

Министерство образования и науки РФ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
(ТУСУР)

Кафедра телевидения и управления
(ТУ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

по дисциплине «Основы компрессии видео- и аудиоданных»
(модуль 4)

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы компрессии видео- и аудиоданных» (модуль 4) объединяет в себе новые фундаментальные идеи по обработке одномерных и двумерных сигналов с высокими технологиями их реализации на базе цифровых сигнальных процессоров. Задачей дисциплины является обеспечение подготовки студентов в области обработки сигналов в радиотехнических системах и устройствах, в том числе аудио- и видеосигналов на основе:

- изучения математических методов и алгоритмов, применяемых в современных и перспективных устройствах цифровой обработки сигналов (ЦОС);
- ознакомление с принципами и средствами реализации алгоритмов ЦОС и элементами систем проектирования.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- методы и средства дискретизации и квантования сигналов и ошибки, порождаемые этими процессами;
- методы построения линейных одномерных и двумерных систем обработки дискретных и цифровых сигналов, характеристики таких систем;
- методы синтеза цифровых устройств обработки сигналов;
- особенности построения, основные характеристики цифровых процессоров обработки сигналов и принципы проектирования систем на их основе.

Студент должен уметь:

- анализировать частотные, временные и точностные характеристики систем ЦОС;
- рассчитывать передаточные системные функции цифровых фильтров (ЦФ);
- синтезировать цифровые фильтры с заданными временными, частотными и точностными характеристиками;
- проектировать ЦФ на базе цифровых сигнальных процессоров;
- пользоваться пакетами прикладных программ.

1. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Список литературы, необходимый для успешного освоения дисциплины «Основы компрессии видео- и аудиоданных», приведен в рабочей программе и в описаниях работ лабораторного практикума. Учитывая то, что не все литературные источники будут доступны студентам, приведем сокращенный список литературы, состоящий в основном из ранее изданных учебных пособий и задачников [1-11].

1. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 109 с.

2. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.

3. Казанцев Г.Д., Курячий М.И., Пустынский И.Н. Измерительное телевидение: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1994. – 288 с.

4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.

5. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб.: Политехника, 2000. – 592 с.

6. Жуков В.П., Карташев В.Г., Николаев А.М. Задачник по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы»: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 159 с.

7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Руководство к решению задач: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1987. – 207 с.

8. MathCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. Издание 2-е. – М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 1997. – 712 с.

9. Очков В.Ф. Блеск и нищета символьной математики. – КомпьютерПресс, 1995. – №6, с. 50 – 57.

10. Очков В.Ф. MathCAD 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.

11. Фигурнов В.Э. IBM PC для пользователя. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, НПО «Информатика и компьютеры», 1993. – 350 с.

2. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРАКТИК И ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Каждая из практик и контрольных работ содержит 25 вариантов индивидуальных заданий.

Названия практик и контрольных работ:

№ 1. «Анализ характеристик цифровых фильтров»;

№ 2. «Исследование эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка»;

№ 3. «Синтез цифровых рекурсивных фильтров»;

№ 4. «Цифровая обработка изображений».

В конспекте лекций по дисциплине дана полная информация, позволяющая студенту успешно справиться с данными контрольными работами. Кроме того, по каждой контрольной работе в данном пособии приведены примеры решения задач. Следует внимательно относиться к оформлению контрольных работ.

Студент должен указать заданный ему вариант задания, повторить полностью формулировку задач, привести промежуточные выводы формул, подстановок и вычислений, а также ход решения с приведением ссылок на подразделы (страницы) учебного пособия и номера формул данного пособия. Недопустимо брать ответы из литературы и справочников. Особое внимание следует уделить записи ответов по решенным задачам (заданиям). В конце каждого из пунктов задания следует выделить ответ (сформулировать вывод) по которому в основном и будет формироваться оценка преподавателем. Работы следует подписывать, указывая группу, где студент обучается и дату выполнения контрольной работы, а также номер заданного варианта.

2.1. Тема № 1 "Анализ характеристик ЦФ"

2.1.1. Основные формулы для анализа характеристик ЦФ

1.0. Прогрессии.

$$1.0.1. \text{ Арифметическая прогрессия } \sum_{k=0}^{n-1} (a + kr) = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r] = \frac{n}{2} (a + l),$$

где l – последний член арифметической прогрессии.

$$1.0.2. \text{ Геометрическая прогрессия } \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

1.0.3. Арифметико-геометрическая прогрессия

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kr)q^k = \frac{a - [a + (n-1)r]q^n}{1 - q} + \frac{rq(1 - q^{n-1})}{(1 - q)^2}.$$

1.1. Аналитическая запись дискретного сигнала

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(nT - kT), \quad \text{äää } \delta(nT) - \text{ÄÈ} .$$

Пример: $\{x(kT)\} = \{x(0), x(T), x(2T), x(3T)\} = \{0; 2; -3; 1\}$,
 $x(nT) = 2\delta(nT - T) - 3\delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T), n \geq 0$.

1.2. Прямое z-преобразование

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = Z\{f(nT)\}.$$

1.3. Обратное z-преобразование

$$f(nT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z)z^{n-1} dz = \sum_{k=1}^K \text{res}[F(z)z^{n-1}] = \sum_{k=1}^K \text{res}[\Psi(z)],$$

здесь направление обхода интеграла C – против часовой стрелки;
 K – число полюсов, а z_k – полюсы функции $\Psi(z)$.

Полюс кратности $m > 1$:

$$\text{res}[\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [\Psi(z)(z - z_k)^m] - \text{вычет в полюсе кратности } m.$$

Простой полюс ($m = 1$):

$$\text{res}[\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow z_k} [\Psi(z)(z - z_k)].$$

1.4. Дискретная свертка

$$\text{a) } f(nT) = x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT)y(kT);$$

$$\text{b) } y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT)h(kT);$$

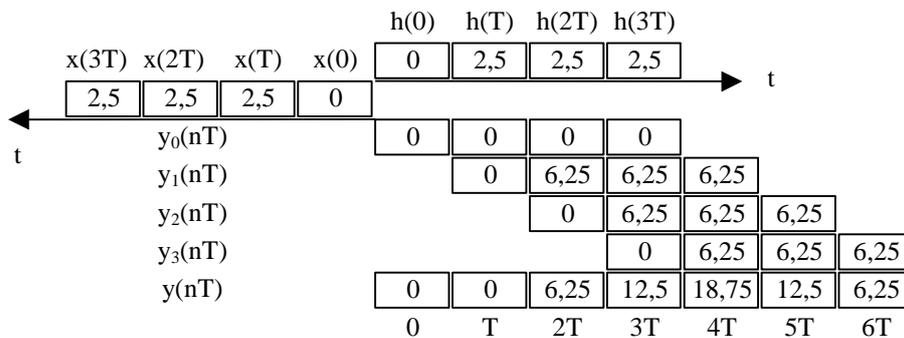
$$\text{c) } X(z) = Z\{x(nT)\}; Y(z) = Z\{y(nT)\}; F(z) = X(z) \cdot Y(z); f(nT) = Z^{-1}\{F(z)\}.$$

Нахождение свертки графическим способом

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = x(0)h(nT) + x(T)h(nT - T) + \dots =$$

$$= y_0(nT) + y_1(nT) + \dots, \quad n \geq 0.$$

Пример: $x(nT) = \{0; 2,5; 2,5; 2,5\}$, $h(nT) = \{0; 2,5; 2,5; 2,5\}$,
 $y_k(nT) = x(kT) * h(nT - kT)$.



Длина свертки: $L = 4 + 4 - 1 = 7$ отсчетов,
 $\{y(nT)\} = \{0; 0; 6,25; 12,5; 18,75; 12,5; 6,25\}$.

1.5. Связь ИХ и системной функции в Z-форме

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}, \quad h(nT) = Z^{-1}\{H(z)\}.$$

1.6. Разностное уравнение ЛЦФ

$$y(nT) = \sum_{i=0}^M a_i x(nT - iT) + \sum_{j=1}^N b_j y(nT - jT), \quad n \geq 0.$$

$$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + \dots + b_1 (y(nT - T) + \dots), \quad n \geq 0.$$

1.7. Системная функция ЛЦФ

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N b_j z^{-j}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3} - \dots}.$$

1.8. Частотные характеристики:

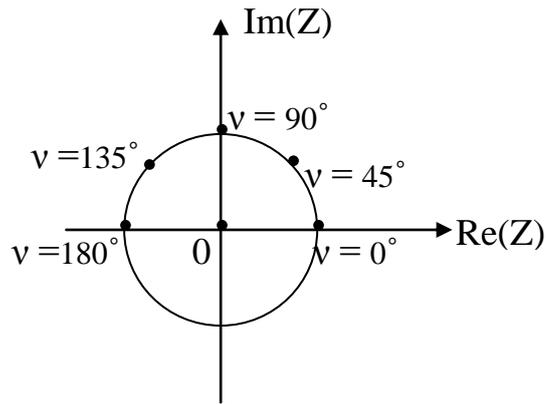
КЧХ: $H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$;

АЧХ: $A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$;

ФЧХ: $\varphi(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega T})\} = \text{arctg} \frac{\text{Im}[H(e^{j\omega T})]}{\text{Re}[H(e^{j\omega T})]}.$

а) Достаточно рассчитать АЧХ в пяти точках:

| Ω | $\nu = \omega T^\circ$ | $z = e^{j\nu}$ | $\cos(\nu)$ | $\sin(\nu)$ | $A(\nu) = H(z) _{z=e^{j\nu}}$ |
|-------------------|------------------------|-------------------------|----------------------|-----------------------|--|
| 0 | 0° | 1 | 1 | 0 | $A(0) = H(1) $ |
| $\frac{\pi}{4T}$ | 45° | $\frac{1+j}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left H\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right) \right $ |
| $\frac{\pi}{2T}$ | 90° | j | 0 | 1 | $ H(j) $ |
| $\frac{3\pi}{4T}$ | 135° | $\frac{-1+j}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left H\left(\frac{-1+j}{\sqrt{2}}\right) \right $ |
| $\frac{\pi}{T}$ | 180° | -1 | -1 | 0 | $ H(-1) $ |



б) Использовать свойство четности АЧХ для действительных коэффициентов a_i, b_j .

