу леммы 4, существует единственная точка $c \in [a, b]$, общая для всех этих отрезков.

Покажем, по определению 26, что $\lim x_n = c$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как длины вложенных отрезков стремятся к нулю, то существует отрезок $[a_N, b_N] \subset U_\varepsilon(c)$, вне которого, по построению, находится лишь конечное число членов последовательности (x_n).

Из выделенного синим цветом следует, по определению 26, что $\lim x_n = c$. $\square$

Пример 28. Последовательность (x_n) определяется следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Доказать существование предела последовательности (x_n) и найти его.

Решение. Покажем, что $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, 0 < x_n < 1$. Доказывать это утверждение будем методом математической индукции.

I. При $n = 1$ неравенство $0 < x_1 = \frac{1}{2} < 1$ верно.

II. Пусть имеет место неравенство

$$0 < x_{n-1} < 1.$$

III. Тогда, очевидно, что

$$0 < x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Итак, последовательность (x_n) ограниченная.

Покажем, далее, что последовательность (x_n) возрастающая. Действительно

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2} - x_{n-1} = \frac{(1 - x_{n-1})^2}{2} > 0$$

для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, в силу теоремы 23, последовательность (x_n) сходится. Обозначим $\lim x_n = a$.
Тогда, переходя к пределу в равенстве

$x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}$, получим $a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}$. Последнее уравнение имеет два решения: $a_{1,2} = 1$.
Ответ: $\lim x_n = 1$.

Пример 29. Доказать, что последовательность

$$x_1 = \frac{x_0}{2+x_0}, x_2 = \frac{x_1}{2+x_1}, \ldots, x_n = \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}, \ldots,$$

где $x_0 > 0$ – произвольное число, сходится и найти предел этой последовательности.

Пример 30. Дана последовательность

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots,$$

$$\ldots, x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}, \ldots.$$

Доказать, что эта последовательность имеет предел, и найти его.

2.2.10. Число e.

Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots.$$

и покажем, что она имеет конечный предел.

В силу теоремы 23, для доказательства существования конечного предела этой последовательности достаточно показать что:

1. последовательность (x_n) возрастающая;

2. последовательность (x_n) ограничена сверху.

Доказательство.

Пользуясь формулой **биномa Ньютона**, запишем:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, запишем:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

1. Покажем, что последовательность (x_n) - возрастающая. Для этого запишем выражение для x_{n+1} и сравним его с x_n :

$$
\begin{aligned}
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется ещё одно положительное слагаемое. Следовательно, последовательность (x_n) возрастающая.

2. Покажем, что последовательность (x_n) - ограничена сверху. Действительно

$$
\begin{aligned}
x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Показано, что последовательность (x_n) - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, следовательно, в силу теоремы 23, она имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e, т.е.

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Можно показать, что число e - иррациональное и значение $e = 2,71828\ldots$.

2.2.11. Критерий Коши.

Рассмотрим вопрос об общем признаке существования предела последовательности. Заметим, что в определении 24 предела последовательности фигурирует уже тот предел, существование которого мы только ещё хотим установить.

Определение 46. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Поставленную задачу решает следующая теорема, принадлежащая чешскому математику Больцано (B. Bolzano) и французскому математику Коши́ (A.E. Cauchy).

Теорема 24. (*критерий Коши сходимости последовательности*). *Числовая последовательность* (x_n) *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальная.*

Доказательство. Необходимость.

Пусть $\lim x_n = a$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$(x_n \to a) \overset{\text{опр.}24}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists N \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Big(\forall n > N \text{ и } \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \leq$$

$$\leq |x_{n+p} - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\Big)$$

Из выделенного синим цветом, по определению 46, следует, что последовательность (x_n) фундаментальная.

Достаточность. Пусть последовательность (x_n) фундаментальная.
Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\Big((x_n) - \text{ фундаментальная }\Big) \overset{\text{опр.}46}{\Longrightarrow}$$

$$\Big(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ такое что } \forall n > N \text{ и}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{4}\Big) \overset{10.16}{\Longrightarrow}$$

$$\Big(\forall p \in \mathbb{N} : a = x_n - \frac{\varepsilon}{4} < x_{n+p} = y_p < x_n + \frac{\varepsilon}{4} = b\Big)$$

Разделим промежуток $[a, b]$ пополам, тогда хотя бы в одной половине будет содержаться бесконечное множество элементов последовательности (y_p), ибо, в противном случае, и на всём промежутке $[a, b]$ этих элементов содержалось бы конечное число, что невозможно. Итак, пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин, которая содержит бесконечное множество чисел y_p (или если обе половины таковы, то любая из них).

Аналогично, из промежутка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$ – при условии, чтобы в ней содержится бесконечное множество чисел y_p и т.д. Продолжая этот процесс до бесконечности, на k-ой стадии его выделим промежуток $[a_k, b_k]$, также содержащий бесконечное множество чисел y_p.

Каждый из построенных промежутков (начиная со второго) содержится в предыдущем, составляя его половину. Кроме того длина k-го промежутка, равная

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^k},$$

стремится к нулю с возрастанием k.
В силу леммы 4, получаем, что (a_k) и (b_k) стремятся к общему пределу $c \in [a, b]$.
Тогда $\forall n > N : |x_n - c| < \varepsilon.$
Из выделенного синим цветом, в силу определения 24, следует, что $\lim x_n = c$. $\square$

Из теоремы 24 видно, что сходящиеся последовательности обладают свойством:

члены последовательности между собой безгранично сближаются по мере возрастания их номеров.

Критерий Коши часто используется при доказательстве теорем о последовательностях.

Замечание 1. Фундаментальные последовательности ввёл Больцано, пытавшийся, не располагая точным понятием вещественного числа, доказать сходимость фундаментальной последовательности. Коши дал такое доказательство, приняв за очевидное лемму о вложенных промежутках, доказанную впоследствии Кантором.

Теорема 24 допускает следующую переформулировку, полезную для доказательства расходимости конкретных последовательностей.

Теорема 25. *Для расходимости последовательности (x_n) необходимо и достаточно чтобы существовало число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}$ нашлись бы номера $n > N$ и $p \in \mathbb{N}$, для которых выполнялось бы неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon.$$

Пример 31. Пользуясь теоремой 25, доказать, что последовательность (x_n),

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

расходится.

Решение. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда при любом n и $p = n$ имеет место неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

В силу теоремы 25, последовательность (x_n) расходится.

Пример 32. Пользуясь теоремой 25, доказать, что последовательность (x_n),

$$x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

расходится.

Пример 33. Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность (x_n),

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

сходится.

Пример 34. Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность (x_n),

$$x_n = \frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

сходится.

Пример 35. Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность (x_n),

$$x_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

сходится.

Глава 3

Предел отображения

3.1. Отображения (функции).

Говорят, что задано отображение из множества A во множество B, если
1) задано множество A, называемое *областью определения отображения*,
2) задано множество B, называемое *областью значений отображения*,
3) задан некоторый метод, позволяющий для каждого $a \in A$ находить единственное $b \in B$.
Это значение $b \in B$, соответствующее $a \in A$, называется *значением* данного отображения при $x = a$ или короче: *значением данного отображения в точке* a.

Отображение обычно обозначается латинскими буквами: $f, g, \ldots$- или греческими: $\phi, \psi\ \ldots$.
Если отображение обозначено через f, то значение отображения в точке $x = a$ обозначается $f(a)$ и называется *образом точки* a.
Введем две переменные: x и y. Переменная x может принимать любое значение из области определения A функции f. Переменная x называется *независимой переменной*.
Равенство: $y = f(x)$ сопоставляет каждому значению независимой переменной x некоторое значение переменной y. Переменная y называется *зависимой переменной* (y "зависит" от x.)

Выражение:
$f : A \to B$ - означает:
"f есть отображение A в B."
Так же читается выражение $A \xrightarrow{f} B$.

Определение 47. *Образом множества* $C \subset A$ при отображении $f : A \to B$ называют множество

$$f(C) := \{y \in B | \exists x \left((x \in C) \wedge (y = f(x)) \right)\}$$

тех элементов B, которые являются образами элементов множества C.

Определение 48. Множество $f(A)$ называется *множеством значений отображения* $f : A \to B$.

Заметим, что, в общем случае, множество значений отображения не совпадает с областью значений отображения.

Схематически отображение $f : A \to B$ будем изображать так как на рис. 3.1.

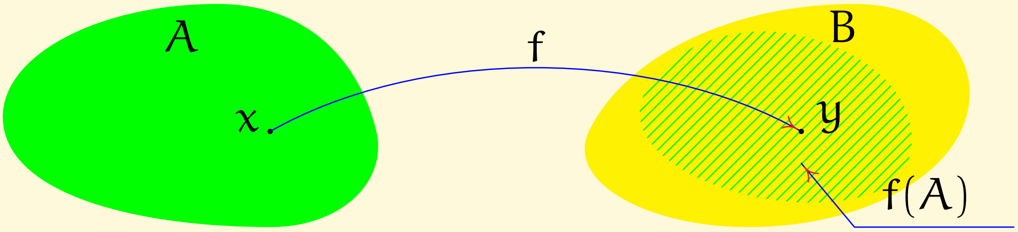


Рис. 3.1 Схематическое изображение отображения

3.1.1. Способы задания функций.

1. **Аналитический способ.**

Пусть задана область определения функции A, область значений B и выражение зависимой переменной через независимую вида: $y = f(x)$, где $f(x)$ есть так называемая *формула*, по которой для всех $x \in A$ вычисляются значения $y \in B$.

Аналитический способ удобен экономичностью записи. Однако, у него ограниченная сфера применения. Не каждая функция, с которой приходится иметь дело, может быть задана аналитически.

2. **Графический способ.**

Определение 49. Пусть $f : A \to B$. Множество

$$\operatorname{graf} f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$$

назовем *графиком отображения* f.

Если $A, B \subset \mathbb{R}$, то график отображения состоит из точек $(x, f(x))$ пространства $\mathbb{R}^2$. Это позволяет задать график отображения на чертеже.
Если заданы множества A и B, а также график $\operatorname{graf} f$ отображения f, то говорят, что функция f задана *графически*.
Графический способ удобен своей наглядностью и возможностью увидеть поведение функции во всей области определения. Его недостатком является невысокая точность построения и чтения графика.
Этот способ задания функций является единственно возможным в ряде случаев (кардиограммы, сейсмограммы).

3. **Алгоритмический способ**.

Говорят, что функция f задана *алгоритмически*, если задан способ вычислений, позволяющий по заданному значению аргумента в конечное число шагов получить значение функции. Алгоритмический способ вычисления функции реализован в виде встроенных программ вычисления значений функций в компьютерах, калькуляторах.

4. **Табличный способ.**
В прошлом очень распространенный способ (обширные таблицы логарифмов и т.д.).
С развитием математического анализа появляются новые способы задания функций.

3.1.2. Простейшая классификация отображений.

Про отображение $f : A \to B$ говорят, что оно

сюръективно (или есть *отображение* A *на* B), если $f(A) = B$;

инъективно (или есть *вложение, инъекция*), если для любых элементов x_1, x_2 множества A

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2),$$

т.е. различные элементы имеют различные образы;

биективно (или *взаимно однозначно*), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

Обозначим через L множество упорядоченных пар $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, которое на иллюстрации имеет вид гладкой кривой. Движками “polynomial terms:” можно изменить вид этого множества, а движком “zoom” масштаб его отображения.

Вертикальную и горизонтальную тест-линии можно передвигать движками “horizontal” и “vertical”, соответственно. При этом линии окрашиваются в зелёный или красный цвет.

Обозначим через D множество точек оси абсцисс, проходя через которые вертикальная линия пересекает кривую L и окрашивается в зелёный цвет. Это множество является областью определения функции $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ и $\mathrm{graff} \subseteq L$.

Обозначим через B множество значений функции f.

Если горизонтальные линии проходящие через каждую точку $y \in B$ пересекают graff в единственной точке, то функция $f : D \longrightarrow B$ биекция. В противном случае отображение $f : D \longrightarrow B$ сюръективно.

3.1.3. Обратное отображение.

Если отображение $f : A \to B$ биективно, то отображение

$$f^{-1} : B \to A$$

определим следующим образом:
если $x \xrightarrow{f} y$, то $y \xrightarrow{f^{-1}} x$, т.е. элементу $y \in B$ ставится в соответствие тот элемент $x \in A$, образом которого при отображении f является y. Отображение $f^{-1} : B \to A$ называется *обратным* по отношению к исходному отображению $f : A \to B$ (см. рис. 3.2).

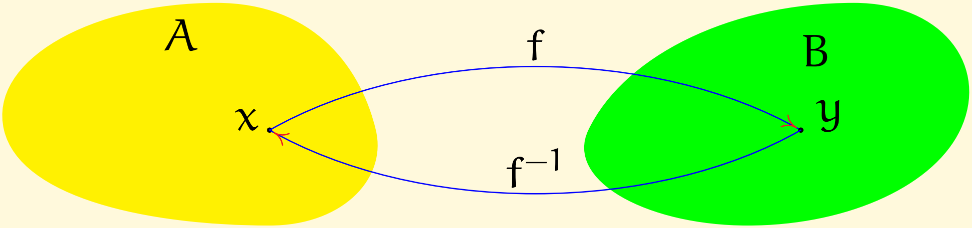


Рис. 3.2 Обратное отображение

Если же отображение $f : A \to B$ не является биективным, то для любого $y_0 \in f(A) \subset B$ необходимо найдётся такое $x_0 \in A$, что

$$f(x_0) = y_0,$$

но подобных значений x_0 может оказаться и несколько. В этих случаях говорят, что *обратное отображение многозначное*.

Во многих случаях можно выбрать подмножества $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$ так, что отображение $f : A_1 \to B_1$ будет биективным (см. рис. 3.3).

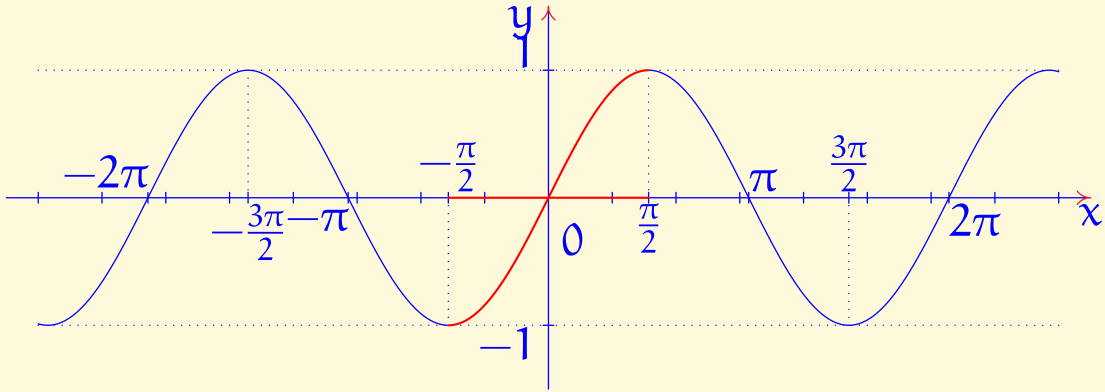


Рис. 3.3 График функции $y = \sin x$

3.1.3.1. О графиках прямой и обратной функции.

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ и $f : A \to B$ – биекция. Тогда можно определить обратную ей функцию
$f^{-1} : B \to A$. Рассмотрим их графики $\operatorname{graf} f, \operatorname{graf} f^{-1} \subset \mathbb{R}^2$, заданные уравнениями: $y = f(x), y = f^{-1}(x)$. Имеем:

$$((x_1, y_1) \in \operatorname{graf} f) \overset{49}{\iff} (y_1 = f(x_1)) \overset{3.1.3}{\iff}$$
$$\left(x_1 = f^{-1}(y_1)\right) \overset{49}{\iff} \left((y_1, x_1) \in \operatorname{graf} f^{-1}\right).$$

Итак:

$$((x_1, y_1) \in \operatorname{graf} f) \iff \left((y_1, x_1) \in \operatorname{graf} f^{-1}\right).$$

Это означает, что графики прямой и обратной функции симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов (см. Рис. 3.4).

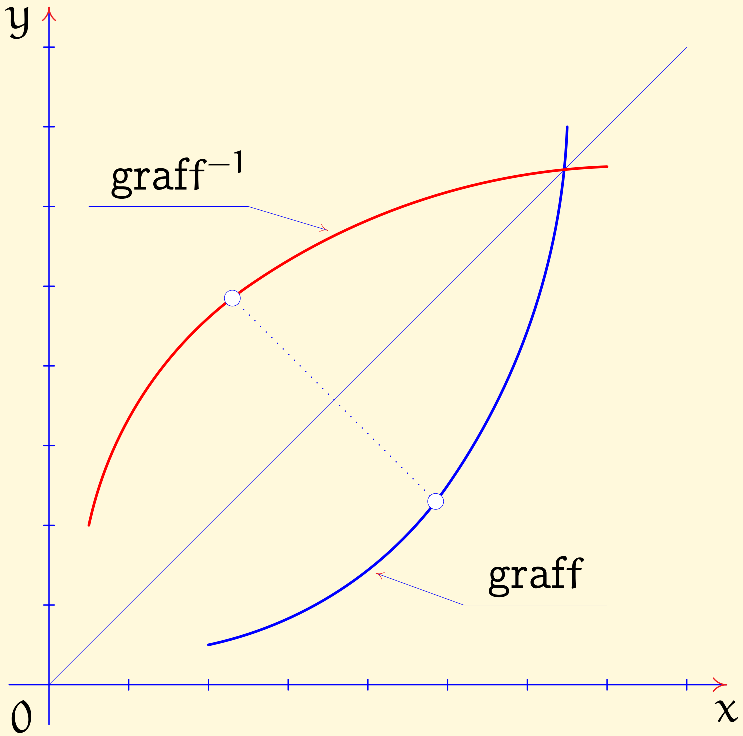


Рис. 3.4 Графики прямой и обратной функций

Графики прямой и обратной элементарных функций

Просматривайте одновременно графики прямой и обратной функций школьного курса математики: sin и arcsin, cos и arccos, tg и arctg, ctg и arcctg, exp и ln,....

3.1.4. Композиция отображений.

Богатым источником новых функций, с одной стороны, и способом расчленения сложных функций на более простые - с другой, является операция композиции отображений.
Если отображение $f : A \to B$ и $g : B \to C$ таковы, что одно из них (в нашем случае g) определено на множестве значений другого (f), то можно построить новое отображение

$$g \circ f : A \to C,$$

значения которого на элементах множества A определяются формулой

$$(g \circ f)(x) := g\,(f(x))\,.$$

Построенное составное отображение $g \circ f : A \to C$ называют *композицией отображения f и отображения g* (см. рис. 3.5).

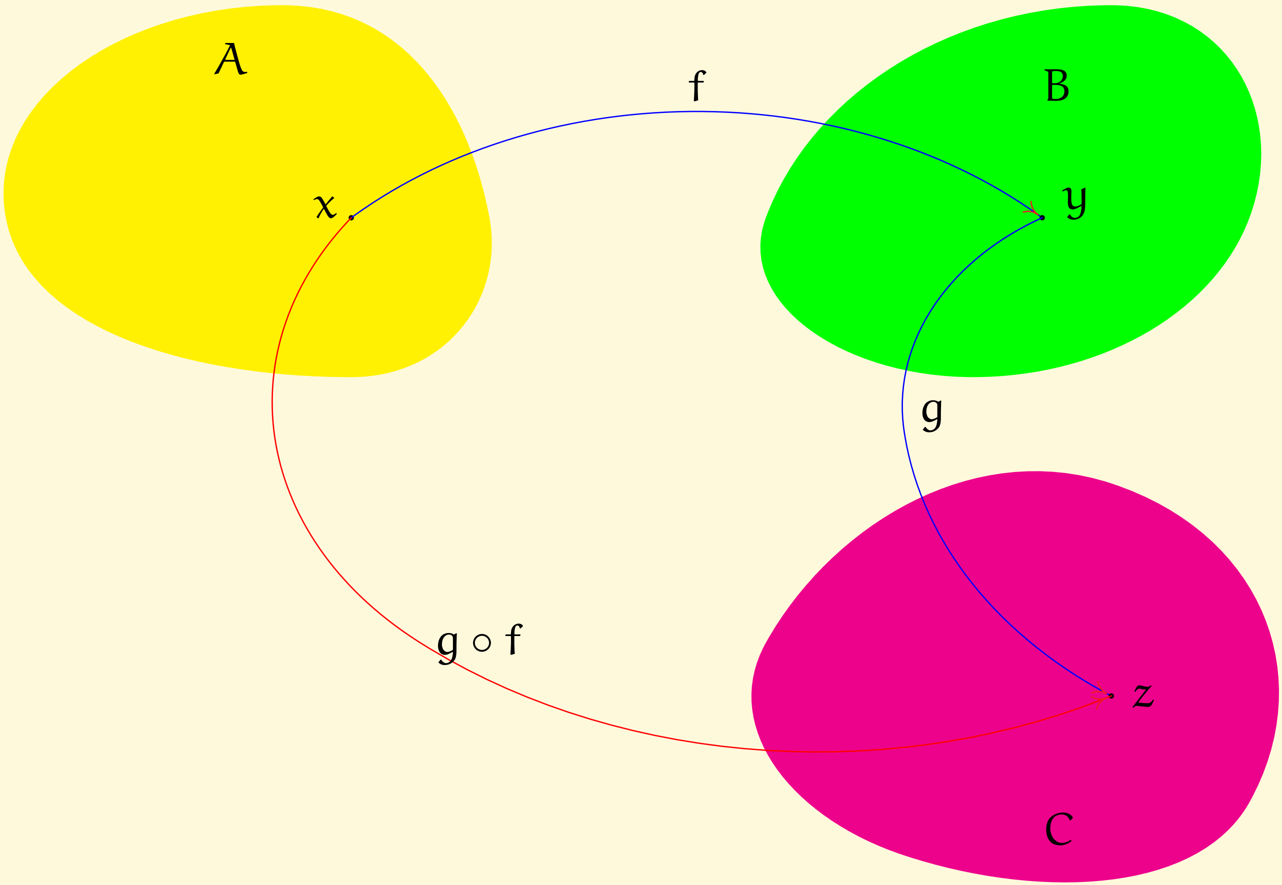


Рис. 3.5 Композиция отображений

Синонимы термина композиция отображений есть *композиция функций*, *сложная функция*. Очевидно, что если отображение $f : A \to B$ биекция и отображение $f^{-1} : B \to A$ обратное отображению f, то

$$\forall x \in A \,:\, x = f^{-1} \circ f(x)$$

и

$$\forall y \in B \,:\, y = f \circ f^{-1}(y).$$

КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть графики функций f и g уже построены.

Показана схема построения графика функции $f \circ g$.

При построении точек графика функции $f \circ g$ используется вспомогательная прямая $\Pi : y = x$.

Перемещая движок “x value” Вы видите как каждой точке x оси абсцисс сопоставляется точка $(x, f \circ g(x))$.

3.2. Фундаментальные функции элементарной математики.

Среди функций $f : A \to B, A, B \subset \mathbb{R}$ выделяют *фундаментальные функции*. Почти все они содержатся в школьном курсе математики. К фундаментальным функциям элементарной математики относятся следующие функции:

3.2.1. Линейная функция.

Линейная функция $y = kx + b, \forall x \in \mathbb{R}$, где k и b - вещественные числа. Графиком линейной функции является прямая. Число k называется *угловым коэффициентом* этой прямой. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона α этой прямой к положительному направлению оси абсцисс: $k = \operatorname{tg} \alpha$. Число b называется *начальной ординатой*. Прямая определяется двумя точками. Точка $M_0(0, b)$ принадлежит графику линейной функции $y = kx + b$.

На рисунке 3.6 посмотрите графики линейной функции при различных значениях k и $b = 2$.

Посмотрите графики линейной функции при различных значениях коэффициентов

По графику функции $y = mx + b$ найдите коэффициенты m и b

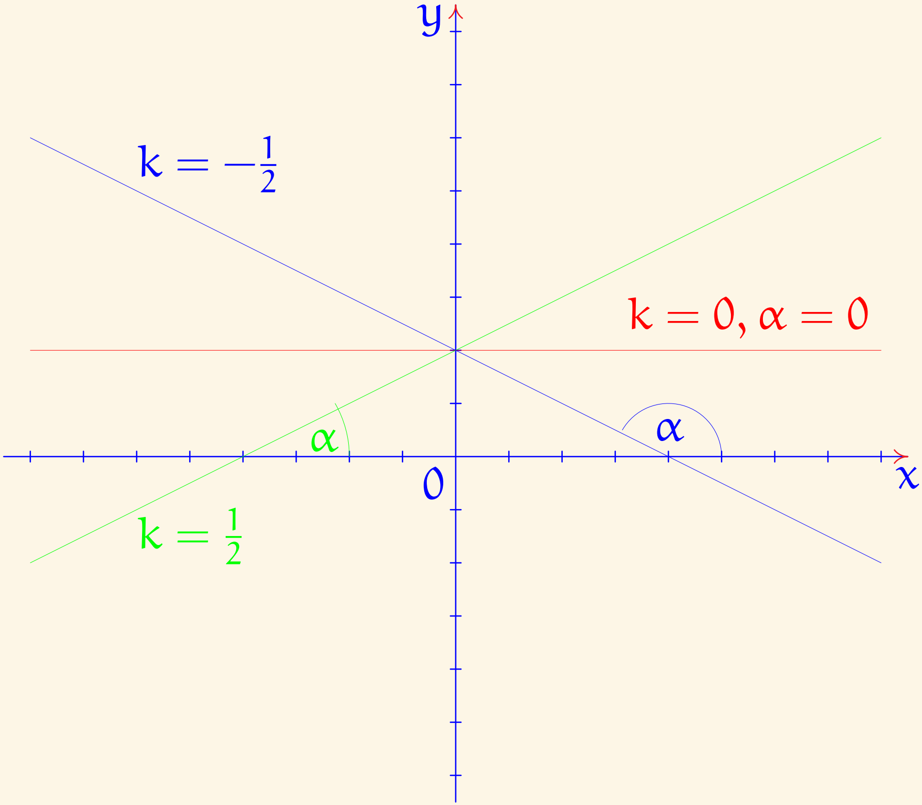


Рис. 3.6 Графики функции $y = kx + 2$

3.2.2. Квадратичная функция.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, где a, b, c - вещественные числа. Графиком квадратичной функции является парабола (см. рис. 3.7). Ветви параболы при $a > 0$ направлены в положительном направлении оси ординат (вверх); при $a < 0$ - в отрицательном направлении оси ординат (вниз). Выражение $\Delta = b^2 - 4ac$ называется *дискрименантом квадратичной функции*. Если $\Delta > 0$, то парабола в двух точках $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ пересекает ось абсцисс; если $\Delta = 0$, то касается оси абсцисс в точке $x_0 = \frac{-b}{2a}$; если $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, то парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

Посмотрите графики квадратичной функции при различных значениях коэффициентов

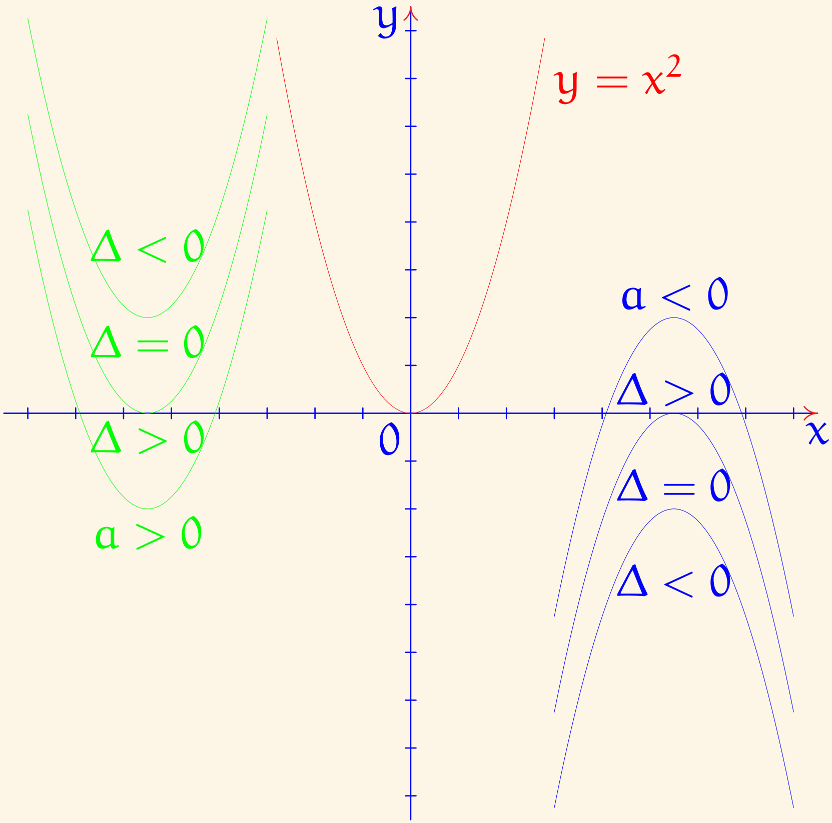


Рис. 3.7 Графики квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

3.2.3. Степенная функция.

Степенная функция $y = x^{\alpha}$. Если α - иррационально, то область определения степенной функции $(0, \infty)$, так как в элементарной математике степень с иррациональным показателем определена только для положительного основания (см. рис. 3.8). Если же $\alpha = \frac{m}{n}$ рационально, то степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ может быть задана и на отрицательной полуоси оси абсцисс (см. рис. 3.9). Записывая $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ получаем, что:

$$\text{при } m \text{ чётном } x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\text{при } m \text{ нечётном и } n \text{ нечётном } x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\text{при } m \text{ нечётном и } n \text{ чётном } x \in [0, +\infty).$$

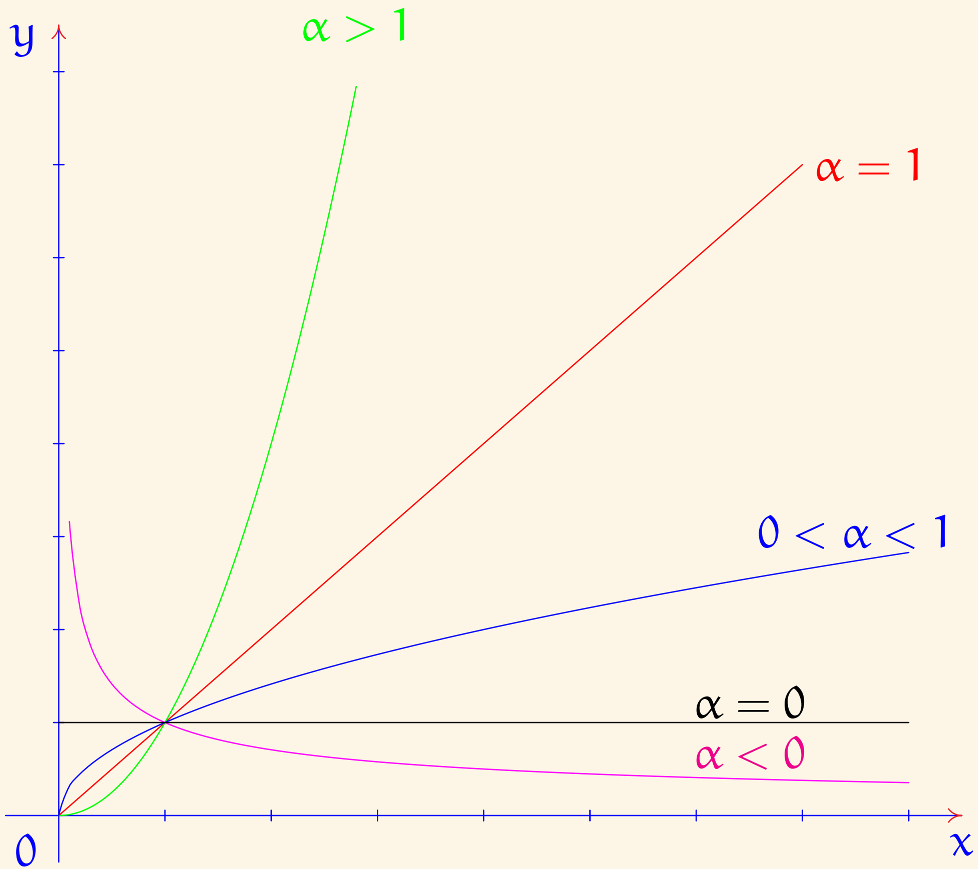


Рис. 3.8 Типичные графики степенной функции $y = x^{\alpha}$ на положительной полуоси оси абсцисс

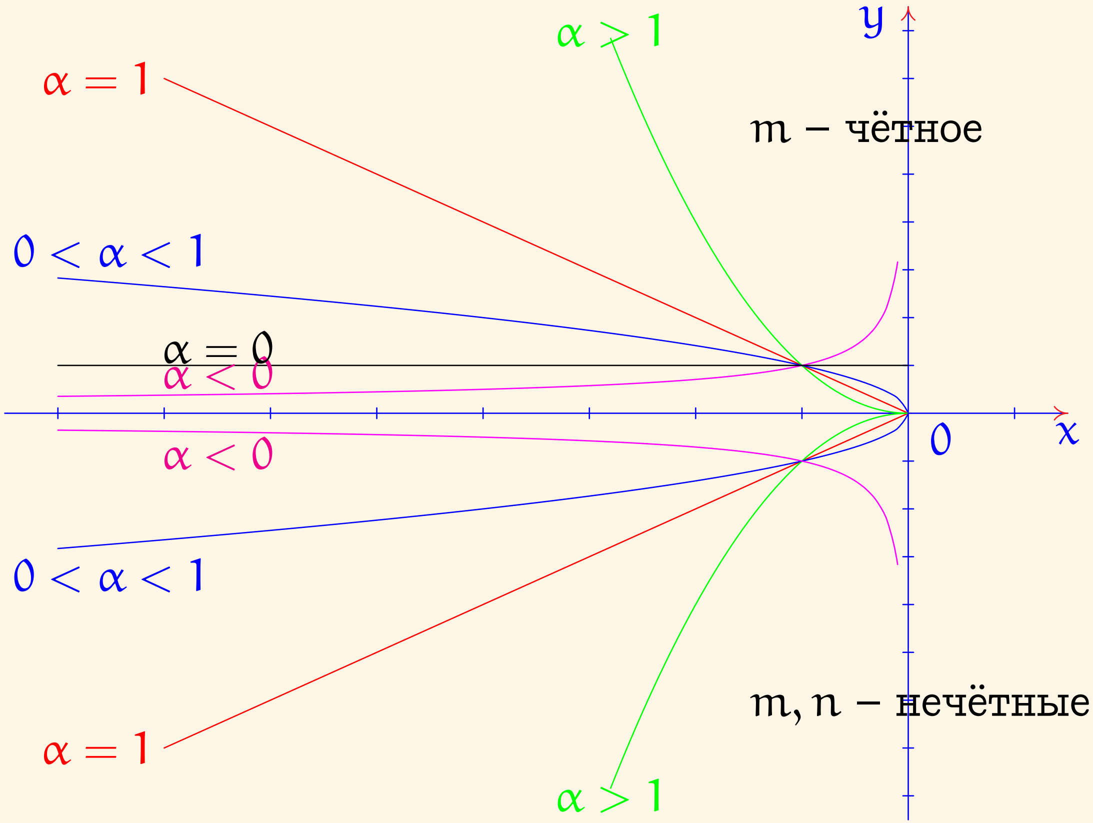


Рис. 3.9 Типичные графики степенной функции $y = x^{\alpha}$ на отрицательной полуоси оси абсцисс

3.2.4. Показательная функция.

Показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.
Основные свойства показательной функции:
Область определения - $(-\infty, +\infty)$;
Множество значений - $(0, +\infty)$;
Возрастает при $a > 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
Убывает при $0 < a < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
На рис. 3.10 изображены типичные графики показательной функции.

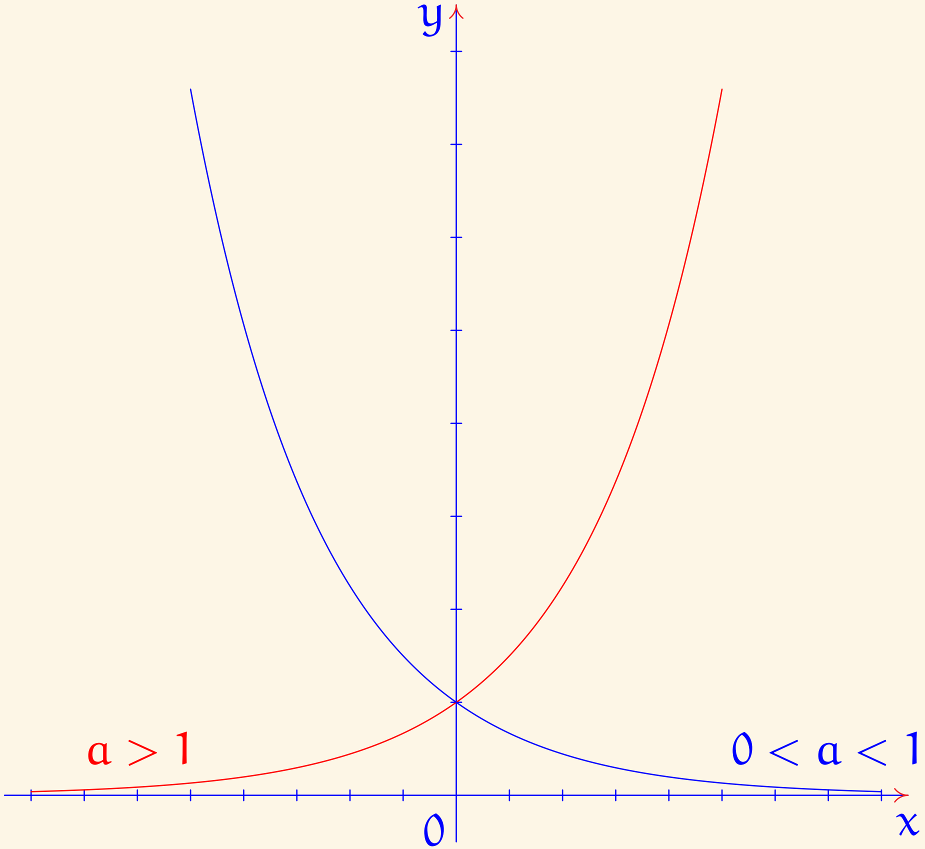


Рис. 3.10 Типичные графики показательной функции $y = a^x$

3.2.5. Логарифмическая функция.

Логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$. Логарифмическая функция определяется как функция обратная показательной функции.

Основные свойства логарифмической функции:

Область определения - $(0, +\infty)$;

Множество значений - $(-\infty, +\infty)$;

Возрастает при $a > 1, \forall x \in (0, +\infty)$;

Убывает при $0 < a < 1, \forall x \in (0, +\infty)$.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

На рис. 3.11 изображены типичные графики логарифмической функции.

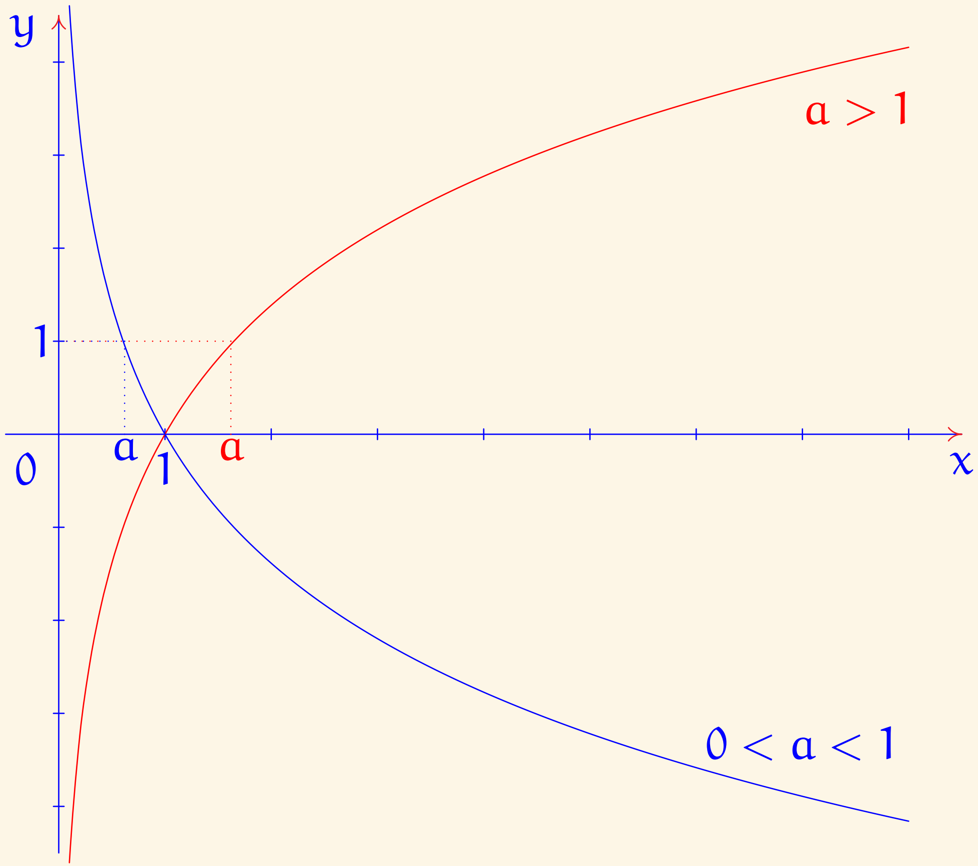


Рис. 3.11 Типичные графики логарифмической функции $y = \log_a x$

3.2.6. Тригонометрическая функция синус.

Пусть A - точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α - угол между осью абсцисс и направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (см. рис. 3.12). При этом если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелки - отрицательной.

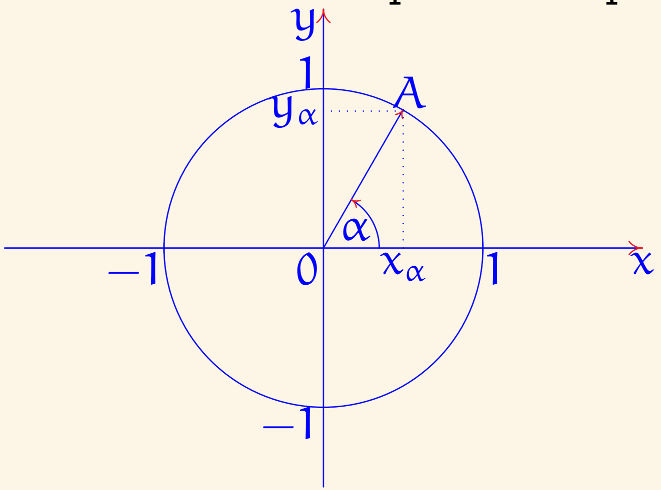


Рис. 3.12 Определение $y = \sin x$

Если (x_α, y_α) - прямоугольные декартовы координаты точки A, то *тригонометрическая функция синус* (обозначение $\sin$) определяется формулой

$$\sin\alpha = y_\alpha.$$

ФУНКЦИЯ СИНУС

При перемещении движка "angle" рисуется график тригонометрической функции синус.

Основные свойства тригонометрической функции синус:

Область определения - $(-\infty, +\infty)$;

Множество значений - $[-1, 1]$;

Периодическая, период равен 2π;

Нечётная;

Возрастает при $x \in \left(\frac{(4n-1)\pi}{2}, \frac{(4n+1)\pi}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$;

Убывает при $x \in \left(\frac{(4n+1)\pi}{2}, \frac{(4n+3)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right)$;

График функции $y = \sin x$ см. рис. 3.13.

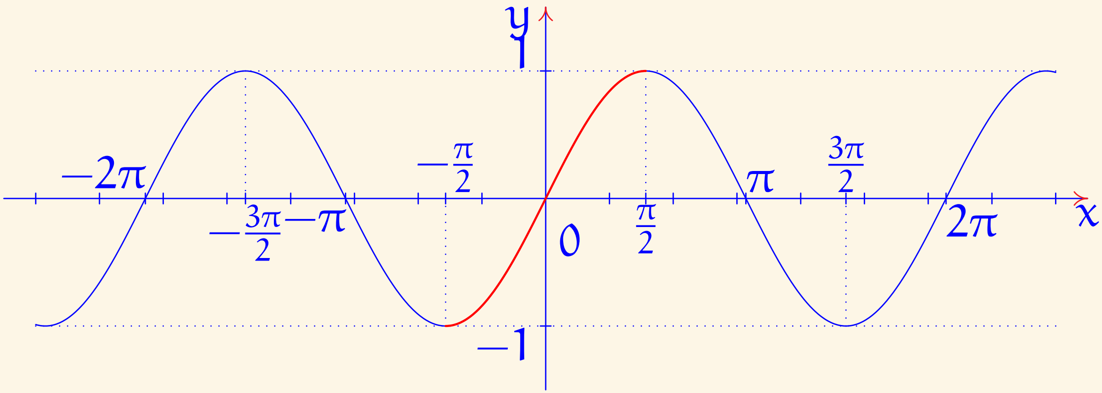


Рис. 3.13 График функции $y = \sin x$

ФУНКЦИЯ СИНУС

Установите значение параметра “c”: $c \doteq 1$.

Посмотрите как меняется график функции

$$y = d \cdot \sin\left(\frac{1}{c} \cdot x - \frac{a}{c}\right) + b$$

в зависимости от значений параметров a, b, c и d.

3.2.7. Тригонометрическая функция косинус.

Пусть A - точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α - угол между осью абсцисс и направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (см. рис. 3.14). При этом если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелки - отрицательной.

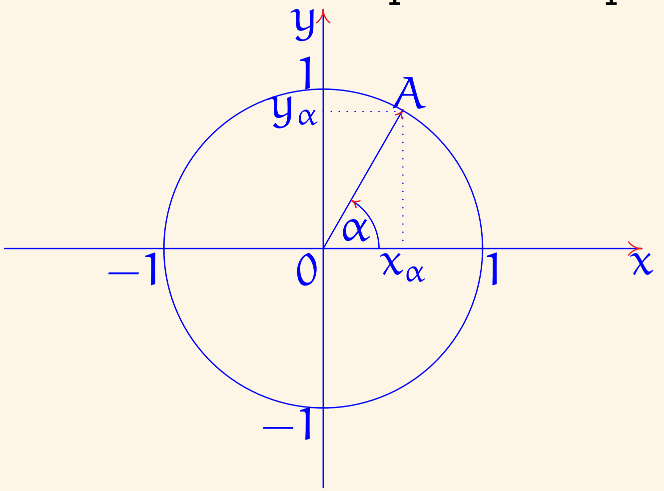


Рис. 3.14 Определение $y = \cos x$

Если (x_α, y_α) - прямоугольные декартовы координаты точки A, то *тригонометрическая функция косинус* (обозначение $\cos$) определяется формулой

$$\cos\alpha = x_\alpha.$$

ФУНКЦИЯ КОСИНУС

При перемещении движка “angle” рисуется график тригонометрической функции косинус.

Основные свойства тригонометрической функции косинус:

Область определения - $(-\infty, +\infty)$;

Множество значений - $[-1, 1]$;

Периодическая, период равен 2π;

Чётная;

Возрастает при $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$;

Убывает при $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$;

График функции $y = \cos x$ см. рис. 3.15.

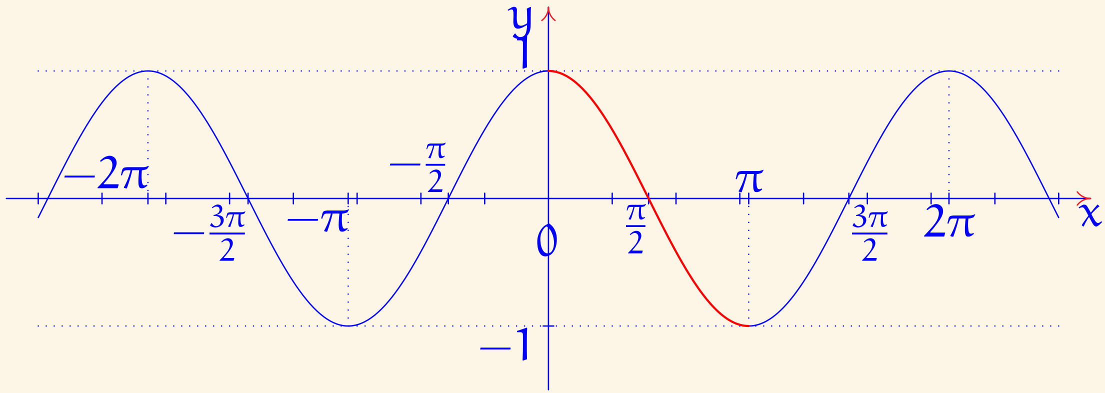


Рис. 3.15 График функции $y = \cos x$

ФУНКЦИЯ КОСИНУС

Установите значение параметра “c”: $c \doteq 1$.
Посмотрите как меняется график функции

$$y = d \cdot \cos\left(\frac{1}{c} \cdot x - \frac{a}{c}\right) + b$$

в зависимости от значений параметров a, b, c и d.

3.2.8. Тригонометрическая функция тангенс.

Пусть A - точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α - угол между осью абсцисс и направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (см. рис. 3.16). При этом если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелки - отрицательной.

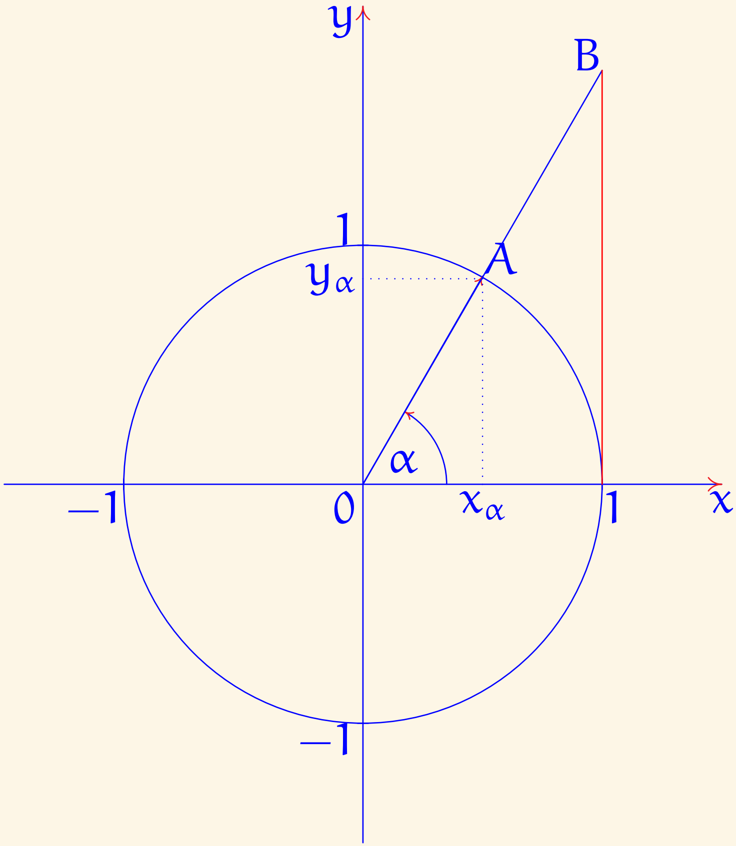


Рис. 3.16 Определение $y = \operatorname{tg} x$

Если (x_α, y_α) и $(1, y_B)$ - декартовы координаты точек A и B, то тригонометрическая функция *тангенс* (обозначение tg) определяется формулами

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \mathrm{sign}\,(x_\alpha \cdot y_\alpha)\,|y_B|\,.$$

ФУНКЦИЯ ТАНГЕНС

При перемещении движка “angle” рисуется график тригонометрической функции тангенс.

Основные свойства тригонометрической функции тангенс:

Область определения - $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

Множество значений - $(-\infty, +\infty)$;

Периодическая, период равен π;

Нечётная;

Возрастает при $x \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$;

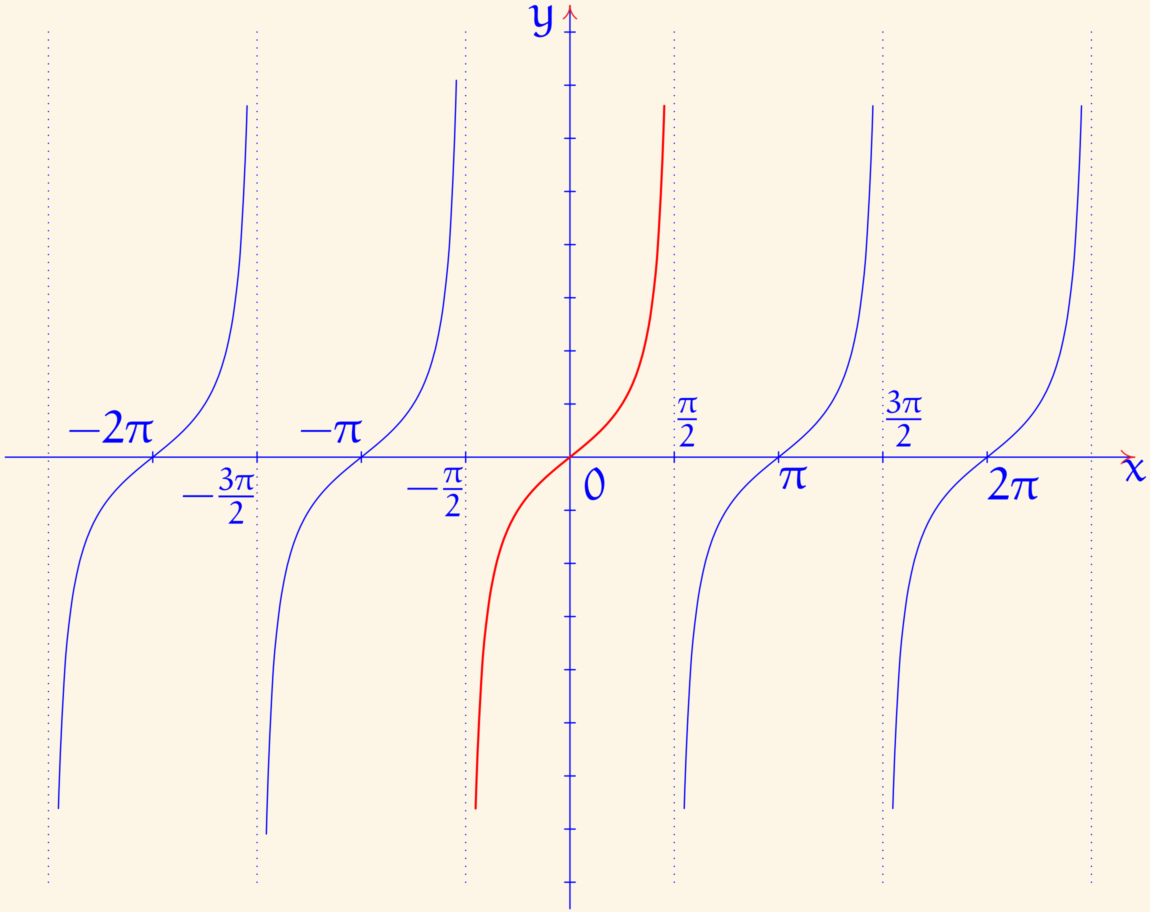


Рис. 3.17 График функции $y = \operatorname{tg} x$

ФУНКЦИЯ ТАНГЕНС

Установите значение параметра "c": $c \doteq 1$.

Посмотрите как меняется график функции

$$y = d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{c} \cdot x - \frac{a}{c}\right) + b$$

в зависимости от значений параметров a, b, c и d.

3.2.9. Тригонометрическая функция котангенс.

Пусть A - точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α - угол между осью абсцисс и направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (см. рис. 3.18). При этом если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелки - отрицательной.

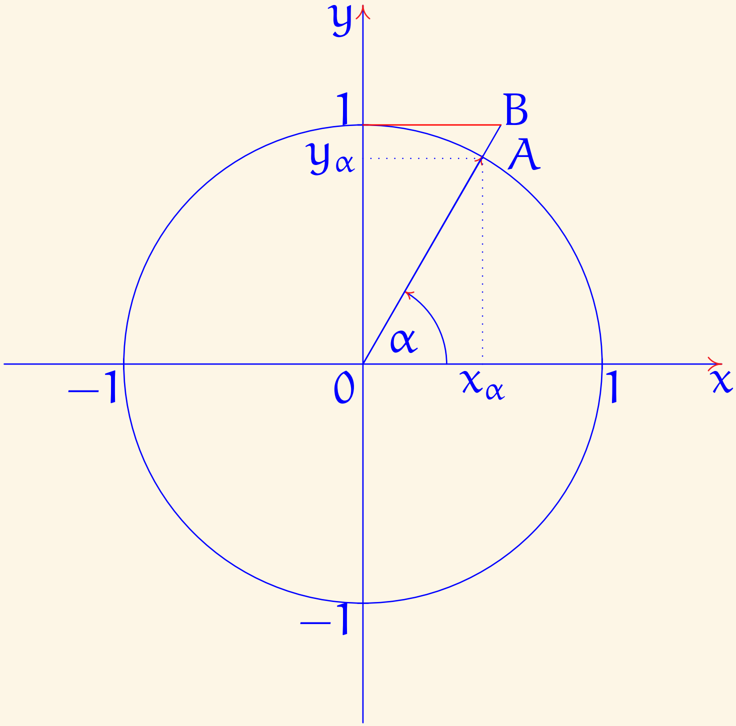


Рис. 3.18 Определение $y = \operatorname{ctg} x$

Если (x_α, y_α) и $(x_B, 1)$- декартовы координаты точек A и B, то тригонометрические функции синус, косинус и *котангенс* (обозначения $\sin$, $\cos$ и ctg) определяются формулами $\sin\alpha = y_\alpha, \cos\alpha = x_\alpha$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \operatorname{sign}(x_\alpha \cdot y_\alpha)\,|x_B|$.

ФУНКЦИЯ КОТАНГЕНС

При перемещении движка “angle” рисуется график тригонометрической функции котангес.

