Дисциплина «Микроэлектроника»

ТЕМА: «Математический аппарат цифровой микроэлектроники »

Легостаев Николай Степанович,
профессор кафедры «Промышленная электроника»

Содержание

- Понятие системы счисления. Позиционные системы счисления: двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная. Арифметические коды: прямой, обратный, дополнительный. Двоично-десятичные коды.

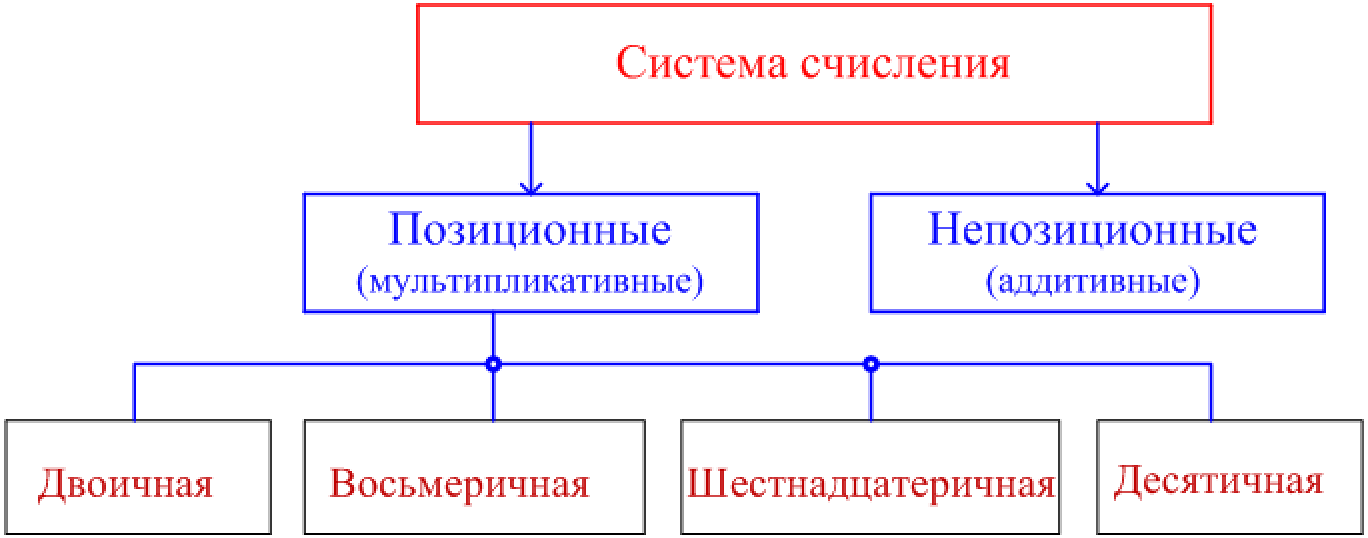
- Функции алгебры логики и их основные свойства: функция инверсии (функция «НЕ», логическое отрицание), функция «дизъюнкция» (функция «ИЛИ», логическое сложение), функция «конъюнкция» (функция «И», логическое умножение), функция «стрелка Пирса» (функция стрелка Пирса, функция «ИЛИ-НЕ»), функция «штрих Шеффера» (функция Шеффера, функция «И-НЕ»), функция «исключающее ИЛИ» (функция сложения по модулю 2).

- Основные законы алгебры логики: свойства дизъюнкции и конъюнкции, теорема поглощения, теорема склеивания, теорема де Моргана (теорема двойственности), теоремы одной переменной.

- Карты Карно трех и четырех переменных.

Позиционные системы счисления.

Система счисления – совокупность ограниченного числа специальных *символов* и *правил записи* с их помощью численных значений и результатов арифметических операций над числами. *Символы* системы счисления *называют цифрами.*



В позиционных системах счисления каждая цифра принимает различные значения в зависимости от местоположения (позиции) в записи числа. Количество ***p*** различных цифр, используемых в позиционной системе счисления, называется *основанием системы счисления*. Цифры системы счисления с основание *p* обозначают *p* целых чисел от **0** до $(p-1)$.

Позиционные системы счисления.

В общем случае в позиционной системе счисления с основанием *p* любое положительное число A_p может быть представлено в виде полинома:

$$A_p = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0,$$

где $0 \le a_i < p$ – цифры числа, n – число разрядов (разрядность) числа.