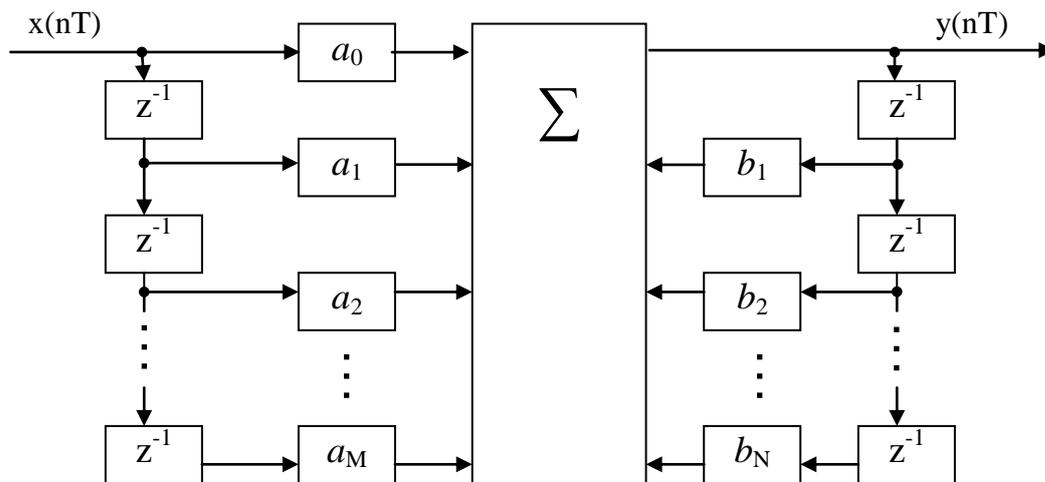
в) Использовать свойство периодичности АЧХ и ФЧХ.

г) Записать $H(z)$ по положительным степеням

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots};$$

Пример: $H(z) = \frac{4 - 2,5z^{-1} + 0,8z^{-2}}{1} = \frac{4z^2 - 2,5z + 0,8}{z^2}$.

1.9. Прямая форма реализации ЛЦФ



2.1.2. Примеры решения задач

Задача 1.

Задан дискретный сигнал $x(nT) = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 2,5, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & n > 3. \end{cases}$

1. Привести аналитическую форму записи дискретного сигнала.
2. Найти изображение входной последовательности $X(z)$.
3. Записать разностное уравнение, считая $H(z) = X(z)$.
4. Привести структурную схему фильтра.
5. Записать выражение для импульсной характеристики.
6. Найти свертку $y(nT) = x(nT) * h(nT)$ графическим способом.

Решение:

1) Аналитическая форма:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(nT - kT) = 2,5[\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T)].$$

2) Изображение входной последовательности:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = 0z^{-0} + 2,5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) + 0z^{-4} + \dots$$

3) Разностное уравнение (алгоритм функционирования ЦФ):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2,5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}); \quad Y(z) = 2,5X(z)[z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}]$$

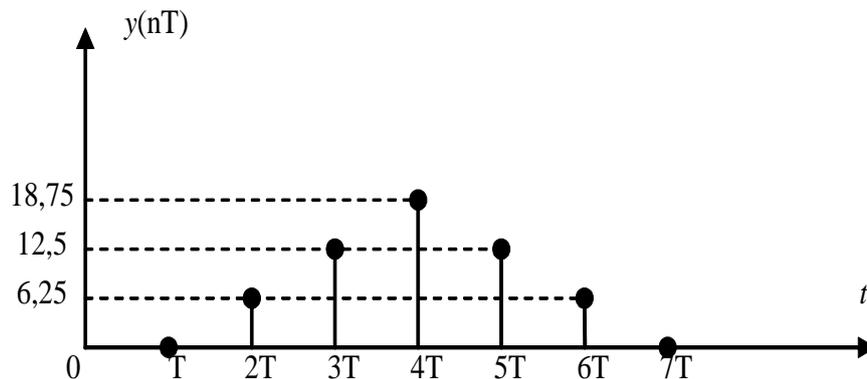
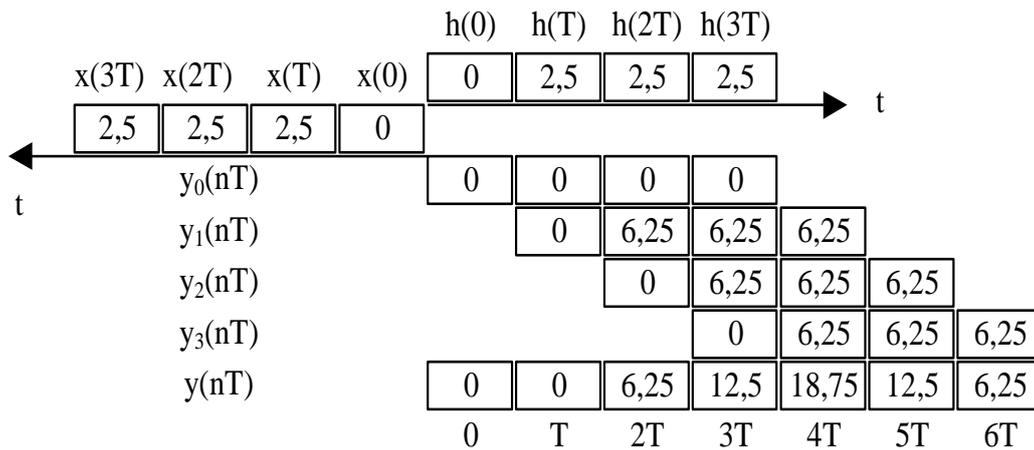
$$y(nT) = 2,5[x(nT - T) + x(nT - 2T) + x(nT - 3T)], \quad n \geq 0.$$

4) ИХ: $h(nT) = 2,5[\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T)], \quad n \geq 0.$

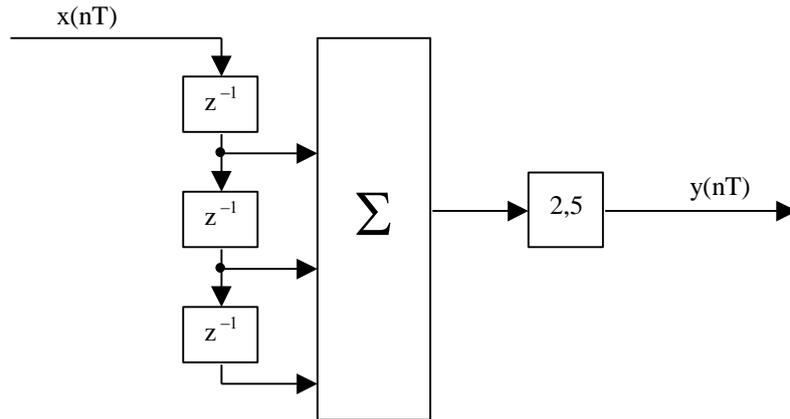
5) Свертка: $y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = x(0)h(nT) + x(T)h(nT - T) + \dots$

$$\{y(nT)\} = \{0; 0; 6,25; 12,5; 18,75; 12,5; 6,25; 0; \dots\}.$$

Свертка прямоугольных сигналов дает треугольный сигнал.



б) Структурная схема:



Задача 2.

Дано изображение дискретного сигнала $X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}$.

1. Найти $x(nT)$ методом вычетов.
2. Считая $H(z) = X(z)$ записать РУ.
3. Привести структурную схему.

Решение:

$$1) X(z) = \frac{z}{z - 0,3}.$$

Находим полюсы $\Psi(z) = \frac{z}{z - 0,3} z^{n-1} = \frac{z^n}{z - 0,3}$; $n = 0, 1, 2, \dots$.

Единственный полюс $z_1 = 0,3$; $m = 1$.

