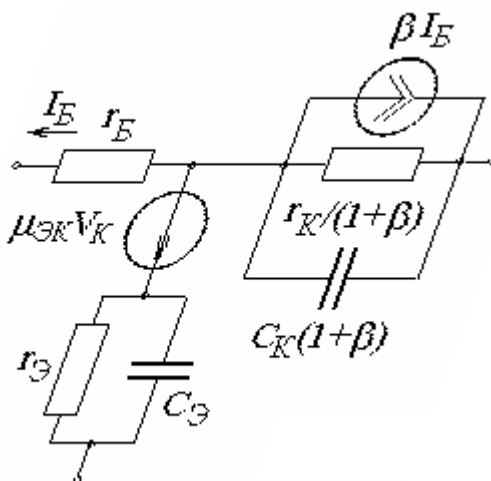


Романовский М.Н.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В РЭС



Рецензент: Еханин С.Г., профессор кафедры КУДР, доктор физико–математических наук

Романовский М.Н.

Компьютерное моделирование процессов в РЭС. Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2016. – 101 с.

Приведены общие сведения о функциональном моделировании технических объектов, рассмотрены методы и алгоритмы компьютерного моделирования процессов в РЭС на примере электронных схем.

Для студентов направления подготовки 211000.62 «Конструирование и технология электронных средств».

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	5
1.1 Сущность моделирования.....	5
1.2 Классификация моделей	6
1.3 Историческая справка	8
1.4 Моделирование и ЭВМ	11
2 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ	14
2.1 Принципы иерархичности и декомпозиции.....	14
2.2 Параметры и фазовые переменные	16
2.3 Требования к математическим моделям	19
2.4 Модели на микро-, макро- и метауровне.....	21
2.5 Моделирование элементов систем.....	24
2.6 Метод наименьших квадратов	26
3 ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА МАКРОУРОВНЕ	29
3.1 Компонентные и топологические уравнения.....	29
3.2 Аналогии компонентных уравнений	30
3.3 Аналогии топологических уравнений	32
3.4 Источники фазовых переменных	35
3.5 Формирование эквивалентных схем.....	35
3.6 Связи между разнородными подсистемами.....	38
4 МОДЕЛИ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЭС.....	41
4.1 Пассивные элементы	41
4.2 Полупроводниковые диоды	43

4.3 Полевые транзисторы.....	46
4.4 Биполярные транзисторы.....	51
4.5 Определение параметров моделей.....	57
5 МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ	62
5.1 Общие сведения	62
5.2 Преобразования Тевенина и Нортона.....	65
5.2 Формирование модели	67
5.3 Метод Ньютона – Рафсона.....	69
5.4 Модификации метода Ньютона – Рафсона	71
6 МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ.....	72
6.1 Комплексная частотная характеристика	72
6.2 Формирование модели	72
6.3 Методы решения систем линейных уравнений.....	76
6.4 Повышение эффективности алгоритмов анализа.....	81
7 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	84
7.1 Методы численного интегрирования.....	84
7.2 Точность и устойчивость методов	87
7.3 Выбор шага интегрирования	89
7.4 Комбинированные алгоритмы.....	91
7.5 Метод переменных состояния.....	92
7.6 Неявные динамические модели.....	95
ЛИТЕРАТУРА	100

1 ВВЕДЕНИЕ

1.1 Сущность моделирования

Реальные явления, процессы, системы объектов сложны настолько, что при их описании приходится отвлекаться от несущественных, второстепенных признаков и создавать некие, порой воображаемые, образы в которых учтены только существенные моменты. Такие образы, имитирующие действительность, называются моделями¹.

Строго говоря, модель – это такая мысленно представимая или материальная система, которая отображает или воспроизводит объект исследования и способна замещать его так, что ее изучение дает новую информацию о нем [1].

В определенном смысле модель характеризует какие-либо стороны объекта (оригинала, натуры). Для успешного отображения этих сторон важно наличие соответствующих теорий или гипотез, которые, будучи достаточно обоснованными, указывали бы на рамки допустимых при моделировании упрощений.

Моделирование можно рассматривать как метод исследования объектов познания на их моделях. На идее моделирования по существу базируется любой метод научного исследования – как теоретический, так и экспериментальный.

В общем случае процесс моделирования включает ряд этапов [2]:

- 1) постановка задачи и определение свойств оригинала, подлежащих исследованию;
- 2) констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала в натуре;

¹ От латинского *modus, modulus* – мера, образ, способ, образец и т. п.

- 3) выбор модели, достаточно хорошо фиксирующей свойства оригинала и удобной для исследования;
- 4) исследование модели в соответствии с поставленной задачей;
- 5) перенос результатов исследования модели на оригинал;
- 6) проверка этих результатов.

Основными задачами теории моделирования являются выбор моделей (этап 3) и перенос результатов исследования моделей на оригинал (этап 5). Эти задачи решаются с помощью эффективных, достаточно общих методов. Вместе с тем, общие методы моделирования могут служить основой частных специальных методов в самых различных областях. В частности, в качестве заместителей оригиналов модели используют [2]:

- 1) как средство общения людей (язык, письменность, радиосвязь),
- 2) средство осмысления и познания явлений Природы (модели атома, Солнечной системы),
- 3) средство обучения и тренировки (тренажеры для тренировки летчиков в наземных условиях),
- 4) средство прогнозирования поведения объектов в различных условиях (например, для подбора параметров, соответствующих оптимальному функционированию проектируемого объекта).

1.2 Классификация моделей

Важными признаками моделей, которые могут быть положены в основу их классификации, являются [2]:

- 1) закон функционирования модели и характерные особенности выражения свойств и отношений оригинала;
- 2) основания для преобразования свойств и отношений модели в свойства и отношения оригинала и обратно;

По первому признаку различают модели логические и материальные. Логические функционируют по законам логики в сознании человека, материальные – по объективным законам Природы.

Логические модели разделяют на образные, знаковые и образно-знаковые. Образные модели выражают свойства оригинала с помощью наглядных чувственных образов. Например, в кинетической теории газов частицы газа образно моделируются в виде упругих шаров, воздействующих друг на друга только во время столкновений. Знаковые модели выражают свойства оригинала с помощью условных знаков или символов. К ним относятся математические выражения и уравнения, физические и химические формулы и т. п. Образно-знаковые модели обладают признаками образных и знаковых, это схемы, графики, чертежи, графы и др.

Материальные модели разделяют на функциональные, структурные и функционально-структурные, отражающие соответственно только функциональные, только пространственные и одновременно функциональные и пространственные свойства оригинала. В зависимости от физической однородности и разнородности с оригиналом функциональные и функционально-структурные модели могут быть физическими или формальными. Например, последовательное соединение резистора и конденсатора может служить физической моделью потребителя энергии электрического генератора. Если оригинал – маятник, то электрический колебательный контур является его формальной моделью.

По второму признаку различают условные, аналогичные и математические модели. Условные выражают свойства и отношения оригинала на основании принятого условия или соглашения. У таких моделей сходство с оригиналом может совершенно отсутствовать. К ним относятся все знаковые и образно-знаковые модели. Аналогичные модели обладают сходством с оригиналом, достаточным для перехода к оригиналу на основании заключения по аналогии, т. е. на основании логического вывода о том, что оригинал, возможно, обладает некоторым признаком, имеющимся у модели, поскольку другие признаки оригинала сходны с признаками модели. Математические модели (см. раздел 2) обеспечивают переход к оригиналу,

фиксацию и исследование его свойств и отношений с помощью математических методов.

Важной разновидностью математических моделей являются подобные, переменные величины которых пропорциональны соответствующим переменным оригинала. Они также могут быть логическими и материальными.

Подобные материальные модели подразделяют на аналоговые, цифровые и аналого-цифровые. Это зависит от того, какие величины связывают их математические описания: непрерывные, дискретные или одновременно непрерывные и дискретные.

Подобие оригинала и его материальной модели позволяет использовать ее в качестве вычислительного устройства для решения уравнений, описывающих оригинал. Согласно общей теории моделирования все вычислительного устройства являются подобными материальными моделями соответствующих материальных или логических оригиналов [2]. В зависимости от характера математического описания эти устройства, как известно, могут быть аналоговыми, цифровыми и аналого-цифровыми.

1.3 Историческая справка

Исторически первыми моделями как заместителями некоторых объектов считаются языковые знаки, естественно возникшие в ходе развития человечества и постепенно составившие разговорный язык. Возникновение обмена в первобытном обществе привело постепенно к формированию числа и изображению чисел в виде цифр как системы знаков. Дальнейшее развитие логических знаковых моделей связывают с возникновением письменности и математической символики [2].

В глубокой древности возник и затем стал широко использоваться метод распространения свойств одних объектов на другие, который теперь называют умозаключением по аналогии. Многократные наблюдения постоянства некоторых связей между признаками в предметах и явлениях

привели к уверенности в том, что если у двух предметов имеются существенные одинаковые признаки, то, несмотря на различие этих предметов, вполне возможно, что они обладают и др. одинаковыми признаками.

В Древней Греции Евклидом было построено учение о геометрическом подобии. В 16 – 18 веках все чаще обнаруживалась недостаточность геометрического подобия физически однородных объектов для прогнозирования свойств больших объектов на основании свойств объектов меньших размеров. Длительное время развитие учения о подобии шло путем определения частных условий для явлений конкретной физической природы. Наконец, в 1909 – 14 годах в результате работ Н.Е. Жуковского и др. была сформулирована в первой редакции π -теорема [2], позволившая установить условия подобия явлений любой физической природы. Начиная с этого времени, метод подобия становится основным методом экстраполяции характеристик модели в характеристики оригинала при материальном (физическом) моделировании.

Параллельно с развитием физического моделирования шло развитие логического моделирования в знаковой форме. История развития знакового моделирования – это, прежде всего, история математики. В 16 веке Д. Непер изобрел логарифмы. В 17 веке И. Ньютон и Г. Лейбниц создали дифференциальное исчисление. Наряду с аналитическими методами получили развитие численные методы решения задач.

Стремление упростить, ускорить и облегчить вычисления привело к появлению различных вычислительных устройств. Уже в 5 веке до нашей эры в Древней Греции, Египте для арифметических вычислений применялась доска с полосами, по которой передвигались камешки или кости. Греческое название такой счетной доски – абак (abax, abakos) – стало собирательным для всех устройств этого типа [3].

Б. Паскаль в 1641 – 42 годах сконструировал суммирующую машину, получившую практическое применение и широкую известность. Машина содержала ряд числовых зубчатых колес с девятью короткими и одним длинным зубцом – пальцем. Когда в предыдущем разряде накапливалось 10 единиц, этот палец сцеплялся с числовым колесом следующего разряда и поворачивал его на один зубец. Значительное развитие эта идея получила в середине 19 века и, особенно, на рубеже 19 и 20 веков. Появились математические инструменты (планиметры и др.), счетно-решающие механизмы, арифмометр.