Относительная простота технической реализации элементов с двумя устойчивыми состояниями привела к тому, что в современной цифровой электронике доминирует представление чисел в ***двоичной системе счисления***.

В двоичной системе счисления $p = 2,\ a_i = \{0,1\}$:

$$A_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0 .$$

В восьмеричной системе счисления $p = 8,\ a_i = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

В шестнадцатеричной системе счисления

$p = 16,\ a_i = \{0,1,2,3,4,5,6,7,A,B,C,D,E,F\}$, где

$A = 10,\ B = 11,\ C = 12,\ D = 13,\ E = 14,\ F = 15.$

Позиционные системы счисления.

Для перевода целого числа из произвольной системы счисления в десятичную его необходимо представить в виде полинома.

Пример 1: Перевод числа **1001010B** в десятичную систему счисления:

$$1001010_2 = 1\times2^{7-1} + 0\times2^{7-2} + 0\times2^{7-3} + 1\times2^{7-4} + 0\times2^{7-5} + 1\times2^{7-6} + 0\times2^{7-7} =$$

$$= 1\times2^6 + 0\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 =$$

$$= 1\times64 + 0\times32 + 0\times16 + 1\times8 + 0\times4 + 1\times2 + 0\times1 = 74_{10}.$$

Пример 2: Перевод числа **457Q** в десятичную систему счисления:

$$457_8 = 4\times8^2 + 5\times8^1 + 7\times8^0 = 4\times64 + 5\times8 + 7\times1 = 303_{10}.$$

Пример 3: Перевод числа **3CH** в десятичную систему счисления:

$$3C_{16} = 3\times16^1 + 12\times16^0 = 3\times16 + 12\times1 = 60_{10}.$$

Задание 1: представить число 1010010B в десятичной системе счисления.

Задание 2: представить число 382Q в десятичной системе счисления.

Задание 3: представить число 5AH в десятичной системе счисления.

Позиционные системы счисления.

Решение задания 1:

1	0	1	0	0	1	0
64	32	16	8	4	2	1

$$\longrightarrow 1\cdot 64 + 1\cdot 16 + 1\cdot 2 = 82_{10}$$

Решение задания 2:

3	8	2
64	8	1

$$\longrightarrow 3\cdot 64 + 8\cdot 8 + 2\cdot 1 = 258_{10}$$

Решение задания 3:

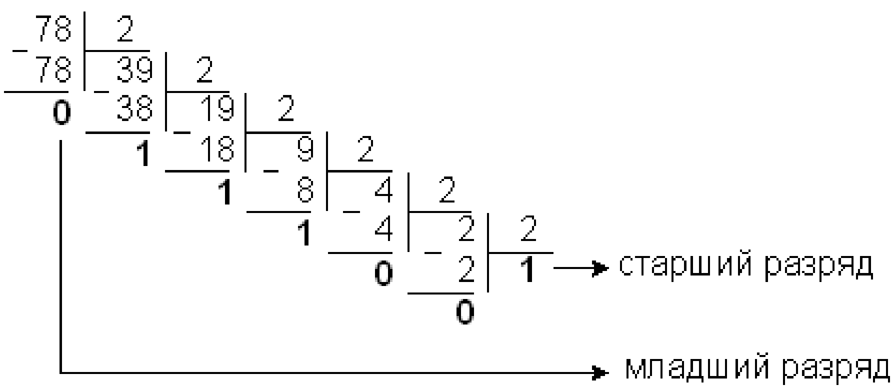
5	A
16	1

$$\longrightarrow 5\cdot 16 + 10\cdot 1 = 90_{10}$$

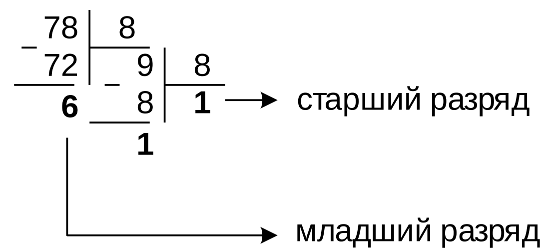
Позиционные системы счисления.

Для перевода целого десятичного числа в другую систему счисления нужно последовательно делить это число и получаемые частные от деления на основание новой системы до тех пор, пока частное от деления не станет меньше основания новой системы счисления. Старшей цифрой в записи числа в новой системе счисления служит последнее частное, а следующие за ней цифры определяются остатками от деления.

