Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика

Учебное пособие

осенний семестр

для специальностей:
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
(группа 445)
43.03.01 «сервис»
(группы 135-1, 135-2).

Томск
ТУСУР
2016

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группе 445 и на РТФ в группах 135-1,2 осенью 2015 года. В осеннем семестре, согласно рабочим программам, на специальностях 09.03.03 и 43.03.01 изучаются следующие темы: линейная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчсиление. Пособие включает в себя также, для полноты картины, задачи с разбором и решением, в том числе примеры из лекций. Затем даны задачи, которые решались на занятии. Может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий. Количество задач дано с запасом, так чтобы как правило, одна или две задачи оставались для домашнего задания.

Практика 1 Входной тест по школьной программе.

Практика 2 Действия над матрицами, сложение, умножение.

<u>Примеры решения задач.</u>

Пример 1. Сложение и вычитание матриц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \;;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Умножение матриц. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

Пример 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

обратите внимание, что даже для квадратных матриц далеко не всегда выполняется закон коммутативности, здесь $AB \neq BA$.

Определители.

Пример 4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$

Пример 5. $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 21 - 4 = 17.$

Пример 6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 1*2*4 + 1*3*0 + 2*0*1 — 0*2*2 — 1*3*1 — 4*0*1 = 8 — 3 = 5.

Пример 7. Метод разложения по строке. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$$1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12.$

Задачи для практического занятия.

Задача 1. Даны матрицы

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Найти $AC + 3BC$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 26 & -2 \\ -34 & -2 \end{pmatrix}$

(использовать приведение подобных $AC + 3BC$ = $(A + 3B)C$)

Задача 2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ найти A^2. Ответ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ Найти AB, BA.

Ответ $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Даны матрицы

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ Найти AB, BA.

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Задача 5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Найти AB.

Ответ $AB=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 7 & 13\end{pmatrix}$.

Задача 6. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ найти A^3. Ответ $\begin{pmatrix}-11 & -4\\ 12 & -7\end{pmatrix}$.

Задача 7. Операции типа $A-\lambda E$. Вычислить $A-2E$ для какой-нибудь матрицы 3 порядка. Знать такие действия будет полезно при изучении следующих тем (собственные числа линейного оператора).

Задача 8. Решить уравнение $|A-\lambda E|=0$ для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

Ответ Корни 0 и 7.

Задача 9. Найти определитель $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}$ Ответ: 18

Задача 10. Найти определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$ Ответ: - 21

Задача 11 (а,б). Найти определитель $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$. Решить двумя способами: просмым вычислением и преобразованием матрицы к треугольному виду (рассмотреть основную идею метода Гаусса). Ответ: 5.

Задача 12. Найти опр-ль $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}$ Ответ: -12

Задача 13. Найти определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}$ Ответ: 11.

Задача 14 (а,б). Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Ответ: 0

(Методом разложения по 1-й строке и методом преобразования к треугольному виду, сравнить) .

Практика 3. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Формула вычисления элементов обратной матрицы: $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$.

Алгоритм нахождения A^{-1}.

1. Проверить невырожденность с помощью определителя.
2. Составить матрицу из дополняющих миноров M_{ij}.
3. Изменить знаки в шахматном порядке, то есть домножить на $(-1)^{i+j}$, где i,j - номера строки и столбца.

Получатся алгебраические дополнения A_{ij}.

4. Транспонировать полученную матрицу.
5. Поделить на определитель исходной матрицы.

Примеры решения задач.

Пример 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. Вывод: $|A| \neq 0$, существует обратная матрица.

Матрица из миноров: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица из алг. дополнений:

$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Делим её на определитель,

и записываем ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Можно сделать проверку: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

Решение. 1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 = 2$. $|A| \neq 0$, существует A^{-1}.

2) Запишем матрицу, состоящую из всех возможных миноров 2×2, которых существует 9 штук: $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Матрица из алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(т.е. в шахматном порядке изменили знаки, там где сумма номеров строки и столбца нечётна).

Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Делим на определитель, равный 2, итог: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3 на тему «матричные уравнения».

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Ранг матрицы.

Пример 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Здесь есть невырожденный минор порядка 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Миноры 3 порядка можно рассматривать не все, достаточно только окаймляющие, то есть содержащие уже найденный минор меньшего порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

поэтому ранг не равен 3, а остаётся равен 2, так как минор 2 порядка уже найден.

Миноров 4 порядка в этой матрице нет, так как всего 3 строки. Итак, $r(A) = 2$. Цветом закрашен базисный минор.

Пример 5. (на метод элементарных преобразований).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to$$ из 2-й строки вычесть 1-ю, а из 3-й удвоенную 1-ю.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

теперь из 3-й строки вычтем 2-ю $\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ниже главной диагонали получились нули.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Теперь лучше видно базисный минор порядка 3. Ранг = 3. Если бы оказалось, что последняя строка состоит из нулей, то тогда был бы ответ ранг матрицы = 2.

Задачи для практического занятия.

Задача 1. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. Ответ

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Решить матричное уравнение. $AX = B$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Ответ $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -7 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Ответ $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Матричным методом решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =3 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{array}\right\}$$ Ответ $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=0$.

Задача 6. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

Ответ $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Найти ранг матрицы. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Ответ. 2.

Задача 8. Найти ранг. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 10 & 20 & 30\end{pmatrix}$ Ответ: 1.

Задача 9. Найти ранг матрицы и базисный минор. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 8\\ 5 & 10 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: 2.

Задача 10. Найти ранг матрицы. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Решение. Преобразуем матрицу. Ко 2-й строке прибавим 1-ю, а от третьей отнимем удвоенную 1-ю. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 0 & -4\end{pmatrix}$ теперь к третьей прибавим вторую $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Ранг равен 3, так как есть невырожденный минор 3 порядка. Ответ r(A) = 3.

Замечание. Если бы на месте a_{33} изначально было число -2, то ранг был бы меньше, так как в итоге получилась бы третья строка из всех 0:

$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ преобразуется к $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.и тогда r(A) = 2.

Задача 11. Доказать, что 3 столбец матрицы является линейной комбинацией первых двух, и найти коэффициенты этой комбинации.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$ ответ 1 и 2. Реш. $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

Задача 12. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ответ r = 3.

Практика 4.
Элементы векторной алгебры.

Таблица свойств скалярного и векторного произведений: сходство и различия.

$(a,b)=(b,a)$	$[a,b]=-[b,a]$
$(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$	$[a,b+c]=[a,b]+[a,c]$
$(\alpha a,b)=\alpha(a,b)$	$[\alpha a,b]=\alpha[a,b]$
$(a,a)=\lvert a\rvert^2$	$[a,a]=0$
$(a,b)=\lvert a\rvert\lvert b\rvert\cos\varphi$	$\lvert\, [a,b] \,\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert\sin\varphi$

<u>Примеры решения задач.</u>

Пример 1. Найти векторное произведение векторов (1,1,1) и (1,2,3)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 1e_1 - 2e_2 + 1e_3 = (1,-2,1)$. Также можно проверить, что он действительно перпендикулярен исходным векторам (скалярно умножить на 1-й или на 2-й, получим 0). Ответ (1,-2,1).

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. Найти скалярное и векторное произведение векторов: (1,3,-2) и (3,1,-5).

Ответ скалярное: 16, векторное: (-13, -1, -8).

Задача 2. $a = r + s$, $b = 2r + s$, $\lvert r\rvert = 1$, $\lvert s\rvert = 1$, угол между ними 45 град. Найти (a,b).

Реш. $(r+s, 2r+s) = 2(r,r) + 2(s,r) + (r,s) + (s,s) = 2|r|^2 + 3(r,s) + |s|^2 =$

$2|r|^2 + 3|s|\,|r|\cos(45) + |s|^2 = 3 + 3\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 3, 4, 5:

Векторы a,b выражены через p,r: $a = 3p + r$, $b = p - 3r$.

$|p| = 5, |r| = \sqrt{2}$, угол между ними 45 град.

Задача 3. Найти (a,b). Ответ 29.

Задача 4. Найти | [a,b] |. Ответ 50.

Задача 5. Найти | a | ^{2}. Ответ 257.

Задачи 6,7 на повторение к контрольной:

6. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Ответ. $-\frac{1}{148}\begin{pmatrix} -67 & 62 & -27 \\ 24 & -20 & -8 \\ -15 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ сводится к $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 46 & -18 \end{pmatrix}$

Ответ: ранг = 3.

