МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
(ТУСУР)

Кафедра моделирования и системного анализа (МиСА)

В.Г. Баранник, Е.В. Истигечева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Томск 2015

Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Дискретная математика / Учебное пособие – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Кафедра моделирования и системного анализа, 2015. – 137 с.

Дискретная математика – область математики, в которой изучаются структуры, основанные на конечных множествах, или же на бесконечных множествах, но предполагающих отделимость составляющих их элементов.

Наиболее значимой областью применения методов дискретной математики является область компьютерных технологий. Дискретная математика и примыкающие к ней дисциплины изучаются во всех университетах и институтах, где осуществляется подготовка специалистов в области программирования, математики, а также по экономическим, техническим и гуманитарным направлениям.

Учебное пособие включает базовые вопросы дискретной математики, что в совокупности со специальными дисциплинами должно обеспечить качественную подготовку студентов по направлению подготовки 220100 – Системный анализ и управление.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Множества и операции над ними

1.1. Множества и способы их задания

Напомним, что "множество" – это неопределяемое понятие математики. Георг Кантор (1845 – 1918) – немецкий математик, чьи работы лежат в основе современной теории множеств, говорил, что "множество – это многое, мыслимое как единое".

Множества принято обозначать большими латинскими буквами $A,\ B,\ X,\ T,\ldots$, элементы множества – малыми буквами. Слова "принадлежит" и "не принадлежит" обозначаются символами: "$\in$" и "$\notin$": $x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A, $x \notin A$ – элемент x не принадлежит множеству A.
Элементами множества могут быть любые объекты – числа, векторы, точки, матрицы и т.п. В частности элементами множества могут являться множества.
Для числовых множеств общепринятыми являются следующие обозначения:
N – множество натуральных чисел (целых положительных чисел);
N_0 – расширенное множество натуральных чисел (к натуральным числам добавлено число нуль);
Z – множество всех целых чисел, куда входят положительные и отрицательные целые числа, а также нуль.
Q – множество рациональных чисел. Рациональное число – это число, которое может быть записано в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$ $(m,n$ – целые числа). Поскольку любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби, например,

$$3=\frac{3}{1},\quad 3=\frac{6}{2},\quad 3=\frac{-21}{-7}=\ldots,$$

причем не единственным образом, все целые числа являются рациональными.
R – множество действительных чисел, в которое входят все рациональные числа, а также числа иррациональные. Например, числа

$$\sqrt{2}=1{,}4142136\ldots\quad \lg 5=0.6989700\ldots,\quad \pi=3{,}1415926535\ldots,\quad e=2{,}78281828459\ldots$$

являются иррациональными.
Каждый раздел математики использует свои множества. Начиная решать какую-либо задачу, прежде всего определяют множество тех объектов, которые будут в ней рассмотрены. Например, в задачах математического анализа изучают всевозможные числа, их последовательности, функции и т.п. Множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче, называют ***универсальным множеством*** (для данной задачи).
Универсальное множество принято обозначать буквой U. Универсальное множество является максимальным множеством в том смысле, что все объекты являются его элементами, т. е. утверждение $x \in U$ в рамках задачи всегда истинно. Минимальным множеством является ***пустое множество*** – $\varnothing$, которое не содержит ни одного элемента.
Задать множество A – это значит, указать способ, позволяющий относительно любого элемента x универсального множества U *однозначно* установить, принадлежит x множеству A или не принадлежит. Другими словами, это правило, позволяющее определить, какое из двух высказываний, $x \in A$ или $x \notin A$, является истинным, а какое ложным.
Множества можно задавать различными способами. Рассмотрим некоторые из них.
1. *Список элементов множества*. Этим способом можно задавать конечные или счетные множества. Множество является конечным или счетным, если можно занумеровать его элементы, например, $a_1, a_2, \ldots$ и т. д. Если существует элемент с самым большим номером, то

множество является конечным, если же в качестве номеров задействованы все натуральные числа, то множество является бесконечным счетным множеством.
Примеры.
1). $A = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ – множество, содержащее 6 элементов (конечное множество).
2). $B = \{0, 0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, ...\}$ – бесконечное счетное множество.
3). $P = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{1, 2, 3\}\}$ - множество, содержащее 5 элементов, два из которых – $\{1,2\}$ и $\{1,2,3\}$, сами являются множествами.
2. *Характеристическое свойство.* Характеристическое свойство множества – это свойство, которым обладает каждый элемент множества, но не обладает никакой объект, не принадлежащий множеству.
Примеры.
1). T - множество равносторонних треугольников.
2). $B = \{0 \le x < 1, (x \in R)\} = [0,1)$ – множество действительных чисел, больших или равных нулю, и меньших единицы.
3). $C = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}, (n = 1, 2, ...)$ – множество всех несократимых дробей, числитель которых на единицу меньше знаменателя.
3. *Характеристическая функция*.

Определение 1.1. ***Характеристической функцией множества*** A называют функцию $\mu_A(x)$, заданную на универсальном множестве U и принимающую значение единица на тех элементах множества U, которые принадлежат A, и значение нуль на элементах, которые не принадлежат A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin A \\ 1, & \text{если} \quad x \in A \end{cases}, \quad (x \in U) \qquad (1.1)$$

Из определения характеристической функции следует два очевидных утверждения:
1. $\mu_U(x) \equiv 1$, $(x \in U)$;
2. $\mu_\varnothing(x) \equiv 0$, $(x \in U)$.

Рассмотрим в качестве примера универсальное множество $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ и два его подмножества: A – множество чисел, меньших 7, и B – множество четных чисел. Характеристические функции множеств A и B имеют вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x < 7 \\ 0, & \text{если} \quad x \ge 7 \end{cases}, \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 2,4,6,8,10 \\ 0, & \text{если} \quad x = 1,3,5,7,9 \end{cases}.$$

Запишем характеристические функции μ_A и μ_B в таблицу:

x $(x \in U)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mu_B(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Удобной иллюстрацией множеств являются диаграммы Эйлера-Венна, на которых универсальное множество изображается прямоугольником, а его подмножества – кругами или эллипсами (рис. 1.1(*а*-*в*)).
Как видно из рис. 1.1.(*а*), выделение в универсальном множестве *U* одного множества – множества *A*, разбивает прямоугольник на две непересекающиеся области, в которых характеристическая функция μ_A принимает разные значения: μ_A=1внутри эллипса и μ_A=0 вне эллипса. Добавление еще одного множества – множества *B*, (рис. 1.1 (*б*)), снова делит

каждую из уже имеющихся двух областей на две подобласти. Образуется $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ непересекающиеся

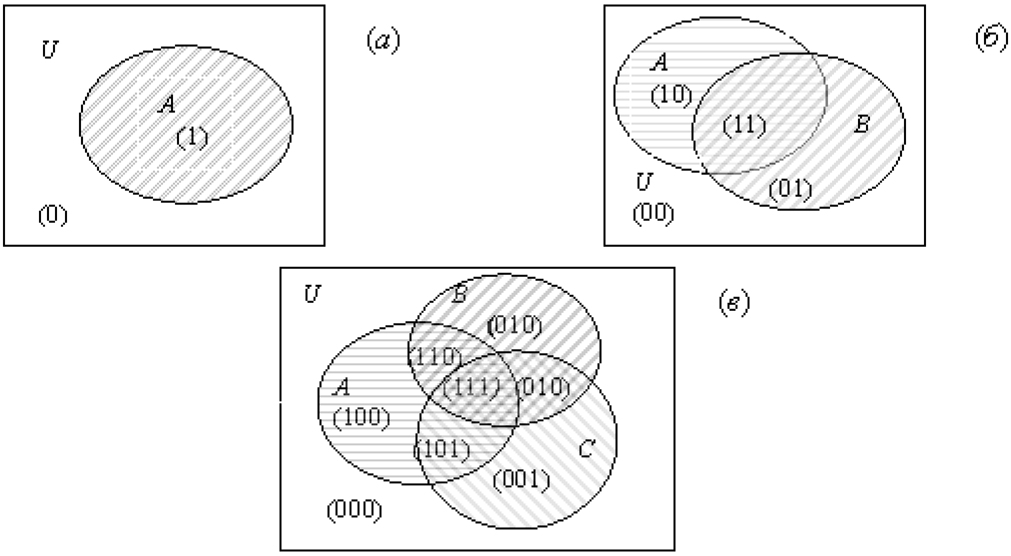


Рис. 1.1. Диаграммы Эйлера-Венна

области, каждая из которых соответствует определенной паре значений характеристических функций (μ_A, μ_B). Например, пара (01) соответствует области, в которой μ_A=0, μ_B=1. Эта область включает в себя те элементы универсального множества *U*, которые не принадлежат множеству *A*, но принадлежат множеству *B*.

Добавление третьего множества – множества *C*, (рис. 1.1 (*в*)), снова делит на две подобласти каждую из уже имеющихся четырех областей. Образуется $4 \cdot 2 = 2^3 = 8$ непересекающихся областей. Каждая из них соответствует определенной тройке значений характеристических функций (μ_A, μ_B, μ_C). Эти тройки можно рассматривать как номера областей, записанные в двоичной системе счисления. Например, № $101_2=5_{10}$, т.е. область, в которой находятся элементы множеств *A* и *C*, но нет элементов множества *B*, – это область №5. Таким образом, каждая из восьми областей имеет свой двоичный номер, несущий информацию о принадлежности или непринадлежности элементов этой области множествам *A*, *B* и *C*.

Добавляя четвертое, пятое и т.д. множества, получаем 2^4, 2^5,…,2^n областей, каждая из которых имеет свой вполне определенный двоичный номер, составленный из значений характеристических функций множеств. Подчеркнем, что последовательность нулей и единиц в любом из номеров выстроена в определенном, заранее обговоренном порядке. Только при условии упорядоченности, двоичный номер области несет информацию о принадлежности или непринадлежности элементов этой области каждому из множеств.

Примечание. Напомним, что последовательность n действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in R (i = 1,2,\dots,n)$ в линейной алгебре рассматривается как n-мерный арифметический вектор с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Двоичный номер области также может быть назван двоичным вектором, координаты которого принимают значения во множестве $B = \{0,1\}$: $(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in B (i = 1,2,\dots,n)$. Число различных n-мерных двоичных векторов равно 2^n.

1.2. Множество и подмножество

Определение 1.2. Множество A называют ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом B.

Определение 1.3. Отношение между множеством и подмножеством называют ***отношением включения***.

Если множество A является подмножеством множества B, то говорят, что A *включено* в B или B *включает в себя* A.

Слова "включено" и "не включено" обозначаются символами: "$\subseteq$" и "$\not\subset$". Предложение $A \subseteq B$ может быть прочитано любым из следующих способов: "множество A включено во множество B", "множество B включает в себя множество A", "множество A является подмножеством множества B".

Обратим внимание на то, что в определении 1.2 не сказано, имеются ли во множестве B элементы, не принадлежащие A. Возможны два случая: (1) B содержит элементы, не принадлежащие A, (2) B не содержит элементов, не принадлежащих A.

В первом случае множество B в некотором смысле "больше" множества A, так как кроме всех элементов, входящих в A, имеет еще какие-то элементы. В этом случае A называют ***правильной частью*** множества B, а отношение между A и B – отношением строгого включения. Знак строгого включения "$\subset$". Предложение $A \subset B$ можно читать "A строго включено в B", или "A является правильной частью B".

Во втором случае, когда A и B состоят из одних и тех же элементов, их называют ***равными множествами*** $A = B$, а отношение между ними – ***отношением равенства***. В случае равенства множеств, справедливы оба включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Поскольку любое множество A равно самому себе, то оно является подмножеством самого себя: $A \subseteq A$.

Таким образом, утверждение $X \subseteq A$ истинно для тех множеств X, которые либо являются правильной частью A, либо равны A. Аналогично нестрогое числовое неравенство: $x \le a$, справедливо для всех значений переменной x, которые меньше a или равны a.

Диаграммы Эйлера-Венна, иллюстрирующие отношение включения, показаны на рис. 1.2.

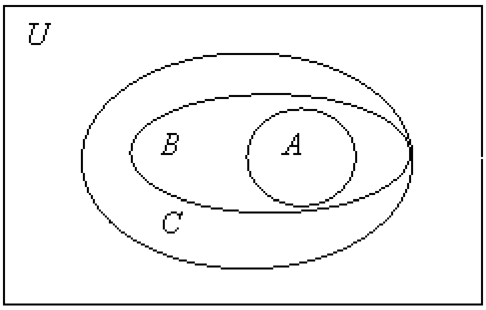


Рис. 1.2. Диаграмма Эйлера-Венна для случая $A \subset B \subset C$

Пусть U – универсальное множество, множества A и B заданы своими характеристическими функциями $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ ($x \in U$), причем A является подмножеством B. По смыслу характеристической функции, очевидно, что при любых значениях аргумента значение характеристической функции подмножества не превосходит значений характеристической функции множества:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x), \quad (x \in U). \tag{1.2}$$

Характеристические функции равных множеств равны при любом значении x: $A = B \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad (x \in U)$. Если множество A является правильной частью множества B, то между характеристическими функциями этих множества имеет место строгое неравенство: $A \subset B \Rightarrow \mu_A(x) < \mu_B(x), \quad (x \in U)$ A.

Верны также и обратные утверждения:

1. Если для любого $x \in U$ справедливо $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$, то $A \subseteq B$.

2. Если для любого $x \in U$ справедливо $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, то $A = B$.

Определение 1.4. Множество всех подмножеств множества A называют ***булеаном*** множества A.

Применяются обозначения: P(*A*). В этих обозначениях определение 1.4 можно записать так: P(*A*)=$\{B | B \subseteq A\}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры.

1). Запишем булеан множества – $A = \{a_1, a_2\}$, содержащего два элемента.

P(*A*)=$\{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$. Булеан содержит 4=$2^2$ элемента.

Составим таблицу элементов булеана и характеристических функций подмножеств множества A.

Подмножества множества A	Значения характеристических функций подмножеств	
	Элементы множества A	
	a_1	a_2
$\varnothing$	0	0
$\{a_2\}$	0	1
$\{a_1\}$	1	0
$\{a_1, a_2\}$	1	1

Обратим внимание на то, что любое из подмножеств множества A (любой элемент булеана) имеет свой двоичный номер, составленный из значений характеристических функций подмножества на каждом из элементов множества A. В данном примере множество A содержит два элемента, следовательно двоичные номера – это всевозможные двумерные двоичные векторы. Таких векторов 4, следовательно и число подмножеств двухэлементного множества тоже равно четырем.

Изобразим схематически отношение включения между подмножествами множества A (рис. 1.3).

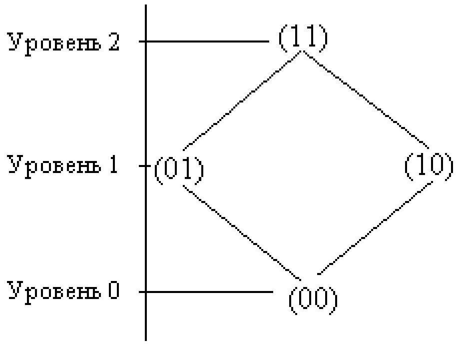


Рис. 1.3. Диаграмма отношений включения между подмножествами двухэлементного множества A

Все подмножества множества A разбиты на три уровня (рис.1.3). На нулевом уровне находится "наименьшее" – пустое множество с характеристической функцией (00). Это множество является подмножеством всех элементов булеана. На первом уровне располагаются два одноэлементных множества. Ни одно из них не является подмножеством другого множества этого же уровня. В таком случае говорят, что множества ***несравнимы***

друг с другом. На втором уровне расположено "наибольшее" множество, совпадающее с самим множеством A.
Двигаясь по диаграмме снизу вверх, получаем последовательность включений множеств. Существует два пути движения по диаграмме: (1) $(00) \to (01) \to (11)$, (2) $(00) \to (10) \to (11)$. Движение по первому пути дает последовательность включений $\varnothing \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1, a_2\}$, по второму – $\varnothing \subseteq \{a_2\} \subseteq \{a_1, a_2\}$.

2). Пусть множество $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ содержит три элемента.
Составим таблицу элементов булеана и их характеристических функций, а также диаграмму отношений включения между его элементами.

Подмножества множества A	Значения характеристических функций подмножеств		
	Элементы множества A		
	a_1	a_2	a_3
$\varnothing$	0	0	0
$\{a_3\}$	0	0	1
$\{a_2\}$	0	1	0
$\{a_2, a_3\}$	0	1	1
$\{a_1\}$	1	0	0
$\{a_1, a_3\}$	1	0	1
$\{a_1, a_2\}$	1	1	0
$\{a_1, a_2, a_3\}$	1	1	1

Число подмножеств с добавлением элемента a_3 удвоилось: булеан трехэлементного множества содержит $8=4\times2=2^3$ подмножеств.
Диаграмма отношений включения представлена на рис. 1.4.

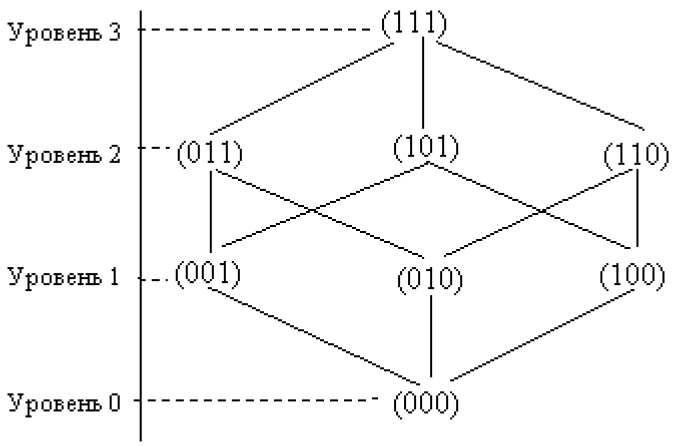


Рис. 1.4. Диаграмма отношений включения между подмножествами трехэлементного множества A

Все подмножества множества A разбиты на четыре уровня (см. рис.1.4). Множества одного уровня несравнимы между собой по отношению включения, но двигаясь по любому пути диаграммы, получаем последовательную цепочку включений.
Интересным является вопрос: сколько всего путей существует в диаграмме? Ответить на него достаточно просто, построив так называемое "дерево путей" (рис. 1.5).

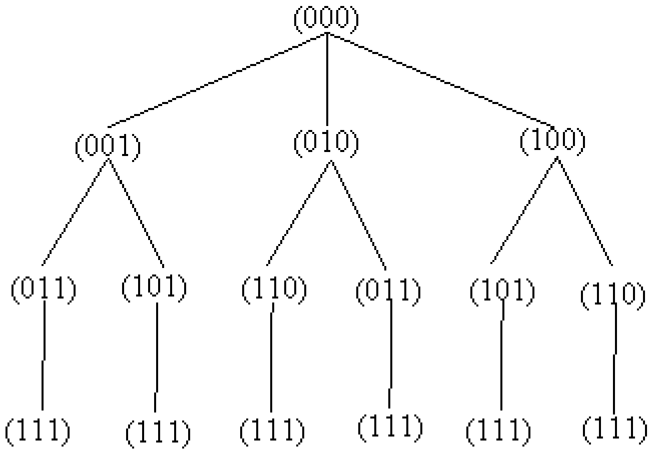


Рис. 1.5. Дерево путей в диаграмме отношений включения между подмножествами трехэлементного множества A

Как видно из рис.1.5, существует 6 цепочек включений подмножеств, причем каждая состоит из четырех включений

$\varnothing \subseteq \{a_3\} \subseteq \{a_2, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$; $\varnothing \subseteq \{a_3\} \subseteq \{a_1, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$;

$\varnothing \subseteq \{a_2\} \subseteq \{a_1, a_2\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$; $\varnothing \subseteq \{a_2\} \subseteq \{a_2, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$;

$\varnothing \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1, a_3\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$; $\varnothing \subseteq \{a_1\} \subseteq \{a_1, a_2\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}$.

Отметим, что двоичные векторы играют в теории множеств весьма существенную роль. Они использовались при нумерации областей на диаграммах Эйлера-Венна (см. разд. 1.1). В этом параграфе с их помощью кодируются элементы булеанов множеств. Между элементами булеана множества A, содержащего n элементов, и n-мерными двоичными векторами существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому подмножеству множества A соответствует определенный n-мерный двоичный вектор, и наоборот – каждому n-мерному двоичному вектору соответствует единственное подмножество множества A.

Отношению включения множеств соответствует отношение "меньше или равно" во множестве двоичных векторов.

Определение1.5. Говорят, что ***двоичный вектор*** a ***меньше или равен двоичному вектору*** b, если каждая координата вектора a не больше одноименной координаты вектора b.

В буквенной форме определение 1.5 имеет следующий вид:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \le (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \le y_i, \quad x_i, y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\dots,n \tag{1.3}$$

Рассматривая n-мерные двоичные векторы как числа в двоичной системе счисления, можно утверждать, что всего таких векторов существует 2^n, а следовательно любое n-элементное множество содержит 2^n подмножеств. Поэтому булеан множества A называют также ***множеством-степенью*** A и, кроме обозначения P(*A*), применяют также обозначение 2^A: 2^A=P(*A*)=$\{B | B \subseteq A\}$.

1.3. Операции над множествами

Прежде всего введем понятия *унарной и бинарной алгебраических операций* на каком-либо множестве X.

Определение 1.6. ***Одноместной или унарной алгебраической операцией на множестве*** X называют соответствие, по которому каждому элементу a множества X сопоставляется определенный элемент b множества X.

Например, унарной алгебраической операцией на множестве действительных чисел R является нахождение противоположного числа: для любого числа a найдется единственное противоположное число $-a$.

Определение 1.7. ***Двуместной или бинарной алгебраической операцией на множестве*** X называют соответствие, по которому каждой паре (a,b) элементов множества X сопоставляется определенный элемент c множества X.

Например, бинарными алгебраическими операциями на множестве действительных чисел R являются сложение и умножение: для любых двух действительных чисел (a,b) найдется единственное число c, которое является их суммой, и единственное число d, которое является их произведением: $a+b=c, \quad a\cdot b=d, \quad a,b,c,d\in R$.

Пусть имеем универсальное множество U и P(*U*) – множество всех его подмножеств, множества A,B – элементы булеана: $A,B\in$ P(*U*). Будем рассматривать операции на множестве P(*U*).

1. *Дополнение множества,* $\overline{A}$,

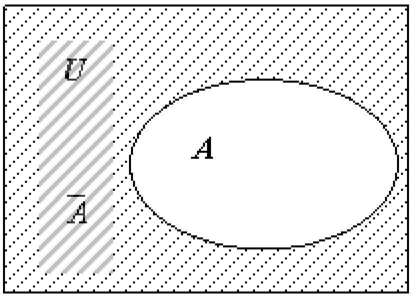


Рис. 1.6. Изображение дополнения множества A на диаграмме Эйлера-Венна

Определение 1.7. ***Дополнением множества*** A называют множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U, которые не принадлежат множеству A.

На рис.1.6 множество $\overline{A}$ представлено заштрихованной областью. В табл. 1.1 записаны значения характеристической функции $\mu_{\overline{A}}$ для каждого из двух возможных значений μ_A.

Таблица 1.1.

Таблица значений характеристической функции дополнения

Значения характеристических функций	
μ_A	$\mu_{\overline{A}}$
0	1
1	0

Как видно из табл. 1.1, справедливы равенства

$$\mu_{\overline{A}}=1-\mu_A,\ \ \mu_A=1-\mu_{\overline{A}}. \qquad (1.4)$$

Дополнение множества A является унарной алгебраической операцией на P(*U*), так как каждому подмножеству A множества U ставит в соответствие другое подмножество – $\overline{A}$, в которое попадают все элементы U, не принадлежащие A.

Свойства операции дополнения

1. Дополнением универсального множества является пустое множество, дополнением пустого множества – универсальное множество:

$$\overline{U}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=U. \qquad (1.5)$$

2. Дополнение дополнения множества A есть множество A:

$$\overline{\overline{A}} = A. \quad (1.6)$$

3. Если множество A включено во множество B, то дополнение B включено в дополнение A:

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}. \quad (1.7)$$

Докажем справедливость утверждения (1.7). Для этого используем таблицу характеристических функций множеств A, B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. При построении таблицы будем учитывать формулу (1.2): $A \subseteq B \Rightarrow \mu_A \leq \mu_B$. В силу этой формулы, случай μ_A=1, μ_B=0 не возможен и из таблицы исключен.

Характеристические функции			
μ_A	μ_B	$\mu_{\overline{A}}$	$\mu_{\overline{B}}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0

Как видно из таблицы, при всех допустимых значениях μ_A и μ_B выполняется неравенство: $\mu_{\overline{A}} \geq \mu_{\overline{B}}$. Следовательно, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

2. *Пересечение множеств,* $A \cap B$.

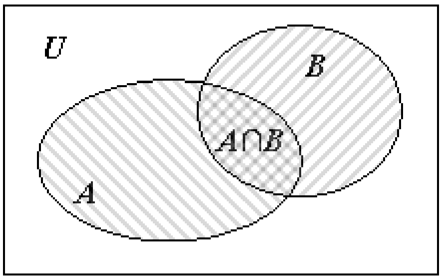


Рис. 1.7. Изображение пересечения множеств A
и B на диаграмме Эйлера-Венна

Определение 1.8. ***Пересечением множеств*** A и B называют множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству
U

B.

На рис.1.7 множество $A \cap B$ представлено областью, заштрихованной дважды. В табл. 1.2 записаны значения характеристической функции $\mu_{A \cap B}$ для каждой из четырех возможных пар значений μ_A и μ_B.

Таблица 1.2.

Таблица значений характеристической функции
пересечения множеств

Значения характеристических функций		
μ_A	μ_B	$\mu_{A \cap B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Для вычисления значений характеристической функции пересечения множеств, используются формулы (1.8) – (1.9).

1) *Логическое произведение*.

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in U. \qquad (1.8)$$

2) *Алгебраическое произведение*.

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad x \in U. \qquad (1.9)$$

3. *Объединение множеств,* $A \cup B$.

Определение 1.9. ***Объединением множеств*** A и B называют множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые либо принадлежат множеству A, либо множеству B, либо обоим множествам.

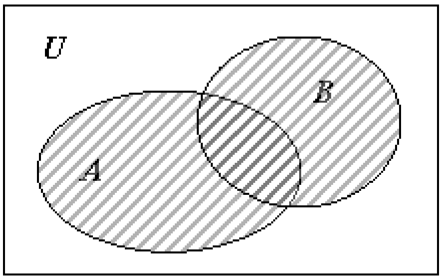


Рис. 1.8. Изображение объединения множеств A и B на диаграмме Эйлера-Венна

На рис.1.8 множество $A \cup B$ представлено заштрихованной областью. В табл. 1.3 записаны значения характеристической функции $\mu_{A\cup B}$ для каждой из четырех возможных пар значений μ_A и μ_B.

Таблица 1.3.

Таблица значений характеристической функции объединения множеств

Значения характеристических функций		
μ_A	μ_B	$\mu_{A\cup B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Для вычисления значений характеристической функции пересечения множеств, используются формулы (1.10) – (1.11).

1) *Операция максимум*.

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in U. \qquad (1.10)$$

2) *Вероятностная сумма*.

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad x \in U. \qquad (1.11)$$

Формулы (1.8), (1.9) сопряжены с формулами (1.10), (1.11). Это означает, что если $\mu_{A\cap B}$ вычисляется по формуле логического произведения, то $\mu_{A\cup B}$ следует вычислять по формуле операция максимум, если же $\mu_{A\cap B}$ вычислено как алгебраическое произведение, то $\mu_{A\cup B}$ – это вероятностная сумма.

4. *Разность множеств,* $A \setminus B$.

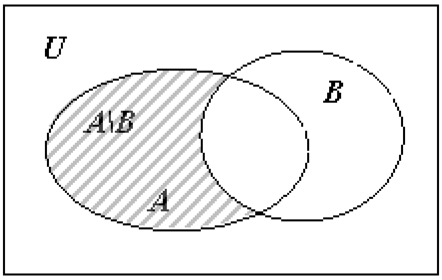


Рис. 1.9. Изображение разности множеств A и B
на диаграмме Эйлера-Венна

Определение 1.10. ***Разностью множеств*** A и B называют множество $A\setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.
На рис.1.9 множество $A\setminus B$ представлено заштрихованной областью. В табл. 1.4 записаны значения характеристической функции $\mu_{A\setminus B}$ для каждой из четырех возможных пар значений μ_A и μ_B.

Таблица 1.4.
Таблица значений характеристической функции разности множеств

Значения характеристических функций		
μ_A	μ_B	$\mu_{A\setminus B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Как видно из табл.1.4 элемент x принадлежит разности множеств $A\setminus B$ в том случае, если он является элементом A и в то же время не является элементом B, т.е принадлежит дополнению B. Отсюда следует, что x принадлежит $A\setminus B$ тогда и только тогда, когда он является элементом пересечения $A\cap\overline{B}$. Следовательно справедливо равенство (1.12).

$$A\setminus B = A\cap\overline{B},\quad A,B\subseteq U. \tag{1.12}$$

Используя равенства (1.4), (1.10), (1.11), получаем формулы вычисления значений характеристической функции разности множеств (формулы (1.13), (1.14)).

$$\mu_{A\setminus B}(x)=\min(\mu_A(x),1-\mu_B(x)),\qquad x\in U, \tag{1.13}$$

если в вычислениях использовано логическое произведение.

$$\mu_{A\setminus B}(x)=\mu_A-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\qquad x\in U, \tag{1.14}$$

если в вычислениях применяется алгебраическое произведение

5. *Кольцевая сумма множеств,* $A\oplus B$.

Определение 1.11. ***Кольцевой суммой множеств*** A и B называют множество $A\oplus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B или принадлежат множеству B, но не принадлежат множеству A.

Примечание. В некоторых учебниках по дискретной математике (см. напр. []) кольцевую сумму называют ***симметрической разностью***.

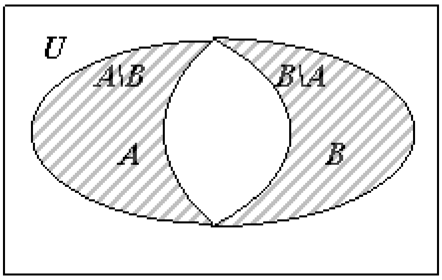


Рис. 1.10. Изображение разности множеств A и B
на диаграмме Эйлера-Венна

На рис.1.10 множество $A\oplus B$ представлено заштрихованной областью. В табл. 1.5 записаны значения характеристической функции $\mu_{A\oplus B}$ для каждой из четырех возможных пар значений μ_A и μ_B.

Таблица 1.5.

Таблица значений характеристической функции
разности множеств

Значения характеристических функций		
μ_A	μ_B	$\mu_{A\setminus B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Как видно из рис. 1.10 и табл.1.5. кольцевая сумма множеств A и B представляет собой объединение разностей $A\setminus B$ и $B\setminus A$.

$$A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A). \qquad (1.15)$$

Каждая из разностей может быть выражена через пересечение и дополнения множеств A и B (равенство (1.16)).

$$A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B). \qquad (1.16)$$

Используя равенства (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) и (1.16), получаем формулы вычисления значений характеристической функции кольцевой суммы.

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\max(\min(\ \mu_A(x),1-\mu_B(x),\min(1-\mu_A(x),\mu_B(x)),\qquad x\in U, \qquad (1.17)$$

если в вычислениях использованы логическое произведение и операция максимум.

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-2\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\qquad x\in U. \qquad (1.18)$$

если в вычислениях использованы алгебраическое произведение и вероятностная сумма.

Формула (1.18) опирается на весьма существенное свойство характеристических функций множеств:

$$\mu_A\cdot\mu_A=\mu_A^2=\mu_A. \qquad (1.19)$$

Возведение характеристической функции любого множества в квадрат, а значит и в любую более высокую степень, не меняет этой функции.

Свойство (1.19) называется ***идемпотентностью***. Оно является очевидным ввиду того, что μ_A может принимать лишь два значения: 0 или 1, а возведение этих чисел в любую степень не меняет их.

Обратим особое внимание на то, что и разность множеств и кольцевая сумма могут быть записаны через операции пересечения, объединения и дополнения. В любом булеане можно определить и другие бинарные операции над множествами, но также как разность и кольцевая сумма, любая из них может быть сведена к трем указанным операциям.

Всего в любом булеане P(U) можно определить 16 различных бинарных операций, что становится очевидным из табл. 1.6.

Таблица 1.6.

Значения характеристических функций результатов бинарных операций над множествами A и B, ($A, B \in$ P(U))

Значения характеристических функций множеств																	
A	B	Номера бинарных операций над множества A и B															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Каждая из бинарных операций (табл.1.6) определяется четырехмерным двоичным вектором от (0000) для первой операции до (1111) для шестнадцатой. Пересечение $A \cap B$ в таблице – это операция № 9, объединение $A \cup B$ – № 15, разность $A \setminus B$ – № 5, $B \setminus A$ – № 3, кольцевая сумма $A \oplus B$ – № 7.

Покажем, как представить результат выполнения какой-либо операции из табл.6 через операции пересечение, объединение и дополнение. Пусть, к примеру, это будет операция с №12. Дадим этой операции какое-то условное обозначение, например, $A * B$ – результат выполнения операции №12.

Выпишем таблицу значений характеристической функции множества $A * B$ с комментарием относительно принадлежности или не принадлежности произвольного элемента x универсального множества U пересечениям $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ и $A \cap B$.

A	B	$A * B$	Комментарий ($x \in U$)
0	0	1	$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, $x \in A * B$
0	1	1	$x \in \overline{A} \cap B$, $x \in A * B$
1	0	0	$x \in A \cap \overline{B}$, $x \notin A * B$
1	1	1	$x \in A \cap B$, $x \in A * B$

Из столбца комментария видно, что любой элемент x универсального множества U является элементом множества $A * B$ в том и только том случае, если он принадлежит $\overline{A} \cap \overline{B}$, или $\overline{A} \cap B$, или $A \cap B$, другими словами – принадлежит объединению указанных пересечений: ($\overline{A} \cap \overline{B}$)È($\overline{A} \cap B$)È($A \cap B$). Следовательно, $A * B$=($\overline{A} \cap \overline{B}$)È($\overline{A} \cap B$)È($A \cap B$). Результат операции $A * B$ выражен в виде формулы, содержащей операции пересечение, объединение и дополнение.

Аналогичным образом можно получить формулу для любой из шестнадцати бинарных операций табл. 6.

Операции пересечение, объединение и дополнение множеств в любом булеане 2^U можно считать главными операциями в том смысле, что результат любой другой операция может быть представлен формулой, содержащей три указанные операции. Свойства этих "главных" операций представлены табл. 1.7.

Таблица 1.7.

Свойства операций пересечения, объединения и дополнения над множествами

№п.п	Название свойства	Свойства пересечения	Свойства объединения
1	Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$

2	Ассоциативность	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
3	Дистрибутивность	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)
4	Свойство нуля	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup\varnothing=A$
5	Свойство единицы	$A\cap U=A$	$A\cup U=U$
6	Идемпотентность	$A\cap A=A$	$A\cup A=A$
7	Свойство поглощения	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
8	Законы де Моргана	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
9	Свойство порядка	$A\cap B\subseteq A$ и $A\cap B\subseteq B$	$A\subseteq A\cup B$ и $B\subseteq A\cup B$

Докажем справедливость некоторых равенств табл. 1.7.

Свойство поглощения для пересечения.

Составим таблицу значений характеристических функций множеств, входящих в равенство $A\cap(A\cup B)=A$, используя табл. 1.2 и 1.3:

A	B	$A\cup B$	$A\cap(A\cup B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Как видно из таблицы, произвольный элемент x универсального множества U принадлежит множеству $A\cap(A\cup B)$ тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству A. Следовательно, равенство $A\cap(A\cup B)=A$ верно.

Закон де Моргана для объединения.

Составим таблицу значений характеристических функций множеств, входящих в равенство $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, используя табл. 1.1, 1.2, 1.3:

A	B	$A\cup B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A\cup B}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Как видно из таблицы, произвольный элемент x универсального множества U принадлежит множеству $\overline{A\cup B}$ тогда и только тогда, когда он принадлежит множеству $\overline{A}\cap\overline{B}$. Следовательно, равенство $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ верно.

Аналогично можно доказать любое другое равенство табл. 1.7.

2. Бинарные отношения

2.1. Основные понятия

Пусть A – какое-либо множество.

Определение 2.1. ***Декартовым квадратом*** множества A называют множество A^2 всех пар элементов этого множества.

Например, декартов квадрат множества $A=\{a,b,c\}$ – это множество всех пар элементов a,b и c: $A^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

Определение 2.2. ***Бинарным отношением на множестве*** A называют подмножество Γ множества A^2.

Так $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}\subset A^2$; Γ – график бинарного отношения на множестве A^2.

Определение 2.3. Если $\Gamma\subseteq A^2$ – бинарное отношение на множестве A и $(a,b)\in\Gamma$, то элемент $b(b\in A)$ называют ***образом элемента*** $a(a\in A)$ в отношении Γ, элемент a – ***прообразом элемента*** b в отношении Γ, множество всех образов элемента a образуют ***полный образ*** этого элемента, а множество всех прообразов элемента b – ***полный прообраз*** b в отношении Γ. Множество образов всех элементов A составляют ***полный образ множества*** A, а множество прообразов всех его элементов – ***полный прообраз множества*** A в отношении Γ.

Поясним приведенные термины на примере отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}\subset A^2$ ($A=\{a,b,c\}$).

Термин	Элементы множества A					***Полный образ множества*** A в отношении Γ
	a		b		c	
Образ элемента множества A в отношении Γ	a	c	a	c	-	$\{a, c\}$

Термин	Элементы множества A					***Полный прообраз множества*** A в отношении Γ
	a		b	c		
Прообраз элемента множества A в отношении Γ	a	b	-	a	b	$\{a\ b\}$

Бинарное отношение может быть задано следующими способами.

1. *График бинарного отношения*. Если множество A конечно, то график Γ – это список пар из множества A^2, в которых элементы соединены отношением. Если A – это часть числовой оси или вся ось, то график может быть представлен геометрически в системе координат.

2. *Характеристическое свойство бинарного отношения*. Характеристическое свойство – это свойство, определяющее характер связи между элементами в парах. Для обозначения характеристического свойства употребляется символ "ρ". Например, $a\rho b$: "*a* старше *b*" (на множестве людей), $a\rho b$: "$a^2+b^2=1$" (на множестве чисел) и т.п.

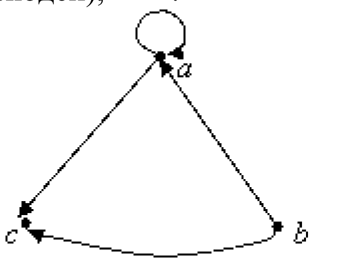


Рис. 2.1. Граф бинарного отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}$ на множестве $A=\{a,b,c\}$

3. *Граф бинарного отношения*. Граф бинарного отношения – это чертеж, состоящий из точек (вершин графа) и направленных отрезков или дуг (ребер графа). Вершины графа отношенуют элементам множества A. Ребра графа соединяют элементы множества A с их образами. Например, граф бинарного отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}$ на множестве $A=\{a,b,c\}$ будет выглядеть так (рис. 2.1).