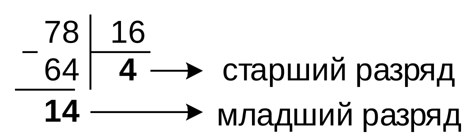
Пример 4: Представить десятичное число 78 в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.



$$78_{10} = 1001110_2 = 1001110B.$$



$$78_{10} = 116_8 = 116Q.$$



$$78_{10} = 4E_{16} = 4EH.$$

Позиционные системы счисления.

Пример перевода целого десятичного числа 78_{10} в двоичную систему счисления с использованием весов разрядов:

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	0	0	1	1	1	0

$\longrightarrow$ $78_{10} = 1001110_2 = 1001110B.$

Для перевода числа из восьмеричной системы счисления в двоичную достаточно каждую цифру восьмеричного числа представить *трехразрядным двоичным числом* – *двоичной триадой*. При этом отбрасываются незначащие нули.

Пример перевода числа 123Q в двоичную систему счисления:

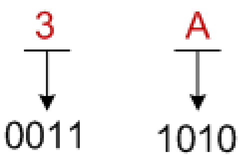
1	2	3
001	010	011

$$123Q = 1010011B.$$

Позиционные системы счисления.

Перевод шестнадцатеричного числа в двоичную систему счисления осуществляется представлением каждой шестнадцатеричной цифры ***четырехразрядным двоичным числом – двоичной тетрадой***. При этом отбрасываются незначащие нули.

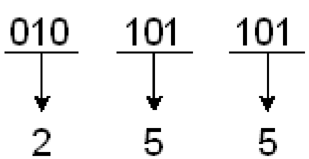
Пример перевода числа $3AH$ в двоичную систему счисления:



$$3AH = 111010B.$$

Перевод двоичного числа в восьмеричную систему счисления – необходимо цифры числа, начиная с младшего разряда, разбить на триады, каждую из которых представить соответствующей цифрой восьмеричного числа.

Пример перевода числа $10101101B$ в восьмеричную систему счисления:

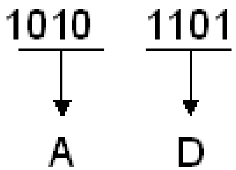


10101101B = 255Q.

Позиционные системы счисления. Арифметические коды.

Перевод двоичного числа в шестнадцатеричную систему счисления – необходимо цифры числа, начиная с младшего разряда, разбить на тетрады, каждую из которых представить соответствующей цифрой шестнадцатеричного числа.

Пример перевода числа 10101101*B* в восьмеричную систему счисления:



10101101B = *ADH*.

Основной арифметической операцией, технически реализуемой в цифровой электронике, является операция арифметического сложения. Для выполнения операции алгебраического сложения применяют специальные коды представления чисел со знаком: прямой, обратный и дополнительный. При этом один из разрядов разрядной сетки (чаще всего старший) предназначен для отображения знака числа, причем для положительных чисел в знаковом разряде устанавливается цифра 0, а для отрицательных – цифра 1.

Прямой, обратный и дополнительный коды положительных чисел совпадают.

Арифметические коды.

Арифметическое сложение чисел в двоичной системе счисления выполняется на основе правил двоичного суммирования в одном двоичном разряде:

$$0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1,\quad 1+1=10,\quad 1+1+1=11,$$

где двузначная сумма в последних двух случаях означает перенос в соседний старший разряд.

Представление двоичного числа восемью разрядами:
в восьмиразрядной сетке семь младших разрядов служат для представления модуля числа в виде семиразрядного двоичного кода, а старший разряд является знаковым.

0	1	0	1	0	1	0	1

знак — модуль

Пример представления десятичного числа (– 46) в прямом, обратном и дополнительном кодах.

1) Представляем модуль десятичного числа (–46) в виде семиразрядного двоичного кода: $|-46_{10}| = 0101110_2$.

Арифметические коды.

2) Так как число отрицательное, знаковый разряд принимает значение 1. В результате прямой код десятичного числа (–46) имеет вид:

1	0	1	0	1	1	1	0

знак модуль

3) Обратный код отрицательного числа формируется путем инвертирования всех разрядов прямого кода, кроме знакового:

1	1	0	1	0	0	0	1

знак модуль

4) При формировании дополнительного кода отрицательного числа инвертируются все разряды двоичного числа, кроме знакового, и прибавляется единица:

$$1\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{0} \rightarrow \begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \\ +\qquad\qquad\quad 1 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

Арифметические коды.