2 урок:

Контрольная по темам

1 Умножение матриц

2 Определители

3 Обратная матрица

4 Ранг матрицы.

Практика 5.

Системы линейных алгебраических уравнений.

Примеры решения задач.

Пример 1. Решение матричным методом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$.

Матричный вид системы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, обратную матрицу для этой матрицы ранее находили, это $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Тогда

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Пример 2. Метод Крамера $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ на примере той же системы:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Пример 3. Решение системы методом Гаусса.

Решить систему уравнений: $\left.\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =6 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{matrix}\right\}$

Решение. Выполним преобразования расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала из 2-й строки вычли 1-ю, а из 3-й удвоенную 1-ю.
На втором этапе, к 3-й прибавили 2-ю.
Система после преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 &= 3 \\ x_2 \quad + 2x_3 &= 3 \\ + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$
, из последнего $x_3 = 1$, подставляем в предпоследнее, будет $x_2 + 2 = 3$, то есть $x_2 = 1$. Далее, уже известные x_2 и x_3 подставми в первое уравнение, и получим $x_1 = 1$.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, или $\bar{x} = (1,1,1)$.

Поиск координат в новом базисе.

Пример 4. В декартовом базисе координаты вектора (3,2) Найти координаты в новом базисе, состоящем из векторов (1,1) и (1,0)

Запишем их сначала как неизвестные в векторном равенстве:

$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ это очевидно, преобразуется к системе:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_2 = 3 \\ x_1 \qquad\quad = 2 \end{cases}.$$

Ответ: координаты (2,1).

Общее и частное решение.

Пример 5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

Запишем расширенную матрицу и преобразуем её методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из 2-й строки отняли 1-ю, из 3-й удвоенную 1-ю. Замечаем, что 2 и 3 строка одинаковы, вычитаем из 3-й 2-ю, и 3-я строка получилась состоящей из 0. Это уравнение 0 = 0 , очевидно, его можно вычеркнуть.

Базисный минор 2 порядка можно найти в левом верхнем углу.

Здесь m = 3, n = 4, r = 2.

Развернём две оставшихся строки снова в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Здесь перенесём x_3 вправо, именно 3-я переменная - свободная, так как баисный минор обвели в левом углу.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - x_3 \\ \quad x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$ Основная матрица системы фактически стала квадратной, 2 порядка, т.е. множество коэффициентов при базисных переменных образует такую квадратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Просто справа при этом не только константы, а составные выражения из констант и каких-то параметров.

Видно, что x_2 уже и так выражена, $x_2 = 2 - x_3$. Подставим это выражение в 1 уравнение, чтобы выразить отдельно x_1 через x_3.

$x_1 + (2 - x_3) = 3 - x_3$, в итоге $x_1 = 1$. Как видно, свободные переменные где-то могут и сократиться полностью, то есть какие-то базисные переменные выражаются просто через константу. Но в других примерах могут и все базисные зависеть от свободных переменных.

Итак, $\{x_1 = 1, x_2 = 2 - x_3\}$ - это общее решение. В нём есть один свободный параметр x_3.

Его можно записать также и в виде такого вектора: $(1, 2 - x_3, x_3)$.

Если задавать любое $x_3 \in R$, будет получать тройки чисел, которые служат частными решениями.

Например, при $x_3 = 0$ получим (1,2,0). А при $x_3 = 1$ получим (1,1,1).

При $x_3 = 2$ получим (1,0,2), также можно задавать дробные значения x_3, например, частным решением является также и $\left(1, 3/2, 1/2\right)$.

Частных решений бесконечно много.

Однородные системы.

Пример 6. (r=2, n=4). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ запишем основную матрицу, преобразуем её $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ снова представим в виде системы: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ базисный минор порядка 2, можно обвести в левом углу, поэтому 3-я и 4-я переменная - свободные. Перенесём их через знак равенства. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$.

x_2 уже выражено: $x_2 = 2x_3 - x_4$, подставим это в первое уравнение, чтобы выразить и x_1.

$x_1 + (2x_3 - x_4) = -x_3 - x_4$, $x_1 = -3x_3$.

Общее решение: $\{ x_1 = -3x_3,\ x_2 = 2x_3 - x_4 \}$.

Если поочерёдно присвоить значение 1 каждой из свободных переменных (а другая в это время 0) то получим гарантированно 2 линейно-независимых вектора, они не пропорциональны, так как 1 на разных местах.

$x_3 := 1, x_4 := 0$, получим $(-3,2,1,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(0,-1,0,1)$.

Эти 2 вектора $\{ (-3,2,1,0),\ (0,-1,0,1) \}$ и есть ФСР. Это $n - r$ частных решений, из которых можно составить любые другие частные решения. Любые их линейные комбинации будут частными решениями однородной системы. В этом примере $n = 4$, $r = 2$.

Пример 7. (r=2, n=3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$x_2 = 2x_3$, тогда $x_1 + 2x_3 = -x_3$, $x_1 = -3x_3$

Общее решение $\{ x_1 = -3x_3 ,\ x_2 = 2x_3 \}$. Присвоим $x_3 := 1$, получим остальные неизвестные.

ФСР состоит всего из одного вектора: $(-3,2,1)$. Все остальные решения пропорциональны этому.

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. (8.16 [1]) Найти косинус угла между векторами $a = (3,3,1), b = (3,1,-3)$. Ответ. 9/19.
Нужно воспользоваться тем, что скалярное произведение = произв. модулей на косинус угла.

Задача 2. (8.19 [1]) Вычислить площадь параллелограмма, образованного векторами a, b, если $a = 3p - 2q, b = 4p + 5q$, $|p| = 4, |q| = 2$, угол между p,q равен $\pi/6$. Отв. 92.

Задача 3. (8.18 [1]) Найти проекцию вектора $a = (4,5,-6)$ на ось $b = (1,-2,-2)$. Отв. 2.

Задача 4. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =6 \end{array}\right\}$

Ответ x_1=2, x_2=1, x_3=1.

Задача 5. Решить систему уравнений методом Гаусса

$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +3x_3 & =11 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =6 \\ x_1 & & +x_3 & =3 \end{array}\right\}$ Ответ x_1= -1 x_2=1, x_3=4.

Задача 6. Решить систему уравнений методом Гаусса

$\left.\begin{array}{llll} 4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-4 \\ 6x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =-1 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-3 \end{array}\right\}$ Ответ x_1=1, x_2=2, x_3= -1.

Задача 7. $a=(1,1), b=(2,1)$ Найти новые координаты вектора (3,2). Ответ. (1,1).
Задача 8. $a=(1,1), b=(1,0)$ Найти новые координаты вектора (5,4). Ответ. (4,1).
Задача 9. $a=(1,2,3), b=(0,1,1), c=(1,1,1)$. Найти новые координаты вектора (0,3,4). Ответ. (1,2,-1).

Задача 10. Решить неоднородную систему с прямоугольной матрицей:
$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 \quad =2 \\ x_1+2x_2+3x_3 \quad =3 \end{array}\right\}$ Решение. $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 \quad =2 \\ x_2+2x_3 \quad =1 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 \quad =2-x_3 \\ x_2 \quad =1-2x_3 \end{array}\right\}$,

общее реш: $\left.\begin{array}{l} x_1 \quad =1+x_3 \\ x_2 \quad =1-2x_3 \end{array}\right\}$,

частные решения: (1,1,0) или (2,-1,1) или (3,-3,2) ... вообще, их бесконечно много.

Задача 11. Решить соответствующую однородную систему для системы из задачи 10:
$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 \quad =0 \\ x_1+2x_2+3x_3 \quad =0 \end{array}\right\}$ Решение. $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 \quad =0 \\ x_2+2x_3 \quad =0 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 \quad =-x_3 \\ x_2 \quad =-2x_3 \end{array}\right\}$,

общее реш: $\left.\begin{array}{l} x_1 \quad =x_3 \\ x_2 \quad =-2x_3 \end{array}\right\}$, ФСР (1,-2,1).

Практика 6
Линейные операторы, собственные векторы.
<u>Примеры решения задач.</u>

Пример 1.
Как построить матрицу по общему виду функции.
$L(x_1,x_2)=(2x_1+3x_2, x_1+4x_2)$
Отобразим базис: $(1,0)\to(2,1)$, $(0,1)\to(3,4)$.Запишем в столбцы:
$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Образ произвольного вектора как раз и получается таким, как требуется в изначальной формуле: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$

Алгоритм поиска собственных векторов.