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz = \underset{z=0,3}{res}[\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow 0,3} \left[\frac{z^n}{z - 0,3} (z - 0,3) \right] = 0,3^n; n \geq 0.$$

Или $x(nT) = u(nT) \cdot 0,3^n$, $n \geq 0$.

$$\{x(nT)\} = \{1; 0,3; 0,09; \dots\}.$$

$$2) \text{ РУ: } H(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}; \quad M = 0, \quad a_0 = 1; \quad N = 1, \quad b_1 = 0,3;$$

Вариант 1:

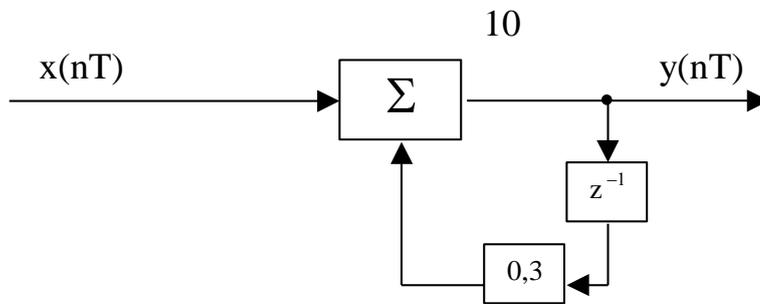
$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{i=0}^M a_i x(nT - iT) + \sum_{j=1}^N b_j y(nT - jT) = a_0 x(nT) + b_1 y(nT - T) = \\ &= x(nT) + 0,3 y(nT - T), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 2:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}; \quad Y(z) = X(z) + 0,3 Y(z) z^{-1};$$

$$y(nT) = x(nT) + 0,3 y(nT - T), \quad n \geq 0.$$

3) Структурная схема:



Задача 3.

Найти обратное Z-преобразование от $X(z) = z^{-1}$.

Решение:

$$\psi(z) = z^{-1} z^{n-1} = \frac{z^n}{z^2}; n = 0, 1, 2, \dots; z_1 = 0; m = 2 - \text{кратность}.$$

Разностное уравнение:

$$\begin{aligned} x(nT) = Z^{-1}\{X(z)\} &= \operatorname{res}_{z=0} \Psi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{z^n}{z^2} z^2 \right) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (nz^{n-1}) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \delta(nT - T), n \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{x(nT)\} = \{0; 1; 0; \dots\}$ – запись выходного сигнала в виде конечной последовательности.

2.1.3. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа № 1)

Каждый студент должен по заданному варианту решить две задачи. Ниже первая цифра в нумерации – номер контрольной работы (№ 1), вторая цифра – номер одного из 25 вариантов и третья цифра – номер одной из двух задач.

1.1.1. Найти Z-преобразование ступенчатой функции $u(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

1.1.2. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0,5, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases}$ подается сигнал в виде последовательности трех единичных

отсчетов. Определить сигнал на выходе фильтра.

1.2.1. Найти Z-преобразование экспоненциально убывающего сигнала $x(nT) = e^{-anT}, n \geq 0$.

1.2.2. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$ подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 8, \\ 0, & n = 0, n > 8. \end{cases}$ Найти сигнал на выходе фильтра (первые 10 значений).

1.3.1. Найти Z-преобразование дискретизированного гармонического сигнала $x(nT) = A \cdot \cos(n\omega_0 T), n \geq 0$.

1.3.2. На вход цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$

подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & n > 4. \end{cases}$ Найти сигнал на выходе фильтра (первые 13 значений).

1.4.1. Найти Z-преобразование степенной функции $x(nT) = a^n$, $|a| < 1$, $n \geq 0$.

1.4.2. На вход цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - z^{-1} - 0,5z^{-2}}$ подается сигнал $x(nT) = \exp\left(-\frac{2}{3}n\right)$, $n \geq 0$. Найти Z-преобразование сигнала на выходе фильтра.

1.5.1. Найти Z-преобразование сигнала, состоящего из двух отсчетов $x(0) = a$ и $x(T) = b$.

1.5.2. Для обработки сигнала в виде пяти одинаковых отсчетов (дискретизированный прямоугольный импульс) используется согласованный цифровой фильтр, импульсная характеристика которого совпадает по форме с сигналом. Определить системную функцию фильтра и алгоритмы фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной формах реализации. Найти сигнал на выходе фильтра (первые 10 отсчетов).

1.6.1. Найти Z-преобразование серии из N равных отсчетов, равных а.

1.6.2. При подаче на вход цифрового фильтра единичного импульса на выходе получается последовательность $\{1; 1/2; 1/4; \dots; 1/2^n; \dots\}$. Найти импульсную характеристику и системную функцию фильтра. Записать алгоритм цифровой фильтрации и изобразить схему фильтра.

1.7.1. Найти Z-преобразование прореженной последовательности $x(nT) = \begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$

1.7.2. При подаче на вход цифрового фильтра последовательности $\{1; 1/4; 1/16; \dots; 1/4^n; \dots\}$ на выходе получается последовательность $\{2; 1; 1/2; 1/4; \dots; 1/2^{n-1}; \dots\}$. Определить системную функцию фильтра, импульсную характеристику и схему фильтра, а также записать алгоритм цифровой фильтрации.

1.8.1. Z-преобразование дискретного сигнала описывается выражением $X(z) = \frac{z}{z - K}$. Найти сигнал $x(nT)$.

1.8.2. Системная функция цифрового фильтра определяется выражением $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$. Определить положение нулей и полюсов системной функции на Z-плоскости.

1.9.1. Z-преобразование дискретного сигнала описывается выражением $X(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$. Найти сигнал $x(nT)$.

1.9.2. Задана системная функция цифрового фильтра $H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 + 1,2z^{-1} - 0,64z^{-2}}$. Определить положение нулей и полюсов системной функции на Z -плоскости. Устойчив ли такой фильтр?

1.10.1. Найти сигнал, Z -преобразование которого определяется выражением $X(z) = 1 + z^{-1}$.

1.10.2. Найти комплексную частотную характеристику цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = e^{-\frac{nT}{\tau}}$. Построить график амплитудно-частотной характеристики при $T/\tau = 1$ и $T/\tau = 0,1$.

1.11.1. Найти сигнал, Z -преобразование которого определяется выражением $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$.

1.11.2. Найти амплитудно-частотную характеристику цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - 0,77z^{-1} + 0,28z^{-2}}$. Построить график амплитудно-частотной характеристики при интервале дискретизации $T = 1$ мс.

1.12.1. Найти сигнал, Z -преобразование которого определяется выражением $X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$.

1.12.2. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}$. Изобразить схемы цифрового фильтра в прямой и канонической формах реализации.

1.13.1. Найти дискретную свертку двух дискретизированных прямоугольных импульсов, заданных пятью отсчетами.

1.13.2. Получите формулу $X(z)$ от дискретной ступенчатой функции $x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$

Указание: Примените формулу суммирования бесконечной геометрической прогрессии. Заметьте, что функция $X(z)$ определена во внешней области единичного круга, т.е. при $|z| > 1$.

1.14.1. Вычислить Z -преобразование дискретной свертки двух сигналов: $x(nT)$, имеющего два ненулевых отсчета $x(0) = 1$ и $x(T) = 1$ и $y(nT)$, состоящего из трех отсчетов: $y(0) = 2$; $y(T) = 2$; $y(2T) = 2$.

1.14.2. Найдите дискретный сигнал $x(n)$, которому отвечает

$$Z\text{-преобразование } X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}.$$

1.15.1. Импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением $h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0; 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$ Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра.

1.15.2. Найдите $x(n)$ дискретной последовательности $x(n)$, Z -преобразование которой $X(z) = \frac{25}{1 - 0,9z^{-1}}$.

1.16.1. Алгоритм цифровой фильтрации имеет следующий вид: $y(nT) = x(nT) + 0,5x(nT - T)$. Найти импульсную характеристику цифрового фильтра и системную функцию в Z -форме.

1.16.2. Задано Z -преобразование $X(z) = \frac{1}{(1 - 0,4z^{-1})(1 - 0,6z^{-1})}$. Найти $x(n)$.

1.17.1. Найти системную функцию и записать разностное уравнение для цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -1, & n = 1. \end{cases}$

1.17.2. Найдите дискретный сигнал $x(n)$, Z -преобразование которого $X(z) = z^{-2}$. Сигнал найти методом обратного Z -преобразования.

1.18.1. Найти системную функцию и записать разностное уравнение для цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = \begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$

1.18.2. Вычислите Z -преобразование $F(z)$ свертки $f(n)$ дискретных сигналов $x(n) = \{1; 1; 1; 0; 0; 0; \dots\}$ и $y(n) = \{0; 0; 1; 1; 0; 0; \dots\}$.

1.19.1. Импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением $h(nT) = 2 \exp\left(-\frac{n}{3}\right)$. Найти системную функцию и записать алгоритм фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной формах реализации.

1.19.2. Найдите комплексную частотную характеристику и амплитудно-частотную характеристику цифрового фильтра. Его разностное уравнение: $y(nT) = x(nT) - 2x(nT - T) + x(nT - 2T)$, $n \geq 0$.