4. *Характеристическая функция.* Характеристическая функция $\mu(x,y)$ бинарного отношения Γ на множестве A – это функция от двух аргументов x и y $(x,y \in A)$ такая, что

$$\mu(x,y)=\begin{cases}1, & если \quad (x,y)\in\Gamma\\ 0, & если \quad (x,y)\notin\Gamma\end{cases} \qquad (2.1)$$

Например, характеристическую функцию отношения Γ (см. рис.2.1) можно записать в виде таблицы:

$\mu(a,a)$	$\mu(a,b)$	$\mu(a,c)$	$\mu(b,a)$	$\mu(b,b)$	$\mu(b,c)$	$\mu(c,a)$	$\mu(c,b)$	$\mu(c,c)$
1	0	1	1	0	1	0	0	0

Значение характеристической функции $\mu_\Gamma(a_i,a_j)=1$, если высказывание $(a_i,a_j)\in\Gamma$ истинно, и $\mu_\Gamma(a_i,a_j)=0$, если это высказывание ложно.

Используя термины "истина" и "ложь" характеристическую функцию можно записать следующим образом:

$$\mu(x,y)=\begin{cases}истина, & если \quad (x,y)\in\Gamma\\ ложь, & если \quad (x,y)\notin\Gamma\end{cases} \qquad (2.2)$$

Характеристическую функцию бинарного отношения удобно записывать в виде *матрицы бинарного отношения*.

Определен 2.4. ***Матрица бинарного отношения*** Γ на множестве A, содержащем n элементов, называют квадратную матрицу $J_\Gamma=(x_{ij})$ порядка n, элементы которой $x_{ij}\quad (i=1,2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,n)$ имеют значения:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & если \quad (a_i,a_j)\in\Gamma\\ 0, & если \quad (a_i,a_j)\notin\Gamma\end{cases} \quad (a_i,a_j\in A) \qquad (2.3)$$

Примечание. В теории графов (см. главу 5) матрицу бинарного отношения называют ***матрицей инциденций***.

Матрица отношения Γ (рис. 2.1) – это матрица $J_\Gamma=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2.2. Композиция бинарных отношений

Определение 2.5. ***Композицией бинарных отношений*** Γ_1 и Γ_2, заданных на множестве A, называют отношение $\Gamma=\Gamma_1\circ\Gamma_2$ такое, что

$$\forall a(a\in A),\forall b(b\in A):\big((a,b)\in\Gamma\Leftrightarrow\exists c(c\in A):(a,c)\in\Gamma_1\wedge(c,b)\in\Gamma_2\big) \qquad (2.4)$$

Примечание. В формуле (2.4) использованы символы "$\forall$", "$\exists$", "$\Leftrightarrow$", "$\wedge$". Все эти символы взяты из математической логики, которая рассматривается в главе 4. Однако многим эти символы известны из школьного курса математики. Символ $\forall$ называют квантором всеобщности, он заменяет слова "любой", "всякий", "каждый". Символ $\exists$ – квантор существования, его читают как "существует", "найдется". Символ $\Leftrightarrow$ заменяет слова "…тогда и только тогда…", "…если и только если…", символ $\wedge$ заменяет соединительные союзы "и", "а", "но" и пр. Так предложение с этими символами в формуле (2.4) можно прочитать следующим образом: "Для любого элемента a из множества A и любого элемента b из этого же множества справедливо утверждение: пара $(a,b)\in\Gamma$ тогда и только тогда, когда во множестве A найдется такой элемент c, что $(a,c)\in\Gamma_1$ и $(c,b)\in\Gamma_2$".

Если во множестве A имеется элемент c, через который осуществляется связь между элементами a и b в композиции отношений $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, то элемент c будем называть *элементом посредником*, а саму связь между a и b – *опосредованной связью*.

Пусть $A = \{a,b,c\}$. Отношения Γ_1 и Γ_2 заданы матрицами:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_{ij})_{3\times3}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times3}.$$

Найдем композицию $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Для этого выполним следующую последовательность действий:

1) используя матрицы J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, запишем графики отношений Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1 = \{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\}$, $\Gamma_2 = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,a)\}$;

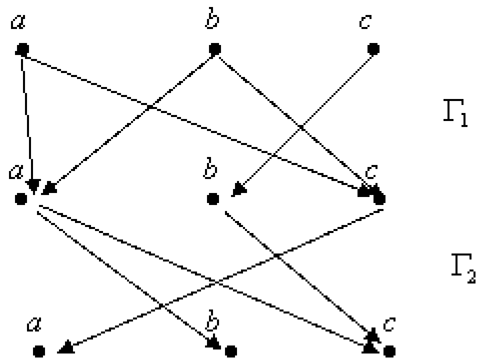


Рис. 2.2. Графы отношений Γ_1 и Γ_2 и их объединение

2) построим графы отношений Γ_1 и Γ_2 и объединим их (рис. 2.2);

Примечание1. Графы Γ_1 и Γ_2 построены в виде двудольных графов, причем входы графа Γ_1 являются выходами графа Γ_2.

Примечание 2. Пути в объединении графов Γ_1 и Γ_2 ведут от элементов множества A к их образам в отношении Γ_1, и далее к образам в отношении Γ_2.

3) выпишем все пути, ведущие от элементов a, b и c к их образам в отношении Γ, а также промежуточные элементы в этих путях, посредством которых осуществляются связи в отношении Γ. Результат представим в виде таблицы:

Пути от элементов множества A к их образам в отношении $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$	Элементы, осуществляющие опосредованную связь в композиции отношений Γ_1 и Γ_2	Элементы графика отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$
$a \to a \to b$	a	(a,b)
$a \to a \to c$	a	(a,c)
$a \to c \to a$	c	(a,a)
$b \to a \to b$	a	(b,b)
$b \to a \to c$	a	(b,c)
$b \to c \to a$	c	(b,a)
$c \to b \to c$	b	(c,c)

4) запишем график отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(b,a),(c,c)\}$ и построим его граф (рис. 2.3).

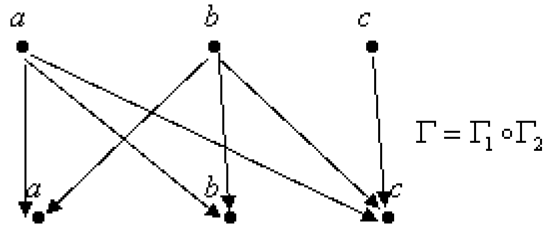


Рис. 2.3. Граф композиции отношений $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$

Рассмотрим вопрос об отыскании элементов композиции отношений Γ_1 и Γ_2, не прибегая к графам.

Пусть

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_{ij})_{3\times3}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times3}, \quad J_{\Gamma_1\circ\Gamma_2} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = (s_{ij})_{3\times3}$$

– матрицы отношений Γ_1, Γ_2 и $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Задача состоит в том, чтобы найти способ вычисления элементов s_{ij} матрицы $J_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}$.

1. Найдем s_{11}.

$$s_{11} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (a,a) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \\ 0, & \textit{если} \quad (a,a) \notin \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \end{cases}$$

(см. определение 2.4). В свою очередь по формуле (2.4), пара $(a,a) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ тогда и только тогда, когда во множестве A найдется такой элемент t, что $(a,t) \in \Gamma_1$ и $(t,a) \in \Gamma_2$. Рассмотрим эти включения для всех возможных значений t.

1) $t = a$; $(a,a) \in \Gamma_1$, так как $x_{11}=1$; $(a,a) \notin \Gamma_2$, так как $y_{11}=0$.

Следовательно, $t = a$ *не является* элементом множества A, который осуществляет опосредованную связь между a и a в композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Вывод о том, что $t = a$ *не является элементом посредником в паре* (a,a), символически можно записать так: $x_{11} \cdot y_{11} = \min(x_{11}, y_{11}) = 0$.

2) $t = b$; $(a,b) \notin \Gamma_1$, так как $x_{12}=0$; $(b,a) \notin \Gamma_2$, так как $y_{21}=0$.

Следовательно, $t = b$ *не является элементом посредником в паре* (a,a) и $x_{12} \cdot y_{21} = \min(x_{12}, y_{21}) = 0$.

3) $t = c$; $(a,c) \in \Gamma_1$, так как $x_{13}=1$; $(c,a) \in \Gamma_2$, так как $y_{31}=1$.

Следовательно, $t = c$ *осуществляет опосредованную связь в паре* (a,a) и $x_{13} \cdot y_{31} = \min(x_{13}, y_{31}) = 1$.

Таким образом, во множестве A найден элемент $t = c$, осуществляющий опосредованную связь между элементами пары (a,a) в композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Следовательно, $s_{11} = \max(\min(x_{11}, y_{11}), \min(x_{12}, y_{21}), \min(x_{13}, y_{31})) = 1$.

Последнее равенство можно рассматривать как результат умножения первой строки матрицы Γ_1 на первый столбец матрицы Γ_2, в которых умножение элементов матрицы выполняется по правилу логического умножения, а сложение произведений – по правилу операции максимум (см. формулы (1.8), (1.10)).

2. Найдем s_{12}, воспользовавшись выводом, сделанным в п. 1.

$$s_{12} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{11}, y_{11}), \min(x_{12}, y_{22}), \min(x_{13}, y_{32})) =$$

$$= \max(\min(1,1), \min(0,0), \min(1,0)) = \max(1,0,0) = 1.$$

Равенство $s_{12} = 1$ означает, что во множестве A есть элемент посредник t, осуществляющий связь между элементами пары (a,b) в композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Покажем, что это действительно так.

1) $t = a$ является элементом посредником, поскольку $(a,a) \in \Gamma_1$ и $(a,b) \in \Gamma_2$;

2) $t = b$ не является элементом посредником, так как $(a,b) \notin \Gamma_1$ и $(b,b) \notin \Gamma_2$;

3) $t = c$ также не является элементом посредником, поскольку $(a,c) \in \Gamma_1$, но $(c,b) \notin \Gamma_2$.

Аналогично находим все элементы матрицы $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = (s_{ij})_{3\times 3}$:

$$s_{13} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \cdot \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{11}, y_{13}), \min(x_{12}, y_{23}), \min(x_{13}, y_{33})) = 1,$$

элемент посредник – c;

$$s_{21} = (x_{21}, x_{22}, x_{23}) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{21}, y_{11}), \min(x_{22}, y_{21}), \min(x_{23}, y_{31})) = 1,$$

элемент посредник – c;

$$s_{22} = (x_{21}, x_{12}, x_{23}) \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{21}, y_{11}), \min(x_{22}, y_{22}), \min(x_{23}, y_{32})) = 1,$$

элемент посредник – a;

$$s_{23} = (x_{21}, x_{22}, x_{23}) \cdot \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{21}, y_{13}), \min(x_{22}, y_{23}), \min(x_{23}, y_{33})) = 1,$$

элемент посредник – a;

$$s_{31} = (x_{31}, x_{32}, x_{33}) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{31}, y_{11}), \min(x_{32}, y_{21}), \min(x_{33}, y_{31})) = 0,$$

опосредованных связей между c и a нет, $(c,a) \notin \Gamma_1 \circ \Gamma_2$;

$$s_{32} = (x_{31}, x_{32}, x_{33}) \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{31}, y_{12}), \min(x_{32}, y_{22}), \min(x_{33}, y_{32})) = 0,$$

опосредованных связей между c и b нет, $(c,b) \notin \Gamma_1 \circ \Gamma_2$;

$$s_{33} = (x_{31}, x_{32}, x_{33}) \cdot \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \max(\min(\ x_{31}, y_{13}), \min(\ x_{32}, y_{23}), \min(\ x_{33}, y_{33}))$$

=1,

элемент посредник – b.

Таким образом, матрица $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$ имеет вид

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщением проделанных операций являются формулы (2.5) и (2.6), которые позволяют вычислять матрицы композиций бинарных отношений на произвольном множестве A:

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \times J_{\Gamma_2} = (s_{ij})_{n \times n}, \qquad (2.5)$$

где n – число элементов множества A, $J_{\Gamma_1} = (x_{ij})_{n \times n}$ – матрица отношения Γ_1, $J_{\Gamma_2} = (y_{ij})_{n \times n}$ – матрица отношения Γ_2, $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = (s_{ij})_{n \times n}$ – матрица отношения $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, элементы s_{ij} которой находят по формуле (2.6):

$$s_{ij} = \max(\min(\ x_{i1}, y_{1j}), \min(\ x_{i2}, y_{2j}), \ldots, \min(\ x_{1n}, y_{nj})). \qquad (2.6)$$

Рассмотрим композицию $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, когда $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. В этом случае естественно обозначить $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma^2$. Учитывая формулу (2.5), получаем: $J_{\Gamma^2} = J_{\Gamma}^2$.

Примеры.

1. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$ и $J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица бинарного отношения, заданного на множестве A.

Найдем матрицу композиции Γ^2.

$$J_{\Gamma^2} = J_{\Gamma}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для любой строки x_i матрицы J_{Γ} и соответствующей строки s_i матрицы J_{Γ^2} выполняются неравенства $x_i \geq s_i$ (см. определение (1.5) и формулу (1.3)). Все строки матрицы J_{Γ} не меньше отношенующих строк матрицы J_{Γ^2}. Будем считать, что в таком случае $J_{\Gamma} \geq J_{\Gamma^2}$. Очевидно, что из неравенства $J_{\Gamma} \geq J_{\Gamma^2}$ следует $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$.

В матрице J_{Γ} учтены все связи между элементами множества A, определяемые отношением Γ, в матрице J_{Γ^2} – все дополнительные опосредованные связи между элементами того же множества. Неравенство $J_{\Gamma} \geq J_{\Gamma^2}$ означает, что *каждая опосредованная связь покрывается непосредственной связью*, т.е. в отношении Γ учтены все опосредованные связи.

2. $A = \{a,b,c\}$, $J_Г = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$J_{Г^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = x_2 = (1,0,1)$, $x_3 = (0,1,0)$, $s_1 = s_2 = (1,1,1)$, $s_3 = (1,0,1)$ – строки матриц $J_Г$ и $J_{Г^2}$. Имеем неравенства: $x_1 \le s_1$, $x_2 \le s_2$. Строки x_3 и s_3 несравнимы между собой.

В матрице $J_Г$ записаны все непосредственные связи, определяемые отношением Γ, в матрице $J_{Г^2}$ – дополнительные опосредованные связи в этом же отношении.

Проанализируем неравенства $x_1 \le s_1$ и $x_2 \le s_2$ строк, соответствующих элементам $a, b \in A$.

1) $s_{31} > x_{31}$ означает, что опосредованная связь (a,b) (c – элемент посредник) не покрывается непосредственной связью меду этими элементами в отношении Γ: $(a,b) \notin \Gamma$, но $(a,b) \in \Gamma^2$.

2) $s_{32} < x_{32}$ говорит о том, что связь (c,b) только непосредственная, элемент посредник, осуществляющий эту связь в композиции отношений, отсутствует: $(c,b) \in \Gamma$, но $(c,b) \notin \Gamma^2$.

3) $s_{33} > x_{33}$, означает, что связь (c,c) является только опосредованной (b – элемент посредник): $(c,c) \in \Gamma^2$, но $(c,c) \notin \Gamma$.

Таким образом, если строки x_i и s_i матриц $J_Г$ и $J_{Г^2}$ несравнимы или $x_i < s_i$, то опосредованные связи между элементами множества покрываются непосредственными связями лишь частично или не покрываются совсем.

Из рассмотренных примеров делаем вывод.

Вывод. Если в отношении Γ непосредственные связи между элементами множества A покрывают все опосредованные связи между его элементами, то $J_{Г^2} \le J_Г$ и $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$.

2.3. Транзитивность и транзитивное замыкание бинарного отношения

Определение 2.6. Бинарное отношение $\Gamma \subseteq A^2$ называют ***транзитивным бинарным отношением***, если для любых a, b и c $(a,b,c \in A)$ из того, что $(a,c) \in \Gamma$ и $(c,b) \in \Gamma$, вытекает, что $(a,b) \in \Gamma$.

Символически определение 2.6 записано формулой (2.7).

$$\forall a(a \in A), \forall b(b \in A) \forall c(c \in A) : \big((a,c) \in \Gamma \wedge (c,b) \in \Gamma \Rightarrow (a,b) \in \Gamma\big). \qquad (2.7)$$

Другими словами, отношение $\Gamma \subseteq A^2$ транзитивно, если оно покрывает все опосредованные связи между элементами. Отсюда вытекает, что ***условием транзитивности отношения*** Γ является выполнение условия

$$\Gamma^2 \subseteq \Gamma \qquad (2.8)$$

Используя матрицы отношений, условие (2.8) можно переписать так:

$$J_Г \ge J_{Г^2}. \qquad (2.9)$$

Пример.

На множестве $A=\{a,b,c\}$ задано отношение Γ:

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times 3}.$$

Покажем, что Γ не является транзитивным отношением.

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

J_Γ и J_{Γ^2} несравнимы между собой, следовательно, Γ не транзитивно.

Найдем более высокие степени отношения Γ, т.е. матрицы отношений $\Gamma^3, \Gamma^4, \Gamma^5, \ldots, \Gamma^n$:

$$J_{\Gamma^2\cdot\Gamma} = J_{\Gamma^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma^4} = J_{\Gamma^3\cdot\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma^5} = J_{\Gamma^4\cdot\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma^6} = J_{\Gamma^5\cdot\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $J_{\Gamma^6} = J_{\Gamma^7} = \ldots = J_{\Gamma^n} \ (\forall n (n \in N) : n \geq 6)$.

Определение 2.7. ***Транзитивным замыканием*** $\hat{\Gamma}$ ***бинарного отношения*** $\Gamma \subseteq A^2$ называют объединение степеней этого бинарного отношения:

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^n. \qquad (2.10)$$

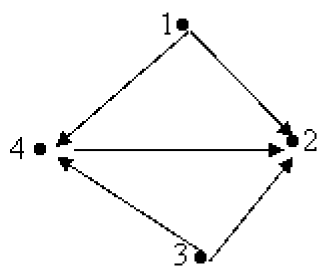


Рис. 2.4. Граф отношения $\Gamma = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(4,2)\}$ на множестве $A = \{1,2,3,4\}$

Транзитивное замыкание $\hat{\Gamma}$ отношения Γ в рассмотренном примере имеет вид $\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{6} \Gamma^n = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\} = A^2$.

Пусть на множестве $A = \{1,2,3,4\}$ отношение Γ задано графом (рис.2.4). Запишем матрицу J_Γ этого отношения и найдем его транзитивное замыкание.

Матрица отношения $J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Для нахождения транзитивного замыкания будем умножать матрицу J_Γ на себя, получая J_Γ^2, $J_\Gamma^3, \ldots, J_\Gamma^n$, до тех пор, пока не выполнится равенство $J_\Gamma^{n-1} = J_\Gamma^n$. Дальнейшее умножение не будет приводить к изменению матриц.

$$J_\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любой элемент матрицы J_Γ^2 не превосходит соответствующий элемент матрицы J_Γ, т.е. $J_\Gamma \geq J_{\Gamma^2}$. Это означает, что Γ включает все опосредованные связи между элементами, следовательно, Γ является транзитивным бинарным отношением. Покажем, что его транзитивное замыкание совпадает с самим Γ.

$$J_\Gamma^3 = J_\Gamma^2 \cdot J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0).$$

Умножение нуль-матрицы на любую другую матрицу есть нуль-матрица. Поэтому $J_\Gamma^n = (0)$ для любых $n \geq 3$.

Транзитивное замыкание отношения Γ найдем, используя формулу (2.10) и матрицы J_Γ и J_Γ^2:

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(4,2)\} \cup \{(1,2),(3,4)\} =$$
$$= \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(4,2)\} = \Gamma.$$

Как и следовало ожидать, поскольку отношение Γ является транзитивным отношением, оно совпадает со своим транзитивным замыканием.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Транзитивное бинарное отношение совпадает со своим транзитивным замыканием.

Утверждение 2. Транзитивное замыкание бинарного отношения есть наименьшее по числу элементов транзитивное отношение, содержащее данное бинарное отношение.

Утверждение 3. Транзитивное замыкание $\hat{\Gamma}$ есть *ближайшее* к Γ транзитивное отношение.

Использование термина "ближайшее отношение" предполагает, что между отношениями определено расстояние. Для определения ***расстояния между множествами*** используют формулу линейного расстояния (формула 2.11), или формулу евклидова расстояния (формула 2.12).

$$d(\mu_A,\mu_B)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|, \tag{2.11}$$

$$d(\mu_A,\mu_B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}, \tag{2.12}$$

где $d(\mu_A,\mu_B)$ – расстояние между подмножествами A и B универсального множества U, μ_A и μ_B характеристические функции этих подмножеств. Суммирование выполняется по всем элементам универсального множества.

Для бинарного отношения, заданного на множестве U, универсальным множеством является множество U^2. Если $\Gamma=U^2$, то Γ называют ***полным отношением.*** Очевидно, что все элементы матрицы полного отношения есть единицы: $J_{U^2}=(1)_{n\times n}$, где n - число элементов множества U. Формулы (2.11) и (2.12) для бинарных отношений имеют следующий вид:

$$d(\Gamma_A,\Gamma_B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{ij}-y_{ij}\right|, \tag{2.13}$$

$$d(\Gamma_A,\Gamma_B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-y_{ij})^2}, \tag{2.14}$$

где n – число элементов универсального множества U, $x_{ij}\in J_{\Gamma_A}$, $y_{ij}\in J_{\Gamma_B}$.

Не следует думать, что последовательность степеней матрицы отношения всегда имеет предел, т. е., начиная с некоторого шага n, выполняется равенство $J_\Gamma^n=J_\Gamma^{n+1}$. Приведем простой пример, показывающий, что это не так.

Пусть матрица отношения Γ на множестве $A=\{a,b\}$ имеет вид $J_\Gamma=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Тогда

$J_{\Gamma^2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J_{\Gamma^3}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $J_{\Gamma^4}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,…, $J_{\Gamma^{2n-1}}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $J_{\Gamma^{2n}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

для любого $n\geq 1$.

Тем не менее $\overline{\Gamma}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma^n=\{(a,b),(b,a)\}\cup\{(a,a),(b,b)\}=A^2$.

2.4. Свойства и виды бинарных отношений

Наиболее важными свойствами бинарных отношений на множестве A являются *свойства рефлексивности*, *симметричности*, *антисимметричности* и *транзитивности* (табл. 2.1).

Особую роль в теории бинарных отношений играют *отношения эквивалентности* и *отношения порядка*.

Определение 2.8. ***Отношением эквивалентности*** называют рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

По отношению эквивалентности множество разбивается на непересекающиеся *классы эквивалентности*.

Определение 2.9. ***Классами эквивалентности множества*** A называют подмножества $K_1,K_2,\ldots,K_n$ множества A, удовлетворяющие следующим условиям:

1) объединение всех классов есть множество A;
2) пересечение любых двух классов пусто.

Если на множестве A задано отношение эквивалентности E, то элементы попарно связанные друг с другом попадают в один класс, элементы из разных классов отношением не связаны. Множество классов эквивалентности обозначают A/E и называют ***фактор-множеством*** множества A по отношению E.

Отношение эквивалентности – это отношение "одинаковости" объектов по какому-либо признаку. Например, отношениями эквивалентности являются отношения сонаправленности геометрических векторов, отношение равенства обыкновенных дробей, отношение подобия треугольников и т.п.

Если $A/\mathrm{E} = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ – фактор-множество множества A по отношению E, то элементы a и b попавшие в один класс эквивалентности, называются эквивалентными друг другу по отношению E: $a \sim b$, где "~" – знак эквивалентности.

Примеры.

1. Пусть V^2 – множество геометрических векторов на плоскости. Отношение $a\rho b : \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ будет отношением эквивалентности, разбивающим всю плоскость по направлениям, если из V^2 исключить нулевой вектор $\vec{0}$, т.е. образовать множество $V^2/\{\vec{0}\}$. Нуль-вектор считают сонаправленным каждому из векторов плоскости, что нарушает свойство транзитивности. В самом деле, по свойству транзитивности

$$\left(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{0}\right) \wedge \left(\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}\right) \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \qquad \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{0} \in V^2\right),$$

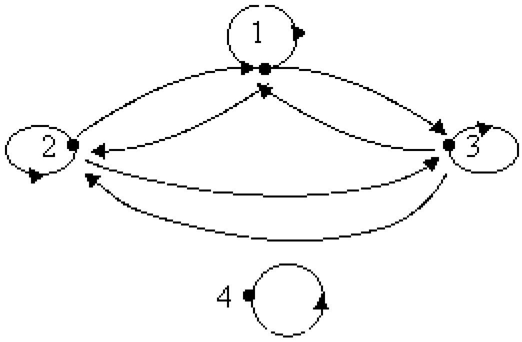
а это означает, что два любых вектора сонаправлены друг другу, что неверно.

2. На множестве всех обыкновенных дробей $D = \left\{\dfrac{m}{n}\right\}, \quad (m \in N_0, n \in N)$ отношение равенства дробей: $a\rho b : a = b, \quad a, b \in D$, является отношением эквивалентности, разбивающим все множество дробей на классы равных друг другу дробей. Пример такого класса: $K_3 = \left\{\dfrac{3}{1}, \dfrac{6}{2}, \dfrac{9}{3}, \ldots, \dfrac{3n}{n}, \ldots\right\}$. Именно классы эквивалентности равных дробей и называют рациональным числом.

3. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$, $J_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отношение Γ рефлексивно, так как на главной диагонали матрицы J_Γ все элементы – единицы (см. табл. 2.1). Γ - симметричное отношение, поскольку $J_\Gamma = J_\Gamma^T$. Найдем J_{Γ^2}.

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_\Gamma.$$



Поскольку $J_{\Gamma^2} \le J_\Gamma$, Γ – транзитивное отношение.
На графе этого отношения (см. рисунок) видно, что множество A разбито по данному отношению на два непересекающихся класса $K_1 = \{1,2,3\}$ и $K_2 = \{4\}$.
Если вынуть из графа какое-либо ребро, например, $(1,3)$, то отношение Γ перестанет быть симметричным и транзитивным. В самом деле, для пары $(3,1)$ не найдется симметричной пары $(1,3)$, а из того, что $(1,2) \in \Gamma$ и $(2,3) \in \Gamma$ не будет следовать $(1,3) \in \Gamma$. Множество $K_1 = \{1,2,3\}$ перестанет быть классом эквивалентности, поскольку элементы 1 и 3 отношением Γ связаны не будут.
Нарушение транзитивности произойдет и в том случае, если исключить из графа какую-либо петлю, т.е. нарушить рефлексивность отношения. Исключим, к примеру, петлю $(1,1)$. Тогда при выполнения условий $(1,2) \in \Gamma$ и $(2,1) \in \Gamma$ заключение $(1,1) \in \Gamma$ оказывается ложным.

Определение 2.9. ***Отношением порядка*** называют антисимметричное и транзитивное отношение.
Отношение порядка делает множество, на котором оно задано, *упорядоченным множеством*.
Различают *частичные порядки* и *линейные порядки*. В частично упорядоченном множестве существуют элементы, не связанные отношением порядка. В линейно упорядоченном множестве каждая пара элементов связана отношением порядка.
Отношениями частичного порядка являются, отношение "делится" во множестве целых чисел, отношения "≤", "≥", ">", ">" во множестве n-мерных двоичных векторов, отношение включения в булеане 2^U любого множества U и пр.
Отношениями линейного порядка являются отношения "≤", "≥", ">", ">" в числовых множествах, отношения "старше", "моложе", "выше", "ниже" во множестве людей и пр.
Пример.
Пусть $A = \{(00),(01),(10),(11)\}$ – множество двумерных двоичных векторов. Покажем, что отношение $a\rho b : a \le b, \quad (a,b \in A)$ является отношением частичного порядка. Составим матрицу этого отношения (см. определение (1.5) и формулу (1.3)).

$$J_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $J_\rho \cap J_\rho^T \le E$ и $J_\rho^2 \le J_\rho$ (см. табл. 2.1).

$$J_\rho \cap J_\rho^T = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\min(1,1)&\min(1,0)&\min(1,0)&\min(1,0)\\\min(0,1)&\min(1,1)&\min(0,1)&\min(1,0)\\\min(0,1)&\min(0,0)&\min(1,1)&\min(1,0)\\\min(0,1)&\min(0,1)&\min(0,1)&\min(1,1)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = E$$

, следовательно, отношение $a\rho b$ является антисимметричным;

$$J_\rho^2 = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} = J_\rho,$$

следовательно, $a\rho b$ – транзитивное отношение.

Отношение $a\rho b$ антисимметрично и транзитивно, значит, оно является отношением порядка на множестве A. Поскольку некоторые элементы множества A не связаны друг с другом этим отношением, например, неравенства $(01) \le (10)$ и $(10) \le (01)$ являются ложными, то порядок частичный.

2.5. Функциональные соответствия и их виды

В курсе математического анализа были изучены различные функции на множестве действительных чисел. Эти функции можно рассматривать как бинарные отношения на множестве $X \times Y$, где X – область определения функции, Y – множество ее значений. Например, функция $y = \sin x$ есть бинарное отношение на множестве $R \times [-1,1]$, функция $y = \ln x$ – бинарное отношение на множестве $(0,\infty) \times R$. Из математического анализа известно, что основной признак функционального соответствия таков: *каждому элементу области определения соответствует определенный единственный элемент множества значений*.

Рассмотрим подход к понятию функционального соответствия как к особому виду бинарных отношений, заданных на произвольном множестве.

Определение 2.10. ***Функциональным соответствием*** f на множестве $X \times Y$ называют бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$, в котором каждый элемент множества X имеет единственный образ во множестве Y.

Примечание 1. Матрица функционального соответствия $f \subseteq X \times Y$ – это матрица $J_f = (s_{ij})_{m \times n}$, где m – число элементов множества X, n – число элементов множества Y, $s_{ij} = \begin{cases}1, & \text{если} \quad (x_i y_j) \in f \\ 0, & \text{если} \quad (x_i y_j) \notin f\end{cases}$, $(x_i \in X, \quad y_j \in Y)$. Поскольку по определению функционального соответствия каждый элемент множества X имеет единственный образ во множестве Y, в каждой строке матрицы J_f один и только один элемент равен единице, все же другие элементы строки – нули.

Примечание 2. Если множества X и Y имеют одинаковое число элементов $m = n$, то матрица функционального соответствия $f \subseteq X \times Y$ есть квадратная матрица порядка n.

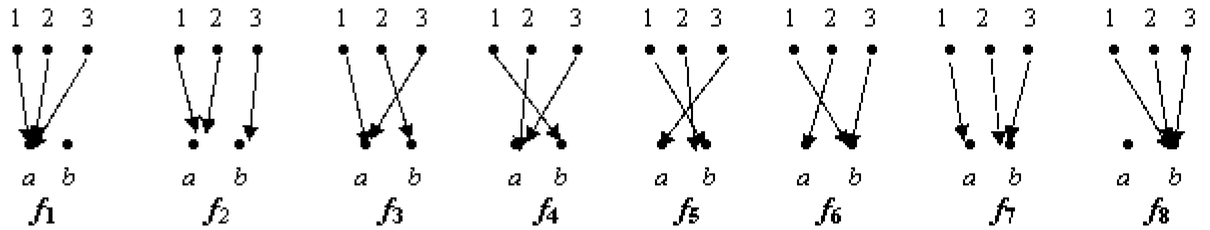
Рассмотрим ряд примеров.

Пусть $X = \{1,2,3\}$.

Пример 1.

Пусть $Y_1 = \{a, b\}$. Декартово произведение $X \times Y_1 = \{(1a), (1b), (2a), (2b), (3a), (3b)\}$ содержит шесть пар, а, следовательно, $2^6 = 64$ подмножеств. Каждое подмножество Γ есть бинарное отношение на множестве $X \times Y_1$, следовательно, на множестве $X \times Y_1$ существует 64 различных бинарных отношений.

Чтобы бинарное отношение являлось функциональным соответствием, каждый элемент множества X должен иметь единственный образ во множестве Y_1. Следовательно, график функционального соответствия может содержать только три пары, в которых на первом месте стоят элементы 1, 2, 3 множества X.



На рисунке показаны графы всех возможных функциональных соответствий на множестве $X \times Y_1$. Таких соответствий восемь $f_1, f_2, \ldots, f_8$. Любое из них можно представить матрицей бинарного отношения:

$$J_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{f_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_{f_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_{f_7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_{f_8} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме представления в виде матрицы бинарного отношения, каждое функциональное соответствие можно задать также в виде двустрочной матрицы $P_{f_i} \quad (i = 1,2,\ldots,8)$, в первой строке которой записаны элементы множества X, а во второй – их образы из множества Y_1:

$$P_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \end{pmatrix},\ P_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix},\ P_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix},\ P_{f_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix},$$

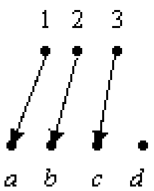
$$P_{f_5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix},\ P_{f_6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix},\ P_{f_7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix},\ P_{f_8} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

Представление функциональных соответствий в виде двустрочных матриц позволяет определить число таких соответствий. В данном случае их столько, сколько можно составить *различных наборов по три элемента в каждом, используя при этом два элемента,* a и b. Формулы для вычисления числа таких наборов рассматриваются в комбинаторике (см. главу 3).

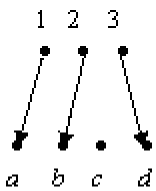
В соответствиях f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 и f_7 каждый элемент множества Y_1 имеет *не менее одного прообраза* во множестве X. Такие соответствия называют *сюръективными функциональными соответствиями* или *отображениями множества* X ***на*** *множество* Y_1.

Соответствия f_1, f_8 сюръективными соответствиями не являются, поскольку один из элементов множества Y_1 имеет менее одного прообраза во множестве X. (В f_1 ни одного прообраза не имеет элемент b, в f_8 – элемент a).
Очевидно, что если существует сюръективное функциональное соответствие на множестве $X \times Y$, то множество Y содержит элементов не больше, чем множество X.
Пример 2.
Пусть $Y_2 = \{a, b, c, d\}$. Декартово произведение
$X \times Y_2 = \{(1a), (1b), (1c), (1d), (2a), (2b), (2c), (2d), (3a), (3b), (3c), (3d)\}$
содержит двенадцать пар, а, следовательно, $2^{12} = 4096$ подмножеств. Каждое подмножество Γ есть бинарное отношение на множестве $X \times Y_2$, следовательно, на множестве $X \times Y_2$ существует 4096 различных бинарных отношений.
Чтобы бинарное отношение являлось функциональным соответствием, каждый элемент множества X должен иметь единственный образ во множестве Y_2. Следовательно, график функционального соответствия может содержать только три пары, в которых на первом месте стоят элементы 1, 2, 3 множества X. Однако существует $4^3 = 64$ способа выбрать образ для каждого элемента множества X, т. е. на множестве $X \times Y_2$ существует 64 различных функциональных соответствия.

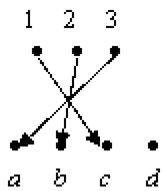
Поскольку элементов во множестве Y_2 больше, чем во множестве X, ни одно из этих функциональных соответствий не является сюръективным. Рассмотрим несколько соответствий, в которых каждый элемент Y_2 имеет *не более одного прообраза* во множестве X. Такие соответствия называют *инъективными функциональными соответствиями* или *отображениями множества* X ***во*** *множество* Y_2.
Запишем двустрочные матрицы некоторых инъективных функциональных соответствий на множестве $X \times Y_2$ и построим графы этих отображений.
$P_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $P_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & d \end{pmatrix}$, $P_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $P_{f_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & d & a \end{pmatrix}$.



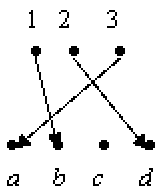
f_1



f_2



f_3



f_4

Пример 3.
Пусть $Y_3 = \{a, b, c\}$.
Декартово произведение $X \times Y_3 = \{(1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c), (3a), (3b), (3c)\}$ содержит девять пар, а, следовательно, $2^9 = 1024$ подмножеств. Каждое подмножество Γ есть бинарное отношение на множестве $X \times Y_3$, следовательно, на множестве $X \times Y_3$ существует 1024 различных бинарных отношения.
Чтобы бинарное отношение являлось функциональным соответствием, каждый элемент множества X должен иметь единственный образ во множестве Y_3. Следовательно, график функционального соответствия может содержать только три пары, в которых на первом месте стоят элементы 1, 2, 3 множества X. Однако существует $3^3 = 27$ способов выбрать

образ для каждого элемента множества X, т. е. на множестве $X \times Y_3$ существует 27 различных функциональных соответствий.
Некоторые из этих соответствий являются одновременно сюръективными и инъективными, т.е. каждый элемент множества Y_3 имеет не менее, но и не более одного прообраза во множестве X. Функциональные соответствия являющиеся одновременно сюръективными и инъективными называются *взаимно однозначными соответствиями*. Возможность установить взаимно однозначное соответствие между множествами говорит о том, что в этих множествах число элементов одинаково.
Обобщим понятия, рассмотренные в примерах.

Определение 2.11. ***Сюръективным функциональным соответствием*** f на множестве $X \times Y$ называют функциональное соответствие, в котором каждый элемент множества Y имеют не менее одного прообраза во множестве X.

Сюръективное функциональное соответствие f на множестве $X \times Y$ называют также ***отображением множества*** X ***на множество*** Y.

Определение 2.12. ***Инъективным функциональным соответствием*** f на множестве $X \times Y$ называют функциональное соответствие, в котором каждый элемент множества Y имеют не более одного прообраза во множестве X.

Инъективное функциональное соответствие f на множестве $X \times Y$ называют также ***отображением множества*** X ***во множество*** Y.

Определение 2.13. ***Биективным функциональным соответствием*** f на множестве $X \times Y$ называют функциональное соответствие, в котором каждый элемент множества Y имеют один прообраз во множестве X.

Биективное функциональное соответствие f на множестве $X \times Y$ называют также ***взаимно однозначным соответствием между множествами*** X ***и*** Y.

Определение 2.14. Если между отрезком натурального ряда $\{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством Y существует взаимно однозначное соответствие, то число n называют ***числом элементов множества*** Y.

Определение 2.15. Если между множеством натуральных чисел N и множеством Y существует взаимно однозначное соответствие, то Y называют ***счетным множеством***.

Определение 2.16. Если между множеством X и его правильной частью Y ($Y \subset X$) существует взаимно однозначное соответствие, то множества X и Y называют ***бесконечными множествами***, если же взаимно однозначного соответствия не существует, – то ***конечными множествами***.

Можно показать, что множества N, Z, Q являются бесконечными счетными множествами, множество R - бесконечным несчетным множеством.
Если m – число элементов множества X, n – число элементов множества Y, то декартово произведение $X \times Y$ содержит $m \cdot n$ элементов и имеет $2^{m \cdot n}$ подмножеств, каждое из которых является бинарным отношением. Среди них k отношений являются функциональными соответствиями. Причем k есть число различных наборов из n элементов по m элементов в каждом наборе. Формулы для вычисления числа таких наборов рассматриваются в комбинаторике (см. главу 3).
Пусть Γ – бинарное отношение на множестве $X \times Y$, т.е. $\Gamma \subseteq X \times Y$.

Определение 2.17. Отношением $\overline{\Gamma}$ $(\overline{\Gamma} \subseteq X \times Y)$ называют отношением, ***противоположным отношению*** Γ, если $\overline{\Gamma}$ есть дополнение множества Γ до множества $X \times Y$.

Определение 2.18. Отношение Γ^{-1} $(\Gamma^{-1} \subseteq Y \times X)$ называют отношением ***обратным отношению*** Γ, если $(yx) \in \Gamma^{-1} \Leftrightarrow (xy) \in \Gamma$ $(x \in X, y \in Y)$.
Рассмотрим пример.
Пример 4.
Пусть $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$ (см. пример 3).
На множестве $X \times Y$ зададим функциональные соответствия f_1, f_2, f_3 и f_4 матрицами бинарных отношений и двустрочными матрицами:

$$J_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad J_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad J_{f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix},\quad P_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix},\quad P_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{pmatrix},\quad P_{f_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Соответствия f_3 и f_4 являются взаимно однозначными соответствиями, поскольку каждый элемент множества X имеет единственный образ во множестве Y, и каждый элемент множества Y единственный прообраз во множестве X.