В 1904 году выдающийся русский ученый А.Н. Крылов создал первую аналоговую машину для решения дифференциальных уравнений. Простейшим же аналоговым устройством для выполнения операций умножения и деления можно считать логарифмическую линейку, появившуюся в начале 17 века.

Длительное время вычислительные устройства были исключительно механическими. В 30-х годах прошлого столетия началось развитие электромеханических, а затем – электрических аналоговых и цифровых вычислительных устройств.

Принцип программного управления впервые был использован в 40-х годах в вычислительных машинах на электромагнитных реле. Программа записывалась на перфорированной ленте. Автоматическое программное управление вычислительным процессом сделало возможной работу машины с высокой скоростью. Первые такие машины были построены немецким инженером Цузе и в США под руководством Эйкена.

Эра электронных вычислительных машин (ЭВМ) началась с создания в 1946 году в США первой действующей ЭВМ на радиолампах, которая получила название ENIAC (электронный численный интегратор и калькулятор). В том же году математик Дж. фон Нейман разработал и обосновал принципы устройства или, как говорят, архитектуру ЭВМ, а в 1949

году в Англии ученым и конструктором М. Уилксом на этих принципах была создана ЭВМ EDSAC.

Так называемая неймановская структура ЭВМ стала классической организацией вычислительной системы, предусматривающей работу ЭВМ с хранимой в памяти программой и последовательным ее взаимодействием с устройством управления, арифметико-логическим устройством и устройствами ввода-вывода.

В нашей стране первые ЭВМ были созданы под руководством академика С.А. Лебедева: малая электронная счетная машина (МЭСМ) – 1950 год и БЭСМ – 1952 год.

1.4 Моделирование и ЭВМ

Первые ЭВМ создавались в период работы над крупными проектами по освоению ядерной энергии и околоземного космического пространства. Уже тогда было осознано, что количество - резкое увеличение производительности вычислительного труда - обещает переход к новому качеству - новому способу проведения теоретических исследований. Со временем, развиваясь и совершенствуясь при решении разнообразных актуальных (прежде всего физических) задач, этот способ анализа превратился в технологию и методологию проведения исследований, которая получила название вычислительного эксперимента. Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой - прикладная математика, технической - мощные электронные вычислительные машины [1].

Технологический цикл вычислительного эксперимента принято подразделять на ряд этапов. Во-первых, для исследуемого объекта строится модель. Сначала происходит разделение всех действующих в рассматриваемом явлении факторов на главные, которые учитываются, и второстепенные, которые на данном этапе исследования отбрасываются.

Одновременно формулируются рамки применимости модели. Затем модель описывается в математических терминах.

Второй этап связан с разработкой вычислительных алгоритмов. Эти вопросы составляют предмет теории численных методов – раздела вычислительной математики, который стал особенно интенсивно развиваться с появлением ЭВМ. Общая цель этой теории – построение эффективных вычислительных методов, которые позволяют получать решение поставленной задачи с заданной точностью при минимальных затратах машинного времени и памяти. Последнее обстоятельство весьма существенно, поскольку вычислительный эксперимент имеет, как правило, многовариантный характер.

Третий этап – создание программы для реализации разработанного алгоритма на ЭВМ. Современное программирование – это самостоятельная наука со своими фундаментальными принципами, подходами, методами.

Четвертый этап – собственно проведение расчетов на ЭВМ. На этом этапе наиболее отчетливо проявляется сходство вычислительного эксперимента с экспериментом натурным. После «отладки» программы и тестирования модели наступает фаза прогноза, – с помощью компьютерного моделирования предсказывается поведение исследуемого объекта в условиях, где натурные эксперименты пока не проводились или где они вообще не возможны.

К четвертому примыкает пятый этап – обработка результатов, их всесторонний анализ и, наконец, выводы. Выводы возможны в основном двух типов: или становится ясна необходимость уточнения самой модели, или результаты, пройдя проверку на разумность и надежность «идут в дело».

К настоящему времени сменилось уже несколько поколений ЭВМ (см., например, [3]). В проектировании и проведении исследований все большую роль играют пакеты прикладных программ и др. средства автоматизации решения определенных классов прикладных задач. При схмотехническом моделировании РЭС широко используются такие пакеты программ, как

Pspice² и др. Однако, и в этих условиях разработчику РЭС помимо основательных познаний в природе моделируемых явлений или объектов, для эффективной работы с пакетами программ полезно иметь представление об общих методах компьютерного моделирования, о численных методах решения прикладных задач.

В настоящем учебном пособии приведены общие сведения о функциональном моделировании технических объектов, рассмотрены основные методы и алгоритмы компьютерного моделирования процессов в РЭС на примере электронных схем.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 210201 - «Проектирование и технология радиоэлектронных средств».

² Разевиг В.Д. Система проектирования OrCAD 9.2. – М.: Солон-Р, 2001. – 519 с.

2 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

2.1 Принципы иерархичности и декомпозиции

Математическая модель – совокупность математических объектов и отношений между ними, отражающая некоторые свойства моделируемого объекта. Под математическими объектами здесь понимаются числа, переменные, матрицы, множества, точки, отрезки линий и т. д.

Моделирование сложных объектов-систем предполагает деление представлений о них на иерархические уровни. На высшем иерархическом уровне используется наименее детализированное представление, отражающее только самые общие черты и особенности системы. На каждом новом последовательном уровне степень подробности рассмотрения возрастает, но система рассматривается не в целом, а отдельными блоками. Такой блочно – иерархический подход позволяет на каждом уровне формулировать и решать задачи приемлемой сложности [4].

На каждом иерархическом уровне используются свои понятия системы и элементов. На верхнем уровне подлежащий моделированию сложный объект S рассматривается как система из n взаимосвязанных и взаимодействующих элементов S_i . Элементами системы S_i являются объекты S_{ij} , $j = 1, 2, \dots, m_i$, где m_i – количество элементов в описании системы S_i . Подобное разделение происходит, как правило, по функциональному признаку и продолжается вплоть до так называемых базовых элементов. Базовые по отношению к данной системе элементы дальнейшему делению не подлежат.

В качестве базовых элементов РЭС обычно выступают элементы принципиальных электрических схем – интегральные схемы, резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, диоды, транзисторы, трансформаторы и т. п. Из базовых элементов образуются функциональные узлы – преобразователи сигналов, вторичные источники питания и др.

Функциональные узлы, как элементы, входят в состав устройств или блоков, описываемых уже с помощью функциональных схем. Примерами устройств могут служить радиоприемник, передатчик, модем.

Из устройств komponуются радиоэлектронные системы (РЭС) – ЭВМ, радиолокационная станция, система управления движущимся объектом и т. п. РЭС описывают с помощью структурных схем. Возможно выделение и некоторых промежуточных иерархических уровней, а также более высоких иерархических уровней для описания объединений систем.

Таким образом, принцип иерархичности означает структурирование представлений об объектах моделирования по степени детальности описаний, а принцип декомпозиции – разбиение представлений каждого иерархического уровня на ряд составных частей (блоков) с возможностями отдельного (поблочного) моделирования объектов на более низком уровне.

Кроме декомпозиции описаний по степени подробности отражения свойств объекта, порождающей иерархические уровни, используют разделение описаний по характеру отображаемых свойств объекта. Такое разделение приводит к появлению ряда аспектов описаний [4]. Наиболее крупными являются функциональный, конструкторский и технологический аспекты.

Функциональный аспект связан с отображением основных принципов функционирования, характера физических и информационных процессов, протекающих в объекте, и находит выражение в принципиальных, функциональных, структурных и кинематических схемах.

Конструкторский аспект связан с реализацией результатов функционального проектирования, т. е. с определением геометрических форм объектов и их взаимным расположением в пространстве.

Технологический аспект относится к реализации результатов конструкторского проектирования, т. е. связан с описанием методов и средств изготовления объектов.

Возможно более дифференцированное описание свойств объекта с выделением в нем ряда подсистем и соответствующего числа аспектов. Так, функциональный аспект можно разделить по физическим основам описываемых явлений на аспекты электрический, механический, гидравлический и т. п. При этом в описаниях электромеханической системы появляются подсистемы электрическая и механическая, в описании оптико-электронного прибора – электрическая и оптическая и т. д.

В каждом из аспектов возможно свое специфическое выделение иерархических уровней. Так, функциональный аспект описания РЭС включает уровни принципиальных, функциональных и структурных схем. В конструкторском аспекте выделяют уровни типовых элементов замены, панелей, рам, стоек.

2.2 Параметры и фазовые переменные

Параметрами называют количественное представление свойств. Свойства технического объекта, отражаемые в математической модели, подразделяют на свойства систем, элементов систем и внешней среды, в которой должен функционировать объект. Различают выходные, внутренние и внешние параметры. Выходные параметры характеризуют свойства системы, внутренние – элементов системы, внешние – внешней среды [4]. Например, для транзисторного усилителя:

- 1) выходные параметры – полоса пропускания, коэффициент усиления на средних частотах, входное сопротивление, мощность рассеяния;
- 2) внутренние параметры – сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, параметры транзисторов;
- 3) внешние параметры – сопротивление и емкость нагрузки, напряжение источника питания.

Обозначим векторы выходных, внутренних и внешних параметров соответственно через Y , X и Q . Очевидно, что свойства системы зависят от

свойств ее элементов и внешней среды, т. е. имеет место функциональная зависимость

$$Y = F(X, Q). \quad (2.1)$$

Однако существование зависимости (2.1) не означает, что она известна и может быть представлена в таком явном относительно вектора Y виде. Как правило, математическую модель в явном виде (2.1) удастся получить только для очень простых объектов.

Неявные математические модели связывают фазовые переменные – величины, которые характеризуют физическое (или информационное) состояние объекта, но параметрами не являются. Различают фазовые переменные типа потока и типа потенциала, существуют аналогии фазовых переменных для различных физических подсистем (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1 - Аналогии между фазовыми переменными физических подсистем

Подсистема	Фазовые переменные	
	Типа потока	Типа потенциала
Электрическая	Ток	Напряжение
Механическая поступательная	Сила	Скорость
Механическая вращательная	Момент силы	Угловая скорость
Тепловая	Тепловой поток	Температура
Гидравлическая и пневматическая	Расход	Давление

В уравнениях неявной модели обычно фигурируют не все фазовые переменные физической системы, а только часть из них, достаточная для однозначной идентификации состояния объекта. Такие фазовые переменные называют базисом или базисными (определяющими) координатами. Через базис могут быть определены все остальные фазовые переменные.

В общем случае неявную модель можно представить в виде [5]

$$LV(Z) = F(Z), \quad (2.2)$$

где L – некоторый оператор, $V(Z)$ - вектор базисных координат, Z - вектор независимых переменных (включающий время и пространственные координаты), $F(Z)$ - заданная функция независимых переменных.

Параметры элементов X входят в модель (2.2) в качестве коэффициентов при переменных. Например, для электрической схемы фазовыми переменными будут напряжения и токи, а коэффициенты при них определяются через такие внутренние параметры, как сопротивления, емкости, индуктивности элементов.