Основные свойства тригонометрической функции котангенс:
Область определения - $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
Множество значений - $(-\infty, +\infty)$;
Периодическая, период равен π;
Чётная;
Убывает при $x \in (n\pi, (n+1)\pi)\,, n \in \mathbb{Z}$;

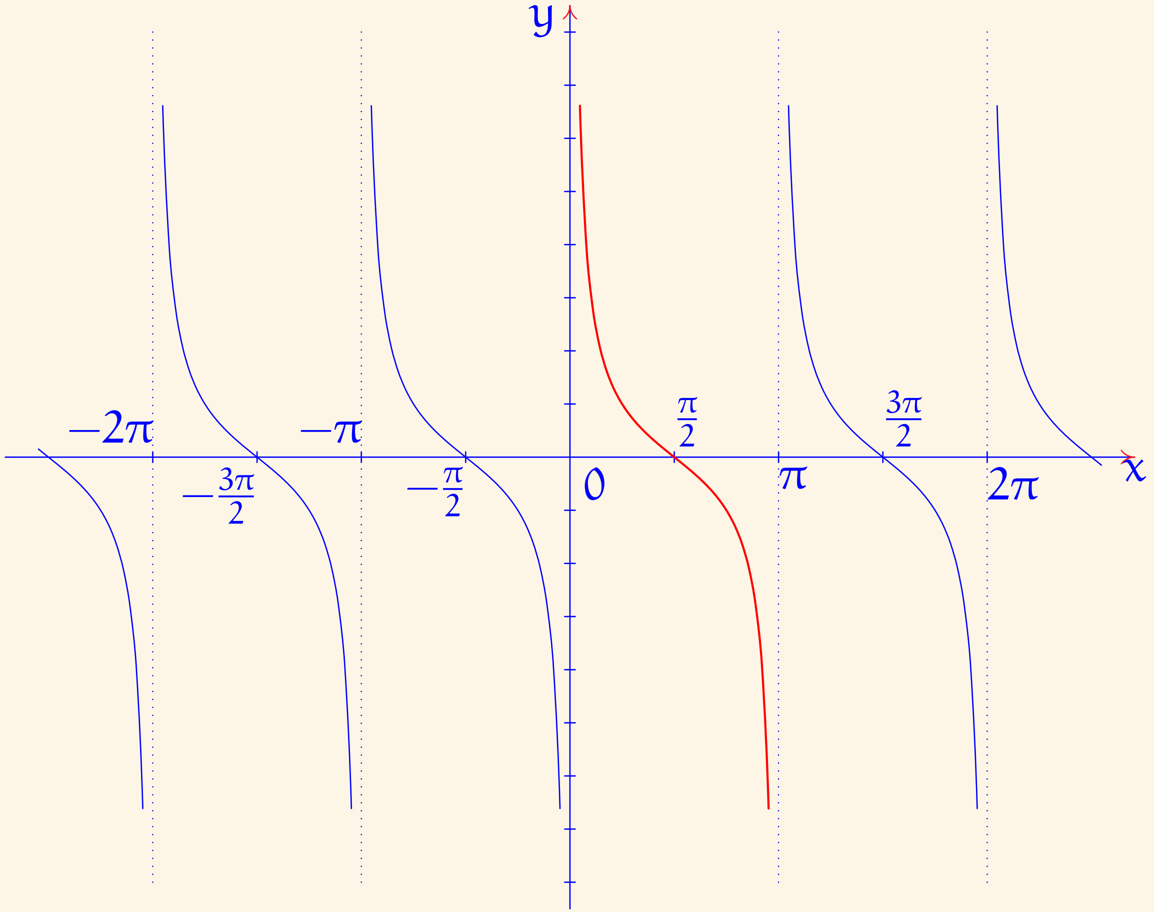


Рис. 3.19 График функции $y = \operatorname{ctg} x$

ФУНКЦИЯ КОТАНГЕНС

Посмотрите как меняется график функции

$$y = d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{c} \cdot x - \frac{a}{c}\right) + b$$

в зависимости от значений параметров a, b, c и d.

3.2.10. Обратная тригонометрическая функция арксинус.

Функция $f : [-1, 1] \to (-\infty, +\infty)$, обратная функции $\sin : (-\infty, +\infty) \to [-1, 1]$, называется *Арксинусом* и обозначается Arcsin. Так как тригонометрическая функция синус периодическая, то её обратная функция является многозначной функцией. Однозначная ветвь (главная ветвь) функции Arcsin обозначается $\arcsin$ и определяется как та ветвь функции Arcsin, для которой $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Обратные тригонометрические функции Arcsin и $\arcsin$ связаны соотношением:

$$\mathrm{Arcsin}\, x = (-1)^n \arcsin x + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

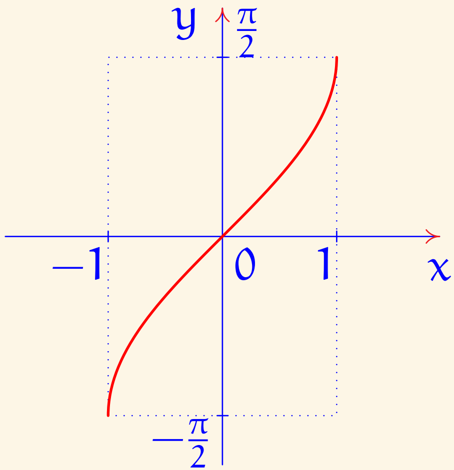


Рис. 3.20 График функции $y = \arcsin x$

ФУНКЦИЯ АРКСИНУС

Нажмите кнопки “sin” и “show inverse”.
При перемещении движков “domain start”, “domain end” рисуются графики тригонометрических функций синус и Арксинус.

Основные свойства тригонометрической функции арксинус:
Область определения - $[-1, 1]$;
Множество значений - $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
Нечётная;
Возрастает при $x \in [-1, 1]$;

3.2.11. Обратная тригонометрическая функция. арккосинус.

Функция $f : [-1, 1] \to (-\infty, +\infty)$, обратная функции $\cos : (-\infty, +\infty) \to [-1, 1]$, называется *Арккосинусом* и обозначается Arccos. Так как тригонометрическая функция косинус периодическая, то её обратная функция является многозначной функцией. Однозначная ветвь (главная ветвь) функции Arccos обозначается $\arccos$ и определяется как та ветвь функции Arccos, для которой $0 \leq \arccos x \leq \pi$. Обратные тригонометрические функции Arccos и $\arccos$ связаны соотношением:

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

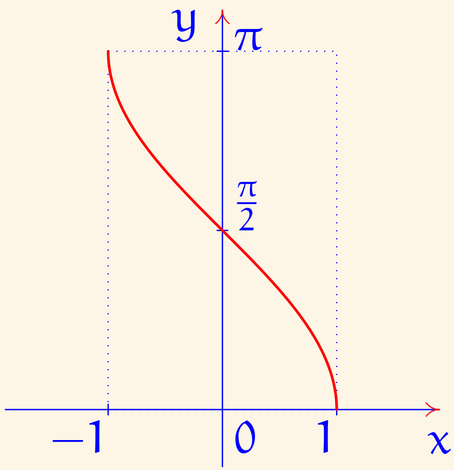


Рис. 3.21 График функции $y = \arccos x$

ФУНКЦИЯ АРККОСИНУС

Нажмите кнопки "cos" и "show inverse".
При перемещении движков "domain start", "domain end" рисуются графики тригонометрических функций косинус и Арккосинус.

Основные свойства тригонометрической функции арккосинус:
Область определения - $[-1, 1]$;
Множество значений - $[0, \pi]$;
Убывает при $x \in [-1, 1]$;

3.2.12. Обратная тригонометрическая функция арктангенс.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обратная функции tg, называется *Арктангенсом* и обозначается Arctg. Так как тригонометрическая функция тангенс периодическая, то её обратная функция является многозначной функцией. Однозначная ветвь (главная ветвь) функции Arctg обозначается arctg и определяется как та ветвь функции Arctg, для которой $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Обратные тригонометрические функции Arctg и arctg связаны соотношением:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

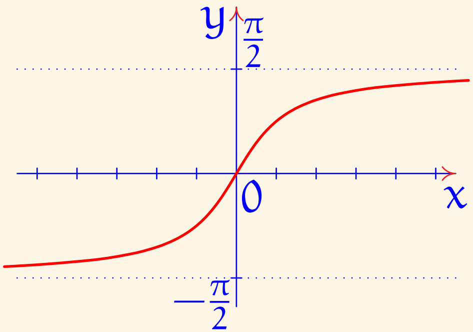


Рис. 3.22 График функции $y = \operatorname{arctg} x$

ФУНКЦИЯ АРКТАНГЕНС

Нажмите кнопки “tan” и “show inverse”.

При перемещении движков “domain start”, “domain end” рисуются графики тригонометрических функций тангенс и Арктангенс.

Основные свойства тригонометрической функции арктангенс:

Область определения - $(-\infty, +\infty)$;

Множество значений - $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

Нечётная;

Возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$;

3.2.13. Обратная тригонометрическая функция арккотангенс.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обратная функции ctg, называется *Арккотангенсом* и обозначается Arcctg. Так как тригонометрическая функция котангенс периодическая, то её обратная функция является многозначной функцией. Однозначная ветвь (главная ветвь) функции Arcctg обозначается arcctg и определяется как та ветвь функции Arcctg, для которой $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$. Обратные тригонометрические функции Arcctg и arcctg связаны соотношением:

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Основные свойства тригонометрической функции арккотангенс:
Область определения - $(-\infty, +\infty)$;
Множество значений - $(0, \pi)$;
Убывает при $x \in (-\infty, +\infty)$;

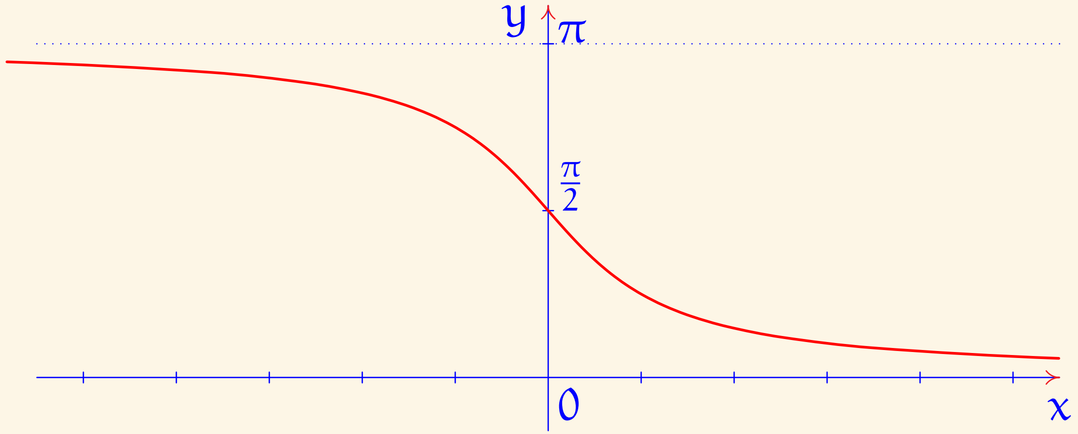


Рис. 3.23 График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

3.3. Стриптиз.

Функция $f(x) = \sin^3(2 \cdot x)$ есть композиция фундаментальных функций, т.е. $f(x) = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)$.

Выделите цепочку фундаментальных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Решение. Функцию f_1, будем называть внешней функцией цепочки. Представим функцию f в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{(2 \cdot x)}}^3$$

Функцией f_1 является степенная функция: $f_1(z) = z^3$, где $z = f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)$ (при вычислении значения функции в какой-либо точке последним нашим действием является возведение в третью степень).

Потом, аналогично, находим функцию f_2 и т.д.

Найдите остальные функции и только потом перейдите на следующую страницу.

$\left(\sin(2\cdot x)\right)^3$ — степенная функция

$\sin(2\cdot x)$ — аргумент степенной функции

функция sin

$(2\cdot x)$ — аргумент функции sin

$2\cdot x$ — линейная функция

$2\cdot x$

Малевич. Чёрный квадрат (копия)

Решение этой задачи можно сравнить с процессом обозначенном в заголовке этого раздела.

3.4. Пять элементарных операций математического анализа.

В школьном курсе математики определяются пять элементарных операций математического анализа:

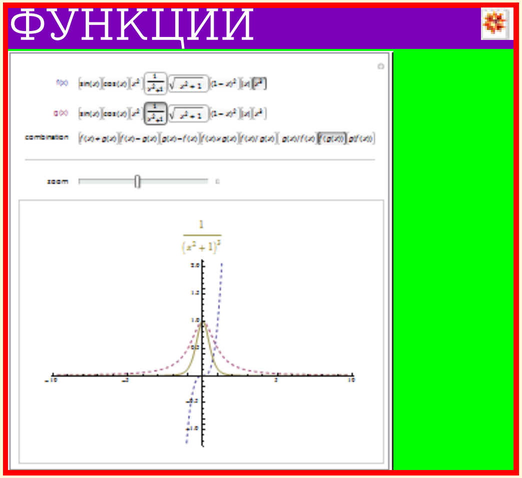
сложение функций;

вычитание функций;

умножение функций;

деление функций;

композиция функций.



3.5. Элементарные функции одной переменной.

Функции, которые получаются применением конечного числа раз пяти элементарных операций математического анализа к фундаментальным функциям элементарной математики, называются *элементарными функциями* (*элементарными функциями одной переменной*).

Очевидно, что в результате применения <u>конечного числа раз</u> пяти элементарных операций математического анализа к элементарным функциям получаются снова элементарные функции.

Примеры.

1) $y = x + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, (сложение фундаментальных функций);

2) $y = |x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$, (композиция степенной и квадратичной функций);

3) $y = \sin|x|, \forall x \in \mathbb{R}$, (композиция тригонометрической и элементарной функции - модуль x).

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Просматривайте графики элементарных функций парами: графики прямой и обратной функций одновременно.

4) Функция Римана, определяемая формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ если } x = \frac{p}{q} \in [0,1], \\ 0 \text{ во всех иррациональных} \\ \quad \text{точках отрезка } [0,1], \end{cases}$$

является неэлементарной функцией.

ФУНКЦИЯ РИМАНА

3.6. Элементарные функции многих переменных.

Функции, которые получаются применением конечного числа раз пяти элементарных операций математического анализа к элементарным функциям с различными аргументами, называются *элементарными функциями многих переменных*.

Примеры.
1) $z = x + \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}$, (сложение фундаментальных функций);
2) $z = x^y \overset{\text{опр.}}{=} e^{y \ln x}, \forall x \in (0, +\infty), \forall y \in \mathbb{R}$, (композиция показательной и произведения фундаментальных функций);

3.7. Соглашение об области определения элементарных функций.

При задании функции нужно обязательно указать её области определения. Но на практике часто нахождение области определения функции является одной из задач математического анализа. Для элементарных функций принято следующее соглашение:

Если элементарная функция f задана формулой и не указана её область определения, то условились считать в качестве области определения такой функции множество значений аргумента для которых, пользуясь формулой задающей функцию f, можно вычислить значение функции. Так определённая область определения элементарной функции f называется *естественной областью определения функции* f и обозначается $\mathrm{dom} f$.

3.8. Найти естественную область определения элементарной функции.

Пример 36. Задана функция

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

Найти естественную область определения функции f.

Решение. Естественной областью определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ является множество значений аргумента для которых

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0.$$

Корнями квадратного уравнения $x^2-2x-3 = 0$ являются числа (-1) и 3 (см. раздел 3.2.2) и неравенство $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ выполняется на множестве $(-\infty, -1] \bigcup [3, +\infty)$.
Ответ: $\mathrm{dom} f = (-\infty, -1] \bigcup [3, +\infty)$.

Пример 37. Задана функция

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Найти естественную область определения функции f.

Решение. Естественной областью определения функции $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}$ является множество значений аргумента для которых

$$-\sin^2 \frac{\pi}{x} \geq 0.$$

Итак

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin^2 \frac{\pi}{x} = 0\} =$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{x} = n\pi, n \in \mathbb{Z}\} = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Следовательно, $\operatorname{dom} f$ – множество изолированных точек.
Ответ: $\operatorname{dom} f = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 38. Задана функция

$$f(x, y) = \ln\left(9 - x^2 - y^2\right).$$

Найти естественную область определения функции f.

Решение. Естественной областью определения функции $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$ является множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ для которых $9 - x^2 - y^2 > 0$ (см. раздел 3.2.5).
Ответ: $\mathrm{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < (3)^2\}$ – круг радиуса 3 с центром в начале координат.

3.9. Кусочно - элементарные функции одной переменной.

Функция f называется *кусочно - элементарной*, если её область определения можно представить в виде объединения интервалов (сегментов, полусегментов) не нулевой длины, на каждом из которых функция f уже элементарная.
Кусочно - элементарные функции часто задаются с помощью операции $\{$.

Примеры.

1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$

Область определения функции f можно представить как объединение двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, на каждом из которых соответствующие функции $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ элементарные.

2) Функция $y = [x]$ - целая часть x, равная наибольшему целому числу, не превышающему x, является кусочно - элементарной.

3) Функция Хевисайда, заданная формулой

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

является кусочно-элементарной.

4) Функция Дирихле, заданная формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально }, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально }, \end{cases}$$

не является кусочно - элементарной. Это пример *неэлементарной функции*.

КУСОЧНО-ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Кусочно-элементарные функции конструируются из элементарных функций с помощью кнопок и движков.

Движками “first rule change” и “second rule change” делим ось абсцисс на три подобласти.

Кнопками “function in region 1”, “function in region 2” и “function in region 3” выбираем формулы, по которым вычисляются значения функций в каждой подобласти.

Приведены графики сконструированных кусочно-элементарных функций.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Функциональная символика, область определения функций.

3.10. Предел отображения по Коши.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ и A' - множество всех предельных точек множества A.

Определение 50. *Точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *называется пределом отображения* $f : A \to B$ *при* $x \to x_0 \in A'$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ имеем: $d(x_0; x) < \delta \Longrightarrow d(a; f(x)) < \varepsilon$.

Предел функции по Коши обозначим через $(C) \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

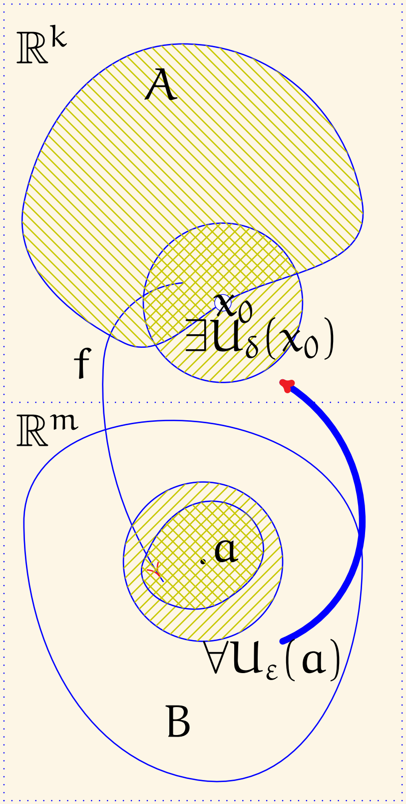
Определение 51. Множество

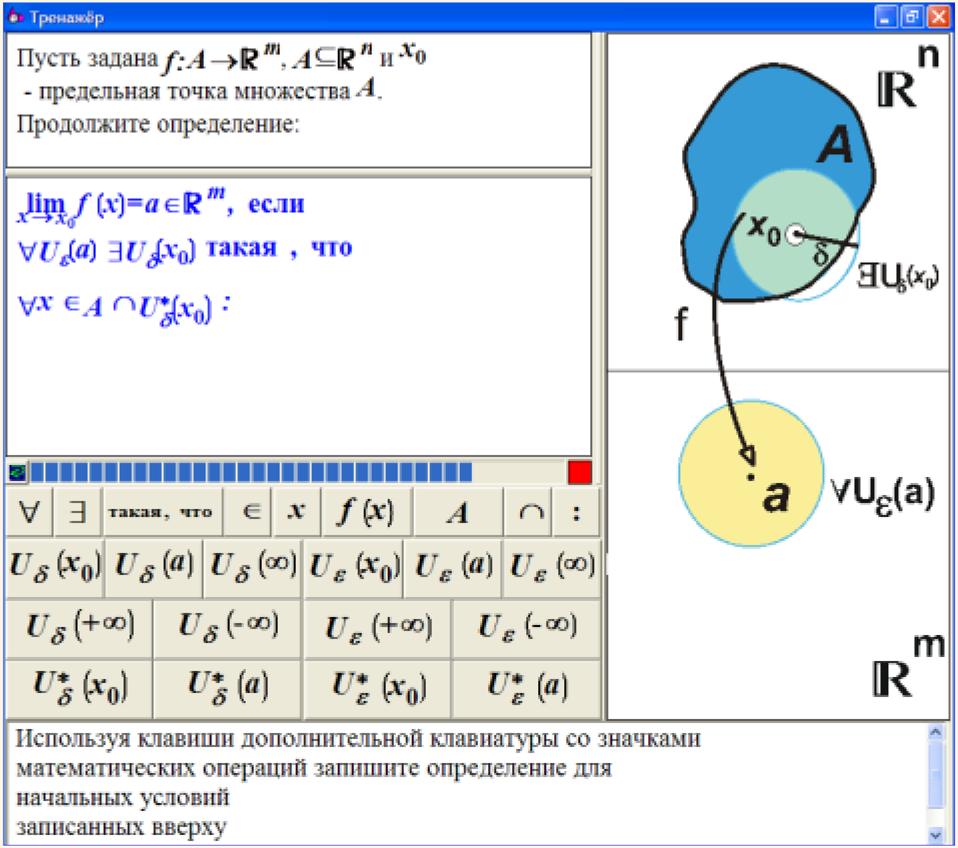
$$U_\varepsilon^*(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

называется *проколотой $\varepsilon-$ окрестностью точки x_0.*

Определение 52. *Точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *называется пределом отображения* $f : A \to B$ *при* $x \to x_0 \in A'$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A \cap U^*_\delta(x_0) \; : \; f(x) \in U_\varepsilon(a)$.

Определение 53. *Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется пределом отображения $f : A \to B$ при $x \to x_0 \in A'$*, если $\forall U_\varepsilon(a)\ \exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(a)$. $\boxed{S}$




Тренажёр
Пусть задана $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и x_0
- предельная точка множества A.
Продолжите определение:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$, если
$\forall U_\varepsilon(a)\ \exists U_\delta(x_0)$ такая , что
$\forall x \in A \cap U^*_\delta(x_0)$:
$\forall$ $\exists$ такая, что $\in$ x $f(x)$ A $\cap$:
$U_\delta(x_0)$ $U_\delta(a)$ $U_\delta(\infty)$ $U_\varepsilon(x_0)$ $U_\varepsilon(a)$ $U_\varepsilon(\infty)$
$U_\delta(+\infty)$ $U_\delta(-\infty)$ $U_\varepsilon(+\infty)$ $U_\varepsilon(-\infty)$
$U^*_\delta(x_0)$ $U^*_\delta(a)$ $U^*_\varepsilon(x_0)$ $U^*_\varepsilon(a)$
$\mathbb{R}^n$
A
x_0
δ
$\exists U_\delta(x_0)$
f
a
$\forall U_\varepsilon(a)$
$\mathbb{R}^m$
Используя клавиши дополнительной клавиатуры со значками
математических операций запишите определение для
начальных условий
записанных вверху

В дальнейшем тренажёры такого вида будем запускать на выполнение с помощью кнопок:

ТРЕНАЖЁР
$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n,$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$

ТРЕНАЖЁР
$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

ТРЕНАЖЁР
$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$

ТРЕНАЖЁР
$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ

Иллюстрация того, что, по определению, $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+3\right)=5$.
Движком "ε" фиксируйте произвольное $\varepsilon>0$.
Перемещая движок "δ", выберите δ так, чтобы для все x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-4|<\delta$, выполнялось неравенство $|f(x)-5|<\varepsilon$.
Обратите внимание, что, если Вы нашли одно δ, то меньшее δ тоже является решением задачи. Итак, для каждого $\varepsilon>0$ нужно найти $\delta>0$ (не обязательно самое большое) такое, что ....

Пример 39. Показать, что

$$(C)\ \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Решение.

$$\left((C)\lim_{x\to 0}\sin x = 0\right) \overset{50}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ такое,}$$

$$\text{что} \forall x\,((0 < |x| < \delta) \Longrightarrow (|\sin x| < \varepsilon)))\,.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Цель наших дальнейших рассуждений состоит в выделении $U_\delta(0)$, в которой выполняется неравенство

$$|\sin x| < \varepsilon.$$

Первый способ выделения $U_\delta(0)$.

а) Если $\varepsilon > 1$, то неравенство $|\sin x| \leq 1 < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$ и можно положить $\delta = 1$.

b) Пусть $\varepsilon \le 1$. Произведем сначала ряд тождественных преобразований.

$$(|\sin x| < \varepsilon) \overset{10.16}{\Longleftrightarrow} (-\varepsilon < \sin x < \varepsilon) \overset{\arcsin}{\Longleftrightarrow}$$
$$(\arcsin(-\varepsilon) < x < \arcsin\varepsilon) \Longleftrightarrow$$
$$(-\arcsin\varepsilon < x < \arcsin\varepsilon) \overset{10.16}{\Longleftrightarrow} (|x| < \arcsin\varepsilon) \tag{3.1}$$

Выберем $\delta = \arcsin(\varepsilon)$.

Тогда, в силу (3.1), имеем, что

$$\forall x\,((0 < |x| < \delta = \arcsin\varepsilon) \Longrightarrow (|\sin x| < \varepsilon)).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 50, что (C) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Второй способ выделения $U_\delta(0)$.

Предварительно докажем, что для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеют место неравенства

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{3.2}$$

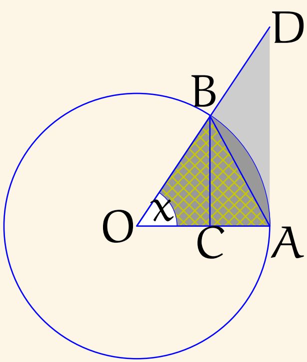


Рис. 3.24 Неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Сравнивая площади фигур, имеем

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Разделим эти неравенства на $\frac{\sin x}{2}$ $(\sin x > 0)$. Тогда $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ и, следовательно,

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \; : \; \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{3.3}$$

В силу чётности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$, неравенства (3.3) имеют место и для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Покажем, далее, что для всех $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ имеет место неравенство $|\sin x| < |x|$. Действительно, если $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, то доказываемое неравенство следует из (3.2). Если же $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1$, то, учитывая, что $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ |\sin x| \leq 1$, неравенство $|\sin x| < |x|$ также имеет место. Итак, мы доказали, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ |\sin x| < |x|. \tag{3.4}$$

Так как, в силу (3.4), $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; : \; |\sin x| < |x|$, то положим $\delta = \varepsilon$. Тогда

$$\forall x \left((0 < |x| < \delta = \varepsilon) \Longrightarrow (|\sin x| < \varepsilon) \right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 50, что $(C) \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Заметим, что, если удалось найти одно δ, удовлетворяющее определению 50, то таких $\delta = \delta(\varepsilon)$ бесконечно много. При этом, для решения поставленной задачи, не обязательно выбирать максимально большую $U_\delta(0)$.

Пример 40. Показать, что

$$(C) \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Пример 41. Показать, что

$$\forall x_0 > 0 \ : \ (C) \lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

где $a > 0, a \neq 1$.

Пример 42. Показать, что

$$(C) \lim_{x\to 0} a^x = 1,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример 43. Показать, что

$$(C) \lim_{x\to 0} \arcsin x = 0.$$

Пример 44. Показать, что

$$(C) \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0.$$

3.11. Предел отображения по Гейне.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ и A' - множество всех предельных точек множества A.

Определение 54. (Гейне) *Точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *называется пределом отображения* $f : A \to B$ *при* $x \to x_0 \in A'$, если

$\forall (x_n),\ x_n \in A \setminus \{x_0\}$ и $x_n \to x_0\ :\ f(x_n) \to a$.

Это определение *предела отображения по Гейне.* Предел отображения по Гейне обозначим через $(H) \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Теорема 26. *Пусть* $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ *и* x_0 *есть предельная точка множества* A.
Тогда, если существует один из двух пределов:

$$(C) \lim_{x \to x_0} f(x), \quad (H) \lim_{x \to x_0} f(x),$$

- то существует и второй, и эти пределы равны.

Доказательство. 1. Покажем, что

$$\left((C)\lim_{x\to x_0} f(x)=a\right) \stackrel{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left((H)\lim_{x\to x_0} f(x)=a\right) \Longrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n \in A\setminus\{x_0\}, \text{ и } x_n \to x_0 \ :\ f(x_n)\to a).$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A\setminus\{x_0\}$, и $x_n \to x_0$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$.

$$\left.\begin{array}{l}
\left((C)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\right) \Longrightarrow \\
\left(\exists\delta_0>0 \text{ т.ч. } \forall x\in A\cap U^*_{\delta_0}(x_0)\ :\ f(x)\in U_{\varepsilon_0}(a)\right) \\
(x_n\to x_0) \overset{19}{\Longrightarrow} \\
\left(\exists N_0\in\mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n>N_0\ :\ x_n\in A\cap U^*_{\delta_0}(x_0)\right)
\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left(\forall n>N_0\ :\ f(x_n)\in U_{\varepsilon_0}(a)\right)$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 19, что $f(x_n)\to a$. Тогда, из выделенного красным цветом следует, по определению 54, что $(H)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

2. Пусть $(H)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$. Покажем, что тогда существует и предел $(C)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, равный a. Далее будем доказывать методом от противного. Предположим, что a не является пределом отображения f по Коши. Это значит, что найдётся $U_{\varepsilon_0}(a)$ такая, что в любой $U^*_\delta(x_0)$ существует точка, образ которой не принадлежит $U_{\varepsilon_0}(a)$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = 1/n$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся точка $x_n \in A \cap U^*_{\delta_n}(x_0)$ такая, что $f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(a)$. Заметим, что, в силу выбора последовательности $\delta_n = 1/n$, последовательность (x_n) сходится к точке x_0, но соответствующая последовательность $(f(x_n))$ не сходится к точке a (вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ находится бесконечно много членов $(f(x_n))$, см. определение 20). Получили противоречие с тем, что (H) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. $\square$

Итак, нет необходимости каждый раз указывать, какой предел функции имеется в виду - предел по Гейне, или предел по Коши.
Мы будем писать просто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Различные определения предела функции доставляют различные способы вычисления предела.
Иногда предпочтительнее пользоваться определением предела функции по Гейне, иногда - по Коши.

Определение Гейне часто используют для того, чтобы доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует. Для этого достаточно:

построить последовательность $(x_n), x_n \to x_0$ такую, что соответствующая последовательность $(f(x_n))$ не имеет предела;

или

построить две различные последовательности, сходящиеся к x_0, для которых соответствующие последовательности значений функции имеют различные пределы.

Пример 45. Показать, что функция

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Возьмём две последовательности

$$\left(x_n' = \frac{1}{n\pi}\right), \left(x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}\right).$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}(x_n' \to 0) \Longrightarrow (f(x_n') = \sin n\pi = 0 \to 0) \\ (x_n'' \to 0) \Longrightarrow (f(x_n'') = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1)\end{array}\right\}$$

$$\overset{54}{\Longrightarrow} (\text{предела не имеет.})$$

Итак, функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$, так как для двух различных последовательностей значений аргумента, сходящихся к 0, получили различные пределы соответствующих последовательностей значений функции.

3.12. Предел композиции отображений.

Теорема 27. *Пусть* $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^m$, *и* $\varphi : B \to C$, $C \subset \mathbb{R}^p$. *Пусть, далее,* x_0 *есть предельная точка множества* A, y_0 *есть предельная точка множества* B. *Если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,\ f(x) \neq y_0 \ \text{при}\ x \neq x_0,$$

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = z_0.$$

Доказательство.

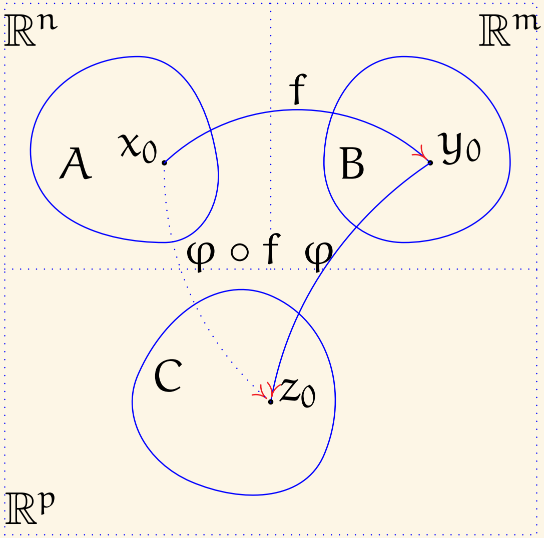


Рис. 3.25 Предел композиции отображений

Покажем, по определению Коши , что

$$\lim_{x\to x_0} \varphi \circ f(x) = z_0.$$

Фиксируем произвольную $U_\varepsilon(z_0) \in \mathbb{R}^p$. S

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y) = z_0\right) \qquad\qquad \stackrel{50}{\Longrightarrow} \\ \left(\exists\mu = \mu(\varepsilon) > 0 \text{ т.ч. } \forall y \in B\cap U^*_\mu(y_0) \;:\; \varphi(y) \in U_\varepsilon(z_0)\right) \\ \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0,\ f(x) \neq y_0\right) \;\stackrel{50}{\Longrightarrow} \\ \left(\exists\delta = \delta\left(\mu(\varepsilon)\right) > 0 \text{ т.ч. } \forall x \in A\cap U^*_\delta(x_0) \;:\; y = f(x) \in B\cap U^*_\mu(y_0)\right)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(\forall x \in A\cap U^*_\delta(x_0) \;:\; \varphi\circ f(x) \in U_\varepsilon(z_0)\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Коши, что

$$\lim_{x\to x_0}\varphi\circ f(x) = z_0.$$

$\square$

Эта теорема позволяет производить замену переменной при вычислении пределов.

Пример 46. Вычислить:

$$\lim_{t \to 1} \sin\left(1 - t^2\right).$$

Решение. Делаем замену переменной:
$x = 1 - t^2$.
При $t \to 1$ имеем: $x \to 0$; $x \neq 0$, если $t \neq 1$.
По теореме 27 о пределе композиции:

$$\lim_{t \to 1} \sin\left(1 - t^2\right) \overset{27}{=} \lim_{x \to 0} \sin x \overset{39}{=} 0.$$

3.13. Предел отображения при стремлении аргумента к бесконечности.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$, A' - множество всех предельных точек множества A и $\infty \in A'$.

Определение 55. (Коши) *Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется пределом отображения $f : A \to B$ при $x \to \infty \in A'$,* если $\forall U_\varepsilon(a)\ \exists U_\delta(\infty)$ такая, что $\forall x \in A \cap U_\delta(\infty)\ :\ f(x) \in U_\varepsilon(a)$.

Определение 56. (Гейне) *Точка* $a \in \mathbb{R}^m$ *называется пределом отображения* $f : A \to B$ *при* $x \to \infty \in A'$, если
$\forall (x_n)$, $x_n \in A$ и $x_n \to \infty$: $f(x_n) \to a$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n,$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, A' - множество всех предельных точек множества A и $\infty \in A'$.

Определение 57. (Коши) *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f : A \to B$ при $x \to \infty \in A'$,* если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$ и $|x| > \delta$: $|f(x) - a| < \varepsilon$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$

ИЛЛЮСТРАЦИЯ

$$\lim_{x \to \infty} \left(4e^{-\frac{x}{5}} \sin 5x + 3\right) = 3.$$

Определение 58. (Гейне) *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом функции* $f : A \to B$ *при* $x \to \infty \in A'$, если
$\forall (x_n),\ x_n \in A$ и $x_n \to \infty\ :\ f(x_n) \to a$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, A' - множество всех предельных точек множества A и $-\infty \in A'$.

Определение 59. (Коши) *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f : A \to B$ при $x \to -\infty \in A'$,* если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$ и $x < -\delta\ :\ |f(x) - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$

Определение 60. (Гейне) *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом функции* $f : A \to B$ *при* $x \to -\infty \in A'$, если

$\forall (x_n),\ x_n \in A$ и $x_n \to -\infty\ :\ f(x_n) \to a$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, A' - множество всех предельных точек множества A и $+\infty \in A'$.

Определение 61. (Коши) *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f : A \to B$ при $x \to +\infty \in A'$*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$ и $x > \delta\ :\ |f(x) - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

Определение 62. (Гейне) *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом функции* $f : A \to B$ *при* $x \to +\infty \in A'$, если

$\forall (x_n),\ x_n \in A$ и $x_n \to +\infty\ :\ f(x_n) \to a$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$

Пример 47. Показать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Решение.

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right)\overset{61}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Bigg(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ такое, что}$$

$$\forall x\left((x>\delta)\Longrightarrow\left(\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-e\right|<\varepsilon\right)\right)\Bigg).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

В силу свойства монотонности показательной функции справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}, \tag{3.5}$$

где $[x]$ — целая часть x, т.е. наибольшее целое число не превосходящее x.

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e\right)\overset{24}{\Longrightarrow}\\ \left(\exists N_1=N_1(\varepsilon)\text{ такое, что }\forall n>N_1\ :\ \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-e\right|<\varepsilon\right)\\ \left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\right)\overset{24}{\Longrightarrow}\\ \left(\exists N_2=N_2(\varepsilon)\text{ такое, что }\forall n>N_2\ :\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right|<\varepsilon\right)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left(\forall n\,(n>N=\max\{N_1,N_2\})\Longrightarrow\left(\begin{array}{rcl} & \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n & <e+\varepsilon\\ e-\varepsilon< & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} & \end{array}\right)\right) \tag{3.6}$$

Если $x>1+N$, то $[x]>N$. Положим $\delta=N=\max\{N_1,N_2\}$. Тогда, учитывая (3.5) и (3.6), получаем, что

$$\forall x\left((x>\delta)\Longrightarrow\left(\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon\right)\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 61, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Пример 48. Показать, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Решение.

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right) \overset{60}{\Longleftrightarrow} \left(\forall\,(x_n)\,,x_n\to-\infty\ :\ \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e\right).$$

Фиксируем произвольную последовательность $(x_n)\,, x_n \to -\infty$.
Обозначим $y_n = -x_n, z_n = y_n - 1$.
Очевидно, что $y_n \to +\infty, z_n \to +\infty$.
Проведём эквивалентные преобразования

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right) = \left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}\cdot\left(1+\frac{1}{z_n}\right). \tag{3.7}$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\left(\begin{array}{c}\text{Пример } 47\\ \lim\limits_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e\end{array}\right)\overset{62}{\Longrightarrow}\left(\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}\to e\right)\\ \left(\left(1+\frac{1}{z_n}\right)\to 1\right)\end{array}\right\}\overset{13}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}\cdot\left(1+\frac{1}{z_n}\right)\to e\right)$$

Отсюда, учитывая (3.7), получим

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e.$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 60, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Пример 49. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Решение.

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right) \overset{57}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ такое, что } \forall x \left((|x| > \delta) \Longrightarrow \left(\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon\right)\right)\right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{c}\text{Пример 47}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\end{array}\right) \overset{61}{\Longrightarrow} \\
\left(\exists\delta_1 > 0 \text{ такое, что } \forall x \left((x > \delta_1) \Longrightarrow \left(\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon\right)\right)\right) \\
\left(\begin{array}{c}\text{Пример 48}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\end{array}\right) \overset{59}{\Longrightarrow} \\
\left(\exists\delta_2 > 0 \text{ такое, что } \forall x \left((x < -\delta_2) \Longrightarrow \left(\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon\right)\right)\right)
\end{array}\right\}$$

$$\overset{\delta=\max\{\delta_1,\delta_2\}}{\Longrightarrow} \left(\forall x \left((|x| > \delta) \Longrightarrow \left(\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.\right)\right)\right)$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 57, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3.14. Бесконечно малые функции.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и x_0 есть предельная точка множества A. Если множество A неограничено, то бесконечно удалённая точка в пространстве $\mathbb{R}^k$ является предельной точкой множества A.
Пусть ω - предельная точка x_0 множества A или бесконечно удалённая точка в пространстве $\mathbb{R}^k$.
В дальнейшем запись $\lim\limits_{x \to \omega} f(x)$ означает $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Определение 63. Функция $f : A \to B$ называется *бесконечно малой* при $x \to \omega$, если $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции при $x \to \omega$ будем обозначать буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Теорема 28. *Пусть* $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ *и* ω *есть предельная точка множества* A. *Для того, чтобы*

$$\lim_{x \to \omega} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$f(x) = a + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ *есть бесконечно малая при* $x \to \omega$.

Доказательство. Необходимость.
Обозначим через $\alpha(x) = f(x) - a$.
Покажем, по определению Гейне, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to \omega$. Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\begin{pmatrix} f(x) = a + \alpha(x) \\ \lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f(x_n) = a + \alpha(x_n) \\ f(x_n) \to a \end{pmatrix} \stackrel{7}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} f(x_n) = a + \alpha(x_n) \\ \alpha(x_n) \to 0 \end{pmatrix}.$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega} \alpha(x) = 0$.

Достаточность. Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left(\begin{array}{c} f(x) = a + \alpha(x) \\ \lim\limits_{x\to\omega} \alpha(x) = 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{c} f(x_n) = a + \alpha(x_n) \\ \alpha(x_n) \to 0 \end{array} \right) \overset{7}{\Longrightarrow}$$

$$(f(x_n) \to a).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a$. $\square$

Пример 50. Показать, что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \ (0 < a < 1).$$

Решение. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.
1. Если $\varepsilon \geq 1$, то, полагая $\delta = 1$, получим, что $\forall x > \delta = 1 \ : \ a^x < 1 \leq \varepsilon$ (см. рис. 3.10, случай $0 < a < 1$).
2. Если же $0 < \varepsilon < 1$, то, учитывая, что

$$(a^x < \varepsilon) \overset{3.2.5}{\Longleftrightarrow} (x > \log_a \varepsilon),$$

положим $\delta = \log_a \varepsilon$.
Тогда $\forall x > \delta \ : \ a^x < \varepsilon$.
Из выделенного синим цветом следует, по определению 61, что $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

3.15. Бесконечно большие отображения и функции.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^m$ и ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 64. *Предел отображения* $f : A \to B$ *при* $x \to \omega$ *равен бесконечности*, если $\forall U_\varepsilon(\infty)$ $\exists U_\delta(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\delta(\omega) : f(x) \in U_\varepsilon(\infty)$.

Тот факт, что предел отображения f при $x \to \omega$ равен бесконечности, записывают так: $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to \omega$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n,$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n,$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 65. *Предел функции* $f : A \to B$ *при* $x \to \omega$ *равен бесконечности*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\delta(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\delta(\omega)$: $|f(x)| > \varepsilon$.

Тот факт, что предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен бесконечности, записывают так: $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to \omega$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 66. *Предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен плюс бесконечности*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\delta(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\delta(\omega)$: $f(x) > \varepsilon$.

Тот факт, что предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен плюс бесконечности, записывают так:

$\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty$ или $f(x) \to +\infty$ при $x \to \omega$.

ТРЕНАЖЁР

$$f: A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$$f: A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$$f: A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$$f: A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Определение 67. *Предел функции* $f : A \to B$ *при* $x \to \omega$ *равен минус бесконечности*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\delta(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\delta(\omega)\ :\ f(x) < -\varepsilon$.

Тот факт, что предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен минус бесконечности, записывают так:
$\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = -\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при $x \to \omega$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n,$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Определение 68. Функция $f : A \to B$ называется *бесконечно большой* при $x \to \omega$, если $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \pm\infty$.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ

Иллюстрация

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty.$$

Движком "M" фиксируем $\varepsilon = M > 0$.
$\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ – задают максимальный интервал, удовлетворяющий условию: $\forall x \in (3-\delta_1, 3+\delta_2)$ выполняется неравенство $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} > M$.
Значения $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ можно найти автоматически или перемещая вертикальные оранжевые линии мышкой с нажатой левой кнопкой.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ

Иллюстрация

$$\lim_{x\to \infty} (x-3)^3 + 10 = \infty.$$

Движком "M" фиксируем $\varepsilon = M > 0$.
Значение $\delta = N > 0$ – задаёт максимальный интервал, удовлетворяющий условию: $\forall x \in (\delta, \infty)$ выполняется неравенство $f(x) = (x-3)^3 + 10 > M$.
Значение $\delta = N > 0$ можно найти автоматически или перемещая вертикальную оранжевую линию мышкой с нажатой левой кнопкой.

Определения бесконечных пределов функции $f : A \to B$ на языке последовательностей:

Определение 69. *Предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен бесконечности*, если
$\forall (x_n),\ x_n \in A \setminus \{\omega\}$ и $x_n \to \omega\ :\ f(x_n) \to \infty$.

Определение 70. *Предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен плюс бесконечности*, если
$\forall (x_n),\ x_n \in A \setminus \{\omega\}$ и $x_n \to \omega\ :\ f(x_n) \to +\infty$.

Определение 71. *Предел функции $f : A \to B$ при $x \to \omega$ равен минус бесконечности*, если
$\forall (x_n),\ x_n \in A \setminus \{\omega\}$ и $x_n \to \omega\ :\ f(x_n) \to -\infty$.

Определения 65, 66, 67 называют *"определениями Коши"*, а определения 69, 70, 71 *"определениями Гейне"*. Можно показать эквивалентность соответствующих определений по Коши и Гейне (см. формулировку и доказательство теоремы 26).

Пример 51. Показать, что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \ (a > 1).$$

Решение. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.
1. Если $0 < \varepsilon \leq 1$, то, полагая $\delta = 1$, получим, что $\forall x > \delta = 1 \ : \ a^x > a > 1 \geq \varepsilon$ (см. рис. 3.10, случай $a > 1$).
2. Если же $\varepsilon > 1$, то, учитывая, что

$$(a^x > \varepsilon) \overset{3.2.5}{\Longleftrightarrow} (x > \log_a \varepsilon),$$

положим $\delta = \log_a \varepsilon$.
Тогда $\forall x > \delta \ : \ a^x > \varepsilon$.
Из выделенного синим цветом следует, по определению 66, что $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Пример 52. Показать, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty.$$

Решение.

$$\left(\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\right) \overset{66}{\Longleftrightarrow} \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ такое, что } \forall x\left((x > \delta) \Longrightarrow (x^n > \varepsilon)\right)\right).$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Учитывая, что

$$(x^n > \varepsilon) \overset{3.2.3}{\Longleftrightarrow} \left(x > \sqrt[n]{\varepsilon}\right),$$

положим $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$. Тогда $\forall x > \delta : x^n > \varepsilon$. Из выделенного синим цветом следует, по определению 66, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

3.16. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 72. Говорят, что $f \neq 0$ *вблизи* ω, если $\exists U_\mu(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) :$ $f(x) \neq 0$.

Теорема 29. *Если функция* $\alpha : A \to B$ *бесконечно малая при* $x \to \omega$ *и* $\alpha \neq 0$ *вблизи* ω, *то функция* $f = \dfrac{1}{\alpha}$ - *бесконечно большая при* $x \to \omega$. *Обратно, если функция* $f : A \to B$ *бесконечно большая при* $x \to \omega$ *и* $f \neq 0$ *вблизи* ω, *то функция* $\alpha = \dfrac{1}{f}$ - *бесконечно малая при* $x \to \omega$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha : A \to B \text{ бесконечно малая при } x \to \omega) \\ (\alpha \neq 0 \text{ вблизи } \omega)\end{array}\right\} \stackrel{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(f = \frac{1}{\alpha} \text{ - бесконечно большая при } x \to \omega\right) \stackrel{68}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x \to \omega} f(x) = \infty\right) \Longleftrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}, \text{ и } x_n \to \omega \ : \ f(x_n) \to \infty).$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l}
(\alpha : A \to B \text{ бесконечно малая при } x \to \omega) \quad \Longrightarrow \quad (\alpha(x_n) \to 0) \\
(\alpha \neq 0 \text{ вблизи } \omega) \qquad \overset{72}{\Longrightarrow} \\
\qquad (\exists U_\mu(\omega) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ \alpha(x) \neq 0) \\
(x_n \to \omega) \qquad \overset{\text{опр.}19}{\Longrightarrow} \\
\qquad (\exists N = N(\mu) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N \ : \ x_n \in U_\mu(\omega))
\end{array}\right\} \overset{8}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall n > N \ : \ f(x_n) = \frac{1}{\alpha(x_n)} \text{ и } f(x_n) \to \infty\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \infty$.

Обратно.

$$\left.\begin{array}{l}(f : A \to B \text{ бесконечно большая при } x \to \omega) \\ (f \neq 0 \text{ вблизи } \omega)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{f} \text{ - бесконечно малая при } x \to \omega\right) \overset{63}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} \alpha(x) = 0\right) \Longleftrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}, \text{ и } x_n \to \omega \ : \ \alpha(x_n) \to 0).$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l}
(f : A \to B \text{ бесконечно большая при } x \to \omega) \implies (f(x_n) \to \infty) \\
(f \neq 0 \text{ вблизи } \omega) \overset{72}{\implies} \\
\qquad \left(\exists U_\mu(\omega) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)\ :\ f(x) \neq 0\right) \\
(x_n \to \omega) \overset{25}{\implies} \\
\qquad (\exists N = N(\mu) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N\ :\ x_n \in U_\mu(\omega))
\end{array}\right\}$$

$$\overset{8}{\implies} \left(\forall n > N\ :\ \alpha(x_n) = \frac{1}{f(x_n)} \text{ и } \alpha(x_n) \to 0\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x \to \omega} \alpha(x) = 0$. $\square$

Пример 53. Показать, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Решение.

В примере 51 мы показали, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty,$$

т.е. функция $f(x) := x^n$ бесконечно большая при $x \to +\infty$. Следовательно, в силу теоремы 29, функция $\alpha(x) := \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^n}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$.

Пример 54. Показать, что

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \ (0 < a < 1).$$

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{pmatrix}\text{Замена}\\ t=-x\end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} a^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} \overset{29}{=} +\infty.$$

Замечание. Функция $\alpha(t) := a^t$, $0 < a < 1$, бесконечно малая при $t \to +\infty$ (см. пример 50). Следовательно, в силу теоремы 29, функция $f(t) := \frac{1}{\alpha(t)} = \frac{1}{a^t}$, $0 < a < 1$, является бесконечно большой при $t \to +\infty$.

Пример 55. Показать, что

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \ (a > 1).$$

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{pmatrix}\text{Замена}\\ t=-x\end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} a^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} \overset{29}{=} 0.$$

Замечание. Функция $f(t) := a^t,\ a > 1$, бесконечно большая при $t \to +\infty$ (см. пример 51). Следовательно, в силу теоремы 29, функция $\alpha(t) := \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{a^t},\ a > 1$, является бесконечно малой при $t \to +\infty$.

3.17. Теоремы о пределе функций.

Пусть $\varphi, f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Теорема 30. *Пусть*

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = a, \lim_{x\to\omega} \varphi(x) = b.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\omega} (f(x) + \varphi(x)) = a + b.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a\right)\\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = b\right)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega}(f(x)+\varphi(x)) = a+b\right) \Longleftrightarrow$$

$$(\forall(x_n), x_n \in A\setminus\{\omega\}, \text{ и } x_n \to \omega\ :$$

$$f(x_n)+\varphi(x_n) \to a+b)\,.$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a\right) \implies (f(x_n) \to a) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = b\right) \implies (\varphi(x_n) \to b) \end{array}\right\} \overset{12}{\implies}$$

$$(f(x_n) + \varphi(x_n) \to a + b).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x) + \varphi(x)) = a + b$. $\square$

Теорема 31. *Пусть*

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = a, \lim_{x\to\omega} \varphi(x) = b.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\omega} f(x)\varphi(x) = ab.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a\right)\\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = b\right)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} f(x)\varphi(x) = ab\right) \Longleftrightarrow$$

$(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$:

$$f(x_n)\cdot\varphi(x_n) \to a\cdot b)\,.$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a\right) \implies (f(x_n) \to a) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = b\right) \implies (\varphi(x_n) \to b)\end{array}\right\} \stackrel{13}{\implies}$$

$$(f(x_n) \cdot \varphi(x_n) \to a \cdot b).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x)\varphi(x)) = ab$. $\square$

Теорема 32. *Пусть*

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = a, \lim_{x\to\omega} \varphi(x) = b,$$

причём $b \neq 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a\right)\\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = b\right)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \left(\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}, \text{ и } x_n \to \omega \;:\; \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} \to \frac{a}{b}\right).$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a\right) \implies (f(x_n) \to a) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = b\right) \implies (\varphi(x_n) \to b) \end{array}\right\} \overset{14}{\implies}$$

$$\left(\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} \to \frac{a}{b}\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{a}{b}$. $\square$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИЙ

Вы видите десять формул, задающих функции f и g, при этом $\lim_{x\to 1} 1 = 1$, $\lim_{x\to 1} \sin\frac{1}{x-1}$ не существует (см. пример 45), а остальные формулы задают бесконечно малые при $x \to 1$.

Пары функций f и g могут быть объединены шестью способами: "sum", "difference", "product", "quotient", "$k \cdot f(x)$", "$[f(x)]^k$".

Графики составляющих функций строятся в виде пунктирных кривых, а их комбинации в виде сплошной коричневой линии. Предел комбинации функций f и g при $x \to 1$ это ордината красной точки.

Обратите внимание, что встречаются комбинации, в которых не выполнены условия теорем 30 –32, но предел комбинации при $x \to 1$ существует и есть конечное число или символ ∞.

3.18. О переходе к пределу в неравенствах.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 73. Говорят, что *выполняется неравенство $f > 0$ $(f \geq 0)$ вблизи ω,*, если $\exists U_\mu(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$.

Определение 74. Говорят, что *выполняется неравенство* $f < 0$ ($f \le 0$) *вблизи* ω, если $\exists U_\mu(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$ ($f(x) \le 0$).

Теорема 33. *Если* $f > 0$ $(f \geq 0)$ *вблизи* ω *и* $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = a$, *то* $a \geq 0$.

Доказательство.

Фиксируем произвольную последовательность (x_n), $x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{r}
(f > 0 \text{ вблизи } \omega) \overset{73}{\Longleftrightarrow} \\
\left(\exists U_\delta(\omega) \text{ т.ч. } \forall x \in A \cap U^*_\delta(\omega) \ : \ f(x) > 0 \right) \\
(x_n \to \omega) \overset{19}{\Longrightarrow} \\
(\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \forall n > N \ : \ x_n \in U_\delta(\omega)) \\
\left(\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = a\right) \Longrightarrow (f(x_n) \to a)
\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \forall n > N \ : \ f(x_n) > 0 \\ f(x_n) \to a \end{pmatrix} \overset{20}{\Longrightarrow} (a \geq 0).$$

□

Определение 75. Говорят, что *выполняется неравенство* $|f| < M$ ($|f| \le M$) *вблизи* ω, если $\exists U_\mu(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$ ($|f(x)| \le M$).

Определение 76. Функция f называется *ограниченной вблизи ω,* если $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что выполняется неравенство $|f| \le M$ вблизи ω.

Теорема 34. *Если функция* f *при* $x \to \omega$ *имеет конечный предел, то она ограничена вблизи* ω.

Доказательство.

$$\left(\lim_{x\to\omega} f(x) = a \in \mathbb{R}\right) \overset{?}{\Longrightarrow} (f \text{ ограничена вблизи } \omega) \overset{76}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\exists M \in \mathbb{R} \text{ и } U_\mu(\omega) \text{ такие, что } \forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ |f(x)| \le M\right).$$

Положим $\varepsilon = 1$, $M = 1 + |a|$.

$$\left(\lim_{x\to\omega} f(x) = a \in \mathbb{R}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\exists U_{\mu(\varepsilon)}(\omega) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U^*_{\mu(\varepsilon)}(\omega)\ :\ |f(x) - a| < \varepsilon\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\forall x \in A \cap U^*_{\mu(1)}(\omega)\ :\ |f(x)| = \right.$$

$$\left. = |(f(x) - a) + a| \overset{10.13}{\le} |f(x) - a| + |a| < 1 + |a| = M\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 76, что функция f ограничена вблизи ω. $\square$

Определение 77. Говорят, что *выполняется неравенство* $0 < M < |f|$ *вблизи* ω, если $\exists U_\mu(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)$ выполняется неравенство $0 < M < |f(x)|$.

Определение 78. Функция f называется *отделимой от нуля вблизи ω*, если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0$, такое, что выполняется неравенство $0 < M < |f|$ вблизи ω.

Теорема 35. *Если функция* f *при* $x \to \omega$ *имеет конечный, отличный от нуля предел, то она отделима от нуля вблизи* ω.

Доказательство.
Фиксируем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$ и $M = \frac{|a|}{2}$.

$$\left(\lim_{x\to\omega} f(x) = a \neq 0\right) \Longrightarrow$$
$$\left(\exists U_\mu(\omega) \text{ т.ч. } \forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ |f(x) - a| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2}\right) \overset{(10.15)}{\Longrightarrow}$$
$$\left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ \Big||f(x)| - |a|\Big| \leq |f(x) - a| < \frac{|a|}{2}\right) \Longrightarrow$$
$$\left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ ||f(x)| - |a|| < \frac{|a|}{2}\right) \overset{(10.16)}{\Longrightarrow}$$
$$\left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ 0 < \frac{|a|}{2} < |f(x)| < \frac{3|a|}{2}\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 78, что функция f отделима от нуля вблизи ω. $\square$

Пусть $\varphi, f, \psi : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 79. Говорят, что *выполняются неравенства $\varphi < f < \psi$ вблизи ω*, если $\exists U_\mu(\omega)$ такая, что $\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)$ выполняются неравенства $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$.

Теорема 36. *Если вблизи* ω *выполняются неравенства* $\varphi < f < \psi$ *и*

$$\lim_{x\to\omega} \varphi(x) = \lim_{x\to\omega} \psi(x) = a,$$

то

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = a.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi < f < \psi \text{ вблизи } \omega) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = a\right) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \psi(x) = a\right) \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} f(x) = a\right) \Longleftrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}, \text{ и } x_n \to \omega \ : \ f(x_n) \to a) .$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left(\varphi < f < \psi \text{ вблизи } \omega\right) \overset{79}{\iff}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\exists U_\delta(\omega) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U^*_\delta(\omega)\ :\ \varphi(x) < f(x) < \psi(x)\ \right) \\ \left(x_n \to \omega\right) \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\text{опр.}19}{\iff} \\ \left(\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N\ :\ x_n \in U_\delta(\omega)\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rr} & \left(\forall n > N\ : \varphi(x_n) < f(x_n) < \psi(x_n)\ \right) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \varphi(x) = a\right) \Longrightarrow & \left(\varphi(x_n) \to a\right) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} \psi(x) = a\right) \Longrightarrow & \left(\psi(x_n) \to a\right) \end{array}\right\} \overset{22}{\Longrightarrow}$$

$$\left(f(x_n) \to a\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = a$. $\square$

3.19. О неопределённостях.