Запишем матрицы отношений $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$, $\overline{f_3}$, $\overline{f_4}$ и отношений f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}, f_4^{-1}, а также $\overline{f_1^{-1}}$, $\overline{f_2^{-1}}$, $\overline{f_3^{-1}}$ и $\overline{f_4^{-1}}$.

$$J_{\overline{f_1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{\overline{f_2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad J_{\overline{f_3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{\overline{f_4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J_{f_1^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad J_{f_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{f_3^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad J_{f_4^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$J_{\overline{f_1^{-1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{\overline{f_2^{-1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad J_{\overline{f_3^{-1}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{\overline{f_4^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно видеть, что только f_3^{-1} и f_4^{-1} являются взаимно однозначными соответствиями на множестве $Y \times X$. Представим эти соответствия двустрочными матрицами.

$$P_{f_3^{-1}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad P_{f_4^{-1}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы композиций прямых и обратных отношений. Поскольку прямое отношение задано на множестве $X \times Y$ ($f \subseteq X \times Y$), а обратное – на множестве $Y \times X$ $(\Gamma^{-1} \subseteq Y \times X)$, то их композиция $f \circ f^{-1}$ есть отношение на множестве $X \times X$ ($f \circ f^{-1} \subseteq X \times X$).

$$J_{f_1 \circ f_1^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J_{f_2\circ f_2^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix};$$

$$J_{f_3\circ f_3^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$J_{f_4\circ f_4^{-1}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Матрицы $J_{f_3\circ f_3^{-1}}$ и $J_{f_4\circ f_4^{-1}}$ есть единичные матрицы, т.е. соответствия $f_3\circ f_3^{-1}$ и $f_4\circ f_4^{-1}$ переводят каждый элемент множества X в себя. Такое отношение на множестве X^2 называют ***тождественным преобразованием множества*** X.

Из примера 4 очевидны следующие утверждения.

Утверждение 1. Для того, чтобы отображение $f\subseteq X\times Y$ было взаимно однозначным соответствием, необходимо и достаточно, чтобы обратное ему бинарное отношение $f^{-1}\subseteq Y\times X$ также являлось функциональным соответствием.

Утверждение 2. Если отображение $f\subseteq X\times Y$ является взаимно однозначным соответствием, то композиция $f\circ f^{-1}$ есть тождественное преобразование.

Таблица 2.1

Свойства бинарных отношений $\Gamma\subseteq A^2$

Свойство	Способы задания отношения			
	График Γ	Характеристическое свойство $a\rho b$	Матрица отношения $J_\Gamma=(x_{i,j})_{n\times n}$	Характеристическая функция $\mu(a,b)$
Рефлексивность	$(a,a)\in\Gamma$ $(a\in A)$	$a\rho a$ – истина, $(a\in A)$	$x_{ii}=1$ $(i=1,2,\ldots$	$\mu(a,a)=1$, $(a\in A)$
Симметричность	$(a,b)\in\Gamma\Rightarrow(b,a)\in\Gamma$ $(a,b\in A)$	$a\rho b\Rightarrow b\rho a$ – истина, $(a,b\in A)$	$x_{ij}=1\Rightarrow x_{ji}=1$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ $J_\Gamma=J_\Gamma^T$	$\mu(a,b)=1\Rightarrow\mu($, $(a,b\in A)$
Антисимметричность	$(a,b)\in\Gamma\wedge(b,a)\in\Gamma\Leftrightarrow$ $(a,b\in A)$	$a\rho b\wedge b\rho a\Rightarrow a=b$ – истина, $(a,b\in A)$	$x_{ij}=1\wedge x_{ji}=1\Leftrightarrow$ $J_\Gamma\cap J_\Gamma^T\subseteq E$	$\mu(a,b)=1\wedge\mu(b$ $\Leftrightarrow a=b$, $(a,b\in A)$
Транзитивность	$(a,b)\in\Gamma\wedge(b,c)\in\Gamma\Rightarrow(a,c)\in\Gamma$ $(a,b,c\in A)$	$a\rho b\wedge b\rho c\Rightarrow a\rho c$ – истина, $(a,b,c\in A)$	$J_\Gamma^2\subseteq J_\Gamma$	$\mu(a,b)=1\wedge\mu(b$ $\Rightarrow\mu(a,c)=1$, $(a,b,c\in A)$

Примечание. Символом J_{Γ}^{T} обозначена транспонированная матрица J_{Γ}, символом E – единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

3. Комбинаторика

В разделе 2 мы уже столкнулись с необходимостью находить число наборов, составленных из элементов определенного множества по какому-либо определенному правилу. Так, чтобы найти число функциональных соответствий на множестве $X \times Y$, надо найти число упорядоченных наборов из *n* элементов по *m* элементов в каждом наборе, где *m* – число элементов множества X, *n* – число элементов множества Y. Чтобы найти число взаимно однозначных соответствий между равночисленными множествами, содержащими *n* элементов каждое, надо найти число различных упорядоченных наборов из *n* элементов. В первом случае элементы в наборах могут повторяться, во втором – повторение запрещено.

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. [Судоплатов, с. 159]. Конструкции, получаемые при этом из исходного множества, называются *комбинаторными конфигурациями*.

3.1. Правила сложения и умножения

Введем обозначение $n(A)$ – число элементов множества A.

Правило сложения. Число элементов объединения множеств A и B равно сумме чисел элементов каждого множества, минус число элементов в их пересечении.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (3.1)$$

Если пересечение множеств A и B пусто, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, поскольку $n(\varnothing)$ =0.

Применим правило сложения для нахождения числа элементов объединения трех множеств.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) =$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))) =$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)) =$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Аналогично можно получить правило суммы для 4,5, и т.д. множеств.

Пример.

В группе 30 студентов. Каждый из них изучает иностранный язык. 20 студентов изучают английский язык ($n(E)$=20), 15 – немецкий ($n(D)$=15) и 10 – французский ($n(F)$=10). 4 студента изучают все три языка ($n(E\cap D\cap F)$=4). Английский и немецкий изучают 10 студентов ($n(E\cap D)$=10), английский и французский – 6 студентов ($n(E\cap F)$=6). Сколько студентов изучают немецкий и французский языки ($n(D\cap F)$?

Прежде чем решать задачу, оценим допустимые варианты ответов. При этом будем опираться на тот факт, что число элементов подмножества не больше числа элементов множества.

Во множество F включены множества $E\cap F$ и $D\cap F$. Следовательно, объединение этих пересечений также включено в F. Из этого вытекает:

$$n((E\cap F)\cup(D\cap F))\leq n(F)$$

Воспользовавшись правилом сложения, получаем:

$$n(E\cap F)+n(D\cap F)-n((E\cap F)\cap(D\cap F))\leq n(F)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(E\cap F)+n(D\cap F)-n(E\cap D\cap F)\leq n(F)\Rightarrow 6+n(D\cap F)-4\leq 10\Rightarrow n(D\cap F)\leq 8.$$

В то же время $E\cap(D\cap F)\subseteq D\cap F$, из чего следует, что

$n(E\cap D\cap F)\leq n(D\cap F)$, т.е. $4\leq n(D\cap F)$.

Окончательно имеем:

$$4\leq n(D\cap F)\leq 8.$$

Для решения задачи воспользуемся полученным выше обобщением правила сложения для трех множеств.

$n(E\cup D\cup F)=30$;

$n(E\cup D\cup F)=n(E)+n(D)+n(F)-n(E\cap D)-n(E\cap F)-n(D\cap F)+n(E\cap D\cap F)$;

20+15+10–10–6$-n(D\cap F)$+4=30;

$n(D\cap F)$=3.

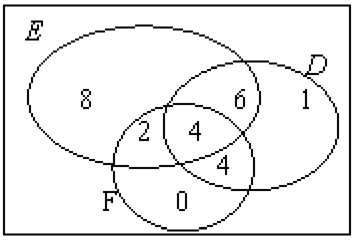
$3\leq 4\leq n(D\cap F)$. Ответ недопустимый, задача решений не имеет.

Найдем, при каком числе студентов в группе задача будет иметь решение. Пусть число студентов в группе равно x. Тогда:

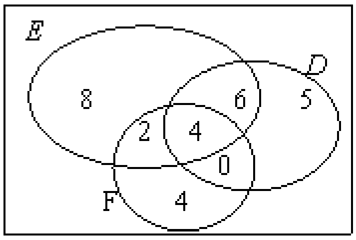
20+15+10–10–6–$n(D\cap F)$ +4=x.

Из условия $4\le n(D\cap F)\le 8$ получаем: $4\le 33-x\le 8$ или $25\le x\le 29$.

$25\le n(E\cup D\cup F)\le 29$.



n=25



n=29

На рисунке с помощью диаграмм Эйлера-Венна показаны решения задачи дл случаев $x=25$ и $x=29$.

Пусть имеются n множеств A_1, A_2,…,A_n, причем $m_1=n(A_1)$, $m_2=n(A_2)$,…,$m_n=n(A_n)$. Декартовым произведением $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ этих множеств называют множество всех последовательностей $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$,…,$a_n\in A_n$.

Примечание. В последовательности за каждым элементом закреплено место. Этим она отличается от множества, в котором порядок расположения элементов не важен. Например, $(1,2)\ne(2,1)$, но $\{1,2\}=\{2,1\}$.

Как отмечалось в главе 2, число элементов декартова произведения двух множеств A_1 и A_2 равно произведению чисел их элементов.

$$n(A_1\times A_2)=n(A_1)\cdot n(A_2) \tag{3.2}$$

Число элементов декартова произведения трех множеств $A_1\times A_2\times A_3$ равно $n(A_1\times A_2\times A_3)=n(A_1\times A_2)\cdot n(A_3)=n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot n(A_3)$.

Дальнейшее обобщение приводит к формуле (3.3).

$$n(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n)=n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot\ldots\cdot n(A_n) \tag{3.3}$$

Формула (3.3) по сути дела и является *правилом умножения*. Однако более удобной для решения комбинаторных задач является другая его формулировка.

Правило умножения. Пусть $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ последовательность n переменных и существует m_1 способов выбрать значение переменной x_1. Если после выбора значения переменной x_1 остается m_2 способов выбрать значение переменной x_2, после выбора значений переменных

x_1 и x_2 остается m_3 способов выбрать значение переменной x_3 и т.д., после выбора значений переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ остается m_n способов выбрать значение x_n, то можно составить $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ таких последовательностей.

Пример.

Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$. Решим вопрос о том, сколько функциональных соответствий существует на множестве $A \times B$, и сколько из них являются взаимно однозначными соответствиями.

В общем виде двустрочная матрица функционального соответствия на множестве $A \times B$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, где $x, y, z \in B$.

Воспользуемся правилом умножения. Выбрать значение x можно тремя способами: $x = a$, $x = b$, $x = c$. Теми же тремя способами можно выбрать y и z. Согласно правилу умножения, можно составить $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ различных последовательностей (x, y, z), а, следовательно, на множестве $A \times B$ имеется 27 функциональных соответствий.

В случае взаимно однозначного соответствия каждый элемент множества B имеет единственный прообраз во множестве A. Из этого следует, что в последовательностях (x, y, z) переменные должны принимать разные значения. Переменную x можно по-прежнему выбрать тремя способами, однако после выбора значения x, остается только два способа выбрать значение y, а после выбора x и y остается лишь один способ выбрать значение z. Таким образом, существует $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов составить последовательность (x, y, z) с условием, чтобы значения переменных не повторялись. Это означает, что на множестве $A \times B$ существует 6 различных взаимно однозначных соответствий.

3.2. Размещения

Пусть $X = \{1, 2, \ldots, m\}$ – отрезок натурального ряда, $n(X) = m$, $Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – какое-либо множество, $n(Y) = n$.

Определение 3.1. ***Размещениями из n элементов по m элементов*** называют функциональные соответствия на множестве $X \times Y$.

Примеры.

1. $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{a,b\}$.

Двустрочная матрица функционального соответствия на множестве $X \times Y$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix}$, где $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in Y$. Последовательность $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ – общий вид размещения из двух элементов по 5 элементов. Число таких размещений обозначают символом $\overline{A_2^5}$. В данном случае, согласно правилу умножения, $\overline{A_2^5}$ =2^5=32. Запишем некоторые из размещений: (a,a,a,a,a), (a,a,a,a,b), (a,a,a,b,a), (a,b,b,b,a), (b,b,b,b,b) и т.п.

2. $X=\{1,2\}$, $Y=\{a,b,c,d,e\}$. Общий вид двустрочной матрицы функционального соответствия на множестве $X\times Y$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, где $y_1,y_2\in Y$. Последовательность (y_1,y_2) – общий вид размещений из пяти элементов по два элемента. $\overline{A_5^2}$ =5^2=25. Некоторые из этих размещений: (a,a), (a,b), (b,a), (a,c), (b,c), (c,b), (b,d), (d,a), (d,b), (d,d), (c,d) и т.п.

Как видно из примеров, размещения отличаются друг от друга либо элементами, либо порядком их расположения, либо тем и другим. При решении некоторых задач более удобным оказывается следующее определение размещений.

Определение 3.1*. ***Размещениями из n по m*** называют последовательности, содержащие m элементов, взятых из множества, содержащего n элементов, и отличающиеся друг от друга порядком расположения элементов или самими элементами.

Число размещений из n по m находят по формуле (3.4).

$$\overline{A_n^m}=n^m \tag{3.4}$$

Пусть $X=\{1,2,\ldots,m\}$, $n(X)=m$ и $Y=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $n(Y)=n$. Если $m\geq n$, то множество функциональных соответствий на $X\times Y$ (множество размещений из n по m) содержит сюръективные соответствия, в которых каждый элемент из Y имеет *не менее одного прообраза* в X. Если $m\leq n$, то среди размещений имеются инъективные соответствия, в которых каждый элемент множества Y имеет *не более одного прообраза* во множестве X. В инъективных соответствиях элементы множества Y повторяться не могут, иначе один элемент имел бы более одного прообраза. Инъективные размещения из n по m называют размещениями без повторений.

Определение 3.2. ***Размещениями без повторений из n элементов по m элементов*** называют инъективные функциональные соответствия на множестве $X\times Y$.

Определение 3.2*. ***Размещениями без повторений из n по m*** называют последовательности, содержащие m элементов, взятых из множества, содержащего n элементов, и отличающиеся друг от друга порядком расположения элементов или самими элементами, причем, никакие два элемента в любой из таких последовательностей не равны между собой.

Условием существования размещений без повторений является неравенство $m\leq n$.

Итак, из множества всех размещений из n по m при условии $m\leq n$ можно выделить подмножество размещений без повторений.

Найдем число размещений без повторений. Имеем $X = \{1,2,\dots,m\}$, $n(X) = m$, $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n(Y) = n$, $m \le n$.

Двустрочная матрица функционального соответствия на множестве $X \times Y$ имеет вид:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_m} \end{pmatrix}$, где $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m} \in Y$.

Последовательность $(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m})$ – общий вид размещения из n по m. Применим правило умножения для подсчета числа таких последовательностей.

Существует n способов выбрать элемент y_{i_1}, так как на это место можно поставить любой из элементов множества Y. После выбора y_{i_1} остается $(n-1)$ способ выбрать элемент y_{i_2}. После выбора двух первых элементов имеется $(n-2)$ возможности выбрать элемент y_{i_3}, $(n-3)$ – y_{i_4}, и т.д., $(n-(m-1))$ – y_{i_m}. Таким образом, существует $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$ последовательностей указанного вида. Но такие последовательности и есть размещения из n по m без повторений. Итак, имеем формулу:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(n-m)), \qquad (3.5)$$

где символ A_n^m обозначает число размещений без повторений из n по m.

Поскольку множество размещений без повторений является подмножеством всех возможных размещений из n по m ($m \le n$), справедливо неравенство $A_n^m \le \overline{A_n^m}$, причем равенство возможно лишь в случае $n = m = 1$.

Пример.

Сколько существует различных четырехзначных чисел, записанных цифрами 1,2,3,4,5? Сколько среди них записаны разными цифрами?

Четырехзначное число имеет четыре разряда: $X = \{1,2,3,4)\}$. В каждый разряд может попасть любая из пяти цифр: $Y = \{1,2,3,4,5\}$. Если цифры в разрядах могут повторяться, то запись числа есть размещение с повторением из 5 по 4. Число таких размещений $\overline{A_5^4} = 5^4 = 625$. Если повторение цифр запрещено, то имеем размещения без повторений: $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Итак, существует 625 четырехзначных чисел, записанных цифрами 1,2,3,4,5, среди них 120 чисел, в записи которых цифры не повторяются.

Формулу (3.5) удобно представлять с использованием ***факториалов***.

Напомним, что символ $n!$ читают: "эн-факториал". Он обозначает произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad (3.6)$$

Для удобства использования этого символа, договорились считать нуль-факториал равным 1, и единица-факториал также равным 1 (формулы (3.7)).

$$0! = 1, \; 1! = 1. \qquad (3.7)$$

С использованием символа факториала формулу (3.5) можно переписать следующим образом:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (3.8)$$

В самом деле, если правую часть равенства (3.5) умножить и разделить на $(n-m)!$, то получим формулу (3.8).

3.3. Перестановки и подстановки

Определение 3.3. ***Перестановками из n элементов без повторений*** называют размещения без повторений из n по n.

Число всех перестановок без повторений из n элементов обозначают символом P_n. Из определения 3.3 и формул (3.7) и (3.8) получаем формулу вычисления P_n:

$$P_n = n! \qquad (3.9)$$

Замечание.

Согласно определению 3.2, размещения без повторений есть инъективные функциональные соответствия на множестве $X \times Y$. В случае перестановок $n(X) = n(Y) = n$. Следовательно, перестановки являются взаимно однозначными соответствиями на множестве $X \times Y$. Переформулируем определение 3.3, используя это замечание.

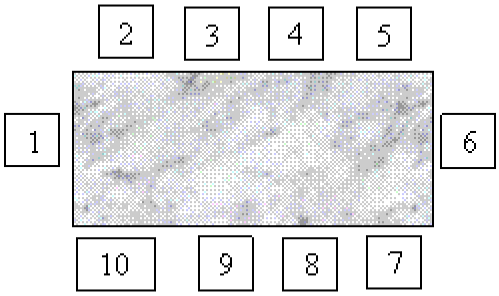
Определение 3.4. ***Перестановками из n элементов без повторений*** называют взаимно однозначные соответствия на множестве $X \times Y$, где $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Полезным в приложениях является также следующая формулировка определения перестановок

Определение 3.4.* ***Перестановками из n элементов без повторений*** называют последовательности, составленные из элементов множества Y, ($n(Y) = n$), причем, никакие два элемента в любой из таких последовательностей не равны между собой.

Примеры.

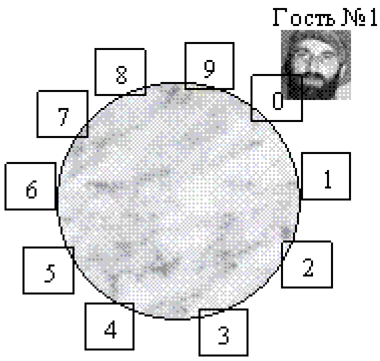
1. Сколькими способами можно рассадить 10 гостей за прямоугольным столом? Сколькими способами можно рассадить гостей так, чтобы двое из них сидели рядом?

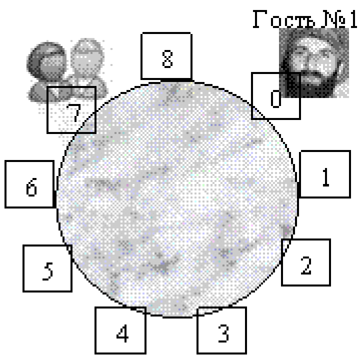


На рисунке указаны номера мест, на которые рассаживаются гости. Место №1 – это место "во главе стола", все остальные места отсчитываются от него.

Рассадить гостей за таким столом – это значит установить взаимно однозначное соответствие между множеством $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и множеством $Y = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$, где Y - это список гостей. Число таких соответствий есть число перестановок без повторений из 10 элементов. Следовательно, число способов рассадить гостей равно $P_{10} = 10! = 3628800$.

Если два гостя хотят сидеть рядом, то число распределяемых мест уменьшается, можно считать в данной ситуации, что два этих гостя занимают одно место, являясь при распределении мест "одним гостем". Число мест и гостей становится меньше на единицу. Число способов, которыми можно рассадить девять гостей по девяти местам, равно числу перестановок из девяти элементов: $P_9 = 9! = 362880$.





2. Требуется ответить на вопросы примера 1, но при условии, что стол круглый. (См. рисунок).

Если стол круглый, то нет места "во главе стола". Куда бы ни сел первый гость, его место и будет началом отсчета остальных мест. Иначе говоря, после того как сел первый гость остается распределить девять мест между девятью гостями.

Число способов сделать это равно числу перестановок из девяти элементов: $P_9 = 9! = 362880$.

Если при этом двоих гостей надо посадить рядом (см. рисунок), то останется лишь восемь мест для распределения. Число способов сделать это равно числу перестановок из восьми элементов: $P_8 = 8! = 40320$.

Определение 3.5. ***Подстановкой множества*** X называют взаимно однозначное соответствие на множестве X^2.

Не теряя общности множество X в подстановке можно считать отрезком числового ряда $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Число всех подстановок такого множества равно числу перестановок $P_n = n!$

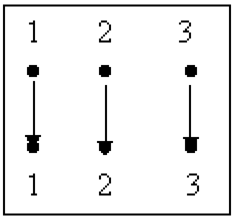
Пусть $P_n = \{f_1, f_2, \ldots, f_{n!}\}$ – множество всех таких подстановок. Определим на множестве P_n бинарную операцию – умножение подстановок.

Определение 3.6. ***Произведением подстановок*** $f_i \circ f_j$ ($f_i, f_j \in P_n$) называют композицию этих подстановок.

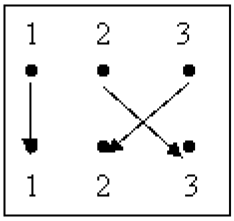
Пример.

Рассмотрим все подстановки множества $X = \{1,2,3\}$, представляя их матрицами и графами.

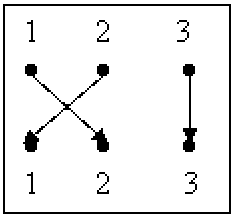
$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



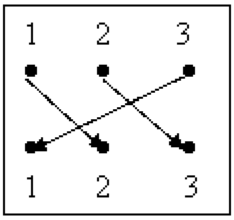
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



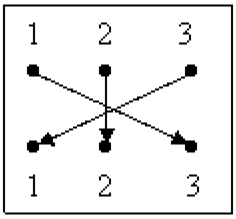
$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



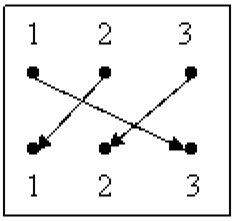
$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Подстановка f_0, переводящая каждый элемент множества X в себя, называют тождественной подстановкой. Чтобы перемножить две подстановки, надо перемножить их матрицы. Например,

$$f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f_0;$$

$$f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f_3;$$

$$f_2 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = f_5.$$

Композиции подстановок можно находить с помощью двустрочных матриц:

$$f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = f_0;$$

$$f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_3;$$

$$f_2 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_5.$$

Поскольку умножение матриц не является коммутативным, умножение подстановок также некоммутативно, например, $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

Тождественная подстановка имеет единичную матрицу, поэтому умножение любой подстановки f_i на тождественную не меняет f_i, т.е. f_0 играет в умножении подстановок роль единицы.

Если $f_i \circ f_j = f_0$, то f_i и f_j называют ***взаимно обратными подстановками***, аналогично тому, как числа, дающие при умножении друг на друга единицу, называют взаимно обратными числами. Подстановку, обратную f_i обозначают f_i^{-1}. Например, $f_1 = f_1^{-1}$, т.е. f_1 является обратной самой себе.

Покажем, как можно найти обратную подстановку. Найдем, к примеру, f_2^{-1}. Пусть двустрочная матрица искомой подстановки имеет вид: $f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. По определению обратной подстановки: $f_2 \circ f_2^{-1} = f_0$, следовательно, имеем:

$$f_2 \circ f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ y & x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ y & x & z \end{pmatrix} = f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2, y = 1, z = 3.$$

$$f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f_2.$$

Выполним проверку, перемножив матрицы прямого и обратного соответствий:

$$f_2 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f_0.$$

Найдем $f_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$.

$$f_3 \circ f_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ y & z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ y & z & x \end{pmatrix} = f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 1, z = 2, x = 3$$

$$f_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_5$$

Выполним проверку:

$$f_3 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f_0.$$

Сделаем выводы, обобщив результаты примера.

1. Множество всех подстановок P_n содержит $n!$ элементов.

2. Произведение любых двух подстановок из P_n есть подстановка из P_n.

3. Во множестве P_n имеется тождественная подстановка f_0, для которой выполняется равенство: $f_0 \circ f_i = f_i \circ f_0 = f_i, \quad (f_i \in P_n)$.

4. Для каждой подстановки f_i найдется обратная ей подстановка f_i^{-1}, для которой выполняются равенства: $f_i^{-1} \circ f_i = f_i \circ f_i^{-1} = f_0$.

5. Для $n \geq 3$ умножение подстановок не является коммутативным.

Множество P_n с определенной в нем операцией умножения называется ***симметрической группой***.

В перестановках и подстановках элементы в последовательностях не повторяются. Однако во многих задачах требуется уметь находить число последовательностей, отличающихся друг от друга только порядком расположения элементов, как в перестановках, но содержащих определенное число одинаковых элементов. Такие последовательности называют ***перестановками с повторениями***.

Задача о вычислении числа перестановок с повторениями ставится следующим образом.

Пусть множество $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, из элементов которого образуются последовательности, разбито на непересекающиеся классы $K_1, K_2, \dots, K_m$ по какому-либо отношению эквивалентности. Напомним, что отношение эквивалентности – это отношение сходства, "одинаковости" элементов по какому-то признаку (см. глава 2). Будем считать элементы одного класса *неразличимыми*, равными.

Таким образом, $Y = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$, причем, если $a_p, a_q \in K_i$, то $a_p = a_q$. Элементы одного класса будем обозначать одним символом a_i: $a_i \in K_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$. Пусть $n(K_1) = k_1, n(K_2) = k_2, \dots, n(K_m) = k_m$.

Определение 3.7. ***Перестановками с повторениями*** называют последовательности, составленные из всех элементов множества Y, ($n(Y) = n$), разбитого на классы эквивалентности $K_1, K_2, \dots, K_m$, $n(K_1) = k_1, n(K_2) = k_2, \dots, n(K_m) = k_m$, причем элементы, принадлежащие одному классу равны друг другу.

$P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ – число всех перестановок, в которых элемент a_1 множества Y повторяется k_1 раз, a_2 – k_2 раз, и т. д., a_m – k_m раз, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Найдем число таких перестановок.

Возьмем какую-либо последовательность $P_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементов множества Y. Последовательность эта содержит k_1 элементов из класса K_1, k_2 – из класса K_2,…,k_m – из класса K_m. Переставляя между собой элементы класса K_1 в последовательности, будем получать неотличимые друг от друга последовательности, поскольку неразличимы переставляемые элементы. Всего таких одинаковых последовательностей можно составить $k_1!$, так как именно столько существует перестановок из k_1 элементов. Далее в каждой полученной последовательности выполним перестановки элементов из класса K_2. При этом каждая имеющаяся перестановка распадется на $k_2!$ перестановок. Всего получится $k_1! \cdot k_2!$ неотличимых друг от друга перестановок. Продолжая этот процесс, получим класс неотличимых друг от друга перестановок, содержащий $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$ одинаковых последовательностей. Назовем этот класс $K(P_1)$.

Теперь возьмем последовательность P_2, не вошедшую в класс $K(P_1)$, и вновь переставляя неразличимые элементы, получим класс $K(P_2)$ равных друг другу последовательностей и также содержащий $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$ перестановок.

Будем продолжать этот процесс, пока не исчерпаем всех перестановок, которые можно образовать из элементов множества Y. Поскольку $n(Y) = n$ элементы множества Y можно переставить $n!$ способами.

Итак, имеем $n!$ последовательностей разбитых на классы $K(P_1)$, $K(P_2)$,..., $K(P_k)$ равных друг другу последовательностей, причем в каждый класс входит $k_1!{\cdot}k_2!{\cdot}\ldots{\cdot}k_m!$ перестановок.

Различных перестановок столько, сколько образовано классов, т.е. $\dfrac{n!}{k_1!{\cdot}k_2!{\cdot}\ldots{\cdot}k_m!}$. Именно столько перестановок с повторениями и можно получить из элементов множества Y .

Учитывая равенство $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Получаем формулу (3.10).

$$P(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \tag{3.10}$$

Примеры.

1. Имеем множество $Y=\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$, разбитое на два класса $K_1=\{a_1,a_2\}$ и $K_2=\{b_1,b_2\}$, причем $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$. Составим из элементов множества Y все возможные перестановки.

Класс $K(P_1)$: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&a&b&b\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_1&a_2&b_1&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_2&a_1&b_1&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_1&a_2&b_2&b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_2&a_1&b_2&b_1\end{pmatrix}$$

Класс $K(P_2)$: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&a&b\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_1&b_1&a_2&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_2&b_1&a_1&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_1&b_2&a_2&b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a_2&b_2&a_1&b_1\end{pmatrix}$$

Класс $K(P_3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & b_1 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_2 & b_1 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & b_2 & b_1 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_2 & b_2 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Класс $K(P_4)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & a & b \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & a_1 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & a_2 & a_1 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & a_1 & a_2 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & a_2 & a_1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Класс $K(P_5)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & a_2 & b_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & a_1 & b_1 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Класс $K(P_6)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & b & a & a \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & b_2 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & b_1 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_2 & b_1 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Различные перестановки представлены шестью классами $K(P_1)$, $K(P_2)$, $K(P_3)$, $K(P_4)$, $K(P_5)$, $K(P_6)$ по 4 перестановки в каждом классе. Внутри классов перестановки неразличимы. Это согласуется с формулой $P(k_1,k_2) = \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!} = \frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!} = 6$.

Итак, из элементов множества $Y = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, где $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, можно составить 6 различных перестановок.

2. Сколько различных семизначных кодов можно составить из знаков " **|** " и "|", если первый знак повторяется 3 раза, а второй – 4 раза?

Каждый код представляет собой последовательность и 7 элементов, причем элементы повторяются. В каждой последовательности 3 элемента одного вида и четыре элемента другого вида. Следовательно каждый код есть перестановка с повторениями. Число таких перестановок $P(3,4) = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 35$.

Ответ: можно сделать 35 различных кодов, удовлетворяющих заданным условиям.

3.4. Сочетания

Как перестановки, так и размещения, были определены как последовательности элементов некого множества Y. Перестановки, составленные из элементов этого множества, отличаются друг от друга только порядком расположения элементов в последовательностях, размещения – как порядком элементов, так и самими элементами. ***Сочетания*** – это такие наборы элементов множества Y, которые отличаются друг от друга только самими элементами, порядок расположения элементов в них не учитывается.

Договоримся, в дальнейшем называть перестановки, размещения и сочетания общим словом "***расстановки***".

Сочетания, также, как и расстановки других видов, могут содержать одинаковые элементы или не содержать. В зависимости от этого различают сочетания с повторениями или без повторений.

Определение 3.7. ***Сочетаниями без повторений*** или ***выборками без возвращений из*** n ***по*** m называют подмножества множества Y, ($n(Y) = n$), причем каждое подмножество содержит m элементов.

Примечание. В теории вероятностей сочетания без повторений называют ***выборками без возвращений***. Термин "*выборка*" подразумевает, что при составлении подмножества один за другим извлекается m элементов множества Y, причем извлеченные элементы в множество не возвращаются и второй раз в подмножестве появиться не могут. В дальнейшем, имея этот термин в виду, будем пользоваться словом "сочетания", чаще употребляемый в комбинаторике.

Выведем формулу числа сочетаний без повторений.

Пусть имеем множество Y, $n(Y) = n$. Упорядочим каким-либо образом элементы множества Y, закрепив за каждым свое место. Например, образуем последовательность $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Y$. Будем составлять подмножества, содержащие m элементов.

Каждому из этих подмножеств соответствует n-мерный двоичный вектор значений характеристической функции этого подмножества. Очевидно, что если подмножество содержит m элементов, то такой вектор будет иметь m единиц и $m-n$ нулей. Например, если n=5 и m=3, то последовательность $(1,0,1,1,0)$ определяет подмножество $\{a_1, a_3, a_4\}$, последовательность $(1,0,1,0,1)$ – $\{a_1, a_3, a_5\}$ и т.п.

Таким образом, между сочетаниями из n по m и множеством n-мерных двоичных векторов, содержащих m единиц и $m-n$ нулей устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому сочетанию соответствует единственный вектор, и каждый вектор определяет единственное сочетание. Следовательно, сочетаний столько же, сколько векторов.

Но множество всех двоичных векторов, содержащих m единиц и $m-n$ нулей есть множество перестановок с повторениями, составленных из единиц и нулей, в которых единица повторяется m раз, а нуль – ($m-n$) раз. Число таких перестановок, в соответствии с формулой (3.10)

$$P(m,n-m)=C_n^m=\frac{(m+(n-m))!}{m!\cdot(n-m)!}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Итак, число C_n^m сочетаний из n по m определяется формулой (3.11):

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \qquad (3.11)$$

Определение 3.8. ***Сочетаниями с повторениями*** или ***выборками с возвращениями из*** n ***по*** m называют наборы элементов множества Y, ($n(Y)=n$), каждый из которых содержит m элементов, причем, наборы отличаются друг от друга составом элементов, но порядок расположения элементов не учитывается, элементы в наборах могут повторяться.

Примечание. В теории вероятностей сочетания с повторениями называют ***выборками с возвращениями***. При составлении подмножества один за другим извлекают m элементов множества Y, причем извлеченный элемент возвращается в множество Y и может быть извлечен повторно.

Число сочетаний с повторениями из n по m обозначают $\overline{C_n^m}$.

Пример.

Пусть $Y=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, ($n$=5). Рассмотрим сочетания с повторениями по четыре элемента, (m=4) и соответствующие им двоичные векторы. Поскольку порядок расположения элементов в сочетании не учитывается, то пусть первые координаты вектора соответствуют элементу a_1, следующие – a_2 и т.д. до a_5. Между наборами координат, соответствующих разным элементам, ставим разделительную черту.

$C_1=(a_1,a_1,a_1,a_1)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1111 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_1=(1111/0/0/0/0);$$

Заменим все разделительные знаки нулями, а сами нули писать не будем. Получим:

$$v_1=(1111/0/0/0/0)=(11110000).$$

Рис. 3.1 поясняет смысл, который имеют координаты вектора v_1.

Рассмотрим другие сочетания.

$C_2=(a_1,a_1,a_1,a_2)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 111 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 = (111/1/0/0/0) = (11101000);$$

$C_3 = (a_1, a_1, a_2, a_2)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 11 & 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_3 = (11/11/0/0/0) = (11011000);$$

$C_4 = (a_1, a_3, a_5, a_5)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix},\ v_4 = (1/0/1/0/11) = (10010011)$$ и т. п.

В каждом двоичном векторе содержится 4 единицы, по числу элементов в сочетании, и 4 нуля. Нули являются разделительными знаками. Они разделяют позиции, занимаемые каждым из пяти элементов множества Y. Разделительных знаков на единицу меньше, чем элементов множества Y. Любому сочетанию с повторениями из 5 по 4 соответствует один из таких двоичных векторов, составленных из 4 единиц и 5-1=4 нулей.

В свою очередь любой вектор из 4 единиц и 4 нулей однозначно определяет сочетание с повторением из 5 по 4. Расшифруем один из таких векторов.

$v_i = (01100110) = (/11//11/)$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 11 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C_i = (a_2, a_2, a_4, a_4).$$

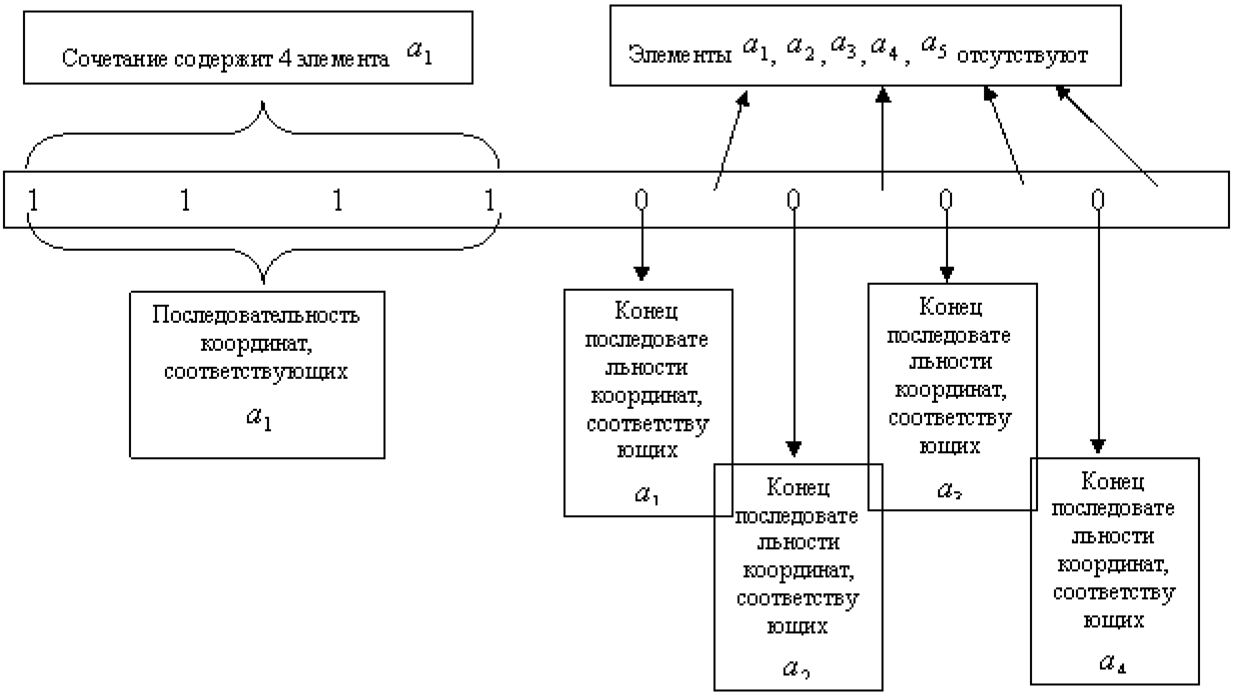


Рис. 3.1. Смысл координат двоичного вектора (11110000), соответствующего сочетанию $C_1 = (a_1, a_1, a_1, a_1)$

Обобщая результаты рассмотренного примера, можно сказать, что сочетаний с повторениями из n по m столько же, сколько двоичных векторов, составленных из m единиц и $n-1$ нулей. Но число таких векторов равно числу перестановок с повторениями $P(m, n-1)$ (см. формулу 3.10).

Следовательно, $\overline{C_n^m} = P(m, n-1) = \dfrac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$.

$$\overline{C_n^m} = \frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}. \qquad (3.12)$$

Пример.

Три вора за день украли 25 сотовых телефонов. Сколькими способами они могут разделить добычу между собой?