Выходные параметры Y непосредственно не фигурируют в системе (2.2): они определяются по результатам решения $V(Z)$ системы уравнений. Различают две группы выходных параметров [4]:

- 1) параметры - функционалы;
- 2) пороговые параметры.

Большинство выходных параметров имеет смысл функционалов зависимостей фазовых переменных от времени. Функционал - отображение класса функций в класс чисел, функционалами являются определенные интегралы, экстремальные значения функций, значения функций при заданных значениях аргументов или при выполнении некоторых др. условий и т. п. У любого моделируемого объекта обычно несколько разных параметров - функционалов. Например, в электронных схемах к выходным параметрам относятся такие функционалы временных зависимостей токов или напряжений, как амплитуда выходного напряжения – экстремальное значение выходного напряжения от времени, мощность рассеяния в элементах – определенный интеграл от тока через источник питания, умноженный на напряжение, и т. п.

Под пороговыми выходными параметрами подразумевают граничные значения внешних параметров, при которых еще выполняется тот или иной оговоренный признак правильности функционирования объекта. Например, максимальная нагрузка, при которой сохраняется работоспособность изделия,

максимальная допустимая температура, минимально различимая амплитуда сигнала и др.

Обычно значения параметров – функционалов при компьютерном анализе определяются более просто, чем значения пороговых выходных параметров. Эти различия и обуславливают целесообразность разделения выходных параметров на две группы.

2.3 Требования к математическим моделям

К математическим моделям предъявляются требования универсальности, точности, адекватности и экономичности [4].

Математическая модель отражает лишь некоторые свойства объекта. Например, модель резистора в виде уравнения закона Ома характеризует свойство резистора пропускать электрический ток, но не отражает габариты резистора, как детали, его цвет, механическую прочность, стоимость и т. п. Степень универсальности характеризует полноту отображения в модели свойств реального объекта.

Точность математической модели оценивают степенью совпадения предсказанных с ее помощью значений параметров объекта с истинными значениями этих параметров. Истинные значения обычно отождествляют со значениями, полученными экспериментально. Однако погрешности эксперимента во многих случаях оказываются соизмеримыми с погрешностями модели, а иногда и заметно превышают их.

Пусть отражаемые в модели свойства оцениваются вектором выходных параметров $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Обозначим истинное и рассчитанное с помощью модели значения i -го выходного параметра через $y_{ист}$ и $y_{им}$ соответственно. Относительная погрешность расчета параметра

$$e_i = (y_{им} - y_{инс}) / y_{инс}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

При необходимости сведения векторной оценки $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ к скалярной используется функция ошибок [6]

$$E(2 \cdot p) = \left(\sum_{i=1}^n e_i^{2 \cdot p} \right)^{\frac{1}{2 \cdot p}}, \quad (2.4)$$

где показатель степени p больше или равен единице. При $p = 1$ функция ошибок

$$E(2) = \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

часто трактуется, как евклидова норма, являющаяся основной мерой расстояния от начала координат до точки в n -мерном пространстве. Рост показателя степени функции ошибок автоматически увеличивает вес больших ошибок. При p , стремящемся к бесконечности, функция ошибок пропорциональна максимальной:

$$E_m = \max_{i \in [1:n]} e_i. \quad (2.6)$$

На практике для сведения векторной оценки погрешности к скалярной, преимущественно используют (2.6) или среднеквадратичное отклонение:

$$E_{\text{скв}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{[n \cdot (n-1)]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Адекватность математической модели – способность отображать заданные свойства объекта с погрешностью не выше заданной. Поскольку выходные параметры Y являются функциями параметров внешних Q и внутренних X , погрешность E зависит от значений Q и X . Обычно значения внутренних параметров модели определяют из условия минимизации погрешности E в некоторой точке $Q_{\text{ном}}$ пространства внешних переменных, а используют модель с рассчитанным вектором X при различных значениях Q . При этом, как правило, адекватность модели имеет место лишь в ограниченной области изменения внешних переменных - области адекватности математической модели. Границы области адекватности описываются уравнением

$$|E_m(Q)| = \delta, \quad (2.8)$$

где $\delta > 0$ – заданная константа, равная предельно допустимой погрешности модели.

Экономичность математической модели характеризуется затратами вычислительных ресурсов (машинного времени T_m и памяти P_m) на ее реализацию. Чем меньше T_m и P_m , тем модель экономичнее. Вместо значений T_m и P_m , зависящих не только от свойств модели, но и от особенностей применяемой ЭВМ, часто используют другие величины, например: среднее количество операций, выполняемых при одном обращении к модели, размерность системы уравнений, количество используемых в модели внутренних параметров и т. п.

Требования высокой точности, универсальности, широкой области адекватности, с одной стороны, и высокой экономичности, с др. стороны, противоречивы. Наилучшее компромиссное удовлетворение этих противоречивых требований зависит от особенностей решаемых задач, иерархического уровня и аспекта моделирования. Это обстоятельство обуславливает применение широкого спектра математических моделей.

2.4 Модели на микро-, макро- и метауровне

В зависимости от места в иерархии описаний математические модели технических объектов делятся на модели, относящиеся к микро-, макро- и метауровням [4].

Особенностью моделирования **на микроуровне** является рассмотрение физических процессов в сплошных средах и непрерывном времени. Типичными математическими моделями на микроуровне являются дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) с заданными краевыми условиями. Основным методом решения таких уравнений является метод сеток. Результатами решения могут быть поля напряжений и деформаций в деталях механических конструкций, электрического потенциала в электронных приборах и т. п.

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных, в некоторых точках заданной области - узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, и образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью непрерывной области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функции. В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов [5]:

- 1) построение сетки в заданной области (дискретизация задачи);
- 2) получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи);
- 3) решение полученной системы алгебраических уравнений.

Наиболее часто используются два варианта метода сеток: метод конечных элементов и метод конечных разностей. Эти методы отличаются друг от друга на первых двух этапах алгоритма и практически идентичны на третьем этапе.

На **макроуровне** (см. раздел 3) используют укрупненную дискретизацию пространства по функциональному признаку, что приводит к моделям в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В этих уравнениях независимой переменной является время t , а вектор зависимых переменных V составляют фазовые переменные, характеризующие состояние укрупненных элементов дискретизированного пространства. Системы ОДУ являются универсальными моделями на макроуровне, пригодными для анализа как динамических, так и установившихся состояний объектов.

Модели для установившихся режимов можно представить в виде системы алгебраических уравнений.

Порядок системы уравнений соответствует числу выделенных элементов объекта. Если порядок системы уравнений составляет 10^3 или более, то оперирование моделью становится затруднительным, - необходимо переходить к представлениям на метауровне.

Метауровень характеризуется большим разнообразием типов используемых математических моделей, применением в качестве элементов достаточно сложных совокупностей деталей.

Для многих объектов модели на метауровне по-прежнему представляются системами ОДУ. Однако, т. к. в них фигурируют только фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям элементов, то укрупнение элементов позволяет получать модели приемлемой размерности для более сложных объектов, чем на макроуровне.

В ряде предметных областей для упрощения моделей используют специфические особенности функционирования объектов. Так, в электронных устройствах цифровой автоматики возможно дискретное представление напряжений и токов. В результате модель превращается в систему логических уравнений, описывающих процессы преобразования сигналов. Такие логические модели более экономичны, чем модели электрические, описывающие изменение напряжений и токов как непрерывных функций времени.

Важный класс моделей на метауровне составляют модели массового обслуживания, применяемые для описания процессов функционирования информационных и вычислительных систем, участков, линий и цехов [4].

По степени детализации описания в пределах каждого иерархического уровня различают **полные модели и макромодел**. В полной модели фигурируют фазовые переменные, характеризующие состояние всех межэлементных связей, всех элементов моделируемого объекта. В макромодел

и отображаются состояния значительно меньшего числа межэлементных связей, что соответствует описанию объекта при укрупненном выделении элементов.

Понятия полная модель и макро модель относительны и обычно используются для характеристики двух моделей с различной степенью подробности описания свойств объекта.

Для получения моделей используют **формальные и неформальные** методы. Неформальные методы на различных иерархических уровнях применяют для получения моделей элементов (см. раздел 2.5). Формальные методы применяют при известных моделях элементов для получения моделей систем (см. раздел 4).

2.5 Моделирование элементов систем

Разработка математической модели элемента системы включает следующие основные операции [4]:

- 1) выбор свойств элемента, подлежащих отражению в модели;
- 2) сбор информации о выбранных свойствах;
- 3) синтез структуры модели;
- 4) расчет числовых значений параметров;
- 5) оценка точности и адекватности модели.

Выбор свойств элемента, подлежащих отражению в модели, основывается на анализе возможных применений этой модели и определяет степень ее универсальности. Источником сведений о выбранных свойствах могут быть опыт и знания разработчика модели, справочная и др. научно – техническая литература, описания прототипов (моделей элементов, близких по свойствам исследуемым), экспериментальные данные и т. п.

Структура модели – общий вид математических соотношений без конкретизации числовых значений, фигурирующих в них параметров. Структура модели может быть представлена не только уравнениями, но и в графической форме, например, в виде эквивалентной схемы (см. следующий раздел). Синтез структуры – наиболее ответственная и с наибольшим трудом формализуемая операция.

Расчет параметров модели - компонент вектора X - основывается обычно на минимизации ее погрешности E_m путем варьирования X в некоторой области возможных значений X_d :

$$\min_{X \in X_d} E_m(X), \quad (2.9)$$

При этом погрешность модели определяется из сопоставления компонент вектора выходных параметров модели y_{im} с соответствующими «истинными» значениями этих параметров $y_{ист}$ по формулам (2.3), (2.6). Здесь y_{im} – функция от X , а $y_{ист}$ определяются по результатам натуральных экспериментов, либо вычисляются с использованием более точных моделей элемента (если таковые имеются).

Для окончательной оценки точности модели используют новые значения $y_{ист}$, не применявшиеся для определения компонент вектора X .

Расчет и представление сведений об области адекватности (ОА) модели в многомерном пространстве внешних параметров Q довольно затруднительны, поэтому часто используют различные аппроксимации области адекватности (ОАА). Для человека наиболее удобна ОАА в виде вписанного в ОА гиперпараллелепипеда со сторонами, параллельными координатным осям.

На рис. 2.1 показаны ОА и соответствующая ей ОАА для двумерного пространства внешних параметров $Q = (q_1, q_2)$. Границы ОА ($i = 1, 2, 3, 4$) описываются уравнением (2.8). ОАА задается диапазонами значений внешних параметров, в которых модель адекватна: $q_1' \leq q_1 \leq q_1''$, $q_2' \leq q_2 \leq q_2''$.

ОАА другой возможной формы может быть получена посредством линеаризации границ ОА. Такая форма ОАА менее удобна для восприятия человеком, но предпочтительнее при автоматическом контроле адекватности модели в процессе вычислений на ЭВМ.