1. Записать характеристическую матрицу $A - \lambda E$, то есть вычесть по диагонали произвольное λ.
2. Вычислить определитель $|A - \lambda E|$ и приравнять к нулю - получится характеристическое уравнение.
3. Решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, найти все собственные числа.
Их будет не больше, чем n, так как уравнение порядка n, так как по диагонали n элементов.
4. Подставить каждое конкретное λ в характеристическую матрицу, и решить однородную систему
$(A - \lambda E)x = 0$. Таких шагов может быть n. Каждый раз надо изменить диагональ и заново решить систему!
ФСР системы это и будет собственный вектор для того λ .

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ найти собственные числа и векторы.

$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$. Далее, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

$(1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 0$,

Рещим это уравнение: $\lambda^2 - 7\lambda = 0$. Получим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7$.

Теперь подставим каждое λ и решим системы уравнений.

$\lambda = 0$:

$\begin{pmatrix} 1-0 & 3 \\ 2 & 6-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, система: $\begin{matrix} x_1 & +3x_2 = 0 \\ 2x_1 & +6x_2 = 0 \end{matrix}$.

Общее решение: $x_1 = -3x_2$,

вектор $(-3,1)$.

$\lambda = 7$:

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 3 \\ 2 & 6-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, система:

$\begin{matrix} -6x_1 & +3x_2 & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & =0 \end{matrix}$. Общее решение: $x_2 = 2x_1$,

вектор $(1,2)$.

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задачи для практического занятия.

Задача 1. Решить однородную систему, найти ФСР

$$\left.\begin{matrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =0 \end{matrix}\right\}$$

Ответ. Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$, ФСР: $\{(-1,-4,3)\}$.

Задача 2. Решить однородную систему, найти ФСР

$$\left.\begin{matrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & =0 \end{matrix}\right\}$$

Ответ: Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$.

ФСР из 2 векторов: $\{(-1,-4,3,0),(-1,0,0,1)\}$.

Задача 3. Построить матрицу линейного оператора в 2-мерном пространстве

$L:(x_1, x_2) \to (x_1 - 2x_2, 3x_1 + 5x_2)$

Находим, в какие векторы отображаются два базисных: $(1,0) \to (1,3)$, $(0,1) \to (-2,5)$. Эти результаты запишем по столбцам, в итоге ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Построить матрицу линейного оператора в 3-мерном пространстве

$L:(x_1,x_2,x_3)\to(3x_1+2x_2+x_3, 2x_2, -2x_1+4x_2)$

Ответ: $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

Найти собственные числа и векторы.

Задача 5. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\lambda=1$ ему соотв. вектор (1,0), $\lambda=3$ соотв. вектор (1,1)

Задача 6. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Корни -1 и 5. Векторы (-1,1) и (1,1).

Задача 7. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ Здесь хар. корень кратности 2: $\lambda=1$. Собственный вектор (1,0). Двух линейно-независимых собственных векторов для этого оператора нет. Вообще, количество собственных векторов меньше или равно кратности корня.

Задача 8. Доказать, что линейный оператор $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ не имеет собственных векторов.

Здесь $D<0$ для характеристического уравнения, поэтому нет.

Задача 9.Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -6 & -6 & 4\end{pmatrix}$

Ответ. Кратный корень $\lambda=1$ два вектора: (1,0,2) (0,1,2) Корень $\lambda=2$ вектор (1,0,3).

Задача 10. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ $\lambda=2$ вектор (1,0,0) $\lambda=3$ вектор (1,1,0) $\lambda=4$ вектор (1,1,1).

Д/З. Задача на повторение соб. чисел и векторов

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ответ:} \quad \begin{array}{c} \lambda = 1 \to (0,-1,1) \\ \lambda = 2 \to (1,-5,0) \\ \lambda = 7 \to (1,0,0) \end{array}$$

Практика 7

<u>Примеры решения задач.</u>

Квадратичные формы.

Пример 1. Построить матрицу квадратичной формы:

$Q = 3x_1^{\ 2} + 4x_2^{\ 2} + 5x_3^{\ 2} + 6x_1x_2 + 16x_1x_3$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 2. $Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2$. Привести к главным осям.

Матрица $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдём собственные числа и векторы.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $(3-\lambda)^2 - 4 = 0$,

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ Собственные числа 5 и 1.

Решаем две однородные системы, для каждого λ по отдельности.

$\lambda = 5$ тогда $\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ранг системы = 1, остаётся одно уравнение $x = y$, собственный вектор (1,1).

Аналогично,

$\lambda = 1$ тогда $\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ранг системы = 1, остаётся одно уравнение $x = -y$, собственный вектор (-1,1).

Как видим, эти векторы ортогональны. Это потому, что матрица оператора симметрична, что и так следует из теоремы 7.

Затем нужно нормировать их, то есть поделить на длину. Итак получили новый ортонормированный базис:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ и } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Обратите внимание, что этот новый базис - повёрнутый на 45^0 декартов базис, то есть (1,0) и (0,1).

Обозначим новые координаты z, w, тогда взаимосвязь старых и новых координат через матрицу перехода выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- отсюда, умножив матрицу на столбец, можно записать формулы связи старых и новых координат:

$$x = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}.$$

Если мы подставим эти x, y в исходную квадратичную форму $Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2$, то увидим, что в ней не будет произведений типа zw, wz, а коэффициенты при квадратах - это и будут ранее найденные собственные числа. Покажем это подробнее:

$$Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2 =$$

$$3\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$3\left(\frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2} - 2\frac{zw}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) + 4\left(\frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) + 3\left(\frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2} + 2\frac{zw}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)z^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)w^2 + 3zw - 3zw = 5z^2 + 1w^2.$$

Итак, $Q = 5z^2 + w^2$.

Построение уравнения прямой в плоскости.

Пример 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) перпендикулярно вектору (3,4).

Решение. $M_0M = (x-1, y-2)$, $n = (3,4)$, они перпендикулярны. Тогда

$3(x-1) + 4(y-2) = 0$

$3x + 4y - 11 = 0$. Замечание. Здесь можно явно выразить y и привести к форме $y = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}x$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) параллельно вектору (3,4).

Решение. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$, $4x - 4 = 3y - 6$, $4x - 3y + 2 = 0$.

Построение уравнения прямой по двум точкам сводится к этому же методу, так как вектор, проведённый между этими точками, и есть направляющий к прямой.

Пример 5. Найти уравнение прямой, проходящей через точки (3,4) и (5,7).

Решение Направляющий вектор здесь (5-3, 7-4) = (2,3).

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3}$, $3x - 9 = 2y - 8$, $3x - 2y - 1 = 0$.

Поиск расстояний от точки до прямой

Пример 6. Найти расстояние от точки $M_1(1,4)$ до прямой $3x + 4y + 1 = 0$.

Решение. Ищем какую-то точку на прямой. Присвоим y = 0, тогда $x = -\frac{1}{3}$, т.е. $M_0\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$. $M_0M_1 = \left(\frac{4}{3}, 4\right)$. $n = (3,4)$. Тогда

$$d = \frac{|(M_0M_1, n)|}{|n|} = \frac{\frac{4}{3}3 + 16}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Уравнение плоскости в пространстве.

Пример 7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1,1,1) перпендикулярно вектору (1,2,3).

Решение. Вектор $(x-1, y-1, z-1)$ ортогонален вектору (1,2,3).

Тогда $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ следовательно,

$x+2y+3z-6=0$. Если бы изначально было дано, что перпендикуляр (2,4,6) то получили бы
$2x+4y+6z-12=0$, но это уравнение задаёт ту же самую плоскость. Достаточно вынести 2 за скобку, и сократить на 2, получили бы то же самое уравнение. $2(x+2y+3z-6)=2\cdot 0=0$.

Пример 8. Построить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельно 2 направляющим (1,2,3) и (1,1,1)

Решение: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ Можем разложить по первой строке:

$x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-x+2y-z=0$.

Для удобства, чтобы 1-й коэффициент был положителен, можно домножить на (-1). Ответ: $x-2y+z=0$.

Пример 9. Построить уравнение плоскости, проходящей через (1,1,1) параллельно 2 направляющим (1,1,2) и (2,1,3)

Решение: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$ ответ $x+y-z=0$.