1.20.1. Алгоритм цифровой фильтрации имеет следующий вид $y(nT) = 2x(nT) - 0,5x(nT - T) + 0,5y(nT - T)$. Найти импульсную характеристику цифрового фильтра и его системную функцию.

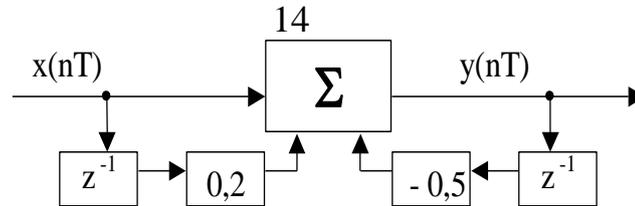
1.20.2. Цифровой фильтр имеет следующий алгоритм $y(n) = x(n - 2) + 0,4y(n - 1) + 0,32y(n - 2)$. Найдите системную функцию, комплексную частотную характеристику и импульсную характеристику фильтра.

1.21.1. Покажите, что цифровой фильтр, алгоритм которого описывается разностным уравнением $y(n) = x(n) - 3x(n - 1) + 3x(n - 2) - x(n - 3)$ осуществляет приближенное трехкратное дифференцирование относительно медленных входных сигналов.

Указание: Найти выражение для КЧХ и разложить в ряд Маклорена при $\omega T \rightarrow 0$.

1.21.2. Найдите аналитическое выражение m -го члена в импульсной характеристике $h(n)$ рекурсивного фильтра, работающего в соответствии с алгоритмом $y(n) = x(n) + y(n - 1) - 0,5y(n - 2)$, $n \geq 0$.

1.22.1. Найти системную функцию фильтра (см. рисунок) и записать алгоритм цифровой фильтрации.



1.22.2. Цифровой фильтр имеет следующий алгоритм $y(n) = 1,5x(n) + 4x(n-1) + 0,85y(n-1)$. Фильтр работает с шагом дискретизации по времени $T = 0,1$ мс. Найдите модуль $|H(e^{j\omega})|$ и фазовый угол $\varphi(\omega)$ частотного коэффициента передачи фильтра на частоте $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с.

1.23.1. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$.

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации.

1.23.2. Собственные колебания в рекурсивном цифровом фильтре второго порядка описываются разностным уравнением следующего вида: $y(n) = x(n) + y(n-1) - 0,5y(n-2)$, $n \geq 0$. Исследуйте устойчивость данного фильтра и определите параметры колебаний на выходе фильтра при подаче на его вход единичного импульса.

1.24.1. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}$.

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации.

1.24.2. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = e^{-2n}$ подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 10, \\ 0, & n = 0, n > 10. \end{cases}$ Определить сигнал на выходе фильтра.

1.25.1. Системная функция цифрового фильтра имеет вид $H(z) = \frac{0,8 + 0,3z^{-1} - 0,5z^{-2}}{1 - 0,6z^{-1} - 0,4z^{-2} + 0,3z^{-3}}$. Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра.

1.25.2. На вход цифрового фильтра с системной функцией $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1} + 0,5z^{-2}}$ подается сигнал $x(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & n > 4. \end{cases}$

Определить сигнал на выходе фильтра.

2.2. Тема № 2 "Эффекты квантования в цифровом рекурсивном фильтре"

2.2.1. Основные формулы для исследования эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка (ЦРФ2П)

2.1. Устойчивость ЦРФ2П (нерекурсивный фильтр всегда устойчив).

2.1.1. $\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| < \infty$.

2.1.2. Корни характеристического уравнения должны находиться внутри единичной окружности:

$$z^N - b_1 z^{N-1} - b_2 z^{N-2} - \dots - b_N = 0, \text{ т.е. } |z_i| < 1.$$

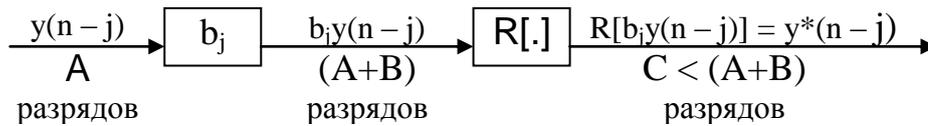
а) Если корни вещественные, то в системе устанавливается аperiodический режим;

б) Если есть комплексно-сопряженные корни, то система колебательная.

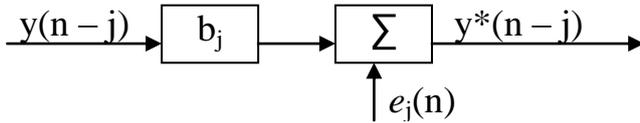
2.2. Разностное уравнение с учетом операций квантования:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M R[a_i x(n-i)] + \sum_{j=1}^N R[b_j y(n-j)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $R[\cdot]$ – оператор квантования.



При вероятностной оценке ошибки квантования операцию квантования линеаризируем, т.е. вводим сумматор и источник шума $e_j(n)$:



$$\sigma_j^2 = \frac{\Delta_j^2}{12}, \quad \Delta_j = 2^{-C_j}.$$

$a_0, a_1, \dots, a_{C_j}, C_j$ – номер младшего разряда в j -й цепи.

$$2.3. \sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_k^2(n), \quad \sigma_{0 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{0 \text{ Вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n), \quad \sigma_{0 \text{ Вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12},$$

$$\sigma_{k \text{ Вх}}^2 = \sigma_j^2 \text{ либо } \sigma_i^2 \text{ – для прямой цепи, } \Delta \text{ – шаг квантования в АЦП.}$$

$$2.4. \sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_k(z) H_k(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Psi(z) dz.$$

Контурный интеграл находится как сумма вычетов в особых точках подынтегрального выражения, лежащих внутри единичной окружности $|z_i| < 1$, т.е. полюса $H_k(z^{-1})$ не учитываются, т.к. они лежат вне единичной окружности.

$$2.5. \sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |H_k(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H_k(e^{j\nu})|^2 d\nu,$$

где $\nu = \omega T$ – нормированная частота.

$$2.6. \sigma_{\Sigma \text{ Вых}}^2 = \sum_{k=0}^K \sigma_{k \text{ Вых}}^2, \quad \sigma_{0 \text{ Вых}}^2 \text{ – погрешность, связанная с АЦП.}$$

При вероятностном подходе используются предположения:

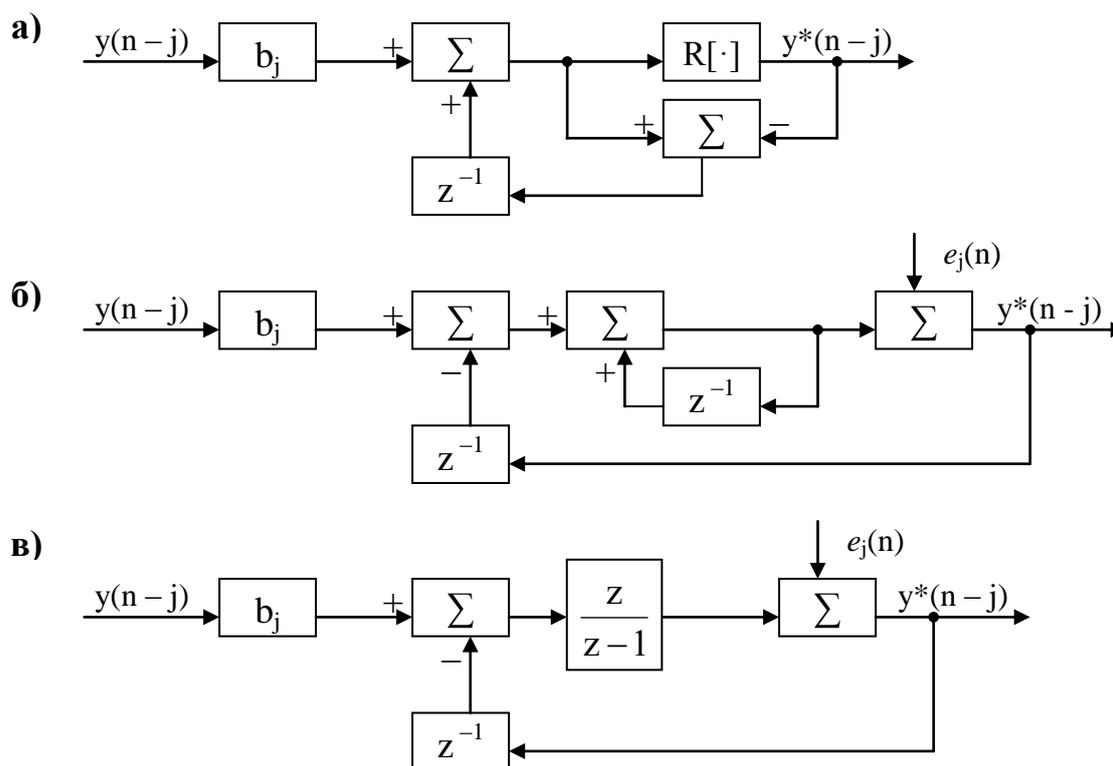
а) Отсчеты от всех источников погрешностей $e_k(n)$ представляются дискретными белыми шумами с равномерным законом распределения и дисперсией

$$\sigma_k^2 = \frac{\Delta_k^2}{12}, \quad \Delta_k = 2^{-C_k}.$$

б) Все источники шума $e_k(n)$ не коррелированы между собой.