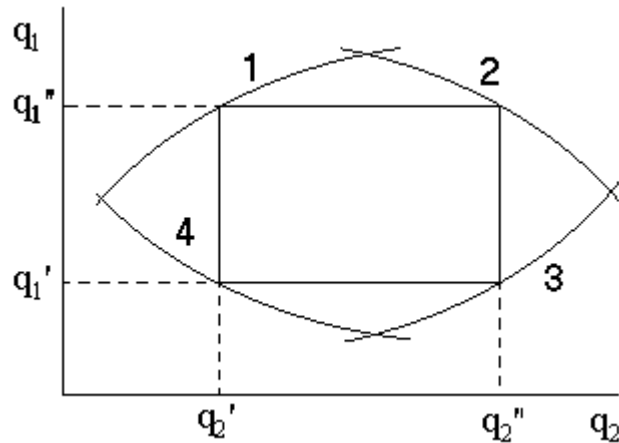


Рисунок 2.1 – Область адекватности и ее аппроксимация для двумерного пространства внешних параметров

Сведения об ОА модели представляют большую ценность, чем оценки погрешности E_m в одной – двух случайных точках пространства Q . Однако определение ОА требует больших затрат машинных ресурсов. Поэтому расчет ОА выполняется только при тщательной отработке моделей унифицированных элементов, предназначенных для многократного применения.

Операции 2 – 5 рассмотренной методики могут выполняться многократно в процессе последовательного приближения к желаемому результату.

2.6 Метод наименьших квадратов

Пусть структура математической модели технического объекта описывается формулой вида

$$R = f(J, a_0, a_1, \dots, a_m), \quad (2.10)$$

где R и J – выходная и входная фазовые переменные; f - известная функция; a_0, a_1, \dots, a_m - независимые постоянные коэффициенты.

Задача нахождения наилучших значений этих коэффициентов сводится к некоторой минимизации отклонений

$$E_i = f(J_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - R_i, \quad (2.11)$$

где R_i - значения экспериментальной зависимости $R(J)$ в точках J_i .

Одним из методов решения такой задачи является метод наименьших квадратов, в котором коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m формулы (2.11) находят из условия минимума суммы квадратов отклонений для всех точек

$$S = \sum_{i=0}^n E_i^2. \quad (2.12)$$

В этом заключается суть метод наименьших квадратов. Математически условия минимума суммы квадратов отклонений можно получить, приравнявая нулю частные производные S по коэффициентам a_0, a_1, \dots, a_m .

Наиболее распространен способ выбора функции f в виде линейной комбинации базисных функций [7]

$$R = a_0 \cdot f_0(J) + a_1 \cdot f_1(J) + \dots + a_m \cdot f_m(J). \quad (2.13)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da_0} &= 2 \cdot \sum_{i=0}^n [a_0 \cdot f_0(J_i) + a_1 \cdot f_1(J_i) + \dots + a_m \cdot f_m(J_i) - R_i] \cdot f_0(J_i) = 0, \\ \frac{dS}{da_1} &= 2 \cdot \sum_{i=0}^n [a_0 \cdot f_0(J_i) + a_1 \cdot f_1(J_i) + \dots + a_m \cdot f_m(J_i) - R_i] \cdot f_1(J_i) = 0, \\ &\dots \\ \frac{dS}{da_m} &= 2 \cdot \sum_{i=0}^n [a_0 \cdot f_0(J_i) + a_1 \cdot f_1(J_i) + \dots + a_m \cdot f_m(J_i) - R_i] \cdot f_m(J_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Раскрывая скобки и выполняя суммирование, получим систему линейных уравнений вида

$$\begin{vmatrix} (f_0, f_0) & (f_0, f_1) & \dots & (f_0, f_m) \\ (f_0, f_1) & (f_1, f_1) & \dots & (f_1, f_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_0, f_m) & (f_1, f_m) & \dots & (f_m, f_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (f_0, f) \\ (f_1, f) \\ \dots \\ (f_m, f) \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Матрица коэффициентов при неизвестных системы уравнений (2.15) называется матрицей Грама. Элементы матрицы Грама являются скалярными произведениями базисных функций

$$(f_j, f_k) = \sum_{i=0}^n f_j(J_i) \cdot f_k(J_i). \quad (2.16)$$

Расширенная матрица системы уравнений (2.15) получается добавлением справа к матрице Грама столбца свободных членов. Скалярные произведения, являющиеся элементами столбца, определяются аналогично (2.16)

$$(f_j, f) = \sum_{i=0}^n f_j(J_i) \cdot R(J_i). \quad (2.17)$$

Выбор конкретных базисных функций f_0, f_1, \dots, f_m зависит от свойств аппроксимируемой зависимости $R(J)$, таких как периодичность, экспоненциальный или логарифмический характер, свойства симметрии, наличие асимптотики и т. д.

3 ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА МАКРОУРОВНЕ

3.1 Компонентные и топологические уравнения

При моделировании на макроуровне в техническом объекте выделяют (по функциональному признаку) достаточно крупные элементы, которые в дальнейшем рассматривают как неделимые единицы. В большинстве технических объектов-систем можно выделить три типа простейших элементов [5]: R, L и C. Элемент типа R - элемент диссипации (рассеяния) энергии. На этом элементе, как правило, происходит выделение тепла. На элементах типа L и C происходит накопление потенциальной или кинетической энергии.

Сочетанием простейших элементов R, L и C, а также источников фазовых переменных может быть получена математическая модель технического объекта практически любой сложности.

Математические модели объектов-систем включают компонентные и топологические уравнения. Топологические уравнения связывают однотипные фазовые переменные, относящиеся к разным элементам системы, а компонентные уравнения - разнотипные фазовые переменные для каждого из этих элементов. Иными словами, компонентные уравнения представляют собой модели элементов системы, а топологические - отражают ее структуру.

Компонентные уравнения можно представить в виде

$$F_1(dU/dt, V, t) = 0, \quad (3.1)$$

где $V = (U, W)$ – вектор фазовых переменных; U - подвектор переменных состояния, характеризующих непосредственно запасы энергии в элементах объекта; t - время. Компонентные уравнения должны быть получены для каждого элемента моделируемого объекта. Фактически это модели элементов; общая методика их получения рассмотрена в предыдущем разделе.

Указание способа связи элементов друг с другом соответствует заданию топологических уравнений

$$F_2(V) = 0. \quad (3.2)$$

Топологические уравнения выражают условия равновесия сил, законы сохранения, условия неразрывности и т.п. Их примером могут служить уравнения законов Кирхгофа. Получаются топологические уравнения на основе сведений о структуре системы. Для их формирования разработаны формальные методы.

3.2 Аналогии компонентных уравнений

Для каждой физической подсистемы (электрической, механической, гидравлической и др.) характерны свои законы, но для простейших элементов R, L и C форма выражающих эти законы уравнений оказывается одинаковой. Рассмотрим основные физические подсистемы с точки зрения аналогий компонентных уравнений [5].

Электрическая подсистема. Фазовыми переменными электрической подсистемы являются токи I и напряжения V. Уравнения трех типов простейших элементов имеют следующий вид.

1. Уравнение сопротивления (закон Ома)

$$I = V/R, \quad (3.3)$$

где R - электрическое сопротивление.

2. Уравнение емкости

$$I = C (dV/dt), \quad (3.4)$$

где C - электрическая емкость.

3. Уравнение индуктивности

$$V = L (dI/dt), \quad (3.5)$$

где L - электрическая индуктивность.

Механическая поступательная подсистема. Фазовые переменные механической поступательной подсистемы - силы F и скорости V - соответственно аналоги токов и напряжений. Уравнения простейших элементов имеют следующий вид.

1. Уравнение вязкого трения

$$F = V/R_M, \quad (3.6)$$

где $R_M = 1/k$ – аналог электрического сопротивления, k - коэффициент вязкого трения.

2. Уравнение массы (второго закона Ньютона)

$$F = ma = C_M (dV/dt), \quad (3.7)$$

где $a = dV/dt$ – ускорение, $C_M = m$ - аналог электрической емкости (масса элемента).

3. Уравнение пружины $F = kx$, где x – перемещение, k - жесткость пружины. Продифференцируем обе части уравнения по времени: $dF/dt = kV$, или

$$V = L_M (dF/dt), \quad (3.8)$$

где $L_M = 1/k$ – аналог электрической индуктивности.

Аналогичное компонентное уравнение можно получить из закона Гука для элемента, у которого учитывается сжимаемость. В этом случае

$$L_M = b/(ES),$$

где b – длина элемента, E - модуль Юнга, S - площадь поперечного сечения.

Тепловая подсистема. Фазовые переменные этой подсистемы – тепловые потоки Φ и температуры T – соответственно аналоги токов и напряжений. Уравнения простейших элементов типа R и C имеют следующий вид.

1. Уравнение теплового потока при передаче тепла за счет теплопроводности

$$\Phi = T/R_{\text{конд}}, \quad (3.9, а)$$

где $R_{\text{конд}} = b/(\lambda S)$ – кондуктивное сопротивление, λ - коэффициент теплопроводности, T – разность температур на границах рассматриваемого участка, b и S – соответственно его длина и площадь поперечного сечения.

При конвективном теплообмене

$$\Phi = T/R_{\text{конв}}, \quad (3.9, б)$$

где $R_{\text{конв}} = b/(\alpha S)$ – конвективное сопротивление, α – коэффициент теплообмена через конвекцию, T – разность температур тела и окружающей среды, S – площадь тела.

2. Теплоемкость тела $C_T = dQ/dT$, где dQ – изменение количества теплоты в теле при изменении температуры на dT . Т. к. изменение количества теплоты в единицу времени есть тепловой поток, то

$$\Phi = C_T (dT/dt), \quad (3.10)$$

где $C_T = cm$ – аналог электрической емкости, cm – удельная теплоемкость m – масса тела.

В том случае, когда фазовыми переменными являются тепловой поток и температура, компонентное уравнение, соответствующее тепловой индуктивности, не имеет физического смысла.

Аналогичные компонентные уравнения можно получить и для др. физических подсистем. Так, для механической вращательной простейшими элементами R , C и L соответственно являются трение, момент инерции и вращательная гибкость, а для гидравлической (или пневматической) – трение, гидравлическая емкость и гидравлическая индуктивность.

Таким образом, во всех рассмотренных подсистемах можно установить аналогии фазовых переменных типа потока и типа потенциала и аналогии на уровне простейших элементов систем - R , C и L . Аналогии рассматривались по отношению к электрической подсистеме, но это не принципиально: в качестве исходной могла быть выбрана любая подсистема, кроме тепловой.

Рассмотренные элементы R , C и L предполагались линейными. Однако они могут быть и нелинейными, зависящими от режима работы. Например гидравлическое сопротивление при турбулентном режиме течения жидкости зависит от расхода, значение емкости p - n перехода – от напряжения.

3.3 Аналогии топологических уравнений

Топологические уравнения в большинстве физических подсистем основываются на уравнениях равновесия и уравнениях непрерывности [5].