Перевод отрицательных чисел из дополнительного кода в прямой выполняется по тем же правилам, что и из прямого в дополнительный, то есть инвертируются все разряды числа, кроме знакового, и прибавляется единица.

В двоично-десятичном коде 8 – 4 – 2 – 1 каждая цифра десятичного числа представляется соответствующей двоичной тетрадой.

Пример представления числа 517_{10} в двоично-десятичном коде 8-4-2-1:

$$\underset{\downarrow\atop 0101}{5}\quad \underset{\downarrow\atop 0001}{1}\quad \underset{\downarrow\atop 0111}{7} = 010100010111_{2/10}$$

Код 8-4-2-1 удобен для перевода в цифровых устройствах чисел из десятичной системы в двоичную и обратно, поскольку, является естественным представлением десятичных чисел в двоичной системе.

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Алгебра логики (булева алгебра) является теоретической основой анализа и синтеза цифровых систем.

Булевой функцией (БФ) называется функция, аргументами которой являются логические переменные, а сама функция, как и ее аргументы, может принимать только два значения: 1 или 0.

Если булева функция зависит от L аргументов, то ее аргументы образуют 2^L логических (двоичных) наборов значений, которые нумеруются от 0 до 2^{L-1}.

Булева функция от L аргументов может быть полностью задана таблицей, содержащей 2^L строк, в которых записываются все возможные двоичные наборы значений аргументов и указаны значения функции на каждом наборе. Такая таблица называется ***таблицей истинности*** (таблицей соответствия).

Значения булевой функции могут быть заданы не на всех 2^L возможных наборах значений аргументов. Такие булевы функции называют ***не полностью определенными*** (частичными).

Частичная булева функция может быть доопределена путем подстановки на место со знаком “х” 0 либо 1.

Булевы функции от многих аргументов могут быть представлены в виде композиции булевых функций, то есть выражаться через более простые функции меньшего числа аргументов.

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Пример табличного задания функции $y(x_1, x_2, x_3)$:

Номер набора	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$
2	0	1	0	1	$\longrightarrow \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$\longrightarrow x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	$\longrightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

Переменные в каждой строке таблицы истинности связаны между собой логической функцией «И», а строки между собой связаны логической функцией «ИЛИ».

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \times x_3 + \bar{x}_1 \times x_2 \times \bar{x}_3 + x_1 \times \bar{x}_2 \times \bar{x}_3 + x_1 \times x_2 \times x_3.$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Задание 4: Укажите выражение булевой функции $y(x_1, x_2, x_3)$, заданное таблицей истинности.

Номер набора	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

1. $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$

2. $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$

3. $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$

4. $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$

Задание 5: Представьте десятичное число (– 12) в прямом коде при 8-разрядной сетке.

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Решение задания 4: Укажите выражение булевой функции $y(x_1, x_2, x_3)$, заданное таблицей истинности.

Номер набора	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

$\longrightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$

$\longrightarrow x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$

$\longrightarrow x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$

Правильный ответ: 3. $y(x_1, x_2, x_3) = f(1,4,5) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$

Решение задания 5:

Представьте десятичное число (– 12) в прямом коде при 8-разрядной сетке.

1	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	1	1	0	0

$\longrightarrow (-12)_{10} = 10001100_2$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Алгебраические формы представления функций алгебры логики.

Логические выражения, представляющие собой дизъюнкции отдельных членов, каждый из которых, в свою очередь, есть некоторая функция, содержащая только конъюнкции и инверсии, называются ***логическими выражениями дизъюнктивной формы.*** Дизъюнктивная форма представления булевой функции, в которой инверсия применяется лишь непосредственно к аргументам, но не к более сложным функциям от этих аргументов, называется ***дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** представления функции. Если каждый член дизъюнктивной нормальной формы булевой функции от L аргументов содержит **все *L* аргументов**, то такая форма представления называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)*** булевой функции.

Логические выражения, представляющие собой конъюнкции отдельных членов, каждый из которых, в свою очередь, есть некоторая функция, содержащая только дизъюнкции и инверсии, называются ***логическими выражениями конъюнктивной формы.*** По аналогии с дизъюнктивными формами различают ***конъюнктивную нормальную форму (КНФ)*** и ***совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ).***

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Булевы функции, имеющие наиболее важное практическое значение:

- функция «дизъюнкция» (функция «ИЛИ», логическое сложение),
- функция «конъюнкция» (функция «И», логическое умножение),
- функция инверсии (функция «НЕ», логическое отрицание),
- функция «стрелка Пирса» (функция стрелка Пирса, функция «ИЛИ-НЕ»),
- функция «штрих Шеффера» (функция Шеффера, функция «И-НЕ»),
- функция «исключающее ИЛИ» (функция сложения по модулю 2).