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. Привести к главным осям квадратичную форму: Q(x,y) = $14x^2+24xy+21y^2$ Ответ $30z^2+5w^2$

Задачи на построение уравнений прямых

Задача 2. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 (1,2) и перпендикуляру n(3,5). Ответ 3x+5y-13=0

Задача 3. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 (1,2) и направляющему ***l*** (3,5). Ответ 5x-3y+1=0

Задача 4. Построить уравнение прямой по точке и перпендикуляру (с произвольными параметрами, которые придумают студенты).

Задача 5. Построить уравнение прямой по 2 точкам (1,2) и (6,9)
Ответ 7x-5y+3=0.
Задача 6.(10.17 [1]) Составить уравнение средней линии треугольника A(5,-4), B(-1,3), C(-3,-2)
параллельно стороне AB - ответ 7x+6y+11=0.
параллельно стороне AC - ответ x+4y=0.

Задачи на поиск пересечений

Задача 7. Найти пересечения прямой 3x-4y+12=0 с осями координат и площадь треугольника, который она отсекает от одной из координатных четвертей. Ответ (-4,0) и (0,3), S = 6.
Задача 8. Найти точку пересечения двух прямых x+4y-9=0 и 2x+y-4=0. Отв (1,2).
Задача 9. (10.23 [1]) При каком A три прямых 2x-y+3=0 ; x+y+3=0 ; Ax+y-13=0 пересекаются в одной точке. Ответ A = - 7.

Задачи на поиск расстояний

Задача 10. Найти расстояние от точки (1,4) до прямой 6x+2y-15=0.
Ответ $1/2\sqrt{10}$.
Задача 11. Найти 2 точки на оси Ox, отстоящие от прямой 3x+5y-2=0 на расстояние d=3. Отв $\left(\frac{2}{3}\pm\sqrt{34},0\right)$

Задача 11a: Найти 2 точки на оси Ox, отстоящие от прямой x-y-1=0 на расстояние $2\sqrt{2}$. Отв. (-3,0) и (5,0).

Задача 12. Найти расстояние между параллельными прямыми
$2x+y+3=0$ и $6x+3y+4=0$
(указание: берётся точка на одной и ищется расстояние до второй, как раньше). Ответ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Уравнение плоскости в пространстве.

Задача 13. Построить уравнение плоскости, проходящей через точку (1,2,3) перпендикулярно вектору (1,4,2) Ответ x+4y+2z -15=0
Задача 14. Построить уравнение плоскости по точке (2,2,8) и перпендикуляру (3,3,7). ($3x+3y+7z-68=0$)

Задача 15. Построить уравнение плоскости по точке (-2,3,7) и 2 направляющим векторам (4,2,3) и (2,-5,0). ($5x+2y-8z+60=0$)

Задача 16. Построить уравнение плоскости по трём точкам. A(1,2,3), B(3,5,7), C(4,5,6). (отв $x-2y+z=0$)

Вариант домашней задачи: Даны три точки A,B,C. Вывести уравнение прямой,содержащей AB и найти расстояние от точки C до этой прямой
(это = высота треугольника ABC).

Практика 8

Примеры решения задач.

Прямая в пространстве

Пример. Построить уравнение прямой по точке (1,1,1) и направляющему вектору (1,2,3).

$(x-1, y-1, z-1) \,||\, (1,2,3)$, тогда $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ - канонические уравнения. Параметрические: $\left\{\begin{array}{c} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{array}\right\}$

Задачи для практического занятия.

Задача 1. Найти расстояние от точки M_0 (1,3,5) до плоскости $x-2y+z=0$ d = 0

Точка M_0 (7,15,22) d = $1/\sqrt{6}$.

Задача 2. Найти угол между двумя плоскостями $x-2y+z=0$ и $x+y+3z+1=0$.

Номали $(1,-2,1)$ и $(1,1,3)$. Скал. произведение 2. Модули $\sqrt{6}$ и $\sqrt{11}$.

Ответ $\arccos\left(2/\sqrt{66}\right)$.

Прямая в пространстве

Задача 3. Построить уравнение прямой в пространстве (каноническое, параметрическое, уметь строить оба вида и переводить один в другой) по точке (2,-3,4) и направляющему (1,2,3).

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}$ или $\{x=2+t, y=-3+2t, z=4+3t\}$

Задача 4. Построить уравнение прямой, лежащей в пересечении двух плоскостей.

$2x-3y+5z-6=0$ и $x+5y-7z+10=0$.

Векторное произведение нормалей здесь (-4, 19,13). Чтобы взять произвольную точку из пересечения, можно положить z = 0 и решить систему, вычислив x, y. Получим (0,-2,0).

Отв. $\frac{x}{-4}=\frac{y+2}{19}=\frac{z}{13}$ или $x=-4t, y=-2+19t, z=13t$

Задача 5. Доказать, что прямая $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ пересекает ось Oz и найти точку пересечения. Отв. (0,0,1).

Задача 6. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$ и плоскостью $x+2y+z=0$

Направляющий $(2,3,1)$ нормаль плоскости $(1,2,1)$. Скал. произв. 9.

Модули $\sqrt{14}$ и $\sqrt{6}$.

Угол $90-\arccos\left(9/\sqrt{84}\right)$

Задача 7. Найти параметрические и канонические уравнения прямой, перпендикулярной к плоскости треугольника с вершинами A(0,-2,3), B(3,1,3), C (-3,-1,0).

Реш. Направляющие AB и AC это (3,3,0) и (-3,1,-3). Векторное произведение (-9,9,12).

Направляющий для прямой можно взять тогда (-3,3,4).

Канон $\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{4}$, параметрические:

$x=-3t, y=-2+3t, z=3+4t$

Задача 8. (12.22 [1]) Доказать, что две прямые в пространстве

$$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6-4t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=5+t \\ y=-1-4t \\ z=-4+t \end{cases}$$ пересекаются и найти точку пересечения.

Нужно решить систему, положив в первых равенствах t_1 а во вторых t_2. Получим, при каких

t_1 и t_2 достигается одна и та же точка. Затем подставить t_1 в первые уравнения либо t_2 во вторые, получим одни и те же значения для x,y,z

Ответ (3,7,-6).

Задача 9. (12.34 [1]) Вычислить расстояние от точки (2,3,-1) до прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ в пространстве. ответ 21.

Задача 10. (12.35 [1]) Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми.

$\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$ Ответ 13.

Задача 11. (13.16 [1]). Доказать, что кривая $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ - эллипс, найти центр и полуоси. Здесь надо выделить полный квадрат, и привести к каноническому виду эллипса.

Ответ центр (3,-1), полуоси 3 и $\sqrt{5}$.

Практика 9

Контрольная на 45 минут:

5. Векторная алгебра (скалярные, векторные произведения).
6. Системы уравнений, метод Гаусса
7. Собственные числа и векторы
8. Уравнения прямой и плоскости

Новая тема: предел последовательности.

<u>Примеры решения задач.</u>

Пример 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ умножим на сопряжённое выражение, то есть на сумму, подобную этой разности. Тогда можно будет применить формулу сокращённого умножения, и корень исчезнет, так как он будет возведён в квадрат.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}^{\,2}-n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n-n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

В знаменателе содержится n и выражение, содержащее корень из 2 степени, которое по скорости роста сопоставимо с n. Сократим числитель и знаменатель на n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}}+1\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{n^2+n}{n^2}}+1\right)}$$

Чтобы разделить корень, удобно факт деления на n представили как деление на корень из n^2, продолжим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{n^2+n}{n^2}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пределы функций.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$. В точке 3 значение функции не существует, однако во всех соседних точках существует, и можно узнать, к какой ординате стремится график при $x\to 3$. Разложим на множители

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{1} = 6.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{1} = 2.$

Рассмотрим вычисление предела методом сокращения множителей ещё на нескольких примерах.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x-3)} = \dfrac{2}{-2} = -1.$

Нашли корни числителя и знаменателя, разложили на множители. Сократили тот множитель, который отвечает за стремление к нулю, в числителе и знаменателе.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-5)} .= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)}{(x-5)} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}.$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x+6}$.Вычисление проводится таким же методом, как в случае последовательности, где было $n\to\infty$.

Сократим на x, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}}{3+\frac{6}{x}} = \dfrac{2+0}{3+0} = \dfrac{2}{3}.$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$. Обычным методом и методом Лопиталя.

1 способ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x-5} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}.$

2 способ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-4x+3)'}{(x^2-6x+5)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-4}{2x-6} = \dfrac{2-4}{2-6} = \dfrac{1}{2}.$

Задачи для практического занятия.