Связи между элементами электрической подсистемы

устанавливаются на основе законов Кирхгофа.

Уравнение первого закона Кирхгофа (уравнение равновесия)

$$\sum_{k \in p} I_k = 0, \quad (3.11)$$

где k – номер ветви, I_k – ток k -ой ветви, p – множество номеров ветвей инцидентных рассматриваемому узлу.

Уравнение второго закона Кирхгофа (уравнение непрерывности)

$$\sum_{j \in q} V_j = 0, \quad (3.12)$$

где j – номер ветви, V_j – падение напряжения на j -ой ветви схемы, q – множество номеров ветвей входящих в рассматриваемый контур.

Рассмотрим аналогии топологических уравнений в некоторых подсистемах по отношению к электрической подсистеме.

Механическая поступательная подсистема. Аналогом первого закона Кирхгофа является принцип Даламбера: сумма сил, действующих на тело, включая инерционные, равна нулю, т. е.

$$\sum_{k \in p} F_k = 0, \quad (3.13)$$

где F_k – сила, приложенная к телу.

Аналогом второго закона Кирхгофа является принцип сложения скоростей: абсолютная скорость является суммой относительной и переносных скоростей³, или же сумма всех этих скоростей v_j равна нулю, т. е.

$$\sum_{j \in q} v_j = 0, \quad (3.14)$$

Тепловая подсистема. Аналогом уравнения первого закона Кирхгофа является уравнение равновесия: сумма тепловых потоков в узлах подсистемы равна нулю, т. е.

$$\sum_{k \in p} \Phi_k = 0, \quad (3.15)$$

³ Переносных скоростей может быть несколько: с первого тела на второе, со второго на третье и т. д.

где Φ_k – тепловой поток, подтекающий или оттекающий от узла.

Аналогом уравнения второго закона Кирхгофа является уравнение непрерывности: сумма разностей температур при обходе по замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$\sum_{j \in q} T_j = 0, \quad (3.16)$$

где T_j – разность температур на участке, входящем в контур.

Топологические уравнения строго справедливы для установившихся (статических) режимов, но их можно применять и в тех случаях, когда временем распространения возбуждения можно пренебречь. Под возбуждением понимается изменение фазовых переменных. Время распространения возбуждения зависит от физической природы подсистемы, точнее, от скорости распространения возбуждения в соответствующей среде и размеров этой среды в конкретном объекте.

В электрической подсистеме скорость распространения возбуждения равна скорости света, в механической, гидравлической и пневматической – скорости звука.

Предельный размер среды, при превышении которого необходимо учитывать время распространения возбуждения, называется критической длиной. Критическая длина зависит от временного диапазона моделирования объекта, приближенно ее можно определить по формуле [1]

$$b_{кр} = \Delta t v,$$

где v – скорость распространения возбуждения, Δt – интервал времени, характеризующий временную точность рассмотрения процессов.

Например, если моделируется электрический объект в наносекундном диапазоне, то критическая длина составит около 30 см, а если в пикосекундном диапазоне, то единицы или доли миллиметра.

3.4 Источники фазовых переменных

Если набор линейных и нелинейных элементов R , C и L дополнить независимыми и зависимыми источниками переменных типа потока I и типа потенциала E , то будем иметь базовые совокупности двухполюсников⁴, на основе которых можно получать математические модели практически любых технических объектов.

Независимые источники используются для моделирования постоянных воздействий на объект. Например, сила тяжести может быть представлена постоянным источником силы, напряжение питания электронной схемы – источником типа потенциала и т. д.

Зависимые источники можно разделить на две группы [1]:

- 1) источники, зависимые от времени;
- 2) источники, зависимые от фазовых переменных.

Источники первой группы используются для моделирования внешних воздействий на объект. Например, трапецеидальным источником расхода может быть отражено функционирование идеального гидронасоса в режимах включения, работы и выключения, синусоидальным источником напряжения – подключение генератора сигналов к электронной схеме.

Источники, зависимые от фазовых переменных, используются для моделирования нелинейных свойств объектов, а также для установления взаимосвязи между подсистемами различной физической природы (см. раздел 3.7).

3.5 Формирование эквивалентных схем

Эквивалентная схема – изображение структуры технического объекта с помощью условных обозначений составляющих его элементов.

В эквивалентных схемах отражаются элементы и свойства реальных объектов, которые оказывают существенное влияние на их функционирование. Какими эффектами можно пренебречь, разработчику

⁴ Зависимые источники можно отнести и к четырехполюсникам.

подсказывают опыт и интуиция. Поэтому процедура составления эквивалентных схем не может быть полностью формализована [1].

Условные графические обозначения ветвей эквивалентной схемы приведены на рис. 3.1⁵. Параметры всех ветвей могут быть как постоянными, так и зависимыми от фазовых переменных или от времени.

Отображение структурных свойств объектов возможно также с помощью графов [1]. Эквивалентные схемы более наглядны, т. к. условное изображение ветви характеризует тип элемента.

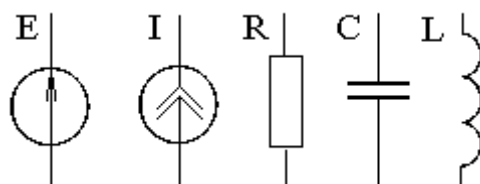


Рисунок 3.1 – Условные графические обозначения ветвей эквивалентной схемы типа E, I, R, C, L

Эквивалентные схемы **электрических подсистем** практически совпадают с их принципиальными схемами, при этом могут быть учтены паразитные элементы (емкость монтажа, индуктивность соединительных проводников и т. д.). Сложные радиокомпоненты представляются их схемами замещения. Под схемой замещения понимается эквивалентная схема сложного радиокомпонента, составленная из двухполюсников.

Эквивалентная схема **поступательной механической подсистемы** получается следующим образом. За базовый узел принимается узел, соответствующий инерциальной системе отсчета; узлы эквивалентной схемы соответствуют скоростям, ветви – усилиям. Элементы массы (типа C) одним полюсом подключают к базовому узлу, через второй осуществляется их взаимодействие с окружающими элементами подсистемы. Элементы

⁵ В некоторых физических подсистемах приняты свои условные обозначения (в частности, в механической).

упругости (типа L) включают между соединяемыми телами, элементы трения (типа R) – между телами, контактируемыми посредством трения. Внешние усилия, прикладываемые к механической системе, отображаются включением источника силы между базовым узлом и тем узлом, к которому подключен элемент массы, подвергающийся усилию.

Эквивалентная схема **тепловой подсистемы** получается следующим образом. За базовый узел принимается условное тело с температурой, соответствующей $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ или 0 K , или произвольная точка подсистемы, если предполагается выполнять моделирование в относительных температурах, узлы эквивалентной схемы соответствуют температурам, ветви – тепловым потокам. Теплоемкость тела (элемент типа C) подключают одним полюсом к базовому узлу, через второй осуществляется взаимодействие этого тела с др. элементами подсистемы. Элемент типа R включают между телами, обменивающимися энергией посредством теплопроводности (кондукции) или конвекции.

Следует избегать последовательного соединения источника типа I и ветви типа L, т. к. в узле их соединения фазовая переменная (типа потенциала) при скачкообразном изменении значения I может достигать бесконечной величины.

Нужно избегать также параллельного соединения источника типа E и ветви типа C. В этом случае при скачкообразном изменении значения E может достигать бесконечной величины фазовая переменная типа потока в ветви C.

Чтобы избавиться от указанных подключений следует учесть какой-либо эффект, которым раньше пренебрегали: в узел соединения ветвей типа I и L подключить ветвь типа C или R, между ветвями E и C включить ветвь типа L или R. Например, при последовательном соединении источника силы и элемента упругости (пружины) можно в узел их соединения подключить элемент массы, соответствующий массе пружины, при параллельном соединении источника давления и гидравлической емкости между ними

можно включить элемент местного гидравлического сопротивления, соответствующий сопротивлению входного отверстия в емкости.

3.6 Связи между разнородными подсистемами

Реальные объекты, как правило, представляют собой совокупности разнородных физических подсистем. При формировании эквивалентных схем таких объектов, состоящих из нескольких подсистем, нужно [1]:

- 1) выделить в объекте однородные физические подсистемы, например механическую, гидравлическую, электрическую и т. д.;
- 2) получить эквивалентные схемы каждой из выделенных подсистем;
- 3) установить связи между подсистемами, т. е. определить их воздействие друг на друга.

Различают три типа связей между подсистемами различной физической природы [1]:

- 1) трансформаторная,
- 2) гираторная^б,
- 3) через зависимые параметры.

Трансформаторная связь характеризуется эквивалентной схемой, приведенной на рис. 3.2. Здесь p и q – подсистемы технического объекта, связанные трансформаторной связью; J_q – источник переменной типа потока; E_p – источник переменной типа разности потенциалов; I_p – переменная типа потока; U_q – переменная типа разности потенциалов.

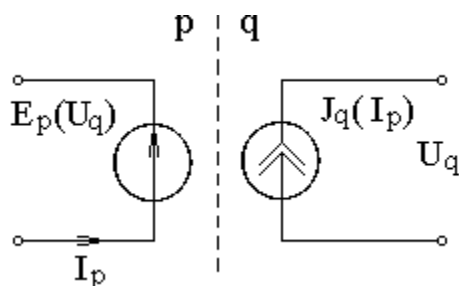


Рисунок 3.2 – Эквивалентная схема трансформаторной связи

Гираторная связь характеризуется двумя вариантами эквивалентной схемы. На рис. 3.3 p и q – подсистемы, связанные гираторной связью. В первом варианте (рис. 3.3, а) $E_{p,q}$ – источники переменной типа разности потенциалов; $I_{p,q}$ – переменные типа потока. Во втором варианте (рис. 3.3, б) $J_{p,q}$ – источники переменной типа потока; $U_{p,q}$ – переменные типа разности потенциалов.

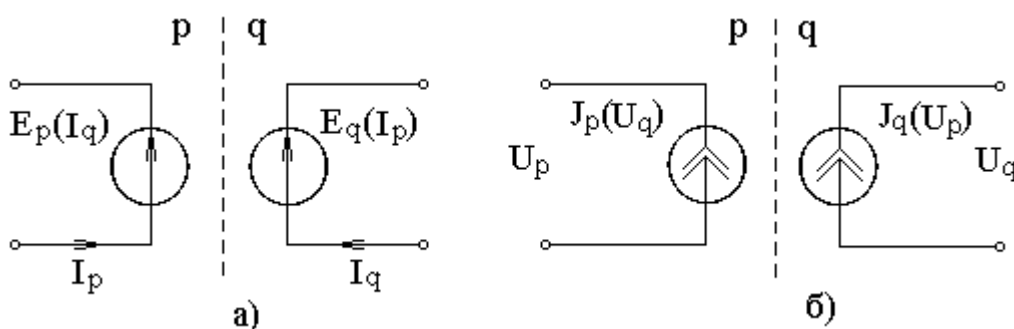


Рисунок 2.3 – Эквивалентные схемы гираторной связи

Таким образом, трансформаторная и гираторная связь устанавливают взаимодействие подсистем по двум парам фазовых переменных. Трансформаторная связь для разнородных физических подсистем характерна при электромеханическом взаимодействии. Гираторная связь – для взаимодействия механической и гидравлической (или пневматической) подсистем.