Булева функция “дизъюнкция” (функция “ИЛИ”, логическое сложение) в общем случае может зависеть от *L* аргументов и обращается в нуль только в том случае, когда все аргументы равны нулю, и в единицу на всех остальных наборах аргументов. Запись дизъюнкции от *L* аргументов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = x_1 + x_2 + \ldots + x_L.$$

Булева функция “конъюнкция” (функция “И”, логическое умножение) в общем случае может зависеть от *L* аргументов и обращается в единицу только в том случае, когда все аргументы равны единице, и в нуль на всех остальных наборах аргументов. Запись конъюнкции от *L* аргументов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_L.$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Булева функция инверсии (функция «НЕ», логическое отрицание): $f(x) = \overline{x}$.

Булева функция “стрелка Пирса” (функция Пирса, функция “ИЛИ-НЕ”) в общем случае может зависеть от L аргументов и обращается в единицу только в том случае, когда все аргументы равны нулю, и в нуль на всех остальных наборах аргументов. Запись функции Пирса от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_L}$$

Булева функция “штрих Шеффера” (функция Шеффера, функция “И-НЕ”) в общем случае может зависеть от L аргументов и обращается в нуль только в том случае, когда все аргументы равны единице, и в единицу на всех остальных наборах аргументов. Запись функции Шеффера от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_L}$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Булева функция "исключающее ИЛИ" (функция сложения по модулю 2) в общем случае может зависеть от L аргументов и представляет собой логическую функцию, которая обращается в единицу, если нечетное количество аргументов принимает единичное значение, и в нуль, если единичное значение принимают четное количество аргументов. Запись функции "исключающее ИЛИ" от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_L$$

Свойства дизъюнкции, конъюнкции и функции "исключающее ИЛИ".

1. Функции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством *коммутативности*:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1;$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_1;$$

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1.$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

2. Функции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством *ассоциативности*:

$$\left(x_1 + x_2\right) + x_3 = x_1 + \left(x_2 + x_3\right) = x_1 + x_2 + x_3;$$

$$\left(x_1 x_2\right) x_3 = x_1\left(x_2 x_3\right) = x_1 x_2 x_3;$$

$$\left(x_1 \oplus x_2\right) \oplus x_3 = x_1 \oplus \left(x_2 \oplus x_3\right) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,$$

что позволяет удалять скобки.

3. Конъюнкция *дистрибутивна* относительно дизъюнкции и относительно функции “исключающее ИЛИ”:

$$x_1\left(x_2 + x_3\right) = x_1 x_2 + x_1 x_3;$$

$$x_1\left(x_2 \oplus x_3\right) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3,$$

что позволяет раскрывать скобки в более сложных булевых выражениях и выносить общий множитель за скобки.

4. Дизъюнкция *дистрибутивна* относительно конъюнкции:

$$x_1 + \left(x_2 x_3\right) = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1 + x_3\right).$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

5. Конъюнкция и дизъюнкция обладают свойством *идемпотентности*:

$$x + x = x; \quad xx = x,$$

откуда следует, что *в булевых выражениях нет ни коэффициентов, ни степеней*.

Теорема де Моргана (теорема двойственности).

Инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий: $\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$;

Инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий: $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

Теорема де Моргана *применима и к большему числу переменных*:

$$\overline{x_1 x_2 \cdots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} \cdots + \overline{x_n};$$

$$\overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \cdots \overline{x_n}.$$

Примечание: Теорема де Моргана связывает три функции булевой алгебры – дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию.

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Теорема поглощения.

$x_1 + x_1 x_2 = x_1 \rightarrow$ дизъюнктивная форма,

$x_1 \left(x_1 + x_2 \right) = x_1 \rightarrow$ конъюнктивная форма.

Доказательство теоремы поглощения:

$$x_1 + x_1 x_2 = x_1 \left(1 + x_2 \right) = x_1 \times 1 = x_1;$$

$$x_1 \left(x_1 + x_2 \right) = x_1 x_1 + x_1 x_2 = x_1 + x_1 x_2 = x_1 \left(1 + x_2 \right) = x_1 \times 1 = x_1.$$

Теорема склеивания.