Задача 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+4}{6n^2+7}$ Ответ. 1/3.

Задача 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2+1}}{n+3}$ Ответ 2.

Задача 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)$ Ответ 3.

Задача 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2+11}-2n}{3n+7}$ Ответ 1.

Задача 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n+1}{2n^3+5n+2}$ Ответ 3/2.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ Ответ 6.

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-3x+2}$ Ответ 0.

Практика № 10.
Основы мат. анализа, множества и функции.
<u>Примеры решения задач.</u>

1 замечательный предел.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{(3x)}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}(x+1)=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$

2 замечательный предел.

Пример 3.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Если отдельно рассмотреть основание, видно, что оно стремится к 1 (там будет 3/3).

Степерь стремится к бесконечности. Таким образом, здесь неопределённость вида 1^{∞}.

Выделим целую часть этой неправильно дроби. Это можно сделать так: вписать перед дробью +1, а после неё (-1). Затем привести к общему знаменателю всё, что после первой единицы, то есть второй и третий элементы.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+1}{2x-1}-1\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(x+1)-(2x-1)}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$. Обратите внимание, что само собой автоматически получилось, что после 1 такая дробь, которая стремится к 0. Это и должно было получиться, ведь всё основание стремится к 1.

Теперь нужно в степени искусственно домножить на дробь, обратную к той, что в основании следует после единицы. Но чтобы степень в примере не изменилась, надо компенсировать домножением и на саму эту дробь, а не только на обратную.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}\bullet\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}}\right)^{\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}}$$ В больших скобках получилось выражение типа $\left(1+b(x)\right)^{\frac{1}{\mathrm{b(x)}}}$, его предел равен e. Таким образом,

осталось найти $\lim\limits_{x\to 2}(e)^{\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2x-1}} = e^{-1/3}$.

Чтобы степени было видно крупнее, можно записать через exp(A) вместо e^A.

$$\exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}\right) = \exp\left(-\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x-1}\right).$$ Итак,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{-1/3}.$$

Пример 4. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Тип примера точно такой же, 1^{∞}. Основание стремится к 1, так как здесь одинаковые старшие степени многочленов в числителе и знаменателе, и одинаковые коэффициенты при них. Как и в прошлом примере, отделим от дроби её целую часть, то есть 1. Если предел дроби равен 1, то так можно сделать.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}\right)^{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(x+1)-(x-2)}{x-2}\right)^{2x-1} =$$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}$. Слагаемое, которое следует после 1, стремится к 0, что и должно быть для 2 замеч. предела. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\bullet\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)} =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)\right)\right) =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) = e^{6}.$$ Итак, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = e^{6}$.

Некоторые особенности вычисления с помощью второго замечательного предела.

1. Если основание стремится не к 1, а к числу a<1 а степень к бесконечности, то можно сразу сделать вывод, что предел 0. Если a>1 то наоборот, ∞.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0\ \ ,\ \ \lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=\infty$$

2. Не всегда в степени экспоненты получается конечное число. Так, в примере

$$\lim_{x\to1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}=\left(\lim_{x\to1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right)^{\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}$$

$= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}\frac{1}{(x-1)^2}} = e^{+\infty}=+\infty$. Это произошло из-за того, что в степени в её знаменателе остался множитель $(x-1)$.

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. Доказать нечётность функции $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

Задача 2. Найти композицию f(f(f(x))) если $f=\frac{1}{1-x}$. Отв. f(f(f(x))) = x.

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{3x+1}$ (отв. 1/3)

Задача 4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$ Ответ. 10/9.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$ (отв. 5/3) Проверить по пр. Лопиталя.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$ (отв. 27)

Задача 7. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2+2x}$ Ответ -3.

Задача 8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^3-4x^2-5x}$ Ответ 1/2.

Задача 9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt{x+7}-9}{\sqrt{6-x}-2}$ Ответ -2.

Задача 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ Ответ 0.

Задача 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$ Ответ 1/6.

Задача 12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$ Ответ 1/4.

Задача 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{4+x}-2}$ Ответ 24.

Задача 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^x$ Ответ $\sqrt{e}$

Задача 15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2+3}$ Ответ e^2

Задача 16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}}$ Ответ e^{-1}

Задача 17. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-3}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}$ Ответ e^7

Домашние задачи: 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$ (отв. 1/3).

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}}$ отв. $e^{-\frac{3}{7}}$

Практика № 11.
Главная часть бесконечно-малой.
<u>Примеры решения задач.</u>

Пример 1. Найти главную часть для $\alpha(x)=x^2+x-2$ в точке x = 1 вида $C(x-1)^k$.

Видно, что это действительно бесконечно-малая в точке 1, $\alpha(1)=0$.

Метод: запишем в знаменателе $C(x-1)^k$ и приравняем предел к единице, ведь эти величины должны быть эквивалентны. Затем ведём преобразования и упрощаем выражение под знаком предела, как при обычном вычислении предела. Когда оно упростится настолько, что все $(x-1)$ можно будет собрать в отдельный множитель, а все остальные, не стремящиеся к нулю, отдельно, тогда легко определится k и C.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{C(x-1)^k}=1$. Так как мы ищем эквивалентную, то предел равен 1.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{C(x-1)^k}=1$. Представим в виде $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)^k}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{C}=1$.

Во-первых, множители (x-1) полностью сократятся лишь в случае, когда k=1, иначе предел получился бы 0 или ∞. Теперь, если уже известно, что k=1, и все множители типа (x-1) сократились, вычислим C.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{C}=1$, $\dfrac{3}{C}=1$, C = 3. Итак, $\gamma(x)=3(x-1)$.

Пример 2. Найти главную часть бесконечно-малой: $\alpha(x)=x\sin\left(x^2\right)$ в точке 0.

Так как точка 0, то $(x-x_0)=x$, то есть главная часть имеет вид Cx^k.

Запишем отношение данной бесконечно-малой и «эталонной» степенной. Нужно потребовать, чтобы этот предел был 1, ведь мы ищем именно эквивалентную бесконечно-малую.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(x^2\right)}{Cx^k}=1$. Преобразуем выражение с целью его упростить.

Домножим и поделим на x^2, этим мы фактически можем заменить $\sin(x^2)$ на x^2. Параметры C и k пока просто переписываем, не меняя их в процессе преобразований. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(x^2\right)}{Cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\dfrac{x^2x}{Cx^k}$ =

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{Cx^k}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{Cx^k}=1.$$

Полное сокращение всех x будет лишь в случае k=3, а иначе предел 0 или ∞, и не будет равен 1.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C}=1$, тогда C = 1. Итак, Cx^k = $1x^3$

Ответ: $\gamma(x)=x^3$**.**

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$ (по пр. Лопиталя)(отв. 1/3).

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}}$ отв. $e^{-\frac{3}{7}}$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$ отв. 2

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ отв. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ замена, отв. $\dfrac{3}{2}$

Задача 6 а,б. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$ и $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$ отв. 4,-2

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x-6}-1}{\sqrt{4x-11}-1}$ отв. 1.

По правилу Лопиталя:

Задача 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2+4x-4)}{x-1}$ отв. 6.

Задача 9. $\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$ (16/50)

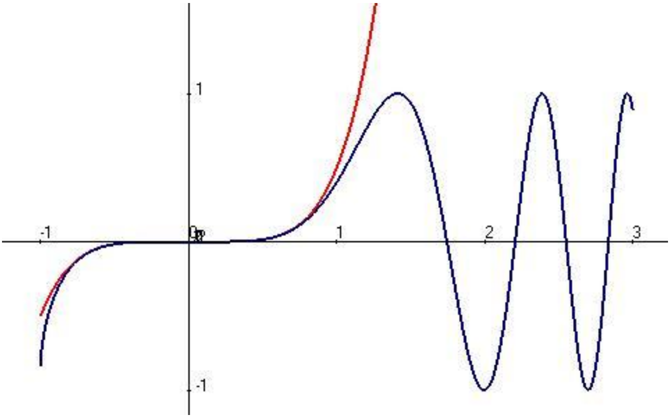
Задача 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin^2 x)}{\sin^2 x} = 2$

Бесконечно малая и её главная часть.

Задача 11. Выделить главную часть бесконечно-малой:
$\alpha(x)=\sin\left(x^2-1\right)$ в точке 1. отв: $\gamma(x)=2(x-1)$.