Третий тип связи – связь через зависимые параметры элементов – характерна при взаимодействии с тепловой подсистемой. В зависимости от температуры изменяются параметры элементов взаимодействующих подсистем, например вязкость жидкости, сопротивление резистора. Обратное влияние на тепловую подсистему введением в эквивалентную схему тепловой подсистемы зависимых источников теплового потока. При отсутствии

⁶ От греческого *gyros* – круг, кольцо.

массопереноса значение источника определяется мощностью, выделяемой элементом; при наличии массопереноса – переносимой массой.

В случае моделирования влияния температуры на работу технического объекта без учета обратного воздействия предполагают, как будет изменяться температура во времени, и переносят эту зависимость на параметры элементов объекта, т. е. делают параметры зависимыми от времени. Аналогично моделируют старение элементов объекта при расчетах надежности.

4 МОДЕЛИ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЭС

4.1 Пассивные элементы

Каждый из рассмотренных ранее простейших идеализированных элементов R , C и L имеет в качестве «прототипа» реальный пассивный элемент – резистор, конденсатор или катушку индуктивности.

Условные графические обозначения пассивных элементов РЭС совпадают с обозначениями соответствующих ветвей на эквивалентных схемах (см. рис. 3.1).

Процессы, протекающие в реальных элементах, оказываются сложнее, чем в идеализированных двухполюсниках R , C и L . Причина этого – паразитные эффекты. Поэтому схемы замещения реальных элементов содержат идеальные двухполюсники различных типов. Например, полная схема замещения дискретного резистора (см. рис. 4.1), помимо сопротивления резистивного слоя R , может включать сопротивление R_B , емкость C_B и индуктивность L_B выводов, сопротивление контактов R_K , сопротивление утечки $R_{ИЗ}$, индуктивность резистивного слоя L_R .

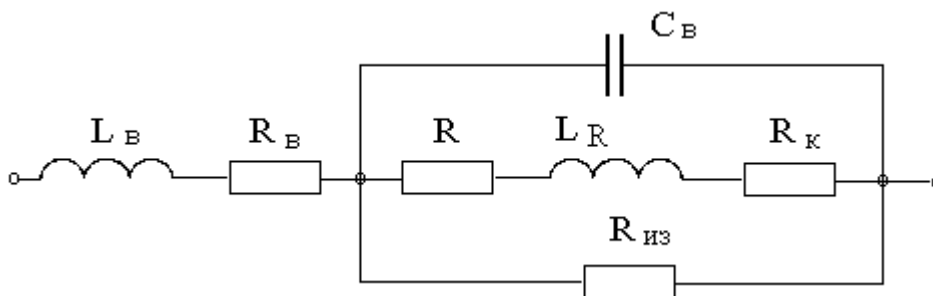


Рисунок 4.1 – Схема замещения дискретного резистора

Вид схемы замещения и параметры составляющих ее идеальных двухполюсников существенно зависят от конструкции реального элемента, применяемых материалов и технологии изготовления. Например, схема

замещения диффузионного интегрального резистора включает паразитный транзистор, т. е. оказывается гораздо сложнее, чем схема рис. 4.1.

Чем выше требуемая точность моделирования, тем больше факторов должно быть учтено и тем сложнее будут схемы замещения реальных элементов. Усложнение эквивалентной схемы увеличивает трудоемкость расчетов. Поэтому при моделировании электронных схем стремятся использовать схемы замещения пассивных элементов (см. рис. 4.2), содержащие минимально допустимое число двухполюсников.

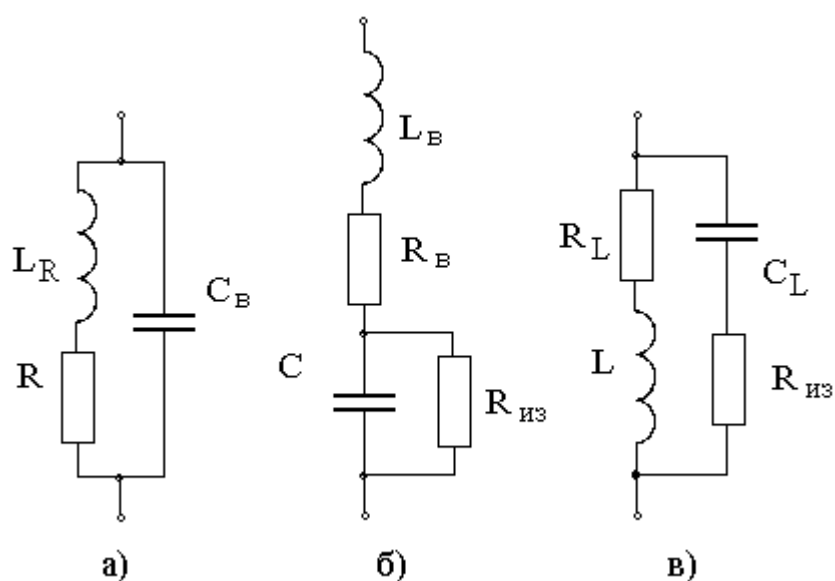


Рисунок 4.2 – Схемы замещения резистора (а), конденсатора (б) и катушки индуктивности (в)

Отметим, что схемы замещения конкретных элементов зависят от частоты. Например, в схеме замещения конденсатора (см. рис. 4.3) для низких частот может потребоваться учесть сопротивление утечки $R_{из}$, для средних – сопротивление выводов R_B , для высоких – исключить сопротивление утечки, но учесть индуктивность выводов L_B . Деление частот на низкие, средние и высокие – относительно и определяется соотношениями проводимостей идеальных элементов, составляющих схемы замещения.

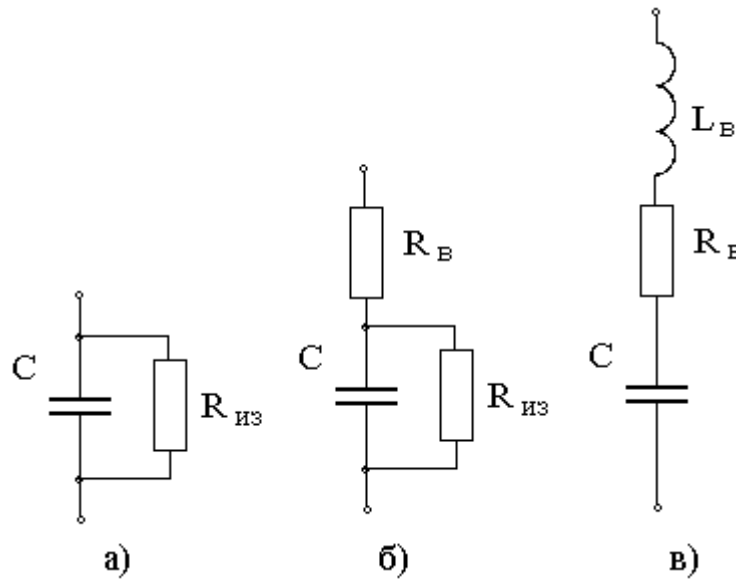


Рисунок 4.3 – Схема замещения конденсатора для низких (а), средних (б) и высоких (в) частот

4.2 Полупроводниковые диоды

По степени универсальности модели полупроводниковых приборов подразделяются:

- 1) на динамические и статические;
- 2) линейные и нелинейные;
- 3) для большого и малого сигналов;
- 4) высокочастотные и низкочастотные.

Данная классификация позволяет организовать иерархический ряд моделей, отличающихся вычислительными затратами и допускающими переход от одной модели к другой в процессе моделирования. Очевидно, что наиболее точной и универсальной в таком ряду является динамическая высокочастотная модель большого сигнала [8].

Вольтамперная характеристика (ВАХ) полупроводникового диода (см. рис. 4.4) описывается выражением [10]

$$I = I_s [\exp(V/U_T) - 1], \quad (4.1)$$

где q – заряд электрона; M – коэффициент неидеальности, учитывающий отклонение реальной характеристики от теоретической характеристики p-n

перехода; k - постоянная Больцмана; T - температура в Кельвинах; V - напряжение, приложенное к диоду. Если полярность напряжения такая, как на рис. 4.4, а, то диод открыт. Ток I_S (зависит от физических свойств диода и может принимать значения от 10^{-6} до 10^{-9} А) называется током насыщения:

$$I_S = q(N_p L_n/\tau_n + P_n L_p/\tau_p), \quad (4.2)$$

где N_p и P_n – концентрации неосновных носителей заряда в р и n областях; $L_{n,p}$ и $\tau_{n,p}$ - диффузионная длина и время жизни неосновных носителей заряда .

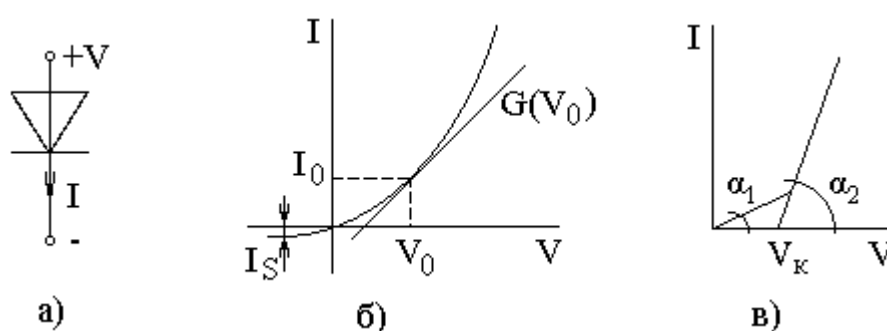


Рисунок 4.4 – Графическое обозначение (а), ВАХ (б) диода и кусочно-линейная аппроксимация прямой ветви ВАХ (в)

Идеальный диод можно представить как нелинейный резистор [9]. В эквивалентных схемах для такого элемента иногда используют обозначение рис. 4.4, а, имея в виду безинерционный нелинейный двухполюсник с диодной ВАХ. Чаще статическую модель диода представляют в виде источника тока, управляемого напряжением. В случае кусочно-линейной аппроксимации вольтамперной характеристики (рис. 4.4, в) управляемый напряжением источник тока I_n можно рассматривать как упрощенную статическую модель диода, где V_K , α_1 , α_2 - ее параметры.

Когда к диоду приложено постоянное напряжение V_0 , через него протекает постоянный ток I_0 . Эти величины определяют рабочую точку диода. На V_0 могут накладываться малые приращения напряжения, которые связаны с изменениями тока дифференциальной проводимостью

$$dI/dV|_{V=V_0} = (I_S/U_T) \exp(V_0/U_T), \quad (4.3)$$

называемой динамической проводимостью диода. Величина $G(V_0)$, равная крутизне ВАХ в точке V_0 (см. рис. 4.4, б), представляет собой низкочастотную модель диода для малого сигнала.