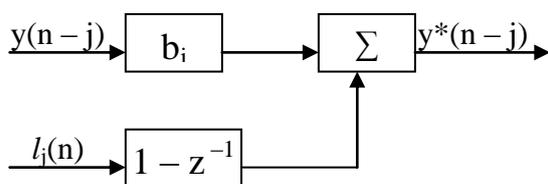
в) Любой из источников шума $e_k(n)$ не коррелирован с входным сигналом $x(n)$.

2.7. Учет остатков. Математическая модель j-й цепи ОС.



$$\text{СФ по сигналу: } H_s(z) = \frac{b_j \frac{z}{z-1}}{1 + \frac{z}{z-1} z^{-1}} = \frac{b_j z}{z-1+1} \equiv b_j.$$

$$\text{СФ по шуму: } H_l(z) = \frac{1}{1 + z^{-1} \frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z-1+1} = 1 - z^{-1}.$$



Таким образом, при учете остатков шумов дополнительно проходят по цепи вычислителя первой разности (цифрового дифференциатора).

2.2.2. Устойчивость ЦРФ2П

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 - b_1 z - b_2}; \quad z^2 - b_1 z - b_2 = 0 \text{ — характеристическое уравнение;}$$

$$1. \quad |z_{1,2}| = \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2} \right| < 1 \text{ — действительные корни;}$$

$$2. \quad |z_{1,2}| = \left| \frac{b_1 \pm i \sqrt{-\left(\frac{b_1^2}{4} + b_2\right)}}{2} \right| < 1 \text{ — комплексно-сопряженные корни;}$$

3. $D = \frac{b_1^2}{4} + b_2 = 0$ – граница колебательности.

$$|z_1| = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 - b_1; \text{ – 1-е условие.}$$

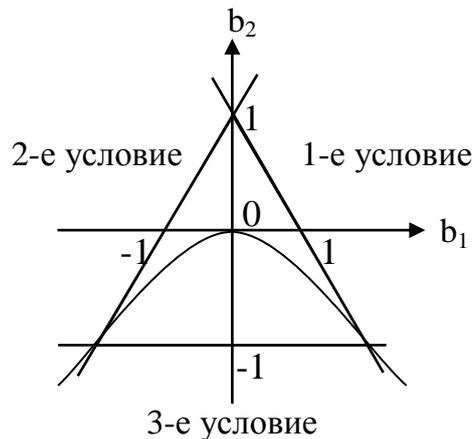
$$|z_1| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1; \text{ – 2-е условие.}$$

$$|z_2| = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 - b_1;$$

$$|z_2| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1,$$

т.е. получились те же условия.

$$|z_{1,2}| = \frac{b_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} - b_2 < 1 \Rightarrow b_2 < -1 \text{ – 3-е условие.}$$



$D = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{b_1^2}{4}$; – граница между апериодическими и колебательными режимами.

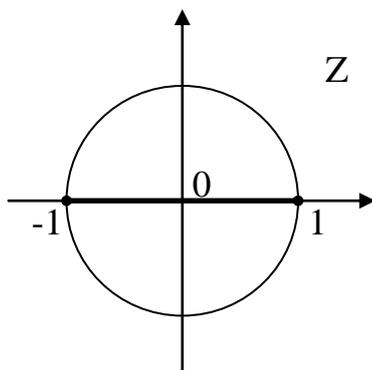
1) $b_2 = 1 - b_1$; $b_1 \in [0; 2]$;

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1^2 - 4b_1 + 4)} = \frac{1}{2}(b_1 \pm (b_1 - 2)) = \begin{cases} 1; \\ b_1 - 1; \end{cases}$$

2) $b_2 = 1 + b_1$; $b_1 \in [-2; 0]$;

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1^2 + 4b_1 + 4)} = \frac{1}{2}(b_1 \pm (b_1 + 2)) = \begin{cases} -1; \\ b_1 + 1; \end{cases}$$

$D > 0$; $z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}$ – два полюса на действительной оси Z . То есть область апериодических решений отображается в пары точек на действительной оси Z .



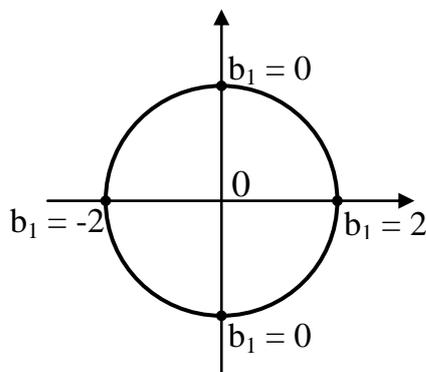
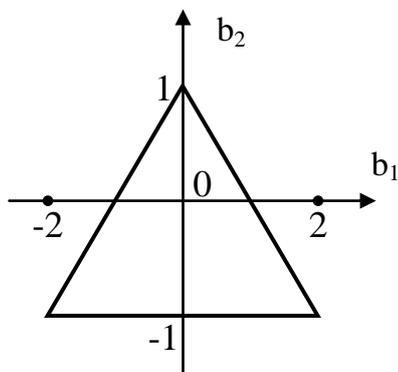
$$D < 0; z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm i \sqrt{-\left(\frac{b_1^2}{4} + b_2\right)} = \frac{b_1}{2} \pm i \sqrt{-D}.$$

Модули $|z_{1,2}| = \frac{b_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} - b_2 = -b_2 < 1$ – модуль определяется только значением b_2 ;

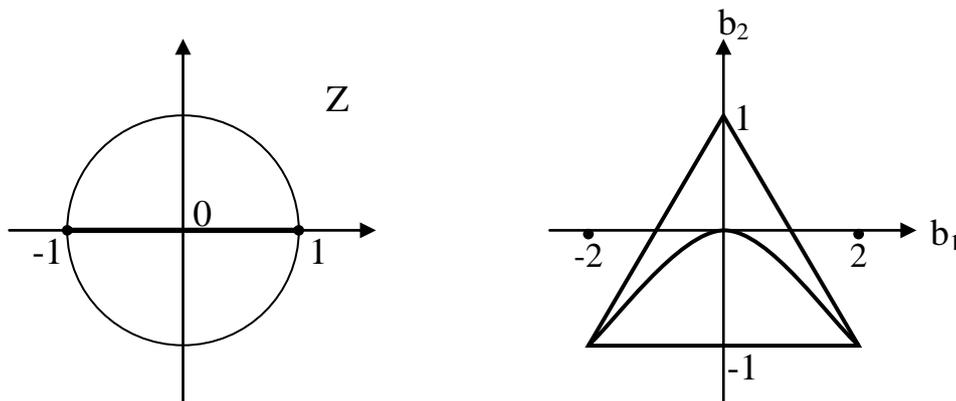
при $b_2 \Rightarrow -1$ мы подходим к границе устойчивости;

при $b_2 \Rightarrow 0$ модуль $b_2 \Rightarrow -1$.

Граница $b_2 \Rightarrow -1$; $\Rightarrow |z_{1,2}| = 1$; отображается на единичную окружность (конкретная точка зависит от коэффициента b_1).



Граница устойчивости: $D = 0$; $z_{1,2} = \frac{b_1}{2}$; $b_1 \in [-2; 2]$;



Два полюса сливаются в один $\left(z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \right)$.

Учет полюсов дополнительной функции $\Psi(z)$

Для учета шума квантования АЦП.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}};$$

$z^2 - b_1 z - b_2 = 0$ – характеристическое уравнение. $Z_{1,2}$ – корни уравнения.

$$z_1 + z_2 = b_1; \quad z_1 z_2 = -b_2;$$

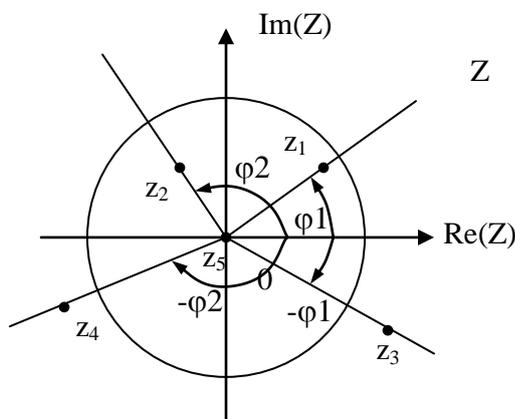
$$\Psi(z) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \frac{1}{z} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{(z - z_1)(z - z_2)} \cdot \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{-b_2 (z - z_3)(z - z_4)} \cdot \frac{1}{z};$$

$$\text{Полюсы } H(z): z_{1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}.$$

$$\text{Полюсы } H(z^{-1}): z_3 = \frac{1}{z_1}; \quad z_4 = \frac{1}{z_2}.$$

Полюс $1/z$: $z_5 = 0$.