Задача 12. Выделить главную часть бесконечно-малой:
$\alpha(x)=\sin\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)$ отв: $\gamma(x)=\dfrac{x^5}{2}$

Чертёж к этой задаче:



Непрерывность и точки разрыва.

Найти точки разрыва и определить их тип.

Задача 13. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ точка 0 разрыв 1 рода.

Задача 14. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ точка (-1) разыв 2 рода, точка 1 разрыв 1 рода.

Задача 15. $f(x)=e^{-1/x^2}$.

Практика № 12.
Контрольная 45 минут.
9 Предел последовательности
10 Предел функции, с неопределённостью 0/0.
11 Предел функции, 1-й замеч. lim
12 Предел функции, 2-й замеч. lim

Производная (начало темы).
Основные правила дифференцирования, таблица производных.
<u>Задачи для практического занятия.</u>
Задача 1. $\sin^4(x)$ Задача 2. $\ln\cos(x^2+4)$

Задача 3. $f(x)=\ln(x^3)\cdot tg(x)$ Задача 4. $f(x)=\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\cos(x^2)}$.

Задача 5. $\sqrt{x}^5$ и $x^{5/2}$ 2 способа сравнить.

Задача 6. $(tgx)''$ после первой пр. ост $\cos^{-2}$, 2 способа.

Задача 7. $f(x)=x^x$ отв $f'(x)=x^x(1+\ln x)$
Повторение перед контрольной. Пределы.
* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-30x+29}{x^2-50x+49}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-29)}{(x-1)(x-49)}=\dfrac{-28}{-48}=\dfrac{7}{12}$.
* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(100x)}{100x}\,\dfrac{100x}{x(x+20)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{100}{(x+20)}=5$.

Практика № 13.
Частные производные, градиент.

<u>Примеры решения задач.</u>

Пример 1. Найти частные производные для $f(x,y)=x^2y^3$
Решение. $f'_x=(x^2y^3)'_x=2xy^3$, $f'_y=(x^2y^3)'_y=3x^2y^2$.

Пример 2. Найти градиент функции $f(x,y,z)=x^2y+yz$ в точке (1,1,1).

Решение. Найдём частные производные. $f'_x=2xy$, $f'_y=x^2+z$, $f'_z=y$.

Присвоим все значения x,y,z=1. Получаем $\nabla f(1,1,1)=(2,2,1)$.

Пример 3. Пусть дана функция $f(x,y)=x^2+y^2$. Соответствующая поверхность - эллиптический параболоид.

Градиент поверхности это $(2x,2y)$. Теперь, если фиксировать точку (1,0) то получим, что градиент равен (2,0) а если точку (1,1) то (2,2) и т.д. Градиент для этой функции всегда направлен радиально от начала координат.

Пример 4. Найти уравнение касательной к графику $y=x^2$ в точке $x_0=1$.

Решение. $f(1)=y_0=1$, $f'(x)=2x$, $f'(1)=2$. Уравнение $y-1=2(x-1)$, то есть $y=2x-1$.

Пример 5. Найти уравнение касательной к кривой $y=2x^3+3x^2+2$ в точке $x_0=2$.

Решение. $f(2)=y_0=16+12+2=30$, $f'(x)=6x^2+6x$, $f'(2)=24+12=36$. Уравнение $y-30=36(x-2)$, что преобразуется к виду $y=36x-42$.

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. Найти 1 и 2 производную для $f=\dfrac{x+1}{x+4}$

Задача 2. Найти производную вектор-функции $\begin{pmatrix}\sin^3(x^2)\\ x^3\end{pmatrix}$.

Задача 3. Найти 1-ю и 2-ю производную для $f(x) = arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

найти $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ответ :1-я $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$, $\quad f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$=2.

Задача 4. Дана функция $f(x) = 4ctg^2 x + 8\ln(\sin x)$ Найти $f''(x)$.

Ответ. $24\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$ $\quad f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 48$.

Задача 5. $f(x) = e^{\sin x}$ найти $f''(x)$, $f''(0)$, $f''(\pi/2)$. Отв. (1 и -е).

Задача 6. Найти 1-ю и 2-ю производную для $f = \dfrac{x+3}{x^2+4}$.

Ответ. $\quad f' = \dfrac{4-6x-x^2}{(x^2+4)^2}$ $\quad f'' = \dfrac{2x^3+18x^2-24x-24}{(x^2+4)^3}$

Задача 7. Дана функция $u = 3xy + xz - z^2$. Найти: $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1,1)$.

Задача 8. Дана функция $u = 3xy + xz - z^2$. Найти: а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,1,-1)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (-1,2,2)$. Ответ. 6.

Задача 9. Дана функция $u = 3xy + xy^2$. Найти: а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1)$;

Задача 10. Дана функция $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти: а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,-2,2)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (8,-4,1)$. Ответ. 2/3.

Задача 11. Дана функция $u = x^2 + 3xy$. Найти: а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,-2)$; $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (3,1)$. Ответ. 0.

Уравнение касательной.

Задача 12. Найти касательную к графику $y = x^2$ в точке с абсциссой 2 а затем расстояние от этой прямой до начала координат
Ответ $y = 4x - 4$, расстояние $4/\sqrt{17}$.
Задача 13. Найти касательную к графику $y = 3x^3 + 4x^2$ в точке с абсциссой 1. Ответ $y = 17x - 10$.

Практика № 14.

<u>Примеры решения задач.</u>

Формула Тейлора.
Примеры вывода формул Тейлора известных функций.

Пример 1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

Рассмотрим несколько производных и затем их значения в точке 0:

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$ $f''(x) = e^x$ ...	$f(0) = 1$ $f'(0) = 1$ $f''(0) = 1$ ...

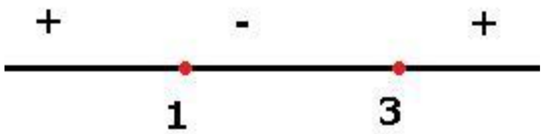
тогда мы и получаем, что: $e^x = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$

т.е $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

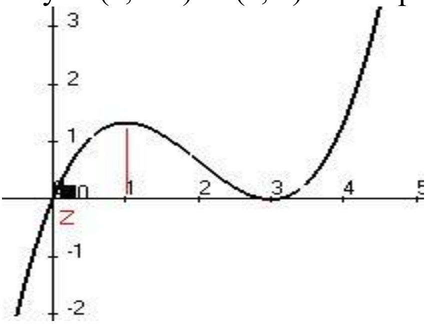
Экстремумы.

Пример 2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$. Найдём $f' = x^2 - 4x + 3$. Корни 1 и 3. Выясним знак производной на каждом из интервалов $(-\infty,1)$, $(1,3)$ и $(3,+\infty)$. Для этого надо вычислить знак f' в какой-нибудь точке на каждом из этих интервалов. Желательно для удобства вычислений взять целое число как представителя интервала.
Например, $0 \in (-\infty,1)$, $2 \in (1,3)$ и $4 \in (3,+\infty)$.

$f'(0)=3>0$. $f'(2)=4-8+3=-1<0$. $f'(4)=16-16+3=3>0$.



Таким образом, в точке $x=1$ рост сменяется убыванием, $x=1$ точка максимума.
В точке $x=3$ убыванием сменяется ростом, $x=3$ точка минимума.
Можно вычислить и ординаты, чтобы более подробно нарисовать график. Точки экстремума (1, 4/3) и (3, 0) . Вот график:



Решим тот же самый пример теперь с помощью второй производной.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$.

$f' = x^2-4x+3$. Точки экстремума 1 и 3.

А теперь не будем искать знак производной на каждом интервале, а просто вычислим $f''(x)=2x-4$.

$f''(1)=-2<0$ в точке $x=1$ максимум.

$f''(3)=2>0$ в точке $x=3$ минимум.

Наибольшее и наименьшее значение.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^2-3x+2$ на [0,5].

Сначала найдём экстремумы во внутренних точках.

$f'(x) = 2x - 3$, $f' = 0$ только при $x = \frac{3}{2}$. При этом $f'' = 2 > 0$, то есть, там минимум.

Осталось найти все значения функции в точках экстремума и в двух граничных точках и сравнить их:

$f(0) = 2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ Наибольшее значение в точке 5, наименьшее в точке 3/2.

$f(5) = 12$

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Задача 1. Повторение темы «градиент». Найти градиент функции $U = x^3 y + xy^4$ в точке (2,2) и производную по направлению a = (3,4). Ответ (40,72) и 81,6.