Пусть $f, g : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ и пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Теорема 37. *Если* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \pm\infty$, *то*

$$\lim_{x\to\omega} (f(x) + g(x)) = \pm\infty.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty\right)\\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \pm\infty\right)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim\limits_{x\to\omega} (f(x)+g(x)) = \pm\infty\right) \Longrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\},\ \text{и}\ x_n \to \omega\ :$$

$$f(x_n) + g(x_n) \to \pm\infty).$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty\right) \Longrightarrow \ (f(x_n) \to \pm\infty) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \pm\infty\right) \Longrightarrow \ (g(x_n) \to \pm\infty)\end{array}\right\} \stackrel{15}{\Longrightarrow}$$

$$(f(x_n) + g(x_n) \to \pm\infty).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega}(f(x) + g(x)) = \pm\infty$. $\square$

Теорема 38. *Если* $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \pm\infty$ *и функция* g *ограниченная вблизи* ω, *то*

$$\lim_{x \to \omega} (f(x) + g(x)) = \pm\infty.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty\right)\\ (g \text{ - ограниченная вблизи } \omega)\end{array}\right\} \stackrel{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim\limits_{x\to\omega} (f(x) + g(x)) = \pm\infty\right) \Longrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}, \text{ и } x_n \to \omega\ :$$

$$f(x_n) + g(x_n) \to \pm\infty) \,.$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty\right) \qquad \Longrightarrow \qquad (f(x_n) \to \pm\infty) \\
(g \text{ - ограниченная вблизи } \omega) \overset{76}{\Longrightarrow} \\
(\exists M \in \mathbb{R} \text{ и } U_\mu(\omega) \text{ такие, что } \forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \; : \; |g(x)| \le M) \\
(x_n \to \omega) \overset{\text{опр.}19}{\Longrightarrow} \\
\qquad (\exists N = N(\mu) \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N \; : \; x_n \in U_\mu(\omega))
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}
(f(x_n) \to \pm\infty) \\
((g(x_n)) \text{ - ограниченная})
\end{array}\right\} \overset{16}{\Longrightarrow} (f(x_n) + g(x_n) \to \pm\infty).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$. $\square$

Теорема 39. *Если* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = a \neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to\omega} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \infty.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x)=\infty\right)\\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} g(x)=a\neq 0\right)\end{array}\right\}\overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega}(f(x)\cdot g(x))=\infty\right)\Longrightarrow$$

$$(\forall (x_n), x_n\in A\setminus\{\omega\}, \text{ и } x_n\to\omega\ :$$

$$f(x_n)\cdot g(x_n)\to\infty).$$

Фиксируем произвольную $(x_n), x_n \in A \setminus \{\omega\}$, и $x_n \to \omega$.

$$\left.\begin{array}{lcr} \left(\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \infty\right) & \Longrightarrow & (f(x_n) \to \infty) \\ \left(\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = a \neq 0\right) & \Longrightarrow & (g(x_n) \to a \neq 0) \end{array}\right\} \overset{17}{\Longrightarrow}$$

$$(f(x_n) \cdot g(x_n) \to \infty).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to\omega} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$. $\square$

3.19.1. О сравнении бесконечно больших функций.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Пусть $f, g : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}$ бесконечно большие при $x \to \omega$, причём $g \neq 0$ вблизи ω. Из теории последовательностей мы знаем, что о пределе частного двух бесконечно больших числовых последовательностей в общем случае ничего определённого сказать нельзя. В этом случаи говорят, что имеет место неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Но последовательность это частный случай функции и, следовательно, о пределе частного двух бесконечно больших при $x \to \omega$ в общем случае ничего определённого сказать нельзя. В этом случаи также говорят, что имеет место неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. А *раскрыть неопределённость вида* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ означает: в каждом конкретном случае, в зависимости от заданных бесконечно больших при $x \to \omega$ функций f и g, решить вопрос о пределе частного $\left(\frac{f}{g}\right)$ при $x \to \omega$.

Определение 80. Говорят, что *функции* f *и* g, *бесконечно большие одного порядка роста при* $x \to \omega$, если $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и $U_\mu(\omega)$ такие, что

$$\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ 0 < h_1 < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < h_2.$$

Теорема 40. *Пусть функции* f *и* g *бесконечно большие при* $x \to \omega$.

Если $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *конечен и отличен от нуля, то функции* f *и* g *бесконечно большие одного порядка роста при* $x \to \omega$.

Доказательство.

$$\left(\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=a\neq 0\right)\overset{?}{\Longrightarrow}$$

$(f$ и g бесконечно большие одного порядка роста при $x \to \omega)$

$\overset{80}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и $U_\mu(\omega)$ **такие, что**

$$\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ 0 < h_1 < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < h_2\Big).$$

Фиксируем $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0.$

$$\left(\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)} = a\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\exists U_\mu(\omega) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - a\right| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2}\right)$$

$$\overset{(10.15)}{\Longrightarrow} \left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ \left|\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - |a|\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - a\right| < \frac{|a|}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ \left|\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - |a|\right| < \frac{|a|}{2}\right) \overset{(10.16)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ 0 < \frac{|a|}{2} < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{3|a|}{2}\right).$$

$\square$

Определение 81. Пусть функции f и g бесконечно большие при $x \to \omega$, причём $g \neq 0$ вблизи ω.

Если $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$ равен нулю, то говорят, что *функция* g *бесконечно большая более высокого порядка роста, чем функция* f *при* $x \to \omega$ (или *функция* f *бесконечно большая более низкого порядка роста, чем функция* g *при* $x \to \omega$).

Тот факт, что *функция* f *бесконечно большая более низкого порядка роста, чем функция* g *при* $x \to \omega$ записывают так: $f \ll g$ при $x \to \omega$.

Определение 82. Пусть функции f и g бесконечно большие при $x \to \omega$, причём $g \neq 0$ вблизи ω.

Если $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что *функции* f *и* g *эквивалентные при* $x \to \omega$ и пишут $f \sim g$ при $x \to \omega$.

Пусть $a \in \mathbb{R}, a > 1$ произвольное.

Определение 83. Функции вида:

$$y = \ln \ln x, y = \ln x, y = x, y = a^x, y = x^x$$

назовем *образующими при* $x \to +\infty$.

Можно показать, что для любых

$$k, l, m, r, s, i, j, p, q, \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

имеет место *шкала порядков роста функций*:

$$\cdots \ll (\ln\ln x)^{\frac{k}{m}} \ll \cdots \ll (\ln x)^{\frac{r}{s}} \ll \cdots \ll x^{\frac{i}{j}} \ll \cdots$$

$$\cdots \ll \left(a^x\right)^{\frac{p}{q}} \ll \cdots \ll \left(x^x\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \ll \cdots.$$

$$\text{при } x \to +\infty.$$

Замечания к шкале порядков роста функций:

1. Шкала содержит лишь малую часть бесконечно больших функций и может быть расширена.

2. Очевидно, что из двух функций, относящихся к одному узлу шкалы, большим порядком роста обладает функция с большим показателем.
Например: $x \ll x^2, (\ln x)^{\frac{1}{2}} \ll (\ln x)^{\frac{3}{4}}$ и т.д.

Определение 84. Если функцию f можно представить в виде произведения образующей функции в рациональной степени и ограниченной, отделимой от нуля вблизи $+\infty$ функции, то образующую функцию в рациональной степени назовём *доминантой функции* f (от лат. dominantis - важнейшая часть чего либо).

Замечания:

1. Если функция f имеет доминанту, то функция f бесконечно большая при $x \to +\infty$.

2. Не всякая функция имеет доминанту.

3. Зная доминанты бесконечно больших функций при $x \to +\infty$ их легко сравнивать между собой по порядку роста при $x \to +\infty$, опираясь при этом на шкалу порядков роста функций при $x \to +\infty$.

3.19.2. О разности бесконечно больших функций.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Пусть, далее, $f, g : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ бесконечно большие при $x \to \omega$, причём $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \pm\infty$. Из теории последовательностей мы знаем, что о пределе разности двух эквивалентных бесконечно больших числовых последовательностей в общем случае ничего определённого сказать нельзя. В этом случаи говорят, что имеет место неопределённость вида $(\infty - \infty)$. Но последовательность это частный случай функции и, следовательно, о пределе разности двух бесконечно больших при $x \to \omega$ в общем случае тоже ничего определённого сказать нельзя. В этом случаи также говорят, что имеет место неопределённость вида $(\infty - \infty)$. *Раскрыть неопределённость вида* $(\infty - \infty)$ означает: в каждом конкретном случае, в зависимости от заданных бесконечно больших при $x \to \omega$ функций f и g, решить вопрос о пределе разности $(f(x) - g(x))$ при $x \to \omega$.

Теорема 41. *Пусть* $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \pm\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \infty$. *Если функция* f *есть бесконечно большая более высокого порядка роста, чем функция* g *при* $x \to \omega$, *то*

$$\lim_{x\to\omega} (f(x) - g(x)) = \pm\infty.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to\omega}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to\omega}f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right).$$

Так как функция f есть бесконечно большая более высокого порядка роста, чем функция g при $x\to\omega$, то

$$\lim_{x\to\omega}\frac{g(x)}{f(x)}=0 \text{ и } \lim_{x\to\omega}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1.$$

Тогда, в силу теоремы 39, имеем

$$\lim_{x\to\omega}(f(x)-g(x))=\pm\infty.$$

$\square$

Итак, в силу теоремы 41, только тогда, когда бесконечно большие функции f и g эквивалентные при $x \to \omega$, возникают трудности с нахождением предела разности $\big(f(x) - g(x)\big)$.

Покажем, на примерах, некоторые практические приёмы раскрытия неопределённостей вида $(\infty - \infty)$.

Пример 56. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right). \qquad (3.8)$$

Решение. Функции $f(x) = \sqrt{x+a}$ и $g(x) = \sqrt{x}$ бесконечно большие одного порядка роста при $x \to +\infty$. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся приёмом, основанном на формуле:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Сомножители $(a-b)$ и $(a+b)$ называют *сопряжёнными*.

Тогда получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{1}=(\infty-\infty)\overset{10.17}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=a\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0,$$

т.к. функция $h(x)=\sqrt{x+a}+\sqrt{x}$ бесконечно большая при $x\to+\infty$.

Приём, который мы использовали при решении примера 56, будем называть: *“Умножить на сопряжённое”*.

Пример 57. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}\right). \tag{3.9}$$

Решение. Функции $f(x) = \sqrt[3]{x+a}$ и $g(x) = \sqrt[3]{x}$ бесконечно большие одного порядка роста при $x \to +\infty$. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся приёмом, основанном на формуле:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + a^2\right).$$

Сомножители $(a-b)$ и $\left(a^2 + ab + a^2\right)$ называют *сопряжёнными*.

Тогда получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}}{1}=(\infty-\infty)\overset{10.18}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)-x}{\left(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x(x+a)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x(x+a)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=a\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x(x+a)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=0,$$

т.к. функция $\left(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x(x+a)}+\sqrt[3]{x^2}\right)$ бесконечно большая при $x\to+\infty$.

Приём, который мы использовали при решении примера 57, будем называть: *“Умножить на сопряжённое”*.

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^m+bx^k+c}-dx^s\right)$$

3.19.3. Метод "Сократить на доминанту более высокого порядка роста".

Метод применяется для раскрытия неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to \infty$.
Суть метода *"Сократить на доминанту более высокого порядка роста"*:
1. В числителе и знаменателе выделяем доминанты;
2. Делим числитель и знаменатель на доминанту более высокого порядка роста.

После этих действий неопределённость исчезает.

Пример 58. Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$$

Решение

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{3^x\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=1,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$ (см. пример 50).

Пример 59. Найти

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}.$$

Решение. Функции $f(x) = x + 1$ и $g(x) = x$ бесконечно большие одного порядка роста при $x \to \infty$. Для раскрытия этой неопределённости воспользуемся приёмом: в числителе и знаменателе выделим доминанты при $x \to \infty$. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, (см. пример 53).

3.19.4. Об отношении бесконечно малых функций.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Пусть, далее, $f, g : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ бесконечно малые при $x \to \omega$ и $f \neq 0,\ g \neq 0$ вблизи ω.

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\omega} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то о пределе $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$ в общем случае, без дополнительной информации о функциях f и g, ничего определённого сказать нельзя. В этом случаи говорят о неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Раскрыть неопределённость вида* $\left(\frac{0}{0}\right)$ означает: в каждом конкретном случае, в зависимости от заданных бесконечно малых при $x \to \omega$ функциях f и g, решить вопрос о пределе частного функций f и g при $x \to \omega$.

Рассмотрим некоторые методы раскрытия неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

3.19.4.1. Метод Безу.

Обозначим через P_n и Q_m - многочлены степени n и m, соответственно. Пусть x_0 есть корень многочленов P_n и Q_m, т.е. $P_n(x_0) = 0$ и $Q_m(x_0) = 0$. Найти предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Так как x_0 есть корень многочленов P_n и Q_m, то их, в силу теоремы Безу, можно записать в виде:

$$P_n(x) = (x - x_0)p_{n-1}(x),$$
$$Q_m(x) = (x - x_0)q_{m-1}(x).$$

Многочлены p_{n-1} и q_{m-1} однозначно определяются с помощью процесса деления углом многочленов P_n и Q_m на $x - x_0$, соответственно. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)p_{n-1}(x)}{(x - x_0)q_{m-1}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{p_{n-1}(x)}{q_{m-1}(x)}.$$

Вышеописанный приём раскрытия неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, основанный на теореме Безу, будем называть *методом Безу*.

Если же при нахождении предела $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{p_{n-1}(x)}{q_{m-1}(x)}$ появится снова неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, то применим метод Безу ещё раз.

Пример 60. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}$$

Заменяя x на 2 получим неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$
(Обоснование этого действия будет дано дальше в разделе "Непрерывные отображения").
Раскрывать эту неопределённость будем методом Безу. Разделим многочлен x^2+2x-8 на $(x-2)$:

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x-8 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^2-2x} & x+4 \\ \phantom{x^2+{}}4x-8 & \\ \phantom{x^2+{}}\underline{4x-8} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$. Аналогично запишем знаменатель в виде $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$.

Итак

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Сокращение на $(x-2)$ проведено правильно, так как $x\neq 2$ при $x\to 2$.

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g} \frac{a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

3.19.4.2. Метод “Умножить на сопряжённое”.

В основе приёма лежит одна из формул:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}\right) \tag{3.10}$$

или формула

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - ba^{2n-1} + b^2a^{2n-2} - \cdots - b^{2n-1}a + b^{2n}\right) \tag{3.11}$$

Сомножители, стоящие в формуле (3.10) [или в формуле (3.11)] справа, называют *“сопряжёнными”*. Метод применяют для раскрытия неопределённостей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $(\infty - \infty)$.

Пример 61. Найти предел

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}{x-4}.$$

Решение.
Положим в формуле (3.10) $a = \sqrt{x+4}$, $b = \sqrt{8}, n = 2$. Умножая числитель и знаменатель на сопряжённое к $(a - b)$, получим

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.10}{=}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{8}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{8}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Пример 62. Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{5-x}\right).$$

Решение.
Положим в формуле (3.11) $a = \sqrt[3]{x+5}$, $b = \sqrt[3]{5-x}$, $n = 1$.
Умножая и деля на сопряжённое к $(a+b)$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{5-x}\right) = (\infty-\infty) \overset{3.11}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+5)+(5-x)}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+\sqrt[3]{x^2-25}+\sqrt[3]{(5-x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+\sqrt[3]{x^2-25}+\sqrt[3]{(5-x)^2}} = 0.$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sqrt{ax^n+b}-\sqrt{c}}{px^m+q}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx^n}-\sqrt{a}}{x^n}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sqrt[3]{x^n+a^3}-a}{x^n}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-c}{x-a}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x-b}-c}{x-a}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^n+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^n+b}-\sqrt{b}}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^n-a^3}+a}{\sqrt{x^n+b^2}-b}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^n+ta}-t\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^n+sb}-s\sqrt[3]{b}}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Предел функции (без привлечения замечательных пределов).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Предел функции и последовательности (без привлечения замечательных пределов).

3.20. Замечательные пределы.

Этот раздел посвящён двум видам пределов, которые получили названия первый и второй замечательные пределы. Каждый из замечательных пределов имеет несколько следствий, которые также будут рассмотрены в этом разделе.
Замечательные пределы и их следствия положены в основу соответствующих методов нахождения пределов (раскрытия неопределённостей).

3.20.1. Первый замечательный предел и его следствия.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Пусть, далее, $\alpha : A \to \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω.

Теорема 42. *Первым замечательным пределом* *называют*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\ \text{где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to\omega.$$

Доказательство. п.1. Сначала покажем, что
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$
При решении примера 39 вторым способом мы доказали, что для всех $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ имеют место неравенства
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$
Но $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (см. пример 40), значит, по теореме 36 о предельном переходе в неравенствах можем заключить, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

п.2. По теореме 27 имеем

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\begin{pmatrix}\text{Замена}\\ y=\alpha(x)\end{pmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

$\square$

Теорема 43. *Первым следствием первого замечательного предела* называют

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\ \text{где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to\omega.$$

Доказательство. п.1. Обозначим через $f(x) = \arcsin x$ и $\varphi(y) = \frac{y}{\sin y}$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c}\text{Пример } 43\\ \lim\limits_{x\to 0}\arcsin x = 0\end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{c}\text{Т.}32 \text{ и Т. } 42 \text{ п.1}\\ \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1\end{array}\right)\end{array}\right\} \overset{\text{Т.}27}{\Longrightarrow} \left(\lim_{x\to 0}\varphi\left(f(x)\right) = \right.$$

$$\left. = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin\left(\arcsin x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1\right)$$

п.2. По теореме 27 имеем

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \begin{pmatrix}\text{Замена}\\ \alpha(x)=y\end{pmatrix} = $$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y} = 1.$$

$\square$

Теорема 44. *Вторым следствием первого замечательного предела называют*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\ \text{где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to\omega.$$

Доказательство. п.1. Заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0,\ \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

(см. примеры 39 и 40) и тогда, в силу теоремы 32, имеем

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

п.2. По теореме 31 и первого замечательного предела имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1.$$

п.3. Обозначим через $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и $\varphi(y) = \frac{y}{\operatorname{tg} y}$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{c}\text{Пример}44\\ \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0\end{array}\right)\\
\left(\begin{array}{c}\text{Т.}32 \text{ и Т.}44 \text{ п.}2\\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = 1\end{array}\right)
\end{array}\right\} \overset{\text{Т.}27}{\Longrightarrow} \left(\lim_{x\to 0} \varphi\left(f(x)\right) = \right.$$

$$\left. = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1\right)$$

п.4. По теореме 27 имеем

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)} = \begin{pmatrix}\text{Замена}\\ \alpha(x)=y\end{pmatrix} = $$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1.$$

$\square$

3.20.1.1. Метод “Первый замечательный предел”.

Суть *метода “Первый замечательный предел”* поясним на примере.

Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$, бесконечно малые при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω. Найти

$$\lim_{x \to \omega} \frac{\sin \alpha(x)}{\beta(x)}.$$

В этом примере имеется:

1. неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$;

2. функция синус, аргумент которой $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$.

Словами *"Организовать первый замечательный предел"* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\sin \alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\omega} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, то нужно найти $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, что проще, чем найти $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\sin \alpha(x)}{\beta(x)}$. В этом и состоит суть метода.

Пример 63. Найти предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}.$$

Пример 63 Найти предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 63 Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 1 в формуле $\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$.
(Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 63 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{3.20.1.1}{=}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2-1}\overset{10.17}{=}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\overset{3.20.1}{=}\frac{1}{2}.$$

Метод решения: "Первый замечательный предел", $\alpha(x)=x-1\to 0$ при $x\to 1$.
Организуем первый замечательный предел.

Пример 64. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Пример 64 Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 64 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 0 в формуле $\frac{1-\cos x}{x^2}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$.
(Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Выберите метод решения.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 64 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{10.32}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

Первый вариант. Метод “Умножить на сопряжённое”: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$, а дальше метод “Первый замечательный предел”.

Второй вариант. используя формулу 10.32, получим $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$, а дальше метод “Первый замечательный предел”.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 64 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{10.32}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 \left(\frac{\sin(\alpha(x))}{x}\right)^2$$

Метод "Первый замечательный предел".

Шаг 3. Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 64 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{10.32}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 \left(\frac{\sin\left(\alpha(x)\right)}{x}\right)^2$$

Бесконечно малая $\alpha(x)$ – аргумент функции sin. $\alpha(x) = \frac{x}{2} \to 0$ при $x \to 0$.

Шаг 4. Организуем первый замечательный предел.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 64 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{10.32}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin\left(\alpha(x)\right)}{x}\right)^2\overset{3.20.1.1}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{2\;\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\alpha(x)\right)}{\alpha(x)}=1,$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x \to g} \frac{\sin\left(x^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x \to g} \frac{\sin\left(x^n + b\right)}{\sin\left(cx^m + d\right)}$$

3.20.1.2. Метод "Первое следствие первого замечательного предела".

Суть метода *"Первое следствие первого замечательного предела"* поясним на примере:

Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$, бесконечно малые при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω. Найти

$$\lim_{x \to \omega} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\beta(x)}.$$

В этом примере имеется:

1. неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$;

2. функция арксинус, аргумент которой $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$.

Словами *"Организовать первое следствие первого замечательного предела"* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\arcsin\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\omega} \frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Так как $\lim_{x\to\omega} \frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, то нужно найти $\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, что проще, чем найти $\lim_{x\to\omega} \frac{\arcsin\alpha(x)}{\beta(x)}$. В этом и состоит суть метода.

Пример 65. Найти предел

$$\lim_{x \to -1} \frac{\arcsin(x+1)}{x^3+1}.$$

Пример 65 Найти предел

$$\lim_{x \to -1} \frac{\arcsin(x+1)}{x^3+1}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 65 Найти предел

$$\lim_{x\to -1} \frac{\arcsin(x+1)}{x^3+1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to -1} \frac{\arcsin(x+1)}{x^3+1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на (-1) в формуле $\frac{\arcsin(x+1)}{x^3+1}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$. (Обоснование правильности этого действия будет в разделе "Непрерывные функции") .

Шаг 2. Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 65 Найти предел $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\arcsin(x+1)}{x^3+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-1}\frac{\arcsin(x+1)}{x^3+1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{3.20.1.2}{=}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\arcsin(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x^3+1}\overset{10.19}{=}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\arcsin(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\arcsin(x+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\overset{3.20.1}{=}\frac{1}{3}.$$

Метод решения: “Первое следствие первого замечательного предела”, $\alpha(x)=x+1\to0$ при $x\to-1$. Организуем первое следствие первого замечательного предела.

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \longrightarrow g} \frac{\arcsin\left(ax^{n} + b\right)}{cx^{m} + d}$$

3.20.1.3. Метод "Второе следствие первого замечательного предела".

Суть метода *"Второе следствие первого замечательного предела"* поясним на примере:

Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$, бесконечно малые при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω. Найти

$$\lim_{x \to \omega} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\beta(x)}.$$

В этом примере имеется:

1. неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$;

2. функция арктангенс, аргумент которой $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$.

Словами *"Организовать второе следствие первого замечательного предела"* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\omega} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, то нужно найти $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, что проще, чем найти $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\beta(x)}$. В этом и состоит суть метода.

Пример 66. Найти предел

$$\lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{x-5}.$$

Пример 66 Найти предел

$$\lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{x-5}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 66 Найти предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{x-5}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 5 в формуле $\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{x-5}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$. (Обоснование правильности этого действия будет в разделе "Непрерывные функции") .

Шаг 2. Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 66 Найти предел $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}-2)}{x-5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to5}\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}-2)}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{3.20.1.3}{=}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}-2)}{\sqrt{x-1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\overset{3.19.4.2}{=}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}-2)}{\sqrt{x-1}-2}\cdot\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}-2)}{\sqrt{x-1}-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\overset{3.20.1}{=}\frac{1}{4}.$$

Метод решения:“Второе следствие первого замечательного предела”, $\alpha(x)=\sqrt{x-1}-2\to0$ при $x\to5$. Организуем второе следствие первого замечательного предела.

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g} \frac{\operatorname{arctg}\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

3.20.2. Второй замечательный предел и его следствия.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$,

$$\alpha : A \to B, \; B \subset \mathbb{R}$$

бесконечно малая при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω.

Теорема 45. *Степень, основание которой равно сумме единицы и бесконечно малой при* $x \to \omega$, *а показатель есть величина, обратная этой бесконечно малой при* $x \to \omega$, *имеет пределом число* e *при* $x \to \omega$. *Итак,*

$$\lim_{x \to \omega} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

$$\text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \omega. \qquad (3.12)$$

Этот предел называется ***вторым замечательным пределом.***

Доказательство.

Обозначим $y = f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ и $\varphi(y) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$.

В силу теоремы 29, $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \infty$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c}\text{Теорема } 29 \\ \lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \infty\end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{c}\text{Пример } 49 \\ \lim\limits_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e\end{array}\right)\end{array}\right\} \overset{27}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} \varphi\left(f(x)\right) = \lim_{x\to\omega} \left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e\right)$$

$\square$

Теорема 46. *Первым следствием второго замечательного предела называют*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\log_a e,$$

где $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to\omega$.

Доказательство. Обозначим

$$y = f(x) = (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \text{ и } \varphi(y) = \log_a y.$$

В силу теоремы 45, $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = e$,

$f(x) \neq e$ при $x \neq \omega$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c}\text{Теорема } 45\\ \lim\limits_{x \to \omega} f(x) = e\end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{c}\text{Пример } 41\\ \lim\limits_{y \to e} \log_a y = \log_a e.\end{array}\right)\end{array}\right\} \stackrel{27}{\Longrightarrow} \Big(\lim_{x \to \omega} \varphi\left(f(x)\right) =$$

$$= \lim_{x \to \omega} \log_a (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \log_a e.\Big)$$

$\square$

Теорема 47. *Вторым следствием второго замечательного предела* *называют*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a,$$

где $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to\omega$.

Доказательство. Обозначим $\beta(x) = a^{\alpha(x)} - 1$. Очевидно, что $\alpha(x) = \log_a(1 + \beta(x))$.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lim\limits_{x\to\omega} \alpha(x) = 0\right) \\ \left(\begin{array}{l}\text{Пример } 42 \\ \lim\limits_{y\to 0} e^y = 1\end{array}\right)\end{array}\right\} \xRightarrow{27} \left(\lim\limits_{x\to\omega} e^{\alpha(x)} = 1\right) \xRightarrow{30}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} \beta(x) = 0.\right) \quad (3.13)$$

Тогда, учитывая (3.13) и теорему 32, получим

$$\lim_{x\to\omega} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \lim_{x\to\omega} \frac{1}{\frac{\log_a(1+\beta(x))}{\beta(x)}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

$\square$

Теорема 48. *Третьим следствием второго замечательного предела называют*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu,$$

где $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to\omega$.

Доказательство.
Обозначим $\beta(x) = \mu \cdot \ln(1 + \alpha(x))$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\lim\limits_{x\to\omega} \alpha(x) = 0\right) \\ \left(\begin{array}{c}\text{Пример } 41 \\ \lim\limits_{y\to y_0} \ln y = \ln y_0\end{array}\right) \end{array}\right\} \overset{27}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} \ln(1 + \alpha(x)) = \ln 1 = 0\right) \overset{31}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} \beta(x) = 0.\right) \quad (3.14)$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\left(\begin{array}{c}(3.14)\text{ и Теорема }47\\ \lim\limits_{x\to\omega}\frac{e^{\beta(x)}-1}{\beta(x)}=\ln e=1\end{array}\right)\\ \left(\begin{array}{c}\text{Теорема }46\\ \lim\limits_{x\to\omega}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\ln e=1\end{array}\right)\end{array}\right\}\overset{31}{\Longrightarrow}$$

$$\Bigg(\lim_{x\to\omega}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=$$

$$=\lim_{x\to\omega}\frac{e^{\mu\ln(1+\alpha(x))}-1}{\mu\ln(1+\alpha(x))}\cdot\frac{\mu\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=$$

$$=\mu\cdot\lim_{x\to\omega}\frac{e^{\beta(x)}-1}{\beta(x)}\cdot\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\mu\cdot1\cdot1=\mu\Bigg).$$

$\square$

3.20.2.1. Метод “Второй замечательный предел”.

Суть метода *“Второй замечательный предел”* поясним на примере:
Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $f, \beta : A \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\omega} \beta(x) = 0$.
Найти

$$\lim_{x\to\omega} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{\beta(x)}} = \left(1^{\infty}\right)$$

(Это новый вид неопределённости).

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = 1$, то, в силу теоремы 28, $f(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω. Словами *"Организовать второй замечательный предел"* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega} (f(x))^{\frac{1}{\beta(x)}} = (1^{\infty}) =$$

$$= \lim_{x\to\omega} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}} = \lim_{x\to\omega} \left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, тогда, если $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = K$, то $\lim\limits_{x\to\omega} (f(x))^{\frac{1}{\beta(x)}} = e^{K}$.

В этом и состоит суть метода.

Пример 67. Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}.$$

Пример 67 Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 67 Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \left(1^{\infty}\right)$$

Заменяя x на $+\infty$ (см. конец раздела 1.3) в формуле $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$, получим $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Это не является видом неопределённости, но $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ это вид неопределённости. Найдём сначала

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-2} \overset{3.19.3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} \overset{53}{=} 1.$$

Шаг 2. Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 67 Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = (1^{\infty}) \overset{28}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\alpha(x)\right)^{2x-1}$$

Метод решения: "Второй замечательный предел".

Шаг 2.

Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 67 Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = (1^{\infty}) \overset{28}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{3}{x-2}}_{\alpha(x)}\right)^{2x-1}$$

Для выделения бесконечно малой функции $\alpha(x)$ воспользуемся приёмом “Добавить и вычесть единицу”.

$$\frac{x+1}{x-2} = 1+\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right) = 1+\frac{3}{x-2},$$

где $\alpha(x) = \frac{3}{x-2} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Шаг 3. Организуйте второй замечательный предел.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 67 Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = (1^{\infty}) \overset{28}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{3}{x-2}}_{\alpha(x)}\right)^{2x-1} \overset{3.20.2.1}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \text{ где } \lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0.$$

Шаг 4. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 67 Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = (1^{\infty}) \overset{28}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{3}{x-2}}_{\alpha(x)}\right)^{2x-1} \overset{3.20.2.1}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{3.19.3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} \overset{53}{=} 6.$$

Ответ: e^6.

3.20.2.2. Метод “Первое следствие второго замечательного предела”.

Суть метода *“Первое следствие второго замечательного предела”* поясним на примере:
Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $f, \beta : A \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\omega} \beta(x) = 0$.

Найти

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\log_a f(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = 1$, то, в силу теоремы 28, $f(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω.

Словами *“Организовать первое следствие второго замечательного предела”* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\log_a f(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\omega}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\beta(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\omega}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \log_a e$, то, нужно найти $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, что проще, чем $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{\log_a f(x)}{\beta(x)}$.

В этом и состоит суть метода.

Пример 68. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-5x)}{x}.$$

Пример 68 Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-5x)}{x}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 68 Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-5x)}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-5x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 0 в формуле $\frac{\ln(1-5x)}{x}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$.
(Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Выберите метод решения.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 68 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Метод решения: “Первое следствие второго замечательного предела”.

Шаг 2.

Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 68 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\overbrace{(-5x)}^{\alpha(x)})}{x}$$

$\alpha(x)=(-5x)\to 0$ при $x\to 0$.

Шаг 3. Организуйте первое следствие второго замечательного предела.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 68 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1\overbrace{(-5x)}^{\alpha(x)})}{x}\overset{3.20.2.2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1\overbrace{(-5x)}^{\alpha(x)})}{-5x}\cdot\frac{-5x}{x}$$

Первое следствие второго замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 1+\alpha(x)}{\alpha(x)}=\ln e=1$, где $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

Шаг 4. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-5x}{x}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 68 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-5x)}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-5x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1\overbrace{(-5x)}^{\alpha(x)})}{x} \overset{3.20.2.2}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1\overbrace{(-5x)}^{\alpha(x)})}{-5x} \cdot \frac{-5x}{x} = -5.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}(-5) = -5.$$

Ответ: -5.

3.20.2.3. Метод “Второе следствие второго замечательного предела”.

Суть метода *“Второе следствие второго замечательного предела”* поясним на примере:
Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$, бесконечно малые при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω. Найти

$$\lim_{x\to\omega} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\beta(x)}.$$

В этом примере имеется:

1. неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$;

2. показательная функция, аргумент которой $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$.

Словами *"Организовать второе следствие второго замечательного предела"* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\omega} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = \ln a$, то нужно найти $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, что проще, чем найти $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{a^{\alpha(x)}-1}{\beta(x)}$. В этом и состоит суть метода.

Пример 69. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

Пример 69 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 69 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 0 в формуле $\frac{e^{-3x}-1}{x}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$.
(Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Выберите метод решения.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 69 Найти предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

Решение.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Метод решения: “Второе следствие второго замечательного предела”.

Шаг 3.

Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 69 Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\overbrace{(-3x)}^{\alpha(x)}}-1}{x}$$

$\alpha(x) = (-3x) \to 0$ при $x \to 0$.

Шаг 4. Организуйте второе следствие второго замечательного предела.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 69 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\overbrace{(-3x)}^{\alpha(x)}}-1}{x}\overset{3.20.2.3}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\overbrace{(-3x)}^{\alpha(x)}}-1}{-3x}\cdot\frac{-3x}{x}$$

Второе следствие второго замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln e=1$, где $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

Шаг 5. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{x}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 69 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\overbrace{(-3x)}^{\alpha(x)}}-1}{x}\overset{3.20.2.3}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\overbrace{(-3x)}^{\alpha(x)}}-1}{-3x}\cdot\frac{-3x}{x}=-3.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}(-3)=-3.$$

Ответ: -3.

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{a^{cx^n+d}-1}{px^m+q}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{a^{cx^n+d}-1}{\sin\left(px^m+q\right)}$$

3.20.2.4. Метод "Третье следствие второго замечательного предела".

Суть метода *"Третье следствие второго замечательного предела"* поясним на примере:

Пусть ω есть конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$, бесконечно малые при $x \to \omega$ и $\alpha \neq 0$ вблизи ω. Найти

$$\lim_{x \to \omega} \frac{(1 + \alpha(x))^{\mu} - 1}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Словами *“Организовать третье следствие второго замечательного предела”* обозначим следующую последовательность действий:

$$\lim_{x\to\omega}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\beta(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\omega}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu$, то нужно найти $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$, что проще, чем найти $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\beta(x)}$. В этом и состоит суть метода.

Пример 70. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2} \quad (\mu\ -\ \text{вещественное}).$$

Пример 70 Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2} \quad (\mu \ - \ \text{вещественное}).$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 70 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2}\quad (\mu\ -\ \text{вещественное}).$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 0 в формуле $\frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$.
(Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 70 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}\ (\mu\ -\ \text{вещественное}).$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{-x^2}$$

Метод решения: “Третье следствие второго замечательного предела”.

Шаг 3.

Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 70 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\alpha(x)}\right)^{\mu}-1}{-x^2}$$

Для выделения бесконечно малой функции $\alpha(x)$ воспользуемся приёмом "Добавить и вычесть единицу": $\cos x = 1+(\cos x-1)$.

Шаг 4. Организуйте третье следствие второго замечательного предела.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 70 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}\quad (\mu\ -\ \text{вещественное}).$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\alpha(x)}\right)^{\mu}-1}{-x^2}\overset{3.20.2.4}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\alpha(x)}\right)^{\mu}-1}{\cos x-1}\times$$

$$\times\frac{\cos x-1}{-x^2}$$

Третье следствие второго замечательного предела:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu$, где $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

Шаг 5. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 70 Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}\quad (\mu\ -\ \text{вещественное}).$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\alpha(x)}\right)^{\mu}-1}{-x^2}\overset{3.20.2.4}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\alpha(x)}\right)^{\mu}-1}{\cos x-1}\times$$

$$\times\frac{\cos x-1}{-x^2}=\frac{\mu}{2}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{2}$ (см. пример 64).

Ответ: $\frac{\mu}{2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Замечательные пределы и их следствия.

3.21. Метод “Замена переменных”.

Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Аргумент x заменим функцией $\varphi(t)$ так чтобы

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0 \ \left(\lim_{x\to x_0} \varphi^{-1}(x) = t_0\right)$$

и были выполнены условия теоремы 27 о пределе композиции отображений. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to t_0} f\circ\varphi(t).$$

Замену $x = \varphi(t)$ подбирают так чтобы $\lim\limits_{t\to t_0} f\circ\varphi(t)$ был бы проще исходного.

Для примеров этого учебника:
Если ищется предел при $x \to g$, $g \neq 0$, и ни один из выше перечисленных методов не подходит, то только тогда рекомендуется перейти к новому аргументу $t = x - g$ $(x = t + g)$, который стремится к нулю при $x \to g$.

Пример 71. Найти предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

Решение.
В этом примере имеется:

1. Неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$;

2. Функции синус, аргументы которых не являются бесконечно малыми при $x \to \pi$. Поэтому для решения этого примера метод "Первый замечательный предел" не подходит.

Сделаем замену $x = t + \pi$. Тогда получим

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t+3\pi)}{\sin(2t+2\pi)} = $$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{\sin 2t}.$$

Теперь имеем:

1. Неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$;

2. Функции синус, аргументы которых являются бесконечно малыми при $t \to 0$.

Продолжим решение этого примера методом “Первый замечательный предел”.

$$\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{\sin 2t}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 2t}{2t}}\cdot\frac{3t}{2t}=-\frac{3}{2}.$$

3.22. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$ и $\alpha, \beta : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ бесконечно малые при $x \to \omega$.

Определение 85. Если

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то говорят, что *α есть бесконечно малая более высокого порядка, чем β при $x\to\omega$* и пишут $\alpha=o(\beta)$ при $x\to\omega$.

Обозначение $\alpha=o(\beta)$ читается *“α есть о малое от β при $x\to\omega$.”*

Пример 72. Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to \omega$, то $(\alpha(x))^2$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x \to \omega$.

Определение 86. Говорят, что *функции α и β, бесконечно малые одного порядка при $x \to \omega$*, если $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и $\exists U_\mu(\omega)$ такие, что

$$\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega) \ : \ 0 < h_1 < \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| < h_2.$$

Теорема 49. *Пусть функции α и β бесконечно малые при $x \to \omega$.*

Если $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ конечен и отличен от нуля, то функции α и β бесконечно малые одного порядка при $x \to \omega$.

Доказательство. $\left(\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a \neq 0\right) \overset{?}{\Longrightarrow}$

$\big(\alpha$ и β бесконечно малые одного порядка при $x \to \omega\big) \overset{86}{\Longleftrightarrow}$

$\Big(\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и $U_\mu(\omega)$ такие, что
$\forall x \in A \cap U^*_\mu(\omega)\ :\ 0 < h_1 < \left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| < h_2\Big)$.

Фиксируем $\varepsilon_0 = \dfrac{|a|}{2} > 0$.

$$\left(\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\exists U_\mu(\omega)\ \text{т.ч.}\ \forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)\ :\ \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - a\right| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2}\right) \overset{(10.15)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)\ :\ \left|\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| - |a|\right| \leq \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - a\right| < \frac{|a|}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)\ :\ \left|\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| - |a|\right| < \frac{|a|}{2}\right) \overset{(10.16)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall x \in A \cap U_\mu^*(\omega)\ :\ 0 < \underbrace{\frac{|a|}{2}}_{h_1} < \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| < \underbrace{\frac{3|a|}{2}}_{h_2}\right).$$

$\square$

Пример 73. Пусть

$$\alpha(x) = x(2+\cos x) \text{ и } \beta(x) = \sin 2x.$$

Показать, что это - бесконечно малые одного порядка при $x \to 0$.

Решение. Очевидно, что α и β бесконечно малые при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + x\cos x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{10.33}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} + \frac{x\cos x}{2\sin x\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right) \overset{3.20.1}{=} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

то, в силу теоремы 49, α и β бесконечно малые одного порядка при $x \to 0$.

3.22.1. Эквивалентные бесконечно малые.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$ и $\alpha, \beta : A \to \mathrm{B}$, $A \subset \mathbb{R}^k, \mathrm{B} \subset \mathbb{R}$ бесконечно малые при $x \to \omega$.

Определение 87. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые при $x \to \omega$ и

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то говорят, что *бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *эквивалентны при* $x \to \omega$ и пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *при* $x \to \omega$.

Теорема 50. *Бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *эквивалентны при* $x \to \omega$ *тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\alpha(x)$ *(и* $\beta(x)$*) при* $x \to \omega$.

Доказательство.

$$(\alpha \sim \beta) \overset{\text{опр.}87}{\iff} \left(\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1\right) \iff \left(\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 0\right).$$

$\square$

Теорема 51. *Пусть*

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x) \text{ и } \beta(x) \sim \beta_1(x) \text{ при } x \to \omega.$$

Тогда, если существует

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

то существует и

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

и эти пределы равны.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\alpha(x) \sim \alpha_1(x)\\ \text{при } x \to \omega\end{pmatrix} \overset{\text{опр.}87}{\Longleftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} = 1\right)\\ \begin{pmatrix}\beta(x) \sim \beta_1(x)\\ \text{при } x \to \omega\end{pmatrix} \overset{\text{опр.}87}{\Longleftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1\right)\\ \left(\exists \lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)\end{array}\right\} \overset{31}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to\omega} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)$$

$\square$

Следствие 51.1. *При вычислении пределов вида*

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)}{\beta_1(x)\dots\beta_m(x)},$$

где все α_i *и* β_j *- бесконечно малые при* $x \to \omega$, *можно заменять каждый из множителей* α_i, β_j *на величину, эквивалентную этому множителю, не меняя величины предела.*

3.22.2. Таблица эквивалентных бесконечно малых.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$ и $\alpha : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to \omega$.

Таблица эквивалентных:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } x \to \omega; \tag{3.15}$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } x \to \omega; \tag{3.16}$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } x \to \omega; \tag{3.17}$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } x \to \omega; \tag{3.18}$$

$$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)\cdot\log_a e \text{ при } x \to \omega; \tag{3.19}$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a \text{ при } x \to \omega; \tag{3.20}$$

$$\sqrt{a+\alpha(x)}-\sqrt{a}\sim\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\alpha(x) \text{ при } x\to\omega; \tag{3.21}$$

$$\sqrt[3]{a+\alpha(x)}-\sqrt[3]{a}\sim\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\cdot\alpha(x) \text{ при } x\to\omega; \tag{3.22}$$

$$(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\cdot\alpha(x) \text{ при } x\to\omega; \tag{3.23}$$

$$1-\cos(\alpha(x))\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2} \text{ при } x\to\omega. \tag{3.24}$$

Пример 74. Используя следствие 51.1 и таблицу эквивалентных, найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^3}\ 51.1 \overset{\text{и}}{=} 3.17$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^3}\ 51.1 \overset{\text{и}}{=} 3.24$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Внимание! Одна из самых распространённых ошибок при вычислении предела некоторого выражения данным методом заключается в замене бесконечно малой функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную бесконечно малую (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Для более выпуклого пояснения выделенной мысли покажем как иногда ошибочно решают пример 74:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}\overset{3.17}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{3.15}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0,$$

что не совпадает с ранее полученным верным результатом.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Сравнение бесконечно малых функций.

3.22.3. Главная часть бесконечно малых.

Пусть ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^k$ и $\alpha, \beta : A \to \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$ бесконечно малые при $x \to \omega$.

Определение 88. Говорят, что *бесконечно малая* β *имеет порядок малости* k $(k > 0)$ *относительно бесконечно малой* α *при* $x \to \omega$, если

$$\lim_{x \to \omega} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C, \text{ где } C \text{ - число, } C \neq 0.$$

При этом бесконечно малую $C \cdot [\alpha]^k$, эквивалентную β при $x \to \omega$, называют *главной частью бесконечно малой* β *при* $x \to \omega$.

Определение 88 вводит более точную сравнительную характеристику поведения бесконечно малых, в выражении их порядков числами. При этом для введения шкалы бесконечно малых нужно, прежде всего, в качестве своего рода "эталона" выбрать одну из фигурирующих в данном исследовании бесконечно малых; её называют *основной*. Конечно, выбор основной бесконечно малой в известной мере произволен, но обычно берут простейшую из всех. Если $\omega = x_0$ конечная предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}$ и $\beta : A \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to x_0$, то за "основную" бесконечно малую берут $\alpha(x) = x - x_0$. Если же $\omega = \infty$ предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}$ и $\beta : A \to B$, $B \subset \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to \infty$, то за "основную" бесконечно малую берут $\alpha(x) = \frac{1}{x}$.

Не следует думать, конечно, что для всякой бесконечно малой β (даже сравнимой со всеми степенями α^k) может быть установлен определённый порядок.

Пример 75. Найти главную часть вида Cx^k бесконечно малой $\beta(x) = 1 - \cos x$ при $x \to 0$.

Решение. Первый вариант решения. Так как $\beta(x) = 1 - \cos x \overset{3.24}{\sim} \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$, то, следовательно, главной частью бесконечно малой $\beta(x) = 1 - \cos x$ при $x \to 0$ является бесконечно малая $\frac{1}{2} \cdot x^2$.

Второй вариант решения. Попробуем подобрать $k > 0$ и $C \neq 0$ такие, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^k} = C.$$

Тогда, согласно определению 88, главной частью бесконечно малой $\beta(x) = 1 - \cos x$ при $x \to 0$ является бесконечно малая $C \cdot x^k$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^k} \overset{10.32}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k} \overset{3.20.1.1}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x^2}{x^k} \overset{3.20.1}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } k<2,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } k=2,\\ +\infty, & \text{если } k>2. \end{cases}$$

Итак, единственный вариант, удовлетворяющий определению 88, это $k = 2$, $C = \frac{1}{2}$.

Пример 76. Найти главную часть вида $\frac{C}{x^k}$ бесконечно малой $\beta(x) = 3\sin^2\frac{2}{x^3}$ при $x \to \infty$.

Решение. Первый вариант решения.

Так как $\beta_1(x) = \sin\frac{2}{x^3} \overset{3.15}{\sim} \frac{2}{x^3}$ при $x \to \infty$, то, $\beta(x) = 3\sin^2\frac{2}{x^3} \sim 3\frac{4}{x^6}$ при $x \to \infty$ и, следовательно, главной частью бесконечно малой $\beta(x) = 3\sin^2\frac{2}{x^3}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малая $\frac{12}{x^6}$.

Второй вариант решения. Попробуем подобрать $k > 0$ и $C \neq 0$ такие, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\sin^2\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^k}} = C.$$

Тогда, согласно определению 88, главной частью бесконечно малой $\beta(x) = 3\sin^2\frac{2}{x^3}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малая $\frac{C}{x^k}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\sin^2\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^k}} \overset{3.20.1.1}{=} \lim_{x\to\infty} 3\left(\frac{\sin\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x^3}}\right)^2 \cdot \frac{\frac{4}{x^6}}{\frac{1}{x^k}} \overset{3.20.1}{=} \begin{cases} 0, \text{ если } k < 6, \\ 12, \text{ если } k = 6, \\ +\infty, \text{ если } k > 6. \end{cases}$$

Итак, единственный вариант, удовлетворяющий определению 88, это $k = 6,\ C = 12$.

Пример 77. Найти главную часть вида

$$C(x+1)^k$$

бесконечно малой

$$\beta(x) = \frac{\operatorname{tg}^3(x+1)}{\arcsin\left(\sqrt{3-x}-2\right)}$$

при $x \to -1$.

Решение. Так как

$$\frac{\operatorname{tg}^3(x+1)}{\arcsin\left(\sqrt{3-x}-2\right)} \overset{3.17}{\sim} \frac{(x+1)^3}{\arcsin\left(\sqrt{3-x}-2\right)} \overset{3.16}{\sim}$$

$$\sim \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3-x}-2} = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{4-(x+1)}-2} =$$

$$= \frac{(x+1)^3}{2\left(\sqrt{1+\frac{-(x+1)}{4}}-\sqrt{1}\right)} \overset{3.21}{\sim} \frac{(x+1)^3}{\frac{-(x+1)}{4}} = -4(x+1)^2$$

при $x \to -1$, то, следовательно, главной частью бесконечно малой $\beta(x) = \frac{\operatorname{tg}^3(x+1)}{\arcsin\left(\sqrt{3-x}-2\right)}$ при $x \to -1$ является бесконечно малая $\alpha(x) = -4 \cdot (x+1)^2$.

3.22.4. Бесконечно малые отображения.

Пусть $\alpha : A \to \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^n$ и ω конечная или бесконечно удалённая предельная точка множества A.

Определение 89. Отображение

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)^T : A \to \mathbb{R}^k$$

называется *бесконечно малым при $x \to \omega$*, если модуль отображения

$$|\alpha(x)| \overset{\text{опр.}}{=} \sqrt{\alpha_1^2(x) + \alpha_2^2(x) + \cdots + \alpha_k^2(x)}$$

бесконечно малая функция при $x \to \omega$.

Сравнение бесконечно малых отображений производят сравнивая их модули.

3.23. Односторонние пределы функции одной переменной.

Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Обозначим через

$$A_+(\omega) = \{x \in A | x > \omega\}$$

и

$$A_-(\omega) = \{x \in A | x < \omega\},$$

где ω произвольное фиксированное число или один из символов $+\infty, -\infty$.

Заметим, что множества $A_+(\omega) \subset A$ и $A_-(\omega) \subset A$ могут быть пустыми при некоторых ω и $A_+(-\infty) = A, A_-(+\infty) = A$. Через $A'_+(\omega)$ и $A'_-(\omega)$ обозначим множества всех предельных точек множеств $A_+(\omega)$ и $A_-(\omega)$, соответственно. Пусть Ω - число или один из символов $\infty, -\infty, +\infty$.

Определение 90. (Гейне). Ω называется *пределом функции* $f : A \to B$ *при* x *стремящемся к* $x_0 \in A'_-(x_0)$ *слева*, если для каждой последовательности $(x_n), x_n \in A, x_n < x_0$, сходящейся к x_0, имеем:

$$\lim f(x_n) = \Omega.$$

Обозначения:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), f(x_0 - 0), \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

Определение 91. (Гейне). Ω называется *предeлом функции* $f : A \to B$ *при* x *стремящемся к* $+\infty \in A'$, если для каждой последовательности $(x_n), x_n \in A$, стремящейся к $+\infty$, имеем:

$$\lim f(x_n) = \Omega.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Определение 92. (Гейне). Ω называется *пределом функции* $f : A \to B$ *при* x *сходящемся к* $x_0 \in A'_+(x_0)$ *справа*, если для каждой последовательности $(x_n), x_n \in A, x_n > x_0$, сходящейся к x_0, имеем:

$$\lim f(x_n) = \Omega.$$

Обозначения:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x), f(x_0 + 0), \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Определение 93. (Гейне). Ω называется *пределом функции* $f : A \to B$ *при* x *стремящемся к* $-\infty \in A'$, если для каждой последовательности $(x_n), x_n \in A$, стремящейся к $-\infty$, имеем:

$$\lim f(x_n) = \Omega.$$

Определение 94. (Коши). Ω называется *пределом функции* $f : A \to B$ *при* x *сходящемся к* $x_0 \in A'_-(x_0)$ *слева*, если $\forall U_\varepsilon(\Omega)\ \exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap A_-(x_0) \quad : \quad f(x) \in U_\varepsilon(\Omega)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

Определение 95. (Коши). Ω называется *предело́м функции* $f : A \to B$ *при* x *стремящемся к* $+\infty \in A'$, если $\forall U_\varepsilon(\Omega)\, \exists U_\delta(+\infty)$, такая что $\forall x \in U_\delta(+\infty) \cap A : f(x) \in U_\varepsilon(\Omega)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Определение 96. (Коши). Ω называется *пределом функции* $f : A \to B$ *при* x *сходящемся к* $x_0 \in A'_+(x_0)$ *справа*, если $\forall U_\varepsilon(\Omega)\,\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap A_+(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(\Omega)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$$

Определение 97. (Коши). Ω называется *пределом функции* $f : A \to B$ *при* x *стремящемся к* $-\infty \in A'$, если $\forall U_\varepsilon(\Omega)\, \exists U_\delta(-\infty)$, такая что $\forall x \in U_\delta(-\infty) \cap A : f(x) \in U_\varepsilon(\Omega)$.

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ТРЕНАЖЁР

$f : A \to B \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Можно показать, что определения одностороннего предела по Гейне и по Коши эквивалентны.

Теорема 52. *Пусть* f *- вещественная функция, определенная на* $A \subset \mathbb{R}$, *и для некоторого* $\varepsilon > 0$ *проколотая* $\varepsilon-$ *окрестность точки* x_0 *входит в* A.

Тогда для того, чтобы существовал $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, *необходимо и достаточно выполнение трех условий:*

1) Существует предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$,

2) Существует предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$,

3) Оба односторонних предела равны a.

Доказательство. а) *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу определения предела по Коши, найдется такое $\delta > 0$, что

$$f\left(U_\delta^*(x_0) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a).$$

Так как $(x_0 - \delta, x_0) \subset U_\delta^*(x_0)$, то

$$f\left((x_0 - \delta, x_0) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a).$$

Из выделенного синим цветом следует, что $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = a$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{x\to x+0} f(x) = a$.

b) *Достаточность.* Пусть условия (1-3) выполнены. Воспользуемся определениями предела и одностороннего предела по Коши. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = a$, то найдется такое $\delta_1 > 0$, что $f\left((x_0 - \delta_1, x_0) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a)$. Аналогично, так как $\lim\limits_{x\to x+0} f(x) = a$, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что $f\left((x_0, x_0 + \delta_2) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a)$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Имеем: $f\left((x_0 - \delta, x_0) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a)$ и $f\left((x_0, x_0 + \delta) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a)$.

Отсюда: $f\left(U^*_\delta(x_0) \cap A\right) \subset U_\varepsilon(a)$.

Из выделенного синим цветом следует, по определению Коши, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. $\square$

Техника нахождения односторонних пределов такая же как и нахождения пределов. При этом, в силу теоремы 52, имеют место все замечательные пределы и их следствия при $x \to \omega + 0$ и $x \to \omega - 0$.

Пример 78. Найти предел

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}.$$

Пример 78 Найти предел

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 78 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 1 в формуле $\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$. (Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Избавьтесь от модуля.

Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 78 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{3.2.6}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1+0} \frac{-\sin(1-x)}{x^3-1} = -\lim_{x\to 1+0} \frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1}$$

Метод решения: "Первый замечательный предел".

Шаг 3.

Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 78 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.2.6}{=}$$

$$= - \lim_{x\to 1+0} \frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\sin \overbrace{(1-x)}^{\alpha(x)}}{1-x^3}$$

Минус единицу занесли в знаменатель.

Шаг 4. Организуйте первый замечательный предел.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 78 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.2.6}{=} -\lim_{x\to 1+0} \frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1+0} \frac{\sin \overbrace{(1-x)}^{\alpha(x)}}{1-x^3} \overset{3.20.1.1}{=} \lim_{x\to 1+0} \frac{\sin(1-x)}{1-x} \cdot \frac{1-x}{1-x^3}$$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1, \text{ где } \lim_{x\to 1+0} \alpha(x) = 0.$$

Шаг 5. Найдите $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1-x}{1-x^3}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 78 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{3.2.6}{=}-\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin\overbrace{(1-x)}^{\alpha(x)}}{1-x^3}\overset{3.20.1.1}{=}\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin(1-x)}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1-x^3}\overset{3.20.1}{=}\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1-x}{1-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{10.18}{=}\lim_{x\to 1+0}\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 79. Найти предел

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}.$$

Пример 79 Найти предел

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}.$$

Решение.

Шаг 1. Определите вид неопределённости.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 79 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Заменяя x на 1 в формуле $\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$, получим $\left(\frac{0}{0}\right)$. (Обоснование правильности этого действия будет в разделе “Непрерывные функции”) .

Шаг 2. Избавьтесь от модуля.

Выберите метод решения.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 79 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.2.6}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(1-x)}{x^3-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1}$$

Метод решения: “Первый замечательный предел”.

Шаг 3.

Найдите бесконечно малую функцию $\alpha(x)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 79 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.2.6}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin\overbrace{(1-x)}^{\alpha(x)}}{x^3-1}$$

Шаг 4. Организуйте первый замечательный предел.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 79 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.2.6}{=} \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin \overbrace{(1-x)}^{\alpha(x)}}{x^3-1} \overset{3.20.1.1}{=} \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(1-x)}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x^3-1}$$

Первый замечательный предел:

$\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1$, где $\lim\limits_{x\to 1-0} \alpha(x) = 0$.

Шаг 5. Найдите $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1-x}{x^3-1}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 79 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{3.2.6}{=}\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin(\alpha(x))}{x^3-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin\overbrace{(1-x)}^{\alpha(x)}}{x^3-1}\overset{3.20.1.1}{=}\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin(1-x)}{1-x}\cdot\frac{1-x}{x^3-1}\overset{3.20.1}{=}-\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{10.18}{=}\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Пример 80. Показать, что не существует числа $a \in \mathbb{R}$ такого, что

$$\lim_{x \to 1} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3 - 1} = a.$$

Решение.

Так как

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = \frac{1}{3}$$

(см. пример 78) и

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = -\frac{1}{3}$$

(см. пример 79), то, в силу теоремы 52, не существует числа $a \in \mathbb{R}$ такого, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{|\sin(1-x)|}{x^3-1} = a.$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g+0} \frac{a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g-0} \frac{a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g+0} \frac{|a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5|}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0}\frac{|a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5|}{b_0x^5+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x+b_5}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0}\operatorname{arctg}\frac{c}{ax^n+b}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0}\frac{\sin\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g-0} \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g+0} \frac{\arcsin\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g-0} \frac{\arcsin\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g+0} \frac{\operatorname{arctg}\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ТРЕНАЖЁР – ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g-0} \frac{\operatorname{arctg}\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

Глава 4

Непрерывные отображения

4.1. Непрерывность отображения.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$, и x_0 есть точка множества A.

Определение 98. Отображение $f : A \to B$ называется *непрерывным в точке $x_0 \in A$*, если $\forall U_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0)$ такая, что

$$\forall x \in A \cap U_\delta(x_0)\ :\ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

S

Определение 99. Отображение $f : A \to B$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in A$, если $\forall U_\varepsilon(f(x_0))$ $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $f(A \cap U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$.