$x_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2 = x_1 \rightarrow$ дизъюнктивная форма,

$\left(x_1 + x_2 \right) \left(x_1 + \overline{x}_2 \right) = x_1 \rightarrow$ конъюнктивная форма.

Доказательство теоремы склеивания:

$$x_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2 = x_1 \left(x_2 + \overline{x}_2 \right) = x_1 \times 1 = x_1;$$

$$\left(x_1 + x_2 \right) \left(x_1 + \overline{x}_2 \right) = x_1 x_1 + x_1 \overline{x}_2 + x_2 x_1 + x_2 \overline{x}_2 =$$

$$= x_1 + x_1 \overline{x}_2 + x_2 x_1 + 0 = x_1 \left(1 + \overline{x}_2 + x_2 \right) = x_1 \times 1 = x_1.$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Теоремы одной переменной.

$x+0=x$	$x\cdot 0=0$	$x\oplus 0=x$	$\overline{\overline{x}}=x$
$x+1=1$	$x\cdot 1=x$	$x\oplus 1=\overline{x}$	
$x+x=x$	$x\cdot x=x$	$x\oplus x=0$	
$x+\overline{x}=1$	$x\cdot\overline{x}=0$	$x\oplus\overline{x}=1$	

Инвертирование сложных булевых выражений. Теорема де Моргана применима не только к отдельным конъюнкциям или дизъюнкциям, но и к более сложным выражениям.

Пример: $$f(a,b,c,d)=\overline{ab+cd}=\overline{ab}\times\overline{cd}=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\left(\overline{c}+\overline{d}\right).$$

Пример: $$f(a,b,c,d)=\overline{(a+b)(c+d)}=\overline{(a+b)}+\overline{(c+d)}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{c}\times\overline{d}.$$

При инвертировании сложных булевых выражений можно руководствоваться ***правилом*** : *чтобы найти инверсию, необходимо знаки умножения заменить знаками сложения, а знаки сложения – знаками умножения и поставить инверсии над каждой переменной (независимо от того, есть над переменными знаки отрицания или нет).*

Пример: $$\overline{a\times b+\overline{b}\times c+\overline{d}\times e}=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\left(\overline{\overline{b}}+\overline{c}\right)\left(\overline{\overline{d}}+\overline{e}\right)=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\left(b+\overline{c}\right)\left(d+\overline{e}\right).$$

Карты Карно

Под минимизацией функций алгебры логики понимают поиск алгебраического выражения булевой функции, которое содержит минимальное число символов логических переменных.

Один из подходов к решению задачи минимизации булевых функций состоит в использовании ***карт Карно*** (Karnaugh).

Карта Карно булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных:

	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	x_2	x_2
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
x_1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$
	$\bar{x}_2$	x_3	x_3	$\bar{x}_2$

			x_2	x_2
	0	1	3	2
x_1	4	5	7	6
		x_3	x_3	

Задание 7: Для карты Карно трех переменных укажите набор значений аргументов, отвечающий клетке с номером 5.

1. $x_1 \times x_2 \times x_3$; 2. $x_1 \times \bar{x}_2 \times x_3$; 3. $x_1 \times x_2 \times \bar{x}_3 \times$

Карты Карно.

Решение задания 7: Для карты Карно трех переменных укажите набор значений аргументов, отвечающий клетке с номером 5.

			4	2	1	
x_1	x_2	x_3	1	1	1	7
x_1	$\overline{x}_2$	x_3	1	0	1	5
x_1	x_2	$\overline{x}_3$	1	1	0	6

1. $x_1 \times x_2 \times x_3$; 2. $x_1 \times \overline{x}_2 \times x_3$; 3. $x_1 \times x_2 \times \overline{x}_3 \times$

Правильный ответ на решение задания 7:

2. $x_1 \times \overline{x}_2 \times x_3$

Карта Карно булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ четырех переменных:

x_3

0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

x_2 x_1 x_4

Задание 8: Для карты Карно четырех переменных укажите набор значений аргументов, отвечающий клетке с номером **13.**

1. $x_1 \times \overline{x}_2 \times x_3 \times x_4$; 2. $x_1 \times x_2 \times \overline{x}_3 \times \overline{x}_4$; 3. $x_1 \times x_2 \times \overline{x}_3 \times x_4 \times$

Карты Карно.