Учитываем только полюсы: z_1, z_2 и z_5 .



Пример:

$$\text{Вычет в } z = 0. \quad \text{Res}_{z=z_5} \Psi(z) = \frac{a_0 a_2}{z_1 z_2} = -\frac{a_0 a_2}{b_2}.$$

Должно выполняться условие $\begin{cases} a_0 \neq 0, \\ a_2 \neq 0, \end{cases}$ иначе вычет будет равен нулю,

и ничего не добавится к сумме вычетов.

2.2.3. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа № 2)

Для заданного варианта системной функции рекурсивного цифрового фильтра 2-го порядка (РЦФ2П) (первая цифра – номер контрольной работы (№2), вторая цифра – номер одного из 25 вариантов) выполнить расчеты и сделать выводы по перечисленным ниже заданиям.

1. Оцените область устойчивости цифрового фильтра второго порядка в зависимости от значений коэффициентов b_1 и b_2 и разбейте ее на под-области для апериодических и колебательных систем. Область устойчивости оценить: 1 – по характеристическому уравнению; 2 – по критерию Рауса-Гурвица.

2. Определите дисперсию шума АЦП на выходе цифрового фильтра (получите расчетную формулу $\sigma_{0\hat{a}\hat{a}\hat{o}}^2 = \sigma_{0\hat{a}\hat{o}}^2 \cdot \dots$).

3. Нарисуйте структурную схему цифрового фильтра при канонической форме реализации, и последующие пункты задания выполняйте используя эту форму реализации.

4. Определите выходные дисперсии шумов округления, вносимых при умножении на коэффициенты фильтра b_1 и b_2 .

5. Определите суммарную дисперсию шумов квантования и округления на выходе цифрового фильтра.

6. При предположении, что один из умножителей на b_1 (b_2) выполняет операции с сохранением остатка, вычислите выходную дисперсию шумов округления.

7. Сделайте выводы и объяснения процессов формирования ошибок и их представления в виде шумов в цифровом фильтре.

Варианты системных функций РЦФ 2-го порядка:

$$2.1. H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.2. H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.3. H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.4. H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.5. H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.14. H(z) = \frac{2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.15. H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.16. H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.17. H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.18. H(z) = \frac{2 + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.6. H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.7. H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.8. H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.9. H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.10. H(z) = \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.11. H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.12. H(z) = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.13. H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.19. H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.20. H(z) = \frac{2 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.21. H(z) = \frac{2 - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.23. H(z) = \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.22. H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.24. H(z) = \frac{z^{-1} - 2z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.25. H(z) = \frac{2 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

2.3. Тема № 3 "Синтез цифровых рекурсивных фильтров"

2.3.1. Основные формулы для синтеза цифрового рекурсивного фильтра второго порядка (ЦРФ2П)

1. Инвариантное преобразование ИХ

$h(nT) = T \cdot h_a(t)|_{t=nT}$, $n \geq 0$. Домножение на T производится по двум причинам:

а) для выполнения одинаковых условий передачи по постоянной составляющей, т.е. пусть $K(0) = 1$, тогда $H(e^{j\omega T})|_{\omega=0} = H(1) \approx 1$. Но нормировка всё равно нужна, т.е. $H_n(e^{j\omega T}) = \frac{H(e^{j\omega T})}{H(1)}$.

б) ИХ ЦФ должна быть безразмерной.

2. Метод отображения дифференциалов

Известен операторный коэффициент передачи $K(p)$ фильтра-прототипа,

$p = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$ – отображающая замена (замена Эйлера).

3. БЛП

Известен $K(p, \omega_a)$, где $\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{cp} T}{2}\right)$,

где ω_{cp} – необходимая частота среза ЦФ, $p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ – отображающая замена.

4. Метод Z-форм

Преобразуем $K(p)$ к виду, когда показатели степеней p – отрицательные; затем отображающие замены:

$$p^{-1} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1};$$

$$p^{-2} = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}.$$

5. ФНЧ → ФНЧ1

Выбираем ЦФ, синтезированный методом БЛП или Z-форм с частотой среза Θ_{cp} по уровню -3 дБ; $H(z)$ – системная функция ФНЧ;

$$\text{замена } z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} - \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} + \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)},$$

где ω_{cp} – требуемая частота среза ФНЧ1.

6. ФНЧ \rightarrow ФВЧ

$H(z)$ с Θ_{cp} – СФ исходного ФНЧ;

$$\text{замена } z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}; \quad \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} + \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} - \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)},$$

где ω_{cp} – требуемая частота среза ФВЧ.

7. ФНЧ \rightarrow ПФ

$H(z)$ с Θ_{cp} – СФ исходного ФНЧ;

$$\text{замена } z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1}; \quad \alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1 T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1 T}{2}\right)};$$

$$k = \text{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1 T}{2}\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} T}{2}\right).$$

2.3.2. Рассмотрим вопросы синтеза более подробно

ИХ фильтра Баттерворта второго порядка

$$K(p) = \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_{\text{cp}}p + \omega_{\text{cp}}^2}; \quad h(t) = L^{-1}\{K(p)\};$$

1. $h(t) = \sqrt{2}\omega_{\text{cp}} \exp\left(-\frac{\omega_{\text{cp}}}{\sqrt{2}} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\text{cp}}}{\sqrt{2}} t\right), t \geq 0$. При замене t на nT получим

$$\sin\left(\frac{\omega_{\text{cp}} T}{\sqrt{2}} n\right) = \sin(\beta n) = \frac{e^{j\beta n} - e^{-j\beta n}}{2j}, \quad \text{где } \beta = \frac{\omega_{\text{cp}} T}{\sqrt{2}};$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q};$$

Задача: найти q_1 и q_2 и свернуть ряд.

Затем привести $H(z)$ к стандартному виду:

$$H_1(z) = k_0 \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N b_j z^{-j}} = k_0 \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots}.$$

Определить сначала a_i , b_j в символьном виде, затем в числовом виде.

2. При использовании метода отображения дифференциалов производим в $K(p)$ отображающую замену $p = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$, получаем выражение для $H_2(z)$ и приводим его к стандартному виду. Затем находим коэффициенты a_i и b_j сначала в символьном, а затем в числовом виде.

3. При БПЛ переопределяем частоту: $\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{cp} T}{2}\right) - \dots$ и записываем вы-

ражение для операторного коэффициента $K(p) = \frac{\omega_a^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_a p + \omega_a^2}$; проводим

замену $p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$, получаем выражение для $H_3(z)$, которое приводим к стандартному виду (должен присутствовать k_0 , а коэффициенты a_i были бы как можно проще).

4. При использовании метода Z-форм приводим выражение для операторного коэффициента к виду $K(p) = \frac{M(p)p^{-2}}{N(p)p^{-2}} = \dots$ – в отрицательной степени ω_{cp} не корректируется. Производя соответствующие замены для p^{-1} и p^{-2} находим две первые z-формы, а затем выражение для $H_4(z)$ и т.д.

2.3.3. Задание № 3. Синтез цифрового фильтра Баттерворта 2-го порядка и общее частотное преобразование по Константи́нидису

Дано: $f_d := \dots$ - частота дискретизации;

$f_{cp} := f_o + (N - 1) \cdot \Delta f$ - частота среза по уровню -3 дБ (N - номер по журналу);

$f_2 := 2 \cdot f_{cp}$ - частота среза по уровню -12 дБ;

$f_o := \dots$ $\Delta f := \dots$

Необходимо синтезировать ЦФ Баттерворта следующими методами:

1. Инвариантного преобразования импульсной характеристики;
2. Отображения дифференциалов;
3. Билинейного преобразования;
4. Z-форм;
5. Выбрать ЦФ, синтезированный выше методом БЛП, и преобразовать его:
 - 5.1. ФНЧ --> ФНЧ1;
 - 5.2. ФНЧ --> ФВЧ;
 - 5.3. ФНЧ --> ПФ.

$\Theta_{cp} := 2 \cdot \pi \cdot f_{cp}$ - частота среза исходного ЦФ ФНЧ;

$\omega_{cp} := 1.5 \cdot \Theta_{cp}$ - частота среза преобразованного ЦФ ФНЧ1;

$\omega_{cp} := \Theta_{cp}$ - частота среза преобразованного ЦФ ФВЧ;

$\omega_1 := \frac{\Theta_{cp}}{\sqrt{2}}$ $\omega_2 := \sqrt{2} \cdot \Theta_{cp}$ - частоты среза полосового фильтра;

Для всех типов фильтров получить:

1. Выражение для системной функции $H(z)$, символьные и численные значения ее коэффициентов a_i, b_j ;
2. Зарисовать структурные схемы синтезированных ЦФ;
3. На одном графике построить АЧХ аналогового фильтра-прототипа и цифровых фильтров, синтезированных по пп. 1-4;
4. На одном графике построить АЧХ исходного цифрового фильтра и цифровых фильтров, синтезированных по пп. 5.1, 5.2, 5.3).

$$K(p) := \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot p + \omega_{cp}^2}$$

$$|K(j\omega)| := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{cp}}\right)^4}}$$

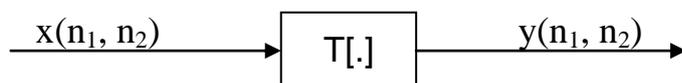
$$h(t) := \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot t\right)$$

$t \geq 0$

2.4. Тема № 4 "Цифровая обработка изображений"

2.4.1. Примеры решения задач по цифровой обработке изображений

Дан входной двумерный массив чисел (изображение) $x(n_1, n_2)$. Необходимо получить выходной массив при заданном операторе преобразования $T[.]$.