S

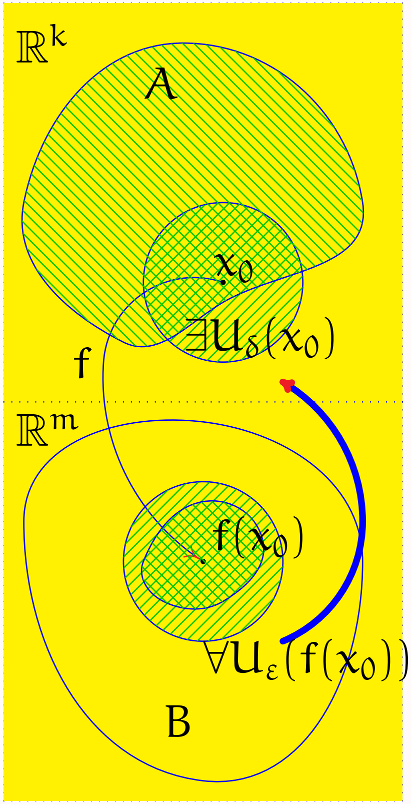


Рис.4.1.

Определение 100. Отображение $f : A \to B$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in A$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что

$$f(A \cap U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)).$$

S

Определение 101. Отображение $f : A \to B$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in A$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что

$$\forall x \in A \cap U_\delta(x_0) \ : \ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

S

4.1.1. Непрерывность отображения в изолированной точке.

Лемма 5. *Пусть*

$$f : A \to B,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}^m,$$

и x_0 есть изолированная точка множества A. Тогда в изолированной точке x_0 области определения отображение f непрерывно.

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как точка x_0 изолированная точка множества A, то найдется $\delta > 0$, такое что в $U_\delta(x_0)$ нет других точек из A, кроме $x_0 \in A$, т.е. $A \cap U_\delta(x_0) = \{x_0\}$. Поэтому $f(A \cap U_\delta(x_0)) = \{f(x_0)\} \subset U_\varepsilon(f(x_0))$. Из выделенного синим цветом следует, по определению 100, что отображение f непрерывно в x_0. $\square$

4.1.2. Непрерывность отображения в предельной точке.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ и x_0 есть предельная точка множества A.

Теорема 53. *Если*

$$f : A \to B,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}^m$$

и x_0 есть предельная точка множества A, то для непрерывности f в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение равенства:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in A$ есть предельная точка множества A. Так как для каждого $\varepsilon > 0$ $f(x_0) \in U_\varepsilon(f(x_0))$, то имеет место

$$\left(f\left(A \cap U_\delta(x_0)\right) \subset U_\varepsilon(f(x_0))\right) \Longleftrightarrow \\ \left(f\left(A \cap U^*_\delta(x_0)\right) \subset U_\varepsilon(f(x_0))\right) \quad (4.1)$$

Тогда

$$(f - \text{ непрерывно в точке } x_0) \overset{100}{\iff}$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ f\,(A \cap U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))) \overset{(4.1)}{\iff}$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ f\left(A \cap U^*_\delta(x_0)\right) \subset U_\varepsilon(f(x_0))\right) \overset{52}{\iff}$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right).$$

$\square$

Замечание. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то последнее равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ можно переписать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Таким образом, если f непрерывна в точке x_0, то знак функции f и знак предельного перехода $\lim\limits_{x\to x_0}$ можно менять местами.

Это свойство непрерывного отображения часто используется при нахождении пределов отображения.

Теорема 54. *Пусть отображение*

$$f : A \to B,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}^m,$$

задано соотношением:

$$\forall x \in A : x \xrightarrow{f} \left(f^1(x), f^2(x), \dots, f^m(x)\right)^T \in B,$$

где $f^i : A \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, m.$ *Отображение* $f : A \to B$ *непрерывно в точке* $x_0 \in A$ *тогда и только тогда, когда каждая из функций* $f^i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, *непрерывна в точке* $x_0 \in A$.

Доказательство. а) В силу леммы 5, теорема очевидна в случаи когда x_0 есть изолированная точка множества A.

б) Пусть x_0 — предельная точка множества A и $(x_n), x_n \in A,$ — произвольная последовательность, сходящееся к точке x_0. Тогда

$$(f - \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{53}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right) \overset{54}{\Longleftrightarrow} (f(x_n) \to f(x_0)) \overset{5}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(f^i(x_n) \to f^i(x_0),\ i = 1, 2, \dots, m\right) \overset{53}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(f^i - \text{ непрерывны в точке } x_0,\ i = 1, 2, \dots, m.\right)$$

$\square$

4.2. Композиция непрерывных отображений.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ и $g : B \to C$, $C \subset \mathbb{R}^p$.

Теорема 55. *Пусть:*

1. $f : A \to B$ *непрерывна в точке* $x_0 \in A$;

2. $f(x_0) = y_0$;

3. $\varphi : B \to C$ *непрерывна в точке* $y_0 \in B$.

Тогда композиция $\varphi \circ f : A \to C$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Доказывать будем по определению непрерывности отображения в точке. Обозначим $z_0 = \varphi \circ f(x_0)$ и фиксируем произвольную $U_\varepsilon(z_0)$. $\boxed{\text{S}}$

$$\left.\begin{array}{r} \left(\varphi : A \to B \text{ непрерывно в точке } y_0 \in B\right) \overset{101}{\Longrightarrow} \\ \left(\exists \mu > 0, \text{ т.ч. } \forall y \in B \cap U_\mu(y_0) \ : \ \varphi(y) \in U_\varepsilon(\varphi(y_0))\right) \\ \left(f : A \to B \text{ непрерывно в точке } x_0 \in A\right) \overset{101}{\Longrightarrow} \\ \left(\exists \delta > 0, \text{ т.ч. } \forall x \in A \cap U_\delta(x_0) \ : \ f(x) \in U_\mu(f(x_0))\right) \\ (f(x_0) = y_0) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left(\forall x \in A \cap U_\delta(x_0) \ : \ \varphi \circ f(x) \in U_\varepsilon(\varphi \circ f(x_0))\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 101, что композиция отображений $\varphi \circ f$ непрерывна в точке x_0. $\square$

4.3. Непрерывность функции в предельной точке.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}$ и x_0 есть предельная точка множества A, а $x \in A$ произвольная точка. Обозначим через $\Delta x := x - x_0$ и будем называть *приращением аргумента*. Очевидно, что $(\Delta x \to 0) \iff (x \to x_0)$. Обозначим через $\Delta f(x_0; \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и будем называть *приращением функции f в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx*.

Теорема 56. *Пусть*

$$f : A \to B,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}$$

и x_0 *есть* *предельная* *точка множества* A.
Тогда для *непрерывности* *функции* f *в точке* x_0 *необходимо и достаточно выполнение равенства:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f\left(x_0; \Delta x\right) = 0.$$

Доказательство.

$$(f - \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{53}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f\,(x_0; \Delta x) = 0.\right) \quad \square$$

Итак, функция $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}$ непрерывна в предельной точке $x_0 \in A$ тогда и только тогда, когда бесконечно малое изменение аргумента вызывает бесконечно малое изменение функции.

4.4. Действия над непрерывными функциями многих переменных.

Пусть функции

$$f, g : A \to B,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}$$

и $x_0 \in A$ предельная точка множества A.

Замечание. В этом разделе мы изучим вопрос о непрерывности суммы, произведения и частного двух функций. Так как, в силу леммы 5, всякое отображение непрерывно в изолированной точке области определения, то нужно рассмотреть только случай когда $x_0 \in A$ предельная точка множества A. В этом же случаи теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций являются следствиями соответствующих теорем о пределе суммы, произведении и частном двух функций.

Теорема 57. *Если функции* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $x_0 \in A$, *то их сумма*

$$f + g : A \to \mathbb{R}$$

также непрерывна в точке $x_0 \in A$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}
(f \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{53}{\Longleftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right) \\
(g \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{53}{\Longleftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)\right)
\end{array}\right\}$$

$$\overset{30}{\Longrightarrow} \left(\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0).\right)$$

$$\overset{53}{\Longleftrightarrow} (f + g \text{ непрерывна в точке } x_0)\,.$$

$\square$

Теорема 58. *Если функции* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $x_0 \in A$, *то их произведение* $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *также непрерывно в точке* $x_0 \in A$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}(f \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{53}{\Longleftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right) \\ (g \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{53}{\Longleftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)\right)\end{array}\right\}$$

$$\overset{31}{\Longrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = f(x_0)\cdot g(x_0).\right)$$

$$\overset{53}{\Longleftrightarrow} (f\cdot g \text{ непрерывна в точке } x_0)\,.$$

$\square$

Лемма 6. *Пусть* $g : A \to B$ *непрерывна в точке* $x_0 \in A$ *и* $g(x_0) > 0$.
Тогда $g > 0$ *вблизи точки* x_0.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}(g \text{ непрерывна в точке } x_0)\\ (g(x_0) > 0)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$(g > 0 \text{ вблизи точки } x_0) \overset{73}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists U_\mu(x_0) \text{ т.ч. } \forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0) \; : \; g(x) > 0\right).$$

Положим $\varepsilon = \dfrac{g(x_0)}{2} > 0$.

$$(g \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{98}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists U_\mu(x_0) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0)\ :\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0)\ :\ g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0)\ :\ 0 < \frac{g(x_0)}{2} < g(x)\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 73, что функция $g > 0$ вблизи точки x_0. $\square$

Лемма 7. *Пусть* $g : A \to B$ *непрерывна в точке* $x_0 \in A$ *и* $g(x_0) < 0$.
Тогда $g < 0$ *вблизи точки* x_0.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}(g \text{ непрерывна в точке } x_0)\\ (g(x_0) < 0)\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$(g < 0 \text{ вблизи точки } x_0) \overset{74}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists U_\mu(x_0) \text{ т.ч. } \forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0) \ : \ g(x) < 0\right).$$

Положим $\varepsilon = -\dfrac{g(x_0)}{2} > 0$.

$$(g \text{ непрерывна в точке } x_0) \overset{98}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists U_\mu(x_0) \text{ такая, что } \forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0)\ :\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0)\ :\ g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall x \in A \cap U^*_\mu(x_0)\ :\ g(x) < \frac{g(x_0)}{2} < 0\right).$$

Из выделенного синим цветом следует, по определению 74, что функция $g < 0$ вблизи точки x_0. $\square$

Лемма 8. *Пусть* $g : A \to B$ *непрерывна в точке* $x_0 \in A$ *и* $g(x_0) \neq 0$.
Тогда $g \neq 0$ *вблизи точки* x_0.

Доказательство.
Если $g(x_0) > 0$, то, в силу Леммы 6, $g > 0$ вблизи точки x_0 и, следовательно, $g \neq 0$ вблизи точки x_0.
Если же $g(x_0) < 0$, то, в силу Леммы 7, $g < 0$ вблизи точки x_0 и, следовательно, $g \neq 0$ вблизи точки x_0. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $g : A \to B$ *непрерывна в точке* $x_0 \in A$.
Тогда функция g *ограниченная вблизи точки* x_0.

Доказательство.

$$\left(g - \text{ непрерывна в точке } x_0 \in A\right) \overset{53}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}\right) \overset{34}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(g - \text{ ограниченная вблизи точки } x_0\right).$$

$\square$

Теорема 59. *Пусть* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $x_0 \in A$ *и* $g(x_0) \neq 0$.
Тогда частное $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ *также непрерывно в точке* $x_0 \in A$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{lcl}
(f \text{ непрерывна в точке } x_0) & \overset{53}{\Longleftrightarrow} & \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right) \\
(g \text{ непрерывна в точке } x_0) & \overset{53}{\Longleftrightarrow} & \left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)\right) \\
(g(x_0) \neq 0) & \overset{8}{\Longrightarrow} & (g \neq 0 \text{ вблизи точки } x_0)
\end{array}\right\}$$

$$\overset{32}{\Longrightarrow} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)$$

$$\overset{53}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{f}{g} \text{ непрерывна в точке } x_0\right).$$

$\square$

4.5. Отображения непрерывные на множестве.

Пусть

$$f : A \to B, A \subset \mathbb{R}^n, \; B \subset \mathbb{R}^k.$$

Определение 102. Отображение $f : A \to B$ называется *непрерывным на множестве* $C \subset A$, если оно непрерывно в каждой точке множества $C \subset A$.

Определение 103. Отображение $f : A \to B$ называется *ограниченным на множестве* $C \subset A$, если $f(C) \subset \mathbb{R}^k$ ограниченное.

Теорема 60. (*Первая теорема Вейерштрасса*). *Если отображение*

$$f : K \to B,\ K \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^k$$

непрерывно на замкнутом, ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, *то оно ограничено на* K.

Доказательство этой теоремы опустим.

Определение 104. Образ отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ при отображении $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ называется *кривой в пространстве* $\mathbb{R}^k$ если:
1. отображение $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ непрерывно на $[a,b]$;

2. отображение $[a,b] \xrightarrow{\Gamma} ([a,b])$ биекция (взаимно однозначное).
При этом точки $\Gamma(a), \Gamma(b) \in \mathbb{R}^k$ называют *началом* и *концом кривой*, а отображение $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ называют *параметризацией кривой*.

Замечание. При движении по кривой мы не возвращаемся в ранее пройденные точки, т.е. не пересекаем свою траекторию нигде, кроме, быть может, её конца. При этом устанавливается естественный порядок: предыдущая точка $<$ последующей точки.

4.6. Непрерывные функции одной переменной.

Теорема 61. *(об обращении непрерывной функции в нуль). Пусть функция*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

непрерывна на сегменте $[a, b]$. *Если* $f(a)f(b) < 0$, *то существует* $c \in (a, b)$ *такая, что* $f(c) = 0$.

Доказательство. Для доказательства используем

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Делим отрезок $[a, b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков.

С этим отрезком поступаем теперь так же, как и с исходным отрезком $[a, b]$, т.е. делим его пополам.

Продолжаем этот процесс деления до тех пор пока либо на каком-то шаге получим точку деления $c \in (a, b)$, где $f(c) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. В последнем случае на основании леммы 4 о вложенных отрезках найдётся единственная точка $c \in (a, b)$, общая для всех этих отрезков.

По построению существуют две последовательности (x'_n) и (x''_n) концов вложенных отрезков такие, что

$$\left.\begin{array}{l}\big(f(x'_n) < 0\big)\\ \big(f(x''_n) > 0\big)\\ \big(\lim x'_n = \lim x''_n = c\big)\\ (f - \text{непрерывна в точке } c)\end{array}\right\} \overset{53}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\big(f(x'_n) < 0\big)\\ \big(\lim f(x'_n) = f(c)\big)\\ \big(f(x''_n) > 0\big)\\ \big(\lim f(x''_n) = f(c)\big)\end{array}\right\}$$

$$\overset{20}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l}(f(c) \le 0)\\ (f(c) \ge 0)\end{array}\right\} \Longrightarrow (f(c) = 0) \qquad \square$$

Теорема 62. (*Вторая теорема Вейерштрасса*). *Пусть непрерывная вещественная функция* f *задана на замкнутом, ограниченном множестве* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$. *Тогда* f *принимает на множестве* K *свое наибольшее значение и свое наименьшее значение.*

Доказательство теоремы опустим.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА

Посмотрите иллюстрацию к теореме Вейерштрасса.

Теорема 63. *Пусть* f *- непрерывная вещественная функция, определенная на* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Тогда образ отрезка* $[a, b]$ *при отображении* f *также есть отрезок* $[c, d]$, *где*

$$c = \min_{x \in [a,b]} f(x), \; d = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Доказательство. Фиксируем произвольное g, $c < g < d$. По теореме 62 существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = c = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(x_2) = d = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Отрезок I с концами x_1, x_2 лежит в сегменте $[a, b]$, поэтому функция $\varphi(x) = f(x) - g$ определена, непрерывна на I и, поскольку $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = (c - g)(d - g) < 0$, то, в силу теоремы 61, между x_1 и x_2 найдётся точка x_3, в которой $\varphi(x_3) = f(x_3) - g = 0$. Следовательно, $f(x_3) = g$. Из выделенного синим цветом следует утверждение теоремы. $\square$

4.7. Функции многих переменных непрерывные на множестве.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}$.

Теорема 64. (*Вторая теорема Вейерштрасса*). *Если функция $f : K \to B$, $K \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}$ непрерывна на замкнутом, ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^k$, то она принимает в некоторых точках K минимальное и максимальное из своих значений на K.*

Доказательство теоремы опустим.

Определение 105. Множество $A \subset \mathbb{R}^k$ называется *связным*, если для любой пары его точек существует кривая $\Gamma([a, b]) \subset A$ с концами в этих точках.

Определение 106. *Областью в пространстве* $\mathbb{R}^k$ называется открытое, связное множество.

Теорема 65. *Если функция* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^k$, *непрерывная в области* A, *принимает в точках* $x_1, x_2 \in A$ *значения разных знаков*, *то существует точка* $x_3 \in A$ *такая, что* $f(x_3) = 0$.

Доказательство. Пусть $\Gamma : [\alpha, \beta] \to A$ — непрерывная параметризация кривой с началом в точке $x_1 = \Gamma(\alpha)$ и концом в точке $x_2 = \Gamma(\beta)$. В силу связности A такая кривая существует. Функция $f \circ \Gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ как композиция непрерывных функций непрерывна на $[\alpha, \beta]$ (см. теорему 55). Поэтому, в силу теоремы 61, на отрезке $[\alpha, \beta]$ найдётся точка $\gamma \in [\alpha, \beta]$, в которой $f \circ \Gamma(\gamma) = 0$. Положим $x_3 = \Gamma(\gamma)$. Тогда $x_3 \in A$ и $f(x_3) = 0$. $\square$

Теорема 66. *Каждая элементарная функция непрерывна в своей естественной области определения.*

Доказательство.
Приведём схему доказательства теоремы:
1. Покажем, что все фундаментальные функции непрерывны в своих естественных областях определения.
2. В силу леммы 5, каждая элементарная функция непрерывна во всех изолированных точках своих естественных областей определения.
3. В силу теорем 55, 57, 58 и 59, каждая элементарная функция непрерывна во всех предельных точках своих естественных областей определения.
Подробное доказательство предлагаем провести самостоятельно.

□

4.7.1. Равномерная непрерывность.

Пусть $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}$, f непрерывна на A. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in A$ выберем $\delta(x) > 0$ так, чтобы $f\left(U_{\delta(x)}(x)\right) \subset U_\varepsilon(f(x))$.

Найдется ли δ, подходящее сразу для всех x? Ответ – Есть примеры когда δ, подходящее сразу для всех $x \in A$, не существует, но также есть примеры когда δ, подходящее сразу для всех $x \in A$, удаётся найти.

Определение 107. Пусть

$$f : A \to B,\ A \subset \mathbb{R}^k,\ B \subset \mathbb{R}.$$

Говорят, что f *равномерно непрерывна на множестве A*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x_1, x_2 \in A$, и $d(x_1, x_2) < \delta$: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Лемма 10. *Каждая равномерно непрерывная на множестве A функция непрерывна на множестве A.*

Это следует непосредственно из определения равномерной непрерывности.

Теорема 67. *(теорема Гейне-Кантора).* *Вещественная функция* $\mathrm{f} : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$, *непрерывная на замкнутом, ограниченном множестве* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$, *равномерно непрерывна на* K.

Доказательство теоремы опустим.

4.7.2. Непрерывность обратной функции.

Теорема 68. *Пусть функция* f *есть вещественная функция, строго монотонная и непрерывная на отрезке* $[a, b]$. *Тогда обратная функция* f^{-1} *строго монотонна и непрерывна на отрезке* $[c, d] = f([a, b])$.

Доказательство теоремы опустим.

4.7.3. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

Теорема 69. *Пусть* f *- вещественная функция, определенная на отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *и* $x_0 \in (a, b)$ *внутренняя точка множества* $[a, b]$.

Тогда для того, чтобы f *была непрерывна в точке* x_0, *необходимо и достаточно выполнение трех условий:*

1. Существует левосторонний предел $\lim\limits_{x \to x-0} f(x)$,

2. Существует правосторонний предел $\lim\limits_{x \to x+0} f(x)$,

3. Оба односторонних предела равны $f(x_0)$.

Эта теорема является следствием теоремы 52

Определение 108. Пусть функция

$$f : A \to B,\ A, B \subset \mathbb{R}$$

и A' - предельные точки множества A.
Конечная точка $x_0 \in A'$ называется *точкой разрыва функции* f, если:
1. Функция не определена в точке x_0, или
2. Функция определена в точке x_0, но не является непрерывной в точке x_0.

Заметим, что определение 108 не является отрицанием к утверждению “функция $f : A \to B, A, B \subset \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in A$”. Понятие непрерывности функции в точке определено только для точек из области определения функции. К точкам разрыва функции одной переменной относят также конечные предельные точки области определения функции, в которых значения функции не заданы .

Отметим, что график функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывной на сегменте $[a,b]$ есть непрерывная кривая в пространстве $\mathbb{R}^2$, соединяющая две точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$.

ФУНКЦИЯ НЕПРЕРЫВНАЯ НА СЕГМЕНТЕ

Последовательность Ваших действий:

- "continuity"
- "click for a problem"
- подберите "a"так чтобы функция f была непрерывной всюду.

Определение 109. Пусть x_0 - точка разрыва функции $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Если существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

то x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. S

Определение 110. Пусть x_0 - точка разрыва функции $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

не существует или равен ∞ $(+\infty, -\infty)$, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

S

Определение 111. Пусть x_0 - точка разрыва функции $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Если существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x), \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то x_0 называется *точкой устранимого разрыва функции*.

S

Таким образом, точка устранимого разрыва характеризуется тем, что существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, но $a \neq f(x_0)$ или $f(x_0)$ неопределенно и достаточно положить

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in A \setminus \{x_0\}, \\ a & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

как мы получим непрерывную в точке x_0 функцию $g : A \to \mathbb{R}$.

Замечание 1. Если x_0 - точка разрыва функции, то x_0 - предельная точка множества A. Однако может случится, что существует $U_\mu^*(x_0)$ такая, что все точки множества $A \cap U_\mu^*(x_0)$ лежат по одну сторону от точки x_0. В этом случае рассматривается для каждого определения 109, 110, 111 только один из указанных в них односторонних пределов.

Пример 81. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Определить тип точек разрыва функции.

Пример 81 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Определить тип точек разрыва функции.

Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$. Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 81 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Определить тип точек разрыва функции.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\operatorname{dom} \sin = \mathbb{R}$. Следовательно, только в тех точках $\mathbb{R}$, где знаменатель в формуле, задающей функцию f, обращается в нуль, нельзя воспользоваться формулой для вычисления значения функции.

Шаг 2. Найдите конечные предельные точки множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не принадлежащие этому множеству.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 81 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Определите тип точек разрыва функции.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Шаг 2. $x_0 = 0$.

Единственной конечной предельной точкой множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не принадлежащей этому множеству, является точка $x_0 = 0$. По определению 108 эта точка является единственной точкой разрыва функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Шаг 3. Определите тип точки разрыва $x_0 = 0$ функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Перейдите на следующую страницу.

Пример 81 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Шаг 2. $x_0 = 0$.
Шаг 3. Точка $x_0 = 0$ есть точка устранимого разрыва функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

В силу первого замечательного предела, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, и, следовательно, по определению 111, точка $x_0 = 0$ есть точка устранимого разрыва функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Пример 82. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Определить тип точек разрыва функции.

Пример 82 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.
Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 82 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Обозначим через $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $f = \operatorname{arctg} \circ \varphi$ и $\operatorname{dom} \operatorname{arctg} = \mathbb{R}, \operatorname{dom} \varphi = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Следовательно, только в тех точках $\mathbb{R}$, где знаменатель в формуле, задающей функцию f, обращается в нуль, нельзя воспользоваться формулой для вычисления значения функции.

Шаг 2. Найдите конечные предельные точки множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не принадлежащие этому множеству.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 82 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Шаг 2. $x_0 = 0$.

Единственной конечной предельной точкой множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не принадлежащей этому множеству, является точка $x_0 = 0$. По определению 108 эта точка является единственной точкой разрыва функции $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Шаг 3. Определите тип точки разрыва $x_0 = 0$ функции $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 82 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Шаг 2. $x_0 = 0$.
Шаг 3. Точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва 1-го рода (неустранимого) функции $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Найдём односторонние пределы (см. раздел 3.2.12): $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, по определению 109, точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва 1-го рода (неустранимого) функции $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Пример 83. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Определить тип точек разрыва функции.

Пример 83 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$. Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 83 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, так как только в тех точках $\mathbb{R}$, где знаменатель в формуле, задающей функцию f, обращается в нуль, нельзя воспользоваться формулой для вычисления значения функции.

Шаг 2. Найдите конечные предельные точки множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ не принадлежащие этому множеству.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 83 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Шаг 2. $x_0 = 1$.

Единственной конечной предельной точкой множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ не принадлежащей этому множеству, является точка $x_0 = 1$. По определению 108 эта точка является единственной точкой разрыва функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Шаг 3. Определите тип точки разрыва $x_0 = 1$ функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 83 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Шаг 2. $x_0 = 1$.
Шаг 3. Точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва 2-го рода функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
Найдём односторонние пределы:
$\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$. Следовательно, по определению 110, точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва 2-го рода функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Пример 84. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Определить тип точек разрыва функции.

Пример 84 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.
Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 84 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Определить тип точек разрыва функции.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\operatorname{dom} \sin = \mathbb{R}$. Следовательно, только в тех точках $\mathbb{R}$, где знаменатель в формуле, задающей функцию f, обращается в нуль, нельзя воспользоваться формулой для вычисления значения функции.

Шаг 2. Найдите конечные предельные точки множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не принадлежащие этому множеству.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 84 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Определите тип точек разрыва функции.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Шаг 2. $x_0 = 0$.

Единственной конечной предельной точкой множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не принадлежащей этому множеству, является точка $x_0 = 0$. По определению 108 эта точка является единственной точкой разрыва функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Шаг 3. Определите тип точки разрыва $x_0 = 0$ функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 84 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Определите тип точек разрыва функции.

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Шаг 2. $x_0 = 0$.

Шаг 3. Точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва второго рода функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Покажем, по определению Гейне, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ не существует и, следовательно, по определению 110, точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва второго рода функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Действительно, последовательности $x_n^* = \frac{1}{n\pi}$ и $x_n^{**} = \frac{2}{(1+4n)\pi}$ сходятся к нулю, но $f(x_n^*) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$, а $f(x_n^{**}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$.

ТОЧКА РАЗРЫВА ВТОРОГО РОДА

Движком “zoom” изменяйте масштаб по оси абсцисс.

Пример 85. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{3x^3-3}, & \text{если } x < 1, \\ \\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определить тип точек разрыва функции.

Пример 85 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{3x^3-3}, & \text{если } x < 1, \\ \frac{x^3-1}{x^2-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.

Шаг 1. Функция f – кусочно - элементарная функция, определённая на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. В силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция f непрерывна на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$ элементарности функции f. Найдите конечные предельные точки области определения функции f не принадлежащие этому множеству.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 85 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{3x^3-3}, & \text{если } x < 1, \\ \frac{x^3-1}{x^2-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $x_0 = 1$.

Единственной конечной предельной точкой множества $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, не принадлежащей этому множеству, является точка $x_0 = 1$. По определению 108 эта точка является единственной точкой разрыва функции f.

Шаг 2. Определите тип точки разрыва $x_0 = 1$ функции f.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 85 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{3x^3-3}, & \text{если } x < 1, \\ \frac{x^3-1}{x^2-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определите тип точек разрыва функции.

Решение.

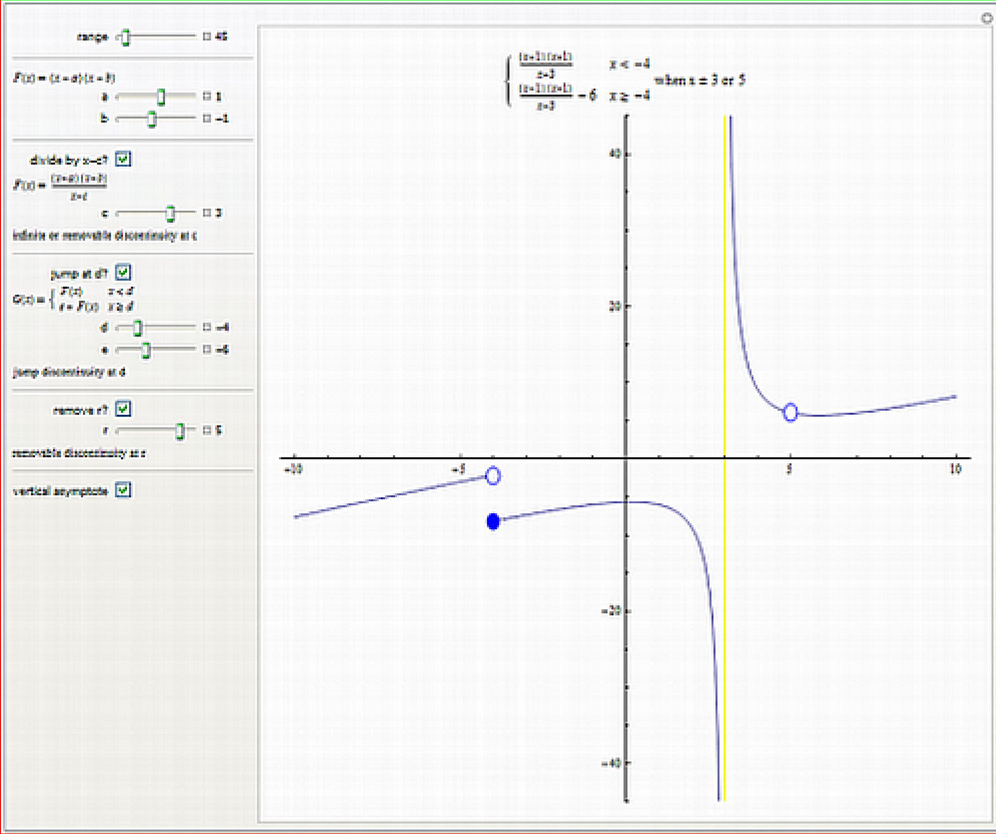
Шаг 1. $x_0 = 1$.

Шаг 2. Точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва 1-го рода функции f.

Найдём односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\sin(x-1)}{3x^3-3} \overset{3.20.1.1}{=} \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{3(x^2+x+1)} = \frac{1}{9}$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x^3-1}{x^2-1} \overset{3.19.4.1}{=} \lim\limits_{x\to 1+0} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$. Следовательно, по определению 109, точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва 1-го рода функции f.

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ



Пример 86. Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Определить тип точек разрыва функции.

Пример 86 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}.$$

Определить тип точек разрыва функции.
Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.
Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 86 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Определить тип точек разрыва функции.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \{x_k = \frac{1}{k}, k = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin^2 \frac{\pi}{x} = 0\} =$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{x} = n\pi, n \in \mathbb{Z}\} = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Следовательно, $\operatorname{dom} f$ – множество изолированных точек.

Шаг 2. Найдите конечные предельные точки множества $\operatorname{dom} f = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$ не принадлежащие этому множеству.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 86 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}.$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$.
Шаг 2. $x_0 = 0$.

Единственной конечной предельной точкой множества $\operatorname{dom} f = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$ не принадлежащей этому множеству, является точка $x_0 = 0$. По определению 108 эта точка является единственной точкой разрыва функции $f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}$.

Шаг 3. Определите тип точки разрыва $x_0 = 0$ функции $f(x) = \sqrt{-\sin^2\frac{\pi}{x}}$.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 86 Найти точки разрыва функции

$$f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Определите тип точек разрыва функции.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$.
Шаг 2. $x_0 = 0$.
Шаг 3. Точка $x_0 = 0$ есть точка устранимого разрыва функции $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}$.

Так как $\forall (x_n), x_n \in \operatorname{dom} f \ : \ f(x_n) = 0$, то

$$\lim_{x_n \to 0} f(x_n) = 0,$$

и, следовательно, по определению 111, точка $x_0 = 0$ есть точка устранимого разрыва функции $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{x}}$.

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{ax^n + b}{cx^m + d}$$

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{|\sin(ax^n + b)|}{cx^m + d}$$

Найти точки разрыва функции:

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{\sin(ax^n + b)}{cx^m + d}$$

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{\sin(ax^n + b)}{px^2 + qx + c}$$

Найти точки разрыва функции:

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{ax^n + b}{|cx^m + d|}$$

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{|ax^n + b|}{cx^m + d}$$

Найти точки разрыва функции:

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{\sin(ax^n + b)}{|cx^m + d|}$$

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{\sin(ax^n + b)}{|px^2 + qx + c|}$$

Найти точки разрыва функции:

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = e^{\frac{c}{ax^n+b}}$$

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{|\sin(ax^n+b)|}{px^2+qx+c}$$

Найти точки разрыва функции:

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{c}{ax^n+b}$$

ТРЕНАЖЁР

$$f(x) = \frac{|\arcsin(ax^n+b)|}{px^2+qx+c}$$

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5.1. Дифференцируемость и дифференциал функции.

Пусть задана $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in A$ предельная точка множества A. Дадим аргументу x приращение Δx так чтобы $x_0 + \Delta x \in A$. Обозначим $\Delta f(x_0, \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и будем называть *приращением функции f в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx*.

Определение 112. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in A$, предельной для множества A, если существует линейная относительно приращения аргумента функция $a \cdot \Delta x$ такая, что приращение $\Delta f(x_0, \Delta x)$ функции f можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = a \cdot \Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0. \quad (5.1)$$

Линейная функция $a \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом функции* f *в точке* $x_0 \in A$ и обозначается $df(x_0)$.

Замечание 1. Функция f дифференцируема в точке $x_0 \in A$, если изменение её значений в окрестности исследуемой точки линейно с точностью до поправки бесконечно малой по сравнению с величиной Δx смещения от точки x_0.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

Этот микроскоп дифференцирования позволяет Вам графически проверить дифференцируемость функции в точке x_0.
Движком "x_0" выберите любую точку x_0 на графике функции f.
Если при увеличении движком "zoom" Вы видите, что в окрестности точки x_0 график функции f походит на прямую, то функция f дифференцируема в точке x_0, иначе функция f не является дифференцируемой в этой точке.
Вы можете визуально найти точки в которых функция $f(x) = |x^2 + x|$ дифференцируема, а также точки в которых она не является дифференцируемой.

Соотношение (5.1) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = a + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{5.2}$$

Определение 113. Если существует конечный предел отношения приращения функции f в точке $x_0 \in A$, предельной для множества A, вызванного приращением аргумента Δx, к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю, то он называется *производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Итак, по определению 113,

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \in \mathbb{R}.}$$

Теорема 70. *Функция* $f : A \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x_0 \in A$, *предельной для множества* A, *тогда и только тогда, когда функция* f *имеет производную в точке* $x_0 \in A$, *причём*

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.}$$

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in A$ и x_0 придадим приращение Δx так чтобы $x_0 + \Delta x \in A$.

Необходимость.

$$(f \text{дифференцируема в точке } x_0) \overset{112}{\Longrightarrow}$$
$$\left(\begin{array}{c} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = a\cdot\Delta x + o(\Delta x) \\ \text{при } \Delta x \to 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = a + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0\right) \Longrightarrow$$
$$\left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = a\right) \overset{113}{\Longrightarrow} (\exists f'(x_0) = a) \overset{112}{\Longrightarrow}$$
$$(df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x)$$

Достаточность.

$$\left(\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}\right) \overset{113}{\Longrightarrow} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\right) \overset{28}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),\ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0\right) \Longrightarrow$$

$$\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

$$\alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0\big) \overset{112}{\Longrightarrow}$$

$$\big(f \text{ дифференцируема в точке } x_0 \text{ и } df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x\big)$$

$\square$

Определение 114. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой на множестве* A, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Если $f(x) \equiv x$, то $f'(x) \equiv 1$ и

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной совпадает с её приращением.
Учитывая это равенство, получаем

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx.}$$

Эта форма записи дифференциала называется *инвариантной формой записи дифференциала*. Запись дифференциала в виде

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

не является инвариантной.

5.2. Производная функции.

Пусть задана $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ **и** $x_0 \in A$ предельная точка множества A. Дадим аргументу x приращение Δx так чтобы $x_0 + \Delta x \in A$. Обозначим $\Delta f(x_0, \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и будем называть *приращением функции f в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx*.

Определение 115. Если существует конечный предел отношения приращения функции f в точке x_0, вызванного приращением аргумента Δx, к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю, то он называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Итак, по определению 115,

$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \in \mathbb{R}.}$$

Как следует из определения 115, производная функции f в точке x есть число, зависящее от рассматриваемого значения x (но не зависящее от Δx). Вычисляя $f'(x)$ в различных точках $x \in A$, мы будем получать, вообще говоря, различные числа. Таким образом, производная функции f есть тоже функция, определённая на $B \subset A$ (В некоторых точках $x \in A$ производная может не существовать).

ПРОИЗВОДНАЯ

Нажмите кнопку “tangent line”. Выберите одну из функций “polynomial”, “trigonometric” или “logarithmic”. Вы видите график выбранной функции.

Нажмите кнопку “first derivative”. Появится график производной.
Перемещайте красный маркер вдоль оси абсцисс.

Итак,

$$f' : B \to \mathbb{R},\ B \subset A \subset \mathbb{R}.$$

Пусть $g \in A$ предельная точка множества A. Обозначим через $x := g + \Delta x \in A$. Тогда, если существует конечный предел, то

$$f'(g) := \lim_{x \to g} \frac{f(x) - f(g)}{x - g}. \tag{5.3}$$

Соотношение (5.3), в силу теоремы 28, можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{f(x) - f(g)}{x - g} = f'(g) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to g$, что в свою очередь равносильно соотношению

$$f(x) - f(g) = f'(g)(x - g) + o(x - g)$$
$$\text{при } x \to g, x \in A, \quad (5.4)$$

то есть дифференцируемости функции f в точке g.

Замечание 1. Обозначение производной $\frac{df(x)}{dx}$ принадлежит Лейбницу. Позднее Лагранж предложил обозначать производную символом $f'(x)$. В механике, кроме указанных символов, для обозначения производной от функции $\varphi(t)$ по времени t используется символ $\dot{\varphi}(t)$.

Пример 87. Показать, по определению 115, что, если $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\forall x \in \operatorname{dom} f : (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Решение. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Тогда

$$f'(x_0) \overset{115}{:=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right]}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.20.2.4}{=}$$

$$= x_0^{\alpha - 1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \alpha \cdot x_0^{\alpha - 1}.$$

Пример 88. Показать, по определению 115, что, если $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f = \mathbb{R} : \ (a^x)' = a^x \ln a.}$$

Посмотрите графики функций f и f'

Решение. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f'(x_0) \overset{115}{:=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = a^{x_0} \ln a.$$

Частный случай

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x.}$$

Пример 89. Показать, по определению 115, что, если $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \; : \; (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.}$$

Решение. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (0, +\infty)$. Тогда

$$f'(x_0) \overset{115}{:=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{10.9}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.20.2.2}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\frac{\Delta x}{x_0} \cdot x_0} = \frac{\log_a e}{x_0} \overset{10.10}{=} \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Частный случай

$$\forall x \in (0, +\infty)\ :\ (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ

Нажмите кнопки “tangent line” и “logarithmic”. Вы видите график логарифмической функции.
Нажмите кнопку “first derivative”. Появится график производной.
Перемещайте красный маркер вдоль оси абсцисс.

Пример 90. Показать, по определению 115, что, если $f(x) = \log_a |x|$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ (\log_a |x|)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.}$$

Решение. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При $|\Delta x| < |x_0|$ имеем

$$\Delta f(x_0, \Delta x) \overset{10.9}{=} \log_a \left| 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right| = \\ = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right). \quad (5.5)$$

Тогда

$$f'(x_0) \overset{115}{:=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a |x_0 + \Delta x| - \log_a |x_0|}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(5.5)}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.20.2.2}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\frac{\Delta x}{x_0} \cdot x_0} = \frac{\log_a e}{x_0} \overset{10.10}{=} \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Частный случай

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;:\; (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Пример 91. Показать, по определению 115, что

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x.}$$

Посмотрите графики функций f и f'

Решение. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \operatorname{dom} \sin = \mathbb{R}$. Тогда

$$\sin'(x_0) \overset{115}{:=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{10.23}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.20.1.1}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \overset{66 \text{ и } \bigstar}{=} \cos x_0.$$

Пример 92. Показать, по определению 115, что

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : (\cos x)' = -\sin x.}$$

Посмотрите графики функций f и f'

Решение. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \operatorname{dom}\cos = \mathbb{R}$. Тогда

$$\cos'(x_0) \overset{115}{:=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \cos(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{10.24}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{3.20.1.1}{=}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \overset{66 \text{ и } \bigstar}{=} -\sin x_0.$$

5.2.1. Касательная к кривой.

Пусть $k = 2$ или 3 и точка $M \in \mathbb{R}^k$ фиксированы. Пусть, далее, задана последовательность $(M_n), M_n \in \mathbb{R}^k \setminus \{M\}$ сходящееся к $M \in \mathbb{R}^k$. Обозначим через MM_n прямую,проходящую через точки M и M_n.

S

Определение 116. Если существует прямая MT, проходящая через точки M и T, угол между которой и прямыми MM_n стремится к нулю, то прямая MT называется *предельным положением прямых* MM_n.

S

Пусть теперь M - некоторая точка кривой L. Возьмём на этой кривой любую другую точку N, отличную от точки M.

Определение 117. Прямая, проходящая через точки $M, \mathrm{N} \in \mathrm{L}, M \neq \mathrm{N}$, называется *секущей по отношению к кривой* L.

Определение 118. Если существует прямая MT, являющаяся предельным положением секущих MM_n для каждой последовательности точек (M_n), $M_n \in L$, сходящейся к точке $M \in L$, то прямая MT называется *касательной к кривой* L *в точке* $M \in L$.

S

КАСАТЕЛЬНАЯ

Замечание. Следует иметь в виду, что не в каждой точке M кривой существует касательная. Такой случай изображён на рис. 5.3.

S

Прямая MT является предельным положением секущих MM_n, а прямая MT^* является предельным положением секущих MM_n^*. В точке $M \in L$ касательную к кривой L провести нельзя.

Определение 119. Если существует прямая MT, являющаяся предельным положением секущих MM_n для каждой последовательности точек (M_n), $M_n \in L$, $M_n < M$, сходящейся к точке $M \in L$, то прямая MT называется *левосторонней касательной к кривой* L *в точке* $M \in L$.

Определение 120. Если существует прямая MT, являющаяся предельным положением секущих MM_n для каждой последовательности точек (M_n), $M_n \in L$, $M < M_n$, сходящейся к точке $M \in L$, то прямая MT называется *правосторонней касательной к кривой* L *в точке* $M \in L$.

ПРАВОСТОРОННЯЯ КАСАТЕЛЬНАЯ

5.2.2. Геометрический смысл производной и дифференциала.

Пусть функция $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ непрерывная на A и имеет производную в точке $x_0 \in A$. Построим график функции f. Фиксируем произвольную последовательность (Δx_n), $\Delta x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ сходящуюся к нулю и такую, что точки $M_0\,(x_0, f(x_0))$ и $M_n\,(x_0 + \Delta x_n, f(x_0 + \Delta x_n))$ принадлежат графику функции f.

Обозначим через φ_n угол наклона секущей M_0M_n к оси Ox. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{f(x_0 + \Delta x_n) - f(x_0)}{\Delta x_n}.$$

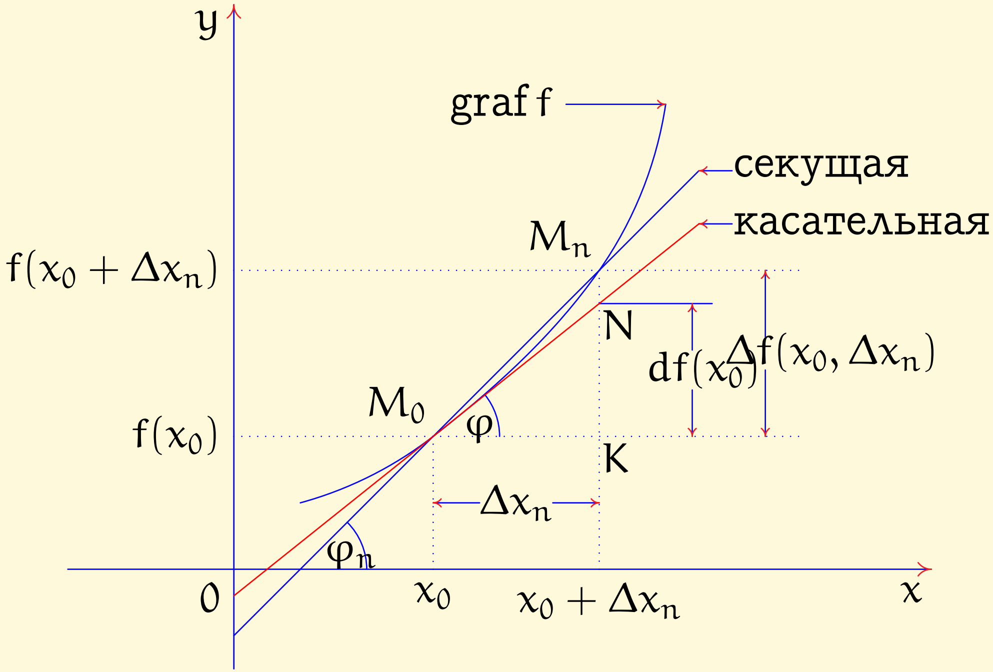


Рис. 5.4 Геометрический смысл производной

Так как функция f имеет производную в точке x_0, то, по определению Гейне, существует

$$\lim \operatorname{tg} \varphi_n = \lim \frac{f(x_0 + \Delta x_n) - f(x_0)}{\Delta x_n} = f'(x_0).$$

Обозначим через $\varphi, 0 \le \varphi < \pi$, угол, тангенс которого равен $f'(x_0)$. Следовательно, прямая проходящая через точку M_0 с углом наклона φ к оси Ox, является предельным положением секущих M_0M_n, т.е. касательной к графику функции f в точке $M_0\,(x_0, f(x_0))$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Серая прямая, проходящая через фиксированную красную и подвижную чёрную точки на графике функции, это секущая графика функции.

Протащите мышкой, с нажатой левой кнопкой, чёрную точку вдоль кривой. Обратите внимание: когда чёрная точка близка к красной, то тангенс угла наклона секущей близок к значению производной $f'(1)$.

Итак, если функция f имеет производную в точке x_0, то существует касательная к графику функции f в точке $M_0\,(x_0, f(x_0))$ и $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной к оси Ox (см. рис.5.4).

ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ

Иллюстрация показывает связь между функцией и её производной на двух отдельных графиках. Зелёный вертикальный отрезок изображает значение тангенса наклона касательной в красной точке на графике функции.

Перемещая движок “x_0” Вы рисуете график производной функции (справа), график которой изображён слева.

Вычисляя NK как катет прямоугольного треугольника NKM_0, найдём

$$NK = NM_0 \cdot \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0).$$

Итак, дифференциал $df(x_0)$ есть приращение ординаты касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ соответствующее приращению аргумента Δx (см. рис. 5.4) и дифференциал $df(x_0)$ отличается от приращения $\Delta f(x_0, \Delta x)$ на величину бесконечно малую более высокого порядка чем Δx при $\Delta x \to 0$.

ПРОИЗВОДНАЯ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером.

Нажмите на кнопку first derivative (первая производная). На рисунке появится график первой производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

5.2.3. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ непрерывная на A. Графиком функции f является плоская кривая. Фиксируем точку $M_0(x_0, f(x_0))$ на кривой. Пусть кривая в точке M_0 имеет не вертикальную касательную. Напишем уравнение этой касательной.

Фиксируем произвольную последовательность $(\Delta x_n), \Delta x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ сходящуюся к нулю и такую, что точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_n(x_0 + \Delta x_n, f(x_0 + \Delta x_n))$ принадлежат графику функции f.

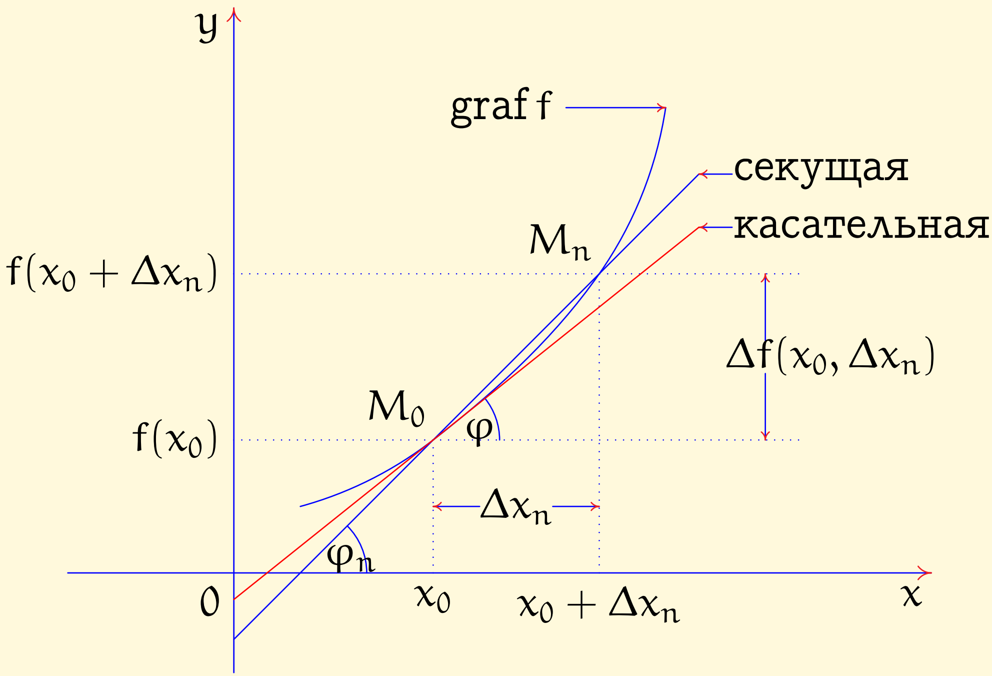


Рис. 5.5 Касательная к графику функции

Обозначим через φ_n угол наклона секущей M_0M_n к оси Ox (см. рис. 5.5). Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{f(x_0+\Delta x_n) - f(x_0)}{\Delta x_n}.$$

Так как кривая в точке M_0 имеет не вертикальную касательную, то существует $\lim \varphi_n = \varphi, 0 \le \varphi < \pi, \varphi \ne \frac{\pi}{2}$, и φ - угол наклона касательной к оси Ox.

Значит существует конечный предел

$$\lim \frac{f(x_0+\Delta x_n) - f(x_0)}{\Delta x_n} = \lim \operatorname{tg}\varphi_n = \operatorname{tg}\varphi$$

и, следовательно, по определению Гейне, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$.

Итак, если в точке $M_0 \in \operatorname{graf} f$ имеется не вертикальная касательная, то функция f имеет в точке x_0 производную и уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.6}$$

Определение 121. *Нормалью к плоской кривой* L *в точке* $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{L}$ называется прямая, проходящая через точку $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{L}$ перпендикулярно касательной к кривой L в этой точке.

Уравнение нормали к graff в точке $M_0(x_0, f(x_0)) \in$ graff имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

если $f'(x_0) \neq 0$. Последнее уравнение можно переписать в канонической форме

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{-1}. \qquad (5.7)}$$

5.2.4. Односторонние производные функции.

Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$.

Определение 122. Пусть x_0 - предельная точка множества $A_-(x_0)$. Если существует конечный предел слева

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется *левой производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$, т.е.

$$\boxed{f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Определение 123. Пусть x_0 - предельная точка множества $A_+(x_0)$. Если существует конечный предел справа

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется *правой производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$, т.е.

$$\boxed{f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Легко показать, что левая (правая) производная функции f существует в точке x_0 тогда и только тогда, когда в точке $M_0\,(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{graf} f$ можно провести левую (правую) касательную и левая (правая) производная функции f в точке x_0 совпадает с угловым коэффициентом левой (правой) касательной к графику функции f в точке $M_0\,(x_0, f(x_0))$.

В силу теоремы 52 об односторонних пределах имеет место следующая

Теорема 71. *Пусть* $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ *и* x_0 - *внутренняя точка множества* A. *Тогда для того, чтобы существовала* $f'(x_0)$, *необходимо и достаточно выполнение трех условий:*

1. Существует $f'_-(x_0)$;

2. Существует $f'_+(x_0)$;

3. $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Определение 124. Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ непрерывна на A и x_0 - внутренняя точка множества A. Если существуют $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то точка $M_0(x_0, f(x_0)) \in$ graff называется *угловой точкой графика функции* f (см. рис. 5.6).

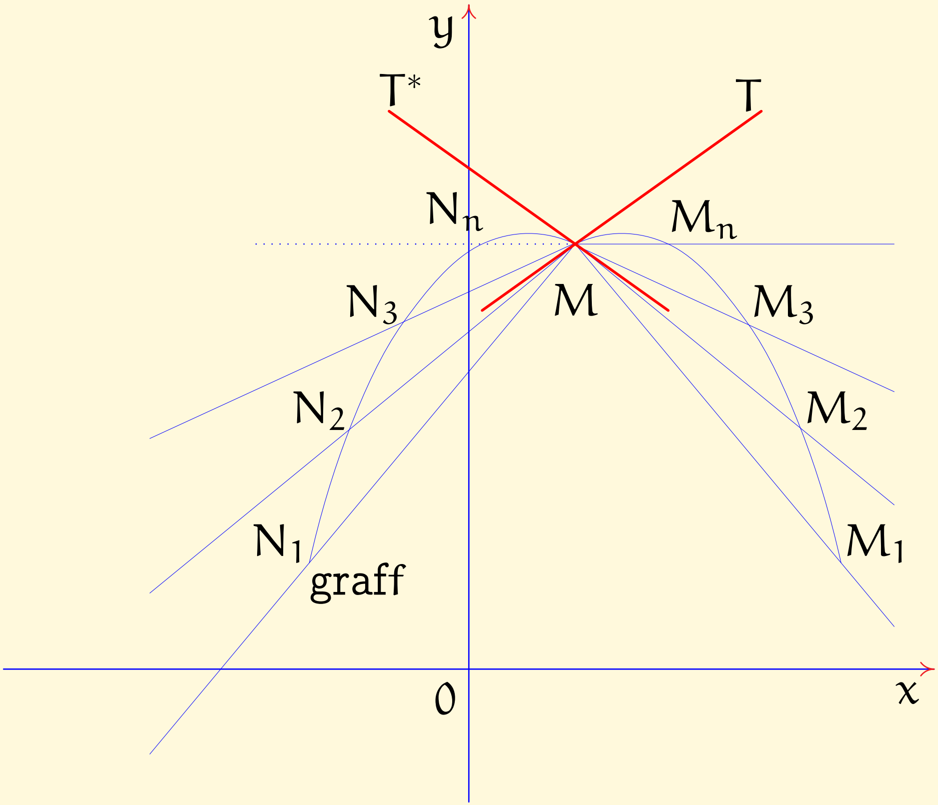


Рис. 5.6 Точка M – угловая точка graff

5.2.5. Механический смысл производной и дифференциала.

Пусть некоторая материальная точка движется прямолинейно и задан закон её движения $s = s(t)$, то есть известно расстояние s точки от некоторого начала отсчёта в каждый момент времени t.

Итак, в момент времени t_0 пройденное расстояние равно $s(t_0)$, а в момент $t_0 + \Delta t$ расстояние равно $s(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ точка прошла путь $\Delta s(t_0, \Delta t) := s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Отношение $\frac{\Delta s(t_0, \Delta t)}{\Delta t}$ называют *средней скоростью* движения точки за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Средняя скорость движения на различных промежутках различна. Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее средняя скорость движения “характеризует” это движение в момент времени t_0. Как определить мгновенную скорость $v(t_0)$ точки в момент времени t_0?

Из первого закона Ньютона следует, что реальная механическая система за малый промежуток времени мало меняет свои параметры. В частности, скорость $v(t)$ точки во все моменты времени t, близкие к моменту t_0, должна быть близка к значению $v(t_0)$. Но в таком случае само движение на промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ должно мало отличаться от равномерного движения со скоростью $v(t_0)$, причём тем меньше отличаться, чем меньше Δt.

Значит

$$s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = v(t_0) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \quad (5.8)$$

Из соотношения (5.8) величина $v(t_0)$ находится однозначно:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}, \quad (5.9)$$

поэтому как соотношение (5.8), так и равносильное ему соотношение (5.9) можно принять за определения величины $v(t_0)$ - *мгновенной скорости точки в момент времени* t_0. Тогда, из определения производной следует, что $v(t_0) = s'(t_0)$.

Итак, производная функции характеризует скорость изменения функции в рассматриваемой точке, а дифференциал функции доставляет наилучшую линейную аппроксимацию приращения функции в окрестности рассматриваемой точки. Более того, функции, описывающие движение реальной механической системы, предполагаются допускающими такую линейную аппроксимацию.

5.2.6. Бесконечная производная функции.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ **и** x_0 предельная точка множества A.

Напомним, что производная функции f, а также односторонние производные функции f, в точке x_0 есть число и дифференцируемость функции в точке эквивалентна наличию производной в этой точке.

В случае, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty,$$

то, по определению 115, в точке x_0 производной нет, но в точке $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{graff}$ можно провести касательную к графику функции f, которая параллельна оси Oy.

Иногда бывает удобно рассматривать так называемые "*бесконечные производные*", но их использование как правило заранее оговаривается.

Определение 125. Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \ (-\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 существует *бесконечная производная*, которая обозначается также $f'(x_0)$.

Определение 126. Если

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty\ (-\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 существует *бесконечная левая производная*, которая обозначается также $f'_-(x_0)$.

Определение 127. Если

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty\ (-\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 существует *бесконечная правая производная*, которая обозначается также $f'_+(x_0)$.

Наличие бесконечной (левой, правой) производной функции f в точке x_0 означает, что к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ можно провести вертикальную касательную (левую вертикальную касательную, правую вертикальную касательную), но функция f недифференцируемая в точке x_0..

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только конечные производные.

ФУНКЦИЯ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ В ТОЧКЕ

Демонстрация показывает графики функций (кроме $x^2 \sin\frac{1}{x}$) недифференцируемых в нуле. Изменяя t, Вы можете увидеть, что в большинстве примеров, секущии не имеют конечного предела при $t \to 0$.

Интересное сравнение:

- функция $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ непрерывна, но недифференцируема в нуле;
- функция $g(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ непрерывна и дифференцируема в нуле;

5.3. Необходимое условие существования производной.

Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$.

Теорема 72. *Если* $f : A \to B$ *имеет производную в точке* $x \in A$, *то функция* f *непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Фиксируем произвольную предельную точку $x_0 \in A$ и придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in A$.

$$(\exists f'(x_0)) \overset{115}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) \right) \overset{28}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \\ \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$(\Delta f(x_0, \Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \right) \overset{53}{\Longleftrightarrow}$$

$$(f \text{ непрерывна в предельной точке } x_0) \qquad \Box$$

$$\boxed{f \text{ непрерывна в предельной точке } x_0 \in A} \qquad \boxed{\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f\,(x_0, \Delta x) = 0} \quad \Longleftarrow \quad \boxed{\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) \in \mathbb{R}}$$

Замечание. Из непрерывности функции в точке не следует существование производной функции в этой точке.

Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не является дифференцируемой в этой точке (см. рис. 5.7).

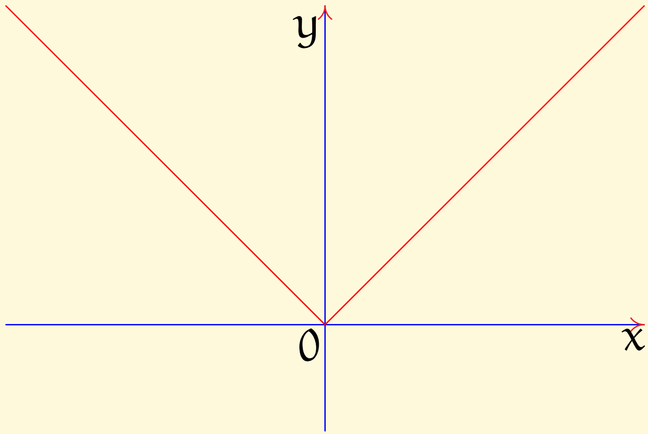


Рис. 5.7 График функции $f(x) = |x|$

Отметим, что график функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируемой на сегменте $[a, b]$ есть непрерывная гладкая кривая в пространстве $\mathbb{R}^2$, соединяющая две точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ НА СЕГМЕНТЕ

Последовательность Ваших действий:

- "derivative" или "continuity and derivative"
- "click for a problem"
- подберите "b" или "a" и "b" так чтобы функция f была дифференцируемой всюду.

5.4. Основные правила дифференцирования.

Построение дифференциала заданной функции или, что равносильно, нахождение её производной называется операцией *дифференцирования* функции.

Замечание. При математической равносильности задачи построения дифференциала функции и задачи нахождения производной функции всё же дифференциал и производная не одно и то же, и поэтому, например, во французском математическом языке имеются два термина: derivation - нахождение производной и differentiation - нахождение дифференциала.

Теорема 73. *Если функции* $u : A \to \mathbb{R}, v : A \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x \in A \cap A'$, *то их сумма дифференцируема в точке* x, *причём*

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x),$$

символическая запись

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'.}$$

Доказательство. Обозначим $f = u + v$ и фиксируем произвольную точку $x_0 \in A$.

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x)) - (u(x_0) + v(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} + \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \quad (5.10)$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x} = v'(x_0)$, то, в силу теоремы 30, из (5.10) следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x} = u'(x_0)+v'(x_0),$$

то есть $(u+v)'(x_0) = u'(x_0)+v'(x_0)$. $\square$

Теорема 74. *Если функции* $u : A \to \mathbb{R}, v : A \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x \in A \cap A'$, *то их произведение дифференцируемо в точке* x, *причём*

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

символическая запись

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.}$$

Доказательство. Обозначим $f = u \cdot v$ и фиксируем произвольную точку $x_0 \in A$.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} &= \\ = \frac{u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{\Delta x} &= \\ = \frac{(u(x_0+\Delta x)-u(x_0))\, v(x_0+\Delta x) + u(x_0)\,(v(x_0+\Delta x)-v(x_0))}{\Delta x} &= \\ = \frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\cdot v(x_0+\Delta x) + u(x_0)\cdot \frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}&\end{aligned} \tag{5.11}$$

Функция v дифференцируема в точке x_0, а значит и непрерывна в этой точке [см. теорему 72], то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x_0+\Delta x) = v(x_0)$.

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x} = v'(x_0)$, то, в силу теорем 30 и 31, из (5.11) следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0),$$

т.е. $(u\cdot v)'\,(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$. $\square$

Теорема 75. *Если функции* $u : A \to \mathbb{R}, v : A \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x \in A \cap A'$ *и* $v(x) \neq 0$, *то их частное дифференцируемо в точке* x, *причём*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

символическая запись

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.}$$

Доказательство. Обозначим $f = \frac{u}{v}$ и фиксируем произвольную точку $x_0 \in A$.

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right) =$$
$$= \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x_0) \cdot v(x_0+\Delta x)} =$$
$$= \frac{1}{v(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\cdot v(x_0) - \right.$$
$$\left. - u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right). \quad (5.12)$$

Функция v дифференцируема в точке x_0, а значит и непрерывна в этой точке [см. теорему 72], т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x_0 + \Delta x) = v(x_0)$.

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x} = v'(x_0)$, то, в силу теорем 30 - 32, из (5.12) следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)},$$

то есть

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

□

Следствие 75.1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е., если* $\mathrm{C}-\mathrm{const}$, *то*

$$(\mathrm{C}\cdot v)' = \mathrm{C}\cdot v';$$

$$\left(\frac{\mathrm{C}}{v}\right)' = \mathrm{C}\cdot\left(v^{-1}\right)';$$

$$\left(\frac{u}{\mathrm{C}}\right)' = \frac{1}{\mathrm{C}}\cdot u'.$$

Пример 93. Показать, что

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} \operatorname{tg} \;:\; (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Посмотрите графики функций f и f'

Решение.

Фиксируем произвольную точку $x \in \operatorname{dom} \operatorname{tg}$.

Тогда

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \overset{75}{=} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 94. Показать, что

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{dom} \operatorname{ctg} \;:\; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

Решение. Фиксируем произвольную точку $x \in \operatorname{dom} \operatorname{ctg}$.
Тогда

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \overset{75}{=} \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5.4.2. Дифференцирование композиции функций.

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$.

Теорема 76. *Если функции* $f : A \to B$ *дифференцируема в предельной точке* $x \in A$, *а функция* $g : B \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в предельной точке* $y = f(x) \in B$, *то композиция* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *этих функций дифференцируема в точке* $x \in A$, *причём*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную предельную точку $x_0 \in A$ и придадим ей приращение Δx так чтобы $x_0 + \Delta x \in A$. Тогда, в силу дифференцируемости, а, следовательно и непрерывности, функции f в точке x_0 имеем $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0, \Delta x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$.

Из дифференцируемости функции g в предельной точке $y_0 = f(x_0) \in B$ следует, что

$$\Delta g(y_0, \Delta y) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y, \qquad (5.13)$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \alpha(\Delta y) = 0$.

Определим функцию

$$\alpha_1(\Delta y) = \begin{cases} \alpha(\Delta y), \text{ если } \Delta y \neq 0, \\ 0, \text{ если } \Delta y = 0. \end{cases}$$

Тогда (5.13) можно переписать в виде

$$\Delta g(y_0, \Delta y) = g'(y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta y)\Delta y, \quad (5.14)$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \alpha_1(\Delta y) = 0$.

Вычислим

$$\Delta g\circ f(x_0,\Delta x):=g\left(f(x_0+\Delta x)\right)-g\left(f(x_0)\right)=$$
$$=g\left(f(x_0)+\Delta f(x_0,\Delta x)\right)-g\left(f(x_0)\right)\overset{(5.14)}{=}$$
$$=g'\left(f(x_0)\right)\Delta f(x_0,\Delta x)+$$
$$+\alpha_1(\Delta f(x_0,\Delta x))\Delta f(x_0,\Delta x)\overset{112}{=}$$
$$=g'\left(f(x_0)\right)\left(f'(x_0)\Delta x+\beta(\Delta x)\Delta x\right)+$$
$$+\alpha_1(\Delta f(x_0,\Delta x))\Delta f(x_0,\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)\to 0$, $\alpha_1(\Delta f(x_0,\Delta x))\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Отсюда следует, что

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g \circ f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0).$$

$\square$

Замечание. Бесконечно малая α из (5.13) не определена в нуле. Но $\Delta f(x_0, \Delta x)$ может быть равно нулю при $\Delta x \neq 0$. Поэтому мы определяем функцию α_1, переписываем (5.13) в форме (5.14) и потом в (5.14) заменяем Δy на $\Delta f(x_0, \Delta x)$.

Пример 95. Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \left(\boxed{\sin \boxed{2x}}\right)^3$$

Шаг 1. Выделим самую внешнюю функцию и представим её аргумент цветным прямоугольником.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^3$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\boxed{}^3\right)'_x$$

Шаг 2. По правилу вычисления производной от степенной функции (см. пример 87) и правилу вычисления производной от композиции (см. теорему 76) получаем:

Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^3$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\boxed{}^3 \right)'_x = 3 \cdot \boxed{}^2 \cdot \left(\boxed{} \right)'_x$$

Шаг 3. Восстановим аргумент степенной функции.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^3$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\boxed{\sin 2x}^3\right)'_x = 3 \cdot \boxed{\sin 2x}^2 \cdot \left(\boxed{\sin 2x}\right)'_x$$

Шаг 4. Аргумент функции sin заменим цветным прямоугольником.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^3$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\sin^3 2x\right)'_x = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot \left(\boxed{\sin \boxed{}}\right)'_x$$

Шаг 5. По правилу вычисления производной от функции sin (см. пример 91) и правилу вычисления производной от композиции (см. теорему 76) получаем:

Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^3$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\sin^3 2x\right)'_x = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot \boxed{\cos \boxed{}} \cdot (\boxed{})'_x$$

Шаг 6. Восстановим аргумент функции $\sin$.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^3$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\sin^3 2x\right)'_x = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot \left(\boxed{2x}\right)'_x$$

Шаг 7. Так как $(2x)'_x = 2 \cdot (x)'_x \stackrel{87}{=} 2$, то окончательно имеем:

Перейдите на следующую страницу.

Пример 95 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 2x$.

Решение. Функция f является композицией нескольких функций. Представим её в виде:

$$f(x) = \boxed{\sin \boxed{2x}}^{3}$$

Тогда

$$f'(x) = \left(\sin^3 2x\right)'_x = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$$

Ответ: $\left(\sin^3 2x\right)'_x = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$

5.4.3. Логарифмическая производная.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}$ дифференцируемая на A и $\forall x \in A \,:\, f(x) \neq 0$. Покажем, что

$$\boxed{\forall x \in A \,:\, (\ln|f(x)|)'_x = \frac{f'_x(x)}{f(x)}}.$$

Обозначим $\varphi(x) := x$. Тогда

$$\ln|f(x)| = (\ln \circ|\ | \circ f \circ \varphi)(x) = (\ln|f| \circ \varphi)(x)$$

и $\forall x \in A$:

$$(\ln|f(x)|)'_x = (\ln|f| \circ \varphi)'_x(x) \overset{76}{=}$$

$$= (\ln|f|)'_f\Big|_{f=f(\varphi(x))} \cdot (f(\varphi))'_\varphi\Big|_{\varphi=\varphi(x)} \cdot \varphi'_x(x) \overset{90}{=}$$

$$= \frac{1}{f(x)} \cdot f'_x(x) \cdot 1 = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Определение 128. Производная от логарифма модуля дифференцируемой функции называется *логарифмической производной.*

Метод логарифмического дифференцирования состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции f, а затем производную самой функции по формуле:

$$\boxed{f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).}$$

Пример 96. Найти производную от показательно-степенной функции

$$f : A \to \mathbb{R}, \forall x \in A\ :\ f(x) := [u(x)]^{v(x)},$$

где u, v – дифференцируемые функции на A и $\forall x \in A\ :\ u(x) > 0$.

Решение. Воспользуемся методом логарифмического дифференцирования:

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \left(\ln [u(x)]^{v(x)}\right)' \overset{10.11}{=}$$

$$= [u(x)]^{v(x)} \left(v(x) \cdot \ln u(x)\right)' \overset{74}{=}$$

$$= [u(x)]^{v(x)} \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

5.4.4. Дифференцирование обратной функций.

Теорема 77. *Пусть функции* $f : A \to B$, $f^{-1} : B \to A$ *взаимно обратны и непрерывны в предельных точках* $x_0 \in A$ *и* $f(x_0) = y_0 \in B$, *соответственно. Если функция* f *дифференцируема в точке* x_0 *и* $f'(x_0) \neq 0$, *то функция* f^{-1} *также дифференцируема в точке* y_0, *причём*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}.}$$

Доказательство. Так как функции

$$f : A \to B \text{ и } f^{-1} : B \to A$$

взаимно обратны, то величины

$$f(x) - f(x_0),\ f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$$

при $y = f(x)$ не обращаются в нуль, если $x \neq x_0$.

Из непрерывности f в x_0 и f^{-1} в $y_0 = f(x_0)$ следует, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$$

и $y = f(x) \neq y_0$, если $x \neq x_0$.

Далее находим

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}\overset{27}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, показано, что в предельной точке y_0 функция $f^{-1}: B\to A$ имеет производную, а значит дифференцируема в этой точке, и

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\left(f'(x_0)\right)^{-1}.$$

$\square$

Замечание. Если бы нам заранее было известно, что функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) \equiv x$$

по теореме 76 о дифференцировании композиции функций мы сразу же нашли бы, что

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1.$$

Пример 97. Показать, что

$$\boxed{\forall x \in (-1, 1)\ :\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Решение.
Фиксируем произвольное $x \in (-1, 1)$.
Обозначим через $y := \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Тогда

$$(\arcsin x)'_x \overset{77}{=} \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} \overset{10.25}{=}$$

$$= \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 98. Показать, что

$$\boxed{\forall x \in (-1, 1) \ : \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Решение.

Фиксируем произвольное $x \in (-1, 1)$.

Обозначим через $y := \arccos x \in (0, \pi)$.

Тогда

$$(\arccos x)'_x \overset{77}{=} \frac{1}{(\cos y)'_y} = \frac{1}{-\sin y} \overset{10.26}{=}$$

$$= \frac{-1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 99. Показать, что

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Решение.
Фиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$.
Обозначим через $y := \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Тогда

$$(\operatorname{arctg} x)'_x \overset{77}{=} \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y \overset{10.27}{=}$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 100. Показать, что

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

Решение.
Фиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$.
Обозначим через $y := \operatorname{arcctg} x \in (0, \pi)$.
Тогда

$$(\operatorname{arcctg} x)'_x \overset{77}{=} \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y \overset{10.28}{=}$$

$$= \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

5.4.5. Параметрически заданные функции и их дифференцирование.

Пусть функции $\varphi : T \to A$, $\varphi^{-1} : A \to T$ взаимно обратны и непрерывны на множествах T и A, соответственно. Пусть, далее, $\psi : T \to \mathbb{R}$.

Тогда функцию $f : A \to \mathbb{R}$ можно задать с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T, \end{cases}$$

следующим образом:

$$\forall x \in A : x \xrightarrow{f} \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

или

$$\forall x \in A : f(x) := \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

В этом случае говорят, что *функция* $f : A \to \mathbb{R}$ *задана параметрически* и пишут

$$f : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T. \end{cases}$$

Пусть, кроме того, функции $\varphi : T \to A, \psi : T \to \mathbb{R}$ ещё дифференцируемы в каждой точке $t \in T$ и $\forall t \in T : \varphi'(t) \neq 0$. Тогда, используя теорему 76 о дифференцировании композиции и теорему 77 о дифференцировании обратной функции, $\forall x_0 \in A$ получаем

$$f'(x)|_{x=x_0} = \left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)'\Big|_{x=x_0} =$$

$$= (\psi(t))'|_{t=t_0} \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)'\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{(\psi(t))'|_{t=t_0}}{(\varphi(t))'|_{t=t_0}} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \text{ где } t_0 = \varphi^{-1}(x_0).$$

Итак, параметрически заданная функция $f : A \to \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке $x \in A$ и производная параметрически заданной функции

$$f : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T, \end{cases}$$

есть параметрически заданная функция

$$f' : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, t \in T. \end{cases}$$

Замечание. Параметрически заданная функция $f' : A \to \mathbb{R}$ определяется соотношением

$$\forall x \in A : x \xrightarrow{f'} \frac{\psi_t'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\varphi_t'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}.$$

5.4.5.1. Касательная и нормаль к плоской кривой.

Пусть функции

$$\varphi : T \to A, \varphi^{-1} : A \to T$$

взаимно обратны и непрерывны на множествах T и A, соответственно.

Пусть, далее, функции

$$\psi : T \to B, \psi^{-1} : B \to T$$

взаимно обратны и непрерывны на множествах T и B, соответственно.

Тогда образ $L := \Gamma(T)$ множества T при отображении

$$t \xrightarrow{\Gamma} (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2$$

является плоской кривой L и графиком параметрически заданной функции

$$f : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T. \end{cases}$$

Фиксируем произвольное $t_0 \in T$.
Точка $M_0\,(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ принадлежит графику функции f. Если функции φ и ψ дифференцируемы в точке $t_0 \in T$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то в точке $M_0 \in \mathrm{graff}$ можно провести касательную, уравнение которой задаётся формулой (5.6), то есть (см. раздел 5.4.5)

$$y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)).$$

Переписывая последнюю формулу в виде

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)},$$

получим каноническое уравнение касательной к плоской кривой. В последней форме записи уравнение годится и для случая, когда $\varphi'(t_0)=0$, но $\psi'(t_0)\neq 0$.

Вектор $\vec{p}=\left(\varphi'(t_0),\psi'(t_0)\right)$ является направляющим вектором касательной к плоской кривой и называется *касательным вектором* плоской кривой в точке M_0.

Из уравнения (5.7) получаем уравнение нормали к плоской кривой L в точке $M_0\,(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \in L$:

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{-\varphi'(t_0)}$$

(см. раздел 5.4.5).
Вектор $\vec{n} = \left(\psi'(t_0), -\varphi'(t_0)\right)$, ортогональный касательному вектору $\vec{p} = \left(\varphi'(t_0), \psi'(t_0)\right)$, является направляющим вектором нормали к плоской кривой и называется *нормальным вектором* плоской кривой в точке M_0.

Пример 101. Напишите уравнения касательных и нормалей к кривой

$$x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t$$

в точках:

$$1)\ t = \frac{\pi}{2};\ 2)\ \ t = \pi.$$

Решение. Находим производные
$x'_t(t) = -2\sin t + 2\sin 2t,$
$y'_t(t) = 2\cos t - 2\cos 2t.$

1). Вычисляем
$x(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = 2, x'_t(\frac{\pi}{2}) = -2,\ y'_t(\frac{\pi}{2}) = 2.$
Записываем каноническое уравнение касательной к кривой в точке $M_1(1,2)$:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2}$$

или

$$y = -x + 3.$$

Записываем уравнение нормали к кривой в точке $M_1(1,2)$:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} \text{ или } y = x+1.$$

2). Вычисляем

$x(\pi) = -3,\ y(\pi) = 0, x'_t(\pi) = 0,\ y'_t(\pi) = -4.$

Записываем каноническое уравнение касательной к кривой в точке $M_2(-3, 0)$:

$$\frac{x+3}{0} = \frac{y-0}{-4} \text{ или } x = -3,$$

т.е. кривая в точке M_2 имеет вертикальную касательную (см. рис. 5.8). Записываем уравнение нормали к кривой в точке $M_2(-3, 0)$:

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-0}{0} \text{ или } y = 0.$$

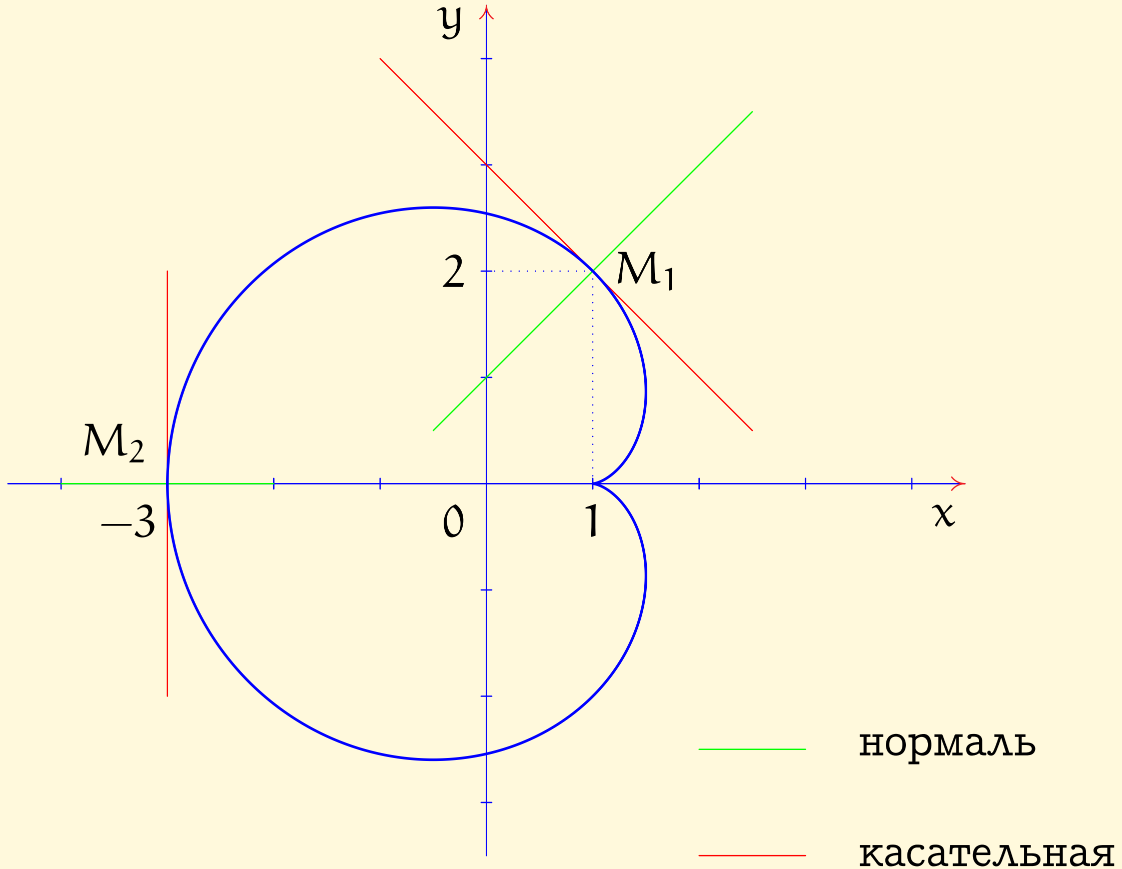


Рис. 5.8 Касательная и нормаль к кривой

5.4.6. Касательная к пространственной кривой.

Пусть функции $\varphi : T \to A, \varphi^{-1} : A \to T$ взаимно обратны и непрерывны на множествах T и A, соответственно, и функции $\psi : T \to B, \psi^{-1} : B \to T$ взаимно обратны и непрерывны на множествах T и B, соответственно. Пусть, далее, функции $\chi : T \to C, \chi^{-1} : C \to T$ взаимно обратны и непрерывны на множествах T и C, соответственно.

Тогда образ $L := \Gamma(T)$ множества T при отображении

$$t \xrightarrow{\Gamma} (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \in \mathbb{R}^3$$

является пространственной кривой L. Фиксируем произвольное $t_0 \in T$ и последовательность $(t_n, n \in \mathbb{N})$, сходящуюся к t_0. Тогда последовательность точек $M_n\,(\varphi(t_n), \psi(t_n), \chi(t_n)) \in L$ сходится к точке $M_0\,(\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)) \in L$.

Канонические уравнения секущей M_0M_n, как уравнения пространственной прямой, проходящей через две точки, имеют следующий вид:

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi(t_n)-\varphi(t_0)}=\frac{y-\psi(t_0)}{\psi(t_n)-\psi(t_0)}=\frac{z-\chi(t_0)}{\chi(t_n)-\chi(t_0)}.$$

Геометрический смысл этих уравнений не изменится, если мы все знаменатели разделим на $t_n - t_0$:

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0}} = \frac{y - \psi(t_0)}{\frac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0}} = \frac{z - \chi(t_0)}{\frac{\chi(t_n) - \chi(t_0)}{t_n - t_0}}.$$

Если эти уравнения в пределе, при $n \to \infty$, сохраняют определённый смысл, то этим будет установлено существование предельного положения секущих, то есть касательной.

Предположим что, функции φ, ψ и χ дифференцируемы в точке $t_0 \in T$ и хотя бы одна из производных φ', ψ', χ' не равна нулю в точке t_0. Тогда в пределе мы получаем

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z - \chi(t_0)}{\chi'(t_0)}$$

и эти уравнения, действительно, выражают прямую, так как не все знаменатели равны нулю.

Итак, канонические уравнения касательной к пространственной кривой L в точке $M_0 \in L$ имеют вид

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z-\chi(t_0)}{\chi'(t_0)}.$$

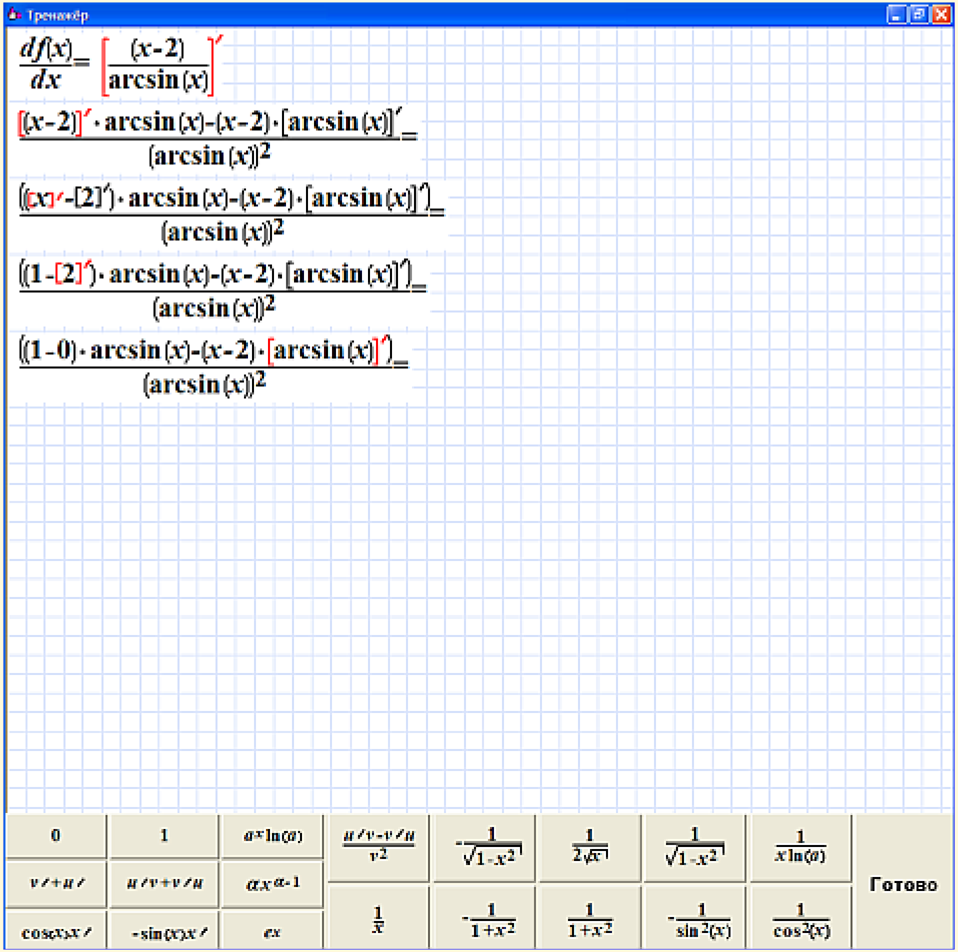
Вектор $\vec{p} = \left(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \chi'(t_0)\right)$ является направляющим вектором касательной к пространственной кривой L в точке $M_0 \in L$ и называется *касательным вектором пространственной кривой* L *в точке* M_0.

5.5. Таблица производных фундаментальных функций.

$f(x)$	$f'(x)$	Ограничения на область изменения аргумента $x \in \mathbb{R}$
C (const)	0	
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ при $\alpha \in \mathbb{N}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R} (a > 0, a \neq 1)$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$

Продолжение

$f(x)$	$f'(x)$	Ограничения на область изменения аргумента $x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, +\infty), \ (a > 0, a \neq 1)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\ \sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\ \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
$\arccos x$	$-\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arcctg} x$	$-\ \frac{1}{1+x^2}$	



Тренажёр
$\frac{df(x)}{dx} = \left[\frac{(x-2)}{\arcsin(x)}\right]'$
$\frac{[(x-2)]' \cdot \arcsin(x) - (x-2)\cdot[\arcsin(x)]'}{(\arcsin(x))^2} =$
$\frac{([x]' - [2]')\cdot \arcsin(x) - (x-2)\cdot[\arcsin(x)]'}{(\arcsin(x))^2} =$
$\frac{(1 - [2]')\cdot \arcsin(x) - (x-2)\cdot[\arcsin(x)]'}{(\arcsin(x))^2} =$
$\frac{(1 - 0)\cdot \arcsin(x) - (x-2)\cdot[\arcsin(x)]'}{(\arcsin(x))^2} =$
0
1
$a^x \ln(a)$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x\ln(a)}$
Готово
$v' + u'$
$u'v + v'u$
$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$
$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cos(x)x'$
$-\sin(x)x'$
e^x

В нижней части тренажёра расположена дополнительная клавиатура. На клавишах этой клавиатуры изображены правила вычисления производной и вторая колонка таблицы производных от фундаментальных функций. Операция вычисления производной обозначена на тренажёре штрихами: красный штрих – операция выполняется в данный момент, чёрный штрих – отложенная операция, которая будет выполнена в дальнейшем. Пользователь нажимает клавиши дополнительной клавиатуры соответствующие правилам выполнения операции обозначенной красным штрихом или с надписью производной внешней функции выражения стоящего в красных квадратных скобках с красным штрихом. В дальнейшем тренажёр "Производная функции" будем запускать кнопками вида:

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + cx + d$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \frac{x^n}{a} + \frac{b}{x^m}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = (x + a)^n$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \sqrt{a + bx^k}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = a \cdot \sin(bx+c) + \\ + d \cdot \cos(ex+f)$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(ax+b)}{cx+d}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \operatorname{ctg}\frac{ax+b}{cx+d}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \sin^k(ax+b)$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \left(\sin^n \cos(ax+b)\right)^k$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \sqrt{a + b\,\mathrm{tg}^k\, x}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = (ax+b)\cdot \arcsin x$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \frac{a+bx}{\arcsin x}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \left[\arccos(ax+b)\right]^k$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \frac{\arccos x}{ax+b}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \sqrt{ax+b} \cdot \operatorname{arctg}(cx+d)$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \operatorname{arctg} x^k$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{ax+b}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \arcsin(ax+b)$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \operatorname{arctg}^k \frac{ax+b}{cx+d}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = x^k \cdot \log_a x$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \ln(\sin(ax+b))$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \ln^k(ax+b)$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \ln(\operatorname{tg}(ax+b))$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = e^x$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = (ax+b)\cdot e^x$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \frac{(ax+b)}{e^x}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = a^{(bx+c)}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = e^{\sin x}$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = \cos\left(e^{x}\right)$$

ТРЕНАЖЁР

Найти производную

$$f(x) = e^{\arcsin(ax)}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Дифференцирование функции одного аргумента.

5.6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Если функция $f : A \to \mathbb{R}$ дифференцируема в любой точке $x \in A$, то на множестве A возникает новая функция $f' : A \to \mathbb{R}$, значение которой в точке $x \in A$ равно производной $f'(x)$ функции f в этой точке.

Функция $f' : A \to \mathbb{R}$ может тоже иметь производную $(f')' : A \to \mathbb{R}$ на A, которая по отношению к исходной функции f называется *второй производной* от f и обозначается одним из символов

$$f''(x), f^{(2)}(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Условились считать $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Определение 129. Если определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ от функции f, то *производная порядка* n от функции f определяется формулой

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x).}$$

Для производной порядка n приняты обозначения

$$f^{(n)}(x), \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Дифференциалы высших порядков функции определяются так же индуктивно, как и производные высших порядков.

Определение 130. *Дифференциалом второго порядка* функции f в некоторой точке x называется дифференциал в этой точке от её (первого) дифференциала и обозначается $d^2f(x)$, то есть

$$d^2f(x) \overset{\text{опр.}}{=} d\left(df(x)\right).$$

Определение 131. *Дифференциалом n - го порядка* функции f в некоторой точке x называется дифференциал в этой точке от её дифференциала $(n-1)$ - го порядка и обозначается $d^n f(x)$, то есть

$$d^n f(x) \overset{\text{опр.}}{=} d\left(d^{(n-1)} f(x)\right).$$

Производные и дифференциалы порядка два и выше называют *высшими производными и дифференциалами*. При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно помнить, что, если x независимая переменная, то $\mathrm{d}x$ есть произвольное и не зависящее от x число, которое при дифференцировании по x надлежит рассматривать как постоянный множитель.

Легко показать, что если x независимая переменная, то

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,(dx)^n \overset{\text{обоз.}}{=} f^{(n)}(x) dx^n.$$

Если же x есть функция независимой переменной t, то дифференциалы высших порядков находят последовательно:

$$df(x) = f'(x)dx,$$
$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x,$$
$$\ldots .$$

ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером.

Нажмите на кнопку first derivative (первая производная). На рисунке появится график первой производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс.

Нажмите на кнопку second derivative (вторая производная). На рисунке появится график второй производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

5.6.1. Общие формулы для производных любого порядка.

Для того, чтобы вычислить n-ю производную от какой-либо функции, вообще говоря, нужно предварительно вычислить производные всех предшествующих порядков. Однако иногда удаётся установить такое *общее выражение для n-ой производной, которое зависит непосредственно от n и не содержит более обозначений предшествующих производных*. При выводе таких общих формул обычно поступают следующим образом:

1. Вычисляют последовательно производные, пытаясь при этом подметить закономерность в записях производных;

2. Найденная общая формула доказывается методом математической индукции.

Пример 102. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = a^x$.

Решение. $f'(x) \overset{88}{=} a^x \cdot \ln a, f''(x) \overset{88}{=} a^x \cdot (\ln a)^2,$
$f'''(x) \overset{88}{=} a^x \cdot (\ln a)^3.$

Вычисляем последовательно производные до тех пор пока не заметим закономерности их написания:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n. \qquad (5.15)}$$

Докажем формулу (5.15) методом математической индукции.

I. При $n = 1$ формула (5.15) верна.

II. Предположим, что $f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n$.

III. Найдём выражение для $f^{(n+1)}(x)$.

$$f^{(n+1)}(x) \overset{129}{=} \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{\text{II.}}{=}$$

$$= \left(a^x \cdot (\ln a)^n\right)' \overset{88}{=} a^x \cdot (\ln a)^{(n+1)}.$$

Итак, формула (5.15) доказана методом математической индукции.

Ответ. $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$.

Частный случай: $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Пример 103. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = (x+a)^{\alpha}$, $\alpha, a \in \mathbb{R}$.

Пример 104. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = \sin ax, \ a \in \mathbb{R}$.

Пример 105. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = \cos ax, \ a \in \mathbb{R}$.

Пример 106. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = \ln(1+x)$.

Для нахождения $n-$ й производной функции f в некоторых случаях полезно функцию предварительно преобразовать, например, рациональную функцию разложить в сумму простейших дробей (см. пример 107), понизить степень тригонометрической функции с помощью кратных углов (см. пример 108),
перейти к комплексным переменным и т.д.

Пример 107. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Пример 108. Найти выражение для $f^{(n)}$, если $f(x) = \sin^4 x$.

5.6.2. Формула Лейбница.

Пусть функции $u, v : A \to \mathbb{R}$ имеют производные до порядка n включительно. Тогда для n-й производной от их произведения справедлива следующая *формула Лейбница*:

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)} v^{(k)}(x) u^{(n-k)}(x),$$

$$\text{где } C_n^0 = 1, C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}. \tag{5.16}$$

Доказательство формулы (5.16) будем проводить методом математической индукции.

При $n = 1$ формула (5.16) совпадает с правилом дифференцирования произведения (см. теорему 74).

Если функции u, v имеют производные до порядка $n+1$ включительно, то, в предположении справедливости формулы (5.16) для порядка n, после дифференцирования её левой и правой частей получаем

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} \stackrel{(*)}{=}$$

$$= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) u^{(n-k+1)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} \stackrel{10.1}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

(*) – объединили слагаемые, содержащие одинаковые произведения производных от функций u и v.
Справедливость формулы Лейбница доказана.

Формула Лейбница очень похожа на формулу бинома Ньютона и на самом деле с нею непосредственно связана. Она часто бывает полезна при выводе общих выражений для n-й производной.

Пример 109. Найти $f^{(n)}(0)$, если

$$f(x) = x^2 e^{ax}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Решение. По формуле Лейбница, находим

$$f^{(n)}(x) =$$

$$= x^2 a^n e^{ax} + C_n^1 2x a^{n-1} e^{ax} + 2C_n^2 a^{n-2} e^{ax} =$$

$$= x^2 a^n e^{ax} + 2nx a^{n-1} e^{ax} + n(n-1) a^{n-2} e^{ax},$$

откуда $\boxed{f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2}.}$

Пример 110. Найти $f^{(n)}(0)$, если

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Производные высших порядков от функции одного переменного.

5.6.3. Вторая производная параметрически заданной функции.

Пусть функция $f : A \to \mathbb{R}$ задана параметрически

$$f : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T. \end{cases}$$

Пусть функции $\varphi : T \to A, \psi : T \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируемы в каждой точке $t \in T$ и $\forall t \in T : \varphi'(t) \neq 0.$

Тогда параметрически заданная функция $f : A \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в каждой точке $x \in A$ и производная параметрически заданной функции

$$f : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in T, \end{cases}$$

есть параметрически заданная функция

$$f' : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, t \in T, \end{cases}$$

производная от которой есть снова парамет-рически заданная функция

$$f'' : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'' = \dfrac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}, t \in T. \end{cases}$$

Замечание. Функция $f'' : A \to \mathbb{R}$ определяет-ся соотношением

$$\forall x \in A : x \xrightarrow{f''} \frac{\psi''\left(\varphi^{-1}(x)\right)\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) - \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\varphi''\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\left(\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^3}.$$

5.7. Теоремы о среднем.

Знание производной f' некоторой функции f часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции f. Вопросам этого рода посвящён данный раздел.
Теоремы этого раздела содержат значения производных в некоторой точке, о расположении которой известно только то, что она находится между двумя заданными точками (отсюда название раздела), однако, это не мешает многообразным применениям этих теорем в анализе.

5.7.1. Теорема Ферма́

Теорема 78. (Ферма́) *Пусть функция* $f : A \to \mathbb{R}$ *принимает наибольшее или наименьшее значение на* A *во внутренней точке* $\xi \in A$. *Тогда, если существует* $f'(\xi)$, *то* $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Пусть f принимает наибольшее значение на A во внутренней точке $\xi \in A$. Тогда $\exists U_\varepsilon(\xi)$ такая, что

$$\left.\begin{array}{l} (\forall x \in U^*_\varepsilon(\xi)\ :\ f(x) - f(\xi) \le 0) \\ \left(\exists f'(\xi) \in \mathbb{R}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\forall x \in U^-_\varepsilon(\xi)\ :\ \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0\right) \\ \left(\forall x \in U^+_\varepsilon(\xi)\ :\ \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0\right) \\ \left(\exists f'(\xi) \in \mathbb{R}\right) \end{array}\right\} \stackrel{71}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\exists \lim\limits_{x\to\xi-0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'_-(\xi)\right) \\ \left(\exists \lim\limits_{x\to\xi+0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'_+(\xi)\right) \\ \left(f'_-(\xi) = f'(\xi) = f'_+(\xi) \in \mathbb{R}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow{33}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(f'_-(\xi) \geq 0\right) \\ \left(f'_+(\xi) \leq 0\right) \\ \left(f'_-(\xi) = f'(\xi) = f'_+(\xi) \in \mathbb{R}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(f'(\xi) = 0\right).$$

Доказательство случая когда f принимает наименьшее значение на A во внутренней точке $\xi \in A$ аналогичное. Рассмотреть самостоятельно. $\square$

Замечание 1. Геометрически теорема 78 вполне очевидна, ибо она утверждает, что если во внутренней точке $\xi \in A$ функция принимает наибольшее или наименьшее значение и в точке $(\xi, f(\xi)) \in \text{graff}$ можно провести касательную к графику функции, то касательная параллельна оси Ox (рис.5.9).

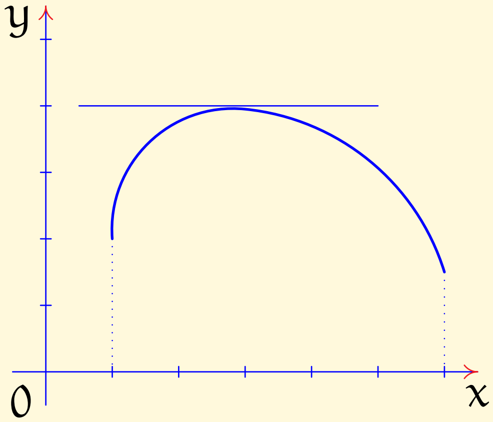


Рис. 5.9 Теорема Ферма́

Замечание 2. При доказательстве теоремы 78 существенно используется предположение, что $\xi \in A$ внутренняя точка множества A. Без этого предположения теорема не верна (рис.5.10).

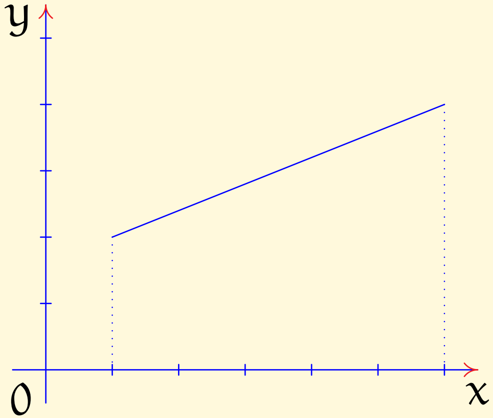


Рис. 5.10 Теорема Ферма́

Замечание 3. Физически теорема 78 означает, что при движении по прямой в момент начала возврата скорость равна нулю.

Замечание 4. Теорема 78 воспроизводит лишь сущность того приёма, который использовал Ферма́ для разыскания наибольших и наименьших значений функции. (Ферма́ не располагал понятием производной).

ТЕОРЕМА ФЕРМА́

Во внутренних точках наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x + 2\sin x$ значение производной (slope) равно нулю.

5.7.2. Теорема Ро́лля.

Теорема 79. (Ро́лль) *Пусть:*

1. *функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$*;*

2. *функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* (a, b)*;*

3. $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда, в силу второй теоремы Вейерштрасса (теорема 64), на этом отрезке найдутся точки x_1 и x_2, в которых функция f принимает наибольшее и наименьшее значения. Если $x_1 = x_2$, то функция f постоянна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ всюду на $[a, b]$.

Если же $x_1 \neq x_2$, то либо $f(x_1)$, либо $f(x_2)$ не равно $f(a) = f(b)$. Обозначим через ξ одну из этих точек, в которой равенство не имеет места. Это будет внутренняя точка $\xi \in (a, b)$, в которой функция f принимает наибольшее или наименьшее значение. Следовательно, по теореме Ферма́, $f'(\xi) = 0$. $\square$

Замечание. Ролль доказал чисто алгебраическими средствами утверждение равносильное теореме 79 только для целого алгебраического многочлена.

Замечание. Каждое из условий теоремы 79 является необходимым. Это подтверждается рассмотрением функций, графики которых изображены на рис. 5.11:

1. функция f не является непрерывной на $[a, b]$ (рис. 5.11.a);
2. функция f не дифференцируема в точке $0 \in (-1, 1)$ (рис. 5.11.b);
3. $f(0) \neq f(1)$. (рис. 5.11.c)

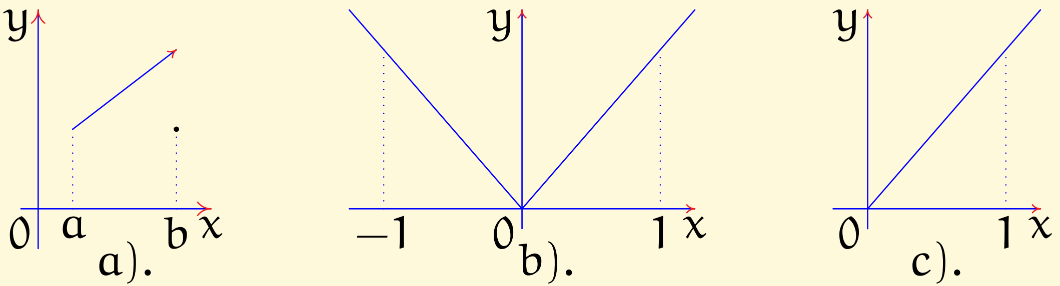


Рис. 5.11 Теорема Ро́лля

Определение 132. *Нулём функции* называют значение аргумента, при котором функция равна нулю.

Следствие 79.1. (Ро́лль) *Пусть:*

1. *функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$*;*

2. *функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* (a, b)*;*

3. $f(a) = f(b) = 0$.

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$. *Другими словами, между двумя нулями функции находится по крайней мере один нуль её производной.*

Доказательство. Следствие 79.1 это теорема 79 сформулированная с учётом определения 132. $\square$

Следствие 79.2. (Ро́лль) *Пусть:*

1. функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$*;*

2. функция f *имеет производные до* $n - 1$ *порядка включительно на* (a, b)*;*

3. функция f *имеет* n *нулей на* $[a, b]$*.*

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что* $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

Доказательство. По следствию 79.1:
функция f' обращается в нуль по крайней мере в $(n-1)$-й точке интервала (a, b);
функция f'' обращается в нуль по крайней мере в $(n-2)$-х точках этого интервала;
и т.д.;
функция $f^{(n-1)}$ имеет по крайней мере один нуль на интервале (a, b). $\square$

5.7.3. Теорема Лагранжа.

Теорема 80. (Лагранж) *Пусть:*

1. функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$*;*

2. функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* (a, b).

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\forall x \in [a, b]$:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция F удовлетворяет условиям теоремы Ро́лля. Действительно,

1. функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ (см. теорему 57);

2. функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) (см. теорему 73);

3. $F(a) = F(b) = 0$.

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$.

Так как

$$\forall x \in (a, b) \;:\; F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то, следовательно,

$$\left(F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\right) \Longrightarrow \left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

$\square$

Равенство

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b,$$

называется *формулой Лагранжа, или формулой конечных приращений.*

Замечание 1. Теорема Лагранжа важна тем, что она связывает приращение функции на конечном отрезке с производной функции на этом отрезке. Правда, в формуле конечных приращений Лагранжа фигурирует неизвестное нам число ξ, но это не мешает, однако, многообразным применениям этой формулы в математическом анализе.

Замечание 2. Геометрически теорема Лагранжа означает (рис. 5.12), что в некоторой точке $(\xi, f(\xi))$, где $\xi \in (a, b)$, касательная к графику функции будет параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, ибо угловой коэффициент последней равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

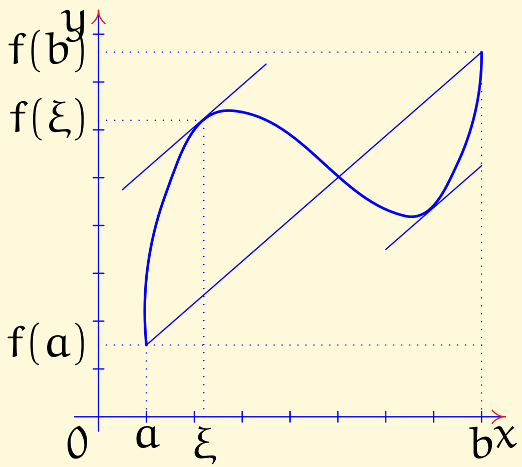


Рис. 5.12 Теорема Лагранжа

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Иллюстрация теоремы Лагранжа для функции

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

Нижняя и верхняя границы сегмента определения задаются движками “a” и “c”, соответственно.

Замечание 3. Если x интерпретировать как время, а $f(b) - f(a)$ как величину перемещения за время $(b - a)$ частицы, движущей по прямой, то теорема Лагранжа означает, что если бы в течении всего промежутка времени $[a, b]$ частица двигалась с постоянной скоростью $f'(\xi)$, то она сместилась бы на ту же величину $(f(b) - f(a))$. Величину $f'(\xi)$ называют *средней скоростью* движения на промежутке $[a, b]$.

5.7.4. Теорема Коши́.

Теорема 81. **(Коши́)** *Пусть:*

1. функция $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывны на* $[a, b]$*;*

2. функция $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на* (a, b)*;*

3. $g'(t) \neq 0$ *для всех* $t \in (a, b)$*.*

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},} \tag{5.17}$$

то есть отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению их производных в точке ξ*.*

Равенство (5.17) называется формулой Коши.

Доказательство. п.1. Сначала докажем, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если допустить, что $g(b) - g(a) = 0$ или, что то же, $g(b) = g(a)$, то по теореме Ро́лля для функции g найдётся точка η, $a < \eta < b$, в которой $g'(\eta) = 0$. А это противоречит условию, так как $g'(t) \neq 0$ для всех $t \in (a, b)$.

п.2. Рассмотрим вспомогательную функцию $\forall t \in [a, b]$:

$$F(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(t) - g(a)\right).$$

Функция F удовлетворяет условиям теоремы Ро́лля. Действительно,
1. функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ (см. теорему 57);
2. функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) (см. теорему 73);
3. $F(a) = F(b) = 0$.

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$.

Так как

$$\forall t \in (a, b) \ : \ F'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(t),$$

то, следовательно,

$$\left(F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0 \right) \overset{g'(\xi) \neq 0}{\Longrightarrow} \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right)$$

$\square$

Геометрическая иллюстрация теоремы Коши́ - та же, что и для теоремы Лагранжа, см. рис. 5.13.

Рассмотрим плоскую кривую с параметризацией

$$t \to (g(t), f(t)),\, t \in [a, b].$$

Тогда $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ есть угловой коэффициент хорды, соединяющей концы дуги этой кривой, а $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ - угловой коэффициент касательной в некоторой внутренней точке дуги, отвечающей $t = \xi$.

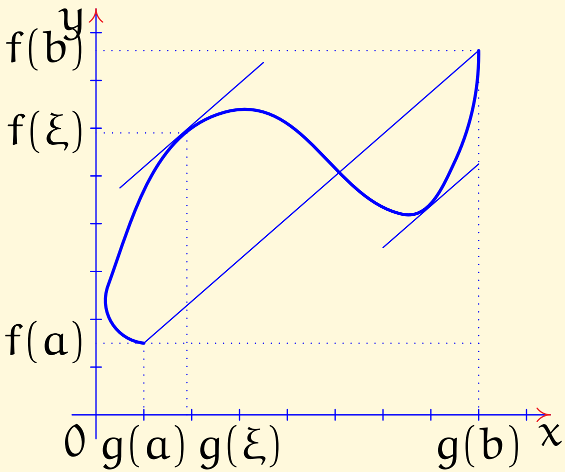


Рис. 5.13 Теорема Коши́

5.8. Исследование функций методами дифференциального исчисления.

Теоремы этого раздела позволяют делать выводы о поведении функции на основании имеющейся информации о её производных.
Методами дифференциального исчисления можно находить пределы функций, интервалы постоянства и монотонности функций, точки экстремума функций, наибольшие и наименьшие значения функций, интервалы вогнутости и выпуклости функций.

5.8.1. Правило Лопиталя.

В 1696 году вышло из печати главное творение жизни Лопиталя – “Анализ бесконечно малых для познания кривых линий”. Это был первый печатный учебник по дифференциальному исчислению, с появлением которого началось широкое знакомство с анализом бесконечно малых и постепенное проникновение его в математическую практику. В основу своей книги Лопиталь положил лекции Иоганна Бернулли, написанные специально для Лопиталя, рукопись которых была найдена в 1921 году.
“Правило Лопиталя” раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ также было сообщено Лопиталю Иоганном Бернулли.

5.8.1.1. Неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пусть $f, g : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$. Обозначим через ω конечную или бесконечно удалённую предельную точку множества A.

Теорема 82. **(Лопиталь)** *Пусть существует $U_\varepsilon(\omega)$ такая, что:*

1. функции f и g непрерывны в $U^*_\varepsilon(\omega)$;

2. функции f и g дифференцируемы в $U^*_\varepsilon(\omega)$;

3. $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in U^*_\varepsilon(\omega)$;

4. $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \lim\limits_{x\to\omega} g(x) = 0$;

5. существует $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда:

1. существует $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$;

2. $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. п.1. Пусть $\omega = x_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in U_\varepsilon(x_0), \\ 0, & \text{если } x = x_0 \end{cases}$$

и

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in U_\varepsilon(x_0), \\ 0, & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Тогда, по теореме Коши́, имеем

$$\left(\begin{matrix}\forall x \in U^*_\varepsilon(x_0)\ :\ \frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{g_1(x)-g_1(x_0)} = \frac{f_1'(\xi)}{g_1'(\xi)}, \\ \text{где } \xi \text{ лежит между } x \text{ и } x_0\end{matrix}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix}\forall x \in U^*_\varepsilon(x_0)\ :\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \\ \text{где } \xi \text{ лежит между } x \text{ и } x_0\end{matrix}\right) \quad (5.18)$$

Так как ξ лежит между x и x_0, то

$$(\text{ при } x \to x_0) \Longrightarrow (\xi \to x_0)\,. \qquad (5.19)$$

Переходя к пределу в (5.18) при $x \to x_0$ и, учитывая при этом (5.19), получим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

п.2. Пусть $\omega = -\infty$, ∞ или $+\infty$.
Положим $y = \frac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \overset{\text{п.1}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f'_x\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{f'_x\left(\frac{1}{y}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{y}\right)} = \binom{27}{y = \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\omega}\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}.$$

Следовательно

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)} = \binom{27}{x = \frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x\to\omega}\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}.$$

$\square$

Пример 111. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5.$

Все условия теоремы 82 здесь выполнены.

Замечание 1. В возможности применения правила Лопиталя всегда убеждаемся после того, как найдём предел отношения производных. При этом не следует забывать о проверке условий 1-4 теоремы 82.

Замечание 2. Правило Лопиталя можно применять и для нахождения одностороннего предела. В этом случае достаточно потребовать, чтобы функции f и g удовлетворяли условиям теоремы 82, соответственно, в правой (левой) ε - окрестности точки x_0.

Замечание 3. Если окажется, что $f'(x)$ и $g'(x)$ бесконечно малые при $x \to \omega$, то можно ставить вопрос о повторном применении правила Лопиталя.

Пример 112. Найти
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = $$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = $$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{25\cos 5x}{2} = \frac{25}{2}.$$

5.8.1.2. Неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть $f, g : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$. Обозначим через ω конечную или бесконечно удалённую предельную точку множества A.

Теорема 83. **(Лопиталь)** *Пусть существует $U_\varepsilon(\omega)$ такая, что:*

1. функции f и g непрерывны в $U^*_\varepsilon(\omega)$;

2. функции f и g дифференцируемы в $U^*_\varepsilon(\omega)$;

3. $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in U^*_\varepsilon(\omega)$;

4. $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \infty$;

5. существует $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда:

1. существует $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$;

2. $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство теоремы опустим.

Пример 113. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$, при $a>1$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x(\ln a)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\cdots$$
$$\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0.$$

Заметим, что вся цепочка последних равенств носила условный характер до тех пор, пока мы не пришли к выражению, предел которого смогли найти.

5.8.1.3. Другие виды неопределённости.

Пусть $f, g : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$. Обозначим через ω конечную или бесконечно удалённую предельную точку множества A. Неопределённости вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$ алгебраическими преобразованиями можно свести к неопределённостям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = 0$$

и

$$\lim_{x\to\omega} g(x) = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\omega} f(x)g(x) = (0\cdot\infty) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\dfrac{0}{0}\right), \\ \lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right). \end{cases}$$

Пусть, далее,

$$\lim_{x \to \omega} f(x) = +\infty$$

и

$$\lim_{x \to \omega} g(x) = +\infty$$

Тогда

$$\lim_{x \to \omega} \left(f(x) - g(x)\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to \omega} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Неопределённости вида (1^{∞}), $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$ возникают при нахождении предела при $x \to \omega$ функции $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f > 0$ вблизи ω. Для нахождения предела при $x \to \omega$ такой функции достаточно найти предел при $x \to \omega$ функции $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$.

Действительно, если $\lim\limits_{x\to\omega} \ln y = (0 \cdot \infty) = k \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to\omega} y = e^k$.

Если же $\lim\limits_{x\to\omega} \ln y = (0 \cdot \infty) = \pm\infty$, то $\lim\limits_{x\to\omega} y$ равно $+\infty$ и 0, соответственно.

Пример 114. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Найдём сначала

$$\lim_{x\to 0+} \ln x^x \overset{10.11}{=} \lim_{x\to 0+} x \ln x = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{83}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1.$$

5.8.2. Формула Тейлора.

Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные производные до n порядка включительно на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

Определение 133. Многочлен

$$P_n(x;x_0) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

называется *полиномом Тейлора порядка* n *функции* f *в точке* x_0.

Полином Тейлора $P_n(x; x_0)$ совпадает с функцией f в точке x_0 и даёт некоторое приближение функции f в $U_\varepsilon(x_0)$. Поэтому особый интерес приобретает изучение разности

$$r_n(x; x_0) = f(x) - P_n(x; x_0). \tag{5.20}$$

Теорема 84. (Пеано) *Пусть функция* f *дифференцируема* $(n-1)$ *раз в некоторой* ε*-окрестности точки* x_0 *и существует* $f^{(n)}(x_0)$. *Тогда*

$$r_n(x;x_0) = f(x) - P_n(x;x_0) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

при $x \to x_0$.

Доказательство.