Имена воров – элементы множества Y, $n(Y) = 3$. Разделить 25 телефонов – означает записать на каждом телефоне имя вора, или по-другому, – составить сочетание с повторением из 3 элементов по 25 элементов.

$$\overline{C_3^{25}} = \frac{(25+3-1)!}{25!\cdot(3-1)!} = \frac{27!}{25!\cdot 2!} = \frac{25!\cdot 26\cdot 27}{25!\cdot 2} = 13\cdot 27 = 351.$$

Ответ: существует 351 способ разделить 25 телефонов между тремя ворами.

На рис. 3.2 приведена схема определения вида расстановок и выбора формулы, которую удобно использовать при решении задач.

В заключение приведем основные свойства чисел C_n^m.

Прежде всего, построим таблицу таких чисел, используя формулу (3.11).

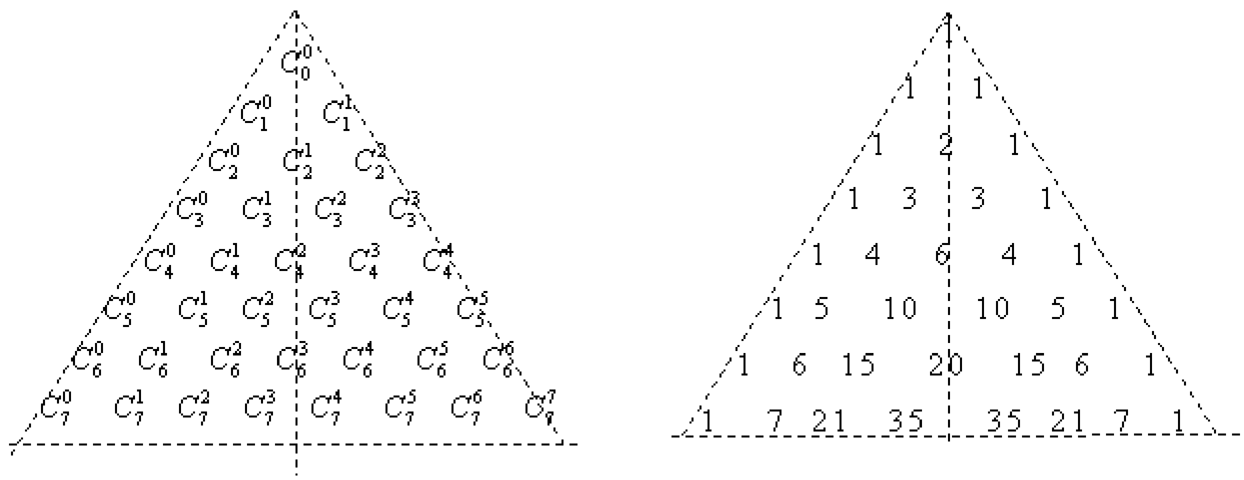


Таблица чисел C_n^m имеет треугольную форму и называется ***треугольником Паскаля*** по имени математика Блеза Паскаля (1623-1662). Анализируя треугольник Паскаля, легко видеть основные свойства чисел C_n^m.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (в силу симметричности треугольника Паскаля);

4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ $(m \geq n-1)$;

5. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Свойства 1 – 2 вытекают из определения сочетания как подмножества, содержащего m элементов множества, имеющего n элементов.

Свойства 3 – 5 доказываются методом математической индукции.

В силу свойства 4 треугольник Паскаля легко продолжить вниз на любое число шагов.

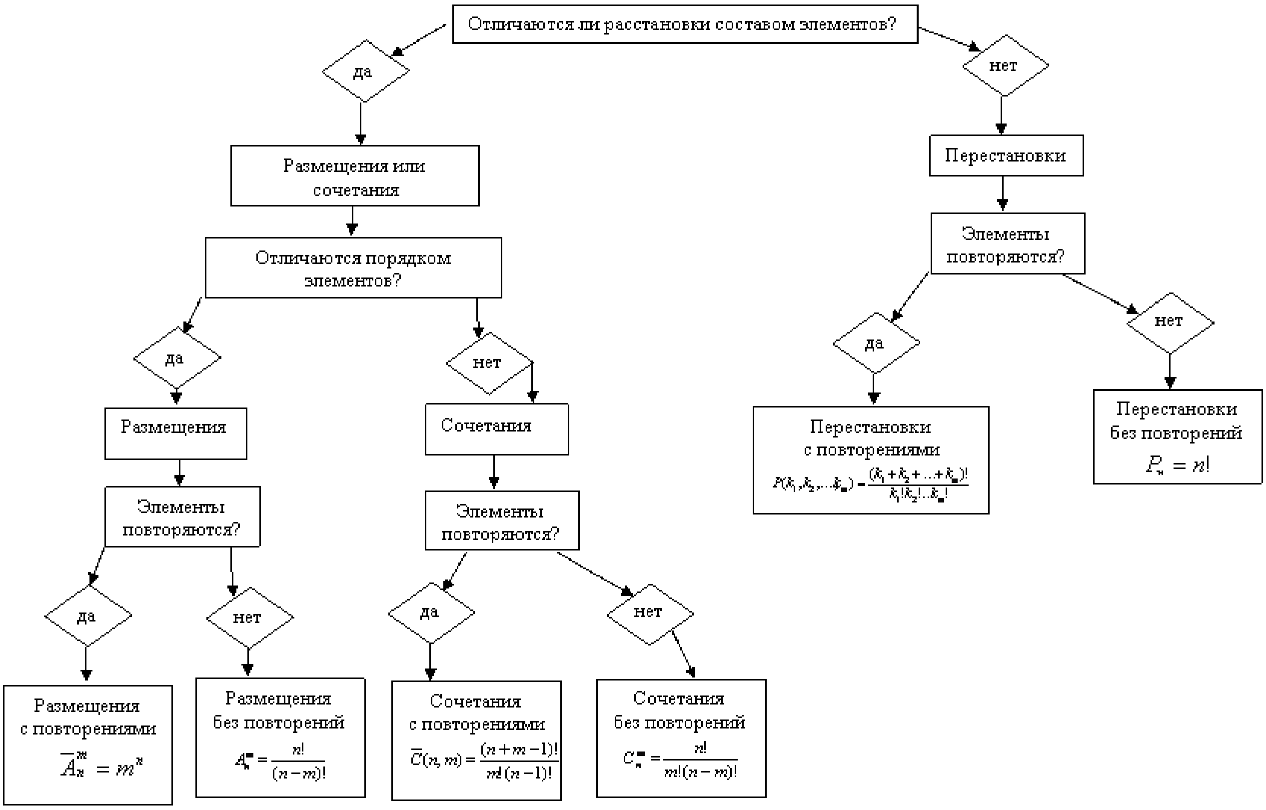


Рис.3.2. Схема определения вида расстановок и выбора формулы

4. Булева алгебра и булевы функции

4.1. Операции и алгебры

Под словом "алгебра", как правило, понимают раздел математики, изучающий свойства разнообразных операций на различных множествах, например, алгебра чисел, алгебра векторов, алгебра матриц и т.п. Однако это слово используется и для обозначения конкретных объектов – алгебраических структур, изучаемых в данном разделе.

Пусть P –какое-либо непустое множество, $P^n = P \times P \times \ldots \times P$ - декартово произведение множества P на себя, выполненное n раз.

Определение 4.1. Функциональное соответствие $P^n \xrightarrow{f} P$ называют n***-арной (***n***-местной) алгебраической операцией*** на P.

В разделе 1 были даны определения унарной (одноместной) и бинарной (двуместной) операциям. Например, двуместными операциями на булеане P$(U) = 2^U$ являются операции пересечения и объединения множеств, унарной операцией – операция дополнения.

Наряду с унарными и бинарными операциями рассматривают также нульарные операции. Например, выделение "наименьшего" – пустого, и "наибольшего" – универсального, множеств в булеане есть нульарные операции. Операции арность которых больше, чем 2, – это трехместные, четырехместные и т.д. операции, сопоставляющие последовательностям трех-, четырех- и т.д. элементов множества P определенный элемент этого же множества.

Определение 4.2. Непустое множество P с заданной последовательностью операций и указанием арностей этих операций называют ***алгебраической структурой*** или ***алгеброй***. При этом множество P называют ***носителем алгебры***, последовательность операций на нем $\Sigma = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ – сигнатурой алгебры, последовательность числа мест каждой операции $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ – ***типом алгебры***.

Например, алгебра $\{2^U, \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U\}$ типа $N = \{2,2,1,0,0\}$ – это алгебра, носителем которой является булеан 2^U множества U, сигнатура $\Sigma = \{\cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U\}$ состоит из пяти операций, из которых операции пересечения и объединения $\{\cap, \cup\}$ являются бинарными, операция дополнения $\{\bar{\ }\}$ – унарной, а пустое и универсальное множество $\{\varnothing, U\}$ представляют нульарные операции.

Различные алгебры могут отличаться друг от друга носителем, сигнатурой или типом. Кроме того, они могут отличаться системой аксиом алгебры, в которой записаны свойства операций сигнатуры. Основные свойства операций – это ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, поглощение, идемпотентность и т.д. (см. табл. 1.7). Некоторые из свойств операций записываются в систему аксиом алгебры, другие представляют собой следствия из аксиом, т.е. являются теоремами и требуют доказательства.

4.2. Гомоморфизмы

Пусть А=$\{A, f_{A1}, f_{A2}, \dots, f_{Am}\}$ и В=$\{B, f_{B1}, f_{B2}, \dots, f_{Bm}\}$ – две алгебры одного типа. На множестве $A \times B$ имеется функциональное соответствие $f : A \xrightarrow{f} B$, *сохраняющее операции*. Требование сохранения операций можно пояснить следующей схемой (рис. 4.1).

$$\begin{tikzcd}
x_i \arrow[r, "f_{Ak}"] \arrow[d, "f"'] & a_j \arrow[d, "f"] \\
y_i \arrow[r, "f_{Bk}"] & b_j
\end{tikzcd}$$

Рис. 4.1. Схема установления морфизма между алгебрами $\{A, f_{A1}, f_{A2}, \dots, f_{Am}\}$ **и** $\{B, f_{B1}, f_{B2}, \dots, f_{Bm}\}$

Схема показывает, что в алгебре А результатом операции f_{Ak} над x_i является элемент $a_j \in A$, в алгебре В результатом операции f_{Bk} над y_i является элемент $b_j \in B$. Образом элемента x_i в функциональном соответствии $f : A \xrightarrow{f} B$ является элемент y_i, а образом элемента a_j - элемент b_j. Записать это можно следующим образом:

$$f(f_{Ak}(x_i)) = f_{Bk}(y_i), \tag{4.1}$$

где $y_i = f(x_i)$ или более кратко:

$$f \circ f_{Ak} = f_{Bk} \circ f, \tag{4.2}$$

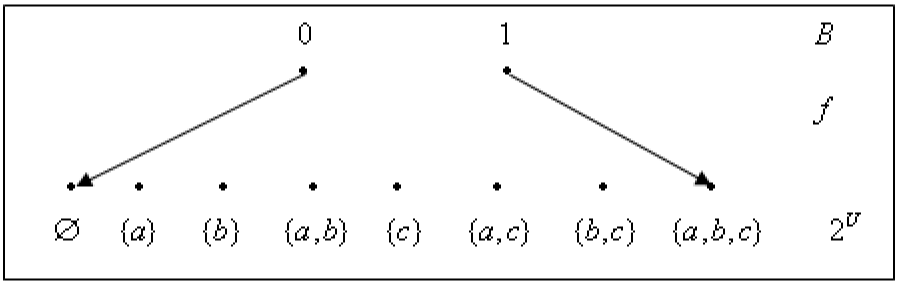
где "∘" означает композицию соответствий.

Определение 4.3. Функциональное соответствие $f : A \xrightarrow{f} B$, где A и B носители алгебр А=$\{A, f_{A1}, f_{A2}, \dots, f_{Am}\}$ и В=$\{B, f_{B1}, f_{B2}, \dots, f_{Bm}\}$ одного типа с сигнатурами Σ_A и Σ_B, называют ***гомоморфизмом из*** A ***в*** B, если выполняется равенство $f \circ f_{Ak} = f_{Bk} \circ f \quad (f_{Ak} \in \Sigma_A, f_{Bk} \in \Sigma_B)$.

Пример.

Пусть $U_3 = \{a, b, c\}$ ($n(U_3) = 3$) – универсальное множество и $B = \{0,1\}$.

Булеан $2^U = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\} \{a,b,c\}\}$, является носителем алгебры А=$\{2^U, \cap, \cup, \bar{}, \varnothing, U_3\}$, множество $B = \{0,1\}$ – носителем алгебры В=$\{B, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1\}$, где $\wedge, \vee, \bar{}$ операции логического умножения, логического сложения и дополнения соответственно.



1) На множестве $B \times 2^U$ зададим функциональное соответствие с помощью графа (см. рисунок).

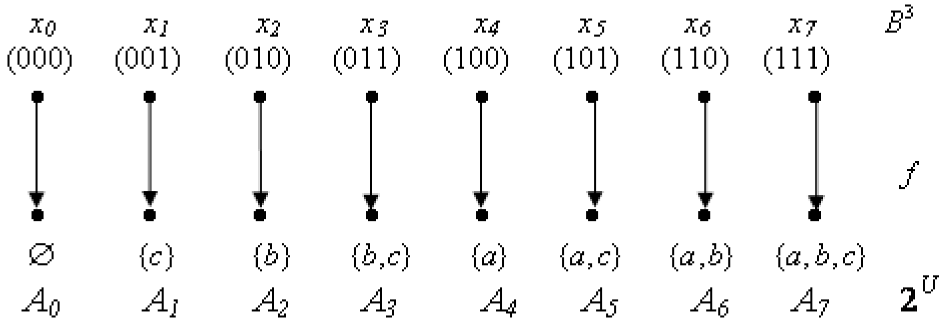
Проверим, что такое соответствие является гомоморфизмом из B в A. Для проверки составим таблицы операций обеих алгебр.

$b_1 \xrightarrow{f} A_1$, $b_2 \xrightarrow{f} A_2$											
В=$\{B, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1\}$						А=$\{A, \cap, \cup, \bar{}, \varnothing, U_3\}$					
b_1	b_2	$b_1 \wedge b_2$	$b_1 \vee b_2$	$\overline{b_1}$	$\overline{b_2}$	A_1	A_2	$A_1 \cap A_2$	$A_1 \cup A_2$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$
0	0	0	0	1	1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	U_3	U_3
0	1	0	1	1	0	$\varnothing$	U_3	$\varnothing$	U_3	U_3	$\varnothing$
1	0	0	1	0	1	U_3	$\varnothing$	$\varnothing$	U_3	$\varnothing$	U_3
1	1	1	1	0	0	U_3	U_3	U_3	U_3	$\varnothing$	$\varnothing$

Как видно из таблицы, если $A_1, A_2 \in 2^U$ являются образами элементов $b_1, b_2 \in B$ соответственно, то $A_1 \cap A_2$ есть образ элемента $b_1 \wedge b_2$, $A_1 \cup A_2$ – образ элемента $b_1 \vee b_2$, $\overline{A_1}$ – образ элемента $\overline{b_1}$ и $\overline{A_2}$ – образ элемента $\overline{b_2}$.

Функциональное соответствие f в данном случае является инъективным, поскольку каждый элемент множества 2^U имеет не более одного прообраза во множестве B . Такой гомоморфизм называют ***мономорфизмом***.

2) Рассмотрим гомоморфизм из множества $B^3 = \{(000),(001),(010),(011),(100),(101),(110),(111)\}$ во множество 2^U . B^3 является носителем алгебры B=$\{B^3, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\}$, где $0 = (000)$, $1 = (111)$,
$x_i \wedge x_j = (\min(x_{1i}, x_{1j}), \min(x_{2i}, x_{2j}), \min(x_{3i}, x_{3j}))$, $x_i \vee x_j = (\max(x_{1i}, x_{1j}), \max(x_{1i}, x_{1j}), \max(x_{1i}, x_{1j}))$,
$\overline{x_i} = (1 - x_{1i}, 1 - x_{2i}, 1 - x_{3i})$, $x_{ki}, x_{kj} \in B^3$, $i, j, k = 1,2,3$.



Функциональное соответствие f на $B^3 \times 2^U$ задано графом (см. рисунок).

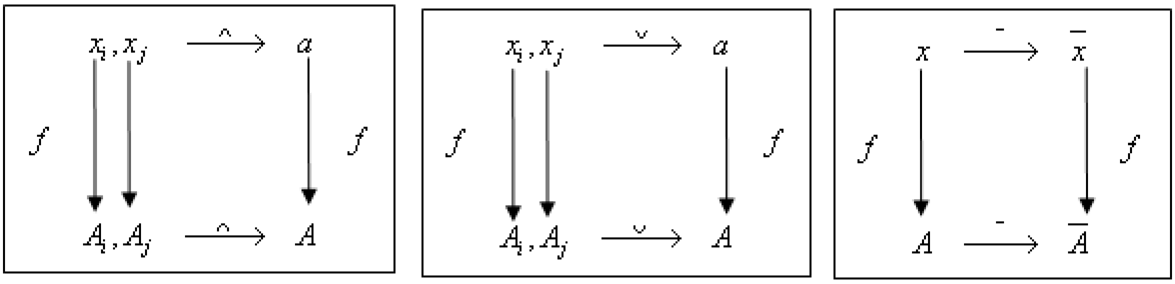
В данном случае f является взаимно однозначным, поскольку каждый элемент множества 2^U имеет единственный прообраз во множестве B^3.

Легко видеть, что если $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) \xleftrightarrow{f} A_i$ и $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) \xleftrightarrow{f} A_j$, то

$$x_i \wedge x_j = (\min(x_{1i}, x_{1j}), \min(x_{2i}, x_{2j}), \min(x_{3i}, x_{3j})) \xleftrightarrow{f} A_i \cap A_j;$$

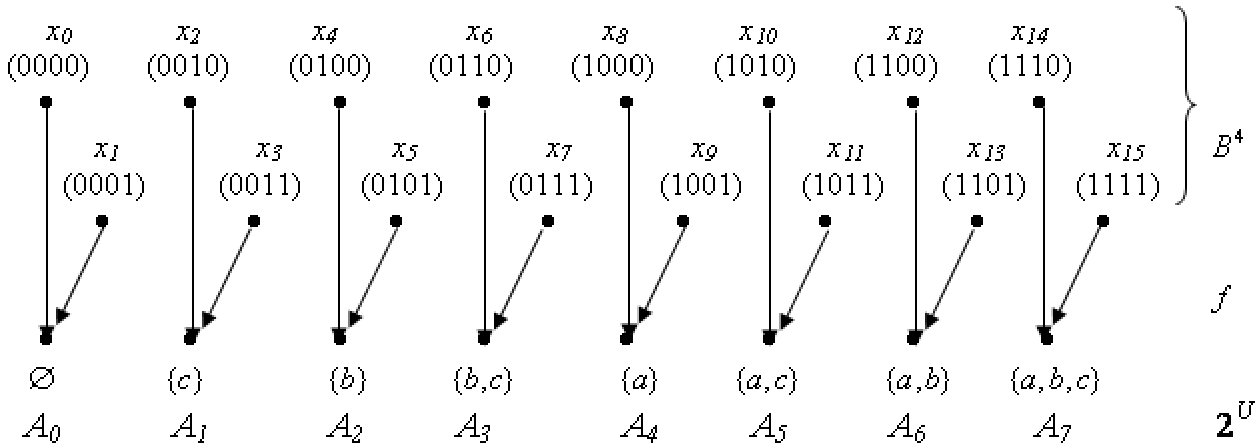
$$x_i \vee x_j = (\max(x_{1i}, x_{1j}), \max(x_{2i}, x_{2j}), \max(x_{3i}, x_{3j})) \xleftrightarrow{f} A_i \cup A_j;$$

$$\overline{x_i} = (1 - x_{1i}, 1 - x_{2i}, 1 - x_{3i}) \xleftrightarrow{f} \overline{A_i}.$$



Схематически соотношения между алгебрами $\{B^3, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\}$ и $\{2^U, \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U_3\}$ представлены рисунком.

Гомоморфизм, в котором f является взаимно однозначным соответствием, называют ***изоморфизмом***.



3) Рассмотрим гомоморфизм из множества B^4 во множество 2^U. B^4 – это множество четырехмерных двоичных векторов. Оно содержит 2^4=16 элементов, поэтому между множествами B^4 и 2^U возможно установить сюръектиное функциональное соответствие, в котором каждый элемент 2^U имеет не менее одного прообраза. Пример одного из возможных сюръективных соответствий на $B^4 \times 2^U$ задан графом.

Можно проверить, что сюръективное соответствие f на графе – гомоморфизм, поскольку результат любой операции из алгебры $\{B^4, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\}$ является прообразом результата соответствующей операции в $\{2^U, \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U_3\}$.

Гомоморфизм, в котором f является сюръективным функциональным соответствием, называют ***эпиоморфизмом***.

В примере рассмотрены различные гомоморфизмы алгебр $\{B^n, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\}$ и $\{2^U, \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, U\}$. Во многих разделах алгебры понятии изоморфизма является одним из центральных понятий. Дадим определение изоморфизма в общем виде.

Определение 4.4. Гомоморфизм $f : A \xrightarrow{f} B$, где A и B – носители алгебр А=$\{A, f_{A1}, f_{A2}, \dots, f_{Am}\}$ и В=$\{B, f_{B1}, f_{B2}, \dots, f_{Bm}\}$ одного типа с сигнатурами Σ_A и Σ_B, называют ***изоморфизмом***, если f – взаимно однозначное соответствие между носителями A и B.

Изоморфизм алгебр отмечается символом А ~В.

Поскольку соответствие f^{-1}, обратное соответствию f также является изоморфизмом, то, из А ~В, следует В ~ А, т.е. отношение изоморфизма является симметричным отношением на множестве алгебр. Кроме того, оно является рефлексивным и транзитивным, что следует из свойств взаимно однозначных соответствий, а, следовательно, изоморфизм является отношением эквивалентности и разбивает все множество алгебр на классы изоморфных друг другу алгебр. Изучая свойства какой-либо алгебры из класса изоморфных алгебр, можно переносить эти свойства на все алгебры данного класса эквивалентности.

4.3. Булевы алгебры

Понятие булевой алгебры имеет большое число приложений в программировании и вычислительной технике.

Определение 4.5. Пусть P –какое-либо непустое множество, на котором задано отношение частичного порядка "$\leq$" и через это отношение определены две бинарные операции: $a \wedge b = \min(a, b)$ и $a \vee b = \max(a, b)$, $(a, b \in P)$. Если операции $\wedge$ и $\vee$ обладают свойствами:

(1) $a \wedge a = a$,

(2) $a \wedge b = b \wedge a$,

(3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

(4) $a \wedge (a \vee b) = a$,

(1') $a \vee a = a$,

(2') $a \vee b = b \vee a$,

(3') $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,

(4') $a \vee (a \wedge b) = a$,

то алгебру $\{P, \wedge, \vee\}$ типа $\{2,2\}$ называют ***решеткой***.

Примером решетки является {Р(*U*), $\cap, \cup$ }, где Р(*U*) – булеан любого непустого множества с операциями пересечения $\cap$, объединения $\cup$ и отношением включения $\subseteq$.

В любой решетке действует ***принцип двойственности***, который можно сформулировать так.

Пусть Ф – некоторое утверждение о произвольной решетке $\{P,\wedge,\vee\}$. Если в этом утверждении заменить всюду $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$ и $\leq$ – на $\geq$, то полученное утверждение называют ***двойственным*** утверждению Ф, причем, если Ф – истинное утверждение, то двойственное утверждение также будет истинным.

Например, из истинности утверждения $A \subseteq A \cup B$ для любых множеств A и B, следует истинность двойственного утверждения $A \supseteq A \cap B$.

Если решеточные операции обладают свойствами дистрибутивности (см. табл. 4.1), то решетку называют дистрибутивной решеткой.

Таблица 4.1

Свойства операций булевой алгебры

№п.п	Название свойства	Свойства логического умножения	Свойства логического сложения
1	Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
2	Ассоциативность	$(x \wedge y) \wedge z = y \wedge (x \wedge z)$	$(x \vee y) \vee z = y \vee (x \vee z)$
3	Дистрибутивность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (дистрибутивность логического умножения относительно логического сложения)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (дистрибутивность логического сложения относительно логического умножения)
4	Свойство нуля	$x \wedge 0 = 0$	$x \vee 0 = x$
5	Свойство единицы	$x \wedge 1 = x$	$x \vee 1 = 1$
6	Идемпотентность	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
7	Свойство поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
8	Законы де Моргана	$(x \wedge y)' = x' \vee y'$	$(x \vee y)' = x' \wedge y'$
9	Свойство порядка	$x \wedge y \leq x \quad u \quad x \wedge y \leq y$	$x \vee y \geq x \quad u \quad x \vee y \geq y$

Пусть дистрибутивная решетка $\{P,\wedge,\vee\}$ содержит наименьший элемент (обозначим его – 0) и наибольший элемент (обозначим его – 1). Это означает, что для любого элемента $a \in P$ выполняются неравенства: $0 \leq a \leq 1$. Элемент $b \in P$ называют ***дополнением*** элемента $a \in P$, если $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Дополнение a обозначают a'.

Алгебра $\{P,\wedge,\vee,0,1,'\}$ типа $\{2,2,0,0,1\}$ является ***булевой алгеброй***. Так называют алгебру, операции которой обладают свойствами, указанными выше. (Джордж Буль – английский математик и логик, 1815–1864).

Примером булевой алгебры является алгебра {P(*U*), $\cap, \cup, \bar{}, \varnothing, U$ }, подробно рассмотренная в главе 1. Если $n(U) = n$, то алгебра {P(*U*), $\cap, \cup, \varnothing, U, \bar{}$ }, как было показано выше, изоморфна алгебре $\{B^n, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1\}$. Следовательно, $\{B^n, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1\}$ также является булевой алгеброй. Операции этой булевой алгебры имеют названия

конъюнкция:

$$x \wedge y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots, y_n) = (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2), \dots, \min(x_n, y_n));$$

дизъюнкция:

$$x \vee y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \vee (y_1, y_2, \dots, y_n) = (\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2), \dots, \max(x_n, y_n));$$

отрицание:

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)' = ((1 - x_1), (1 - x_2), \dots, (1 - x_n)),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x, y \in B^n$.

Справедливы утверждения.

Утверждение 1. Две булевы алгебры изоморфны (по отношению к операциям этих алгебр) в том и только том случае, если они имеют одно и то же число элементов.

Утверждение 2. Всякая булева алгебра изоморфна алгебре {P(*U*), $\cap, \cup, \varnothing, U, \bar{}$ }.

Принцип двойственности в булевой алгебре имеет следующий вид.

Пусть Ф – некоторое утверждение о произвольной булевой алгебре $\{P, \wedge, \vee, 0, 1, '\}$. Если в этом утверждении заменить всюду $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$, $\le$ – на $\ge$ и знаки переменных на знаки их отрицаний, убрав при этом имевшиеся знаки отрицаний, то полученное утверждение называют ***двойственным*** утверждению Ф, причем, если Ф – истинное утверждение, то двойственное утверждение

также будет истинным.

Например, из истинности утверждения $A \subseteq A \cup B$ для любых множеств A и B, следует истинность двойственного утверждения $\bar{A} \supseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

4.4. Булевы функции

Рассмотрим булеву алгебру $\{B^n, \wedge, \vee, 0, 1, \bar{}\}$, где множество B^n есть множество n-мерных двоичных векторов.

Определение 4.6. ***Булевой функцией* f(x_1, x_2, …, x_n)** от *n* аргументов называют функциональное соответствие на множестве $B^n \times B$.

Другими словами, булева функция от n аргументов – это функция, которая на каждом n-мерном двоичном векторе (x_1, x_2, …, x_n) принимает определенное значение: либо 0, либо 1.

Задать булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – значит указать ее значения на каждом двоичном векторе (x_1, x_2, …, x_n). Поскольку число таких векторов равно 2^n, любую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно задать с помощью таблицы, содержащей 2^n строк и (n+1) столбцов. В первых n столбцах записывают все наборы значений аргументов, в (n+1) – соответствующие значения функции. Строки, для которых f принимает значение 1, называют ***единичными наборами***, остальные строки таблицы – ***нулевыми наборами***.

Ниже приведена таблица всех булевых функций от 2 аргументов.

Таблица 4.2.

Булевы функции двух аргументов

x_1	x_2	0	$x_1 \downarrow x_2$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge \bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vert x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	x_1	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$x_1 \vee x_2$	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Перечислим названия функций, которые используются в дальнейшем. Кроме операций дизъюнкции $x_1 \vee x_2$, конъюнкции $x_1 \wedge x_2$ и отрицания $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, таблица 4.2 содержит следующие функции:

1) $x_1 \downarrow x_2$ – стрелка Пирса;

2) $x_1 \oplus x_2$ – сложение по модулю 2 или кольцевая сумма;

3) $x_1 | x_2$ – штрих Шеффера;

4) $x_1 \leftrightarrow x_2$ – эквиваленция;

5) $x_1 \rightarrow x_2$ – импликация.

Обратим внимание на порядок расположения наборов значений независимых переменных x_1 и x_2 в таблице: они образуют последовательности целых чисел, начиная с 0, записанных в двоичной системе счисления. Такой порядок записи называют ***лексикографическим порядком***.

В лексикографическом порядке записаны и значения функций. Поскольку значения каждой функции представляют собой четырехмерный двоичный вектор, а число таких векторов $2^4 = 16$, то и различных булевых функций от двух аргументов тоже 16.

Помимо табличного задания булеву функцию можно записать в виде выражения, содержащего обозначения аргументов и знаки указанных в табл. 4.2 операций. Такую запись называют ***формулой булевой функции***.

Обратим внимание на то, что табл. 4.2 содержит две функции константы: $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 1$. Изменения аргументов x_1, x_2 не влияют на значения этих функций. В таких случаях говорят, что x_1, x_2 – ***фиктивные аргументы функций*** $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$. Функции $f_3(x_1, x_2) = \overline{x_1}$ и $f_4(x_1, x_2) = x_1$ содержат одну фиктивную переменную – x_2, функции $f_5(x_1, x_2) = \overline{x_2}$ и $f_6(x_1, x_2) = x_2$ – фиктивную переменную x_1.

Пример 1.

Запишем таблицу булевой функции, заданной формулой: $y = \overline{(\overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee (x_1 \wedge x_3))} \wedge \overline{x_2}$.

Чтобы сократить число скобок и облегчить записи, договоримся о порядке выполнения операций:

1) конъюнкция выполняется раньше дизъюнкции, знак "$\wedge$" можно опускать.

2) Если над скобкой стоит знак отрицания, то скобки тоже можно опускать.

С учетом этих правил формулу $y = \overline{(\overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee (x_1 \wedge x_3))} \wedge \overline{x_2}$ перепишем так: $y = \overline{(\overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_3)}\overline{x_2}$.

x_1	x_2	x_3	x_1x_3	x_1x_2	$\overline{x_1x_2}$	$\overline{x_1x_2} \vee x_1x_3$	$\bar{x}_2$	$\overline{\overline{x_1x_2} \vee x_1x_3}$	$\overline{(\overline{x_1x_2} \vee x_1x_3)}\overline{x_2}$
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

Все три аргумента функции $y = \overline{(\overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_3)}\overline{x_2}$ фиктивны, данная функция есть константа 0, ее значения не зависят от значений переменных x_1, x_2 и x_3.

Пример 2.

Пусть $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_3, x_4)$ – две булевы функции. Объединим множества аргументов этих функций: $\{x_1, x_2\} \cup \{x_1, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = B^4$.

Составим всевозможные наборы значений элементов множества B^4 (в данном случае их будет $2^4 = 16$). Запишем все эти наборы в четыре первых столбца таблицы, а в следующие два столбца – значения функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_3, x_4)$, соответствующие "своим" аргументам. Если все значения функций f_1 и f_2, записанные в таблице, будут одинаковыми, то $f_1 = f_2$; в противном случае $f_1 \neq f_2$. Именно этот случай и представлен в таблице.

Функция f_1 имеет два фиктивных аргумента x_3, x_4, функция f_2 – один фиктивный аргумент x_2.

Определение 4.7. Функции $f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ и $g(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk})$ называют ***равными булевыми функциями*** $f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) = g(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm})$, если значения функций совпадают на любом векторе $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$, где $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\} \cup \{x_{j1}, x_{j2}, \dots x_{jk}\}$.

Пример 3.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	f	g
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0
						$f = g$	

Доказать, что функции $f(x_1 x_3) = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3$ и

$g(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$ равны друг другу.

Объединим аргументы функций *f* и *g*: $\{x_1, x_3\} \cup \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $(x_1, x_2, x_3) \in B^3$.

Составим на множестве B^3 таблицу функций *f* и *g*, из которой и вытекает равенство $f = g$, поскольку все единичные и все нулевые наборы этих функций совпадают.

Как показывают приведенные примеры, некоторые аргументы булевой функции могут оказаться фиктивными: их значения не влияют на значения функции.

Пусть n – число аргументов булевой функции f, которые фиктивными не являются. Назовем такую функцию n-местной. Имеется 2 нульместные булевы функции – 0 и 1. Обозначим множество всех нульместных функций – $F_2(0)$. Множество всех одноместных булевых функций обозначим $F_2(1)$. Их число равно 4. Очевидно, что $F_2(0) \subset F_2(1)$. Двуместных булевых функций – $2^{2^2} = 16$ (см. табл. 4.1). Если обозначить множество двуместных функций через $F_2(2)$, то $F_2(0) \subset F_2(1) \subset F_2(2)$, так как среди двуместных функций находятся все нульместные и все одноместные. Продолжая это построение, приходим к выводу, что от *n* переменных будет 2^{2^n} функций, причем среди них окажутся все нуль-, одно- и двуместные функции.

Обозначив через F_2 все множество булевых функций, получаем равенство и включение (4.1).

$$F_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_2 \quad (n), \qquad (4.1)$$

$$F_2(0) \subset F_2(1) \subset F_2(2) \subset \ldots$$

Примечание. Индекс 2 в обозначении множеств булевых функций соответствует числу возможных значений этих функций – 0 или 1.

Любую булеву функцию $f \in F_2(n)$ можно представить таблицей. Однако при большом числе аргументов таблица получается слишком большой. Например, таблица функции от 10 переменных будет содержать 2^{10}=1024 строки. Возникает вопрос о представлении функций в виде формул, т.е. о сигнатуре алгебры, носителем которой является множество F_2.

Как показано в учебниках по дискретной математике, таких алгебр очень много. На практике чаще всего используются две алгебры – булева алгебра A_1=$\{F_2, \wedge, \vee, 0, 1^{-}\}$ типа $(2,2,0,0,1)$ и алгебра Жегалкина A_2=$\{F_2, \oplus, \wedge, 1\}$ типа $(2,2,0)$. (И.И. Жегалкин – русский математик, 1869 – 1947).

Прежде, чем приступать к изучению этих алгебр, необходимо ввести понятие ***суперпозиции булевых функций***. Напомним, что *суперпозицией двух функций* (не обязательно булевых) $f(x)$ и $u(x)$ называют функцию, полученную заменой аргумента одной функции другой функцией, например, $f(u(x))$, при естественных изменениях области определения аргумента *x* и множества значений $u(x)$. Функцию f при этом называют *внешней*, а u – *внутренней* функцией.

Пример

$f(x)=\arcsin x$; $D_1(x)=[-1,1]$,

$u(x)=5-x^2$; $D_2(x)=(-\infty,\infty)$,

$f(u(x))=\arcsin(5-x^2)$,

$$-1 \le 5 - x^2 \le 1 \Rightarrow D_3(x) = [-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6}],$$
$$D(x) = D_2(x) \cap D_3(x) = D_3(x).$$

$\arcsin(5-x^2)$ есть суперпозиция функций $f(x)$ и $u(x)$ с областью определения $D(x)=D_3(x)$.

Пусть $f(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_{m1})$, $\varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_{m2})$, $\varphi_n(x_1,x_2,\dots,x_{mn})$ – булевы функции, записанные формулами. Подставив в формулу f вместо $u_1,u_2,\dots,u_n$ формулы φ_1, φ_2, …, φ_n, получим суперпозицию булевых функций f, φ_1, φ_2,…, φ_n:

$f(\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_{m1}), \varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_{m2}), \dots, \varphi_n(x_1,x_2,\dots,x_{mn}))$,

где f – внешняя функция, $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ – внутренние функции.

Если внешняя функция $f \in F_2$ представлена формулой и все внутренние формулы представлены формулами, то суперпозиция есть подстановка в формулу f формул внутренних функций.

Пример 1.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) \in F_2(4)$ $\varphi_1(x) = x_2, \varphi_2(x) = x_3, \varphi_3(x) = x_5, \varphi_4(x) = x_7$, $\varphi_i(x) \in F_2(1), i = 1,2,3,4$.

Выполним подстановки формул $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ в формулу f.

$f(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\varphi_4(x)) = f(x_1,x_3,x_5,x_7)$.

В данном случае однократная суперпозиция функций f, $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ привела к переименованию переменных.

Пример 2.

$f(p,q) = p \vee q$, $\varphi_i(x) = x_i, i = 1,2,\dots n$.

Число подстановок	Результат подстановок
2	$f(\varphi_1(x),\varphi_2(x)) = x_1 \vee x_2$;
3	$f(f(\varphi_1(x),\varphi_2(x)),\varphi_3(x)) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$;
4	$f(f(f(\varphi_1(x),\varphi_2(x)),\varphi_3(x)),\varphi_4(x)) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$;
…………	………………………………………………………………………
n	$f(f(f(\dots,f(\varphi_{n-2}(x),\varphi_{n-1}(x))),\varphi_n(x)) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$.

Выполнение одной и той же бинарной операции *n* раз над переменными $x_1,x_2,\dots,x_n$ – это последовательная подстановка одной и той же формулы нужное число раз с предварительным переименованием переменных.

Пример 3.

Представим формулу $\bar{x}_1 x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \in F_2(3)$ как последовательную суперпозицию формул.

$f(u_1,u_2) = u_1 \vee u_2 \in F_2(2)$, $\varphi_1(p,q) = pq \in F_2(2)$, $\varphi_2(v) = \bar{v} \in F_2(1)$, $\varphi_3(x) = x_1 \in F_2(1)$, $\varphi_4(x) = x_2 \in F_2(1)$, $\varphi_5(x) = x_3 \in F_2(1)$.

1) Переименуем переменную в формуле $\varphi_2(v)$:

$\bar{x}_1 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(\varphi_3(x))$; $\bar{x}_3 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(\varphi_5(x))$.

2) Получим конъюнкции $\bar{x}_1 x_2$ и $x_2\bar{x}_3$:

$\bar{x}_1 x_2 = \varphi_1(\bar{x}_1, x_2) = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x), \varphi_4(x))$, $x_2\bar{x}_3 = \varphi_1(x_2, \bar{x}_3) = \varphi_1(\varphi_4(x), \varphi_2(\varphi_5(x))$.

3) Получим дизъюнкцию этих конъюнкций:

$\bar{x}_1 x_2 \vee x_2\bar{x}_3 = f(\bar{x}_1 x_2, x_2\bar{x}_3) = f(\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x), \varphi_4(x)), \varphi_1(\varphi_4(x), \varphi_2(\varphi_5(x)))$.

$\varphi_1(\varphi_3(x_1), x_2) = \bar{x}_1 x_2$.

$\varphi_1(x_2, \varphi_3(x_3)) = x_1\bar{x}_3$.