Решение задания 8: Для карты Карно четырех переменных укажите набор значений аргументов, отвечающий клетке с номером 13.

1. $x_1 \times \bar{x}_2 \times x_3 \times x_4$; 2. $x_1 \quad x_2 \times \bar{x}_3 \times \bar{x}_4$; $\times$ 3. $x_1 \quad x_2 \quad \bar{x}_3 \quad x_4 \quad \times$

				8	4	2	1	
x_1	$\bar{x}_2$	x_3	x_4	1	0	1	1	11
x_1	x_2	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	1	1	0	0	12
x_1	x_2	$\bar{x}_3$	x_4	1	1	0	1	13

Правильный ответ на решение задания 8:

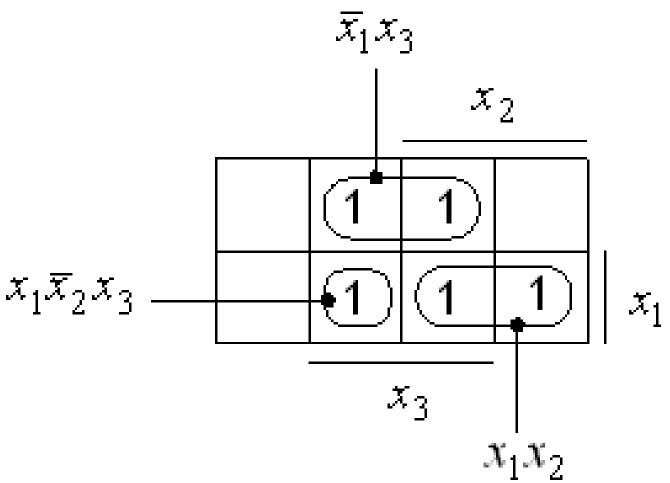
3. $x_1 \times x_2 \times \bar{x}_3 \times x_4$

Если функция представлена в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ), *то нанесение ее на карту Карно сводится к отысканию клеток, за которыми закреплены номера соответствующих* *<u>минтермов.</u>*

Карты Карно.

Одно из достоинств карты Карно состоит в том, что на нее нетрудно нанести функцию, представленную не только в совершенной, но и в произвольной дизъюнктивной нормальной форме.

Например, функции $f = x_1x_2 + \bar{x}_1x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$ соответствует карта Карно



Вопросы для самоконтроля

1. Представьте десятичное число 38 в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

2. Представьте двоичный код чисел 123Q, 3AH.

3. Представьте двоичное число 10101101B в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

4. Переведите числа 10101111B, 457Q, 3CH в десятичную систему счисления.

5. Представьте десятичные числа 85 и (–46) в прямом, обратном и дополнительном кодах при 8-разрядной сетке.

6. Укажите соотношения, в которых допущена ошибка:

1. $a+bc=(a+b)(a+c)$; 2. $a\bar{b}+\bar{a}c=\overline{ab}(a+c)$; 3. $a+ab=a$;

4. $a+ab=b$; 5. $a(a+b)=a$; 6. $ab+a\bar{b}=a$.

Рекомендуемая литература

1. **Легостаев Н.С.** Микроэлектроника: учебное пособие / Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов. – Томск: Эль Контент, 2013. – 172 с. ISBN 978-5-4332-0073-9

2. **Легостаев Н.С.** Микроэлектроника: методические указания по изучению дисциплины / Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов. – Томск: факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2012. – 90 с.

3. **Легостаев Н.С.** Микроэлектроника: слайды / Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов. – Томск: факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2012. – 303 слайда.

Вопросы и пожелания можно присылать через диспетчерский отдел ФДО.

Тема следующего занятия « Цифровые микроэлектронные устройства комбинационного типа».

Для подготовки к занятию изучите материал, представленный в разделе 4 учебного пособия по дисциплине «Микроэлектроника». Рекомендую изучение начать с логических элементов И, ИЛИ, НЕ, которые составляют булевый базис, а также с элементов И-НЕ, ИЛИ-НЕ, каждый из которых обладает функциональной полнотой. Изучите методику синтеза комбинационных цифровых устройств, а затем переходите к изучению дешифраторов, шифраторов, мультиплексоров и сумматоров. Постарайтесь запомнить условные графические обозначения цифровых микроэлектронных устройств комбинационного типа.

Спасибо за внимание