Доказательство. Обозначим через

$$\alpha(x) = \frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}.$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Применяя правило Лопиталя $(n-1)$ раз найдём

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x;x_0)}{n(x-x_0)^{(n-1)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\cdots$$

$$\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x;x_0)}{n!(x-x_0)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x;x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right)=0.$$

По определению 85, $r_n(x;x_0)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая $(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$, т.е.

$$r_n(x;x_0)=f(x)-P_n(x;x_0)=o\left((x-x_0)^n\right)\ \text{при}\ x\to x_0.$$

□

Определение 134. Формула

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \\ \text{при } x \to x_0. \quad (5.21) \end{aligned}}$$

называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

Формулу (5.21) удобно использовать для вычисления пределов. Между тем естественно использовать полином Тейлора как приближение к функции f, с помощью которого она может быть вычислена с нужной степенью точности. Для этого нужно получить другие формы записи остаточного члена $r_n(x; x_0)$.

Теорема 85. *Если на отрезке* I *с концами* x_0, x *функция* f *непрерывна вместе с первыми* n *своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка* $(n+1)$, *то при любой функции* φ, *непрерывной на отрезке* I *и имеющей отличную от нуля производную в его внутренних точках, найдётся точка* ξ, *лежащая между* x_0 *и* x, *такая, что*

$$r_n(x; x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^n. \tag{5.22}$$

Доказательство. На отрезке I с концами x_0, x рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(x;t) =$$

$$= f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \right.$$

$$\left. + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}1.\left(\begin{array}{c}\text{функции } F, \varphi \text{ непрерывны на } I\\ (\text{условия теоремы } 85 \text{ и } 57)\end{array}\right)\\ 2.\left(\begin{array}{c}\text{функции } F, \varphi \text{ дифференцируемы во внутренних точках } I\\ (\text{условия теоремы } 85 \text{ и } 73)\end{array}\right)\\ 3.\left(\begin{array}{c}\varphi'(t) \neq 0 \text{ для всех внутренних точек } I\\ (\text{условия теоремы } 85)\end{array}\right)\end{array}\right\} \overset{81}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\exists \xi \text{ между } x_0 \text{ и } x, \text{ в которой } \frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right) \tag{5.23}$$

Вычислим

$$F'(t) = -\left[f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \right.$$
$$+ \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \cdots$$
$$\left. \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}\right] =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad (5.24)$$

и

$$F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x : x_0). \quad (5.25)$$

Подставляя (5.24) и (5.25) в (5.23), получим (5.22). □

Следствие 85.1. *Пусть* $\varphi(t) = (x-t)^p$, *где* $p > 0$. *Очевидно, эта функция удовлетворяет условиям теоремы 85. Поэтому*

$$r_n(x;x_0) = \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-\xi)^{(p-1)}n!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^n =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{(n+1-p)}(x-x_0)^p.$$

Так как $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$, *то*
$x - \xi = x - x_0 - \theta(x-x_0) = (1-\theta)(x-x_0)$. *Тогда*

$$r_n(x;x_0) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{(n+1-p)}(x-x_0)^{(n+1)},$$

$$0 < \theta < 1. \quad (5.26)$$

Выражение (5.26) называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Шлемильха и Роша.

Следствие 85.2. *Полагая в формуле (5.26) $p = n + 1$, получим остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа:*

$$\boxed{r_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},}$$

где ξ лежит между x и x_0.

Следствие 85.3. *Полагая в формуле (5.26) $p = 1$, получим остаточный член формулы Тейлора в форме Коши́:*

$$r_n(x; x_0) = \\ = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{(n+1)}, \\ 0 < \theta < 1.$$

Замечание 1. При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*. Важнейшими разложениями по формуле Маклорена являются:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\left((e^x)^{(n)} = e^x, \text{ см. пример } 102\right);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o\left(x^{2n-1}\right)$$

$$\left((\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \text{ см. пример } 104\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\left((\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \text{ см. пример } 105\right);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\left(\begin{matrix} (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \\ \text{см. пример } 106 \end{matrix}\right);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\left(\begin{matrix} ((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \\ \text{см. пример } 103 \end{matrix}\right).$$

5.8.3. Условия монотонности функции.

Определение 135. Если для любых

$$x_1,\, x_2 \in [a, b],\; x_1 < x_2,$$

выполняется

$$f(x_1) \le f(x_2)\ [f(x_1) \ge f(x_2)],$$

то функция f называется *неубывающей* [*невозрастающей*] на $[a, b]$.

Определение 136. Если для любых

$$x_1, x_2 \in [a, b], \ x_1 < x_2,$$

выполняется

$$f(x_1) < f(x_2) \ [f(x_1) > f(x_2)],$$

то функция f называется *возрастающей* [*убывающей*] на $[a, b]$.

Теорема 86. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b). *Для того чтобы функция* f *была постоянной на* $[a, b]$ *необходимо и достаточно чтобы* $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна:

$$\left(\forall x \in (a,b)\ :\ f(x) = \mathrm{const}\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in (a,b)\ :\ f'(x) = 0\right).$$

Достаточность. Фиксируем две произвольные точки $x_1, x \in [a,b]$. По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),\ \xi \in (a,b). \qquad (5.27)$$

Тогда

$$\left(\forall x \in (a,b) : f'(x) = 0\right) \overset{(5.27)}{\Longrightarrow} \left(f(x) = f(x_1) = \mathrm{const.}\right)$$

Из выделенного синим цветом следуют достаточность. □

Следствие 86.1. *Пусть* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и дифференцируемы на* (a, b). *Если* $\forall x \in (a, b) : f'(x) = g'(x)$, *то*

$$\forall x \in (a, b) : f(x) = g(x) + C \ \ (C = \mathrm{const}).$$

Для доказательства достаточно применить теорему 86 к разности $f - g$.

Теорема 87. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b). *Для того чтобы функция* f *была неубывающей [невозрастающей] на* $[a, b]$ *необходимо и достаточно чтобы*

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \; [f'(x) \leq 0].$$

Доказательство. Необходимость.

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$.

Точке x_0 придадим приращение Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} f \text{ — неубывающая [невозрастающая] на } [a, b] \\ \exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \xRightarrow{135}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \geq 0 \; [\leq 0] \\ \exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \xRightarrow{33}$$

$$\left(f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \geq 0 \; [\leq 0] \right)$$

Из выделенного синим цветом следует необходимость.

Достаточность. Фиксируем две произвольные точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2. \tag{5.28}$$

Тогда

$$\left(\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0\right) \overset{(5.28)}{\Longrightarrow} \left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$$

$$\left(\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0\right) \overset{(5.28)}{\Longrightarrow} \left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$$

Из выделенного синим цветом следуют достаточность. $\square$

Теорема 88. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b). *Если* $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$, *то функция* f *возрастающая [убывающая] на* $[a, b]$.

Доказательство. Фиксируем две произвольные точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2. \tag{5.29}$$

Тогда

$$\left(\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0\right) \overset{(5.29)}{\Longrightarrow} \left(f(x_1) < f(x_2)\right)$$

$$\left(\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0\right) \overset{(5.29)}{\Longrightarrow} \left(f(x_1) > f(x_2)\right)$$

Из выделенного синим цветом следуют утверждения теоремы. $\square$

Определение 137. Интервалы, на которых функция возрастает [неубывает, невозрастает, убывает], называются *интервалами монотонности* функции.

Если производная функции f непрерывна на (a, b), то разделять интервалы монотонности могут лишь точки, в которых $f'(x) = 0$, так как перемена знака непрерывной функции возможна лишь при переходе её через нуль [см. теорему 61]. Точка, в которой $f'(x) = 0$, называется *точкой стационарности функции* f. Заметим, что не каждая точка стационарности разделяет интервалы монотонности. Если же не требовать непрерывности производной функции f, то интервалы монотонности могут разделять не только точки стационарности. Например, для функции $f(x) = |x|$ точка $x_0 = 0$ разделяет интервалы монотонности, но точка не является точкой стационарности, так как в этой точке производная функции f не существует.

Пример 115. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Решение. Функция f - элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению об области определения элементарных функций, функция f определена в естественной области определения - $\operatorname{dom} f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция f непрерывна на $\operatorname{dom} f$.

Более того функция f дифференцируема на $\mathrm{dom} f$.
Находим $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. Легко видеть, что

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (0,1) \cup (1, e)$$

и

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (e, +\infty)$$

(см. рис. 3.11). Следовательно, по теореме 88, функция f убывает на $(0,1) \cup (1, e)$ и возрастает на $(e, +\infty)$.

ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером. По графику функции выделите интервалы монотонности функции.

Нажмите на кнопку first derivative (первая производная). На рисунке появится график первой производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите как связаны интервалы монотонности функции с знаком первой производной функции.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

5.8.4. Экстремумы функции.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$.

Определение 138. Говорят, что **внутренняя точка** $x_0 \in A$ есть *точка минимума (максимума)* функции f, если $\exists U_\varepsilon(x_0) \subset A$ такая, что $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \le f(x)$ $(f(x_0) \ge f(x))$. Если же $\forall x \in U^*_\varepsilon(x_0)$ выполняется строгое неравенство $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0) > f(x))$, то точка $x_0 \in A$ называется *точкой строгого минимума (строгого максимума)* функции f.

Определение 139. Внутренняя точка $x_0 \in A$ называется *точкой экстремума функции* f, если она является точкой минимума или максимума.

Определение 140. Внутренняя точка $x_0 \in A$ называется *точкой строгого экстремума функции* f, если она является точкой строгого минимума или строгого максимума функции f.

Определение 141. Значение функции f в точке минимума (максимума) называется *минимумом (максимумом) функции* f.

Определение 142. Значение функции f в точке строгого минимума (строгого максимума) называется *строгим минимумом (строгим максимумом) функции* f.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером. По графику функции выделите точки максимума и минимума.
Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

5.8.4.1. Необходимое условие экстремума функции.

Теорема 89. *Пусть задана функция*

$$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$$

и внутренняя точка $x_0 \in A$ *является точкой экстремума функции* f.
Тогда, если существует $f'(x_0)$, *то* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Так как внутренняя точка $x_0 \in A$ является точкой экстремума функции f, то $\exists U_\varepsilon(x_0) \subset A$ такая, что $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$:

$$\text{разность } f(x) - f(x_0) \text{ сохраняет знак.}$$

Определим вспомогательную функцию $g : U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$ следующим образом $\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \; : \; g(x) = f(x)$. Тогда функция g достигает своего наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 своей области определения и существует $g'(x_0) = f'(x_0)$. По теореме Ферма́ $g'(x_0) = 0$ и, следовательно, $f'(x_0) = 0$. $\square$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером. По графику функции выделите точки экстремума функции.

Нажмите на кнопку first derivative (первая производная). На рисунке появится график первой производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите за положением касательной в точках экстремума функции

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

Из теоремы 89 следует, что точка экстремума функции f является либо её стационарной точкой либо в этой точке производная функции f не существует или равна ∞.

Определение 143. Внутренняя точка $x_0 \in A$ называется *подозрительной на экстремум* функции f, если:

1. $x_0 \in A$ стационарная точка функции f или

2. производная функции f не существует или

3. производная функции f равна ∞.

5.8.4.2. Достаточное условие экстремума функции.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ и x_0 - внутренняя точка множества A.

Определение 144. Говорят, что функция f *меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку* x_0, если существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что $\forall x \in A_-(x_0) \cap U_\varepsilon(x_0) \ : \ f(x) < 0$ и $\forall x \in A_+(x_0) \cap U_\varepsilon(x_0) \ : \ f(x) > 0$.

Определение 145. Говорят, что функция f *меняет знак с плюса на минус при переходе через точку* x_0, если существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что $\forall x \in A_-(x_0) \cap U_\varepsilon(x_0)\ :\ f(x) > 0$ и $\forall x \in A_+(x_0) \cap U_\varepsilon(x_0)\ :\ f(x) < 0$.

Определение 146. Говорят, что функция f *не меняет знака при переходе через точку* x_0, если существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что

$$\forall x \in U_\varepsilon^*(x_0)\ :\ f(x) > 0\ \ (f(x) < 0)\,.$$

Теорема 90. *Пусть внутренняя точка* $x_0 \in A$ *является точкой подозрительной на экстремум функции* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ *и существует* $U_\varepsilon(x_0)$ *такая, что:*

1. функция f *непрерывна на* $U_\varepsilon(x_0)$*;*

2. функция f *дифференцируема на* $U^*_\varepsilon(x_0)$.

Тогда, если при переходе через точку x_0 *производная* f'*:*

1. меняет знак с плюса на минус, то x_0 *- точка строгого максимума функции* f*;*

2. меняет знак с минуса на плюс, то x_0 *- точка строгого минимума функции* f.

Если же при переходе через точку x_0 *производная* f' *не меняет знака, то* x_0 *не является точкой экстремума функции* f.

Доказательство.

По теореме Лагранжа имеем

$$\forall x \in U_\varepsilon^*(x_0) \; : \; f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$
$$\text{где } \xi - \text{ лежит между } x \text{ и } x_0. \tag{5.30}$$

1. При переходе через точку x_0 производная f' меняет знак с плюса на минус.

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\bigl(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \,:\, f'(x) > 0\bigr)\\ \bigl(\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon) \,:\, f'(x) < 0\bigr)\end{array}\right\} \overset{(5.30)}{\Longrightarrow}$$

$$\bigl(\forall x \in U^*_\varepsilon(x_0) \,:\, f(x) - f(x_0) < 0\bigr) \overset{138}{\Longrightarrow}$$

$$(x_0 - \text{ точка строгого максимума функции } f)$$

2. При переходе через точку x_0 производная f' меняет знак с минуса на плюс.

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\left(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \,:\, f'(x) < 0\right) \\ \left(\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon) \,:\, f'(x) > 0\right)\end{array}\right\} \stackrel{(5.30)}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\forall x \in U^*_\varepsilon(x_0) \,:\, f(x) - f(x_0) > 0\right) \stackrel{138}{\Longrightarrow}$$

$(x_0 -$ точка строгого минимума функции $f)$

3. При переходе через точку x_0 производная f' не меняет знака.
Тогда

$$\left(\forall x \in U^*_\varepsilon(x_0) \,:\, f'(x) > 0\right) \overset{(5.30)}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{r} (\forall x_1 \in (x_0-\varepsilon, x_0) \,:\, f(x_1) - f(x_0) < 0) \overset{138}{\Longrightarrow} \\ (x_0 - \text{ не точка минимума }) \\ (\forall x_2 \in (x_0, x_0+\varepsilon) \,:\, f(x_2) - f(x_0) > 0) \overset{138}{\Longrightarrow} \\ (x_0 - \text{ не точка максимума }) \end{array}\right\} \overset{138}{\Longrightarrow}$$

$$(x_0 - \text{ не является точкой экстремума })$$

Аналогично

$$\left(\forall x \in U_\varepsilon^*(x_0)\ :\ f'(x) < 0\right) \overset{(5.30)}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{r} (\forall x_1 \in (x_0-\varepsilon, x_0)\ :\ f(x_1)-f(x_0) > 0) \overset{138}{\Longrightarrow} \\ (x_0 - \text{ не точка максимума }) \\ (\forall x_2 \in (x_0, x_0+\varepsilon)\ :\ f(x_2)-f(x_0) < 0) \overset{138}{\Longrightarrow} \\ (x_0 - \text{ не точка минимума }) \end{array}\right\} \overset{138}{\Longrightarrow}$$

$$(x_0 - \text{ не является точкой экстремума })$$

$\square$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером. По графику функции выделите точки экстремума функции.

Нажмите на кнопку first derivative (первая производная). На рисунке появится график первой производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите как меняется знак производной при переходе через точки экстремума функции.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

Замечание. Условия теоремы 90, являясь достаточными, не являются необходимыми для экстремума функции.

Теорема 91. *Пусть функция*

$$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},$$

во **внутренней точке** $x_0 \in A$ *имеет непрерывные производные до порядка* n *включительно* $(n \geq 1)$.

Если $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *и* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *то*

при n *нечётном в* x_0 *экстремума нет,*

а при n *чётном в* x_0 *экстремум есть, причём это*

строгий минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, *и*

строгий максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Доказательство. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа [см. следствие 85.2], представим функцию f в некоторой $U_\varepsilon(x_0)$ в виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n,$$

где ξ лежит между x и x_0.

Учитывая условия доказываемой теоремы 91, получим $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \ \xi \in U_\varepsilon(x_0). \tag{5.31}$$

Так как $f^{(n)} : U_\varepsilon(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то существует

$$U_\delta(x_0) \subset U_\varepsilon(x_0),$$

в которой $f^{(n)}(x)$ сохраняет знак [см. Лемму 8].

Если n – чётное число, то

$$\forall x \in U_\delta^*(x_0) \,:\, (x - x_0)^n > 0$$

и, в силу (5.31), разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак в $U_\delta^*(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция f имеет строгий экстремум. Кроме того,

если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. x_0 – точка строгого минимума функции f,

если же $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ и в точке x_0 функция f имеет строгий максимум.

Если n – нечётное число, то

$$\forall x \in U_\delta^*(x_0)\,, x < x_0\,:\,(x - x_0)^n < 0$$

и

$$\forall x \in U_\delta^*(x_0)\,, x > x_0\,:\,(x - x_0)^n > 0.$$

Следовательно, в силу (5.31), разность $f(x) - f(x_0)$ не сохраняет знак в $U_\delta^*(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция f не имеет экстремума. $\square$

Следствие 91.1. *Пусть функция*

$$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$$

во **внутренней точке** $x_0 \in A$ *имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.*

Если $f'(x_0) = 0$ *и* $f''(x_0) \neq 0$, *то*

x_0 *является точкой экстремума функции* f,

причём это

строгий минимум, если $f''(x_0) > 0$ *и*

строгий максимум, если $f''(x_0) < 0$.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Прямая линия – касательная к графику функции в точке отмеченной красным маркером. По графику функции выделите точки экстремума функции.

Нажмите на кнопку second derivative (вторая производная). На рисунке появится график второй производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Обратите внимание на значения второй производной в точках максимума и минимума функции.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

Пример 116. Для функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

найти:

1. точки разрыва функции f определить их тип;
2. точки подозрительные на экстремум функции f;
3. интервалы монотонности функции f;
4. точки экстремума функции f.

Построить эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.

Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

найти:
1. точки разрыва функции f определить их тип;
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, так как по формуле, задающей функцию f, можно вычислить значение функции для любого $x \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. Найдите конечные предельные точки множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ не принадлежащие этому множеству.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

найти:

1. точки разрыва функции f определить их тип;

2. точки подозрительные на экстремум функции f.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

Шаг 2. Ответ на 1. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ и точек разрыва функция не имеет.

Конечных предельных точек множества $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ не принадлежащих этому множеству нет.

Шаг 3. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

найти:

2. точки подозрительные на экстремум функции f.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

Шаг 2. Ответ на 1. Функция f непрерывна на $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ и точек разрыва функция не имеет.

Шаг 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \ : \ f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x \cdot (x^2-1)^2}}$.

$$\left(x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

Приводим, далее, к общему знаменателю.

Шаг 4. Как быть с точками $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$?

Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ найти:
2. точки подозрительные на экстремум функции f.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Шаг 2. $\cdots$
Шаг 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \ : \ f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x \cdot (x^2-1)^2}}$.
Шаг 4. Отнесём точки $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$ к точкам подозрительным на экстремум.

В точках $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$ производную функции f нужно находить по определению производной. Но для решения поставленной задачи знание производных функции f в этих точках не обязательно. Нам нужно исследовать поведение производной функции f в проколотых окрестностях этих точек.

Шаг 5. Найдите точки стационарности функции f.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ найти:

2. точки подозрительные на экстремум функции f;

3. интервалы монотонности функции f.

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Шаг 2. $\cdots$

Шаг 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \;:\; f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x\cdot(x^2-1)^2}}$.

Шаг 4. Отнесём точки $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$ к точкам подозрительным на экстремум.

Шаг 5. $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки стационарности функции f.

Находим точки стационарности функции f из условия $f'(x) = 0$:
$\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = \sqrt[3]{x^4}$, или $(x^2-1)^2 = x^4$, $x^4 - 2x^2 + 1 = x^4$.

Шаг 6. Найдите интервалы монотонности функции f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ найти:
3. интервалы монотонности функции f.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
Шаг 2. Ответ на 1. Функция f непрерывна на $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ и точек разрыва функция не имеет.
Шаг 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \ : \ f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x \cdot (x^2-1)^2}}$.
Шаг 4. Отнесём точки $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ к точкам подозрительным на экстремум.
Шаг 5. $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки стационарности функции f.
Ответ на 2. $x_1 = -1, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_0 = 0$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 1$ – точки подозрительные на экстремум.
Шаг 6. Ответ на 3. $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(1, \infty)$ – интервалы монотонности функции f.

Интервалы $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(1, \infty)$ являются подмножествами $\operatorname{dom} f'$ и, следовательно, элементарная функция

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x \cdot (x^2-1)^2}}$$

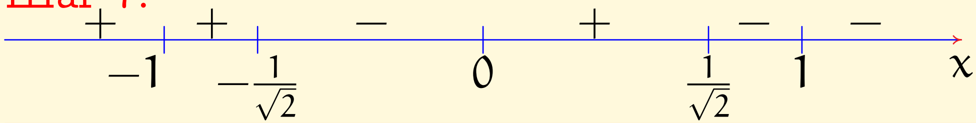
непрерывна на этих интервалах. Так как точки, в которых $f'(x) = 0$, не принадлежат этим интервалам, то функция f' сохраняет знак на каждом из этих интервалов.

Шаг 7. Определите знак функции f' на каждом интервале монотонности функции f.

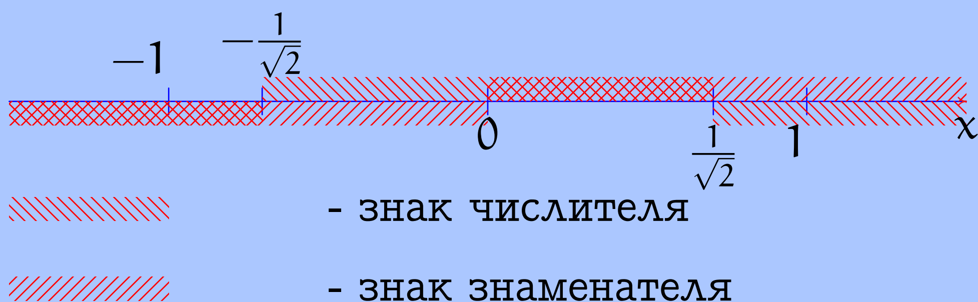
Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ найти:
4. точки экстремума функции f.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
Шаг 2. Ответ на 1. Функция f непрерывна на $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ и точек разрыва функция не имеет.
Шаг 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \ : \ f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x \cdot (x^2-1)^2}}$.
Шаг 4. Отнесём точки $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$ к точкам подозрительным на экстремум.
Шаг 5. $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки стационарности функции f.
Ответ на 2. $x_1 = -1, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_0 = 0, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
$x_2 = 1$ – точки подозрительные на экстремум.
Шаг 6. Ответ на 3. $(-\infty, -1), \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$,
$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), (1, \infty)$ – интервалы монотонности функции f.

Шаг 7.



Для определения знака функции f' выбираем в каждом интервале по точке и вычислим знак f' в выбранных точках. Второй вариант:



Шаг 8. Исследуйте точки подозрительные на экстремум функции f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 116 Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ найти:
4. точки экстремума функции f.
Нарисуйте эскиз графика функции f.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
Шаг 2. Ответ на 1. Функция f непрерывна на $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ и точек разрыва функция не имеет.

Шаг 3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \;:\; f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x\cdot(x^2-1)^2}}$.

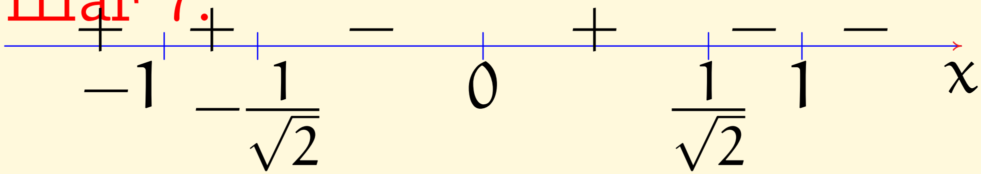
Шаг 4. Отнесём точки $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$ к точкам подозрительным на экстремум.

Шаг 5. $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки стационарности функции f.

Ответ на 2. $x_1 = -1, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_0 = 0, x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
$x_2 = 1$ – точки подозрительные на экстремум.

Шаг 6. Ответ на 3. $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$,
$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(1, \infty)$ – интервалы монотонности функции f.

Шаг 7.



Шаг 8. В точках $x_{1,2} = \mp 1$ экстремума нет,
$x_{3,4} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки строгого максимума и
$x_0 = 0$ – точка строгого минимума.

Исследование каждой подозрительной на экстремум точки функции f проведём по теореме 90.

Шаг 9. Посмотрите график функции f (см. рис. 5.14).

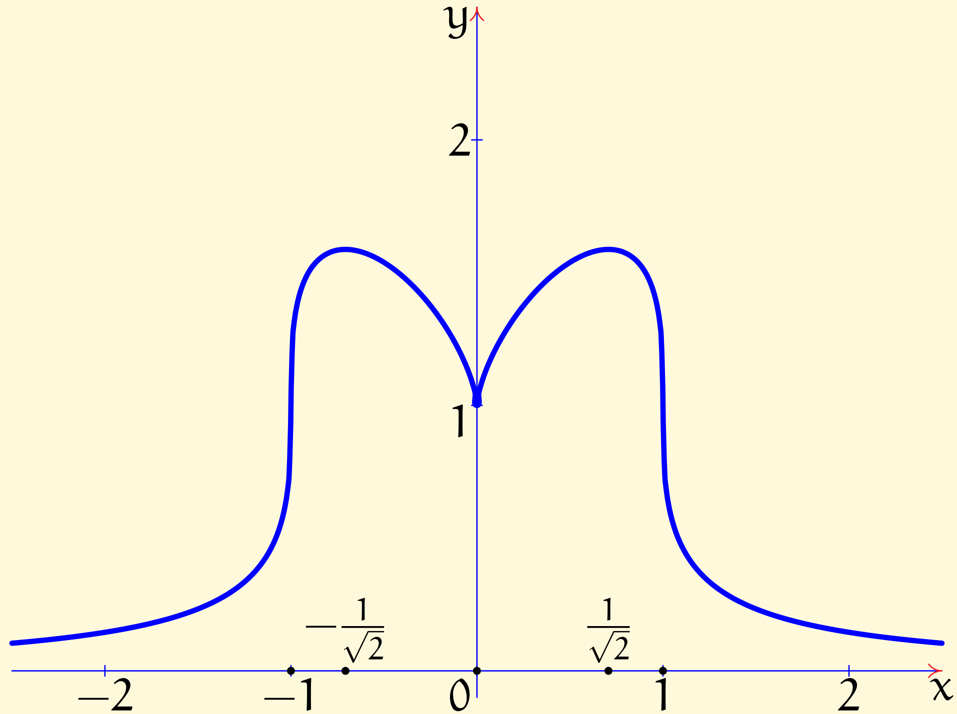


Рис. 5.14 График функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

Пример 117. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Построить эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = x^2e^{-x^2}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = x^2e^{-x^2}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = x^2e^{-x^2}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.
Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 117 Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Построить эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, так как по формуле, задающей функцию f, можно вычислить значение функции для любого $x \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. Найдите производную f' функции f. Перейдите на следующую страницу.

Пример 117 Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Построить эскиз графика функции f.
Решение.
Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
Шаг 2. $f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$.

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - x^2e^{-x^2}2x$$

Шаг 3. Найдите точки подозрительные на экстремум функции f.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 117 Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Построить эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

Шаг 2. $f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$.

Шаг 3. $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – точки стационарности функции f.

$\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$.

Из условия $f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2} = 0$ находим три точки стационарности функции f.

Шаг 4. Найдите f'' функции f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 117 Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Построить эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Шаг 2. $f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$.

Шаг 3. $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – точки стационарности функции f.

Шаг 4. $f''(x) = 2\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right) e^{-x^2}$.

$$f''(x) = 2\left((x - x^3)e^{-x^2}\right)' =$$
$$= 2\left((1 - 3x^2)e^{-x^2} + (x - x^3)e^{-x^2}(-2x)\right) =$$
$$= 2\left(1 - 3x^2 - 2x^2 + 2x^4\right) e^{-x^2}.$$

Шаг 5. Найдите точки экстремума функции f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 117 Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Построить эскиз графика функции f.

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Шаг 2. $f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$.

Шаг 3. $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – точки стационарности функции f.

Шаг 4. $f''(x) = 2\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right) e^{-x^2}$.

Шаг 5. $x_0 = 0$ – точка строгого минимума,

$x_{2,3} = \mp 1$ – точки строгого максимума.

Вычисляем f'' в точках стационарности функции f:

$$f''(0) = 2 > 0,\ f''(-1) = f''(1) = -\frac{4}{e} < 0.$$

К каждой точке стационарности функции f применим следствие 91.1.

Ответ: $x_0 = 0$ – точка строгого минимума,

$x_{2,3} = \mp 1$ – точки строгого максимума.

График функции см. на рис. 5.15.

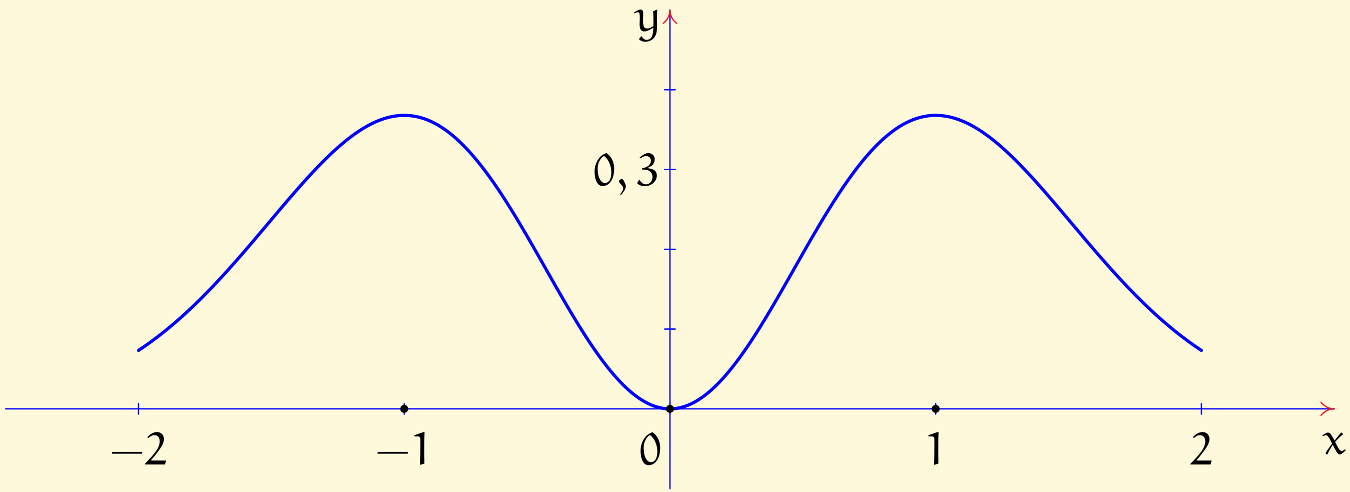


Рис. 5.15 График функции $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

5.8.5. О наибольшем и наименьшем значениях функции.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда, в силу второй теоремы Вейерштрасса [см. теорему 62], функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Точки, в которых достигаются эти значения, могут быть как внутренними точками интервала (a, b), так и граничными.

Алгоритм для их отыскания следующий:

1. Находим все подозрительные на экстремум точки, лежащие на интервале (a, b).

2. Вычисляем значения функции во всех подозрительных на экстремум точках и сравниваем их с граничными значениями $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее и наименьшее из этих чисел и будут наибольшим и наименьшим значением функции на $[a, b]$.

Иллюстрация показывает, что наибольшее и наименьшее значения значения функции могут достигаться только в точках экстремума функции или в граничных точках сегмента определения функции.

Границы сегмента определения задаются движками “left boundary” и “right boundary”.

Пример 118. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 16$$

на $[1, 4]$.

Решение. Так как $[1,4] \subset \mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и f дифференцируема на $\mathrm{dom} f$, то точки подозрительные на экстремум функции f совпадают с точками стационарности функции f. Находим точки стационарности функции f, решая уравнение

$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2\left(x^3-8\right)}{x^2} = 0.$

Решением последнего уравнения является $x_1 = 2 \in [1,4]$. Вычислим, далее,

$$f(1) = 1, f(2) = -4, f(4) = 4.$$

Сравнивая найденные значения, видим, что наибольшее значение достигается в точке $x_2 = 4$ и равно 4, а наименьшее - в точке $x_1 = 2$ и равно (-4).

5.8.6. Условия выпуклости функции.

Определение 147. Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой на интервале* (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любого числа $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{5.32}$$

Если при $x_1 \neq x_2$ это неравенство является строгим, то функция называется *строго выпуклой на интервале* (a, b).

п.1. Геометрический смысл определения выпуклой функции.

Фиксируем произвольные $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ и $\lambda \in (0,1)$. Обозначим

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 - \lambda(x_2 - x_1) \in (x_1, x_2).$$

Пусть $A\,(x_1, f(x_1))\,,\ B\,(x_2, f(x_2))\ \in$ graff и Π прямая проходящая через эти точки. Запишем каноническое уравнение прямой

$$\Pi\ :\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

или

$$\Pi\ :\ y = f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя в последнее уравнение

$$x = x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 - \lambda(x_2 - x_1),$$

получим

$$\begin{aligned} y_\lambda = f(x_1)+ & \\ & + \left(f(x_2) - f(x_1)\right) \frac{x_2 - \lambda(x_2 - x_1) - x_1}{x_2 - x_1} = \\ & \quad = f(x_1) + \left(f(x_2) - f(x_1)\right)(1-\lambda) = \\ & \qquad = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \end{aligned}$$

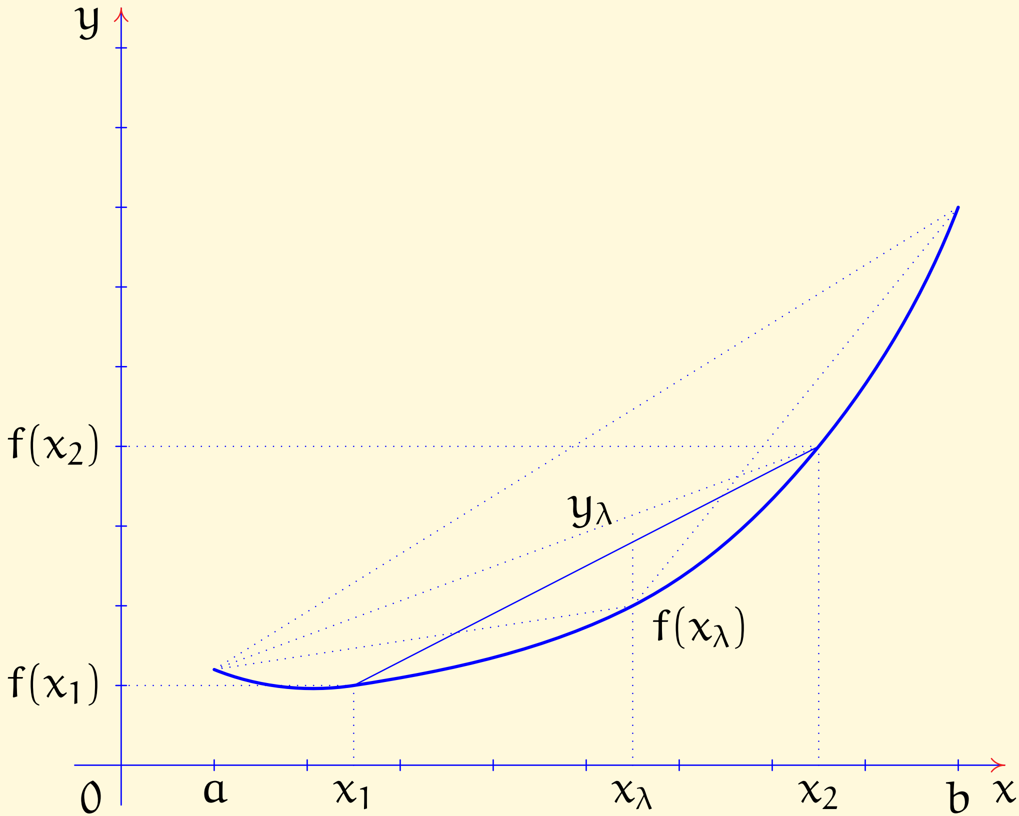


Рис. 5.16 График выпуклой функции

Геометрически условие выпуклости функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ означает, что точки любой дуги графика функции лежат под хордой стягивающей эту дугу (см. рис. 5.16).

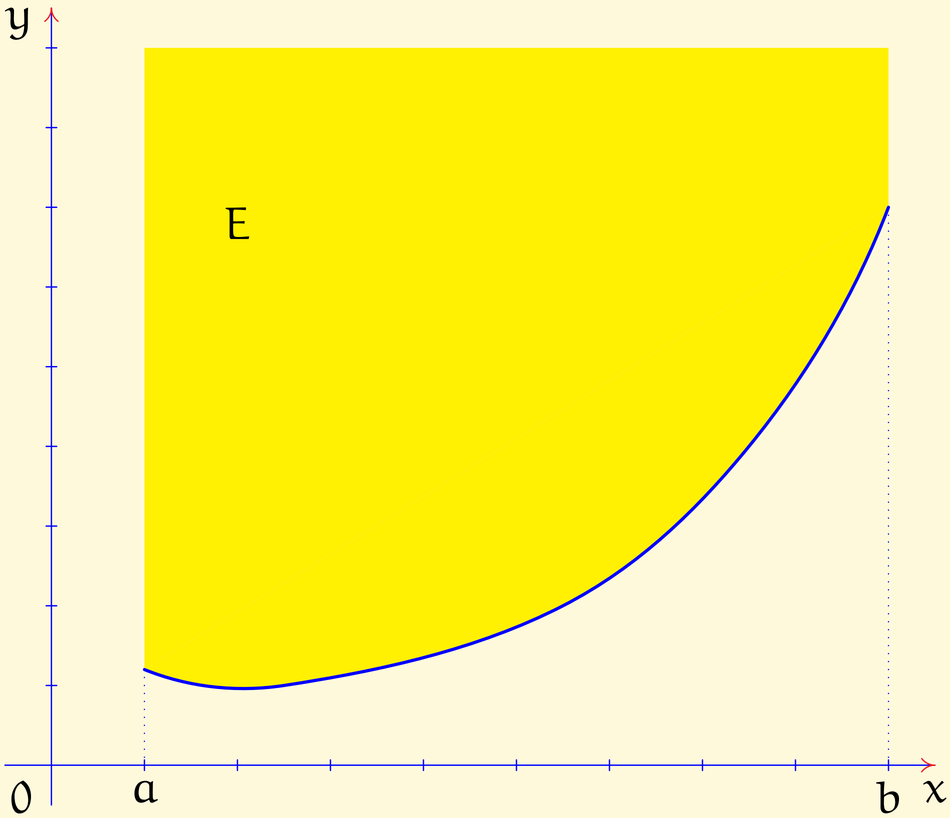


Рис. 5.17 График выпуклой функции

Другая интерпретация:
множество

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (a, b), f(x) < y \right\}$$

точек плоскости, лежащих над графиком функции, является выпуклым, откуда и сам термин “выпуклая” функция (см. рис. 5.17).

п.2. Эквивалентное определение выпуклой функции.

Фиксируем произвольные

$$x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 \text{ и } x \in (x_1, x_2).$$

Тогда точке x соответствует λ_x такое, что $x = \lambda_x x_1 + (1 - \lambda_x) x_2$.
Найдём λ_x.

$$(x = x_2 - (x_2 - x_1)\lambda_x) \Longrightarrow \left(\lambda_x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\ 1 - \lambda_x = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Тогда неравенство (5.32) можно переписать так

$$\left(f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)\right) \iff$$

$$((x_2 - x_1) f(x) \le (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)) \iff$$

$$(((x_2 - x) + (x - x_1))\, f(x) \le (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)) \iff$$

$$((f(x) - f(x_1))\, (x_2 - x) \le (f(x_2) - f(x))\, (x - x_1)) \iff$$

$$\left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\right)$$

Определение 148. Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой на интервале* (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ и любого $x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{5.33}$$

Если это неравенство является строгим, то функция называется *строго выпуклой на интервале* (a, b).

п.3. Условия выпуклости дифференцируемых функций.

Теорема 92. *Пусть* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *дифференцируема на* (a, b). *Для того чтобы* f *была выпуклой на* (a, b) *необходимо и достаточно чтобы* $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *была неубывающей функцией на* (a, b).

Доказательство. Необходимость. Фиксируем произвольные $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Тогда, в силу определения 148, для любого $x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \qquad (5.34)$$

Перейдём к пределу в (5.34) при $x \to x_1$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

и при $x \to x_2$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$$

Из выделенного синим цветом следует, что f' неубывающая функция на (a, b).

Достаточность. Фиксируем три точки $x, x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x < x_2$. По теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} &= f'(\xi_1),\ x_1 < \xi_1 < x \\ x < \xi_2 < x_2, \quad f'(\xi_2) &= \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Так как $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ неубывающая функция на (a, b), то из (5.35) следует, что $\xi_1 < \xi_2$ и $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, т.е.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Из выделенного синим цветом, в силу определения 148, получаем, что f выпукла на (a, b). $\square$

Теорема 93. *Пусть* $\mathrm{f} : (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема на* (a, b). *Для того чтобы* f *была выпуклой на* (a, b) *необходимо и достаточно чтобы* $\forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b}) : \mathrm{f}''(\mathrm{x}) \geq 0$.

Доказательство.

$$\left(f - \text{ выпукла на } (a,b)\right) \overset{92}{\Longleftrightarrow} \left(f' - \text{ неубывает на } (a,b)\right) \overset{87}{\Longleftrightarrow} \left(\forall x \in (a,b) \,:\, f''(x) \ge 0\right)$$

$\square$

Теорема 94. *Пусть* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемая на интервале* (a, b). *Если её производная* $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ *возрастает на* (a, b), *то функция* f *строго выпукла на* (a, b).

Доказательство. Фиксируем три точки $x, x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x < x_2$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1),\ x_1 < \xi_1 < x$$
$$x < \xi_2 < x_2, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{5.36}$$

Так как $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ возрастающая функция на (a, b), то из (5.36) следует, что $\xi_1 < \xi_2$ и $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, т.е.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Из выделенного синим цветом, в силу опр. 148, получаем, что функция f строго выпукла на (a, b). $\square$

Теорема 95. *Пусть* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *имеет вторую производную на интервале* (a, b). *Если* $\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$ *, то функция* f *строго выпукла на* (a, b).

Доказательство.

$$\left(\forall x \in (a,b) : f''(x) > 0\right) \overset{88}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(f' - \text{ возрастает на } (a,b)\right) \overset{94}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(f - \text{ строго выпукла на } (a,b)\right)$$

$\square$

Теорема 96. *Дважды дифференцируемая на (a, b) функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла на (a, b) тогда и только тогда, когда график функции всеми своими точками лежит не ниже любой проведённой к нему касательной.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Уравнение касательной к graff в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид [см. уравнение (5.6)]

$$K : y_{\text{кас.}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.37}$$

По формуле Тейлора [см. следствие 85.2] с остаточным членом в форме Лагранжа для всех $x \in (a, b)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \overset{(5.37)}{=}$$
$$= y_{\text{кас.}} + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \text{ где } \xi \in (a, b). \tag{5.38}$$

Тогда

$$\left(f - \text{ выпукла на } (a, b)\right) \overset{93}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Big(\forall \xi \in (a, b) \ : \ f''(\xi) \geq 0\Big) \overset{(5.38)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\forall x \in (a, b) \ : \ f(x) \geq y_{\text{кас.}}\right)$$

$\square$

п.4. Вогнутые функции.

Определение 149. Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *вогнутой на интервале* (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любого числа $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Если при $x_1 \neq x_2$ это неравенство является строгим, то функция называется *строго вогнутой на интервале* (a, b).

Замечание. Очевидно, что, если функция f выпукла (вогнута) на (a, b), то функция $g = -f$ вогнута (выпукла) на (a, b). Это простое замечание позволит нам получить свойства вогнутой функции f из соответствующих свойств выпуклой функции $g = -f$.

Теорема 97. *Для того чтобы функция*

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

дифференцируемая на интервале (a, b) *была вогнутой на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы её производная* f' *была невозрастающей функцией на* (a, b).

Доказательство.

$$\left(f - \text{ вогнута на } (a,b)\right) \overset{\text{Замеч.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(g = (-f) - \text{ выпукла на } (a,b)\right) \overset{92}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(g' - \text{ неубывающая на } (a,b)\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(f' - \text{ невозрастающая на } (a,b)\right)$$

$\square$

Теорема 98. *Для того чтобы функция*

$$f : (a, b) \to \mathbb{R},$$

имеющая вторую производную на (a, b), *была вогнутой на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall x \in (a, b) \ : \ f''(x) \le 0.$$

Доказательство.

$$\left(f - \text{ вогнута на } (a,b)\right) \overset{\text{Замеч.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(g = (-f) - \text{ выпукла на } (a,b)\right) \overset{93}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Big(\forall x \in (a,b)\ :\ g''(x) \geq 0\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Big(\forall x \in (a,b)\ :\ f''(x) \leq 0\Big)$$

$\square$

Теорема 99. *Пусть* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемая на интервале* (a, b). *Если её производная* $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ *убывает на* (a, b), *то функция* f *строго вогнута на* (a, b).

Доказательство.

$$\big(f' - \text{ убывает на } (a, b)\big) \iff$$

$$\big(g' = (-f') - \text{возрастает на } (a, b)\big) \xRightarrow{94}$$

$$(g = (-f) - \text{ строго выпукла на } (a, b)) \overset{\text{Замеч.}}{\iff}$$

$$(f - \text{ строго вогнута на } (a, b))$$

$\square$

Теорема 100. *Пусть* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *имеет вторую производную на интервале* (a, b). *Если* $\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$, *то функция* f *строго вогнута на* (a, b).

Доказательство.

$$\left(\forall x \in (a, b)\ :\ f''(x) < 0\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\forall x \in (a, b)\ :\ g''(x) = \left(-f''(x)\right) > 0\right) \overset{95}{\Longrightarrow}$$

$$(g = (-f) - \text{ строго выпукла на } (a, b)) \overset{\text{Замеч.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(f - \text{ строго вогнута на } (a, b))$$

$\square$

Теорема 101. *Дважды дифференцируемая на интервале* (a, b) *функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *вогнута на* (a, b) *тогда и только тогда, когда график функции всеми своими точками лежит не выше любой проведённой к нему касательной.*

Доказательство.

$$\left(f - \text{ вогнута на } (a,b)\right) \overset{\text{Замеч.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(g = (-f) - \text{ выпукла на } (a,b)\right) \overset{96}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\forall x \in (a,b) \ : \ g(x) = -f(x) \geq y_{\text{кас.}}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\forall x \in (a,b) \ : \ f(x) \leq y_{\text{кас.}}\right)$$

$\square$

ВЫПУКЛОСТЬ (ВОГНУТОСТЬ) ФУНКЦИИ

Нажмите кнопку tangent line (касательная). По графику функции выделите интервалы вогнутости и выпуклости функции.

Нажмите на кнопку first derivative (первая производная). На рисунке появится график первой производной. Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите как связаны интервалы выпуклости и вогнутости функции с поведением первой производной функции.

Нажмите на кнопки first derivative и second derivative (вторая производная). На рисунке исчезнет график первой производной и появится график второй производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите как связаны интервалы выпуклости и вогнутости функции с знаком второй производной функции.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

Пример 119. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.

Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$, так как по формуле, задающей функцию f, можно вычислить значение функции для любого $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = \sqrt[3]{2}$.

Шаг 2. Найдите производную f' функции f.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

Шаг 2. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f'(x) = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^3 - 2) - 3x^2x^4}{(x^3 - 2)^2} =$$

$$= \frac{4x^6 - 8x^3 - 3x^6}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2}.$$

Шаг 3. Найдите производную f'' функции f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

Шаг 2. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f'(x) = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Шаг 3. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

$$f''(x) = \frac{(6x^5 - 24x^2)(x^3-2)^2 - 2(x^3-2)3x^2}{(x^3-2)^4} =$$
$$= \frac{6x^8 - 12x^5 - 24x^5 + 48x^2 - 6x^8 + 48x^5}{(x^3-2)^3} = \frac{12x^5 + 48x^2}{(x^3-2)^3}.$$

Шаг 4. Найдите нули функции f''.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

Шаг 2. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f'(x) = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Шаг 3. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Шаг 4. $x_1 = -\sqrt[3]{4}$, $x_2 = 0$ – нули функции f''.

$$\left(f''(x) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(12x^2(x^3 + 4) = 0.\right)$$

Шаг 5. Найдите интервалы монотонности функции f'.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

Шаг 2. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f'(x) = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Шаг 3. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Шаг 4. $x_1 = -\sqrt[3]{4}$, $x_2 = 0$ – нули функции f''.

Шаг 5. $(-\infty, -\sqrt[3]{4}), \left(-\sqrt[3]{4}, 0\right), \left(0, \sqrt[3]{2}\right), (\sqrt[3]{2}, +\infty)$ – интервалы монотонности функции f'.

Интервалы $(-\infty, -\sqrt[3]{4}), \left(-\sqrt[3]{4}, 0\right), \left(0, \sqrt[3]{2}\right), (\sqrt[3]{2}, +\infty)$ являются подмножествами $\operatorname{dom} f''$ и, следовательно, элементарная функция $f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$ непрерывна на этих интервалах. Так как точки, в которых $f''(x) = 0$, не принадлежат этим интервалам, то функция f'' знакопостоянна на каждом из этих интервалов.

Шаг 6. Определите знак функции f'' на каждом интервале монотонности функции f'.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

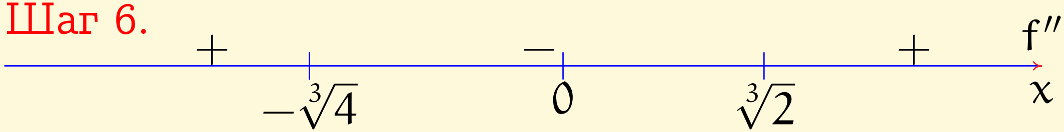
Шаг 2. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f'(x) = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Шаг 3. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

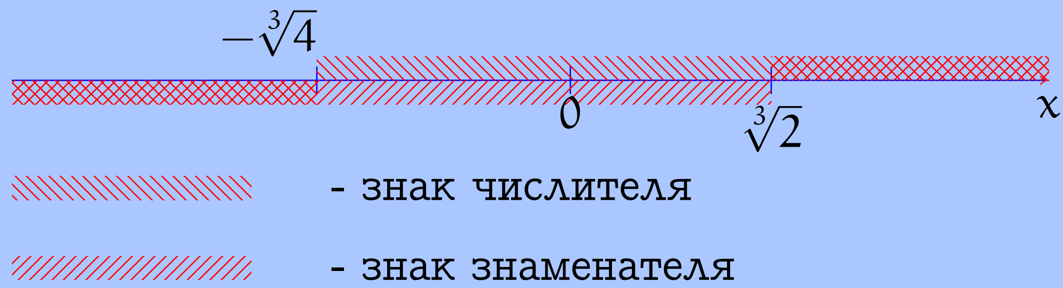
Шаг 4. $x_1 = -\sqrt[3]{4}$, $x_2 = 0$ – нули функции f''.

Шаг 5. $(-\infty, -\sqrt[3]{4}), \left(-\sqrt[3]{4}, 0\right), \left(0, \sqrt[3]{2}\right), (\sqrt[3]{2}, +\infty)$ – интервалы монотонности функции f'.

Шаг 6.



Для определения знака функции f'' выбираем в каждом интервале по точке и вычислим знак f'' в выбранных точках. Второй вариант:



Шаг 7. Укажите интервалы выпуклости и вогнутости функции f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 119 Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}.$$

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$.

Шаг 2. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f'(x) = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Шаг 3. $\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

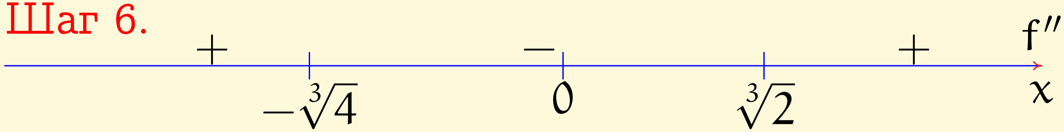
Шаг 4. $x_1 = -\sqrt[3]{4}$, $x_2 = 0$ – нули функции f''.

Шаг 5. $(-\infty, -\sqrt[3]{4}), \left(-\sqrt[3]{4}, 0\right), \left(0, \sqrt[3]{2}\right), (\sqrt[3]{2}, +\infty)$

– интервалы монотонности функции f'.

Продолжение на следующей странице.

Шаг 6.



Шаг 7. Ответ. На интервалах $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$ и $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ функция f строго выпуклая; на интервале $(-\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ функция f строго вогнутая.

По теореме 95 и теореме 100 находим интервалы выпуклости и вогнутости функции f.

5.8.7. Точки перегиба графика функции.

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Определение 150. Точка графика $(x_0, f(x_0))$ называется его *точкой перегиба*, если:
1. в точке $(x_0, f(x_0))$ можно провести касательную к графику функции f (касательная может быть и вертикальной);
2. существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что функция f выпукла (вогнута) на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и вогнута (выпукла) на интервале $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Таким образом, при переходе через точку перегиба выпуклость сменяется вогнутостью (вогнутость сменяется выпуклостью) функции, т.е. в точке $(x_0, f(x_0))$ график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую сторону [см. теорему 96 и теорему 101].

ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ

По графику функции выделите интервалы вогнутости и выпуклости функции.

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите в каких точках график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую сторону. Это и есть точки перегиба графика функции.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

Следующая теорема даёт аналитический признак абсциссы точки перегиба графика функции.

Теорема 102. *Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *и* $(x_0, f(x_0))$ *точка перегиба графика функции* f. *Пусть, далее, функция* f *дифференцируема в некоторой* ε *- окрестности точки* x_0. *Тогда, если существует* $f''(x_0)$, *то* $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $(x_0, f(x_0))$ точка перегиба графика функции f. Тогда, в силу определения 150, существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что

$$\left\{\begin{array}{r} \left(f \text{ выпукла (вогнута) на } (x_0-\varepsilon, x_0)\right) \overset{92 \text{ и } 97}{\Longrightarrow} \\ \left(f' \uparrow (\downarrow) \text{ на } (x_0-\varepsilon, x_0)\right) \\ \left(f \text{ вогнута (выпукла) на } (x_0, x_0+\varepsilon)\right) \overset{97 \text{ и } 92}{\Longrightarrow} \\ \left(f' \downarrow (\uparrow) \text{ на } (x_0, x_0+\varepsilon)\right) \end{array}\right\} \overset{138}{\Longrightarrow}$$

$$\left(x_0 \text{ - точка максимума (минимума) функции } f'\right) \overset{89}{\Longrightarrow}$$

$$\left(f''(x_0) = 0\right) \qquad \square$$

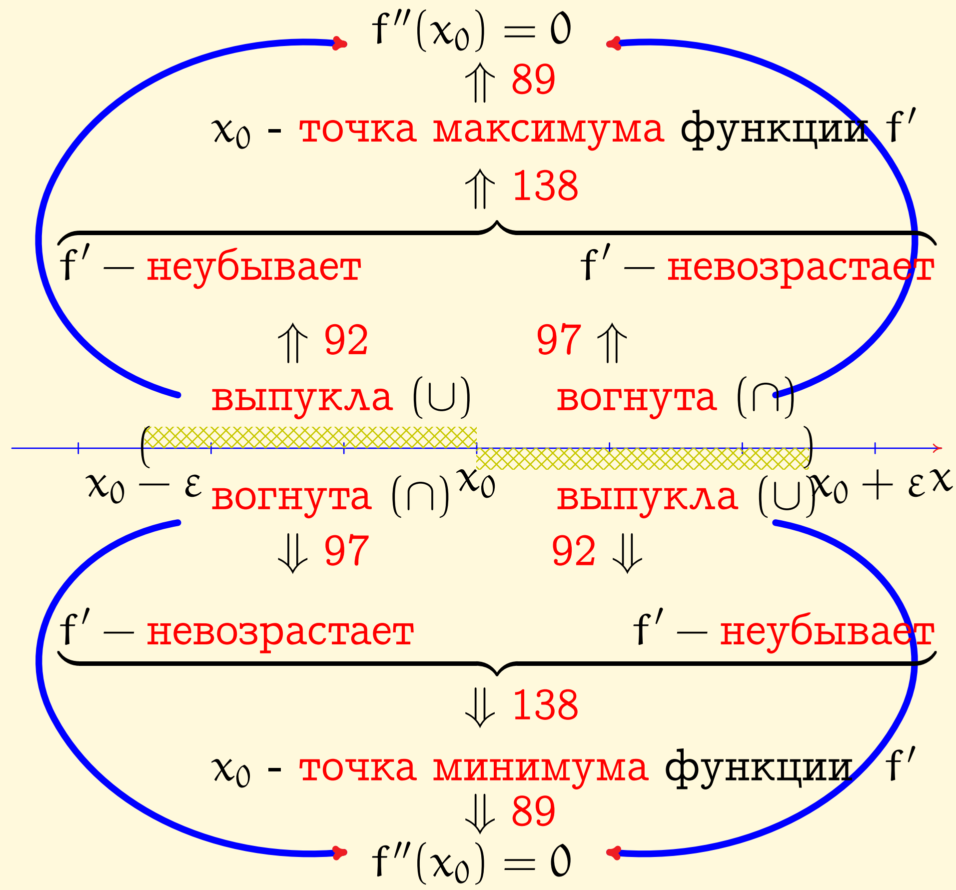


Рис. 5.18 Схема доказательства теоремы 102

В силу теоремы 102, решения уравнения $f''(x) = 0$, являются абсциссами точек подозрительных на перегиб графика функции. Кроме этого, точки в которых не существует f'', также являются абсциссами точек подозрительных на перегиб графика функции. Достаточные условия того, что точка, подозрительная на перегиб графика функции, действительно является точкой перегиба графика функции, даёт следующая теорема.

Теорема 103. *Пусть* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *и в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{graf} f$ *можно провести касательную к графику функции* f. *Если существует* $U_\varepsilon(x_0)$ *такая, что:*

1. функция f *имеет непрерывную вторую производную в* $U^*_\varepsilon(x_0)$;

2. $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0)$: $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$;

3. $\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$: $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$.

Тогда точка $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{graf} f$ *является точкой перегиба графика функции* f.