$f\,(\varphi_1(\varphi_3(x_1), x_2)\,, \varphi_2(x_2, \varphi_3(x_3)) = \varphi_1(\varphi_3(x_1), x_2) \vee \varphi_2(x_2, \varphi_3(x_3)) = \varphi_3(x_2) \wedge x_2 \vee x_2 \wedge \varphi_3(x_3)$ $= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2$.

Из примеров 1–3 делаем вывод: любую булеву функцию $f \in F_2$ можно представить как результат однократной или многократной суперпозиции функций из F_2.

4.5. СДНФ булевой функции и ее упрощение

Пусть А$_1$=$\{F_2, \wedge, \vee, 0, 1, ^{-}\}$ – булева алгебра, носителем которой служит множество всех булевых функций F_2.

Выпишем таблицы операций сигнатуры этой алгебры.

Таблица 4.3

Таблица отрицания

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Таблица 4.4

Таблица конъюнкции

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 4.5

Таблица дизъюнкции

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Основные свойства этих операций в любой булевой алгебре записаны в таблице 4.1. Отметим их дополнительные свойства.

1. $x \wedge 1 = x$,

2. $x \wedge 0 = 0$,

3. $x \wedge \overline{x} = 0$ – закон противоречия,

1' $x \vee 1 = 1$,

2' $x \vee 0 = x$,

3' $x \vee \overline{x} = 1$ – закон исключения третьего.

4. $\overline{\overline{x}} = x$ – закон снятия двойного отрицания.

Пусть имеем булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_2(n)$.

Определение 4.8. ***Элементарной конъюнкцией*** называют конъюнкцию, содержащую переменные или их отрицания.

Примеры элементарных конъюнкций: $x_1 x_2$, $x_1 x_2 \overline{x_3}$, $\overline{x_2}\,\overline{x_4}\,\overline{x_6}\,\overline{x_8}$ и т.п.

Определение 4.9. ***Элементарной дизъюнкцией*** называют дизъюнкцию, содержащую переменные или их отрицания.

Примеры элементарных дизъюнкций: $x_1 \vee x_2$, $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$, $\overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_8}$ и т.п.

Определение 4.10. Формулу булевой функции, в которой элементарные конъюнкции соединены знаками дизъюнкции, называют ***дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ) этой функции. Формулу, в которой элементарные дизъюнкции соединены знаками конъюнкции, называют ***конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ) функции.

Пример.

x_1	x_2	x_3	y	Элементарные конъюнкции		
0	0	0	1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$		

0	0	1	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
1	0	1	1	$x_1\bar{x}_2x_3$
1	1	0	1	$x_1x_2\bar{x}_3$
1	1	1	0	

Булева функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей.

Для каждой строки единичного набора запишем элементарные конъюнкции, включающие все три аргумента булевой функции, по следующему правилу: если x_i в данной строке представлена единицей, то в элементарную конъюнкцию включаем x_i, если нулем, то – $\bar{x}_i$.

Соединив все элементарные конъюнкции знаками дизъюнкции, получим дизъюнктивную нормальную форму:

ДНФ=$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$.

На любой строке единичного набора одна из элементарных конъюнкций равна 1, а следовательно, и вся ДНФ имеет значение 1. На любой строке нулевого набора ни одна из элементарных конъюнкций единице не равна, поэтому ДНФ имеет значение 0.

Таким образом, на всех наборах значений аргументов значения ДНФ и функции $f(x_1, x_2, x_3)$ совпадают. Следовательно, ДНФ=$f(x_1, x_2, x_3)$. Построенную таким образом ДНФ называют ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции*** $f(x_1, x_2, x_3)$.

Если построить аналогичным образом элементарные конъюнкции на нулевом наборе, то, соединив их знаками дизъюнкции, получим СДНФ отрицания функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$\bar{y} = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Воспользовавшись принципом двойственности для булевой алгебры, получим формулу:

$$y = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\,(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\,(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3),$$

которую называют ***совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)*** функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

Определение 4.11. Дизъюнктивную (конъюнктивную) нормальную форму от n переменных называют ***совершенной,*** если она обладает следующими свойствами:

1) каждая элементарная конъюнкция (дизъюнкция) содержит все n переменных,

2) все элементарные конъюнкции различны,

3) ни одна элементарная конъюнкция (дизъюнкция) не содержит одновременно переменную и ее отрицание,

4) ни одна элементарная конъюнкция (дизъюнкция) не содержит одну и ту же переменную дважды.

Свойства 1 – 4 ДНФ (КНФ) называют ***свойствами совершенства***.

Определение 4.12. ДНФ (КНФ), обладающая свойствами совершенства, называют ***совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой***.

Аббревиатура совершенных форм: ***СДНФ, СКНФ***.

Справедливы утверждения.

Утверждение 1. Любая ненулевая булева функция $f \in F_2(n)$ единственным образом представима в виде СДНФ от своих аргументов.

Утверждение 2. Любая ненулевая булева функция $f \in F_2(n)$ единственным образом представима в виде СКНФ от своих аргументов.

Практическое построение СДНФ и СКНФ выполняется так, как показано в приведенном выше примере. Основная задача представления булевой функции формулой состоит в упрощении совершенных форм. Поскольку конъюнктивные формы всегда могут быть получены по принципу двойственности, достаточно рассмотреть этот вопрос для дизъюнктивных форм.

Существует довольно много методов упрощения СДНФ. Все они основаны на основных и дополнительных свойствах операций булевой алгебры. Рассмотрим два из них: карты Карно и таблицы Куайна.

Карты Карно. Пусть булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана таблицей. Таблица содержит 2^n строк, в которых перечислены все n-мерные двоичные векторы и для каждого вектора указано значение функции – 0 или 1.

Начертим таблицу (см. рис. 4.2), содержащую 2^n клеток так, чтобы две соседние клетки отличались друг от друга значением одной и только одной компоненты вектора. Полученная таблица и называется картой Карно.

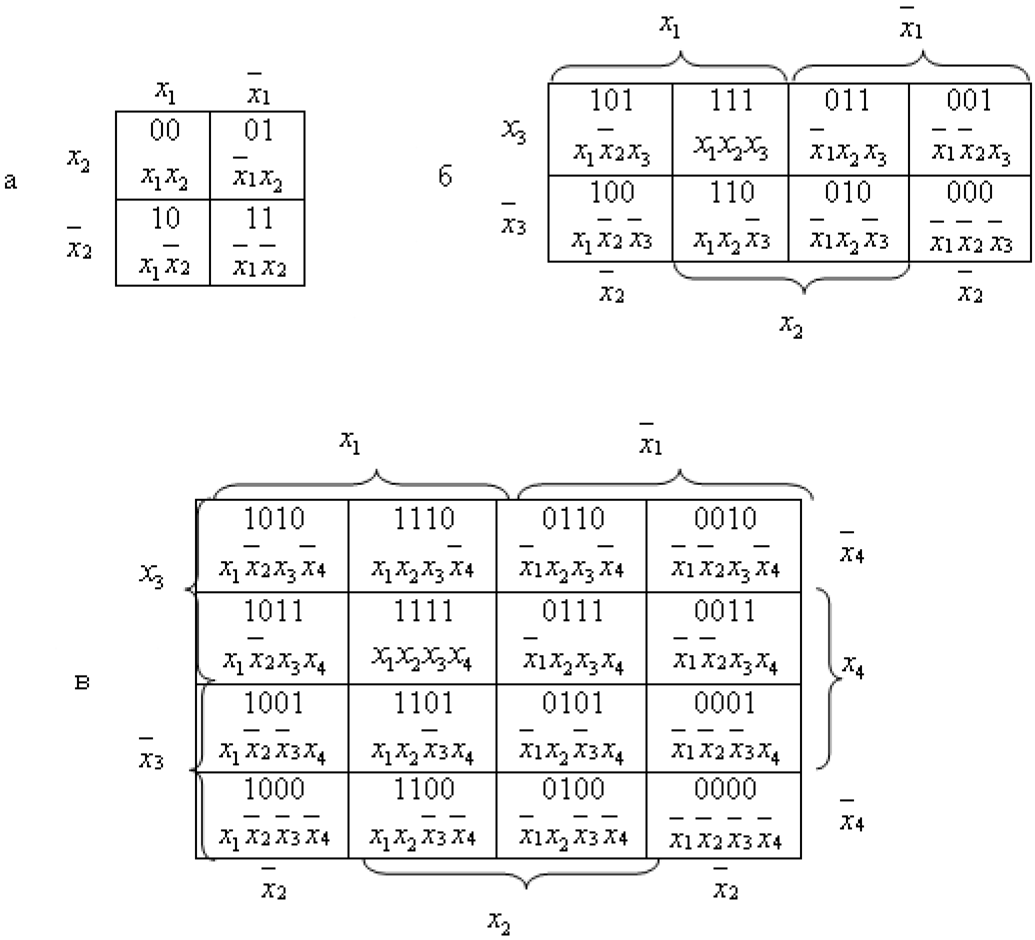


Рис. 4.2. Карты Карно для упрощения СДНФ булевых функций от разного числа аргументов

Карты Карно для функций от двух переменных (рис. 4.2а) имеют 4 клетки, для функций от трех переменных – 8 клеток (рис. 4.2б), для функций от четырех переменных 16 клеток (рис. 4.2в) и т.д. На картах отмечено расположение элементарных конъюнкций, которые могут входить в СДНФ рассматриваемой функции.

Рассмотрим примеры использования карт Карно для упрощения СДНФ некоторых функций.

Примеры.

Десятичные номера аргументов	x_1	x_2	x_3	y	Элементарные конъюнкции	
0	0	0	0	0		
1	0	0	1	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	
2	0	1	0	1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	
3	0	1	1	1	$\bar{x}_1x_2x_3$	
4	1	0	0	0		

5	1	0	1	1	$x_1\bar{x}_2x_3$
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	0	

1. Функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей. Единичный набор соответствует строкам: (001,010, 011, 101). Если представить эти двоичные векторы числами в десятичной записи, получим ***список единичного набора***: (1,2,3,5). Такой список полностью определяет функцию y и очень компактен в записи. В следующем примере функция от четырех аргументов будет задана именно списком единичного набора.

СДНФ(y)= $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$.

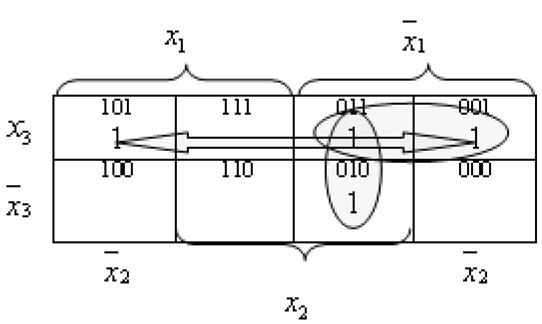
Заполним карту Карно, отметив в ней единицами клетки, соответствующие единичному набору.

Объединим рядом стоящие отмеченные клетки попарно: 011 – 001, 011 – 010, 101 – 001. Различие в каждой паре составляет только одна координата, именно такие клетки и требуют объединения. По этому признаку клетки 101 и 001, расположенные на противоположных сторонах карты, считаются "рядом стоящими". В СДНФ объединенные клетки соответствуют следующим дизъюнкциям:

(011 – 001) $\leftrightarrow$ $\bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$,

(011 – 010) $\leftrightarrow$ $\bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$,

(101 – 001) $\leftrightarrow$ $x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$.



Пользуясь свойствами коммутативности конъюнкции и дизъюнкции, дистрибутивностью конъюнкции относительно дизъюнкции (см. табл. 4.1), законом исключения третьего: $x \vee \bar{x} = 1$ и дополнительным свойством конъюнкции: $x \wedge 1 = x$, упрощаем выписанные формулы.

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1 x_3 1 = \bar{x}_1 x_3$;

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) = \bar{x}_1 x_2 1 = \bar{x}_1 x_2$;

$x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_2 x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_2 x_3 1 = \bar{x}_2 x_3$.

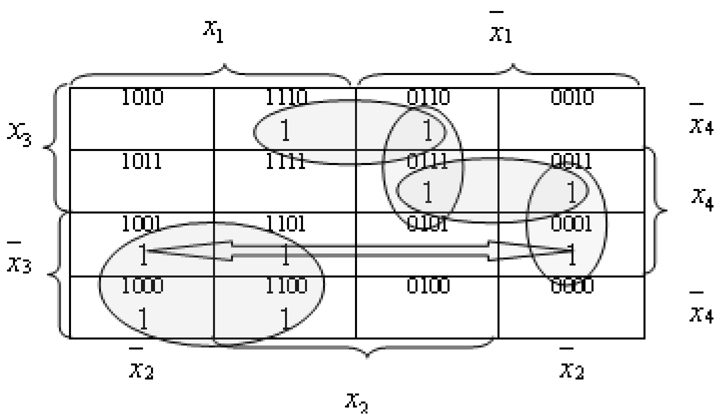
Применяя к СДНФ свойства ассоциативности и идемпотентности (табл.4.1) и заменяя в ней соответствующие дизъюнкции упрощенными формулами, получаем упрощенную КНФ функции $y = f(x_1, x_2, x_3)$:

СДНФ(y)=$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = (\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3) \vee (\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3) \vee$

$\vee (x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$.

$y = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$.

2. Функция $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана списком единичного набора: (1,3,6,7,8,9,12,13,14).



Переведя эти числа в двоичную систему, отметим в карте Карно для функции четырех аргументов клетки, соответствующие единичному значению функции y.

Объединим пары и четверки рядом стоящих отмеченных клеток. Оставляя в объединенных клетках лишь одинаковые переменные, запишем сокращенную дизъюнктивную форму функции $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$y = x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$.

Таблица Куайна.

Полученная в примере 2 формула может быть дополнительно сокращена с помощью таблицы Куайна. Рассмотрим, как это делается. В таблице Куайна столбцы соответствуют элементарным конъюнкциям СДНФ(y), а строки – конъюнкциям сокращенной формулы. В каждой строке знаком "*" отмечены те клетки, в которых элементарная конъюнкция сокращенной формулы *покрывает* конъюнкции СДНФ.

Конъюнкции сокращенной формулы	Векторы единичного набора (1,3,6,7,8,9,12,13,14) функции $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и соответствующие им элементарные конъюнкции СДНФ(y)								
	0001 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	0011 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	0110 $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$	0111 $\bar{x}_1x_2x_3x_4$	1000 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1001 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	1100 $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1101 $x_1x_2\bar{x}_3x_4$	1110 $x_1x_2x_3\bar{x}_4$
1. $x_1\bar{x}_3$					*	*	*	*	
2. $x_2x_3\bar{x}_4$			*						*
3. $\bar{x}_1x_2x_3$			*	*					
4. $\bar{x}_1x_3x_4$		*	*	*					
5. $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$	*	*							
6. $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	*					*			

Формальным признаком покрытия является вхождение в состав элементарной конъюнкции СДНФ соответствующей конъюнкции сокращенной формулы. Например, $x_1\bar{x}_3$ покрывает $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $x_1x_2\bar{x}_3x_4$, так как входит в каждую из этих конъюнкций.

Смысл покрытия состоит в том, что конъюнкция сокращенной формулы не меньше элементарных конъюнкций СДНФ, которые она покрывает. В самом деле, из выполнения равенства: $x_1\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4$, в силу свойства порядка операций булевой алгебры (см. табл. 4.1), оказываются справедливыми неравенства: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \le x_1\bar{x}_3$; $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \le x_1\bar{x}_3$, $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \le x_1\bar{x}_3$, $x_1x_2\bar{x}_3x_4 \le x_1\bar{x}_3$.

Отметив покрытия в строках таблицы, выделяем повторяющиеся знаки покрытий в столбцах (в таблице отмечено цветом). Если в строке все знаки покрытий оказываются выделенными, значит эта строка лишняя, и соответствующая этой строке конъюнкция может быть удалена из сокращенной формулы. Например, лишней оказывается конъюнкция $\bar{x}_1x_2x_3$, поскольку $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$ и $\bar{x}_1x_2x_3x_4$ покрываются второй и четвертой строками. Лишней оказывается и $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$, так как $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ и $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$ покрываются четвертой и шестой строками. После вычеркивания лишних конъюнкций, сокращенная формула принимает вид:

$$y = x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

5. Элементы математической логики

Логика изучает формы мышления и способы их выражения в языке. математическая логика решает проблемы проверки правильности рассуждений в естественном языке, строя свои модели и правила их преобразования. Для этого логика вводит свои языки – систему формальных обозначений – формул, и правила их преобразования. Поэтому логику можно рассматривать как систему правил манипулирования формулами, описывающими утверждения естественного языка.

5.1. Высказывания и предикаты

Под *высказыванием* понимают всякое повествовательное предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими *значениями высказываний* являются "истина" или "ложь".

Примеры высказываний:

• Солнце светит всем.

• Профессиональное образование в нашей стране делится на среднее и высшее.

• Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

• Все люди умеют летать.

Математическая логика не интересуется содержанием высказывания. Любое высказывание в математической логике обозначают буквой и рассматривают как переменную, принимающую одно из двух возможных значений – истина (1), ложь (0).

Высказывания делятся на *простые и составные*. Простое высказывание является неопределяемым понятием математической логики, составное – строится из простых соединением в *формулы высказываний*. Операции, соединяющие простые высказывания в формулы, называют *логическими операциями*. Составные высказывания также принимают два возможных значения – истина (1), ложь (0).

Поскольку формула высказываний представляет собой набор переменных, принимающих значения 0 или 1, и значение самой формулы также 0 или 1, то множество всех формул высказываний есть множество булевых функций F_2. Как отмечено в разделе 4.4, на множестве F_2 можно задать много различных алгебр, в частности – булеву алгебру $\{F_2, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1$.

Под словом "предикат" в грамматике понимают сказуемое, член предложения, обозначающий действие или признак. В математической логике под предикатом понимают некоторое функциональное соответствие, на множестве $X \times B$, где X какое-либо множество, $B = \{0, 1\}$.

Например, высказывания, приведенные выше можно переписать, сохранив их сказуемые, но заменив объекты высказываний символами переменных:

• x светит для y, $P(x, y)$.

• x делится на y и z, $P(x,y,z)$.

• если x, y – диагонали z, то x, y взаимно перпендикулярны, $P(x,y,z)$.

• x умеет летать, $P(x)$.

Полученные предложения в математической логике называются предикатами. Предикат $P(x)$ есть одноместный предикат, $P(x,y)$ – двуместный, $P(x,y,z)$ – трехместный.

Одноместный предикат $P(x)$ содержит одну переменную x. Если x принимает значения на каком-либо множестве X, то предикат разбивает это множества на два непересекающихся класса: K_1 – множество значений x, при которых $P(x)$ – истина (1), и K_2 – $P(x)$ ложь (0). Класс K_1 называют *множеством истинности предиката* $P(x)$. Поскольку $K_1 \cup K_2 = X$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то K_2 есть дополнение множества истинности предиката до множества его определения: $K_2 = \overline{K}_1$.

Таким образом, одноместный предикат $P(x)$ есть функция одной переменной, область определения которой – множество X, множество значений – $B = \{0,1\}$, или по-другому: $P(x)$ есть функциональное соответствие на $X \times B$.

Двуместный предикат $P(x,y)$ есть функция двух переменных, определенная на множестве $X \times Y, \quad (x \in X, y \in Y)$ и принимающая значения на множестве $B = \{0,1\}$, трехместный $P(x,y,z)$ – функция, определенная на множестве $X \times Y \times Z \quad (x \in X, y \in Y, z \in Z)$ и принимающая значения на $B = \{0,1\}$.

По аналогии, n-местный предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть функциональное соответствие на множестве $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \times B$, где $x_i \in X_i, \quad i = 1,2,\dots,n$.

Предикаты, как и высказывания, соединяются в предикатные формулы. Предикатная формула также есть предикат, принимающий значения на множестве $B = \{0,1\}$. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_k$ – предикаты. Каждый из них разбивает свое множество определения на два класса – множество истинности и его дополнение. На множестве истинности предикат принимает значение 1, на дополнении 0. Соединив предикаты $P_1, P_2, \dots, P_k$ в формулу, получим предикат P, определенный на другом множестве и разбивающий это множество на классы: K_1 – множество истинности предиката P и дополнение $\overline{K_1}$ – множество ложности.

5.2. Алгебра высказываний

Нульарные, унарные и бинарные операции над булевыми переменными рассмотрены в разделе 4 (см. табл. 4.2). Поскольку высказывания есть также булевы переменные, над ними выполнимы те же самые операции. Однако в силу специфичности логической терминологии, читать образованные формулы следует несколько иначе. Таблицы значений составных высказываний называют таблицами истинности этих высказываний.

Определим еще раз операции, наиболее часто используемые в математической логике.

1. ***Отрицание высказывания*** p

Таблица 5.1.

Таблица истинности

отрицания высказывания

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Табл. 5.1 является определением операции отрицания высказываний. Отрицание высказывания p истинно тогда и только тогда, когда p ложно.

В логике высказываний символ $\overline{p}$ читают "не p " или "неверно, что p ".

2. *Конъюнкция высказываний* $p \wedge q$

Таблица 5.2.

Таблица истинности

конъюнкции высказываний

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция высказываний p и q (табл. 5.2) есть высказывание $p \wedge q$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания p и q.

Символ $p \wedge q$ читают: "p и q ".

Пример истинной конъюнкции $p \wedge q$:"Число 6 делится на 2 и на 3", p : "Число 6 делится на 2", q : "Число 6 делится на 3".

Пример ложной конъюнкции $p \wedge \overline{q}$: "Число 6 делится на 2 и не делится на 3"

3. *Дизъюнкция высказываний* $p \vee q$

Таблица 5.3.

Таблица истинности

конъюнкции высказываний

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция высказываний p и q (табл. 5.3) есть высказывание $p \vee q$, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания p и q.

Символ $p \vee q$ читают: "p или q ".

Пример истинной дизъюнкции $p \vee q$: "6 меньше или равно 7"(истина); p : " 6 меньше7" (истина), q : " 6 равно 7" (ложь).

Пример ложной дизъюнкции $p \vee q$: "6 больше или равно 7"(ложь); p : " 6 больше 7" (ложь), q : " 6 равно 7" (ложь).

4. *Импликация высказываний* $p \rightarrow q$

Таблица 5.4.

Таблица истинности

импликации высказываний

p	q	$p \vee q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация высказываний p и q (табл. 5.4) есть высказывание $p \to q$, которое ложно тогда и только тогда, когда p – истина, а q – ложь.

Символ $p \to q$ читают: "Если p, то q", "из p следует q".

Высказывание p называют условием

или посылкой импликации, q – следствием ли заключением импликации.

Примеры истинной импликации $p \to q$:

1) "Если число 12 делится на 6, то оно делится на 2"(истина); p : " 12 делится на 6" (истина), q : " 12 делится на 2" (истина).

2) "Если число 12 делится на 8, то оно делится на 2"(истина); p : " 12 делится на 8" (ложь), q : " 12 делится на 2" (истина).

3) "Если число 12 делится на 8, то оно делится на 25"(истина); p : " 12 делится на 8" (ложь), q : " 12 делится на 25" (ложь).

Как видно из примеров, если условие импликации ложно, заключение может быть истинным или ложным, на оценку истинности всей импликации это не повлияет. (Из лжи следует все, что угодно).

Пример ложной импликации: "Если число 12 делится на 6, то оно делится на 8"(ложь); p : " 12 делится на 6" (истина), q : " 12 делится на 8" (ложь). (Из истины должна следовать только истина).

4. *Эквиваленция высказываний* $p \leftrightarrow q$

Таблица 5.5.

Таблица истинности

эквиваленции высказываний

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция высказываний p и q (табл. 5.5) есть высказывание $p \leftrightarrow q$, которое истинно тогда и только тогда, когда значения истинности p и q совпадают.

Символ $p \leftrightarrow q$ читают: "Для того, чтобы p, необходимо и достаточно, чтобы q", "p тогда и только тогда, когда q".

Высказывания p и q называют членами эквиваленции.

Пример эквиваленции $p \leftrightarrow q$: " Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда угол SPQ равен углу SQP". Данная эквиваленция истинна, так как члены эквиваленции p : Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный" и q: "Угол SPQ равен углу SQP" либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Высказывания, соединенные знаками логических операций, образуют ***формулы логики высказываний***. Это понятие определяется по индукции.

Определение 5.1. Пусть $x_i, (i = 1,2,\ldots, x_i \in \{0,1\})$ – какое либо множество логических (булевых) переменных. ***Формулой логики высказываний*** является

1) любая логическая переменная (атомарная формула);

2) если p и q – формулы, то выражения $\overline{p}$, $\overline{q}$, ($p \wedge q$), ($p \vee q$),($p \to q$), ($p \leftrightarrow q$) являются формулами;

3) никаких других формул, кроме построенных в пунктах 1 и 2, нет.

Как уже было отмечено, любую формулу логики высказываний можно рассматривать, как булеву функцию от атомарных переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_2(n)$. При записи формул, для того, чтобы избежать большого количества скобок, применяют уже известные правила:

1) конъюнкция выполняется раньше дизъюнкции, знак "$\wedge$" можно опускать;

2) конъюнкция и дизъюнкция выполняются раньше импликации и эквиваленции;

3) если над скобкой стоит знак отрицания, то скобки тоже можно опускать.

Пример.

Формулу $((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \to (((\overline{(x_1 \leftrightarrow x_2))} \vee x_3)$ в соответствии с этими правилами можно переписать так: $x_1 x_2 \vee x_3 \to \overline{(x_1 \leftrightarrow x_2)} \vee x_3$.

Определение 5.2. Две логические формулы A и B будем называть ***равносильными формулами***, если они принимают одинаковые значения на любом наборе значений входящих в эти формулы атомарных формул.

Рассматривая логические формулы как булевы функции, можно дать другое определение равносильности формул:

Определение 5.2'. Две логические формулы $A = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ и $B = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ называют ***равносильными формулами***, если их единичные и нулевые наборы совпадают.

Законы логики высказываний устанавливают равносильности между формулами. Некоторые из них были определены как свойства булевых операций в разделе 4. Сформулируем законы логики высказываний в полном объеме.

Законы логики высказываний

1. Двойственность: $\overline{pq} = \overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{p \vee q} = \overline{p}\,\overline{q}$.

2. Двойное отрицание: $\overline{\overline{p}} = p$.

3. Отрицание импликации: $\overline{p \to q} = p \wedge \overline{q}$.

4. Идемпотентность: $pp = p$, $p \vee p = p$.

5. Коммутативность конъюнкции и дизъюнкции: $pq = qp$, $p \vee q = q \vee p$.

6. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции: $(pq)h = p(qh)$, $(p \vee q) \vee h = p \vee (q \vee h)$.

7. Дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции: $p(q \vee h) = pq \vee ph$, $p \vee qh = (p \vee q)(p \vee h)$.

8. Самодистрибутивность импликации: $p \to (q \to h) = (p \to q) \to (p \to h)$.

9. Контрапозиция: $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$.

10. Приведение к абсурду: $(\overline{p} \to q)(\overline{p} \to \overline{q}) = p$.

11. Противоречие: $p\overline{p} = 0$.

12. Исключение третьего: $p \vee \overline{p} = 1$.

13. Поглощение: $p(p \vee q) = p$, $p \vee pq = p$.

14 . Выражение импликации через дизъюнкцию и отрицание: $p \to q = \overline{p} \vee q$.

15. Свойства нуля: $p0 = 0$; $p \vee 0 = p$.

17. Свойства единицы: $p1 = p$; $p \vee 1 = 1$.

Справедливость любого из 17 законов можно доказать, построив таблицы истинности соответствующих высказываний.

Пример.

Докажем законы $p \to q = \overline{p} \vee q$ (14), $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$ (9) и $(\overline{p} \to q)(\overline{p} \to \overline{q}) = p$ (10), используя таблицы истинности логических операций.

Табл.(а)

p	q	$\bar{p}$	$p \to q$	$\bar{p} \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$p \to q = \bar{p} \vee q$

Табл.(б)

p	q	$p \to q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \to \bar{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

$p \to q = \bar{q} \to \bar{p}$

Табл.(в)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \to q$	$\bar{p} \to \bar{q}$	$(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

$$\boxed{(\bar{p} \to q)(\bar{p} \to \bar{q}) = p}$$

Для доказательства эквивалентности $p \to q = \bar{p} \vee q$ (*табл. (а)*), рассмотрим все возможные наборы атомарных формул p и q, и запишем для каждого возможного набора значения формул $\bar{p}$, $\bar{q}$, $p \to q$, $\bar{q} \to \bar{p}$ (см. табл. 5.1, 5.4). Делаем вывод: единичный и нулевой наборы формул $p \to q$ и $\bar{q} \to \bar{p}$ совпадают. Следовательно, эти формулы эквивалентны.

Справедливость законов контрапозиции (*табл. (б)*) и приведения к абсурду (*табл. (в)*) доказывается аналогично.

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1) тождественно истинные;

2) тождественно ложные;

3) выполнимые.

Определение 5.3. Формулу A называют ***тождественно истинной формулой*** или ***тавтологией***, если она принимает значение 1 при всех наборах входящих в нее атомарных высказываний. Формулу A называют ***тождественно ложной формулой***, если она принимает значение 0 при всех наборах входящих в нее атомарных высказываний. Формулу A называют ***выполнимой формулой***, если она принимает значение 1 хотя бы на одном наборе входящих в нее атомарных высказываний.

Задача об отнесении формулы к тому или иному классу формул называют ***проблемой разрешимости***.

Любую формулу алгебры логики можно отнести к определенному классу формул с помощью таблицы истинности формулы. Существует и другой путь решения этой задачи.

Так как любая формула A есть булева функция $A \in F_2(n)$, ее можно представить как дизъюнктивную (ДНФ) или конъюнктивную (КНФ) нормальную форму. Для ДНФ и КНФ справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для того, чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.

Утверждение 2. Для того, чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.

Утверждение 3. Для того, чтобы логическая формула A являлась тавтологией, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция в КНФ A содержала переменную и ее отрицание.

Утверждение 4. Для того, чтобы логическая формула A являлась тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная конъюнкция в ДНФ A, содержала переменную и ее отрицание.

Доказательства этих утверждений можно найти в [Лихтарников].

Пример.

Докажем, что формула $(pq \to p)(p\bar{q} \to \bar{q})$ является тавтологией.

Запишем КНФ формулы:

$$(pq \to p)(p\bar{q} \to \bar{q}) \overset{(14)}{=} (\overline{pq} \vee p)(\overline{p\bar{q}} \vee \bar{q}) \overset{(1)}{=} (\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)(\bar{p} \vee \bar{\bar{q}} \vee \bar{q}) \overset{(2)}{=} (\bar{p} \vee \bar{q} \vee p)(\bar{p} \vee q \vee \overline{q}).$$

(Над знаками равенства указаны номера законов логики высказываний). Последняя формула представляет собой КНФ первоначальной формулы. Поскольку каждая элементарная дизъюнкция в КНФ наряду с атомарным высказыванием содержит его отрицание, формула является тавтологией.

Представление высказываний в виде формул, позволяет решать логические задачи. Приведем пример.

Пример.

По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой – малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом – лгал. Вот, что они утверждали:

Браун: "Я совершил это, Джон не виноват",

Джон: "Браун не виноват. Преступление совершил Смит",

Смит: "Я не виноват, виновен Браун".

Требуется определить имя старика, мошенника и чиновника и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

Решение.

Обозначим высказывания:

Б: "виноват Браун", Д: "виноват Джон", С: "виноват Смит".

Высказывания подозреваемых представляют собой конъюнкции: $Б \wedge \overline{Д}$, $\overline{Б} \wedge C$, $\overline{C} \wedge Б$. Которые истины лишь в том случае, если истины оба, входящие в них, высказывания. По условию задачи, среди этих конъюнкций есть одна истинная – высказывание старика, и две ложные – высказывание мошенника, который всегда говорит ложь, и высказывание чиновника, который чередует ложь и правду. Дизъюнкция $L = Б \wedge \overline{Д} \vee \overline{Б} \wedge C \vee \overline{C} \wedge Б$ является истинной, поскольку истинна одна из составляющих ее конъюнкций (высказывание старика).

Составим таблицу истинности формулы L.

№ п/п	Б	Д	С	$\overline{Б}$	$\overline{Д}$	$\overline{C}$	$Б \wedge \overline{Д}$	$\overline{Б} \wedge C$	$\overline{C} \wedge Б$	L
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
5	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
6	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Единичный набор формулы L отмечен цветом. Из этого набора следует исключить строки, в которых истины два атомарных высказывания, так как по условию преступник только один, а также строку, в которой истины две конъюнкции $Б \wedge \overline{Д}$ и $\overline{C} \wedge Б$, поскольку лишь один человек – старик, говорил всегда правду.

Таким образом, из всех строк единичного набора формулы L остается лишь вторая строка. Анализируя распределение нулей и единиц в этой строке, делаем следующие выводы.

1) Преступником является Смит (С=1). Браун и Джон не виновны (Б=0, Д=0).

2) Оба высказывания Джона истинны ($\overline{Б}$ =1, C =1), он и является уважаемым в городе стариком.

3) Оба высказывания Смита ложны ($\overline{C}$ =0, $Б$ =0). Значит, Смит – мошенник.

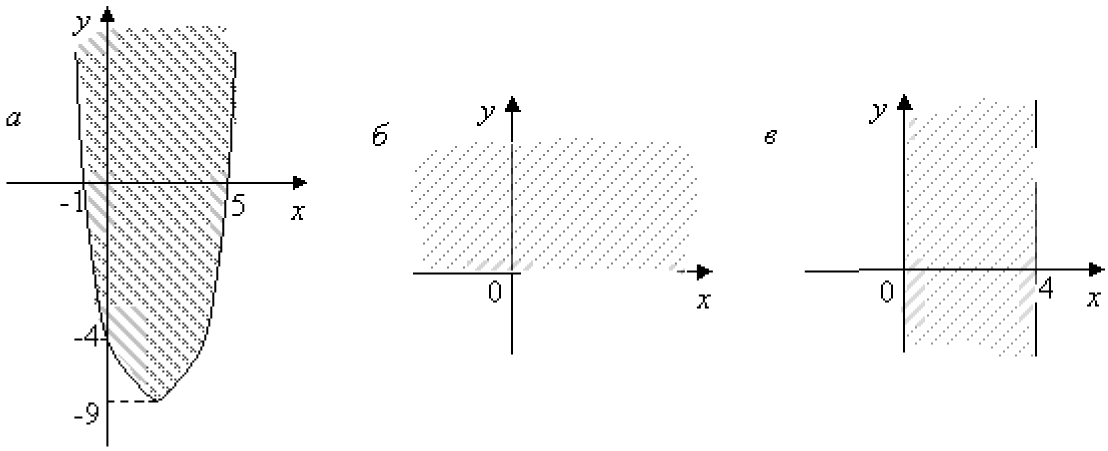
4) Одно из высказываний Брауна ($\overline{Д}$ =1) истинно, другое ($Б$ =0) – ложно. Браун – малоизвестный чиновник, который в одном случае говорит правду, а в другом – лжет.

5.3. Алгебра предикатов

Любая переменная логики высказываний есть функциональное соответствие на множестве $B \times B$: $B \xrightarrow{f} B$. Для предиката *область значений функции* – множество B, но *областью изменений аргументов* может быть любое множество, т.е. предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть функциональное соответствие $M \xrightarrow{f} B$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$.

Если в предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подставить значение переменной x_1, новый предикат будет предикатом от $n-1$ переменных, подстановка значений x_1, x_2 дает предикат от $n-2$ переменных и т. д. Если подставить значения всех переменных, то предикат становится высказыванием истинным или ложным.

Пример.



$P(x,y): y \geq x^2 - 4x - 5$ – двуместный предикат, $(x,y) \in R^2$. Множество истинности $P(x,y)$ – область внутри параболы $y = x^2 - 4x - 5$, показано штриховкой (рис. *а*).

Пусть $x = -1$, $P(y): y \geq 0$ – одноместный предикат, полученный из $P(x,y)$ подстановкой выбранного значения x. Его множество истинности – полуплоскость выше оси абсцисс (рис. *б*).

Если $y = -5$, то $P(x):"0 \geq x^2 - 4x"$. Множество истинности полученного одноместного предиката – вертикальная полоса (рис. *в*).

$P:"-5 \geq 0"$ – ложное высказывание полученное подстановкой $x = -1$, $y = -5$ в предикат $P(x,y)$.

Над предикатами, как и над высказываниями, выполняют операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания. При этом получают предикатную формулу или составной предикат. Поскольку значениями любого предиката, как и значениями высказываний, являются 0 или 1, все семнадцать законов логики высказываний применимы и к предикатным формулам.

Помимо булевых операций над предикатами выполняют две *кванторные операции*. Знаки этих операций: $\forall$ - квантор всеобщности, $\exists$ - квантор существования.

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M. При подстановке значений из M в предикат он становится истинным или ложным высказыванием. Таким образом, предикат $P(x)$ разбивает M на два непересекающихся класса: K – множество истинности предиката $P(x)$, и $\overline{K}$ – его дополнение, множество ложности. При подстановке значений из K предикат получает значение 1 (истина), из $\overline{K}$ – 0 (ложь). Очевидно, что $K, \overline{K} \subseteq M$ и $K \cup \overline{K} = M$, $K \cap \overline{K} = \varnothing$.

Квантор всеобщности. Утверждение $\forall\ xP(x)$: "для всякого x $P(x)$ истинно" является уже не предикатом, а высказыванием. Высказывание $\forall\ xP(x)$ – истина, если множество K совпадает с областью изменения переменных: $K = M, \quad \overline{K} = \varnothing$. Высказывание $\forall\ xP(x)$ – ложь, если $K \neq M, \quad \overline{K} \neq \varnothing$. До выполнения кванторной операции x являлась свободной переменной, можно было придавать ей любые значения из множества M. После выполнения операции *переменная x связана квантором всеобщности*: значение высказывания $\forall\ xP(x)$ не зависит от x. Хотя символ x и входит в запись предложения $\forall\ xP(x)$, но подстановка значений x в это предложение приводит к бессмыслице.

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M. Утверждение $\exists\ xP(x)$: "существует x, для которого $P(x)$ истинно" является высказыванием. Высказывание $\exists\ xP(x)$ – истина, если множество K не пусто: $K \neq \varnothing$. Иными словами, если во множестве M найдется хотя бы один элемент, который при подстановке в предикат обращает его в истинное высказывание. Значение высказывания $\exists\ xP(x)$ не зависит от x, *переменная x связана квантором существования*.

Пример.

На множестве $M = \{1,2,3,4,5\}$ заданы два предиката $P_1(x)$: "$x < 6$", $P_2(x)$: "x – четное число".

Высказывание $\forall\ xP_1(x)$: "все $x < 6$" является истинным, поскольку истинно каждое из высказываний $P_1(1)$: "$1 < 6$", $P_1(2)$: "$2 < 6$", $P_1(3)$: "$3 < 6$", $P_1(4)$: "$4 < 6$", $P_1(5)$: "$5 < 6$". Следовательно, высказывание $\forall\ xP_1(x)$ является конъюнкцией высказываний, которые получаются при подстановке значений x в предикат $P_1(x)$:

$$\forall\ xP_1(x) = P_1(1) \wedge P_1(2) \wedge P_1(3) \wedge P_1(4) \wedge P_1(5).$$

Высказывание $\exists\ P_2(x)$: "некоторые x – четные числа" истинно, так как среди высказываний $P_2(1)$: "1 – четное число", $P_2(2)$: "2 – четное число", $P_2(3)$: "3 – четное число", $P_2(4)$: "4 – четное число", $P_2(5)$: "5 – четное число" два истинны $P_2(2)$ и $P_2(4)$, а следовательно истинна дизъюнкция всех высказываний:

$\exists\, xP_2(x) = P_2(1) \vee P_2(2) \vee P_2(3) \vee P_2(4) \vee P_2(5)$.