Задача 2. Найти касательную к графику функции $f(x) = \cos x + \ln(x+1)$ в точке x=0. Ответ. $y = x + 1$

Задача 3. Найти уравнение касательной к графику $y = 2x^3 + 3x^2 + 3$ в точке $x = 1$ и площадь треугольника, который она отсекает от одной из координатных четвертей. y = 12x-4, 2/3.

Задача 4. На графике функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ взята точка A. Касательная к графику в точке A наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен -4. Найти точку A. Ответ. $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$

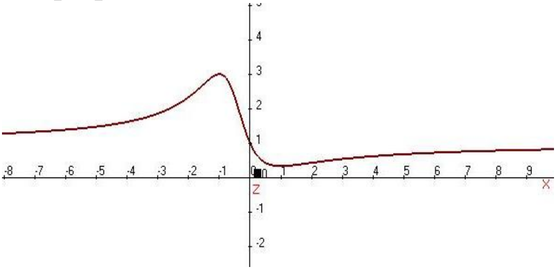
Задача 5. Найти точки на графике $y = x^2 + 4$, такие, что касательная, проведённая в них, проходит через начало координат. Ответ (-2,8) и (2,8).

Задача 6. Найти экстремумы функции $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Задача 7. Найти интервалы монотонности и экстремумы $x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x + 1$

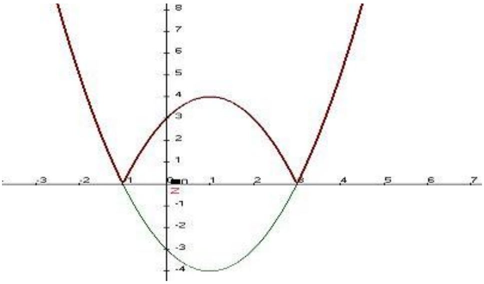
Задача 8. Найти интервалы монотонности и экстремумы $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Её график:

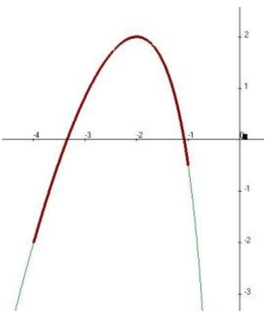


Задача 9. Найти интервалы монотонности и экстремумы $\left|x^2 - 2x - 3\right|$

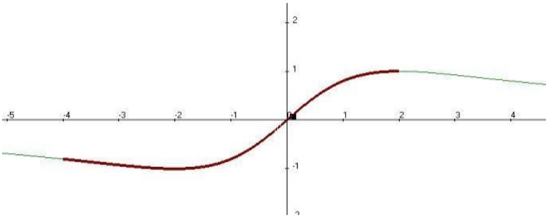
График $\left|x^2 - 2x - 3\right|$ и $x^2 - 2x - 3$:



Задача 10. Дана функция $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$. Найти её наибольшее и наименьшее знач. на отрезке $[-4, -1]$.



Задача 11. Дана функция $y(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$. Найти её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-4,3]$.



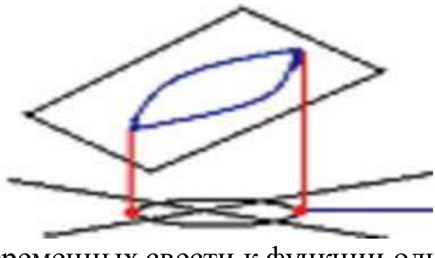
Практика № 15.
<u>Примеры решения задач.</u>

Условные экстремумы

Пример 1. Дана функция $f(x,y)=x+y+2$. Найти условные экстремумы этой функции на окружности $x^2+y^2=1$.

Решение. Условие имеет вид $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

Наклонная плоскость наклонена в сторону биссектрисы первой четверти. Окружность под плоскостью проецируется наверх, и там получается эллипс, и видно, что у него есть точки максимальной и минимальной высоты. Теперь найдём их подробно, аналитическим путём.



Надо функцию 2 переменных свести к функции одной переменной с помощью условия, и затем искать экстремум для неё уже обычным образом. Для точки на окружности, можно задать x,y так:
$x=\cos(t), y=\sin(t)$. Тогда вместо $f(x,y)$ можно получить в итоге $f(x(t),y(t))$ то есть $f(t)$.

$f(x,y)=x+y+2 = \cos t+\sin t+2 = f(t)$.

$f'(t)=-\sin t+\cos t$. $f'(t)=0$ при $\sin t=\cos t$, то есть $t=\dfrac{\pi}{4}$ и $t=\dfrac{5\pi}{4}$.

$f''(t)=-\cos t-\sin t$. Тогда $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$, там условный максимум.

$f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)>0$, там условный минимум.

Переведём t обратно в декартовы координаты x, y.

$t=\dfrac{\pi}{4}$ соответствует $x=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. При $t=\dfrac{5\pi}{4}$ будет $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Кстати, на чертеже они тоже хорошо видны, в 1-й четверти условный максимум, в 3-й четверти условный минимум.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для $f(x)=\sin x$.

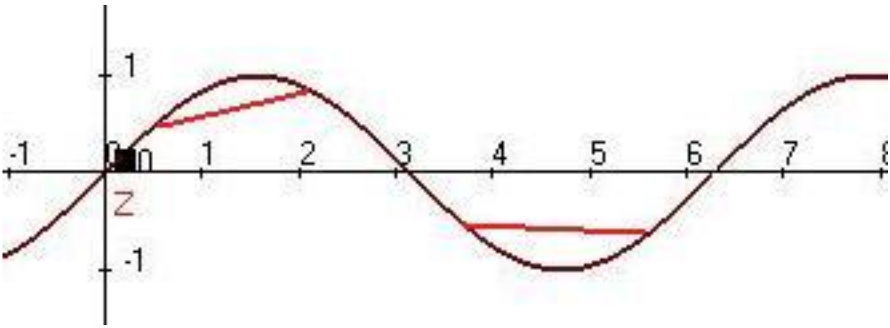
$f''(x)=-\sin x$.

На $(0+2\pi k, \pi+2\pi k)$:

$f''(x)<0$, когда $f(x)=\sin x>0$, тогда f выпукла вверх.

На $(\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k)$:

$f''(x)>0$, когда $f(x)=\sin x<0$, тогда f выпукла вверх.



Точки перегиба: $x=k\pi$.

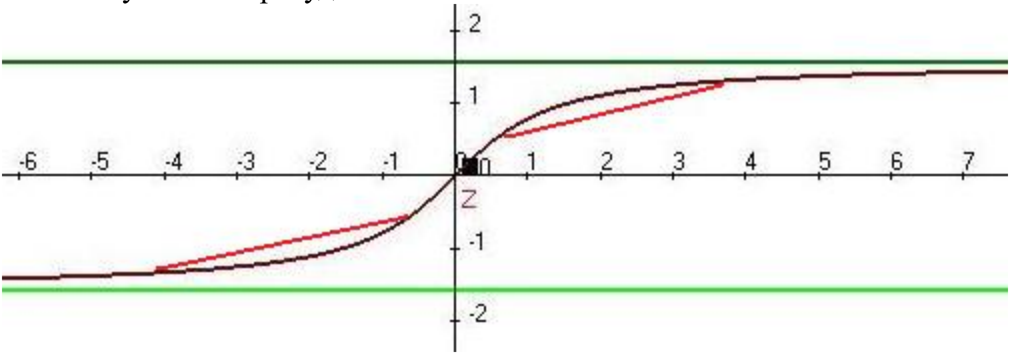
Пример 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для $f(x) = arctgx$.

$$f(x) = arctgx, \; f'(x) = \frac{1}{x^2+1}, \; f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

При $x < 0$: $f''(x) > 0$, f выпукла вниз.

При $x > 0$: $f''(x) < 0$, f выпукла вверх.

Касательная сначала поворачивается вверх, 1-я производная растёт (в начале координат угол наклона доходит до 45 градусов), а потом снова опускается при удалении точки в $+\infty$.



Пример 4. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

Во-первых, сразу видно точку разрыва 2-го рода $x = 2$. Есть вертикальная асимптота $x = 2$.

Найдём наклонную асимптоту.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)}$ (мы просто добавили лишний x в знаменателе, тем самым поделили на x).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1.$$ Итак, $k = 1$.

Обратите внимание: здесь предел одинаково вычисляется при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, но бывают примеры, в которых по-разному, то есть на правой и левой полуплоскости могут быть разные асимптоты.