Доказательство. Пусть существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что

$$\left.\begin{array}{r}
(\text{в точке } (x_0, f(x_0)) \in \text{graff можно провести касательную }) \\
(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) : f''(x) > 0 \ (f''(x) < 0)) \overset{95 \text{ и } 100}{\Longrightarrow} \\
(f \text{ строго выпукла (строго вогнута) на интервале } (x_0-\varepsilon, x_0)) \\
(\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon) : f''(x) < 0 \ (f''(x) > 0)) \overset{100 \text{ и } 95}{\Longrightarrow} \\
(f \text{ строго вогнута (строго выпукла) на интервале } (x_0, x_0+\varepsilon))
\end{array}\right\} \overset{150}{\Longrightarrow}$$

$$((x_0, f(x_0)) \in \text{graff является точкой перегиба графика функции } f)$$

$\square$

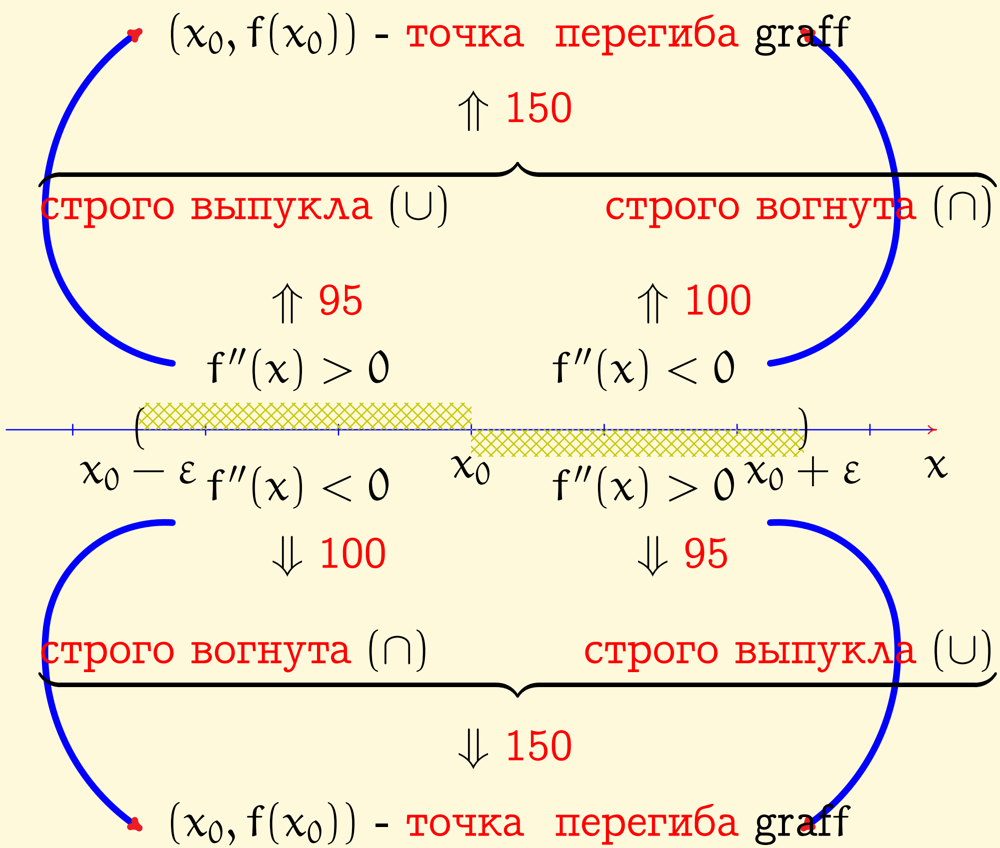


Рис. 5.19 Схема доказательства теоремы 103

Точки перегиба графика функции

По графику функции выделите интервалы вогнутости и выпуклости функции.

Протащите мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Проследите в каких точках график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую сторону.

Нажмите на кнопку second derivative (вторая производная). На рисунке появится график второй производной. Протащите снова мышкой красный маркер вдоль оси абсцисс. Точки, в которых вторая производная обращается в нуль, являются подозрительными на перегиб графика функции. Проследите как меняется знак второй производной при переходе через эти точки.

Выбирайте среди polynomial, trigonometric или logarithmic функций.

Пример 120. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба графика, функции $f(x) = 3x^2 - x^3$.

Решение. Функция f - элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению об области определения элементарных функций, функция f определена в естественной области определения - $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция f непрерывна на $\mathrm{dom}\, f$. Более того, функция f имеет непрерывную вторую производную на $\mathrm{dom} f$.

Находим $f'(x) = 6x - 3x^2, f''(x) = 6 - 6x$. При $x \in (-\infty, 1)$ имеем $f''(x) > 0$ и, в силу теоремы 95, функция f строго выпуклая на $(-\infty, 1)$. На интервале $(1, +\infty)$ функция f строго вогнута, так как $\forall x \in (1, +\infty) : f''(x) < 0$ (см. теорему 95). Тогда, в силу теоремы 103, точка $(1, 2)$ является точкой перегиба графика функции f.

5.9. Асимптоты графика функции.

Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ и множество A - неограниченное. Так как множество A неограниченно, а размеры чертежа конечны, то мы не можем изобразить весь график функции f на чертеже. В таких случаях за пределами чертежа стараются оставить части графика, о виде которых легко составить представление, исходя из того, что начерчено. Например, график функции $f(x) = \sin x$, в силу её периодичности, достаточно изобразить на любом промежутке длинною 2π.

Определение 151. Прямая Π называется *асимптотой графика функции* f *при* $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$, если расстояние от точки $(x, f(x)) \in \mathrm{graff}$ до прямой Π стремится к нулю при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

Теорема 104. *Прямая* $\Pi : y = kx + b$ *является асимптотой графика функции* f *при* $x \to \mp\infty$ *тогда и только тогда когда*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ *при* $x \to \mp\infty$.

Доказательство.

$$\left(\begin{gathered}\Pi : y = kx + b \text{ асимптота} \\ M\,(x, f(x)) \in \text{graff}\end{gathered}\right) \overset{151}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{gathered}d\,(M, \Pi) = \frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}} \to 0 \\ \text{при } x \to \mp\infty\end{gathered}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\lim_{x\to\mp\infty} (f(x) - kx - b) = 0\right) \overset{28}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{gathered}f(x) = kx + b + \alpha(x), \\ \text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \mp\infty\end{gathered}\right)$$

$\square$

Теорема 105. *Прямая* $\Pi : y = kx + b$ *является* *асимптотой* *графика функции* f *при* $x \to -\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{5.39}$$

Доказательство.

$$\left(\begin{matrix} \Pi : y = kx + b \text{ асимптота} \\ \text{при } x \to -\infty \end{matrix}\right) \overset{104}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{matrix} f(x) = kx + b + \alpha(x), \\ \text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to -\infty \end{matrix}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k; \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b. \end{matrix}\right)$$

$\square$

Теорема 106. *Прямая* $\Pi : y = kx + b$ *является* *асимптотой* *графика функции* f *при* $x \to +\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{5.40}$$

Доказательство.

$$\left(\begin{array}{c}\Pi: y = kx + b \text{ асимптота}\\ \text{при } x \to +\infty\end{array}\right) \overset{104}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{c} f(x) = kx + b + \alpha(x),\\ \text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty\end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k;\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.\end{array}\right)$$

$\square$

Замечание 1. Функция $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ может иметь две различные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Замечание 2.

Если хотя бы один из пределов (5.39) [(5.40)] не существует или равен ∞, то график функции f асимптоты при $x \to -\infty$ $[x \to +\infty]$ не имеет.

Пример 121. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Нарисовать эскиз графика функции f.

Пример 121 Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Нарисовать эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. Функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ – элементарная функция и не указана область определения этой функции. Согласно соглашению о области определения элементарных функций (см. раздел 3.7), функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ определена в естественной области определения – $\operatorname{dom} f$. Причём, в силу теоремы 66 о непрерывности элементарных функций, функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ непрерывна на $\operatorname{dom} f$.

Найдите $\operatorname{dom} f$ и перейдите на следующую страницу.

Пример 121 Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Нарисовать эскиз графика функции f.

Решение.

Шаг 1. $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$.

Подкоренное выражение отрицательное для всех $x \in (-1, 1)$.

Шаг 2. Уравнение асимптоты графика функции при $x \to -\infty$ ищем в виде

$$\Pi_- : y = kx + b.$$

Найдите k.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 121 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
Нарисовать эскиз графика функции f.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$.
Шаг 2. $k = -1$.

В силу теоремы 105,

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{3.19.3}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Шаг 3. Уравнение асимптоты графика функции при $x \to -\infty$ ищем в виде Π_- : $y = -x + b$. Найдите b.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 121 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
Нарисовать эскиз графика функции f.
Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$.
Шаг 2. $k = -1$.
Шаг 3. $b = 0$, $\Pi_- : y = -x$.

В силу теоремы 105,

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = 0.$$

Шаг 4. Уравнение асимптоты графика функции при $x \to +\infty$ ищем в виде $\Pi_+ : y = kx + b$.

Найдите k.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 121 Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Нарисовать эскиз графика функции f.

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$.

Шаг 2. $k = -1$. Шаг 3. $b = 0$, $\Pi_- : y = -x$.

Шаг 4. $k = 1$.

В силу теоремы 106,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{3.19.3}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Шаг 5. Уравнение асимптоты графика функции при $x \to +\infty$ ищем в виде $\Pi_+ : y = x + b$.

Найдите b.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 121 Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Нарисовать эскиз графика функции f.

Решение. Шаг 1. $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$.

Шаг 2. $k = -1$. Шаг 3. $b = 0$, $\Pi_- : y = -x$.

Шаг 4. $k = 1$. Шаг 5. $b = 0$, $\Pi_+ : y = x$.

В силу теоремы 106,

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0.$$

Посмотрите график функции f на рис. 5.20.

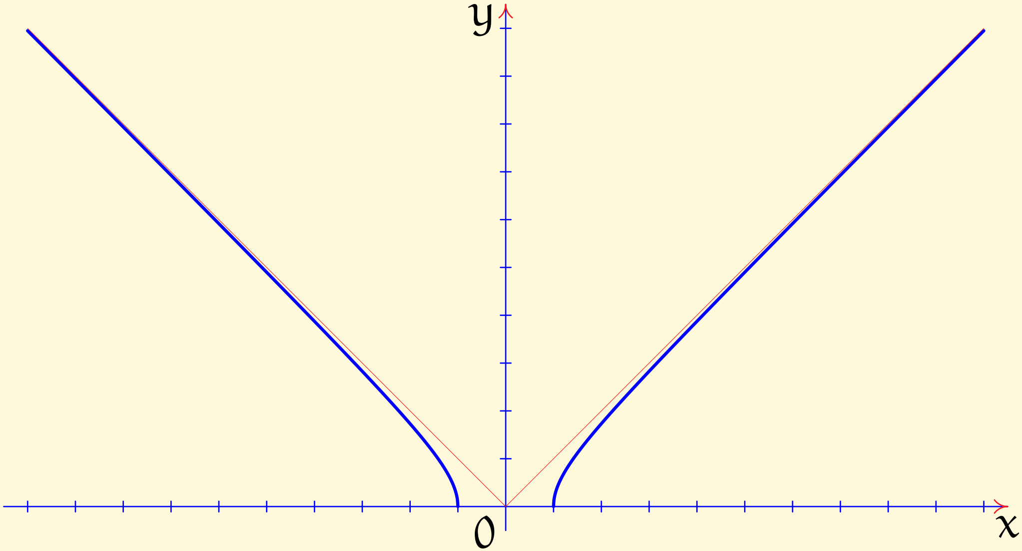


Рис. 5.20 Асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

5.10. Построение графика функции.

Для наглядного описания функции очень часто используют её графическое представление. Как правило, такое представление бывает полезно для обсуждения качественных вопросов поведения исследуемой функции. При этом график функции должен правильно отражать основные элементы поведения функции.

При построении графика функции можно использовать следующую схему:

- Если задана элементарная функция и не указана область определения функции, то найти её естественную область определения.
- Отметить (если они есть) особенности функции (периодичность, чётность и нечётность, сохранение знака), найти точки пересечения графика функции с осями координат.

- Если граничные точки области определения функции принадлежат ей, то найти значения функции в этих точках, в противном случае – выяснить поведение функции при стремлении x к “граничным точкам” области её определения.
- Найти точки разрыва функции и определить их тип.
- Найти асимптоты графика функции или убедится в их отсутствии.

- Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции.
- Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и найти точки перегиба графика функции.

По результатам такого исследования строится график функции.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Исследование функций.

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

6.1. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке.

Пусть задана $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, и $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T \in E$ предельная точка множества E. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = \left(\Delta x^1, \Delta x^2, \ldots, \Delta x^n\right)^T$ так чтобы $x_0 + \Delta x \in E$. Обозначим

$$\Delta f(x_0, \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

и будем называть *приращением функции f в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx*.

Определение 152. Функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *дифференцируемой в точке $x_0 \in E$*, предельной для множества E, если приращение $\Delta f(x_0, \Delta x)$ функции f можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x) =$$
$$= a_1 \cdot \Delta x^1 + a_2 \cdot \Delta x^2 + \dots + a_n \cdot \Delta x^n + o(\Delta x),$$
$$\text{при } \Delta x \to 0. \quad (6.1)$$

Выражение $a_1 \cdot \Delta x^1 + a_2 \cdot \Delta x^2 + \dots + a_n \cdot \Delta x^n$ в (6.1) называется *дифференциалом функции f в точке $x_0 \in E$* и обозначается $df(x_0)$.

Замечание 1. Функция f дифференцируема в точке $x_0 \in E$, если изменение её значений в окрестности исследуемой точки линейно с точностью до поправки бесконечно малой по сравнению с величиной Δx смещения от точки x_0.

6.2. Частные производные функции в точке.

Пусть задана $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемая во внутренней точке $x_0 \in E$. Дадим аргументу x приращение

$$\Delta x = \left(0, 0, \ldots, 0, \Delta x^i, 0, \ldots, 0\right)^T$$

так чтобы $x_0 + \Delta x \in E$. Обозначим

$$\Delta f(x_0, \Delta x^i) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

и будем называть *частным приращением функции f в точке x_0, вызванное приращением аргумента по координате x^i*.

Тогда, в силу дифференцируемости функции f во внутренней точке $x_0 \in E$, $\Delta f(x_0, \Delta x^i)$ функции f можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x^i) = a_i \cdot \Delta x^i + o(\Delta x^i),$$

$$\text{при } \Delta x^i \to 0.$$

Это равенство означает, что если фиксировать в функции $f(x^1, \ldots, x^n)$ все переменные, кроме одной i-й переменной, то получаемая при этом функция i-ой переменной оказывается дифференцируемой в точке x^i.

Определение 153. Если существует

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + \Delta x^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^n)}{\Delta x^i},$$

то он называется *частной производной функции* f *в точке* $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^T$ *по переменной* x^i и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}, f'_{x^i}(x_0).$$

Теорема 107. *Если* $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$, *дифференцируема во внутренней точке* $x_0 \in E$, *то в этой точке функция* f *имеет частные производные по каждой переменной и дифференциал функции однозначно определяется этими частными производными в виде*

$$df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} \cdot \Delta x^1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^n} \cdot \Delta x^n. \quad (6.2)$$

Доказательство. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема во внутренней точке $x_0 \in E$. Тогда, в силу определения 152,

$$df(x_0) = a_1 \cdot \Delta x^1 + a_2 \cdot \Delta x^2 + \cdots + a_n \cdot \Delta x^n.$$

Фиксируем произвольное $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Так как функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема во внутренней точке $x_0 \in E$, то, в силу определения 152,

$$\Delta f(x_0, \Delta x^i) = a_i \cdot \Delta x^i + o(\Delta x^i),$$

при $\Delta x^i \to 0$.

Откуда следует, что

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x^i)}{\Delta x^i} = a_i + \frac{o(\Delta x^i)}{\Delta x^i}$$

и

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x^i)}{\Delta x^i} = a_i,$$

то есть, в силу определения 153,

$$a_i = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}.$$

$\square$

Учитывая, что $dx^i = \Delta x^i, i = 1, 2, \ldots, n$, формулу (6.2) можно переписать в виде

$$df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} \cdot dx^1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^n} \cdot dx^n. \tag{6.3}$$

Если в каждой точке $x \in D \subset E$ существуют частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}, i = 1, 2, \ldots, n$, то они задают новые функции

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} : D \to \mathbb{R},\ D \subset E \subset \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Алгоритм вычисления частных производных.

Пусть $M_0(x_0, y_0) \in E$ точка в которой существуют частные производные $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$. Обозначим $f(x, y_0) = \varphi(x)$ и $f(x_0, y) = \psi(y)$. Тогда

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(M_0, \Delta x)}{\Delta x} = $$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \varphi'(x_0) \quad (6.4)$$

и

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f(M_0, \Delta y)}{\Delta y} = $$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \psi(y_0, \Delta y)}{\Delta x} = \psi'(y_0) \quad (6.5)$$

При вычислении частной производной по x вычисляем обычную производную по переменной x, при этом с переменной y обращаемся как с константой.

При вычислении частной производной по y вычисляем обычную производную по переменной y, при этом с переменной x обращаемся как с константой.

Пример 122. Найти частные производные функции

$$f(x, y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) = ?$$

Шаг 1. При вычислении частной производной по x вычисляем обычную производную по переменной x, при этом с переменной y обращаемся как с константой.

Пометим цветными прямоугольниками константы формулы, задающей функцию f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции

$$f(x, y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} \left(5x^2y^3\right)'_x$$

x^2 – степенная функция.

Шаг 2. Константы вынесем за знак производной.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции
$$f(x, y) = 5x^2y^3.$$
Решение.
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} \left(5x^2y^3\right)'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$
$$= 5y^3\left(x^2\right)'_x$$

Шаг 3. Вычисляем производную от степенной функции.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции
$$f(x,y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} \left(5x^2y^3\right)'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$

$$= 5y^3\left(x^2\right)'_x \overset{\text{шаг 3.}}{=} 5y^3 2x$$

$\left(x^2\right)'_x = 2x$ – (см. пример 87).

Шаг 4. Найдём частную производную $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции
$$f(x,y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} (\boxed{5}x^2\boxed{y^3})'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$
$$= \boxed{5y^3}\left(x^2\right)'_x \overset{\text{шаг 3.}}{=} \boxed{5y^3}2x = 10xy^3.$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2y^3\right) = ?$$

Шаг 5. При вычислении частной производной по y вычисляем обычную производную по переменной y, при этом с переменной x обращаемся как с константой. Пометим цветными прямоугольниками константы формулы, задающей функцию f.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции
$$f(x,y) = 5x^2y^3.$$
Решение.
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} (5x^2y^3\ )'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$
$$= 5y^3\left(x^2\right)'_x \overset{\text{шаг 3.}}{=} 5y^3 2x = 10xy^3.$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 5.}}{=} (5x^2y^3\ )'_y$$

y^3 – это степенная функция.

Шаг 6. Константы вынесем за знак производной.
Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции

$$f(x,y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} (5x^2y^3)'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$

$$= 5y^3\left(x^2\right)'_x \overset{\text{шаг 3.}}{=} 5y^3 2x = 10xy^3.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 5.}}{=} (5x^2y^3)'_y \overset{\text{шаг 6.}}{=}$$

$$=5x^2\left(y^3\right)'_y$$

Шаг 7. Вычисляем производную от степенной функции.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции

$$f(x, y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} (5x^2y^3)'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$

$$= 5y^3\left(x^2\right)'_x \overset{\text{шаг 3.}}{=} 5y^3 2x = 10xy^3.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 5.}}{=} (5x^2y^3)'_y \overset{\text{шаг 6.}}{=}$$

$$= 5x^2\left(y^3\right)'_y \overset{\text{шаг 7.}}{=} 5x^2 3y^2$$

$\left(y^3\right)'_y = 3y^2$ – (см. пример 87).

Шаг 8. Записываем ответ.

Перейдите на следующую страницу.

Пример 122 Найти частные производные функции
$$f(x,y) = 5x^2y^3.$$

Решение.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 1.}}{=} \left(\boxed{5}x^2\boxed{y^3}\right)'_x \overset{\text{шаг 2.}}{=}$$
$$= \boxed{5y^3}\left(x^2\right)'_x \overset{\text{шаг 3.}}{=} \boxed{5y^3}2x = 10xy^3.$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2y^3\right) \overset{\text{шаг 5.}}{=} \left(\boxed{5x^2}y^3\right)'_y \overset{\text{шаг 6.}}{=}$$
$$= \boxed{5x^2}\left(y^3\right)'_y \overset{\text{шаг 7.}}{=} \boxed{5x^2}3y^2 = 15x^2y^2.$$

Ответ:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y^3\right) = 10xy^3; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2y^3\right) = 15x^2y^2.$$

6.3. Необходимые условия дифференцируемости функции в точке.

Пусть задана $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 108. *Если функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в предельной точке $x_0 \in E$, то функция f непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

$$\left(f \text{ дифференцируема в точке } x_0\right) \overset{152}{\Longrightarrow}$$

$$\Big(\Delta f(x_0, \Delta x) = a_1 \cdot \Delta x^1 + a_2 \cdot \Delta x^2 + \cdots$$

$$\cdots + a_n \cdot \Delta x^n + o(\Delta x), \text{ при } \Delta x \to 0) \Longrightarrow$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0\right) \overset{56}{\Longrightarrow}$$

$$(f - \text{ непрерывна в точке } x_0.)$$

$\square$

Таким образом, взаимоотношение непрерывности и дифференцируемости функции в точке в многомерном случае такое же как и в одномерном.

Совсем иначе обстоит дело во взаимоотношениях частных производных и дифференциала. Для функции одной переменной наличие дифференциала и наличие производной у функции в точке были условиями равносильными.

Теорема 109. *Если функция* $\mathsf{f} : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$, $\mathsf{E} \subset \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, *дифференцируема во внутренней точке* $\mathsf{x}_0 \in \mathsf{E}$, *то в этой точке существуют частные производные функции* f *по каждой переменной.*

Доказательство.
Фиксируем произвольное $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Так как функция f дифференцируема во внутренней точке $x_0 \in E$, то, в силу определения 152,

$$\Delta f(x_0, \Delta x^i) = a_i \cdot \Delta x^i + o(\Delta x^i),$$

при $\Delta x^i \to 0$.

Откуда следует, что

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x^i)}{\Delta x^i} = a_i + \frac{o(\Delta x^i)}{\Delta x^i}$$

и

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x^i)}{\Delta x^i} = a_i,$$

то есть, в силу определения 153,

$$a_i = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}.$$

$\square$

Обратное утверждение не имеет места.

Пример 123. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0, \\ 1, & \text{если } xy \neq 0, \end{cases}$$

равна нулю на осях координат и потому имеет в точке $(0, 0)$ обе частные производные равные нулю. Но эта функция недифференцируема в точке $(0, 0)$, так как она разрывна в этой точке (см. теорему 108).

6.4. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке.

Пусть задана $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, и $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$ внутренняя точка множества E.

Теорема 110. *Если функция* $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, *имеет в каждой точке некоторой* ε*- окрестности внутренней точки* x_0 *множества* E *все частные производные* $\frac{\partial f(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x^n}$, *то из их непрерывности в точке* x_0 *следует дифференцируемость функции* f *в этой точке.*

Доказательство. Идею доказательства покажем для функции двух переменных.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in E$ внутренняя точка и функция $f : E \to \mathbb{R}$ имеет частные производные $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в каждой точке некоторой ε- окрестности точки M_0 непрерывные в точке M_0. Пусть, далее, точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U_\varepsilon(M_0)$. Запишем приращение функции f в виде:

$$\begin{aligned} \Delta f\left(M_0; (\Delta x, \Delta y)\right) &\overset{\text{опр.}}{=} \\ = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \\ = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] &+ \\ + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] &. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Обозначим

$$f(x, y_0 + \Delta y) = \varphi(x) \text{ и } f(x_0, y) = \psi(y).$$

Преобразуем первое слагаемое из (6.6):

$$\begin{aligned} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] &= \\ = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) &\overset{80}{=} \\ = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \cdot \Delta x &\overset{6.4}{=} \qquad (6.7) \\ = \frac{\partial f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x&, \\ \text{где } 0 \le \theta_1 \le 1&. \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое из (6.6):

$$\begin{aligned}
&[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] = \\
&= \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0) \overset{80}{=} \\
&= \psi'(y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y \overset{6.5}{=} \\
&= \frac{\partial f(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y}\cdot\Delta y, \\
&\text{где } 0 \le \theta_2 \le 1.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Из условия непрерывности частных производных $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в точке M_0 получаем:

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ непрерывна в точке } M_0\right) \overset{53}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right) \overset{28}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{matrix} \frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \alpha_1(\Delta x,\Delta y), \\ \text{где } \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\to 0 \text{ при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0) \end{matrix}\right) \tag{6.9}$$

и

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \text{ непрерывна в точке } M_0\right) \overset{53}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right) \overset{28}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial f(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + \alpha_2(\Delta x, \Delta y), \\ \text{где } \alpha_2(\Delta x,\Delta y) \to 0 \text{ при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0) \end{array}\right) \tag{6.10}$$

Тогда, подставляя (6.7), (6.9) и (6.8), (6.10) в (6.6), получим:

$$\begin{aligned} \Delta f\left(M_0;(\Delta x,\Delta y)\right) = \\ = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y + \\ + \underbrace{\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y}_{\beta(\Delta x,\Delta y)}, \\ \text{где } \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\to 0 \text{ и } \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\to 0 \\ \text{при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Покажем, что $\beta(\Delta x, \Delta y)$ есть бесконечно малая более высокого порядка чем $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, то есть

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\beta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \qquad (6.12)$$

Соотношение (6.12) следует из оценок:

$$0 \le \left|\frac{\beta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \overset{6.11}{=}$$

$$= \left|\frac{\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\cdot \Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| =$$

$$= \left|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \overset{10.13}{\le}$$

$$\le |\alpha_1(\Delta x, \Delta y)|\cdot \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + |\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|\cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le$$

$$\le |\alpha_1(\Delta x, \Delta y)| + |\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|,$$

$$\text{так как } \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le 1 \text{ и } \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le 1.$$

Итак, мы показали, что

$$\Delta f\left(M_0;(\Delta x,\Delta y)\right)=$$

$$=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y+o\left((\Delta x,\Delta y)\right),$$

$$\text{при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0),$$

то есть функция f дифференцируема в точке M_0. $\square$

Из теоремы 110 следует, что если частные производные функции $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывны в области $E \subset \mathbb{R}^n$, то функция f дифференцируема в любой точке этой области.

6.5. Производная по направлению.

Фиксируем декартову систему координат $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ в пространстве $\mathbb{V}_3$ и ненулевой геометрический вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Пусть задана $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}_3$ и внутренняя точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E$.
При достаточно малых $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, точка $M_t(x_0 + ta_1, y_0 + ta_2, z_0 + ta_3) \in E$. Обозначим

$$M_t(x_0 + ta_1, y_0 + ta_2, z_0 + ta_3) \equiv M_0 + t \cdot \vec{a}.$$

Определение 154. Если существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f\left(M_0 + t\cdot \vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t\cdot |\vec{a}|},$$

то этот предел называется *производной функции f в точке M_0 по направлению $\vec{a}$* и обозначается $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}}$, то есть

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} := \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(M_0 + t\cdot \vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t\cdot |\vec{a}|}.$$

Направление в пространстве удобно задавать единичным геометрическим вектором, координаты которого направляющие косинусы:

$$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Покажем, что если существует $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}}$, то она не зависит от длины фиксированного геометрического вектора $\vec{a}$.

Обозначим через $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ – орт вектора $\vec{a}$.

Запишем координаты вектора $\vec{a_0}$:

$$\vec{a_0} = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Тогда

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} \overset{154}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(M_0 + t\cdot\vec{a}\right) - f\left(M_0\right)}{t\cdot|\vec{a}|} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(x_0 + ta_1, y_0 + ta_2, z_0 + ta_3\right) - f\left(M_0\right)}{t\cdot|\vec{a}|} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Замена:} \\ t = \frac{u}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{u\to 0+} \frac{f\left(x_0 + u\cos\alpha, y_0 + u\cos\beta, z_0 + u\cos\gamma\right) - f\left(M_0\right)}{u\cdot|\vec{a_0}|} \overset{154}{=}$$

$$= \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a_0}}$$

Замечание 1. Пусть задан геометрический вектор $\vec{a}$ и $\vec{a_0}$ орт геометрического вектора $\vec{a}$. Тогда

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a_0}}.$$

Теорема 111. *Если функция* $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}_3$, *дифференцируемая во внутренней точке* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E$, *то для любого единичного вектора* $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *существует* $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}$ *и*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} =$$

$$= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot \cos\gamma.$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Доказательство. Дадим приращение каждой координате точки M_0 специальным способом:

$$\Delta x = t \cdot \cos\alpha, \Delta y = t \cdot \cos\beta, \Delta z = t \cdot \cos\gamma, t > 0.$$

Выбираем t таким, чтобы точка

$$M_t(x_0 + t \cdot \cos\alpha, y_0 + t \cdot \cos\beta, z_0 + t \cdot \cos\gamma) \in E.$$

Тогда

$$(f \text{ дифференцируемая в точке } M_0) \overset{107}{\Longrightarrow}$$

$$\left(f(M_0 + t\vec{l}) - f(M_0) = \right.$$

$$= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot t \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot t \cdot \cos\beta +$$

$$\left. + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot t \cdot \cos\gamma + o(t), \text{ при } t \to 0+ \right) \overset{154}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{t \to 0+} \frac{f\left(M_0 + t \cdot \vec{l}\right) - f\left(M_0\right)}{t \cdot |\vec{l}|} = \right.$$

$$\left. = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot \cos\gamma \right).$$

$\square$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Щелкните мышкой по кнопке "show gradient ∇f".

Единичный вектор $\mathbf{u}$ задаёт направление на плоскости. Это направление можно изменить мышкой с нажатой левой кнопкой.

Мышкой с нажатой левой кнопкой выберите на планшете "point=(,)" точку, в которой будет вычислена производная по направлению $\mathbf{u}$ (см. справа от планшета).

Определение 155. Геометрический вектор

$$\nabla f(M_0) := \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right)$$

называется *градиентом функции* f *в точке* M_0.

Тогда, для дифференцируемой во внутренней точке M_0 функции f, имеем

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = (\vec{a_0}, \nabla f(M_0)) =$$
$$= |\nabla f(M_0)| \cos(\vec{a_0} \,\widehat{}\, \nabla f(M_0)), \quad (6.13)$$

где $\vec{a_0}$ орт вектора $\vec{a}$.

Заметим, что $\left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}}\right|$ определяет скорость изменения функции f по направлению $\vec{a}$. Из (6.13) следует, что геометрический вектор $\nabla f(M_0)$ указывает направление, в котором наибольшая скорость изменения функции f в точке M_0.

ГРАДИЕНТ

Единичный вектор $\mathbf{u}$ задаёт направление на плоскости. Это направление можно изменить мышкой с нажатой левой кнопкой.

Мышкой с нажатой левой кнопкой выберите на планшете “point=(,)” точку, в которой будет вычислена производная по направлению $\mathbf{u}$ (см. справа от планшета). В этой же точке считается градиент функции и его модуль.

Фиксируя точку изменяйте направление вектора $\mathbf{u}$ и следите за значениями производной по направлению.

ГРАДИЕНТ

Вектор градиента ∇f отложен от точки $M(a,b)$ контурного графика функции двух переменных f. Перемещая точку $M(a,b)$ по контурному графику функции f Вы видите как изменяется величина и направление вектора ∇f.

В некоторых точках длина вектора ∇f очень мала и для того чтобы увидеть его направление в этих точках нажмите кнопку “normalize”. При нажатой кнопке “normalize” от точки $M(a,b)$ контурного графика функции f откладывается орт вектора ∇f.

Обратите внимание, что ∇f очень мал вблизи “вершин” и “на днеям”. При этом малые перемещения точки $M(a,b)$ приводят к резкой смене направления вектора ∇f, часто на противоположное.

Пример 124. Найти производную по направлению $\vec{\imath} = (1, 0)$ в точке $M_0(0, 0)$ функции

$$f(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_2$. Возьмём произвольную точку $M_t(t, 0) \in \mathbb{R}_2, t > 0$ и найдём

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t \cdot |\vec{\imath}|} = \lim_{t \to 0+} \frac{|t| - 0}{t} = 1.$$

Итак, по определению 154, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{\imath}} = 1$.

Замечание. Так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(M_0, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ если } \Delta x < 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

то из (6.14) следует, что $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$ не существует, а, следовательно, в силу теоремы 109, функция $f(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируемая в точке $M_0(0, 0)$ и значит для вычисления $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}$ нельзя использовать формулу (6.13).

Пример 125. Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ в точке $M_0(-1, 2)$ функции $f(x, y) = 5x^2y^3$.

Решение. Найдём сначала $\nabla f(M_0)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 10xy^3, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 15x^2y^2$$ (см. пример 122).

Тогда $\frac{\partial f(-1,2)}{\partial x} = -80, \quad \frac{\partial f(-1,2)}{\partial y} = 60$ и
$\nabla f(M_0) = (-80, 60)$.

Находим орт вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a_0} = \left(\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

По формуле (6.13) находим

$$\frac{\partial f(-1,2)}{\partial \vec{a}} = -80 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 60 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-160+60}{\sqrt{5}} = -\frac{100}{\sqrt{5}}.$$

Пример 126. Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y, z) = \sin(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\mathrm{dom} f$.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = ?$$

При вычислении частной производной по x вычисляем обычную производную по переменной x, при этом с остальными переменными обращаемся как с константами. Пометим цветными прямоугольниками константы формулы, задающей функцию f. Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\mathrm{dom} f$.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^3\left(xy^2 + z\right)\right) \overset{95}{=}$$

$$= 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\left(xy^2 + z\right)'_x$$

Используем два правила:

1. производная от суммы равна сумме производных;

2. константа выносится за знак производной.

В результате получим:

Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\operatorname{dom} f$.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^3\left(xy^2 + z\right)\right) \overset{95}{=}$$
$$= 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\left(xy^2 + z\right)'_x =$$
$$= 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\left(y^2(x)'_x + z'_x\right)$$

Запишем конечный результат:

Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\mathrm{dom}f$.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^3\left(xy^2 + z\right)\right) \overset{95}{=}$$
$$= 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\left(xy^2 + z\right)'_x =$$
$$= 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\left(y^2(x)'_x + z'_x\right) =$$
$$= 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\left(y^2 \cdot 1 + 0\right)$$

Аналогично находим частные производные по переменным y и z. Найдите самостоятельно и только потом $\cdots$

Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке dom f.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^3\left(xy^2 + z\right)\right) = 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\cdot y^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin^3\left(xy^2 + z\right)\right) = 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin^3\left(xy^2 + z\right)\right) = 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z)\cdot 1.$$

Вычислите значения частных производных в заданной точке $M_0(0, -1, \frac{\pi}{4})$ и только потом $\cdots$

Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\mathrm{dom} f$, а потом в точке M_0.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z) \cdot y^2$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 3 \cdot \sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \cdot 1 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z) \cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 3 \cdot \sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \cdot 0 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3\sin^2(xy^2 + z)\cos(xy^2 + z) \cdot 1.$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 3 \cdot \sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \cdot 1 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Запишите координаты градиента функции в данной точке $M_0(0, -1, \frac{\pi}{4})$ и только потом $\cdots$

Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\mathrm{dom} f$, а потом вычислим их значения в данной точке.

$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$

$$\nabla f(M_0) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

Найдите координаты орта вектора
$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2, -1, 1)$ и только потом $\cdots$
Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.

Решение. Очевидно, что $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\operatorname{dom} f$, а потом вычислим их значения в данной точке.

$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

$\nabla f(M_0) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, $\vec{a_0} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Найдите производную функции f в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k} = (2, -1, 1)$ и только потом $\cdots$

Перейдите на следующую страницу.

Пример 126 Найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ в точке $M_0(0, 1, \frac{\pi}{4})$ функции $f(x, y) = \sin^3(xy^2 + z)$.
Решение. Очевидно, что $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_3$. Найдём сначала частные производные функции f в произвольной точке $\mathrm{dom} f$, а потом вычислим их значения в данной точке.
$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$

$\nabla f(M_0) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), \vec{a_0} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

По формуле (6.13) находим

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{-1}{\sqrt{6}} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

6.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть N_0 - некоторая точка данной поверхности S (см. рис. 6.1). Возьмём на этой поверхности любую другую точку N, отличную от точки N_0.

Определение 156. Прямая, проходящая через точки $N_0, N \in S, N \neq N_0$, называется *секущей поверхности S*.

Определение 157. Плоскость, проходящая через точку $N_0 \in S$, называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке N_0*, если для каждой последовательности точек $(N_n, n \in \mathbb{N})$, $N_n \in S$, сходящейся к точке $N_0 \in S$, угол между секущей N_0N_n и этой плоскостью стремится к нулю.

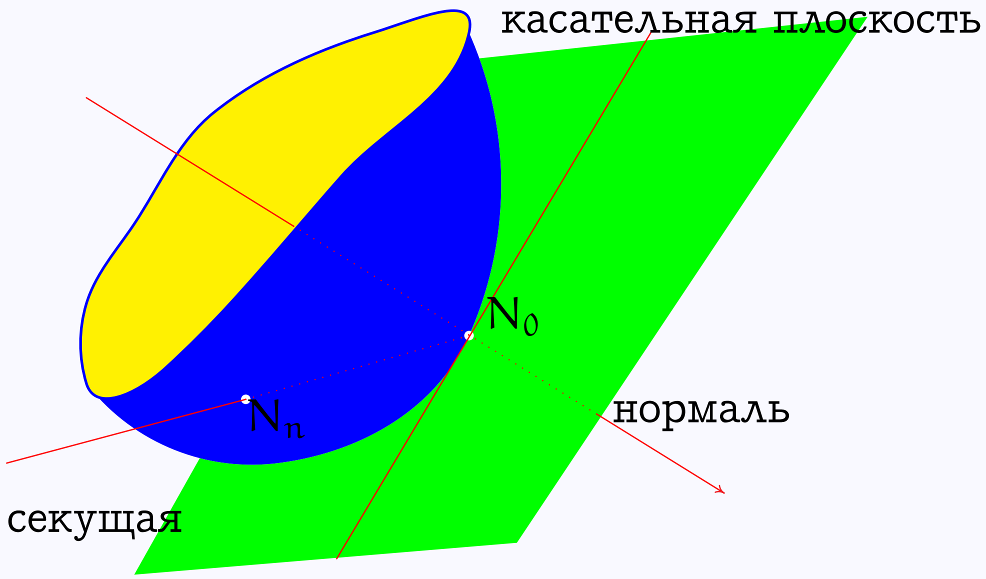


Рис. 6.1 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Из определения 157 и определения 118 касательной к кривой следует, что касательная плоскость, проходящая через точку $N_0 \in S$, содержит касательные ко всем кривым, проходящим через точку $N_0 \in S$ и лежащим на поверхности S.

Из определения 157 следует, что у поверхности в данной точке либо есть и тогда только одна касательная плоскость, либо её нет совсем.

Определение 158. Прямая, проходящая через точку $N_0 \in S$ и ортогональная касательной плоскости к поверхности S в точке N_0, называется *нормалью к поверхности S в точке N_0*.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ

На иллюстрации показаны касательная плоскость и нормаль в фиксированной точке $N_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \operatorname{graf} f$. Точку N_0 можно перемещать на поверхности движками "x" и "y". На иллюстрации изображены также линии пересечения поверхности с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$.

6.6.1. Касательная плоскость и нормаль к графику функции двух переменных.

Пусть задана функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, и $M_0(x_0, y_0)$ внутренняя точка множества E. Тогда точка $N_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ лежит на поверхности $S := \operatorname{graf} f$.

Теорема 112. *Если функция* f *дифференцируема во внутренней точке* $M_0(x_0, y_0) \in E$, *то в точке* $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathrm{graff}$ *можно провести касательную плоскость* π_k, *причём уравнение этой касательной плоскости имеет вид*

$$\pi_k : z - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{6.15}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную последовательность

$$(N_n),\, N_n \in \mathrm{graff} \text{ и } N_n \to N_0,\, N_0 \in \mathrm{graff}.$$

Обозначим через φ_n угол между секущей N_0N_n и плоскостью (6.15). Покажем, что $\sin\varphi_n \to 0$, что равносильно, $\varphi_n \to 0$. Этим будет доказано, что плоскость (6.15), в силу определения 157, является касательной к graff в точке N_0

Опустим из точки N_n перпендикуляр N_nK_n на плоскость (6.15) и перпендикуляры N_nM_n и N_0M_0 на координатную плоскость xOy. Пусть $N_n^*(x_0+\Delta x_n, y_0+\Delta y_n, z_n) \in \pi_k$ – точка пересечения перпендикуляра N_nM_n с плоскостью (6.15) (см. рис. 6.2). Очевидно, что

$$\begin{gathered} |N_nK_n| \le |N_nN_n^*| \\ |N_0N_n| \ge |M_0M_n|. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Тогда $\angle\varphi_n = \angle K_nN_0N_n$ и

$$|\sin\varphi_n| = \frac{|N_nK_n|}{|N_0N_n|} \overset{(6.16)}{<} \frac{|N_nN_n^*|}{|M_0M_n|}. \tag{6.17}$$

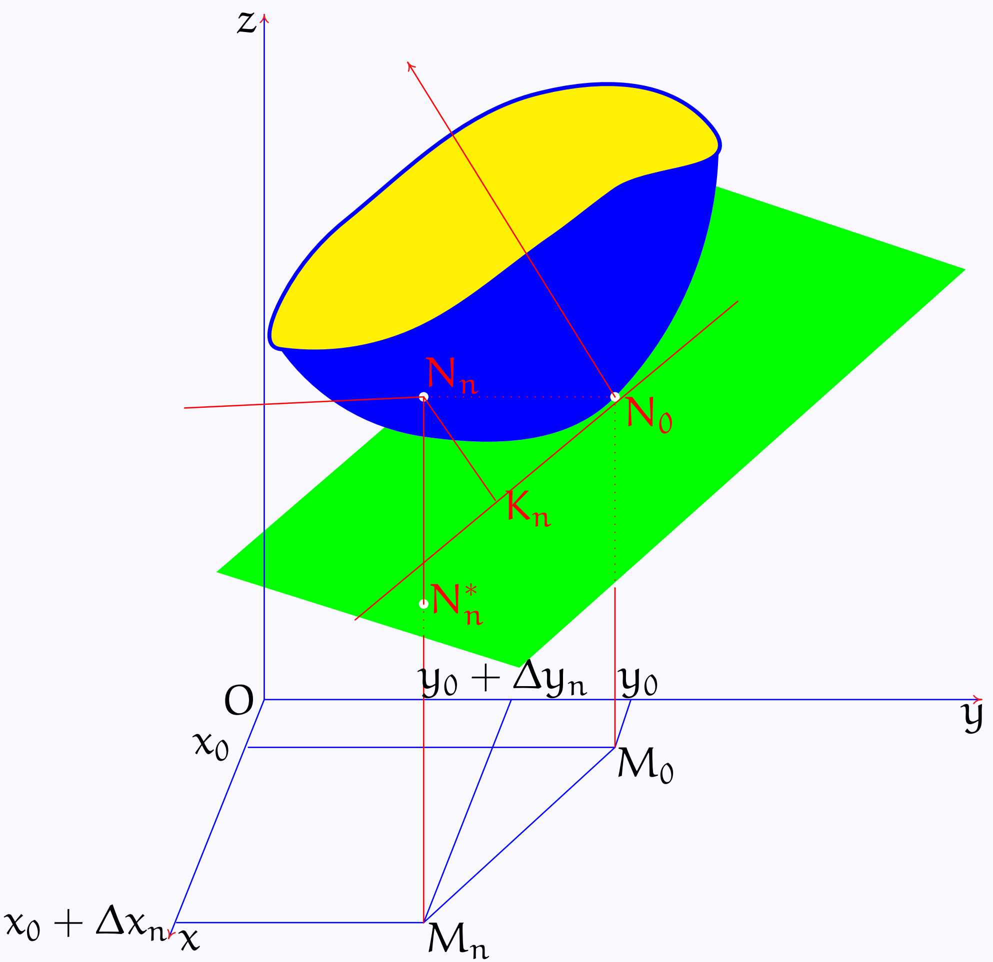


Рис. 6.2 Касательная плоскость и нормаль к графику функции

Проведём вспомогательные вычисления:

$$|M_0M_n| = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} = \rho_n;$$

$$(N_n \to N_0) \overset{5}{\Longrightarrow} (\Delta x_n \to 0, \Delta y_n \to 0) \Longrightarrow (\rho_n \to 0);$$

$$\begin{aligned} |N_nN_n^*| &= |f(x_0 + \Delta x_n, y_0 + \Delta y_n) - z_{N_n^*}| = \\ &= |f(x_0 + \Delta x_n, y_0 + \Delta y_n) - f(x_0, y_0) - \\ &\quad - f'_x(x_0, y_0)\Delta x_n - f'_y(x_0, y_0)\Delta y_n| = \\ &= |\Delta f((x_0, y_0); (\Delta x_n, \Delta y_n)) - f'_x(x_0, y_0)\Delta x_n - \\ &\quad - f'_y(x_0, y_0)\Delta y_n| \end{aligned} \tag{6.18}$$

Так функция f дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то, в силу (6.18), последовательность $|N_n N_n^*|$ будет бесконечно малой последовательностью более высокого порядка, чем ρ_n, то есть

$$\lim \frac{|N_n N_n^*|}{|M_0 M_n|} = 0.$$

Тогда, в силу (6.17),

$$\lim |\sin \varphi_n| = 0.$$

$\square$

Теорема 113. *Пусть задана функция* $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, *и* $M_0(x_0, y_0)$ *внутренняя точка множества* E.
Если в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathrm{graff}$ *можно провести касательную плоскость, то функция* f *дифференцируема во внутренней точке* $M_0(x_0, y_0) \in E$.

Доказательство теоремы опустим.

По виду уравнения (6.15) касательной плоскости к поверхности S, являющейся графиком функции f, в точке $N_0 \in S$, легко написать канонические уравнения нормали в точке $N_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}.$$

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Поверхности – графики всюду дифференцируемых квадратичных функций двух переменных. Выбор точки на поверхности производится движками “x_0” и “y_0”.

Пример 127. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к графику функции

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

в точке $N_0(2, 3, 2\sqrt{3})$.

Решение. $\operatorname{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 25\}$. Найдём частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

Так как $M_0(2, 3) \in \operatorname{dom} \frac{\partial f}{\partial x}$ и $M_0(2, 3) \in \operatorname{dom} \frac{\partial f}{\partial y}$, то частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой её окрестности. Тогда, в силу теоремы 110, функция f дифференцируема в точке $M_0(2, 3)$, т.е. данная поверхность имеет в точке N_0 касательную плоскость и нормаль (см. теорему 112).

Уравнение касательной плоскости

$$\pi_k : z - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-3),$$

канонические уравнения нормали:

$$\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = \frac{y-3}{3\sqrt{3}} = \frac{z-2\sqrt{3}}{6}.$$

6.6.2. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.

Пусть задана функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, и $M_0(x_0, y_0)$ внутренняя точка множества E. Тогда точка $N_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ лежит на поверхности $S := \mathrm{graf} f$.

Если функция f дифференцируема во внутренней точке $M_0(x_0, y_0) \in E$, то

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+ o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

$$\text{при } (x,y) \to (x_0,y_0). \quad (6.19)$$

Сравнивая равенства (6.19) и (6.15), видим, что:

- график нашей функции вблизи точки $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ хорошо аппроксимируется касательной плоскостью (6.15);
- дифференциал $df(x_0, y_0)$ функции f в точке $M_0(x_0, y_0) \in E$ геометрически обозначает приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности, являющейся графиком функции, в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ при переходе из точки $M_0(x_0, y_0) \in E$ в точку $M(x, y) \in E$.

6.7. Неявно заданные функции.

В этом разделе излагается ещё один способ задания функции.

6.7.1. Неявно заданные функции одной переменной.

Пусть задана кривая $L : F(x, y) = 0$. Рассмотрим некоторый прямоугольник

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ y_0 - \Delta < y < y_0 + \Delta \end{matrix} \right\},$$

где $M_0(x_0, y_0) \in L$.

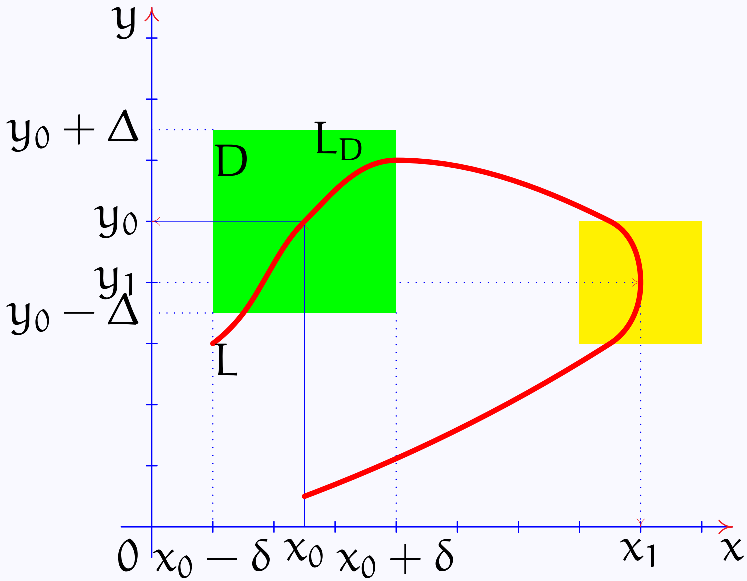


Рис. 6.3 Неявно заданная функция одной переменной

Обозначим через $L_D := L \cap D$ часть кривой L, попавшую в D. Если L_D удовлетворяет условию, что всякая прямая параллельная оси Oy пересекает L_D не более чем в одной точке, то L_D есть график некоторой функции

$$f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta),$$

которая называется *функцией неявно заданной уравнением* $F(x, y) = 0$ *в области* D.

Если же L_D удовлетворяет условию, что всякая прямая параллельная оси Ox пересекает L_D не более чем в одной точке, то L_D есть график некоторой функции

$$g : (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) \to (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

которая тоже называется *функцией неявно заданной уравнением* $F(x, y) = 0$ *в области* D.

Если $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ в области D, то

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : F\left(x, f(x)\right) \equiv 0. \qquad (6.20)$$

6.7.2. Производная неявно заданной функции одной переменной.

Пусть задана кривая $L : F(x, y) = 0$.
Рассмотрим некоторый прямоугольник

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{aligned} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ y_0 - \Delta < y < y_0 + \Delta \end{aligned} \right\},$$

где $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Теорема 114. *Пусть:*

1. функция F *определена и непрерывна вместе со своими частными производными* $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ *в некоторой* $U_\varepsilon(M_0)$, *где* $M_0(x_0, y_0)$;

2. $F(x_0, y_0) = 0$;

3. $\frac{\partial F(M_0)}{\partial y} \neq 0$;

Тогда:

4. в некотором прямоугольнике $D \subset U_\varepsilon(M_0)$ уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт неявно функцию $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$;

5. $f(x_0) = y_0$;

6. функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, причём

$$\boxed{\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}}.}$$

Доказательство теоремы в данном курсе не рассматривается.

6.7.3. Касательная и нормаль к плоской кривой.

Пусть задана кривая $L : F(x, y) = 0$.
Обозначим через

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ y_0 - \Delta < y < y_0 + \Delta \end{array} \right\},$$

где $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Пусть в некоторой $U_\varepsilon(M_0)$ существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F(M_0)}{\partial y} \neq 0$. Тогда, в силу теоремы 114, в прямоугольнике $D \subset U_\varepsilon(M_0)$ уравнение $F(x,y)=0$ задаёт неявно функцию

$$f:(x_0-\delta, x_0+\delta) \to (y_0-\Delta, y_0+\Delta),$$

к графику которой можно провести касательную в точке M_0

$$K: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{6.21}$$

Учитывая пункты 5 и 6 теоремы 114, уравнение (6.21) касательной к кривой $L : F(x, y) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0) \in L$ можно записать в виде

$$\boxed{K : \frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0.}$$

Тогда геометрический вектор

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}\right) \perp K$$

(нормальный вектор прямой K).

Каноническое уравнение нормали N к кривой L в точке $M_0(x_0, y_0) \in L$ имеет вид

$$\boxed{N : \frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}}.}$$

Пример 128. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$L\,:\,F(x,y)=x^3+y^4-3xy-3=0$$

в точке $M_0(2,1)\in L$.

Решение. $\operatorname{dom} F = \mathbb{R}^2$.

Найдём частные производные

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \ \frac{\partial F(2,1)}{\partial x} = 9,$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 4y^3 - 3x, \ \frac{\partial F(2,1)}{\partial y} = -2.$$

Уравнение касательной

$$K\ :\ 9(x-2) - 2(y-1) = 0$$

и уравнение нормали

$$N\ :\ \frac{x-2}{9} = \frac{y-1}{-2}.$$

6.7.4. Неявно заданные функции двух переменных.

Пусть задана поверхность $S : F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Рассмотрим некоторый прямоугольник

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \end{matrix} \right\},$$

и параллелепипед

$$B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D, z_0 - \Delta < z < z_0 + \Delta \right\}.$$

Часть поверхности S, попавшую в параллелепипед B, обозначим через S_B.

Если поверхность S_B удовлетворяет условию, что всякая прямая параллельная оси Oz пересекает поверхность S_B не более чем в одной точке, то поверхность S_B является графиком некоторой функции

$$f : D \to (z_0 - \Delta, z_0 + \Delta),$$

которая называется *функцией неявно заданной уравнением* $F(x, y, z) = 0$ *в области* B.

Если $f : D \to (z_0 - \Delta, z_0 + \Delta)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ в области B, то

$$\forall (x, y) \in D : F\left(x, y, f(x, y)\right) \equiv 0.$$

6.7.5. Частные производные неявно заданной функции двух переменных.

Пусть задана поверхность $S : F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Рассмотрим некоторый прямоугольник

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \end{array} \right\},$$

и параллелепипед

$$B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D, z_0 - \Delta < z < z_0 + \Delta \right\}.$$

Теорема 115. *Пусть задана поверхность* $S : F(x, y, z) = 0$ *и точка* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. *Если функция* F *определена и непрерывна вместе со своими частными производными* $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ *в некоторой* $U_\varepsilon(M_0)$ *и* $\frac{\partial F(M_0)}{\partial z} \neq 0$, *то:*

1. в некоторой области $B \subset U_{\varepsilon}(M_0)$ уравнение $F(x, y, z) = 0$ задаёт неявно функцию $f : D \to (z_0 - \Delta, z_0 + \Delta)$;

2. $f(x_0, y_0) = z_0$;

3. на множестве D функция f непрерывна и имеет непрерывные частные производные, причём $\forall (x, y) \in D$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}}.$$

Доказательство теоремы в данном курсе не рассматривается.

6.7.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть задана поверхность $S : F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Обозначим прямоугольник

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \end{matrix} \right\},$$

и параллелепипед

$$B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D, z_0 - \Delta < z < z_0 + \Delta \right\}.$$

Пусть в некоторой $U_\varepsilon(M_0)$ существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z} \neq 0$.

Тогда, в силу теоремы 115, в параллелепипеде $B \subset U_\varepsilon(M_0)$ уравнение $F(x, y, z) = 0$ задаёт неявно функцию $f : D \to (z_0 - \Delta, z_0 + \Delta)$, к графику которой можно провести касательную плоскость в точке M_0

$$\pi_k : z - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0). \tag{6.22}$$

Учитывая пункты 2 и 3 теоремы 115, уравнение (6.22) касательной плоскости к поверхности $S \,:\, F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ можно записать в виде

$$\boxed{\pi_k : \frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0.}$$

Тогда геометрический вектор

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial x},\frac{\partial F(M_0)}{\partial y},\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}\right)\perp\pi_k$$

(нормальный вектор плоскости π_k).

Канонические уравнения нормали N к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ имеют вид

$$\boxed{N : \frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}.}$$

Пример 129. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$S : F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 7 = 0$$

в точке $M_0(1, 1, -1) \in S$.

Решение. $\operatorname{dom} F = \mathbb{R}^3$. Найдём частные производные

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial F(1, 1, -1)}{\partial x} = 4,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F(1, 1, -1)}{\partial y} = 2,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 8z, \quad \frac{\partial F(1, 1, -1)}{\partial y} = -8.$$

Уравнение касательной плоскости

$$K\ :\ 4(x-1)+2(y-1)-8(z+1)=0$$

или

$$K\ :\ 2x+y-4z-7=0$$

и уравнение нормали

$$N\ :\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-8}$$

или

$$N\ :\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-4}.$$

6.8. Частные производные высшего порядка.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, имеет частную производную $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ по одной из переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в каждой точке множества E, то эта частная производная вновь является функцией $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} : E \to \mathbb{R}$, которая тоже может иметь частную производную $\dfrac{\partial}{\partial x^j}\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^i}\right)$ по переменной x^j. Функция $\dfrac{\partial}{\partial x^j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right) : E \to \mathbb{R}$ называется *второй производной от функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i}$, $\quad i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка. Частные производные, в которые входит дифференцирование по различным переменным называются *смешанными*.

Теорема 116. *Смешанные частные производные любого порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, непрерывные в ε- окрестности некоторой точки, равны в этой точке между собой.*

Доказательство этой теоремы в данном курсе не рассматривается.

Определение 159. Функция

$$f : E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R}^n,$$

называется *дважды дифференцируемой в точке* $x_0 \in E$, предельной для множества E, если все первые частные производные дифференцируемы в этой точке.

Определение 160. Функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, называется k *раз дифференцируемой в точке* $x_0 \in E$, предельной для множества E, если все частные производные $(k-1)$-го порядка являются функциями дифференцируемыми в этой точке.

Теорема 117. *(достаточное условие дифференцируемости). Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, была k раз дифференцируема в точке, достаточно, чтобы все частные производные порядка k были непрерывны в этой точке.*

Доказательство этой теоремы в данном курсе не рассматривается.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Частные производные первого порядка, градиент. Производные по направлению. Частные производные высших порядков.

6.9. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, дважды дифференцируема в точке $a \in E$, предельной для множества E.