$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)]$, $T[.]$ – оператор системы, представляющей правило или набор правил, по которым происходит преобразование (отображение) входного сигнала на выходной.

Мы будем рассматривать следующие классы многомерных систем:

- линейные;
- инвариантные к сдвигу (стационарные);
- устойчивые;
- физически реализуемые;
- нерекурсивные (всегда устойчивы).

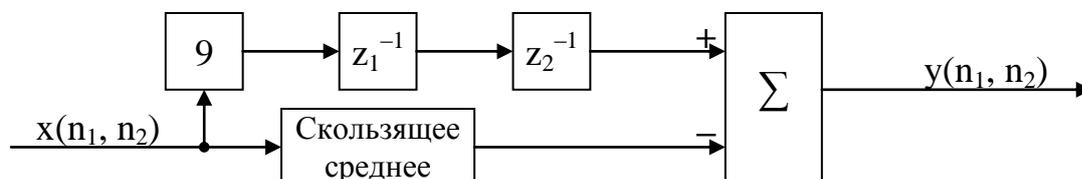
Примеры нерекурсивных двумерных цифровых фильтров:

а) оператор двойного дифференцирования (разделимый фильтр)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

б) лапласиан не является разделимым фильтром, поэтому поступим следующим образом:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



z_1^{-1} – оператор задержки на один элемент;

z_2^{-1} – оператор задержки на одну строку.

Нерекурсивный цифровой фильтр:

$$PY: y(n_1, n_2) = \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} a_{i_1, i_2} x(n_1 - i_1, n_2 - i_2), \quad n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0;$$

При $n_1 < 0, n_2 < 0, \quad x(n_1, n_2) = 0$.

а) Обработка двойным дифференцированием:

$$x(n_1, n_2) \quad \text{**} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad = \quad y_1(n_1, n_2)$$

| | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|
| → n ₁ | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | | | | | 1 |
| 1 | | | | 1 | |
| 2 | | | 1 | | |
| 3 | | 1 | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | | | | 1 |
| 6 | 1 | | | | 1 |
| 7 | 1 | | | | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| → n ₁ | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | | | | | -1 | 2 | -1 |
| 1 | | | | -1 | 2 | -1 | |
| 2 | | | -1 | 2 | -1 | | |
| 3 | | -1 | 2 | -1 | | | |
| 4 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 5 | -1 | 2 | -1 | | -1 | 2 | -1 |
| 6 | -1 | 2 | -1 | | -1 | 2 | -1 |
| 7 | -1 | 2 | -1 | | -1 | 2 | -1 |
| 8 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |

$$y_1(n_1, n_2) \quad \text{**} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad = \quad y_2(n_1, n_2)$$

| | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| → n ₁ | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | | | | -1 | 2 | -1 | |
| 1 | | | | -1 | 2 | -1 | |
| 2 | | | -1 | 2 | -1 | | |
| 3 | | -1 | 2 | -1 | | | |
| 4 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 5 | -1 | 2 | -1 | | -1 | 2 | -1 |
| 6 | -1 | 2 | -1 | | -1 | 2 | -1 |
| 7 | -1 | 2 | -1 | | -1 | 2 | -1 |
| 8 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |

| | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| → n ₁ | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | | | | | 1 | -2 | 1 |
| 1 | | | | 1 | -4 | 5 | -2 |
| 2 | | | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 |
| 3 | | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | |
| 4 | 1 | -3 | 5 | -4 | 1 | -1 | 1 |
| 5 | | 1 | -1 | 1 | 1 | | -1 |
| 6 | | 1 | -1 | | -1 | 1 | |
| 7 | | 0 | 0 | | | | |
| 8 | | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | |
| 9 | -1 | | 1 | | 1 | | -1 |
| 10 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 |

б) Обработка лапласианом:

$$x(n_1, n_2) \quad \text{**} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad = \quad y_1(n_1, n_2)$$

| | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|
| → n ₁ | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | | | | | 1 |
| 1 | | | | 1 | |
| 2 | | | 1 | | |
| 3 | | 1 | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | | | | 1 |
| 6 | 1 | | | | 1 |
| 7 | 1 | | | | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| → n ₁ | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | | | | | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | | | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | | | 1 | 1 | 1 | | |
| 3 | | 1 | 1 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |

$$y_1(n_1, n_2) \quad \begin{matrix} \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \downarrow n_2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad ** \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} y_2(n_1, n_2) \\ \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \downarrow n_2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$9 \cdot x(n_1, n_2) \quad \begin{matrix} \downarrow n_2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} y_2(n_1, n_2) \\ \downarrow n_2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} y_3(n_1, n_2) \\ \downarrow n_2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow n_1 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \end{matrix}$$

Элементы произвольной маски M и коэффициенты НРЦФ a_{i1}, a_{i2} определяются следующим образом:

$$M \Rightarrow \begin{matrix} a_{2,2} & a_{1,2} & a_{0,2} \\ a_{2,1} & a_{1,1} & a_{0,1} \\ a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} \end{matrix} .$$

2.4.2. Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа № 4)

Первая цифра – номер контрольной работы (№ 4), вторая и третья цифра номер одного из 25 вариантов, четвертая цифра – номер одного из 4 заданий.

4.01. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.01.1. «скользящее среднее»;
- 4.01.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.01.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 4.01.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.02. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.02.1. «скользящее среднее»;
- 4.02.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.02.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 4.02.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.03. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.03.1. «скользящее среднее»;
- 4.03.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.03.3. оператор выделения вертикальных линий;

4.03.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.04. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.04.1. «скользящее среднее»;
- 4.04.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.04.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 4.04.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.05. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.05.1. «скользящее среднее»;
- 4.05.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.05.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 4.05.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.06. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «6» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.06.1. «скользящее среднее»;
- 4.06.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.06.3. оператор выделения вертикальных линий;

4.06.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.07. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «7» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

4.07.1. «скользящее среднее»;

4.07.2. лапласиан для «восьми соседей»;

4.07.3. оператор выделения вертикальных линий;

4.07.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.08. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «8» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

4.08.1. «скользящее среднее»;

4.08.2. лапласиан для «восьми соседей»;

4.08.3. оператор выделения вертикальных линий;

4.08.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.09. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «9» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

4.09.1. «скользящее среднее»;

4.09.2. лапласиан для «восьми соседей»;

4.09.3. оператор выделения вертикальных линий;

4.09.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.10. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «0» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.10.1. «скользящее среднее»;
- 4.10.2. лапласиан для «восьми соседей»;
- 4.10.3. оператор выделения вертикальных линий;
- 4.10.4. оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.11. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.11.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.11.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.11.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.11.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.12. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.12.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.12.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.12.3. оператор выделения левой диагонали;

4.12.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.13. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.13.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.13.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.13.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.13.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.14. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.14.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.14.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.14.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.14.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.15. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.15.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.15.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.15.3. оператор выделения левой диагонали;

4.15.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.16. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «6» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.16.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.16.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.16.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.16.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.17. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «7» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.17.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.17.2. «лапласиан для четырёх соседей»;
- 4.17.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.17.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.18. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «8» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.18.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.18.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.18.3. оператор выделения левой диагонали;

4.18.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.19. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «9» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.19.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.19.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.19.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.19.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.20. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «0» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.20.1. оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 4.20.2. лапласиан для «четырёх соседей»;
- 4.20.3. оператор выделения левой диагонали;
- 4.20.4. оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.21. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.21.1. оператор выделения правой диагонали;
- 4.21.2. оператор двойного дифференцирования;
- 4.21.3. оператор выделения горизонтальных линий;

4.21.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.22. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.22.1. оператор выделения правой диагонали;
- 4.22.2. оператор двойного дифференцирования;
- 4.22.3. оператор выделения горизонтальных линий;
- 4.22.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.23. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.23.1. оператор выделения правой диагонали;
- 4.23.2. оператор двойного дифференцирования;
- 4.23.3. оператор выделения горизонтальных линий;
- 4.23.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.24. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 4.24.1. оператор выделения правой диагонали;
- 4.24.2. оператор двойного дифференцирования;
- 4.24.3. оператор выделения горизонтальных линий;

4.24.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4.25. Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 6×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

Импульсная характеристика двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

4.25.1. оператор выделения правой диагонали;

4.25.2. оператор двойного дифференцирования;

4.25.3. оператор выделения горизонтальных линий;

4.25.4. оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

ПРИЛОЖЕНИЕ (бланки заданий)

Задание № 1

1. Привести с доказательством свойства (теоремы) **одностороннего** z -преобразования: линейность, сдвиг (опережение и запаздывание), свертка последовательностей, перемножение последовательностей (комплексная свёртка), дифференцирование z -преобразования, обращение (обратное z -преобразование), равенство Парсеваля для дискретных сигналов во временной области, частотной области и в области z -преобразования, начальное и конечное значения, сумма членов последовательности¹.
2. Выполнить прямое и обратное z -преобразования по таблице 1.3. Для преобразований взять сигналы №№ 8, 9, 10, 11 и 12.
3. Найти с помощью вычетов обратное Z -преобразование $X(z) = 0,3z^{-3}$, т.е. $x(nT) = ?$
4. Выполнить дискретную свертку графическим способом 2-х сигналов. Сигналы выбрать самим не менее 4-х отсчетов, принимающих целые значения от 1 до 9.