Низкочастотная малосигнальная модель диода не содержит инерционных элементов. Модель диода для высоких частот (см. рис. 4.5, а) включает динамическую проводимость $G(V_0)$ и емкость $C(V_0)$, зависящие от рабочей точки.

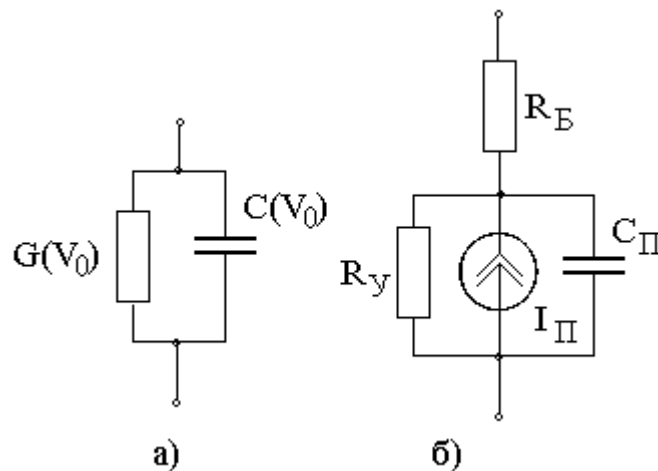


Рисунок 4.5 - Эквивалентная схема малосигнальной (а) и нелинейной динамической (б) модели диода

Эквивалентная схема более общей нелинейной динамической модели диода (рис. 4.5, б) содержит управляемый напряжением источник тока I_{Π} , сопротивление диода R_{δ} при прямом смещении (сопротивление базы), сопротивление утечки R_y , емкость C_{Π} p-n перехода. Модель основана на уравнении Эберса - Молла для управляемого источника тока и учитывает зависимость барьерной C_{δ} и диффузионной C_d составляющих емкости C_{Π} от напряжения [8]:

$$V_d = I_d R_{\delta} + V_n,$$

$$I_d = I_n + V_n / R_y + C_{\Pi} dV_n / dt,$$

$$I_n = I_s [\exp(V_n / U_T) - 1], \quad (4.4)$$

$$C_n = T_d I_n / U_T + C_{\delta 0} (1 + Q V_n / U_k), \text{ при } V_n > 0,$$

$$C_n = T_d I_n / U_T + C_{\delta 0} (1 - V_n / U_k)^{-Q}, \text{ при } V_n \leq 0,$$

$$U_T = kTM/q,$$

где U_k - контактная разность потенциалов; Q - коэффициент, учитывающий распределение примесей в р - n переходе (принимает значения от 1/2 до 1/3); T_d - постоянная времени диода; $C_{\delta 0}$ - барьерная емкость р-п перехода при напряжении $V_n = 0$. При $M = 1$ и $T = 300$ К тепловой потенциал $U_T = 26$ мВ.

Если диод открыт напряжением $V_n > 4U_T$ выполняются условия $\exp(V_n/U_T) \gg 1$, $I_y = V_n/R_y \ll I_n$, т. е. уравнение прямой ветви ВАХ может быть представлено в виде:

$$I = I_s \exp(V/U_T) \quad (4.5)$$

Для малого прямого напряжения $I = -I_s$. При обратном смещении выполняется условие $I_y \gg I_n$ и уравнение обратной ветви ВАХ диода имеет вид

$$I_d = I_y = V_n/R_y. \quad (4.6)$$

Диффузионная емкость $C_d = T_d I_n / U_T$ может достигать больших значений, чем барьерная емкость C_{δ} . Барьерная доминирует при обратном, диффузионная - при прямом смещении.

4.3 Полевые транзисторы

Существуют полевые транзисторы 1) с управляющим р-п переходом и с затвором Шоттки, 2) с изолированным затвором. Функционирование транзисторов обоих типов определяется модуляцией проводимости канала исток - сток (толщины проводящей части канала) при изменении напряжения на затворе (см., например, [10]).

Условное графическое обозначение полевых транзисторов первого типа приведено на рис. 4.6, а; З, И, С обозначены выводы соответственно затвора, истока, стока. На рис. 4.6, б представлены выходные ВАХ полевых транзисторов.

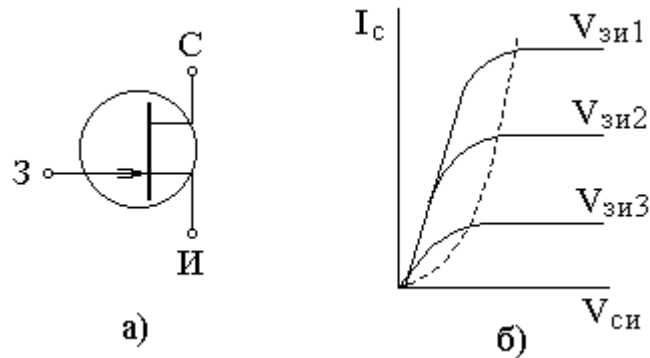


Рисунок 4.6 - Условное обозначение (а) и выходные ВАХ (б) полевых транзисторов с управляющим р-п переходом

Введем несколько обозначений:

$I_з$ – ток затвора;

$V_{зи}$, $V_{си}$ – напряжения затвор - исток и сток - исток;

$V_б$ – внутренний потенциал, отрицательный для п-канального и положительный для р-канального транзистора (обычно около 0,7 В);

V_0 – напряжение отсечки канала (обычно около 0,4 В);

I_0 – ток стока при $V_{зи} + V_б = 0$ и $V_{си} = -V_0$;

$V_1 = (V_{зи} + V_б - V_{си})/V_0$;

$V_2 = (V_{зи} + V_б)/V_0$.

Эквивалентным схемам простых нелинейных моделей транзистора (см. рис. 4.9) соответствует система уравнений [9]:

$$I_з = 0;$$

$$I_c = F(V_{зи}, V_{си}).$$

Ток стока I_c определяется следующими выражениями:

1) для линейной области ВАХ, где $V_{си} < V_{зи} - V_б - V_0$,

$$I_c/I_0 = -3V_{си}/V_0 - 2(V_1^{3/2} - V_2^{3/2}), \quad (4.7, a)$$

2) для области насыщения, где $V_{си} > V_{зи} - V_б - V_0$,

$$I_c/I_0 = -1 + 3V_1 - 2V_1^{3/2}. \quad (4.7, б)$$

Для прибора с n-каналом все напряжения положительные, для прибора с p-каналом – отрицательные.

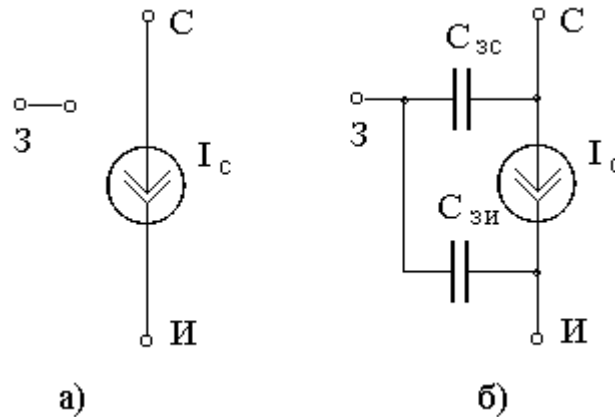


Рисунок 4.7 – Нелинейные статическая (а) и динамическая (б) модели полевого транзистора с управляющим р-п переходом или затвором Шоттки

Емкость затвор – исток в области насыщения [9]

$$C_{зи} = C_0 (1 + V_2^{1/2}) / (1 + 2V_2^{1/2}), \quad (4.8)$$

где C_0 – емкость затвор – исток при $V_{зи} + V_б = 0$ и $V_{си} = -V_0$.

Данное выражение используется и для линейной области, при этом расчетная емкость $C_{зи}$ оказывается несколько больше, чем фактическая.

Емкость $C_{си}$ обычно значительно меньше, чем $C_{зи}$, и включается во внешнюю цепь.

На рис. 4.8 приведены обозначение и нелинейная модель полевого транзистора с изолированным затвором, учитывающая нефункциональные сопротивления областей истока и стока, а также наличие подложки. Токи р-п переходов $I_{пс'}$ и $I_{пи'}$ описываются уравнениями, аналогичными (4.1),

$$I_c = \beta[(V_{зи'} - V_{пор})V_{си'} - V_{си'}^2/2], \quad (4.9, а)$$

при $V_{си} < V_{зи'} - V_{пор}$,

$$I_c = \beta(V_{зи'} - V_{пор})^2/2, \quad (4.9, б)$$

при $V_{си} > V_{зи'} - V_{пор}$,

где β – коэффициент усиления (см., например, [10]); $V_{\text{пор}}$ – пороговое напряжение (напряжение затвор – исток $V_{\text{зи}}$, при котором ток сток – исток I_c равен 0,1 мкА, в условиях короткого замыкания между затвором и стоком [9]). Обычно пороговое напряжение составляет от 0 до 1,5 В и постоянно для конкретной технологии изготовления транзистора.

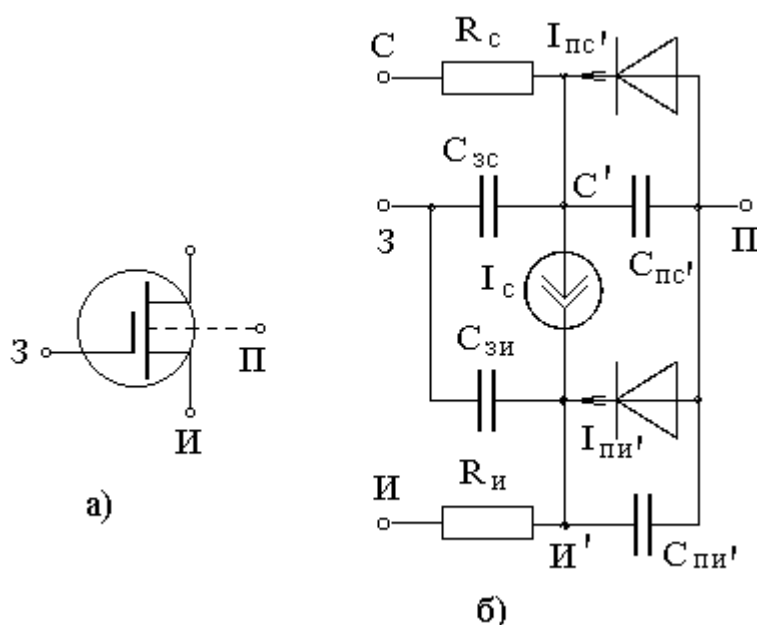


Рисунок 4.8 – Условное обозначение (а) и нелинейная модель (б) полевого транзистора с изолированным затвором

Приведенные уравнения справедливы для полевых транзисторов со встроенным каналом.