Определение 161. Выражение

$$d^2 f(a) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i} \right|_{x=a} dx^j dx^i$$

называется *вторым дифференциалом функции* f *в точке* $x = a$.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, k раз дифференцируема в точке $a \in E$, предельной для множества E, то

Определение 162. Выражение

$$d^k f(a) = \sum_{i=1}^{m} \cdots \sum_{j=1}^{m} \left. \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^j \ldots \partial x^i} \right|_{x=a} dx^j \ldots dx^i$$

называется *k-тым дифференциалом функции f в точке $x = a$*.

Теорема 118. (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*). *Пусть функция* $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$, *дифференцируема* n *раз во внутренней точке* $a \in E$. *Тогда при* x, *стремящемся к* a, *имеет место формула*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{d^k f(a)}{k!}\right|_{dx=x-a} + o\left(|x-a|^n\right). \tag{6.23}$$

Доказательство этой теоремы в данном курсе не рассматривается.

Равенство (6.23) представляет собой *формулу Тейлора с остаточным в форме Пеано*.

Теорема 119. (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*). *Пусть функция* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$, *имеет* $(n+1)$*-й дифференциал для любого* $x \in U_\varepsilon(a) \subset E$, *где* ε *- некоторое положительное число. Тогда для любой точки* $b \in U_\varepsilon(a)$ *существует точка* $c = a + \theta(b-a), 0 < \theta < 1$, *такая, что*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{d^k f(a)}{k!}\right|_{dx=b-a} + \left.\frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!}\right|_{dx=b-a}. \quad (6.24)$$

Доказательство. Фиксируем точку $b \in U_\varepsilon(a)$. Пусть $g(t) = f\left(a + t(b-a)\right)$. Функция g удовлетворяет условиям теоремы 85. Тогда по формуле Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа (теорема 85) имеем

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \tag{6.25}$$

где $0 < \theta < 1$.

Так как имеют место равенства

$$\begin{aligned} g(0) = f(a),\ g'(0) = df(a)|_{dx=b-a}, \dots \\ \dots g^{(n)}(0) = d^n f(a)|_{dx=b-a}, \\ g^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(c)\Big|_{dx=b-a}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

то, подставляя (6.26) в (6.25), получим равенство (6.24). $\square$

Равенство (6.24) представляет собой *формулу Тейлора с остаточным в форме Лагранжа*.

Замечание. Подчеркнём разницу в условиях существования формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа (теоремы 118 и 119). Она состоит в том, что в теореме 118 n-кратная дифференцируемость функции f предполагается только в точке $x = a$, в то время как в теореме 119 требуется $(n+1)$-кратная дифференцируемость её в окрестности $U_\varepsilon(a)$. Обратим внимание на то, что в случаи функции одной переменной n-кратная дифференцируемость функции f в точке $x = a$ обеспечивает $(n-1)$-кратную дифференцируемость её в окрестности, в m-мерном же пространстве это условие обеспечивает лишь существование в окрестности только частных производных до $(n-1)$ порядка включительно.

6.10. Экстремумы функций многих переменных.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 163. Говорят, что внутренняя точка $x_0 \in A$ есть *точка минимума (максимума) функции* f, если $\exists U_\varepsilon(x_0) \subset A$ такая, что $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$ $(f(x_0) \geq f(x))$. Если же $\forall x \in U_\varepsilon^*(x_0)$ выполняется строгое неравенство $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0) > f(x))$, то точка $x_0 \in A$ называется *точкой строгого минимума (строгого максимума) функции* f.

Определение 164. Внутренняя точка $x_0 \in A$ называется *точкой экстремума функции* f, если она является точкой минимума или максимума.

Определение 165. Внутренняя точка $x_0 \in A$ называется *точкой строгого экстремума функции* f, если она является точкой строгого минимума или строгого максимума.

Определение 166. Значение функции f в точке минимума (максимума) называется *минимумом (максимумом) функции* f.

Определение 167. Значение функции f в точке строгого минимума (строгого максимума) называется *строгим минимумом (строгим максимумом) функции* f.

6.10.1. Необходимые условия экстремума функции многих переменных.

Теорема 120. *Пусть задана функция* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$, *и внутренняя точка* $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^T \in A$ *является точкой экстремума функции* f.
Тогда, если в точке x_0 *существуют частные производные по каждой из переменных, то*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^2} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^n} = 0. \quad (6.27)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ и точку $x_t^i = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + t, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)^T \in A$.
Обозначим через $\varphi^i(t) = f(x_t^i)$.
Пусть x_0 – точка максимума функции f.

$$\begin{pmatrix} x_0 \in A - \text{ точка максимума функции } f \\ \exists\, \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} \end{pmatrix} \overset{153}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} \exists U_\varepsilon(x_0) \text{ такая, что } \forall x \in U_\varepsilon(x_0)\ :\ f(x) \le f(x_0) \\ \exists\, \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_t^i) - f(x_0)}{t} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Обоз.}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \forall t \in U_\varepsilon(0)\ :\ \varphi^i(t) \le \varphi^i(0) \\ \exists\, \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi^i(t) - \varphi^i(0)}{t} = \left(\varphi^i\right)'(0) \end{pmatrix} \overset{138}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} t_0 = 0 - \text{ точка максимума функции } \varphi^i \\ \exists\, \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \left(\varphi^i\right)'(0) \end{pmatrix} \overset{89}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \left(\varphi^i\right)'(0) = 0. \right)$$

Если же x_0 – есть точка минимума, то доказательство аналогичное. $\square$

Определение 168. Внутренняя точка

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^T \in A$$

называется *стационарной точкой функции* f, если

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^2} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^n} = 0.$$

Из теоремы 120 следует, что точка экстремума функции f является либо её стационарной точкой либо в этой точке функция f не дифференцируема.

Замечание. Обратите внимание на то, что равенства (6.27) равносильны $\nabla f(x_0) = 0$ и дают лишь необходимые, но недостаточные условия экстремума функции многих переменных.

ГРАДИЕНТ

Вектор градиента ∇f отложен от точки $M(a, b)$ контурного графика функции двух переменных f. Перемещая точку $M(a, b)$ по контурному графику функции f Вы видите как изменяется величина и направление вектора ∇f.

В некоторых точках длина вектора ∇f очень мала и для того чтобы увидеть его направление в этих точках нажмите кнопку “normalize”. При нажатой кнопке “normalize” от точки $M(a, b)$ контурного графика функции f откладывается орт вектора ∇f.

Обратите внимание, что ∇f очень мал вблизи “вершин” и “на днеям” (точки подозрительные на экстремум). При этом малые перемещения точки $M(a, b)$ приводят к резкой смене направления вектора ∇f, часто на противоположное.

Пример 130. Найти стационарные точки функции $f(x, y) = xy$ и исследовать их характер.

Решение. Очевидно, что $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$. Для всех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y, \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x.$$

В силу теоремы 120, координаты стационарных точек удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x = 0. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Единственным решением системы (6.28) является точка $O(0, 0)$.

Покажем, что точка $O(0,0)$ не является точкой экстремума функции f.
Так как $f(0,0) = 0$, а в любой сколь угодно малой окрестности точки $O(0,0)$ имеются точки, где $f(x,y) = xy > 0$, и точки, где $f(x,y) = xy < 0$, то точка $O(0,0)$ не является ни точкой максимума ни точкой минимума функции f.

6.10.2. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$, и x_0 - внутренняя точка множества A.

Теорема 121. *Пусть внутренняя точка $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^T \in A$ является стационарной точкой функции $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$, и существует $U_\varepsilon(x_0)$ такая, что все частные производные функции f до второго порядка включительно определены и непрерывны в $U_\varepsilon(x_0) \subset A$.*

Если квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} x^i x^j \tag{6.29}$$

1. знакопостоянная, то в точке x_0 функция f имеет экстремум, который является строгим минимумом, если квадратичная форма (6.29) положительно определена, и строгим максимумом, если она отрицательно определена;
2. может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 функция f экстремума не имеет.

Доказательство этой теоремы опустим.

Замечание 1. После того как квадратичная форма (6.29) получена, исследование её определённости может быть проведено с помощью известного из курса алгебры критерия Сильвестра.

Замечание 2. Теорема 121 ничего не говорит о случаи, когда квадратичная форма (6.29) полуопределенная, то есть неположительная и неотрицательная. Оказывается, в этом случае точка x_0 может быть точкой экстремума, а может и не быть точкой экстремума функции f.

6.10.3. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Пусть задана функция $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$, и $M_0(x_0, y_0)$ - внутренняя точка множества A.

Теорема 122. *Пусть внутренняя точка $M_0 \in A$ является стационарной точкой функции $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$, и в $U_\varepsilon(M_0)$ функция f имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение*

$$D(x, y) := \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Тогда:

1. если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция f имеет экстремум:

- строгий минимум, если $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$;

- строгий максимум, если $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$;

2. если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция f экстремума не имеет;

3. если $D(x_0, y_0) = 0$, то экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть, а может и не быть.

Эта теорема есть частный случай $(n = 2)$ теоремы 121.

Пример 131. Исследовать на экстремумы функцию

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3xy.$$

Решение. Очевидно, что $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$. Для всех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 3y^2 - 3xy\right) = 3x^2 - 3y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 3y^2 - 3xy\right) = 6y - 3x.$$

В силу теоремы 120, координаты стационарных точек удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 6y - 3x = 0. \end{cases} \tag{6.30}$$

Решениями системы (6.30) являются две точки $O(0, 0)$ и $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 3y\right) = 6x,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6y - 3x) = 6,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6y - 3x) = -3$$

непрерывны в $\mathbb{R}^2$ и

$$D(x,y) = (6x) \cdot 6 - (-3)^2 = 36x - 9.$$

Неравенство $D(0,0) = -9 < 0$ показывает, что в точке $O(0,0)$ экстремума нет (см. пункт 2 теорема 122).

Вычисляя $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = 9 > 0$, заключаем, что в точке $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ функция f имеет экстремум.

Так как $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = 3 > 0$, то M_0 – точка строгого минимума и

$$f_{min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16}$$

(см. пункт 1 теорема 122).

6.10.4. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

Если функция $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то, в силу второй теоремы Вейерштрасса, она принимает в этой области своё наибольшее и наименьшее значения.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f : D \to \mathbb{R}$ нужно:

- найти все стационарные точки функции f внутри области D;
- найти внутренние точки области D, в которых функция f недифференцируема;
- вычислить значения функции f в этих точках;
- найти наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области D;
- из всех полученных таким образом значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 132. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3xy$$

в области

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x, 0 \le y,\ x + y \le 2\}.$$

Решение. Нарисуем область D :

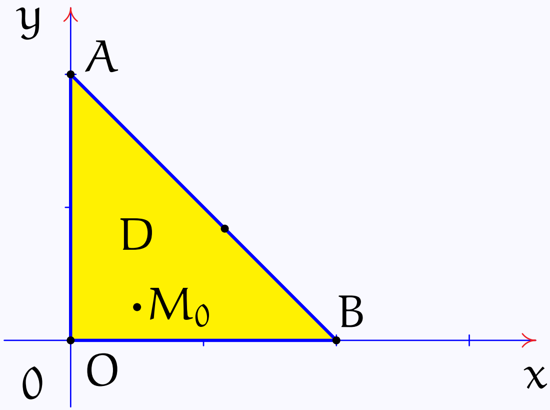


Рис. 6.4 Чертёж области D

- Стационарные точки функции f – $O(0,0)$ и $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ (см. пример 131).
- Функция f дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$.
- Вычисляем $f(0,0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16}$.

- Находим наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области D :
  - Вычисляем $f(0,2) = 12$, $f(2,0) = 8$.
  - На границе OA : $x = 0, 0 < y < 2$, получаем $\varphi(y) = f(0,y) = 3y^2, 0 < y < 2$. Функция φ монотонно возрастает на $(0,2)$, следовательно
$$\min_{[0,2]} \varphi(y) = \varphi(0) = 0, \max_{[0,2]} \varphi(y) = \varphi(2) = 12.$$
  - На границе OB : $y = 0, 0 < x < 2$, получаем $\phi(x) = f(x,0) = x^3, 0 < x < 2$. Функция ϕ монотонно возрастает на $(0,2)$, следовательно
$$\min_{[0,2]} \phi(x) = \phi(0) = 0, \max_{[0,2]} \phi(x) = \phi(2) = 8.$$
  - На границе AB : $y = 2 - x, 0 < x < 2$, получаем $\psi(x) = f(x, 2 - x) = x^3 + 3(2-x)^2 - 3x(2-x) = x^3 + 6x^2 - 18x + 12, 0 < x < 2$. Ищем точки стационарности функции ψ на $(0,2)$: $\psi'(x) = 3x^2 + 12x - 18 = 0, x_1 = -2 - \sqrt{10} < 0 < x_2 = \sqrt{10} - 2 < 2$. Вычисляем $\psi(\sqrt{10} - 2) = (\sqrt{10} - 2)^3 + 6(\sqrt{10} - 2)^2 - 18(\sqrt{10} - 2) + 12 = 64 - 20\sqrt{10} \doteq 0.75$.

- Итак, мы нашли следующие значения функции:

$$f(0,0)=0,\ f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{16},\ f(0,2)=12,$$
$$f(2,0)=8,\ f(\sqrt{10}-2,4-\sqrt{10})\doteq 0.75.$$

Сравнивая их, видим, что наибольшее значение функции f в области D равно 12, оно достигается в точке $A(0,2)$, а наименьшее значение равно $\left(-\frac{1}{16}\right)$, оно достигается в точке $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Зачетная работа по дифференциальному исчислению.

Глава 7

Дифференциальное исчисление отображений

7.1. Дифференцируемость и дифференциал отображения в точке.

Пусть задано отображение

$$f = (f^1, f^2, \dots, f^k)^T : E \to \mathbb{R}^k,\ E \subset \mathbb{R}^n,$$

и $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\right)^T \in E$ предельная точка множества E. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = \left(\Delta x^1, \Delta x^2, \dots, \Delta x^n\right)^T$ так чтобы $x_0 + \Delta x \in E$.

Обозначим

$$\Delta f(x_0, \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ = \begin{pmatrix} \Delta f^1(x_0, \Delta x) \\ \Delta f^2(x_0, \Delta x) \\ \vdots \\ \Delta f^k(x_0, \Delta x) \end{pmatrix}$$

и будем называть *приращением отображения f в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx*.

Определение 169. Отображение $f : E \to \mathbb{R}^k$, $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым в точке* $x_0 \in E$, предельной для множества E, если приращение $\Delta f(x_0, \Delta x)$ отображения f можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta f^1(x_0, \Delta x) \\ \Delta f^2(x_0, \Delta x) \\ \vdots \\ \Delta f^k(x_0, \Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \vdots \\ \Delta x^n \end{pmatrix} +$$
$$+ o\left(\Delta x\right) \quad (7.1)$$

при $\Delta x \to 0$, где $a_j^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$.

Выражение

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \vdots \\ \Delta x^n \end{pmatrix}$$

в (7.1) называется *дифференциалом отображения f в точке $x_0 \in E$* и обозначается $df(x_0)$.

Замечание 1. Отображение f **дифференцируемо** в точке $x_0 \in E$, если изменение его значений в окрестности исследуемой точки линейно с точностью до поправки бесконечно малой по сравнению с величиной Δx смещения от точки x_0.

7.2. Матрица Якоби.

Пусть задано отображение

$$f = (f^1, f^2, \ldots, f^k)^T : E \to \mathbb{R}^k,\ E \subset \mathbb{R}^n,$$

и $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T \in E$ предельная точка множества E.

Теорема 123. *Отображение*

$$f = (f^1, f^2, \ldots, f^k)^T : E \to \mathbb{R}^k,\ E \subset \mathbb{R}^n,$$

дифференцируемо в точке $x_0 \in E$ *предельной для множества* E, *тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы функции* $f^i : E \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *задающие координатное представление данного отображения.*

Доказательство. Равенство (7.1) равносильно k равенствам:

$$\Delta f^i(x_0, \Delta x) = a_1^i \cdot \Delta x^1 + a_2^i \cdot \Delta x^2 + \cdots$$
$$\cdots + a_n^i \cdot \Delta x^n + o\left(\Delta x\right), \; i = 1, 2, \ldots, k, \quad (7.2)$$
$$\text{при } \Delta x \to 0.$$

Каждое же из равенств (7.2) означает, в силу определения 152, дифференцируемость соответствующей координатной функции в точке x_0. $\square$

Тогда, в силу теоремы 123 и формул (6.2), (7.1), для отображения

$$f = (f^1, f^2, \ldots, f^k)^T : E \to \mathbb{R}^k,\ E \subset \mathbb{R}^n,$$

дифференцируемого во внутренней точке $x \in E$ этого множества, можно выписать координатное представление дифференциала $df(x)$ в виде

$$df(x) = \begin{pmatrix} df^1(x) \\ df^2(x) \\ \vdots \\ df^k(x) \end{pmatrix}$$

или

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \vdots \\ \Delta x^n \end{pmatrix}$$

Определение 170. Матрица $\dfrac{\partial\left(f^1,f^2,...,f^k\right)}{\partial(x^1,x^2,...,x^n)}(x)$ из частных производных координатных функций данного отображения в точке $x \in E$ называется *матрицей Якоби отображения в этой точке*, то есть

$$\frac{\partial\left(f^1,f^2,\ldots,f^k\right)}{\partial\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)}(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Пример 133. Построить матрицу Якоби отображения

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} f^1(x,y)\\ f^2(x,y)\\ f^3(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy\ln(x+y)\\ x^{x^y}\\ xy^2\end{pmatrix}.$$

Решение. По определению 170 имеем:

$$\frac{\partial\left(f^1, f^2, f^3\right)}{\partial\left(x, y\right)}(x, y) =$$

$$= \begin{pmatrix} y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y} & x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y} \\ x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1) & x^y x^{x^y}\ln^2 x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

7.3. Дифференцирование композиции отображений.

Теорема 124. *Если отображение*

$$f = (f^1, f^2, \ldots, f^k)^T : X \to Y$$

множества $X \subset \mathbb{R}^n$ *в множество* $Y \subset \mathbb{R}^k$ *дифференцируемо во внутренней точке* $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T \in X$, *а отображение*

$$g = (g^1, g^2, \ldots, g^m)^T : Y \to \mathbb{R}^m$$

дифференцируемо во внутренней точке $y = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^k(x))^T \in Y$, *то* композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}^m$ этих отображений дифференцируема в точке x, причём

$$\frac{\partial\Big((g\circ f)^1,(g\circ f)^2,\dots,(g\circ f)^m\Big)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)}(x) =$$

$$= \frac{\partial\Big(g^1,g^2,\dots,g^m\Big)}{\partial(y^1,y^2,\dots,y^k)}\big(f(x)\big) \cdot \frac{\partial\Big(f^1,f^2,\dots,f^k\Big)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)}(x). \tag{7.3}$$

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 76 и поэтому мы его опустим.

Случай 1.

Пусть $n = 1, k$ - произвольное, $m = 1$.

$$\frac{d(g\circ f)(x)}{dx} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial(y^1,y^2,\dots,y^k)}(f(x)) \cdot \frac{\partial\left(f^1,f^2,\dots,f^k\right)}{dx}(x) =$$

$$= \left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial y^1}\ \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^2} \cdots \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^k}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{df^1(x)}{dx} \\ \frac{df^2(x)}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df^k(x)}{dx} \end{pmatrix}.$$

Пример 134. Заданы отображение

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ t^3 \end{pmatrix}$$

и функция $g(x, y) = e^{x-2y}$. Вычислить матрицу Якоби композиции $g \circ f$.

Решение. По теореме 124 имеем:

$$\frac{d(g\circ f)(t)}{dt} = \left(e^{x-2y},\ -2e^{x-2y}\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ 3t^2\end{pmatrix} =$$

$$= \left(e^{\sin t-2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)\right).$$

Случай 2. Пусть n, k - произвольные, $m = 1$.

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)}(x) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial(y^1,y^2,\dots,y^k)}\left(f(x)\right)\cdot\frac{\partial\left(f^1,f^2,\dots,f^k\right)}{\partial(x^1,x^2,\dots,x^n)}(x) =$$

$$= \left(\frac{\partial g(f(x))}{\partial y^1}\ \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^2} \cdots \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^k}\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Пример 135. Заданы отображение

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}$$

и функция $g(x, y) = x^2 y - y^2 x$. Вычислить матрицу Якоби композиции $g \circ f$.

Решение. По теореме 124 имеем:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial\,(u,v)}(u,v) =$$

$$= \Big(2xy - y^2,\ x^2 - 2xy\Big)\cdot\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix} =$$

$$= \big(\,3u^2\sin v\cos v(\cos v - \sin v),$$

$$u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v\cos v)\,\big)\,.$$

7.4. Дифференцирование обратного отображения.

Теорема 125. *Пусть*

$$f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T : U_\varepsilon(x) \to U_\delta(y)$$

отображает ε *- окрестность* $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^n$ *на* δ *- окрестность* $U_\delta(y) \subset \mathbb{R}^n$ *точки* $y = f(x)$. *Пусть* f *непрерывно в точке* $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ *и имеет обратное отображение*

$$g : U_\delta(y) \to U_\varepsilon(x),$$

непрерывное в точке $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)^T$.

Если при этом отображение f дифференцируемо в точке x и матрица Якоби $\frac{\partial\left(f^1,f^2,\ldots,f^n\right)}{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^n)}(x)$ имеет обратную $\left(\frac{\partial\left(f^1,f^2,\ldots,f^n\right)}{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^n)}(x)\right)^{-1}$, то обратное отображение $g : U_\delta(y) \to U_\varepsilon(x)$ дифференцируемо в точке y и справедливо равенство

$$\frac{\partial\left(g^1, g^2, \ldots, g^n\right)}{\partial\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right)}(y) = \left(\frac{\partial\left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)}{\partial\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)}(x)\right)^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы в данном курсе не рассматривается.

Глава 8

ИНСТРУМЕНТЫ

Окно Тренажёра - Инструмента состоит из трёх подокон (см. Рис. 8.1). Окно статической информации отображает ход работы пользователя с тренажером (полученное задание, математические выкладки, ответ задачи и т.д.). Окно взаимодействия с пользователем отображает текущую подзадачу и содержит соответствующие инструменты для её решения и элементы управления для ввода ответа этой подзадачи. Окно реплик содержит промежуточную информацию, которую необходимо передать поль-

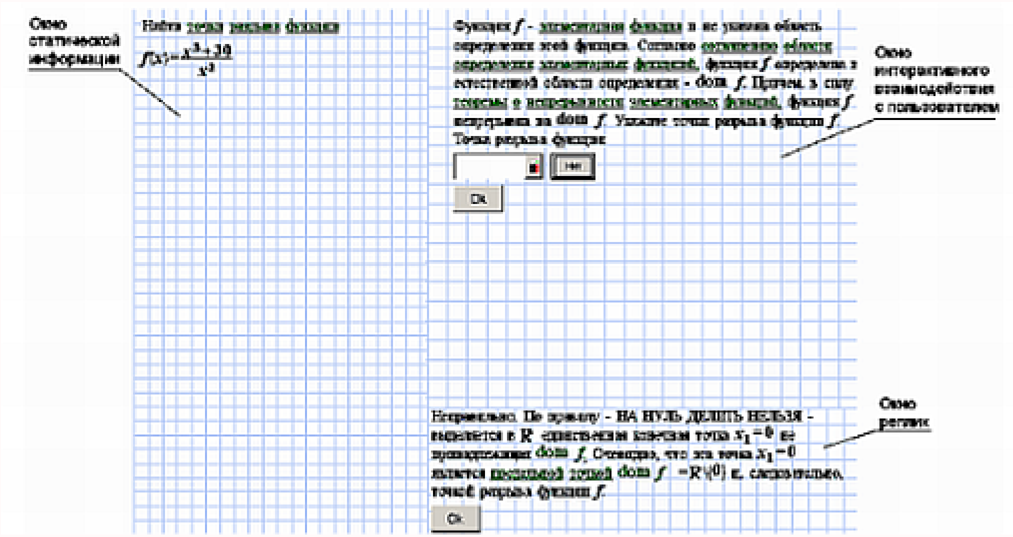


Рис. 8.1. Окно Тренажёра - Инструмента

зователю в ходе работы с окном интерактивного взаимодействия и содержит в себе что-то лишь по мере необходимости. Для работы на тренажере - инструменте необходимо задать начальные условия, которые могут быть начальными условиями аналогичной задачи из Вашей контрольной работы, любые Вами придуманные исходные данные, или данные, сгенерированные

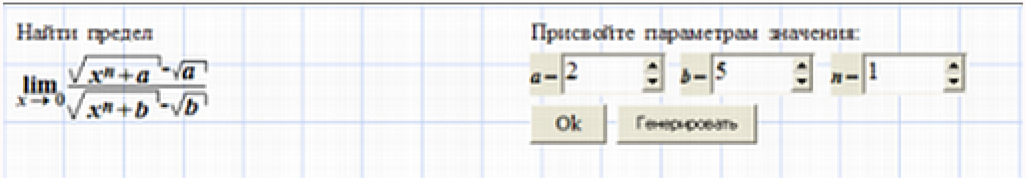


Рис. 8.2. Поля ввода параметров

самим тренажером. Воспользовавшись полями ввода целых чисел, Вы можете ввести свои исходные данные, и нажать кнопку <Ок>, или сгенерировать случайные данные по кнопке <Генерировать> (см. Рис. 8.2). Наиболее простые задачи могут решаться за один шаг. В этом случае в окне статической информации Вам будет сформулирован вопрос и в окне интерактивного взаимодействия будет предложено ответить на него. Ответ на вопрос может быть задан в виде строки, числа, формулы или простого выбора согласия. Для каждого из типов вопросов предусмотрены свои собственные элементы управления.

В окне реплик тренажер выдает некоторую вспомогательную информацию, необходимую по ходу решения задачи. Это может быть, например, подтверждение правильности введенного ответа или указание, почему введенный ответ неправильный.

В более сложных задачах шагов решения может быть несколько. Каждый из шагов решения аналогичен решению простой (одношаговой) задачи. В окне статической информации при этом формируется ход решения задачи от начальной формулировки до окончательного ее решения.

8.1. Вспомогательные

Найти все решения неравенства:

ИНСТРУМЕНТ

$$ax^2 + bx + c < d$$

ИНСТРУМЕНТ

$$ax^2 + bx + c \leq d$$

ИНСТРУМЕНТ

$$ax^2 + bx + c > d$$

ИНСТРУМЕНТ

$$ax^2 + bx + c \geq d$$

Деление многочлена на двучлен $x - a$:

ИНСТРУМЕНТ

Деление углом

8.2. Метод Безу

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g} \frac{a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

8.3. Метод "Умножить на сопряжённое"

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sqrt{ax^n+b}-\sqrt{c}}{px^m+q}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx^n}-\sqrt{a}}{x^n}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sqrt[3]{x^n+a^3}-a}{x^n}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-c}{x-a}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x-b}-c}{x-a}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^n+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^n+b}-\sqrt{b}}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^n-a^3}+a}{\sqrt{x^n+b^2}-b}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^n+ta}-t\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^n+sb}-s\sqrt[3]{b}}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sin\left(ax^n+b\right)}{\sqrt{px^n+q}-\sqrt{c}}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\operatorname{tg}\left(ax^n+b\right)}{\sqrt{px^n+q}-\sqrt{c}}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^m+bn^k+c}-dn^l\right)$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^m+bx^k+c}-dx^s\right)$$

8.4. Метод “Первый замечательный предел”

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sin\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sin\left(ax^n+b\right)}{px^2+qx+c}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\sin\left(ax^n+b\right)}{\sqrt{px^m+q}-\sqrt{c}}$$

8.5. Метод “Первое следствие первого замечательного предела”

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\arcsin\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

8.6. Метод “Второе следствие первого замечательного предела”

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g}\frac{\operatorname{arctg}\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

8.7. Метод “Второе следствие второго замечательного предела”

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g} \frac{a^{cx^n + d} - 1}{px^m + q}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g} \frac{a^{cx^n + d} - 1}{\sin\left(px^m + q\right)}$$

8.8. Односторонние пределы функции одной переменной

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g+0} \frac{a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x \to g-0} \frac{a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{|a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5|}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \frac{|a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5|}{b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \operatorname{arctg} \frac{c}{ax^n + b}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{cx^m + d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{px^2 + qx + c}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{|px^2 + qx + c|}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \frac{\arcsin\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{\arcsin\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \frac{\operatorname{arctg}\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{\operatorname{arctg}\left(ax^n+b\right)}{cx^m+d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \frac{e^{ax^n+b}-1}{|cx^m+d|}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{e^{ax^n+b}-1}{|cx^m+d|}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g-0} \frac{e^{ax^n+b}-1}{cx^m+d}$$

ИНСТРУМЕНТ

Найти предел

$$\lim_{x\to g+0} \frac{e^{ax^n+b}-1}{cx^m+d}$$

8.9. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{ax^n + b}{cx^m + d}$$

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{|\sin(ax^n + b)|}{cx^m + d}$$

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{\sin(ax^n + b)}{cx^m + d}$$

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{\sin(ax^n + b)}{px^2 + qx + c}$$

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{ax^n + b}{|cx^m + d|}$$

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{|cx^m + d|}$$

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{\sin\left(ax^n + b\right)}{|px^2 + qx + c|}$$

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = e^{\frac{c}{ax^n+b}}$$

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{e^{ax^n+b} - 1}{cx^m + d}$$

Найти точки разрыва функции:

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{e^{ax^n+b} - 1}{|cx^m + d|}$$

ИНСТРУМЕНТ

$$f(x) = \frac{e^{ax^n+b} - 1}{|px^2 + qx + c|}$$

Глава 9

КОНТРОЛЬ

9.1. Самоподготовка к экзамену.

САМОПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНУ

Весь материал курса разбит на 19 тем. Каждая задача имеет указания, подсказки, полное решение и контроль ответа. Все задачи с параметрами.

9.2. Контрольная работа.

Логин студента (или код доступа) выдаётся каждому студенту ТМЦ ДО преподавателем на установочной сессии. Если Вы студент ТМЦ ДО и Вам не известен ваш логин, то обратитесь в ТМЦ ДО Problems@tcde.ru.

Для тренировки можно ввести логин: to052mmf

Буквы латинские, регистр не имеет значение.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольные работы по всем курсу "Введение в анализ. Дифференциальное исчисление". Все задачи с параметрами.

Глава 10

СПРАВКА

10.1. Метод математической индукции

Математическая индукция - метод доказательства математических утверждений, основанный на *принципе математической индукции*:

утверждение $p(n)$, зависящее от натурального параметра n, считается доказанным для всех $n \geq k_0$, где k_0 – фиксированное натуральное число, если доказано $p(k_0)$ и для любого натурального $n \geq k_0$ из предположения, что верно $p(n)$, выведено, что верно также $p(n+1)$.

Продолжение на следующей странице.

Доказательство $p(k_0)$ составляет *первый шаг индукции*.

Предположение, что верно утверждение $p(n), n \geq k_0$ составляет *второй шаг индукции*.

Доказательство $p(n+1)$ в предположении, что верно $p(n), n \geq k_0$, составляет *третий шаг индукции* и называется *индукционным переходом*. При этом n называется *параметром индукции*, а предположение $p(n)$ при доказательстве $p(n+1)$ называется *индукционным предположением*.

10.2. Бином Ньютона

Для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (число сочетаний из n элементов по k), $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, причём полагают, что $0! = 1$.

Доказывать формулу бинома Ньютона будем методом математической индукции.

При $n = 1$ имеем

$$(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} C_1^i a^{1-i} b^i = \frac{1!}{0!1!}a + \frac{1!}{1!0!}b = a+b.$$

Покажем, что из предположения справедливости формулы бинома Ньютона для n следует, что

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i.$$

В самом деле

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = \\
&= (a+b)\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{i-1} a^{n+1-i} b^i = \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(C_n^i + C_n^{i-1}\right) a^{n+1-i} b^i + b^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Используя соотношения

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \\ = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \\ = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k, k = 1, 2, \ldots, n, \\ C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1, \tag{10.1}$$

окончательно имеем

$$(a+b)^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^{i} a^{n+1-i} b^{i} + b^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^{i} a^{n+1-i} b^{i}.$$

Для всех натуральных $n > 2$ имеет место неравенство

$$\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{10.2}$$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$n = \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n \overset{10.2}{=} 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n > \\ > \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

следует, что

$$\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Для всех натуральных n имеет место неравенство

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n \tag{10.3}$$

Доказательство. Обозначим через $p(n)$ неравенство, которое нужно доказать.

Применим метод математической индукции.

I. При $n = 1$ неравенство (10.3) имеет место.

II. Пусть $p(n)$ имеет место, т.е. $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

III. Если неравенство (10.3) имеет место при n, то для $n + 1$ имеем

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{\text{II.}}{>} \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) =$$

$$= \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{5}{>} \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Для всех натуральных n имеет место неравенство Бернулли

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n, \tag{10.4}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа одного и того же знака, большие минус единицы.

Доказательство. Обозначим через $p(n)$ неравенство, которое нужно доказать.

Применим метод математической индукции.

I. При $n = 1, 2$ неравенство (10.4) имеет место.

II. Пусть $p(n)$ имеет место, т.е.

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$

III. Если неравенство (10.4) имеет место при n, то для $n+1$ имеем

(при $x_i > -1, i = 1, 2, \ldots, n, n+1$)

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) &\overset{\text{II.}}{\geq} \\ \geq \left(1+x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\left(1+x_{n+1}\right) &= \\ = 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}&+ \\ +\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)x_{n+1} &\geq \\ \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}&.\end{aligned}$$

На последнем шаге мы отбросили слагаемое

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)x_{n+1},$$

которое является неотрицательным, если все $x_i, i = 1, 2, \ldots, n, n+1$, одного знака.

Доказать, что если $x > -1$, то для всех натуральных $n > 1$ имеет место неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \tag{10.5}$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

Доказательство.

Неравенство (10.5) есть следствие неравенства (10.4) при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$.

НЕРАВЕНСТВО БЕРНУЛЛИ

На иллюстрации показаны графики функций $f_n(x) = (1+x)^n$ (синий) и $g_n(x) = 1 + nx$ (красный) при $n = 2, 3, \ldots, 10$.
При всех значениях $n = 2, 3, \ldots, 10$, которое устанавливается движком “n”, синяя кривая всегда выше красной с единственной точкой соприкосновения $(0, 1)$.

Доказать, что если $0 < |q| < 1$, то для всех натуральных $n > 1$ имеет место неравенство

$$|q^n| < \frac{|q|}{n\,(1 - |q|)}. \tag{10.6}$$

Доказательство.

Неравенство (10.6) получается из следующей цепочки неравенств

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n \overset{10.5}{>}$$
$$> 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Отсюда следует, что

$$|q^n| = |q|^n < \frac{|q|}{n\,(1 - |q|)}.$$

Доказать, что если $b \in \mathbb{R}, b > 1,$ то для всех натуральных $n > 2$ имеет место неравенство

$$\frac{n}{b^n} < \frac{2}{(n-1)(b-1)^2}. \tag{10.7}$$

Доказательство. Так как $b > 1,$ то

$$b^n = (1 + (b-1))^n \overset{10.2}{=}$$
$$= 1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \cdots + (n-1)^n >$$
$$> \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2.$$

Тогда

$$\frac{n}{b^n} < \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(b-1)^2}.$$

Модуль вещественного числа.

Определение 171. *Абсолютной величиной (модулем) вещественного числа* a, обозначение $|a|$, называется число, равное a, если $a \geq 0$, и равное $-a$, если $a < 0$, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $|a| = \max\{-a, a\}$.

10.3. Геометрическая прогрессия

Если b_0 – первый член, а $q \neq 1$ – постоянное отношение следующего члена к предыдущему, называемое *знаменателем геометрической прогрессии*, то

$$b_j = b_0 q^j, \ (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_0 q^j = b_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{b_0 - b_n q}{1 - q}. \tag{10.8}$$

10.4. Алгебра.

Квадратичная форма.

Пусть $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Функция

$$\phi(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} \in \mathbb{R}$, называется *квадратичной формой на* $\mathbb{R}^n$. Матрица $(a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nn}(\mathbb{R})$ называется *матрицей квадратичной формы.*

Квадратичная форма называется *знакоопределённой,* если она положительно или отрицательно определённая.

Положительно определенная квадратичная форма.

Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j, a_{ij} = a_{ji}$, называется *положительно определённой*, если при любых не равных одновременно нулю значениях переменных $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j > 0$.

Отрицательно определенная квадратичная форма.

Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j, a_{ij} = a_{ji}$, называется *отрицательно определённой*, если при любых не равных одновременно нулю значениях переменных $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j < 0$.

Критерия Сильвестра.

Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j, a_{ij} = a_{ji}$, с симметрической матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры этой матрицы; форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$, и при переходе от любого главного минора матрицы к главному минору следующего порядка знак значения минора меняется.

Миноры

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\cdots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица.

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Пусть $A = (a^i_j), E = (\delta^i_j) \in \mathfrak{M}^n_n(\mathbb{R})$, где E – единичная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы и остальные элементы равны нулю, т.е.

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определение. Матрица $A^{-1} \in \mathfrak{M}^n_n(\mathbb{R})$ называется *обратной* к квадратной матрице $A = (a^i_j) \in \mathfrak{M}^n_n(\mathbb{R})$, если их произведение равно единичной матрице, т.е. $A \cdot A^{-1} = E$.

Теорема Безу

Остаток, получаемый при делении любого многочлена $P_n(x)$ на $(x - c)$, равен $P_n(c)$.

10.5. Фундаментальные функции.

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \qquad (10.9)$$

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad (10.10)$$

$$\ln a^b = b \cdot \ln a \qquad (10.11)$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \; : \; \ln x < x \qquad (10.12)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad (10.13)$$

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \tag{10.14}$$

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b| \tag{10.15}$$

$$(|x - a| < \varepsilon) \iff (a - \varepsilon < x < a + \varepsilon) \tag{10.16}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{10.17}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \tag{10.18}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \tag{10.19}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{10.20}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{10.21}$$

Периодические функции.

Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *периодической*, если существует такое число T, $(T \neq 0)$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x), \tag{10.22}$$

при этом число T называют *периодом* функции f.

Очевидно, что если T – период функции f, то её периодом также будет nT, где n – любое целое число. Обычно за период T принимают наименьшее положительное число, удовлетворяющее равенству (10.22).

Продолжение на следующей странице.

Отметим следующие свойства периодических функций:

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T есть периодические функции периода T.

2. Если функция f имеет период T, то функция g, определяемая формулой

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) := f(ax),$$

периодическая с периодом $\frac{T}{a}$.

3. Если f периодическая функция периода T, то равны любые два интеграла от этой функции, взятые по промежутку длины T.

Чётные и нечётные функции.

Пусть a положительное число или символ $+\infty$.

Функция $f : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *чётной*, если

$$\forall x \in (-a, a) \ : \ f(-x) = f(x).$$

Функция $f : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *нечётной*, если

$$\forall x \in (-a, a) \ : \ f(-x) = -f(x).$$

ПРИМЕРЫ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Приведены графики некоторых чётных и нечётных функций.
Графики чётных функций симметричны относительно оси ординат.
Графики нечётных функций симметричны относительно начала координат.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{10.23}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{10.24}$$

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} > 0, \text{ при } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{10.25}$$

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} > 0, \text{ при } \alpha \in (0, \pi) \tag{10.26}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{10.27}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} \tag{10.28}$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{10.29}$$

$$\sin x = -\ \sin(x + \pi) \tag{10.30}$$

$$\cos x = -\ \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \tag{10.31}$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \tag{10.32}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{10.33}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{10.34}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{10.35}$$

$$\sin x = - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{10.36}$$

$$\cos x = - \cos\left(x + \pi\right) \tag{10.37}$$

$$\sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \tag{10.38}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ |\sin x| \leq 1 \tag{10.39}$$

10.6. Векторная алгебра.

Определение. Базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \subset \mathbb{V}_3$ называется *декартовым базисом,* если он состоит из единичных взаимно ортогональных геометрических векторов.

Определение. *Скалярным произведением двух ненулевых геометрических векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b})$, равное произведению их длин на косинус угла между ними, т.е.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}\right).$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение полагается равным нулю.

Определение. Косинусы углов между геометрическим вектором и осями декартовой системы координат, называются *направляющими косинусами*.

Если $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$, то

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{\imath}) = \cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{\imath})}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|};$$

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{\jmath}) = \cos\beta = \frac{(\vec{a}, \vec{\jmath})}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|};$$

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{k}) = \cos\gamma = \frac{(\vec{a}, \vec{k})}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}.$$

Определение. *Ортом ненулевого геометрического вектора* $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Очевидно, что орт вектора $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, $|\vec{a_0}| = 1$ и координаты орта вектора совпадают с его направляющими косинусами.

10.7. Аналитическая геометрия.

Общее уравнение прямой на плоскости.

$$\Pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

или

$$\Pi : Ax + By + C = 0,$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in \Pi$ и $\vec{n} = (A, B) \perp \Pi$ – нормальный вектор прямой Π.

Каноническое уравнение прямой на плоскости.

$$\Pi : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in \Pi$ и $\vec{p} = (l, m) \parallel \Pi$ – *направляющий вектор прямой Π.*

Параметрические уравнения прямой на плоскости.

$$\Pi : \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in \Pi$ и $\vec{p} = (l, m) \parallel \Pi$ – *направляющий вектор прямой П.*

Канонические уравнения прямой в пространстве.

$$\Pi : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ и $\vec{p} = (l, m, n) \parallel \Pi$ – *направляющий вектор прямой П.*

Параметрические уравнения прямой в пространстве.

$$\Pi : \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ и $\vec{p} = (l, m, n) \parallel \Pi$ – *направляющий вектор прямой* .

Канонические уравнения прямой, проходящей через две точки.

$$\Pi: \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$ различные точки прямой Π.

Уравнение плоскости.

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

или

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

где точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ и $\vec{n} = (A, B, C) \perp \pi$ – *нормальный вектор плоскости* π.

Кембриджский университет.

Кембриджский университет - второй по древности университет в Англии. Он основан в XIII в. и состоит из отдельных колледжей - учебных заведений, учреждавшихся нередко на частные средства. К XVII в. их насчитывалось 16, в том числе Тринити-Колледж (т. е. колледж св. Троицы). Во главе колледжа стоял мастер. Кафедры возникали по желанию жертвователей.

Получивший первую ученую степень – бакалавр;
Получивший вторую ученую степень – магистр;
Получивший третью ученую степень – доктор.

Пенсионер.

Студенты делились на сайзеров и субсайзеров, пенсионеров и коммонеров-феллоу. Самую высокую плату вносили коммонеры. Они оплачивали не только право учения, но и некоторые привилегии, в число которых входила и такая странная, как право не посещать лекции. Пенсионеры оплачивали (их взнос назывался pensio) только жилье; сайзеры и субсайзеры получали жилье и стол, но плата их была не из легких: они работали слугами здесь же, в колледже.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

660074, г. Красноярск-74, ул. Киренского, 28, ИИФиРЭ СФУ, корпус «Б», ауд. 1-32, СибРУМЦ
Тел. (391) 291-20-24; Тел./факс: (391) 291-21-48, 291-20-23, 291-21-39
Internet: www.rumc.sfu-kras.ru; E-mail: sibrumc@sfu-kras.ru

РЕШЕНИЕ
о присвоении рекомендации СибРУМЦ

от «11» февраля 2015 г.

Президиум СибРУМЦ на основании экспертных заключений по итогам содержательной, программно-технической и дизайн-эргономической экспертизы (приложения 1–3) принял решение присвоить электронному образовательному ресурсу «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление» (автор – Томиленко Владимир Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры «Математика» ФГБОУ ВПО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники») рекомендацию:

«Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве электронного образовательного ресурса для студентов технических вузов».

Приложения:
1. Заключение Учебно-методического совета СибРУМЦ по итогам содержательной экспертизы ЭОР (на 2 с.).
2. Заключение Технического совета СибРУМЦ по итогам программно-технической экспертизы ЭОР (на 3 с.).
3. Заключение Технического совета СибРУМЦ по итогам дизайн-эргономической экспертизы ЭОР (на 2 с.).

Зам. председателя СибРУМЦ С. А. Подлесный

ЛИТЕРАТУРА

- Зорич В. А. Математический анализ, часть 1 - М.: Наука, 1981.
- Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
- Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I, II.– М.: Наука, 1973.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II.– М.: Высшая школа, 1981.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I.–М.: Наука, 1969.
- Шилов Г. Е. Математический анализ, функции одного переменного. – М.: Наука, 1969.

- Шилов Г. Е. Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных. – М.: Наука, 1972.
- Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу, Кн. 1, – М.: Высшая школа, 2000.

$\lim$

- (C) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ★
- (C) $\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ★
- (C) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ★
- (C) $\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$ ★
- (C) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ★
- (C) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ★
- (G) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ★
- (G) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ★
- (G) $\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ★

- (G) $\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$ ★
- (G) $\lim_{x \to \omega} f(x) = \infty$ ★
- (G) $\lim_{x \to \omega} f(x) = -\infty$ ★
- (G) $\lim_{x \to \omega} f(x) = +\infty$ ★
- (G) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ★
- (G) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ★

А

- абсолютная величина (модуль) вещественного числа ★
- аксиома существования нулевого элемента ★
- арифметическое пространство ★
- арккосинус★
- арккотангенс★
- арксинус★
- арктангенс★
- асимптота графика функции★

Б

- Барроу Исаак★
- Бернулли Иоганн★
- Бернулли Якоб★
- бесконечная левая производная★
- бесконечная правая производная★
- бесконечная производная★
- бесконечно большая функция★
- бесконечно малая функция★
- бесконечно малая функция более высокого порядка ★
- бесконечно малые отображения★
- бесконечно малые функции одного порядка ★

- бесконечно удалённая предельная точка ★
- биективное отображение★
- биекция★
- бином Ньютона★

В

- Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм ★
- вектор★
- взаимно обратные функции★
- внутренняя точка множества★
- возрастающая последовательность ★
- возрастающая функция на $[a, b]$★
- вторая производная функции одной переменной ★
- вторая частная производная★
- второе следствие второго замечательного предела ★
- второе следствием первого замечательного предела ★
- второй дифференциал функции многих переменных ★

- второй замечательный предел★
- второй замечательный предел, второе следствие ★
- второй замечательный предел, первое следствие ★
- второй замечательный предел, третье следствие ★

Г

- геометрическая прогрессия★
- главная часть бесконечно малой функции ★
- главные миноры матрицы★
- градиент функции★
- граничная точка множества★
- график отображения★

Д

- дважды дифференцируемая функция многих переменных ★
- декартов базис★
- дискриминант квадратичной функции ★
- дифференциал n - го порядка функции одной переменной ★
- дифференциал второго порядка функции одной переменной ★
- дифференциал отображения★
- дифференциал функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ ★
- дифференциал функции многих переменных ★
- дифференцируемая в точке функция одной переменной ★
- дифференцируемая на множестве $A \subset \mathbb{R}$ ★

- доминанта последовательности ★
- доминанта функции★

Е

- естественная область определения★

З

- замкнутое множество★

И

- изолированная точка★
- инвариантная форма записи дифференциала ★
- интервал монотонности функции★
- инъективное отображение★

К

- канонические уравнения прямой
  в пространстве ★
- каноническое уравнение прямой на плоскости ★
- каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки★
- касательная к кривой★
- касательная плоскость★
- касательный вектор плоской кривой ★
- касательный вектор пространственной кривой ★
- квадратичная форма★
- квадратичная форма, знакоопределённая ★

- квадратичная форма, отрицательно определённая ★
- квадратичная форма, положительно определённая ★
- квадратичная функция★
- квадратичная функция, дискрименант ★
- композиция отображений★
- косинус★
- котангенс★
- Коши́ Огюстен Луи★
- кривая в пространстве $\mathbb{R}^k$★
- критерий Сильвестра★
- кусочно - элементарная функция★
- k раз дифференцируемая функция многих переменных ★

- k-тый дифференциал функции многих переменных ★

Л

- Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis) ★
- левая производная функции★
- левосторонняя касательная к кривой ★
- Лейбниц Готфрид Вильгеьм★
- линейная структура★
- линейная функция★
- линейное пространство★
- логарифмическая производная★
- логарифмическая функция★
- Лопиталь Гийом Франсуа Антуан де★

М

- матрица Якоби отображения★
- метод “Второе следствие второго замечательного предела” ★
- метод “Второй замечательный предел” ★
- метод “Замена переменных”★
- метод “Первое следствие второго замечательного предела” ★
- метод “Второе следствие первого замечательного предела” ★
- метод “Первое следствие первого замечательного предела” ★
- метод “Первый замечательный предел” ★
- метод “Третье следствие второго замечательного предела” ★
- метод Безу★
- метод логарифмического дифференцирования ★

- метод математической индукции★
- минимум (максимум) функции многих переменных ★
- минимум (максимум) функции одной переменной ★
- множество A входит в множество B ★
- множество A равно множеству B★
- множество $A_-(\omega) = \{x \in A | x < \omega\}$ ★
- множество $A_+(\omega) = \{x \in A | x > \omega\}$ ★
- множество вещественных чисел★
- множество значений отображения★
- множество ограниченное★
- множество связное★
- монотонная последовательность★

Н

- направляющие косинусы★
- направляющий вектор прямой в пространстве ★
- направляющий вектор прямой на плоскости ★
- невозрастающая последовательность ★
- неравенство $\varphi < f < \psi$ вблизи ω ★
- неравенство $|f| \leq M$ вблизи ω ★
- неравенство $|f| < M$ вблизи ω ★
- неравенство $0 < M < |f|$ вблизи ω ★
- неравенство $f \neq 0$ вблизи ω ★
- неравенство $f < 0$ вблизи ω ★
- неравенство $f > 0$ вблизи ω ★

- неубывающая [невозрастающая] функция на $[a, b]$ ★
- неубывающая последовательность ★
- нормаль к плоской кривой★
- нормаль к поверхности★
- нормальный вектор плоской кривой ★
- нормальный вектор плоскости★
- нормальный вектор прямой на плоскости ★
- нуль функции одной переменной★
- Ньютон Исаак★

О

- область в пространстве $\mathbb{R}^k$ ★
- область значений отображения★
- область определения функции★
- область определения отображения ★
- образ множества★
- образующие бесконечно большие функции ★
- обратная матрица★
- обратное отображение★
- объединение множеств★
- ограниченная сверху последовательность ★
- ограниченная снизу последовательность ★

- ограниченное множество★
- окрестность бесконечно удалённой точки ★
- окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ★
- “Организовать второе следствие второго замечательного предела” ★
- “Организовать второй замечательный предел” ★
- “Организовать первое следствие второго замечательного предела” ★
- “Организовать третье следствие второго замечательного предела” ★
- орт вектора★
- остаточный член формулы Тейлора в форме Коши́ ★

- остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа ★
- остаточным членом формулы Тейлора в форме Шлемильха и Роша ★
- ось★
- отделимая от нуля вблизи ω ★
- открытое множество★
- отображение дифференцируемое в точке ★
- Отображение непрерывное в точке $x_0 \in A$ ★
- Отображение непрерывное в точке $x_0 \in A$ ★
- Отображение непрерывное в точке $x_0 \in A$ ★
- Отображение непрерывное в точке $x_0 \in A$ ★
- Отображение непрерывное на множестве ★

- отображение обратное★
- отображение ограниченное на множестве ★
- отображение, бесконечно малое★
- отображение, биективное★
- отображение, график★
- отображение, инъективное★
- отображение, композиция★
- отображение, множество значений★
- отображение, область значений★
- отображение, сюръективное★
- отображения, "f o - малое от g"★

П

- параметризация кривой★
- параметрически заданная функция★
- первое следствие второго замечательного предела ★
- первое следствием первого замечательного предела ★
- первый замечательный предел ★
- первый замечательный предел,
  второе следствие ★
- первый замечательный предел,
  первое следствие ★
- пересечение множеств★
- периодическая функция★

- подмножество множества★
- показательная функция ★
- полиномом Тейлора порядка n ★
- последовательности образующие ★
- последовательности одного порядка роста ★
- последовательности эквивалентные ★
- последовательность бесконечно большая ★
- последовательность бесконечно малая ★
- последовательность более высокого порядка роста ★
- последовательность в $\mathbb{R}^k$ ★
- последовательность вложенных отрезков ★
- последовательность ограниченная ★

- последовательность отделимая от нуля ★
- последовательность стремится к бесконечности ★
- последовательность сходится к точке $x_0 \in \mathbb{R}^k$ ★
- последовательность сходится к числу a ★
- последовательность, сходящаяся ★
- последовательность, возрастающая ★
- последовательность, доминанта ★
- последовательность, метод “Умножить на сопряжённое” ★
- последовательность, метод “Умножить на сопряжённое” ★
- последовательность, монотонная ★
- последовательность, невозрастающая ★

- последовательность, неопределённость вида $(\infty - \infty)$★
- последовательность, неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$★
- последовательность, неубывающая ★
- последовательность, ограниченная сверху ★
- последовательность, ограниченная снизу ★
- последовательность, убывающая ★
- последовательность, шкала порядков роста ★
- правая производная функции ★
- правило Лопиталя $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ★
- правило Лопиталя $\left(\frac{0}{0}\right)$ ★
- правосторонняя касательная к кривой ★

- предел отображения по Гейне ★
- предел отображения по Коши ★
- предел отображения по Коши ★
- предел функции слева по Коши ★
- предел функции справа по Коши ★
- предел функции слева по Гейне ★
- предел функции справа по Гейне ★
- предельная точка★
- предельное положение прямых MM_n ★
- предыдущая точка - последующая точка на кривой ★
- приращение аргумента★
- приращение отображения★

- приращение функции★
- приращение функции многих переменных ★
- производная по направлению★
- производная порядка n★
- производная функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ ★
- производная функции f равна ∞ ★
- проколотая $\varepsilon-$ окрестность точки ★

Р

- равномерно непрерывная функция ★
- разность множеств★
- расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ ★
- РОД БЕРНУЛЛИ★

С

- свойства расстояния★
- связное множество★
- секущая по отношению к кривой L ★
- секущая поверхности★
- Сильвестр Джеймс Джозеф★
- синус★
- скалярное произведение★
- смешанные частные производные★
- стационарная точка функции многих переменных ★
- степенная функция★

- строгий максимум функции многих переменных ★
- строгий максимум функции одной переменной ★
- строгий минимум функции многих переменных ★
- строгий минимум функции одной переменной ★
- сюръективное отображение★

Т

- таблица эквивалентных бесконечно малых функций ★
- тангенс★
- Тейлор Брук★
- теорема Безу★
- теорема Коши́★
- теорема Лагранжа★
- теорема Ро́лля★
- теорема Ферма́★
- точка минимума (максимума) функции многих переменных ★
- точка минимума (максимума) функции одной переменной ★

- точка перегиба графика функции★
- точка подозрительная на экстремум функции одной переменной ★
- точка разрыва второго рода★
- точка разрыва первого рода★
- точка разрыва функции одной переменной ★
- точка стационарности функции одной переменной ★
- точка строгого максимума функции многих переменных ★
- точка строгого максимума функции одной переменной ★
- точка строгого минимума функции многих переменных ★
- точка строгого минимума функции одной переменной ★
- точка строгого экстремума функции многих переменных ★

- точка строгого экстремума функции одной переменной ★
- точка устранимого разрыва ★
- точка экстремума функции многих переменных ★
- точка экстремума функции одной переменной ★
- третье следствие второго замечательного предела ★
- тригонометрическая функция косинус★
- тригонометрическая функция котангенс★
- тригонометрическая функция синус★

У

- убывающая последовательность★
- убывающая функция на $[a, b]$★
- угловая точка графика функции★
- упорядоченная n — ★

Ф

- Фермá Пьер (Fermat Pierre)★
- формула Коши★
- формула Лагранжа★
- формула Лейбница★
- формула Маклорена★
- формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано ★
- фундаментальная функция★
- функции бесконечно малые одного порядка ★
- функции многих переменных, k-тый дифференциал ★
- функции многих переменных, второй дифференциал ★
- функции многих переменных, дифференциал ★

- функции многих переменных, точка минимума (максимума) ★
- функции многих переменных, частная производная ★
- функции многих переменных, частное приращение ★
- функции одного порядка роста★
- функции одной переменной, точка минимума (максимума) ★
- функции эквивалентные★
- функции, бесконечно малые, эквивалентные ★
- функции, "f o - малое от g"★
- функции, таблица эквивалентных бесконечно малых ★
- функция более высокого порядка роста ★

- функция вогнутая на интервале (a, b) ★
- функция выпуклая на интервале (a, b) ★
- функция выпуклая на интервале (a, b) ★
- функция дифференцируемая в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ★
- функция заданная параметрически★
- функция меняет знак с минуса на плюс ★
- функция меняет знак с плюса на минус ★
- функция многих переменных, k раз дифференцируемая ★
- функция многих переменных, дважды дифференцируемая ★
- функция многих переменных, приращение функции ★
- функция не меняет знака★
- функция нечётная★

- функция неявно заданная уравнением $F(x, y) = 0$ ★
- функция неявно заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$ ★
- функция ограниченная вблизи ω ★
- функция одной переменной, вторая производная ★
- функция одной переменной, главная часть бесконечно малой ★
- функция равномерно непрерывная ★
- функция строго вогнутая на интервале (a, b) ★
- функция строго выпуклая на интервале (a, b) ★
- функция строго выпуклая на интервале (a, b) ★

- функция чётная★
- функция, бесконечно большая★
- функция, бесконечно малая★
- функция, бесконечно малая более высокого порядка ★
- функция, возрастающая на $[a, b]$ ★
- функция, дифференцируемая в точке ★
- функция, доминанта★
- функция, квадратичная★
- функция, квадратичная, дискриминант ★
- функция, кусочно - элементарная ★
- функция, линейная★
- функция, логрифмическая★

- функция, метод “Умножить на сопряжённое” ★
- функция, метод “Умножить на сопряжённое” ★
- функция, неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ★
- функция, неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$ ★
- функция, неопределённость $(\infty - \infty)$ ★
- функция, неопределённость (1^{∞}) ★
- функция, показательная★
- функция, степенная★
- функция, тригонометрическая, косинус ★
- функция, тригонометрическая, котангенс ★
- функция, тригонометрическая, синус ★
- функция, тригонометрическая, тангенс ★

- функция, убывающая на $[a, b]$★
- функция, шкала порядков роста★
- функция, фундаментальная★

Ч

- частная производная функции многих переменных ★
- частное приращение функции многих переменных ★

Ш

- шкала порядков роста последовательностей ★
- шкала порядков роста функций★

Э

- Эйлер Леонард★
- эквивалентные бесконечно малые функции ★
- элементарная функция одной переменной ★
- элементарная функция многих переменных ★

Я

- Якоби Карл Густав Якоб★