Приведенный пример показывает, что квантор всеобщности есть конъюнкция всех высказываний, которые получаются из предиката при подстановке значений его переменной, а квантор существования есть дизъюнкция всех таких высказываний.

Таким образом, если $P(x)$ - предикат, $x \in M$, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то справедливы равенства:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Применим к этим равенствам логический закон двойственности:

$$\overline{\forall x P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)} = \overline{P}(a_1) \vee \overline{P}(a_2) \vee \ldots \vee \overline{P}(a_n) = \exists x \overline{P}(x);$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)} = \overline{P}(a_1) \wedge \overline{P}(a_2) \wedge \ldots \wedge \overline{P}(a_n) = \forall x \overline{P}(x).$$

Получены формулы:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x) \qquad (5.1)$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x) \qquad (5.2)$$

Отрицание высказывания $\forall x P(x)$ с квантором всеобщности равносильно высказыванию $\exists x \overline{P}(x)$ с квантором существования, и наоборот, отрицание высказывания $\exists x P(x)$ с квантором существования равносильно высказыванию $\forall x \overline{P}(x)$ с квантором всеобщности. Таким образом, кванторы, как и булевы операции конъюнкции и дизъюнкции, подчиняются закону двойственности.

Применяя свойство порядка для конъюнкции и дизъюнкции, имеем неравенства:

$$\forall x P(x) \le \exists x P(x) \qquad (5.3)$$

$$\overline{\exists x P(x)} \le \overline{\forall x P(x)} \qquad (5.4)$$

Связывая переменную квантором всеобщности, получаем высказывание, значение истинности которого не больше значения высказывания с квантором существования, полученным из того же предиката, т.е. если $\forall x P(x) = 1$, то $\exists x P(x) = 1$, но если $\forall x P(x) = 0$, то возможны оба варианта: $\exists x P(x) = 0$ или $\exists x P(x) = 1$. Неравенство (5.4) можно толковать аналогично.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Рассмотрим применение этих операций к двуместному предикату $P(x, y)$ (рис. 5.1).

Операция связывания выполняется по действиям:

1) Связывание одной из двух переменных.

Поскольку переменных две и кванторных операций тоже две, в результате получаем четыре одноместных предиката:

$\forall x P(x, y)$ – одноместный предикат с переменной y;

$\exists x P(x, y)$ – одноместный предикат с переменной y;

$\forall y P(x, y)$ – одноместный предикат с переменной x;

$\exists y P(x, y)$ – одноместный предикат с переменной x.

2) Связывание оставшейся переменной.

Применяя к каждому из четырех различных одноместных предикатов по две кванторные операции, получаем восемь различных высказываний с кванторами:

$\forall y \forall x P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$, $\exists y \exists x P(x, y)$;

$\forall x \forall y P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y)$.

Пример.

Пусть $M = \{a, b, c, d\}$ – множество детей одной семьи, причем a и b – мальчики, а c и d – девочки. На множестве M задан двуместный предикат $P(x, y)$: "x является братом y".

Получим из $P(x, y)$ четыре одноместных предиката:

$\forall x P(x, y)$: "любой из детей семьи является братом y";

$\exists x P(x, y)$: "в семье найдется ребенок, который является братом y";

$\forall x P(x, y) = P_1(a, y) \wedge P_1(b, y) \wedge P_1(c, y) \wedge P_1(d, y)$;

$\exists x P(x, y) = P_1(a, y) \vee P_1(b, y) \vee P_1(c, y) \vee P_1(d, y)$.

$\forall y P(x, y)$: "x является братом каждого из детей семьи";

$\exists y P(x, y)$: "x является братом хотя бы одного из детей семьи".

$\forall y P(x, y) = P_2(x, a) \wedge P_2(x, b) \wedge P_2(x, c) \wedge P_2(x, d)$;

$\exists y P(x, y) = P_2(x, a) \vee P_2(x, b) \vee P_2(x, c) \vee P_2(x, d)$.

Составим восемь высказываний, связав в каждом из одноместных предикатов оставшуюся свободную переменную:

$\forall y \forall x P(x,y)$: "для каждого ребенка семьи любой из детей этой семьи является братом" – ложное высказывание, для мальчиков a и b девочки c и d не являются братьями, кроме того, для любого человека не является братом он сам.

$\exists y \forall x P(x,y)$: "среди детей найдется ребенок, для которого каждый ребенок семьи является братом " – ложное высказывание, поскольку сам себе человек братом не является.

$\forall y \exists x P(x,y)$: "для любого ребенка семьи найдется брат" – истинное высказывание.

$\exists y \exists x P(x,y)$: "для некоторых детей семьи найдутся братья" – истинное высказывание.

$\forall x \forall y P(x,y)$: "любой ребенок в семье является братом каждому из детей этой семьи" – ложное высказывание.

$\exists x \forall y P(x,y)$: "некоторые дети семьи являются братьями каждого ребенка семьи" – ложное высказывание, поскольку сам себе человек братом не является.

$\forall x \exists y P(x,y)$: "любой ребенок семьи является братом какому-то из детей это семьи"– ложное высказывание.

$\exists x \exists y P(x,y)$: "среди детей семьи найдутся такие, которые являются братьями некоторым детям этой семьи" – истинное высказывание.

Обратим внимание на то, что двуместный предикат определяет на множестве M^2 бинарное отношение: $\Gamma = \{(ab),(ac),(ad),(ba),(bc),(bd)\} \subset M^2$.

Рассмотрим каждое из восьми высказываний с точки зрения отношений между множествами Γ и M^2.

1. Высказывания $\forall y \forall x P(x,y)$ и $\forall x \forall y P(x,y)$ есть утверждения о том, что $\Gamma = M^2$. Оба эти высказывания в данном случае являются ложными.

2. Высказывание $\exists y \exists x P(x,y)$ утверждает, что некоторые элементы множества M имеют образы, а $\exists x \exists y P(x,y)$ – некоторые элементы имеют прообразы во множестве M , т.е. что $\Gamma \neq \varnothing$. Оба эти высказывания являются истинными.

3. Высказывание $\exists y \forall x P(x,y)$ есть утверждение о том, что каждый элемент множества M имеет образ в этом множестве, что является ложным (c и d не имеют образов). Высказывание $\forall y \exists x P(x,y)$ утверждает, что полный образ некоторых элементов множества M равен всему множеству M , что ложно в силу антирефлексивности отношения Γ ("сам себе братом не является").

4. Высказывание $\exists x \forall y P(x, y)$ утверждает, что каждый элемент множества M имеет прообраз, и это истина. Высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$ есть утверждение о том, что полный прообраз некоторых элементов множества M совпадает с множеством M, но это ложно.

По результатам, полученным в примере можно сделать следующие выводы.

Выводы.

1. Результатом кванторных операций над двуместным предикатом $P(x, y)$ является истинное (1) или ложное (0) высказывание.

2. Если истинно высказывание $\forall x \forall y P(x, y)$, то высказывание $\exists x \exists y P(x, y)$ так же истинно; если $\forall x \forall y P(x, y)$ ложно, то $\exists x \exists y P(x, y)$ может быть как ложным, так и истинным. Следовательно, $\forall x \forall y P(x, y) \le \exists x \exists y P(x, y)$ для любого двуместного предиката.

3. Результат связывания переменных различными кванторами зависит от порядка связывания, т.е. от того какая переменная была связана первой, а какая – второй. В общем случае, $\forall x \exists y \ne \exists y \forall x$, $\exists x \forall y \ne \forall y \exists x$,.

4. Если порядок связывания не меняется, то результат зависит от порядка следования кванторов. В общем случае: $\forall x \exists y \ne \exists x \forall y$

Рассмотрим правила построения отрицаний высказываний с двумя кванторами. Для примера построим отрицание высказывания $\forall x \exists y P(x, y)$, применяя формулы (5.1) и (5.2):

$$\overline{\forall x \exists y P(x, y)} = \exists x \overline{\exists y P(x, y)} = \exists x \forall y \overline{P(x, y)}.$$

Аналогично строятся отрицания и других высказываний с двумя кванторами. Таким образом, справедливо следующее утверждение, которое является распространением закона двойственности на кванторные операции.

Утверждение. Чтобы построить отрицание высказывания или предиката с кванторами, надо кванторы всеобщности заменить кванторами существования, кванторы существования – кванторами всеобщности, а предикат – отрицанием предиката.

В n-местном предикате $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ каждую переменную можно связать либо квантором всеобщности, либо квантором существования. Пусть сначала порядок связывания переменных тот же, что и в самом предикате. Первой связывается переменная x_1, при этом получается два $(n-1)$-местных предиката, затем в каждом из них – переменная x_2, после чего получается 2^2 $(n-2)$-местных предиката и т.д. Всего таким образом можно получить 2^n высказываний. Координаты вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно переставить $n!$ способами. Именно столько существует перестановок без повторений из n элементов. Следовательно, каждое из 2^n высказываний дает $n!$ других высказываний, которые отличаются друг от друга порядком связывания переменных. Таким образом, применение кванторных операций к n-местному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дает $n! \cdot 2^n$ высказываний.

Поскольку значения предикатов и высказываний есть элементы одного и того же множества $B = \{0,1\}$ и над ними можно выполнять одни и те же логические операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, то можно соединять в одной формуле высказывания и предикаты или высказывания с кванторами и без кванторов. Например, A:"если $3 < 5$ и $5 > x$, то $3 > x$" или в символьной форме: $A = qP(x) \to Q(x)$, где q:"$3 < 5$", $P(x)$:"$5 > x$", $Q(x)$:"$3 > x$".

Полученная таким образом формула является предикатом и над ней можно выполнять кванторные операции. Приведем основные правила выполнения кванторных операций над предикатами (*табл. 5.6*). Пусть p – высказывание, $P(x)$ и $Q(x)$ – одноместные предикаты, $P(x,y)$ – двуместный предикат.

Таблица 5.6

Правила выполнения кванторных операций в логических формулах

№ п.п	Правила	№ п.п	Правила
1	$\forall x \forall y P(x,y) = \forall y \forall x P(x,y)$	9	$\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(x,y)$
2	$\forall x \exists y P(x,y) \neq \exists y \forall x P(x,y)$	10	$\exists x \forall y P(x,y) \neq \forall y \exists x P(x,y)$
3	$\overline{\forall x \exists y P(x,y)} = \exists x \forall y \overline{P(x,y)}$	11	$\forall x \forall y P(x,y) \leq \exists x \exists y P(x,y)$
4	$p \wedge (\forall x P(x)) = \forall x (p \wedge P(x))$	12	$p \vee \forall x P(x) \to \forall x\ (p \vee P(x))$
5	$\exists x (p \wedge P(x)) = p \wedge \exists x P(x)$	13	$\exists x (p \vee P(x)) = p \vee \exists x P(x)$
6	$p \to \forall x P(x) = \forall x (p \to P(x))$	14	$p \to \exists x P(x) = \exists x\ (p \to P(x))$
7	$\exists x\ (P(x) \to p) = \exists x P(x) \to p$	15	$\forall x (P(x) \to p) = \exists x (p \to P(x))$
8	$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) = \exists x (P(x) \vee Q(x))$	16	$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) = \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
	–	17	$\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) = \exists x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$

5.4. Применение языка логики предикатов в математике

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства.

Приведем примеры записи определений математического анализа в виде предикатных форму.

Примечание.

При записи определений используется символ "$\xrightarrow{def}$", который читается " по определению…, если… ".

1) Определение числовой последовательности:

$a = \lim_{n\to\infty} a_n \xrightarrow{def} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n\left(n > n_0 \to \left|a_n - a\right| < \varepsilon\right)$, ("по определению число a есть предел последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число n_0, что для всех натуральных чисел n из выполнения неравенства $n > n_0$ следует, что $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$"),

где $n, n_0 \in N$, $\varepsilon \in R$, a_n - член последовательности с номером n, предикат $P(n, n_0, \varepsilon) :" \left(n > n_0 \to \left|a_n - a\right| < \varepsilon\right)"$ – трехместный предикат, представляющий импликацию $P(n, n_0, \varepsilon) = P(n, n_0) \to Q(\varepsilon)$ двуместных предикатов, $P(n, n_0) :" n > n_0"$, $Q(n, \varepsilon) :" \left|a - a_n\right| < \varepsilon"$.

2) Определение возрастающей функции.

Пусть $y = f(x), x \in E$. По определению $f(x)$ есть возрастающая на множестве E функция, если $\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E\left(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)\right)$, (…для любого числа x_1 из множества E и любого числа x_2 из этого же множества неравенство $x_1 < x_2$ влечет за собой неравенство $f(x_1) < f(x_2)$).

Двуместный предикат $P(x_1, x_2) :" \left(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)\right)"$ есть импликация двуместных предикатов $P_1(x_1, x_2) :" \left(x_1 < x_2\right)"$ и $P_2(x_1, x_2) :" \left(f(x_1) < f(x_2)\right)"$.

Многие теоремы математики допускают формулировку в виде условных предложений.

Примеры.

1. Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.

2. Система линейных алгебраических уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг главной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

3. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Эту знаменитую теорему можно переформулировать так: " Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы квадрат длины одной из его сторон был равен сумме квадратов длин других его сторон".

Такие формулировки являются импликациями или эквиваленциями предикатов, переменные в которых связаны кванторами.

Пусть импликация $P(x) \to Q(x)$ представляет условие и заключение некоторой теоремы. Рассмотрим еще три импликации, которые можно построить из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$:

$Q(x) \to P(x)$ – обратная импликация,

$\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ – противоположная импликация,

$\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ – импликация обратная противоположной.

Поскольку для эквиваленции справедливо равенство $P(x) \leftrightarrow Q(x) = Q(x) \leftrightarrow P(x)$ (см. табл. 5.5), то есть смысл рассматривать лишь противоположную ей эквиваленцию $\overline{P}(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)$ Из таблиц истинности импликации и эквиваленции (см. табл. 5.4, 5.5) получаем таблицы соответствующих высказываний.

Таблица 5.7

Таблица истинности импликаций и эквиваленций

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \to q$	$q \to p$	$\overline{p} \to \overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$	$p \leftrightarrow q$	$\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

Очевидны равносильности: $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$, $q \to p = \overline{p} \to \overline{q}$ (логический закон контрапозиции), $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$, $\overline{p} \leftrightarrow \overline{q} = (\overline{p} \to \overline{q}) \wedge (\overline{q} \to \overline{p})$.

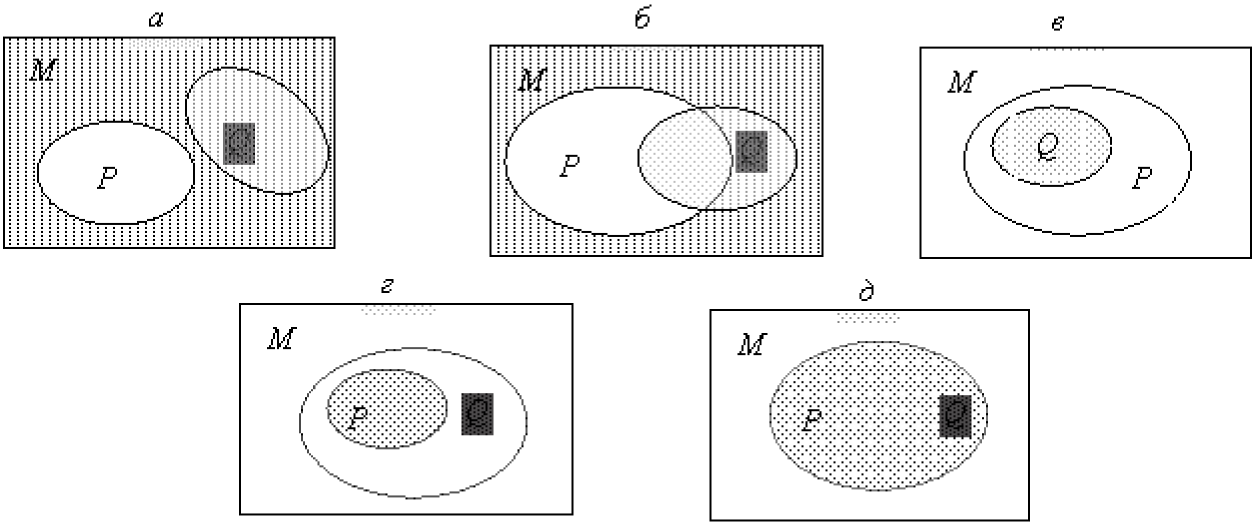


Рис. 5.2. Множества истинности (выделены цветом) и множества ложности (не окрашены) предиката $P(x) \to Q(x)$ **при различных соотношениях между множествами** P и Q: (*а*,*б*) P и Q – несравнимы ($P \not\subset Q, Q \not\subset P$),(*в*) $Q \subset P$, (*г*) $P \subset Q$, (*д*) $P = Q$

Пусть $x \in M$, $P, Q \subseteq M$ – множества истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно, $\overline{P}, \overline{Q} \subseteq M$ – множества ложности. В соответствии с таблицей истинности, импликация $P(x) \to Q(x)$ ложна лишь в том случае, если $P(x) > Q(x)$. Такое соотношение невозможно, если $P \subseteq Q$ (см. рис. 5.2).

Пусть $\forall x\, P(x) \to Q(x)$ ("для любого x из истинности $P(x)$ следует истинность $Q(x)$", или "при любом x истинность $P(x)$ является достаточным условием истинности $Q(x)$") является теоремой. Назовем это утверждении ***прямой теоремой***. Тогда связанные с ней теоремы будут иметь следующие названия:

$\forall x Q(x) \to P(x)$ ("для любого x из истинности $Q(x)$ следует истинность $P(x)$") – ***обратная теорема***,

$\forall x \overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ ("для любого x из ложности $P(x)$ следует ложность $Q(x)$") – ***противоположная теорема***,

$\forall x \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ ("для любого x из ложности $Q(x)$ следует ложность $P(x)$") – ***теорема, обратная противоположной***.

Если множество истинности условия $P(x)$ импликации прямой теоремы есть подмножество множества истинности ее заключения $Q(x)$, то импликация тождественно истинна во всей области определения переменных (см. рис. 5.2). Это означает, что высказывание $\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ является истинным и следовательно, может быть доказано тогда и только тогда, когда $P \subseteq Q$.

В силу закона контрапозиции включение $P \subseteq Q$ является также условием истинности высказывания $\forall x \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ или, что то же самое, $\overline{Q} \subseteq \overline{P}$.

Высказывания $\forall x Q(x) \to P(x)$ и $\forall x \overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ истинны при условии $Q \subseteq P$. Если же $P \subset Q$, но $Q \not\subset P$ (см. рис 5.2 *г*), то истинность $Q(x)$ является необходимым, но не достаточным условием истинности $P(x)$.

Таким образом, теорема $\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ может быть прочитана так: "при любом x истинность $P(x)$ является достаточным условием истинности $Q(x)$, а истинность $Q(x)$ – необходимым условием истинности $P(x)$"

Теорема $\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ будет доказана, если доказать включение $P \subseteq Q$. Теорема также будет доказана, если доказать включение $\overline{Q} \subseteq \overline{P}$, т.е доказать теорему, обратную противоположной $\forall x \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$. Такой метод доказательства носит название "метод от противного".

Чтобы опровергнуть теорему $\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ достаточно привести единственный ***контрпример***, в котором истинность импликации $P(x) \to Q(x)$ нарушена. В самом деле, представив отрицание импликации конъюнктивной нормальной формой $\overline{P(x) \to Q(x)} = P(x) \wedge \overline{Q}(x)$, получаем $\overline{\forall x P(x) \to Q(x)} = \exists x P(x) \wedge \overline{Q}(x)$. Высказывание $\exists x P(x) \wedge \overline{Q}(x)$ истинно, если найдется хотя бы один $x \in M$, при котором $P(x)$ – истина, а $Q(x)$ – ложь.

Высказывания $\forall x P(x) \leftrightarrow Q(x)$ и $\forall x Q(x) \leftrightarrow P(x)$ истинны, когда выполняются оба включения $P \subseteq Q$ и $Q \subseteq P$, т.е. $P = Q$.

Теорема, содержащая необходимые и достаточные условия, формулируется в виде эквиваленции: $\forall x P(x) \leftrightarrow Q(x)$. Прочитать такое высказывание можно одним из следующих способов: "при любом x $Q(x)$ истинно тогда и только тогда, когда истинным является $P(x)$", " при любом x истинность $P(x)$ является необходимым и достаточным условием истинности $Q(x)$". Для доказательства такой теоремы приходится доказывать прямую $\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ и обратную теоремы $\forall x Q(x) \to P(x)$. Доказательство прямой теоремы, служит доказательством достаточности условия $P(x)$, доказательство обратной – необходимости этого условия. В силу эквивалентности теорем $\forall x$ $P(x) \to Q(x) = \forall x \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ и $\forall x Q(x) \to P(x) = \forall x \overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ доказательством необходимости и достаточности условия может являться любой из следующих вариантов:

$\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ и $\forall x Q(x) \to P(x)$ – доказательство прямой и обратной теорем,

$\forall x$ $P(x) \to Q(x)$ и $\forall x \overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ – доказательство прямой и противоположной теорем,

$\forall x Q(x) \to P(x)$ и $\forall x \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ – доказательство теоремы обратной и теоремы противоположной обратной,

$\forall x \overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$ и $\forall x \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$ – доказательство теоремы противоположной и теоремы противоположной обратной.

Примеры.

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Переформулируем теорему в виде условного предложения: "Пусть x – плоский выпуклый четырехугольник, a и b – отрезки. Если x – ромб и a, b – диагонали x, то a и b взаимно перпендикулярны".

Первое предложение в этой формулировке является описанием множеств значений переменных: $x \in M$, $a, b \in A$, где M – множество плоских выпуклых четырехугольников, A – множество отрезков. Это предложение называют *преамбулой теоремы*.

Условие теоремы представляет собой конъюнкцию одноместного и двуместных предикатов: $P(x) \wedge Q(a, x) \wedge H(b, x)$, где $P(x)$: "x – ромб", $Q(a, x)$: "a – диагональ x", $H(b, x)$: "b – "диагональ x". Предикат $P(x) \wedge Q(a, x) \wedge H(b, x)$ задан на множестве $M \times A^2$. Заключение теоремы предикат $G(a, b)$: "a и b взаимно перпендикулярны", заданный на множестве A^2.

Прямая теорема имеет вид: $\forall x, \forall a, \forall b \left(P(x) \wedge Q(a, x) \wedge H(b, x) \to G(a, b)\right)$.

Обратная теорема: $\forall x, \forall a, \forall b \left(G(a,b) \to P(x) \wedge Q(a,x) \wedge H(b,x)\right)$ –"из перпендикулярности отрезков a и b следует, что они являются диагоналями ромба". Утверждение неверное, легко привести контрпример ложности импликации.

Противоположная теорема: $\forall x, \forall a, \forall b \left(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(a,x) \vee \overline{H}(b,x) \to \overline{G}(a,b)\right)$ –"если четырехугольник x не является ромбом, или отрезки a и b не есть диагонали x, то a и b не перпендикулярны друг другу". Утверждение неверное, легко привести контрпример, ложности импликации.

Теорема противоположная обратной: $\forall x, \forall a, \forall b \left(\overline{G}(a,b) \to \overline{P}(x) \vee \overline{Q}(a,x) \vee \overline{H}(b,x)\right)$ –"если отрезки a и b не перпендикулярны друг другу, то либо четырехугольник x, диагоналями которого они являются, – не ромб, либо хотя бы один из них не является диагональю x". Утверждение истинное.

Условие прямой теоремы является условием достаточным, но не является необходимым. Условие обратной теоремы является условием необходимым, но не достаточным.

2. Система линейных алгебраических уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг главной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Преамбула теоремы:, $A' = (a_{ij}|b_i)_{m\times(n+1)}$ – матрица, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – ее подматрица, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – n-мерный вектор столбец, r_1 – ранг матрицы A, r_2 – ранг матрицы A'.

Введем предикаты:

$H(A, A')$: "$r_1 = r_2$",

$G(A', A, x)$: "$Ax = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$".

Прямая теорема: $\forall A \forall A' \exists x \left(H(A, A') \to G(A', A, x)\right)$, истинное высказывание,

Обратная теорема: $\forall A \forall A' \exists x \left(G(A', A, x) \to H(A, A')\right)$ – "если найдется вектор x, такой что $Ax = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, то $r_1 = r_2$", истинное высказывание.

Противоположная теорема: $\forall A \forall A' \exists x \left(\overline{H}(A, A') \to \overline{G}(A', A, x)\right)$ – "если ранги матриц не равны, то решения системы не существует", истинное высказывание.

Теорема, обратная противоположной: $\forall A \forall A' \exists x \left(\overline{G}(A', A, x) \to \overline{H}(A, A')\right)$ – "если система не имеет решения, то ранги матриц не равны", истинное высказывание.

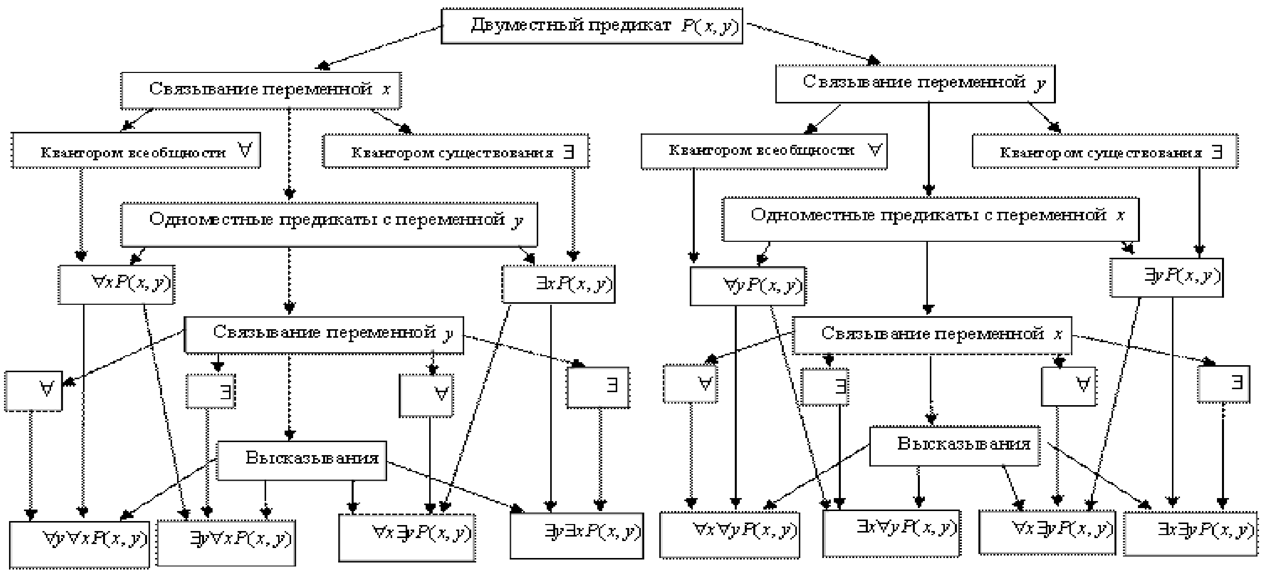


Рис. 5.1. Схема связывания переменных двуместного предиката кванторами

6. Элементы теории графов

6.1. Основные понятия и определения

При изучении бинарных отношений под графом понималась схема, состоящая из точек – вершин графа, и связывающих эти точки попарно отрезков или дуг – ребер графа. Такая схема позволяет удобно и наглядно задавать бинарные отношения на конечном множестве. Однако помимо иллюстративных целей граф может служить удобной математической моделью при описании самых разнообразных объектов.

Например, графом может быть представлен план работ по реализации какого-либо проекта, при этом вершинами графа являются этапы работ, а ребра указывают последовательность выполнения этапов. С помощью такого графа удобно вычислять время реализации проекта, что достаточно непросто, если некоторые работы могут выполняться параллельно, а также резервы времени на каждом этапе.

В виде графа может быть представлена блок-схема программы: вершины – блоки, ребра – разрешенные переходы от одного блока к другому. Такое изображение позволяет найти кратчайший путь от одного блока к другому.

Представление графом сетей нефтепроводов, сетей связи, транспортных сетей позволяет рассчитывать их пропускную способность и выявлять "узкие места".

Существует также множество логических и занимательных задач, решение которых предполагает использование графов.

Определение 6.1. ***Графом*** G называют пару множеств (V, E), где V – множество ***вершин*** графа (точек); E – семейство ***ребер*** графа (отрезков или дуг, соединяющих вершины в пары):

$V=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$;

$E=\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$;

$e_i = (v_J, v_K)$ – i-е ребро графа G; v_J, v_K – *концевые вершины* этого ребра (i=1,2,3,…,m; vj,k=1,2,…,n).

Если концевые вершины ребра совпадают, то ребро образует ***петлю*** (дугу, начало и конец которой совпадают). Пример графа, имеющего четыре вершины и восемь ребер, одно из которых – петля (e_8), приведен на рис. 6.1. Ребра e_4, e_5 кратные или параллельные друг другу, так же как и ребра e_6 и e_7.

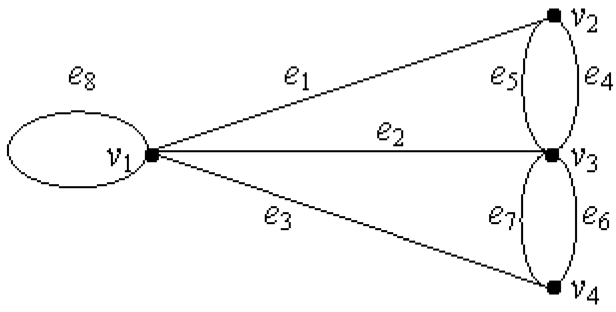


Рис. 6.1. Пример графа, имеющего четыре вершины и восемь ребер, одно из которых – петля (e_8)

Ребра графа могут быть ориентированными или неориентированными. Граф на рис. 6.1 имеет неориентированные ребра. При изучении бинарных отношений были использованы графы, все ребра которых ориентированы. Такие графы называют *ориентированными графами* или ***орграфами***.

Если вершины v_i и v_j ($i \neq j$) соединены ребром $e_k = (v_i, v_j)$, то их называют ***смежными вершинами***. Если ребра e_k, e_l имеют общую вершину, то их называют ***смежными ребрами***. Если вершина v_i является концом ребра e_j, то v_i называют ***вершиной, инцидентной*** ребру e_j, а e_j – ***ребром, инцидентным вершине*** v_i.

Термин "степень вершины графа" является числовой характеристикой каждой из его вершин.

Степень вершины – это число ребер, инцидентных данной вершине, причем петли учитываются дважды.

Степень вершины v обозначают символом $r(v)$.

Если степень вершины графа равна нулю, то вершину называют ***изолированной вершиной***. На рис. 6.2 изолирована вершина v_4.

Степень вершины можно подсчитать по числу концов ребер, входящих в эту вершину или выходящих из нее. Поскольку петля и входит в вершину и выходит из нее, ее вклад в степень вершины равен двум. Каждое ребро, не являющееся петлей, вносит вклад в степень ровно двух вершин графа. Следовательно, удвоенное число ребер равно сумме степеней его вершин:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(v_i) = 2m \qquad (6.1)$$

,

где n – число вершин графа, m – число его ребер.

Из равенства (6.1) следует, что число вершин нечетной степени четно в любом графе.

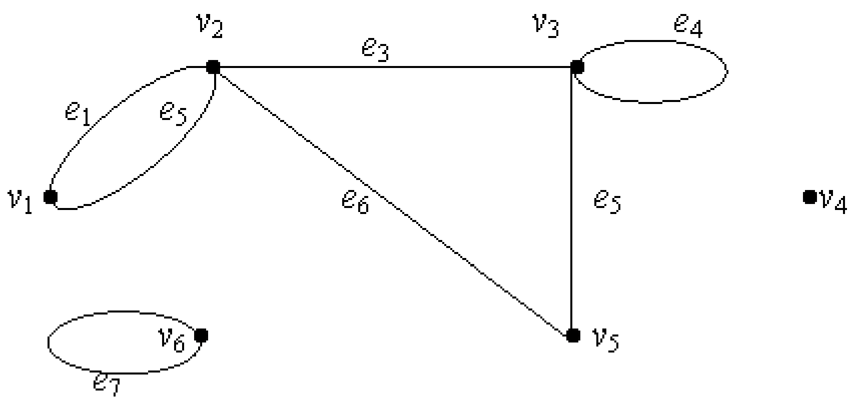


Рис. 6.2. Пример графа, имеющего шесть вершин и семь ребер

Граф считают заданным, если известны его вершины, ребра и отношение инцидентности между множествами вершин и ребер. Наряду с геометрическим изображением графа, используют задание его с помощью матриц.

Задать граф можно с помощью матриц двух видов:

1) матрицы смежности;

2) матрицы инцидентности.

Матрица смежности графа, построенного на n вершинах, представляет собой матрицу, порядка n: $A=[a_{ij}]_{nxn}$, где a_{ij} – это число ребер, соединяющих вершины v_i и v_j, причем петли, "соединяющие" вершину с самой собой, считаются дважды.

Например, матрица смежности графа, изображенного на рис. 6.1, имеет вид

$$\begin{array}{c|cccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ v_1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Матрица инцидентности графа, имеющего n вершин и m ребер, – это матрица $I=[b_{ij}]_{n'm}$, состоящая из n строк и m столбцов.

Если граф ориентированный, тогда:

$b_{ij} = 1$, если ребро e_j выходит из вершины v_i;

$b_{ij} = –1$, если ребро e_j входит в вершину v_i,;

$b_{ij} = 0$, если ребро e_j неинцидентно вершине v_i или является петлей при этой вершине.

Если граф неориентирован, тогда:

$b_{ij} = 1$, если ребро e_j инцидентно вершине v_i и не является ее петлей;

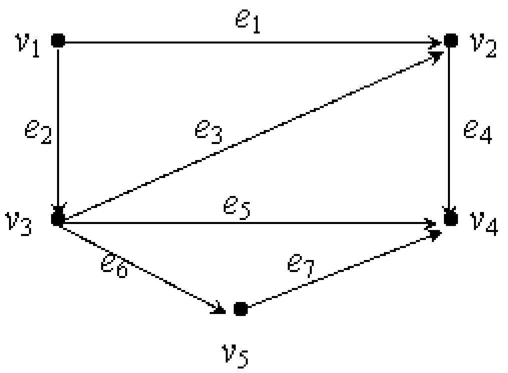
$b_{ij} = 2$, если e_j – петля при вершине v_i;

$b_{ij} = 0$, если ребро e_j неинцидентно вершине v_i.

Для графа, приведенного на рис. 6.2, матрица инциденций имеет вид

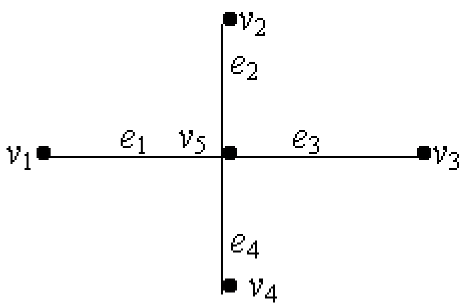
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \end{array}$$

В качестве примеров запишем матрицы инциденций графов, приведенных на рис. 6.3 и 6.4.



$$I_1 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \end{array}$$

Рис. 6.3. Простой орграф G_1, имеющий пять вершин и семь ребер



$$I_2 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \end{array}$$

Рис. 6.4. Простой граф G_2, имеющий пять вершин и четыре ребра

Простой граф – это граф, не содержащий петель и кратных ребер. Если к тому же в графе нет изолированных вершин, то каждый столбец матрицы инциденций такого графа содержит два и только два отличных от нуля числа: для орграфов – это 1 и –1 (см. рис. 6.3), для неориентированных графов – две единицы (рис. 6.4). Следовательно, если вычеркнуть любую строку матрицы инциденций, информация, которая в ней содержится, не уменьшится: вычеркнутая строка легко восстанавливается по оставшимся строкам. Если I – матрица инциденций графа, имеющего n вершин, то любую ее подматрицу I_0, содержащую $(n–1)$ строку, называют *матрицей инциденций, усеченной по вершине* v_j, где v_j – вершина, соответствующая вычеркнутой строке матрицы I.

Пусть известна усеченная матрица инциденций I_0 простого графа G на пяти вершинах:

$$I_0 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Восстановим I матрицу и граф G (рис. 6.5).

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

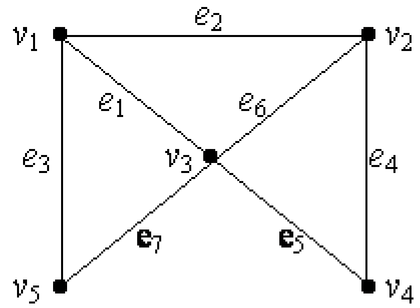


Рис. 6.5. Восстановленный граф G

Отметим, что строки матрицы инциденций называют ***векторами инциденций*** графа, т. е. граф можно рассматривать как систему из n m-мерных векторов, где n – число вершин, а m – число ребер графа.

Задачи, в которых используются графы, решают, как правило, с помощью ЭВМ, где графы могут быть представлены своими матрицами смежности или матрицами инциденций. С целью экономии машинной памяти матрицы инциденций *простых* графов можно сокращать до *списков ребер,* указывая для каждого ребра номера инцидентных ему вершин. Если граф ориентированный, то первым записывают номер вершины, из которой *выходит* данное ребро, а вторым – номер вершины в которую *входит* (или наоборот). Для неориентированных графов порядок записи вершин не важен.

В качестве примера приведем списки ребер для графов G_1 и G_2, изображенных на рис. 6.3 и 6.4.

Список ребер графа G_1

Ребро	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7

Список ребер

графа G_2

e_1	e_2	e_3	e_4

Номера инцидентных вершин	1	1	3	2	3	3	5
	2	3	2	4	4	5	4

1	2	3	4
5	5	5	5

Графы G_1 и G_2 допускают краткую запись:

$G_1 = \{V_1, E_1\} = \{\{1,2,3,4,5\}, \{(1,2), (1,3), (3,2), (2,4), (3,4), (3,5), (5,4)\}\}$,

где $V_1 = \{1,2,3,4,5\}$ – множество вершин графа G_1,

$E_1 = \{(1,2), (1,3), (3,2), (2,4), (3,4), (3,5), (5,4)\}$ – список ребер графа G_1.

$G_2 = \{V_2, E_2\} = \{\{1,2,3,4,5\}, \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5)\}\}$,

где $V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ – множество вершин графа G_2

$E_2 = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5)\}$ – список ребер графа G_2.

Определение 6.2. ***Взвешенным графом*** называют граф, в котором каждому ребру сопоставлено число – вес ребра.

Простой взвешенный граф может быть представлен своей матрицей весов $W = [w_{ij}]_{n \times n}$, где n число вершин графа, w_{ij} вес ребра, соединяющего вершину v_i с вершиной v_j.

6.2. Подграфы и части графа. Векторное пространство частей графа

Определение 6.3. ***Подграфом графа*** $G = \{V, E\}$ называют граф $G' = \{V', E'\}$, если $V' \subseteq V$ и $E' = E \cap (V')^2$.

Определение 6.4. ***Частью графа*** $G = \{V, E\}$ называют граф $G'' = \{V'', E''\}$, если $V' \subseteq V$ и $E'' \subseteq E \cap (V'')^2$.

Пример.