Найдём $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2} - \dfrac{x(x-2)}{x-2}\right) =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1-(x^2-2x)}{x-2}\right) =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) = 2.$

Ответ. Вертикальная x = 2, наклонная y = 2x + 2.

<u>Задачи для практического занятия.</u>

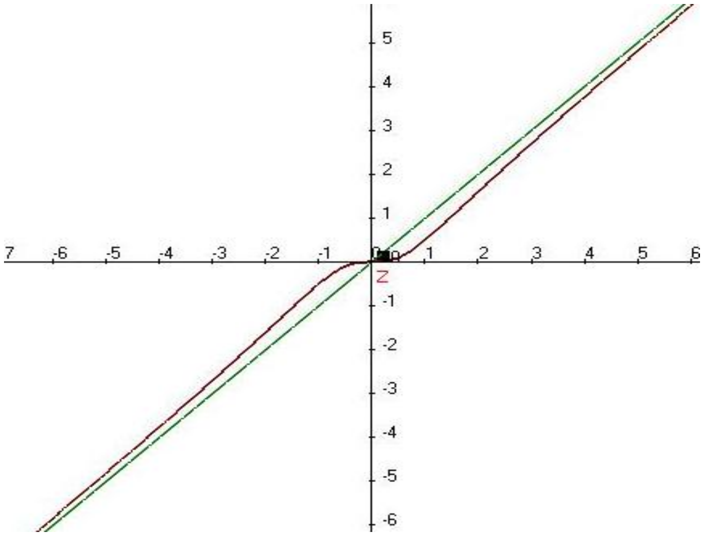
Задача 1. Экстремум функции 2 переменных.
$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10$. Ответ. (1,3) минимум.

Задача 2. Найти отношение сторон прямоугольника, такое, что при фиксированном периметре получилась бы максимальная площадь. Ответ $y/x = 1$.

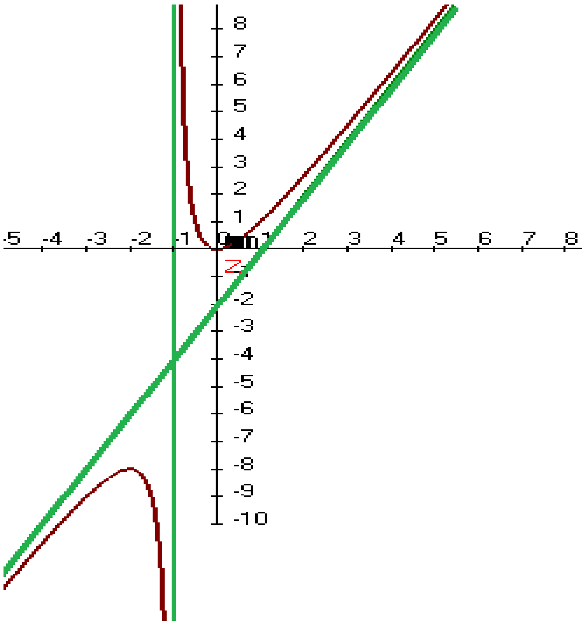
Задача 3. Найти отношение высоты к радиусу основания цилиндра, такое, что при фиксированной площади поверхности получится максимальный объём V. Ответ. $h/R = 2$.

Задача 4. Наибольшее и наименьшее значение $f = x - y^2$ в области $[-1,1]\times[-1,1]$.
Ответ. В (-1,-1) и (-1,1) наименьшее в (1,0) наибольшее.

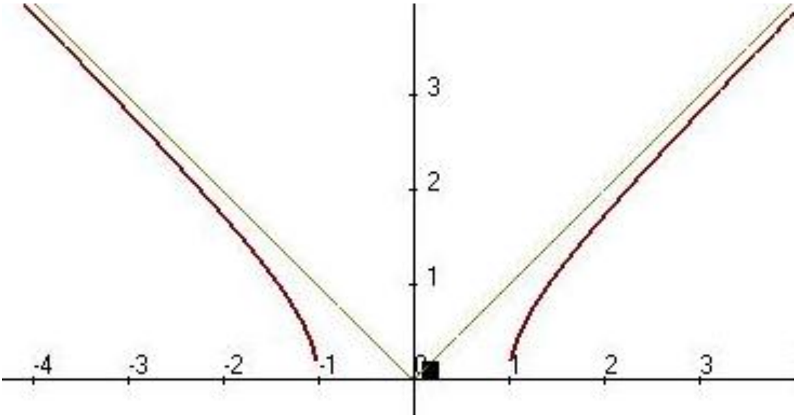
Задача 5. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз, и асимптоты графика функции $\dfrac{x^3}{x^2+1}$.



Задача 6. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$ Ответ. Вертикальная $x=-1$ и наклонная $2x-2$.



Задача 7. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.



Задача 8. Найти касательную плоскость к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке (1,1,2) либо (1,2,5).
Ответ: $z = 2x + 2y - 2$ и $z = 2x + 4y - 5$.

Задача 9. Производная функции, заданной неявно.
$F(x, y) = x^2 y^2 + x^4 + y^3 - 3 = 0$.
Найти производную в точке (1,1). Во-первых, эта точка принадлежит кривой.

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{(x^2 y^2 + x^4 + y^3 - 3)'_x}{(x^2 y^2 + x^4 + y^3 - 3)'_y} = -\frac{2xy^2 + 4x^3}{2x^2 y + 3y^2} = -\frac{2+4}{2+3} = -\frac{6}{5}.$$

Практика № 16.

<u>Задачи для практического занятия.</u>

Повторение перед контрольной работой.

Задача 1. Найти 2-ю производную для $f(x) = x^{10} \sin^2 x$.

$f'(x) = x^8 (90 \sin^2 x + 20x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x)$

Задача 2. Найти градиент функции $f = x^4 y$ в точке (1,1) и производную по направлению (1,3).

$\nabla f(x,y) = (4x^3y, x^4)$, $\nabla f(1{,}1) = (4{,}1)$. Нормируем вектор (1,3).
$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Скалярно умножим $(4{,}1)$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. $\frac{4}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

Задача 3. Найти уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 7x$ в точке $x_0 = 2$.
Решение. $f(2) = 4 + 14 = 18$. $f'(x) = 2x + 7$ $f'(2) = 4 + 7 = 11$.
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, тогда $y - 18 = 11(x - 2)$, $y = 11x - 4$.

Задача 4. Найти экстремумы для $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ Ответ: максимум $\left(1, \frac{7}{3}\right)$, минимум $(3{,}1)$.

Задача 5. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 9x^2$.
$f'(x) = 3x^2 - 18x = 3(x^2 - 6x) = 3x(x - 6)$. Точки 0 и 6.
$f(0) = 0$, $f(6) = 36*6 - 9*36 = -3*36 = -108$. Итак, (0,0) и (6, -108).

Контрольная 45 минут:
1. Частные производные, градиент.
2. Уравнение касательной.
3. Экстремумы функции.

Приложение 1.

Пример одного варианта контрольных работ.

Темы 1-й контрольной:
1. Действия над матрицами.
2. Определители.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.

Вариант:

1) Умножить матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2) Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3) Найти обр.матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

4) Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Темы 2-й контрольной:
5. Векторная алгебра (скалярные, векторные произведения).
6. Системы уравнений, метод Гаусса
7. Собственные числа и векторы
8. Уравнения прямой и плоскости

Вариант:

5) Векторы a,b выражены через p,q: $a=p+q$, $b=p+2q$.
$|p|=2$, $|q|=3$, угол между ними 60 градусов. Найти (a,b).

6) Решить систему $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$

7) Найти хотя бы один соб.вектор для оператора, заданного матрицей
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1,4,2) перпендикулярно вектору (2,1,2).

Темы 3-й контрольной:
9. Предел последовательности
10. Предел функции, с неопределённостью 0/0.
11. Предел функции, 1-й замеч. lim
12. Предел функции, 2-й замеч. lim
Вариант:
9) Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+1}-n)$

10) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

11) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^3+2x^2+x}$

12) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}$

Темы 4-й контрольной:
13. Частные производные для f(x,y), градиент.
14. Уравнение касательной
15. Экстремумы функции на [a,b].

Вариант:

13) Найти градиент функции $f = x^3yz$ в точке $M(1,1,1)$ и производную по направлению $a = (1,1,0)$.

14) Найти уравнение касательной для $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 1$ и высоту касательной при x=0.

15) Найти экстремумы для $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2$.

Литература.

[1]. Магазинников Л.И. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии.
[2]. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.