Например: $\{x(nT)\} = \{3; 7; 4; 2\}$; $y(nT) = \{1; 8; 5; 3\}$.

Тогда $f(nT) = x(nT) * y(nT) = ?$

5. Проанализировать характеристики НРФ.

Дано: РУ: $y(nT) = 4x(nT) - 2,5x(nT - T) + 0,8x(nT - 2T)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Найти выражения для:

- 5.1. ИХ: $h(nT)$, построить ее график.
 - 5.2. СФ: $H(z)$.
 - 5.3. КЧХ: $H(e^{j\omega T})$.
 - 5.4. АЧХ: $A(\omega)$.
 - 5.5. Привести структурную схему ЦФ.
 - 5.6. Построить АЧХ по пяти точкам $\omega \in \left[0; \frac{\pi}{T}\right]$ и продолжить в обе стороны $\left(\omega > \frac{\pi}{T}, \omega < 0\right)$. $\omega_0 = 0$; $\omega_1 = \frac{\pi}{4T}$; $\omega_2 = \frac{\pi}{2T}$; $\omega_3 = \frac{3\pi}{4T}$; $\omega_4 = \frac{\pi}{T}$.
 - 5.7. По виду АЧХ определить тип фильтра.
6. Проанализировать характеристики РФ.

Дано: СФ: $H(z) = \frac{2,5}{z - 0,6}$.

¹ 1. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с. (Стр. 79 – 85, см. теоремы z -преобразования).
 2. Антонию А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с. (Стр. 32 – 41, см. теорему о компл. свёртке на стр. 39).
 3. Карташов В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1982. – 102 с. (Стр. 49 – 50, 53 – 54).
 4. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – 2-е изд. – СПб.: Политехника, 1999. – 592 с. (стр. 232).
 5. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с. (стр. 22).
 6. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z -преобразования. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 288 с. (Стр. 205 – 209).
 7. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. – М.: Связь, 1979. – 416 с. (стр. 50 – 58).
 8. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика: Учебн. для вузов по спец. "Радиотехника". – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с. (Стр. 158 – 160).

Найти выражения для:

- 6.1. ИХ методом вычетов; построить график ИХ для $n = 0; 1; 2; 3; 4$.
- 6.2. РУ: $y(nT), n \geq 0$.
- 6.3. КЧХ: $H(e^{j\omega T})$.
- 6.4. Получить выражение для АЧХ – $A(\omega)$.
- 6.5. Привести структурную схему ЦФ (записать значения коэффициентов a_i и b_j).
- 6.6. Построить график АЧХ по пяти точкам.
- 6.7. По виду АЧХ определить тип фильтра.

Таблица 1.3

Z-преобразование широко используемых последовательностей

| № п/п | Функция | Z-образ |
|-------|--|---|
| 1. | $f(nT)$ | $F(z)$ |
| 2. | $\delta(nT)$ | 1 |
| 3. | $u(nT)$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 4. | $u(nT-T) \cdot K$ | $\frac{K}{z-1}$ |
| 5. | $u(nT) \cdot K \cdot A^n$ | $\frac{K \cdot z}{z-A}$ |
| 6. | $u(nT-T) \cdot K \cdot A^{n-1}$ | $\frac{K}{z-A}$ |
| 7. | $u(nT) \cdot e^{-anT}$ | $\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$ |
| 8. | $r(nT)$ | $\frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$ |
| 9. | $u(nT) \cdot \sin(\omega nT)$ | $\frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}$ |
| 10. | $u(nT) \cdot \cos(\omega nT)$ | $\frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega T) + 1}$ |
| 11. | $u(nT) \cdot e^{-anT} \cdot \sin(\omega nT)$ | $\frac{z \cdot e^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$ |
| 12. | $u(nT) \cdot e^{-anT} \cdot \cos(\omega nT)$ | $\frac{z \cdot (z - e^{-\alpha T} \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cdot e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$ |

Задание № 2 Исследование эффектов квантования и округления данных в РЦФ 2-го порядка.
Область устойчивости оценить по характеристическому уравнению

1. Оцените область устойчивости цифрового фильтра второго порядка в зависимости от значений коэффициентов b_1 и b_2 и разбейте её на подобласти для апериодических и колебательных систем.
2. Определите дисперсию шума АЦП на выходе цифрового фильтра (получите расчетную формулу $\sigma_{0вых}^2 = \sigma_{0вх}^2 \dots$).
3. Нарисуйте структурную схему цифрового фильтра при прямой (канонической) форме реализации.
4. Определите выходные дисперсии шумов округления, вносимых при умножении на коэффициенты фильтра b_1 и b_2 .
5. Определите суммарную дисперсию шумов квантования и округления на выходе цифрового фильтра.
6. При предположении, что один из умножителей на b_1 (b_2) выполняет операции с сохранением остатка, вычислите выходную дисперсию шумов округления.
7. Сделайте выводы и объяснения процессов формирования ошибок и их представления в виде шумов в цифровом фильтре.

Варианты системных функций РЦФ 2-го порядка:

$$2.1. H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.2. H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.3. H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.4. H(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.5. H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.6. H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.7. H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.8. H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.9. H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.10. H(z) = \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.11. H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.12. H(z) = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.13. H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.14. H(z) = \frac{2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.15. H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.16. H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.17. H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.18. H(z) = \frac{2 + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.19. H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.20. H(z) = \frac{2 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.21. H(z) = \frac{2 - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.22. H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.23. H(z) = \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.24. H(z) = \frac{z^{-1} - 2z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

$$2.25. H(z) = \frac{2 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Задание № 3 Синтез цифрового фильтра Баттерворта 2-го порядка и общее частотное преобразование по Константиноидису

Дано:

$f_d := \dots$ - частота дискретизации;

$f_{cp} := f_o + (N - 1) \cdot \Delta f$ - частота среза по уровню -3 дБ (N - номер по журналу);

$f_2 := 2 \cdot f_{cp}$ - частота среза по уровню -12 дБ;

$f_o := \dots$ $\Delta f := \dots$

Необходимо синтезировать ЦФ Баттерворта следующими методами:

1. Инвариантного преобразования импульсной характеристики;
2. Отображения дифференциалов;
3. Билинейного преобразования;
4. Z-форм;
5. Выбрать ЦФ, синтезированный выше методом БЛП, и преобразовать его:
 - 5.1. ФНЧ --> ФНЧ1;
 - 5.2. ФНЧ --> ФВЧ;
 - 5.3. ФНЧ --> ПФ.

$\Theta_{cp} := 2 \cdot \pi \cdot f_{cp}$ - частота среза исходного ЦФ ФНЧ;

$\omega_{cp} := 1.5 \cdot \Theta_{cp}$ - частота среза преобразованного ЦФ ФНЧ1;

$\omega_{cp} := \Theta_{cp}$ - частота среза преобразованного ЦФ ФВЧ;

$\omega_1 := \frac{\Theta_{cp}}{\sqrt{2}}$ $\omega_2 := \sqrt{2} \cdot \Theta_{cp}$ - частоты среза полосового фильтра;

Для всех типов фильтров получить:

1. Выражение для системной функции $H(z)$, символьные и численные значения ее коэффициентов a_i, b_j ;
2. Зарисовать структурные схемы синтезированных ЦФ;
3. На одном графике построить АЧХ аналогового фильтра-прототипа и цифровых фильтров, синтезированных по пп. 1-4;
4. На одном графике построить АЧХ исходного цифрового фильтра и цифровых фильтров, синтезированных по пп. 5.1, 5.2, 5.3).

$$K(p) := \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot p + \omega_{cp}^2}$$

$$|K(j\omega)| := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{cp}}\right)^4}}$$

$$h(t) := \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} \cdot t\right)$$

$t \geq 0$

Задание № 4. Цифровая обработка изображений

Задания студентам выдаются методом случайной выборки (бланка задания не требуется). Первая цифра – номер контрольной работы (№ 4), вторая и третья цифра номер одного из 25 вариантов, четвертая цифра – номер одного из 4 заданий.