На рис. 6.6 изображен граф $G = \{V, E\} = \{\{1,2,3,4\}, \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}\}$,

подграф графа G: $G' = \{V', E'\} = \{\{1,2,3\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\}\}$,

и *части* графа G:

$G_1'' = \{V_1'', E_1''\} = \{\{1,2,3\}, \{(1,2), (1,3)\}\}$ и $G_2'' = \{V_2'', E_2''\} = \{\{1,2,3,4\}, \{(1,2), (1,3)\}\}$

Граф G' является подграфом графа G, так как $V' = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$,

$(V')^2 = (V'')^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;

$E \cap (V')^2 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\} \cap$

$\cap \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\} = E'$.

Следовательно, $E' = E \cap (V')^2$.

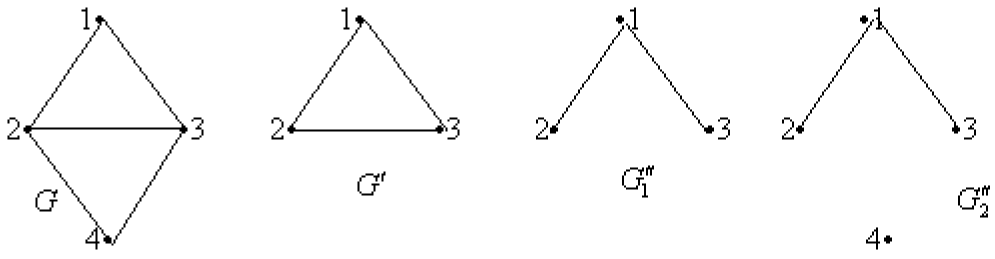


Рис. 6.6. Граф G, его подграф G' и его части G_1'' и G_2''

Аналогично проверяем, что $E_1'' \subset E \cap (V_1'')^2$ и $E_2'' \subset E \cap (V_2'')^2$, а значит, G_1'' и G_2'' есть части графа G.

Обратим внимание на то, что если в часть $G'' = \{V'', E''\}$ графа $G = \{V, E\}$ включены все вершины графа, т.е. если $V'' = V$, то $E'' \subseteq E$.

Рассмотрим именно такой случай. Если в часть графа G включены все вершины графа, то число различных частей графа G определяется числом его ребер, поскольку каждая часть соответствует одному из подмножеств множества ребер графа G. Если число ребер графа G равно m, то граф G имеет 2^m частей.

Пример.

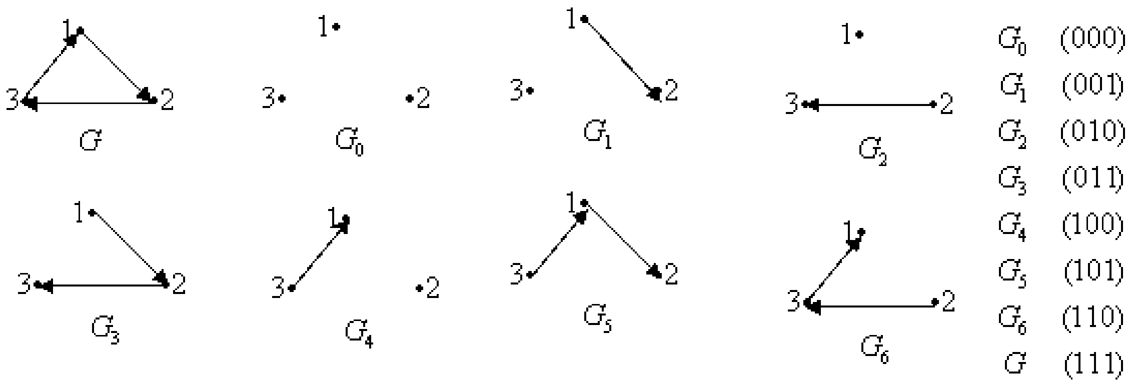


Рис. 6.7. Части графа $G = \{\{1,2,3\}, \{(1,2),(1,3),(3,1)\}\}$
и их представление двоичными векторами

Задан граф $G = \{\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3),(3,1)\}\}$, требуется найти все его части.

Все части графа G показаны на рис. 6.7.

Граф $G_0 = \{\{1,2,3\},\varnothing\}$ является пустой частью, все его вершины изолированы.

Сам граф G, в соответствии с определением подмножества, является частью самого себя.

Поскольку любое подмножество универсального множества может быть задано характеристической функцией, то и все части графа G могут быть записаны как трехмерные двоичные векторы, каждый из которых является характеристической функцией соответствующей части. В результате получаем множество трехмерных двоичных векторов (см. рис. 6.7).

Двоичные векторы, являясь элементами множества B^3, позволяют выполнять над своими координатами все булевы операции – отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, сложение по модулю 2, при этом результат выполнения таких операций есть снова вектор из B^3. Следовательно, B^3 является векторным пространством, замкнутым, относительно булевых операций.

В случае с графами большую роль играет операция сложения по модулю 2 или кольцевая сумма, поскольку позволяет представлять любую часть графа G как линейную комбинацию других его частей.

Табл.6.1

Таблица сложения по модулю 2 булевых переменных

x_i	x_j	$x_i \oplus x_j$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Например,

$G_2 \oplus G_3 = (001) \oplus (011) = (0 \oplus 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1) = (0,1,0) = G_1$,

$G_3 \oplus G_3 \oplus G_5 = (011) \oplus (011) \oplus (101) = (0 \oplus 0 \oplus 1, 1 \oplus 1 \oplus 0, 1 \oplus 1 \oplus 1) = (101) = G_5$.

Центральный вопрос при изучении векторных пространств – выделение базиса. В качестве базиса трехмерного векторного пространства выбирают ортонормированный базис $\vec{i} = (001), \vec{j} = (010), \vec{k} = (100)$. Эти же векторы могут служить базисом пространства частей графа G, так как любая часть графа G может быть представлена линейной комбинацией графов G_1, G_2 и G_4: $G_i = xG_1 \oplus yG_2 \oplus zG_4, \quad x, y, z \in \{0,1\}$. К примеру, $G_6 = 1 \cdot G_1 \oplus 1 \cdot G_2 \oplus 0 \cdot G_4$.

Сделаем выводы из рассмотренного примера.

Выводы.

1. С графом G, содержащим m ребер, связано пространство его частей, причем каждый элемент этого пространства может быть записан как m-мерный двоичный вектор.

2. Любой граф, содержащий m ребер, имеет 2^m частей, включая пустую часть и сам граф G.

3. Размерность пространства частей графа равна m, базисом пространства могут быть выбраны m графов, каждый из которых имеет по одной ненулевой координате, причем никакие два базисных графа не содержат одноименных ребер.

4. Любая часть графа G может быть представлена линейной комбинацией базисных графов.

Выполняя конъюнкцию и дизъюнкцию компонент двоичных векторов, будем получать графы, которые называют пересечением и объединением графов.

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, выполним объединение, пересечение и найдем дополнения нескольких частей графа G.

$G_1 \cup G_3 = (001) \vee (011) = (\max(0,0), \max(0,1), \max(1,1)) = (0,1,1) = G_3$,

$G_1 \cap G_3 = (001) \wedge (011) = (\min(0,0), \min(0,1), \min(1,1)) = (0,0,1) = G_1$,

$\overline{G}_1 = \overline{(001)} = (1-0, 1-0, 1-1) = (1,1,0) = G_6$,

$\overline{G}_5 = \overline{(101)} = (1-1, 1-0, 1-1) = (010) = G_2$.

6.3. Обходы графа

Во многих задачах, решаемых с использованием графов, требуется проложить маршрут от одной вершины графа к другой или обойти все его вершины, учитывая те или иные ограничения.

Смысл такой задачи на интуитивном уровне ясен, но требуется уточнить понятия, используемы при решении подобного рода задач.

Прежде всего, уточним термины "маршрут", "цепь", "цикл" и "путь". Эти четыре понятия находятся в следующем соотношении: пути и циклы – это особые виды цепей, цепь – особый вид маршрута.

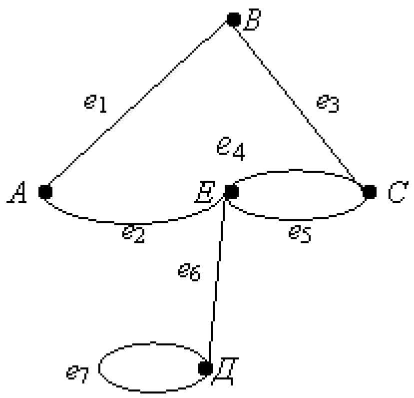
Маршрут – это последовательность вершин и ребер графа, следуя по которым, можно попасть из одной его вершины в другую.

Цепь – это маршрут без повторяющихся ребер.

Путь – это цепь, все вершины которой (за исключением, быть может, начальной и конечной) различны.

Цикл – это цепь, у которой совпадают начальная и конечная вершины, а все остальные различны.

Пример.



Можно составить следующие маршруты из A в C в графе G:

M_1: $A - e_1 - B - e_3 - C$ (путь);

M_2: $A - e_2 - E - e_6 - Д - e_7 - Д - e_6 - E - e_5 - C$ (не цепь);

M_3: $A - e_1 - B - e_3 - C - e_5 - E - e_4 - C$ (цепь, но не путь).

Циклы:

$A - e_1 - B - e_3 - C - e_4 - E - e_2 - A$;

$E - e_4 - C - e_5 - E$;

$Д - e_7 - Д$.

Граф называют ***связным***, если из каждой его вершины существует путь в любую другую его вершину.

Граф, рассмотренный в примере, является, связным. Если удалить из него ребро e_6, то он потеряет связность и распадется на ***компоненты***: одна из компонент будет содержать вершину *Д* и петлю e_7, вторая компонента – вершины *A,B,C,E*, связанные между собой всеми оставшимися ребрами.

Для представления данных в алгоритмах на дискретных структурах часто используются графы, которые называются ***деревьями***.

Определение 6.5. ***Деревом*** называют связный неорграф, не содержащий циклов.

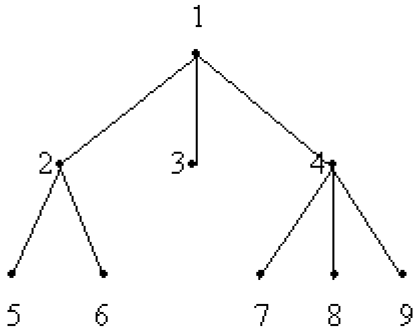


Рис. 6.8. Корневое дерево с тремя поддеревьями

На рис. 6.8 показано, так называемое, ***корневое дерево***. Одна из вершин корневого дерева (вершина 1) выделена, ее называют ***корнем дерева***. Оставшиеся вершины разбиты на ***поддеревья*** (поддерево с вершинами 2,5,6 и поддерево 4,7,8,9). Вершины 5,6,3,7,8,9 называют ***листьями дерева***.

Определение 6.6. Несвязный неорграф, компонентами которого являются деревья, называют ***лесом***.

Если граф связный, но не является деревом, в нем всегда можно выделить часть, включающую все вершины и образующую дерево. Такую часть графа называют ***остовом графа***. Если граф несвязен, то можно превратить в дерево каждую его компоненту. Полученная совокупность деревьев носит название ***остовного леса***.

Вообще говоря, в графе можно выделить несколько различных остовов. Каждый из них будет являться деревом, включающим все вершины графа, а следовательно, число ребер любом из остовов будет на единицу меньше числа вершин графа. Если выделен какой-либо остов, то все ребра графа, не вошедшие в этот остов, образуют ***коостов, соответствующий данному остову***.

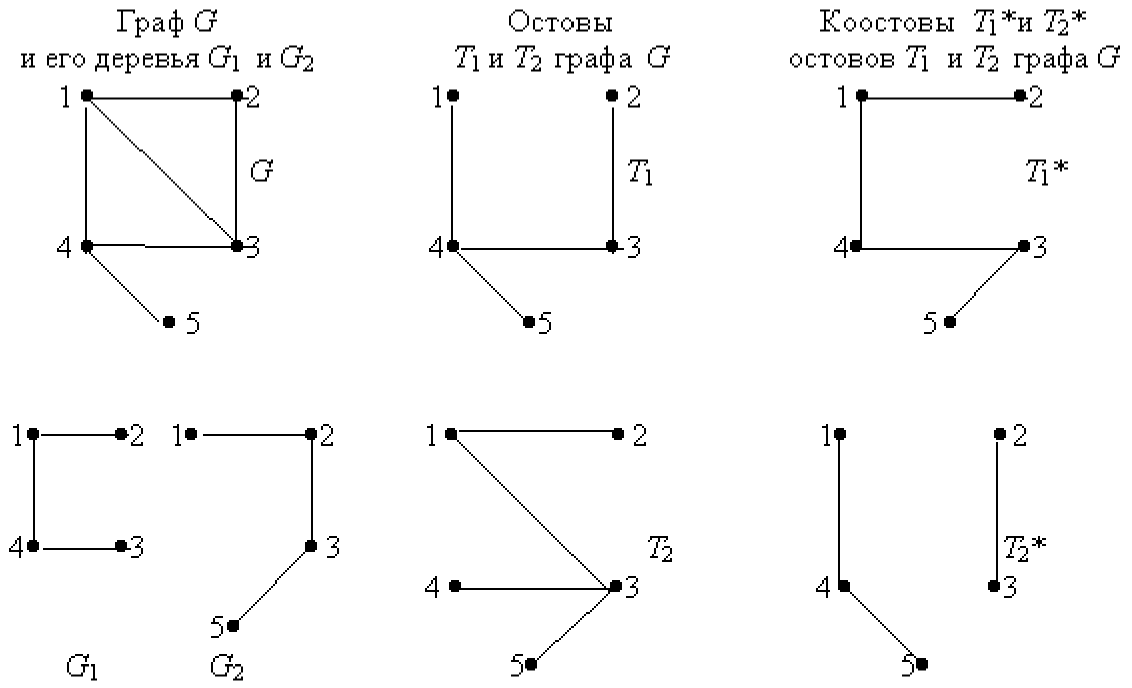


Рис. 6.9. Граф G, деревья G_1 и G_2 графа G,
остовы T_1 и T_2 графа G, соответствующие остовам коостовы T_1^* и T_2^*

На рис. 6.9 показан пример выделения деревьев, остовов и коостовов из графа G.

Относительно остовов и коостовов графа справедливы следующие утверждения. (Доказательства этих утверждений см. [Свами])

Утверждение 1. Если граф G является деревом, то существует только один путь между любыми двумя его вершинами.

Утверждение 2. Если граф G связный, и число его ребер на единицу меньше числа его вершин ($m = n–1$), то G – дерево.

Утверждение 3. Если G – ациклический граф и при соединении двух его несмежных вершин образуется ровно один цикл, то граф G – дерево.

Приведем также несколько утверждений относительно остовов графа.

Утверждение 4. Подграф T графа G является остовом G тогда и только тогда, когда T ацикличен и число его ребер на единицу меньше числа вершин графа G.

Утверждение 5. Граф G является связным тогда и только тогда, когда он имеет остов.

Согласно *утверждению 2*, если граф является деревом и имеет n вершин, то число его ребер на единицу меньше, т.е. $n-1$. Из любой вершины дерева имеется путь в любую другую вершину дерева. Это и делает деревья удобной математической моделью при решении задач об обходе элементов множества, о поиске пути от одного элемента к другому. Рассмотрим решение задачи такого рода, которая достаточно часто встречаются в практике.

Пусть требуется найти в графе какую-либо вершину с заданными свойствами, или выполнить полный обход вершин графа. Целью полного обхода графа может являться, например, расстановка меток на каждой вершине.

Обходы графа по глубине и по ширине.

Если граф не является деревом, выберем какой-либо остов графа.

Пусть $G = \{V, E\}$ – связный неориентированный граф, T – какой-либо остов графа G, **1** – любая фиксированная вершина, выбранная корнем остова. Разместим граф по этажам таким образом, чтобы корень дерева находился на самом высоком этаже, а листья – на самом низком (см. рис. 6.10, 6.11).

Обходы графа начинаются с корня остова (вершина **1**).

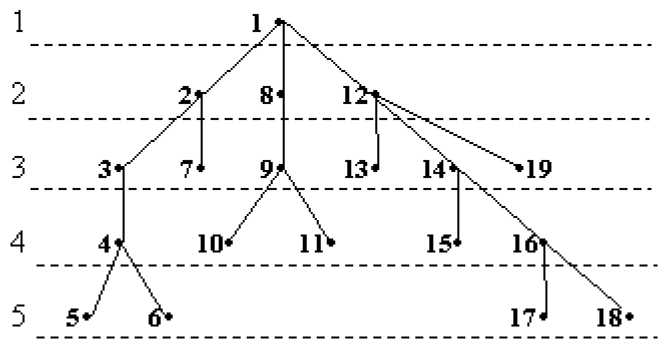


Рис. 6.10. Обход графа по глубине

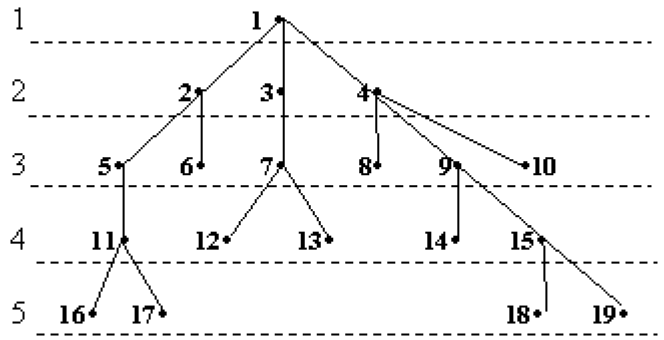


Рис. 6.11. Обход графа по ширине

При обходе по глубине выбираем любую, смежную с корневой вершину, например вершину **2**. Если эта вершина оказывается *висячей* т.е. не имеет смежных с ней вершин на более низких эажах, то возвращаемся до ближайшего разветвления и просматриваем вершины другого, еще не пройденного маршрута в таком же порядке.

При обходе по ширине (рис. 6.11) просмотр вершин ведется по этажам. Переход к вершинам следующего этажа производится только после просмотра вершин данного этажа.

Очевидно, что при обходе всех вершин, (например, с целью пометить каждую вершину), оба вида поиска эквивалентны. Если же достаточно найти одну вершину с определенным свойством, то целесообразность применения поиска по глубине или ширине определяется структурой дерева. Если дерево широкое, а висячие вершины расположены на сравнительно близких этажах, то целесообразно вести поиск по глубине. Для глубоких узких деревьев, когда висячие вершины могут встретиться на разных этажах и их разброс по этажам достаточно велик, предпочтение отдается поиску по ширине.

Поиск в глубину можно осуществлять и на ориентированном графе. Если граф ориентированный, то находясь в вершине x необходимо выбрать ребро (x,y) только выходящее из x. Исследовав все ребра, выходящие из y, возвращаемся в x даже тогда, когда y имеет инцидентные ребра, но они являются входящими в y.

6.4. Системы разрезов и циклов графа

Прежде всего, определим понятие разрезающего множества и разреза графа.

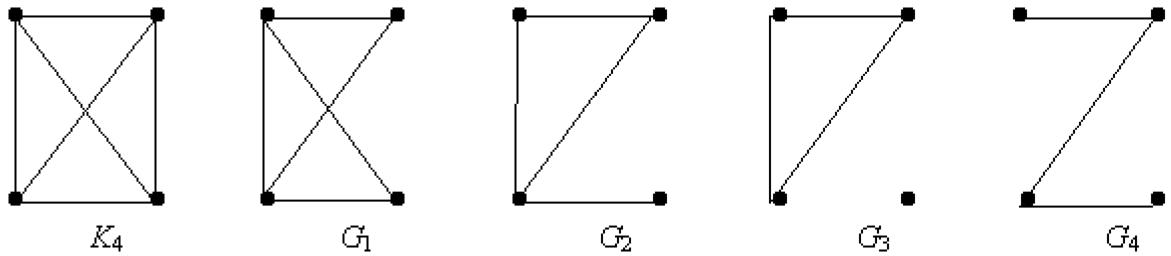


Рис. 6.12. Граф K_4 и его части G_1, G_2, G_3, G_4

Рассмотрим полный граф K_4, а также некоторые его части, полученные путем последовательного исключения ребер (рис. 6.8).

Примечание. Простой граф, каждая вершина которого соединена ребром с каждой другой его вершиной, называют ***полным графом***. Полный граф, имеющий n вершин принять обозначать K_n.

Части G_1 и G_2 остаются связными, в части G_3 связность нарушается: граф распадается на компоненты – изолированную вершину и K_3. Если в подграфе G_2 убрать другое ребро, граф останется связным (G_4), однако *степень его связности* значительно ниже, чем в K_4: для нарушения связности K_4 пришлось вынуть из него 3 ребра, для нарушения связности G_4 достаточно удалить одно из трех его ребер.

Определение 6.7. ***Разрезающим множеством*** связного графа называют множество ребер, которые нужно удалить из графа, чтобы он перестал быть связным.

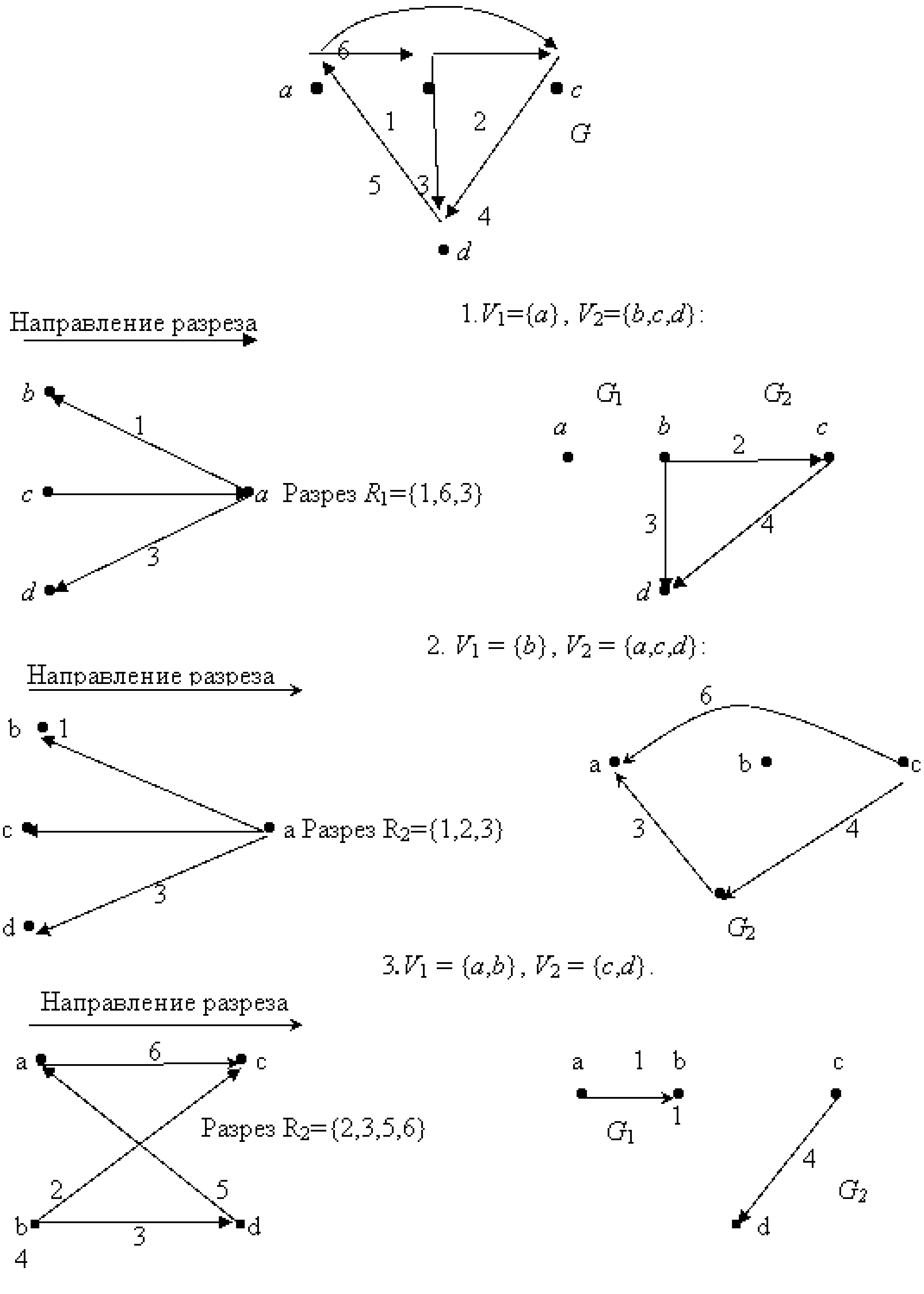


Рис. 6.13. Связный ориентированный граф G и его разрезы

Пусть V_1 и V_2 – два непересекающихся подмножества множества вершин связного графа G=(V,E).

Определение 6.8. ***Разрезом графа*** G называют разрезающее множество, разделяющее граф на компоненты G_1= (V_1,E_1) и G_2 = (V_2,E_2).

Отметим, что в ориентированном графе выбирается ***направление разреза***, например, от множества V_1 к множеству V_2 или наоборот. Направление ребер разреза либо совпадает с выбранным направлением, либо противоположно ему. В неориентированном графе направление ребер не учитывается.

Рассмотрим несколько разрезов графа G (рис. 6.13). (Направление разрезов выбрано произвольно).

Матрицей разрезов графа называют матрицу $Q = (q_{ij})_{k\times m}$, где k – число всех разрезов графа, m – число его ребер.

Причем для орграфа:

q_{ij} = 1, если ребро e_j ÎR_i и его направление совпадает с направлением разреза R_i;

q_{ij} = –1, если ребро e_j ÎR_i и его направление противоположно направлению разреза R_i;

q_{ij} = 0 , если ребро e_j ÏR_i.

Для неориентированного графа:

q_{ij} = 1, если ребро e_j ÎR_i;

q_{ij} = 0, если ребро e_j ÏR_i (i= 1, 2,…, k; j= 1, 2,…, m).

Во многих практически важных задачах, использующих графы, возникает необходимость найти все разрезы графа. Например, при анализе электрических цепей, анализе сетей и пр.

Составим несколько строк матрицы разрезов, рассмотренных в приведенном выше примере:

$$Q = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ R_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ R_2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \text{¼} & \text{¼} & \text{¼} & \text{¼} & \text{¼} & \text{¼} & \text{¼} \end{array}$$

Подчеркнем, что составление матрицы Q осталось незаконченным, существует еще несколько разрезов, которые должны дать новые строки в матрице Q.

Строки матрицы разрезов можно рассматривать как *двоичные векторы* линейного пространства над полем B={0,1}. Их можно складывать по модулю 2, находить их скалярное произведение.

Наряду с разрезами, большое значение в прикладных задачах имеют *циклы* графа. Для записи циклов графа используется *матрица циклов*, или *цикломатическая матрица*. Составляется эта матрица аналогично матрице разрезов. В орграфе предварительно выбирается *направление обхода цикла*.

Пусть $B = (b_{ij})_{k \times m}$ – цикломатическая матрица графа G. Здесь k – число всех циклов G, m – число его ребер. Причем для орграфа:

b_{ij} = 1, если e_jÎC_i (i-му циклу графа G) и направление ребра совпадает с направлением обхода цикла C_i ;

b_{ij} = –1, если e_j ÎC_i и направление ребра e_j противоположно направлению обхода цикла;

b_{ij} = 0, если e_j ÏC_i .

Для неориентированного графа:

b_{ij} = 1, если e_j ÎC_i ;

b_{ij} = 0, если e_j ÏC_i (i= 1, 2,…, k; j= 1, 2,…, m).

Запишем несколько строк матрицы циклов графа, представленного на рис. 6.13:

C_1 = {1,3,5};

C_2 = {2,4,3};

C_3 = {1,2,4,5}.

1 2 3 4 5 6

$$B = \begin{array}{c|cccccc|} C_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C_2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ C_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .. \end{array}$$

Строки цикломатической матрицы, как и строки матрицы разрезов, можно рассматривать как двоичные векторы линейного пространства над полем B={0,1}.

Любой остов графа G порождает *базисную систему циклов* графа G и *базисную систему разрезов* этого графа. Рис. 6.14, 6.15 и 6.16 иллюстрируют получение базисной системы циклов и базисной системы разрезов графа G относительно выбранного остова.

Пусть G – связный граф и T – какой-либо из остовов этого графа (рис. 6.14).

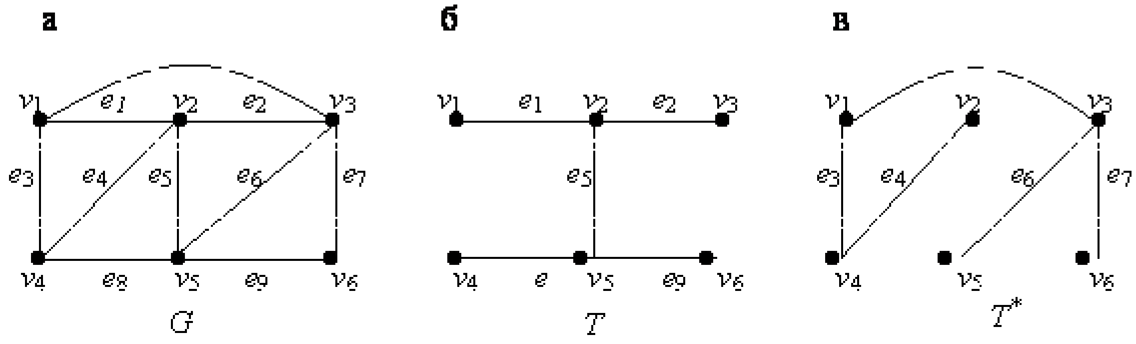


Рис. 6.14. граф G (а), его остов T (б) и коостов T^*(в)

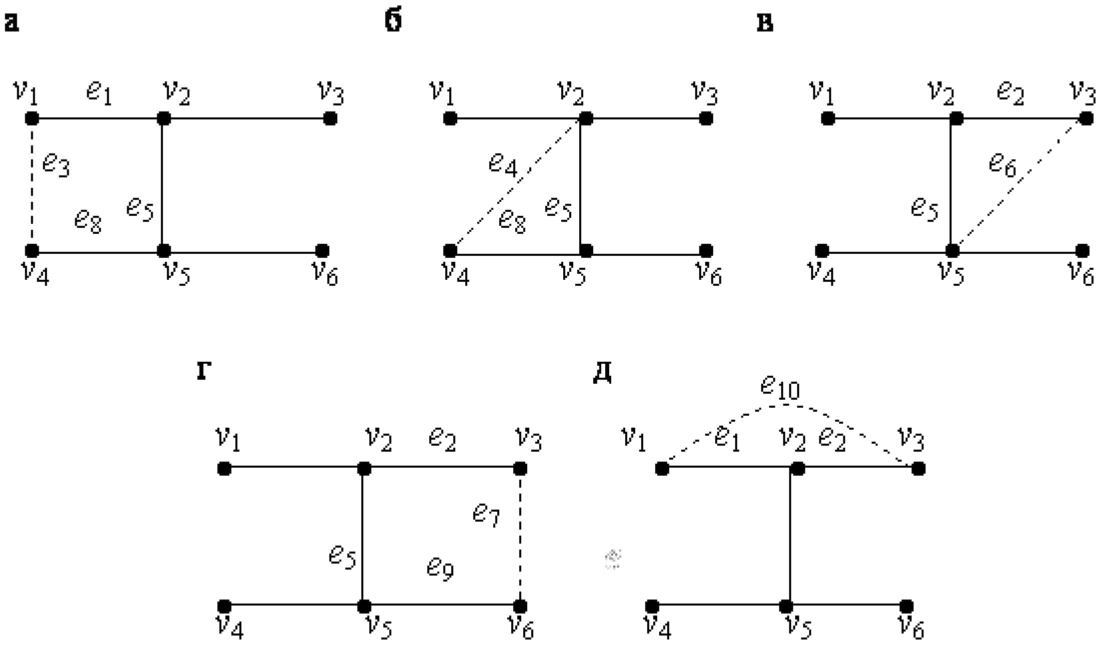


Рис. 6.15. Построение базисных циклов графа G относительно остова T: а– $C_{f1}=\{e_1,e_3,e_5,e_8\}$; б– $C_{f2}=\{e_4,e_5,e_8\}$; в– $C_{f3}=\{e_2,e_5,e_6\}$; г– $C_{f4}=\{e_2,e_5,e_7,e_9\}$; д– $C_{f5}=\{e_1,e_2,e_{10}\}$ (индекс “f” указывает на то, что цикл базисный)

Базисная система циклов графа G относительно остова T.

Если дополнить остов T каким-либо ребром коостова T^*, образуется ровно один цикл (см. *утверждение 3* в разделе 6.3) графа G. Перебирая все ребра коостова T^*, получим систему циклов графа, которую и называют *базисной системой циклов графа G относительно остова T*.

При составлении цикломатической матрицы системы базисных циклов графа G необходимо учесть следующее:

1) выбор остова T разбивает множество E ребер графа на два непересекающихся подмножества: множество ребер коостова T^* и множество ребер остова остова T;

2) каждое ребро коостова порождает один и только один базисный цикл.

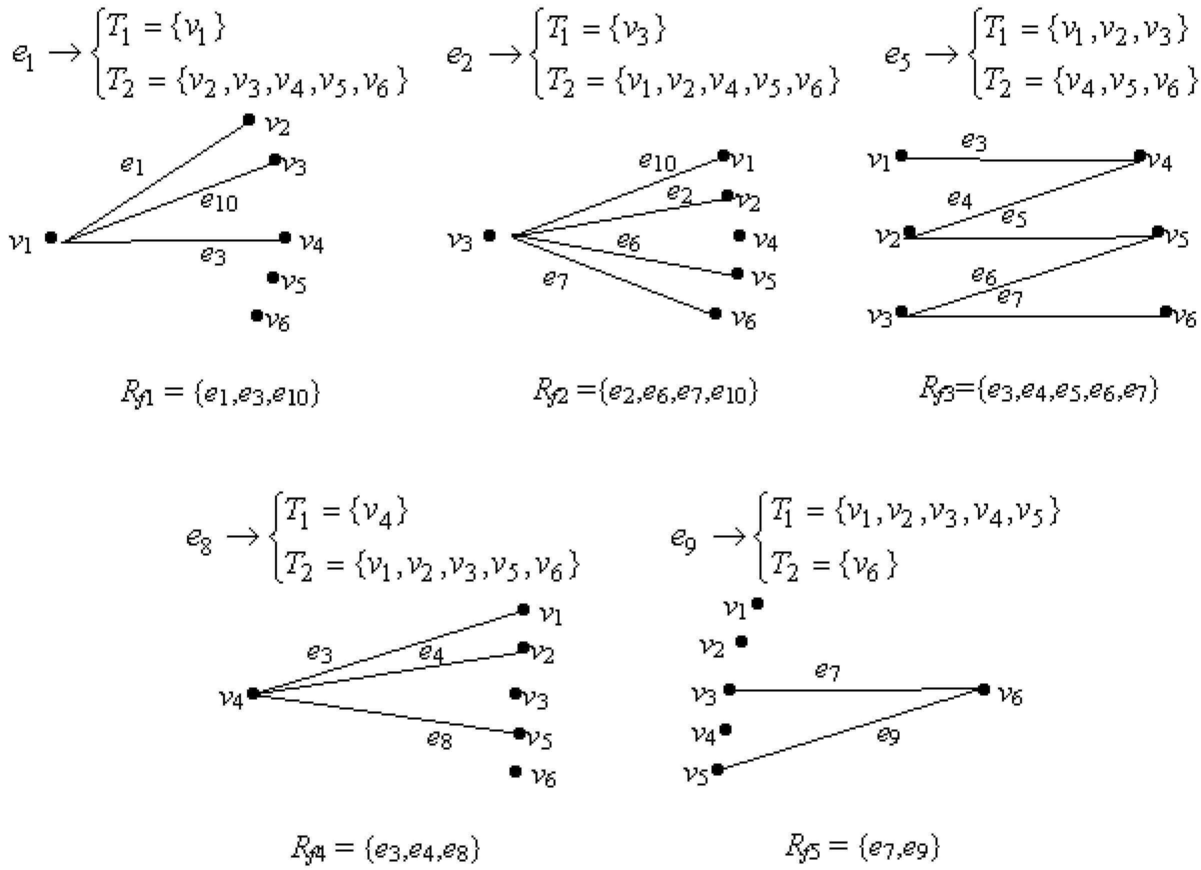


Рис.6.16. Составление системы базисных разрезов графа относительно остова T

В базисной цикломатической матрице первые столбцы соответствуют ребрам коостова, за ними идут столбцы, соответствующие ребрам остова. Число строк матрицы (число базисных циклов) равно числу ребер коостова.

		Ребра коостова T^*					Ребра остова T				
		e_3	e_4	e_6	e_7	e_{10}	e_1	e_2	e_5	e_8	e_9
	C_{f1}	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
	C_{f2}	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
$B_f =$	C_{f3}	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
	C_{f4}	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
	C_{f5}	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
		U					B_{fT}				

Базисная цикломатическая матрица B_f графа G распадается на две подматрицы: U – единичная матрица, соответствующая ребрам коостова T^*, порождающим базисные циклы, B_{fT} – матрица, соответствующая ребрам остова T, называемую ***фундаментальной цикломатической матрицей графа G по остову T***.

Пусть связный граф G имеет n вершин и m ребер. Любой остов T такого графа содержит n–1 ребро, и, следовательно, соответствующий ему коостов T^* содержит $k = m–(n–1)$ ребер. Учитывая, что каждое ребро T^* порождает базисный цикл, можно утверждать, что *любая система базисных циклов графа состоит из $k = m–n+1$ циклов*.

Таким образом, любая базисная цикломатическая матрица графа G – это матрица размерности k´m. Она состоит из двух подматриц: единичной матрицы порядка k и фундаментальной цикломатической матрицы графа G по остову T , которая имеет размерность k´(n –1).

B_f = [U½B_{fT}], (6.2)

где B_f – базисная цикломатическая матрица графа G по остову T размерностью k´m (k=m–n+1); U – единичная матрица порядка k, соответствующая ребрам коостова T^*; B_{fT} – фундаментальная цикломатическая матрица графа G по остову T размерностью k´(n–1), соответствующая ребрам остова T.

Найдем базисную систему разрезов, базисную матрицу разрезов и фундаментальную матрицу разрезов графа G по остову T (см. рис. 6.16). Заметим, что если изъять одно из ребер остова T, то остов распадется на две компоненты, при этом множество вершин графа окажется разбитым на два непересекающихся подмножества T_1 и T_2. Разрез графа, соответствующий такому разбиению, является одним из искомых базисных разрезов. Проделывая аналогичную процедуру для каждого ребра остова T, получим всю систему базисных разрезов графа. Поскольку число ребер любого остова на единицу меньше числа вершин графа и каждое ребро дает один базисный разрез, то число базисных разрезов по любому остову равно n–1, где n – число вершин графа.

На рис. 6.16 показана процедура составления системы базисных разрезов графа G по остову T, изображенных на рис. 6.14.

Запишем матрицу полученной системы базисных разрезов:

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccccc|ccccc} \multicolumn{5}{l|}{\text{Ребра коостова } T^*} & \multicolumn{5}{l}{\text{Ребра остова } T} \end{array} \\
Q_f = \begin{array}{c} \\ R_{f1} \\ R_{f2} \\ R_{f3} \\ R_{f4} \\ R_{f5} \end{array} & \left|\begin{array}{ccccc|ccccc}
e_3 & e_4 & e_6 & e_7 & e_{10} & e_1 & e_2 & e_5 & e_8 & e_9 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right| \\
 & \quad Q_{fT} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U
\end{array}
$$

Матрица базисных разрезов графа относительно остова T распадается на две подматрицы: Q_{fT} – матрицу размерностью *(n–1)´k, (k=m–n+1)*, соответствующую ребрам коостова T^*, которая является или фундаментальной матрицей разрезов графа G относительно остова T, и единичную матрицу U порядка *(n–*1*)*, соответствующую ветвям остова T:

Q_f = [Q_{fT}½ U]. (6.3)

Строки матриц B_f и Q_f можно рассматривать как двоичные векторы. Такие векторы можно складывать по модулю 2 и находить их скалярное произведение. Систему векторов матрицы B_f можно рассматривать как *базис пространства циклов графа*, а матрицы Q_f – как *базис пространства разрезов графа*. В самом деле, как строки матрицы B_f, так и строки матрицы Q_f образуют линейно независимые системы двоичных векторов, поскольку каждая из этих матриц содержит единичную подматрицу, порядок которой равен числу строк всей матрицы. Рассмотрим для примера матрицу Q_f. Составим линейную комбинацию строк этой матрицы:

R=x_1R_{f1}Åx_2R_{f2}Åx_3R_{f4}Åx_4R_{f4}Åx_5R_{f5}, где коэффициенты x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 принимают значения 0 или 1.

Такая линейная комбинация может быть равна нулевому вектору лишь в том случае, если все x_i (i=1, 2, 3, 4, 5) равны 0, иначе координаты соответствующие ребрам коостова T^* будут ненулевыми. Это и означает, что система строк матрицы R_f линейно независима.

Любая линейная комбинация строк матрицы B_f или матрицы Q_f дает соответственно цикл или разрез графа.

Проверим это утверждение на примере матрицы Q_f.

R_1= R_{f1}ÅR_{f2}=(1, 0, 1, 1, 0 ½ 1, 1, 0, 0, 0).

Удаление ребер $\{e_3, e_6, e_7, e_1, e_2\}$ разрезает граф G на компоненты $\{v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ (рис. 6.17).

R_2=R_{f1}ÅR_{f2}ÅR_{f4}ÅR_{f4}ÅR_{f5}=(1, 0, 0, 1, 0 ½ 1, 1, 1, 1, 1).

Удаление ребер $\{e_3, e_7, e_1, e_2, e_5, e_8, e_9\}$ разрезает граф на компоненты $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_6\}$ (рис. 6.17).

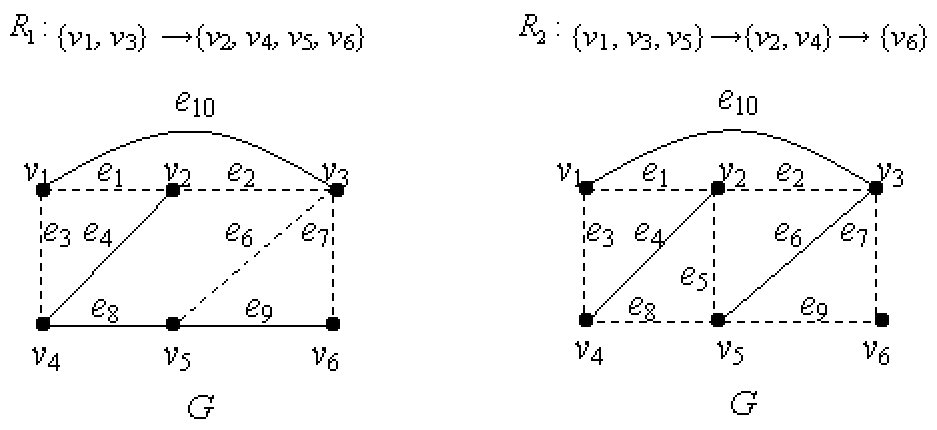


Рис. 6.17. Разрезы R_1 и R_2 графа G, являющиеся линейными комбинациями векторов базисной системы разрезов

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Любая строка матрицы циклов графа G ортогональна любой строке матрицы его разрезов.

(Доказательство этого утверждения можно найти в [“Графы, сети, алгоритмы” (М. Свами, К. Тхуласираман)]).

Из *утверждения* следует равенство:

$Q \times B^t = B \times Q^t = 0,$ (6.4) где B и Q – матрицы циклов и разрезов, Q^t и B^t – транспонированные матрицы разрезов и циклов.

Проверим равенство (6.4) на примере матриц B_f и Q_f, рассмотренных выше.

$$Q_f \cdot B_f^t = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\oplus 1 & 0 & 0 & 0 & 1\oplus 1 \\ 0 & 0 & 1\oplus 1 & 1\oplus 1 & 1\oplus 1 \\ 1\oplus 1 & 1\oplus 1 & 1\oplus 1 & 1\oplus 1 & 0 \\ 1\oplus 1 & 1\oplus 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\oplus 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что равенство (6.4) справедливо как для ориентированного, так и для неориентированного графов.

Для матриц базисных циклов и разрезов равенство (6.4) можно переписать в следующем виде:

для не ориентированного графа

$$\boldsymbol{B}_{fT} = \boldsymbol{Q}_{fT}^t, \qquad (6.5)$$

для орграфа

$$\boldsymbol{B}_{fT} = -\boldsymbol{Q}_{fT}^t.$$

6.5. Задача о максимальном потоке и минимальном разрезе в сети

Представим себе нефтепровод. Возникает задача: сколько нефти можно перекачать по нему из пункта А в пункт В? Достаточна ли пропускная способность труб, чтобы перекачать запланированное количество нефти, и если нет, то какую часть нефтепровода надо расширить, чтобы обеспечить запланированную поставку?

Такого рода задачи возникают в транспортных сетях, сетях связи, информационных сетях и т.п. Бесчисленное количество такого рода задач решаются с помощью математической модели, которая называется "сеть".

Определение 6.9. ***Транспортной сетью*** называют связный взвешенный орграф без петель $G=\{V,E,C\}$ с выделенной парой вершин x_0 и z. Вершина x_0 – начало транспортной сети, из которой ребра только выходят, z – конец транспортной сети, в которую ребра только входят. C – множество весов ребер, вес каждого ребра называют ***пропускной способностью ребра***.

Веса ребер можно рассматривать как функциональное соответствие между множеством ребер E и набором весов C: $E \xrightarrow{f} C$ или $c=c(e), \quad c\in C, e\in E$.

Рассмотрим случай, когда все веса неотрицательны и целочисленны.

Определение 6.10. ***Потоком по транспортной сети*** называют целочисленную функцию $\varphi(e)\geq 0$, заданную на множестве ребер $e\in E$ и обладающую следующими свойствами:

$$\forall e\in E\,\varphi(e)\leq c(e), \tag{6.7}$$

$$\sum_{e\in E_x^+}\varphi(e)=\sum_{e\in E_x^-}\varphi(e), \tag{6.8}$$

где x – внутренняя вершина графа, т.е $x\neq x_0$, $x\neq z$;

E_x^+ – множество ребер, входящих в вершину x;

E_x^- – множество ребер, выходящих из вершины x.

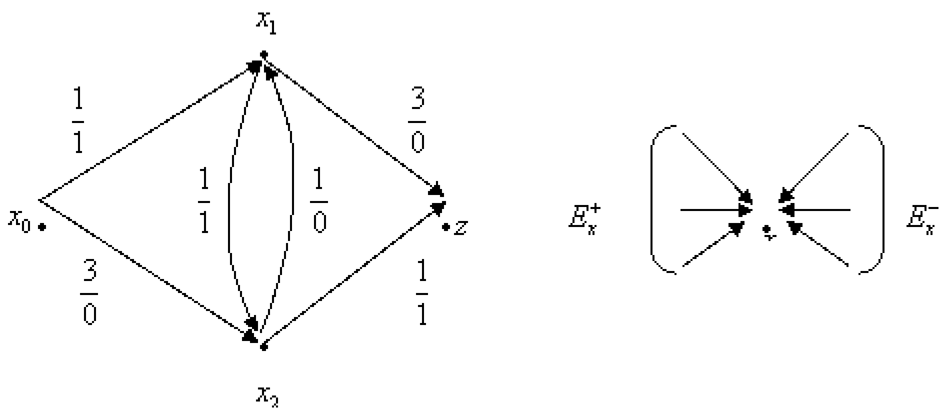


Рис. 6.18. Транспортная сеть

Рис. 6.18 поясняет введенные термины. На рисунке рядом с каждым ребром стоит дробь, числитель которой – пропускная способность ребра, знаменатель – поток по ребру. Равенство (6.8) утверждает, что поток, входящий в вершину равен потоку, выходящему из нее, т.е. поток в вершинах не скапливается.

Поскольку вершина x_0 – начало транспортной сети (***источник***), из которой ребра только выходят, то $\varphi(x_0)=\sum\limits_{e\in E^-_{x_0}}\varphi(e)$ – поток, выходящий из источника. Аналогично, так как z – конец транспортной сети (***сток***), в которую ребра только входят, то $\varphi(z)=\sum\limits_{e\in E^+_z}\varphi(e)$ – поток, входящий в сток. Поскольку накопления потока ни в одной из вершин не происходит, очевидно, что $\varphi(x_0)=\varphi(z)$.

Пусть $R=\{A,\overline{A}\}$ разрез транспортной сети, разбивающий вершины графа на два непересекающихся подмножества A и $\overline{A}$ ($A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=V$).

$C(A)=\sum\limits_{e\in E^+_A}f(e)$ – мощность разреза, т.е. *максимально возможный поток*, входящий в вершины множества A, по ребрам, выходящим из вершин множества $\overline{A}$.

$\varphi(A)=\sum\limits_{e\in E^+_A}\varphi(e)$ – поток, который реально входит в вершины множества A, по ребрам, выходящим из вершин множества $\overline{A}$. Очевидно, что $\varphi(A)\le C(A)$.

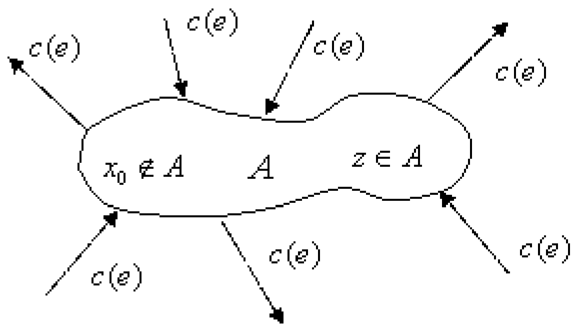


Рис. 6.19. Разрез R транспортной сети

Поскольку в вершины множества A поток не только входит, но и выходит из него (рис. 6.19), то мощность разреза $C(A)$ больше потока, поступающего в сток сети z, принадлежащий разрезу:

$\varphi(z)\le C(A)$.

Основная задача, возникающая при работе с сетями – найти максимальный поток в сети, другими словами, ответить на вопрос: источник какой мощности может обслуживать данная сеть?

При решении этой задачи используется следующая теорема.

Теорема Форда и Фалкерсона. Максимальный поток по транспортной сети равен мощности минимального разреза сети, т.е.

$$\max_{\varphi} \varphi(z) = \min_{\varphi} C(A) , \quad (6.9)$$

Доказательство теоремы – это алгоритм определения максимального потока по сети. Алгоритм состоит из двух частей.

I. *Насыщение потока.*

Поток называют насыщенным, если любой путь от источника к стоку содержит ребро $e \in E$, реализующее свою пропускную способность, т.е. для которой $\varphi(e) = c(e)$. Задача первой части алгоритма состоит в насыщении потока.

1. Зададим произвольный начальный поток. Например, нулевой на всех ребрах: $\forall e \in E \varphi(e) = 0$.

2. Поиск пути из x_0 в z. Если путь найден, то переход к пункту 3. Если путь на найден, то переход к пункту 5.

3. Увеличиваем поток по найденному пути, так, чтобы одно из ребер было насыщенным.

4. Условно разрываем насыщенное ребро и переходим к пункту 2, на поиск пути из x_0 в z.

5. Сеть насыщена и "разорвана".

II. *Перераспределение потока.*

Пометим следующим образом все возможные вершины x_i сети.

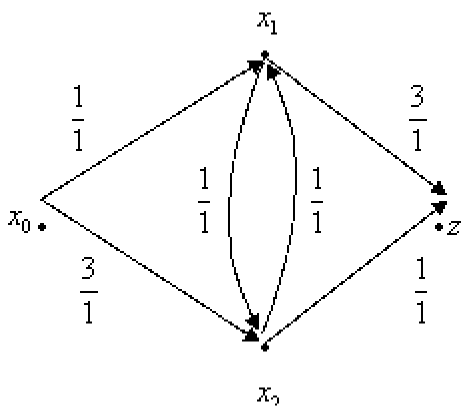
1. Вершину x_0 пометим -0.

2. Пусть x_i – любая из уже помеченных вершин, y – произвольная непомеченная вершина, смежная с x_i. Вершину y помечаем $+i$, если в y *входит* ненасыщенное ребро из x_i, ($x_i \to y(+i)$). Вершину y помечаем $-i$, если из y *выходит* непустое ребро в x_i, ($x_i \leftarrow y(-i)$). После выполнения этого шага возможны два случая: (1) сток z оказался помеченным, (2) сток z оказался непомеченным.

3. *Вершина z оказалась помеченной*. Это означает, что существует последовательность помеченных вершин от x_0 к z. В этой последовательности каждая последующая вершина помечена номером предыдущей. Определим новый поток, увеличивая на единицу поток на ребрах, ориентированных по направлению движения от x_0 к z, и уменьшая на ребрах, направленных против этого движения. Поток можно увеличивать на прямых ребрах и уменьшать на обратных ребрах до тех пор, пока одно их прямых ребер не станет насыщенным или одно из обратных ребер – пустым.

Таким образом, пометка вершины z позволяет увеличить поток через сеть как минимум на единицу, а значит, алгоритм конечен, т.е. наступит момент, когда вершина z останется непомеченной.

4. *Вершина* z *осталась непомеченной.*



Пусть A^{*} – множество всех непомеченных вершин, куда попал и сток z. Все ребра, входящие в эти вершины из множества $\overline{A^{*}}$ являются насыщенными, а все выходящие – пустыми. Поскольку все выходящие ребра пусты, весь поток из A^{*} скатывается в z, он и определяет максимальную пропускную способность сети. В то же время $\varphi^{*}(z) = C(A^{*})$ и $R = (A^{*}, \overline{A^{*}})$ есть минимальный разрез.

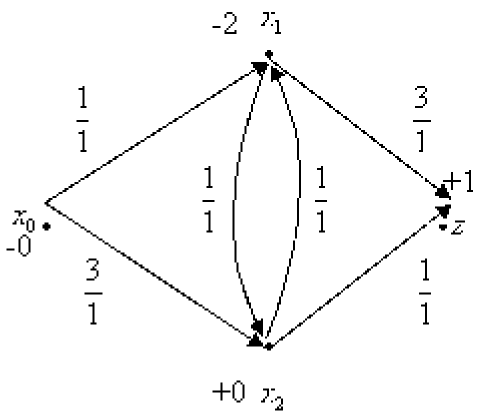
Пример.

Найдем максимальный поток в сети изображенной на рис. 6.18.

Насыщение потока выполнено так, как показано на рисунке. При это пройдены следующие пути:

$x_0 \xrightarrow{1} x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{1} z$, все ребра этого пути насыщены;

$x_0 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{1} x_1 \xrightarrow{1} z$, два ребра $(x_0 x_2)$ и $(x_1 z)$ ненасыщенны.

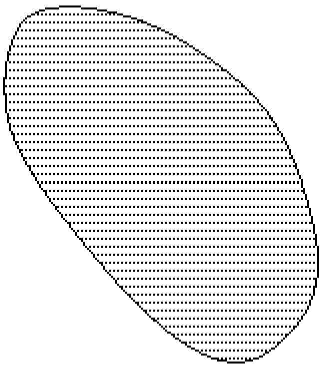


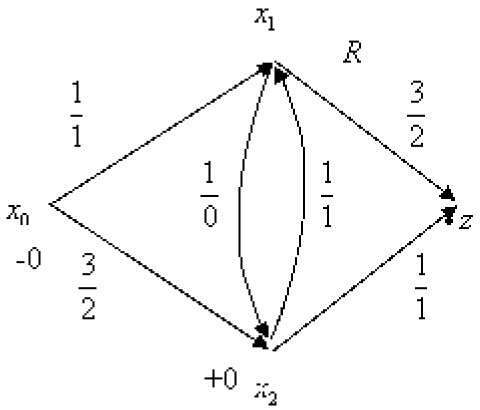
Выполним перераспределение потока, для чего пометим вершины, в которые входят ненасыщенные ребра, метками со знаком "+" и вершины, из которых выходят непустые ребра, метками со знаком "-".

В результате получилась следующая последовательность меток:

$$\overset{-0}{x_0}\xrightarrow{\frac{3}{1}}\overset{+0}{x_2}\xleftarrow{\frac{1}{1}}\overset{-2}{x_1}\xrightarrow{\frac{3}{1}}\overset{+1}{z}$$

Сток z оказался помеченным, следовательно, можно увеличить поток в сети, увеличивая на единицу поток на ребрах ориентированных по направлению к z и уменьшая на ребрах, направленных от z:





$$\overset{-0}{x_0}\xrightarrow{\frac{3}{2}}x_2\xleftarrow{\frac{1}{0}}x_1\xrightarrow{\frac{3}{2}}\overset{+1}{z}.$$

В результате получим новое распределение потоков в ребрах, изображенное на рис.

Если сейчас пометить x_0 меткой "-0", а x_2 - меткой "+0", то больше никакие вершины пометить не возможно: вершину x_1 нельзя пометить метками "+0" и "+2", так как потоки $x_0 \to x_1$ и $x_2 \to x_1$ насыщены. Эту вершину нельзя пометить и меткой "-2", поскольку поток $x_2 \leftarrow x_1$ пустой. Вершина z также не может быть помечена, так как метка "+2" невозможна из-за насыщенности потока $x_2 \to z$, а метка "+1" – из-за того, что не помечена вершина x_1.

Таким образом, максимальный поток в данной сети равен 3. Ему соответствует минимальный разрез $R = \{\{x_0, x_2\}, \{x_1, z\}\}$: все ребра $(x_0, x_1), (x_2, x_1), (x_2, z)$, входящие в x_1, z

насыщены, а все ребра, выходящие из x_1, z пусты (ребро (x_1, x_2)). Мощность минимального разреза – три единицы.

Литература

Основная

1. *Иванов Б.Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.

2. *Конышева Л.К. Мешков В.В.* Основы дискретной математики. Учебное пособие. – Екатеринбург: Уральский государственный профессионально-педагогический университет, 2001.

3. *Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.* Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. С.-П.: Лань, 1999. – 285 с.

4. *Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.* Элементы дискретной математики. Учебник. ИНФРА·М Новосибирск НГТУ, 2002.

Дополнительная

5. *Акимов О.Е.* Дискретная математика. Логика, группы, графы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.

6. *Баранский В.А.* Введение в общую алгебру и ее приложения. Учебное пособие. Екатеринбург: Уральский государственный университет им. А.М.Горького,1998.

7. *Важенин Ю.М.* Множества, логика, алгоритмы. Учебное пособие. – Екатеринбург: Уральский государственный университет им. А.М.Горького,1997.

8. *Важенин Ю.М., Попов В.Ю.* Множества, логика, алгоритмы в задачах. Учебное пособие. Ек-бург: Уральский государственный университет им. А.М.Горького,1997.

9. *Карпов Ю.Г.* Теория автоматов. С.-П.: "ПИТЕР",2003.

10. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. С.-П.: "ПИТЕР",2002.

11. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети, алгоритмы. М.: Мир, 1984.

Асанов М.О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учеб. Пособие. – СПб. : Лань, 2010. – 368 с.

В учебном пособии изложен ряд основных разделов теории графов и матроидов. Рассмотрены алгоритмы дискретной оптимизации на сетях и графах, наиболее часто используемые программистами.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области компьютерных наук и информационной безопасности, для практикующих программистов, для всех желающих изучить основы современной дискретной компьютерной математики.

Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. М. Глухов [и др.]. – СПб. : Лань, 2008. –112 с.

Данное учебное пособие содержит набор задач и упражнений необходимый для закрепления и расширения лекционного материала дисциплин «Математическая логика и теория алгоритмов» и «Дискретные функции», изучаемых в рамках подготовки студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям в области информационной безопасности. Пособие включает задачи, относящиеся к алгебре и исчислению высказываний, алгебре и исчислению предикатов, теории дискретных функций, включая вопросы их групповой классификации, теории алгоритмов и вопросы сложности алгоритмов.

Учебное пособие будет полезно также студентам вузов, в которых изучается дискретная математика и математическая логика. (Гриф)

Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера [Электронный ресурс]. – 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 400 с.

В книге изложены основные понятия теории множеств, общей алгебры, логики, теории графов, теории алгоритмов и формальных систем, теории автоматов. По сравнению с изданием 1988г. заново написаны разделы по теории графов и сложности вычислений.

Лихтарников, Л. М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения : учеб. пособие [Электронный ресурс] / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – 4-е изд. , стер. – СПб. : Лань, 2009. – 288 с.

Учебное пособие состоит из двух частей — курса лекций по математической логике, включающего теоретический материал по ряду разделов: алгебра логики, исчисление высказываний, логика предикатов, математические теории, алгоритмы, и задачника-практикума, содержащего упражнения по перечисленным разделам.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов и педагогических вузов, изучающих математическую логику.

Мальцев, И. А. Дискретная математика : учеб. пособие [Электронный ресурс] / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – 2-е изд. , испр. – СПб. : Лань, 2011. – 304 с.

Книга содержит следующие разделы: теория множеств, комбинаторика, графы, математическая логика, конечные автоматы, теория алгоритмов, теория чисел, алгебраические системы. Поскольку дискретная математика обычно читается студентам младших курсов, материал излагается доступно и иллюстрируется многочисленными примерами. Книга адресована студентам, аспирантам и преподавателям вузов, а также лицам, желающим самостоятельно познакомиться с основными разделами дискретной математики.

Шевелев, Ю. П. Дискретная математика : учеб. пособие [Электронный ресурс]. – 2-е изд. , испр. – СПб. : Лань, 2008. – 592 с.

Представлено пять тем: теория множеств, булева алгебра логики, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов. Из теории множеств освещены темы: алгебра множеств, бинарные отношения, бесконечные множества, теория нечетких множеств. Из булевой алгебры — минимизация булевых формул в дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных формах с учетом неопределенных состояний, булевы уравнения, первые сведения о булевом дифференциальном и интегральном исчислении. Из теории конечных автоматов — синтез логических (комбинационных) и многотактных схем, теорема Поста о функциональной полноте. Из комбинаторики — размещения, сочетания и перестановки с повторениями и без повторений, разбиение множеств и др. Из теории графов — графы и ориентированные графы, сети, деревья и др.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Экзаменационные билеты

1. Понятие множества, подмножества, способы задания множеств, операции над множествами.

1) Определение множества, подмножества, мощности конечного множества.

2) Понятие равенства двух множеств.

3) Понятие строгого подмножества.

4) Теорема о числе подмножеств конечного множества.

5) Способы задания множеств:

а) перечислением элементов,

б) порождающей процедурой (не рекурсивные и рекурсивные процедуры, выражение множества через другие множества с помощью операций над множествами),

в) описанием свойств его элементов.

6) Операции над множествами:

а) объединение,

б) пересечение,

в) разность,

г) симметрическая разность,

д) дополнение.

2. Векторы и прямые произведения. Теорема о мощности прямого произведения N конечных множеств.

1) Определение вектора.

2) Понятие координаты и длины вектора. Понятие двоичного вектора. Отличие вектора от множества.

3) Понятие равенства векторов и введение отношения порядка <= на множестве векторов.

4) Определение прямого произведения множеств.

5) Теорема о мощности прямого произведения N конечных множеств (доказательство методом математической индукции).

3. Соответствия. Взаимно однозначные соответствия и мощности множеств.

1) Определение соответствия.

2) Понятие области определения и области значения соответствия. Понятие образа и прообраза элемента и множества при заданном соответствии.

3) Понятие полностью определенного, сюръективного, функционального и взаимно однозначного соответствия.

4) Использование понятия взаимно однозначного соответствия при определении мощности бесконечных множеств. Счетные и несчетные множества. Примеры таких множеств.

5) Классификация множеств по их мощности.

4. Соответствия. Использование понятия соответствия при решении задач комбинаторики.

1) см. 3.1.

2) см. 3.2.

3) см. 3.3.

4) Задача о числе монотонных траекторий от начала координат в точку M(x,y), x,y>0 на целочисленной решетке.

5) Нахождение числа:

а) композиций N (слагаемые натуральные числа),

б) композиций N из K частей (слагаемые целые неотрицательные числа),

в) композиций N из K частей (слагаемые натуральные числа).

5. Отображения и функции. Способы задания функций.

1) Определение функции и отображения. Примеры функций и отображений.

2) Способы задания функций:

а) с помощью вычислительных процедур (табличный способ, формула, рекурсивные процедуры),

б) описанием.

Примеры.

6. Отношения. Способы задания и свойства. Отношение эквивалентности и порядка.

1) Определение отношения.

2) Задание отношений. Задание бинарных отношений. Примеры.

3) Свойства отношений:

а) рефлексивность,

б) симметричность,

в) транзитивность.

4) Определение отношения эквивалентности.

5) Определение отношения порядка.

7. Понятие алгебры. Фундаментальные алгебры. Группа подстановок.

1) Определение n-арной операции.

2) Определение алгебры.

3) Фундаментальные алгебры:

а) группоид,

б) полугруппа,

в) группа.

4) Пример группы - группа подстановок 3-й степени.

8. Понятие алгебры. Алгебра Кантора.

1) см. 7.1.

2) см. 7.2.

3) Алгебра Кантора. Носитель алгебры, сигнатура и ее свойства.

9. Алгебраические системы. Решетка.

1) Понятие алгебраической системы. Алгебры и модели как частные случаи алгебраических систем.

2) Решетка - пример алгебраической системы.

а) понятие верхней и нижней грани,

б) понятие решетки.

в) изображение упорядоченных множеств (частично упорядоченных) в виде диаграмм.

г) пример решетки, проиллюстрированный с помощью диаграммы.

10. Понятие гомоморфизма и изоморфизма. Примеры изоморфных алгебр и алгебраических систем.

1) Определение гомоморфизма,

2) Определение изоморфизма,

3) Понятие изоморфизма на себя (автоморфизма) и изоморфизма в себя.

4) В качестве изоморфных алгебраических систем рассмотреть алгебру Кантора и алгебру Буля если на этих алгебрах задать отношение <= (аналогичное отношению <= для двоичных векторов).

11. Модели, как частный случай алгебраических систем. Примеры использование понятия модели при формализации реальных задач.

1) Определение модели. Понятие графа и гиперграфа. Задание графов и гиперграфов в виде матриц смежности и инцидентности. Примеры.

2) Примеры использования понятия модели в реальных задачах.

12. Алгебра отношений и ее расширение - реляционная алгебра.

1) Алгебра отношений. Носитель и сигнатура алгебры отношений.

а) Понятие совместных отношений,

в) Объединение, пересечение, разность и расширенное декартово произведение отношений.

2) Реляционная алгебра как расширение алгебры отношений.

а) Реляционная модель данных (Базы данных реляционного типа).

б) Операции выбора, проекции, соединения отношений (Примеры).

13. Формальное построение теории множеств. Законы, определяющие свойства сигнатуры алгебры множеств.

1) Аксиоматика теории множеств. Аксиомы существования, объемности, объединения, разности, степени и существования пустого множества.

2) Введение операций пересечения, дополнения и симметрической разности на основании аксиом теории множеств.

3) Законы, определяющие свойства сигнатуры алгебры множеств:

коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности, действия с универсальным и пустым множеством, законы де - Моргана, двойного дополнения, склеивания, поглощения, законы Порецкого.

14. Понятие первичного терма и конституенты. Теорема о возможности представления множества М, образованного из М1,М2,...,Mn с помощью операций алгебры Кантора в виде объединения конституент.

1) Определение первичного терма и конституенты. Число возможных конституент.

2) Лемма о пересечении двух конституент.

3) Лемма о объединении всех конституент.

4) Лемма о возможности представления множества Mi в виде объединения конституент.

5) Теорема о возможности представления множества М, образованного из М1,М2,...,Mn с помощью операций алгебры Кантора в виде объединения конституент.

15. Совершенная НФК множества. Теорема о числе возможных множеств, образованных из n множеств с помощью операций алгебры Кантора. Задание множества в виде десятичного эквивалента, таблицы, гиперкуба, диаграммы Эйлера.

1) см. 14.1.

2) Определение совершенной НФК множества.

3) Теорема о числе возможных множеств, образованных из n множеств с помощью операций алгебры Кантора.

4) Пример задания множества в виде совершенной НФК, десятичного эквивалента, таблицы, гиперкуба, диаграммы Эйлера.

16. Минимизация аналитического представления множества в НФК методом Квайна.

1) см. 14.1.

2) см. 15.2.

3) Определение элементарного пересечения и НФК множества М.

Понятие ранга элементарного пересечения.

4) Понятие сложности представления множества и определение минимальной НФК.

5) Понятие интервала и максимального интервала множества М. Определение простой импликанты.

6) Определение сокращенной НФК и ее получение (1 этап получения минимальной НФК множества методом Квайна).

7) Определение тупиковой и минимальной НФК и их получение (2 этап минимизации).

17. Понятие высказывания. Законы определяющие дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Понятие булевой функции. Алгебра Буля, как алгебра изоморфная алгебре Кантора.

1) Понятие высказывания. Таблицы истинности, определяющие дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

2) Понятие булевой функции.

3) Алгебра Буля. Носитель и сигнатура. Свойства сигнатуры булевой алгебры.

4) Алгебра Буля, как алгебра изоморфная алгебре Кантора. Понятие конституенты 1, совершенной ДНФ.

5) Число возможных булевых функций от n переменных.

18. Минимизация аналитического представления булевых фунуций в ДНФ методом Квайна.

1) см. 17.4.

2) Понятие элементарной конъюнкции и ДНФ булевой функции. Понятие ранга элементарной конъюнкции.

3) Понятие сложности представления булевой функции и минимальной ДНФ.

4) Понятие простой импликанты и сокращенной ДНФ.

5) Понятие тупиковой и минимальной ДНФ булевой функции.

6) Минимизация булевых функций методом Квайна. Пример минимизации.

19. СКНФ булевой функции. Метод Петрика и его применение при нахождении тупиковых ДНФ по таблице Квайна.

1) Понятие конституенты 0 и СКНФ булевой функции.

2) Метод Петрика.

3) Пример минимизации булевой функции методом Квайна. Получить все тупиковые ДНФ методом Петрика.

20. Алгебра Жегалкина. СПНФ булевой функции. Полином Жегалкина. Линейные функции.

1) Алгебра Жегалкина. Носитель и сигнатура. Законы, определяющие свойства сигнатуры алгебры Жегалкина.

3) СПНФ и полином Жегалкина. (Примеры получения СПНФ и полинома).

4) Линейные функции (Примеры). Число всех возможных линейных функций.

21. Формы представления булевых функций. Разложение Шеннона. Представление булевых функций в виде бинарных графов.

1) Представление булевых функций в виде таблицы истинности и гиперкуба.

2) Аналитические формы представления булевых функций:

а) СДНФ,

б) СКНФ,

в) СПНФ,

г) Полином Жегалкина.

Примеры получения этих форм, если исходной формой является таблица истинности.

3) Разложение Шеннона. Предельное разложение Шеннона.

4) Использование предельного разложения Шеннона для преобразования произвольной формы булевой функции в СДНФ (Пример).

5) Использование предельного разложения Шеннона для задания булевой функции в виде бинарного графа (Пример).

22. Функционально полные системы булевых функций. Определение полноты системы булевых функций путем ее сведения к заведомо полной системе.

1) Определение функционально полной системы булевых функций.

2) Понятие заведомо полной системы булевых функций.

3) Доказательство полноты систем {|} и {/} путем сведения их к заведомо полной {v,&,-}.

4) Показать избыточность системы {v,&,-}, т.к. она сохраняет полноту и при удалении из нее дизъюнкции или конъюнкции.

5) Примеры записи булевой функции в виде формулы через функции различных функционально полных систем.

23. Функционально полные системы булевых функций. Класс линейных и монотонных функций. Первая теорема о функциональной полноте.

1) см. 22.1.

2) Определение замкнутого класса. Понятие замыкания системы булевых функций.

3) Определение линейной и монотонной функции. Число таких функций.

4) Теорема о проверки монотонности функции по ее минимальной (сокращенной, тупиковой) ДНФ (без доказательства). Пример.

5) Класс линейных и монотонных функций.

6) Лемма о немонотонных функциях.

7) Лемма о нелинейных функциях.

8) Понятие функциональной полноты в слабом смысле.

9) Первая теорема о функциональной полноте.

24. Функционально полные системы булевых функций. Класс сохраняющих 0, сохраняющих 1 и самодвойственных функций. Вторая теорема о функциональной полноте.

1) см. 22.1.

2) см. 23.2.

3) см. 23.8.

4) см. 24.9 (без доказательства).

5) Класс сохраняющих 0, сохраняющих 1 и самодвойственных функций. Число таких функций.

6) Вторая теорема о функциональной полноте.

25.Определение графа. Основные понятия и определения теории графов. Типы графов.

1) История развития теории графов.

2) Определение графа.

3) Понятие вершины и ребра графа. Отношение смежности и инцидентности. Понятие порядка графа.

4) Обобщение понятия графа: мультиграф, псевдограф, орграф, взвешенный граф.

5) Понятие цепи, пути, цикла, контура.

6) Понятие связного графа, компоненты связности, разреза.

7) Определение пустого и полного графа. Число ребер в полном графе порядка n.

8) Определение ациклического графа, дерева, леса, покрывающего дерева и покрывающего леса.

9) Понятие двудольного и полного двудольного графа.

10) Определение гиперграфа.

26. Представление графов в памяти ЭВМ.

1) Определение матрицы смежности, матрицы весов. Разряженность матриц, их упаковка на статических структурах данных, список смежности.

2) Определение матрицы инцидентности. Список ребер.

3) Сравнительная характеристика способов хранения графов.

4) Пример алгоритма преобразования из одной структуры хранения графа в другую. Трудоемкость алгоритмов преобразования.

27. Операции над графами.

1) Унарные операции (удаление вершины, удаление ребра, стягивание ребра, добавление вершины, добавление ребра, расщепление вершины).

2) Бинарные операции (объединение и произведение графов).

3) Использование операции произведения графов для введения понятия n-мерного куба. Число ребер n-мерного куба.

4) Пример алгоритма, реализующего операцию на графе.

28. Алгоритмы построения покрывающих деревьев (Алгоритм Краскала и ближайшего соседа).

1) См. 25.8.

2) Алгоритм Краскала.

3) Алгоритм ближайшего соседа.

4) Примеры использования алгоритмов при решении реальных задач.

5) Сравнительная характеристика алгоритмов.

29. Алгоритмы построения покрывающих деревьев (Алгоритм Краскала и алгоритм построения всех покрывающих деревьев).

1) См. 25.8.

2) См. 28.2.

3) Алгоритм построения всех покрывающих деревьев.

4) См. 28.4.

5) См. 28.5.

30. Поиск на графах и его использование при выделении сильно связных компонент орграфа.

1) Стратегия поиска в глубину и в ширину.

2) Понятие связной и сильно связной компоненты орграфа. Метод их выделения.

3) Использование стратегии поиска для выделения сильно связных компонент.

4) Примеры реальных задач, сводящихся к выделению сильно связных компонент.

31. Транзитивное замыкание графа. Использование алгоритма транзитивного замыкания при выделении сильно связных компонент орграфа.

1) Понятие транзитивного замыкания графа и алгоритм его нахождения.

2) Анализ алгоритма нахождения транзитивного замыкания.

3) См. 30.2.

4) Использование алгоритма транзитивного замыкания при выделении сильно связных компонент орграфа.

5) См. 30.4.

32. Алгоритмы поиска кратчайших путей (Алгоритм Дейкстры и Форда).

1) Алгоритм Дейкстры. Принцип динамического программирования. Подход к программной реализации алгоритма.

2) Алгоритм Форда, как модификация алгоритма Дейкстры.

3) См. 28.5.

33. Алгоритмы поиска кратчайших путей (Алгоритм Дейкстры и Флойда).

1) См. 32.1.

2) Алгоритм Флойда. Анализ алгоритма и подход к его программной реализации.

3) См. 28.5.

34. Модификации алгоритма Дейкстры.

1) Задача об "узких" местах.

2) Задача о путях с "усилениями".

3) Модификация Алгоритма Дейкстры для решения названных задач.
Примеры.

35. Задачи размещения.

1) Класс задач размещения. Понятие центра и медианы графа.

2) Методы поиска центра и медианы графа.

3) См. 33.2.

36. Сетевые графики.

1) Понятие сетевого графика. Метод критического пути.

2) Алгоритм нумерации событий (топологическая сортировка графа).

3) Наиболее ранние сроки наступления **событий** и алгоритм их расчета.

4) Наиболее поздние сроки наступления событий и алгоритм их расчета.

5) Полный, свободный и независимый резервы времени операции.

6) Идея метода оценок.

37. Независимые множества и покрытия.

1) Определение независимого (внутренне устойчивого) множества вершин графа.

2) Понятие максимального и наибольшего независимого множества вершин графа. Понятие числа независимости (числа внутренней устойчивости, неплотности) графа. Задача о восьми ферзях.

3) Определение доминирующего (внешне устойчивого) множества вершин графа.

4) Понятие минимального и наименьшего доминирующего множества вершин графа. Задача о пяти ферзях.

5) Определение вершинного покрытия (опоры) графа.

6) Понятие минимального и наименьшего покрытия. Понятие числа вершинного покрытия графа.

7) Теорема о связи между покрытиями и независимыми множествами.

38. Независимые множества. Клика.

1) см. 37.1.

2) см. 37.2.

3) Определение клики графа.

4) Понятие максимальной и наибольшей клики. Понятие кликового числа (плотности) графа.

5) Способы порождения независимых множеств и клик графа.

39. Потоковые алгоритмы. Алгоритм поиска максимального потока.

1) Понятие потока. Условия существования потока.

2) Алгоритм поиска увеличивающей цепи.

3) Алгоритм поиска максимального потока (алгоритм Форда - Фалкерсона).

4) Модификация алгоритма поиска максимального потока для нескольких источников и стоков.

40. Потоковые алгоритмы. Алгоритм поиска потока минимальной стоимости.

1) см. 39.1

2) Алгоритм поиска потока минимальной стоимости.

41. Задача почтальона и коммивояжера.

1) Постановка задачи почтальона.

2) Задача о кенигсбергских мостах. Эйлеров маршрут. Условие существования и алгоритм нахождения эйлерова маршрута для ориентированных и неориентированных графов.

3) Сведение задачи почтальона к задаче поиска потока минимальной стоимости.

4) Постановка общей задачи коммивояжера.

5) Постановка задачи коммивояжера. Гамильтонов контур.

6) Примеры реальных задач, сводящихся к задачам почтальона, коммивояжера и общей задаче коммивояжера.

42. Раскраска графов.

1) Понятие раскраски и правильной раскраски графов. Понятие хроматического числа графа.

2) Алгоритм последовательной раскраски графов.

3) Примеры реальных задач, сводящихся к раскраске графов.

43. Сложность решения комбинаторных задач.

1) Понятие решения задачи, как распознавание языка L в алфавите {0,1}.

2) Классы языков: класс P и NP.

3) Понятие NP-полных и NP-трудных задач. Примеры.