Емкости можно считать постоянными, определяемыми геометрией и технологией:

$$C = \varepsilon A/h, \quad (4.10)$$

где A – площадь; ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость; h - толщина диэлектрика.

Рабочая точка полевых транзисторов обеспечивается подачей постоянных напряжений $V_{\text{зи}0}$, $V_{\text{си}0}$:

$$I_3 = 0;$$

$$I_{c0} = F(V_{зи0}, V_{си0}).$$

Малые приращения напряжений в рабочей точке вызывают малые изменения тока стока I_c . Разлагая I_c в ряд Тейлора и сохраняя только линейные члены разложения, получим

$$dI_c = (\partial F/\partial V_{зи})dV_{зи} + (\partial F/\partial V_{си})dV_{си}.$$

Фактически это полный дифференциал от F .

Если напряжение $V_{си}$ не изменяется, то второй член разложения равен нулю и

$$\partial I_c/\partial V_{зи} = \partial F/\partial V_{зи} = G_T(V_{зи0}, V_{си0}).$$

Если напряжение $V_{зи}$ не изменяется, то

$$\partial I_c/\partial V_{си} = \partial F/\partial V_{си} = G_c(V_{зи0}, V_{си0}).$$

Константа G_T , имеющая размерность проводимости, характеризует влияние на ток I_c напряжения, приложенного к выводам затвор – исток, G_c – проводимость, подключенная к выводам сток – исток.

Рассмотренные уравнения можно представить линейной схемой, показанной на рис. 4.9, а. Это простейшая малосигнальная модель полевого транзистора, на более высоких (средних) частотах нужно учитывать емкости транзистора (рис. 4.9, б).

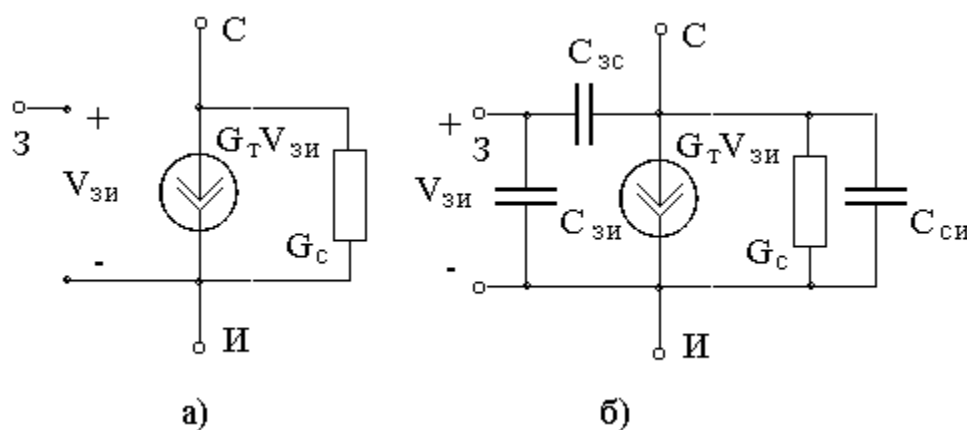


Рисунок 4.9 – Малосигнальные модели полевого транзистора для низких (а) и средних (б) частот

4.4 Биполярные транзисторы

На рис. 4.10 представлено обозначение биполярного р-п-р транзистора; выводы: Э - эмиттер, Б - база, К - коллектор. Для транзистора типа п-р-п стрелка, обозначающая эмиттер, направлена в противоположную сторону. Указанная полярность напряжения относится к р-п-р транзистору и для п-р-п транзистора будет противоположной.

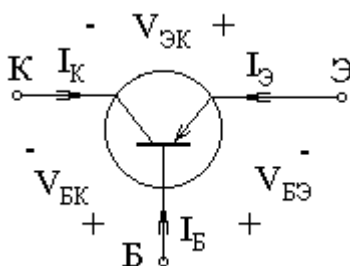


Рисунок 4.10 – Обозначение биполярного р-п-р транзистора

В качестве нелинейных моделей биполярного транзистора наибольшее распространение получили различные модификации модели Эберса - Молла, в основе которой лежит представление транзистора как системы двух взаимодействующих диодов [9, 10].

Инжекционный вариант модели Эберса - Молла, соответствующий эквивалентной схеме рис. 4.11, а, представляют уравнения

$$I_K = \alpha_n I_{ДЭ} - I_{ДК}; \quad (4.11)$$

$$I_Э = \alpha_i I_{ДК} - I_{ДЭ}$$

при

$$I_{ДЭ} = I_{ЭН} [\exp(V_Э/U_T) - 1],$$

$$I_{ДК} = I_{КН} [\exp(V_К/U_T) - 1], \quad (4.12)$$

где $I_{ЭН}$, $I_{КН}$ - токи насыщения переходов база - эмиттер и база коллектор; $V_Э$, $V_К$ - напряжения на переходах; α_n , α_i - коэффициенты прямой и обратной передачи тока в схеме с общей базой; $U_T = kT/q$, k - постоянная Больцмана, T - температура, q - заряд электрона.

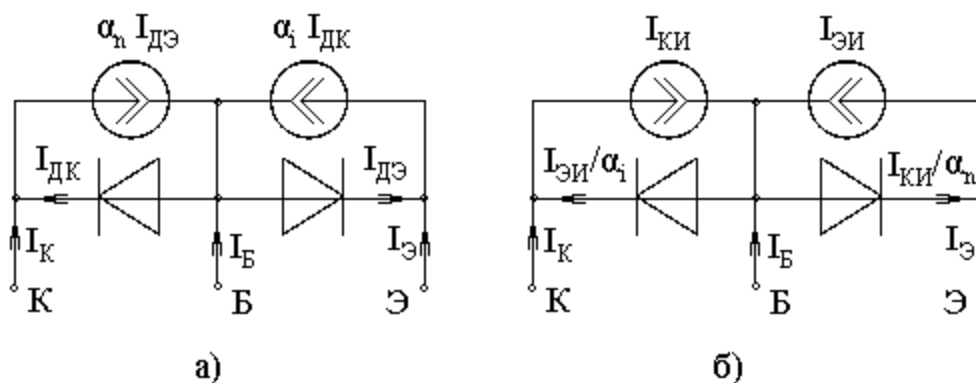


Рисунок 4.11 - Инжекционная (а) и передаточная (б) модели Эберса – Молла

Физические свойства транзистора требуют, чтобы выполнялось условие [11]

$$\alpha_n I_{ЭИ} = \alpha_i I_{КИ} = I_N. \quad (4.13)$$

Используя I_N , можно записать уравнение (4.11) в форме наиболее подходящей для ЭВМ, и уменьшить число параметров с четырех до трех:

$$I_K = I_{КИ} - I_{ЭИ} / \alpha_i, \quad (4.14)$$

$$I_Э = I_{ЭИ} - I_{КИ} / \alpha_n,$$

где $I_{КИ,ЭИ} = I_N [\exp(V_{Э, К} / U_T)]$ - коллекторный и эмиттерный источники тока.

Уравнения (4.14) представляют передаточный вариант модели Эберса - Молла (рис. 4.11, б). Еще одну модель можно получить, воспользовавшись связью между коэффициентами передачи тока в схемах с общей базой (α_n, α_i) и общим эмиттером (β_n, β_i):

$$\alpha_{n,i} = \beta_{n,i} / (1 + \beta_{n,i}). \quad (4.15)$$

Подставив (4.15) в (4.14), получим:

$$I_K = (I_{КИ} - I_{ЭИ}) - I_{ЭИ} / \beta_i, \quad (4.16)$$

$$I_Э = -I_{КИ} / \beta_n - (I_{КИ} - I_{ЭИ}).$$

Введя обозначение $I_{КТ} = (I_{КИ} - I_{ЭИ})$, смоделируем эти уравнения схемой с одним источником тока (рис. 4.12, а). Эту модель называют нелинейной гибридной П - моделью.

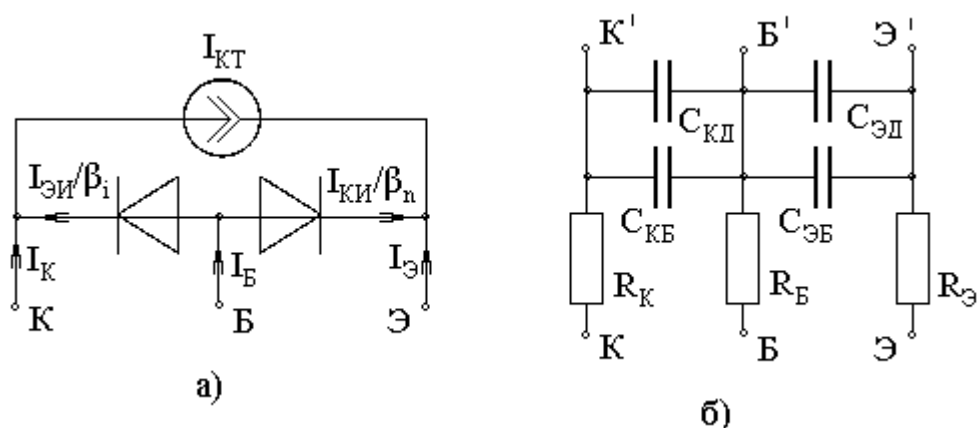


Рисунок 4.12 - Гибридная (а) и более общая (б) модели Эберса – Молла

Рассмотренные модели пригодны только для низких частот. Эквивалентная схема более общей нелинейной модели (рис. 4.12, б) содержит: $C_{КД}$, $C_{ЭД}$, $C_{КБ}$, $C_{ЭБ}$ - диффузионные и барьерные емкости переходов; $R_{Э}$, $R_{Б}$, $R_{К}$ - сопротивления объема областей эмиттера, базы и коллектора, а также их внешних выводов; низкочастотные модели, рассмотренные ранее, могут быть подключены к точкам Б', К' и Э'.

Обычно сопротивления считаются постоянными. Типичные значения $R_{К}$ составляют от нескольких Ом до нескольких сотен Ом; $R_{Э}$ - обычно 1 Ом, и им часто пренебрегают; $R_{Б}$ - около 10 Ом для СВЧ и до нескольких кОм для низкочастотных транзисторов [9]. Емкости переходов зависят от напряжений и описываются уравнениями, подобными тем, которые рассматривались для диода.

Для учета эффекта Эрли в модель Эберса - Молла можно добавить источник тока $(V_{К}/V_{А})I_{Э}$ между внутренним эмиттером и коллектором, где $V_{А}$ - напряжение Эрли [10]. В результате число параметров модели увеличится. Дополнительно в основную модель могут быть введены параметры, учитывающие зависимость α_n и α_i от плотности тока и рабочей частоты. Можно дополнительно подсоединить к базе диоды, учитывающие двумерный эффект концентрации тока вдоль перехода база-эмиттер [12]. Очевидно, что

уточнение модели неизбежно приводит к увеличению числа параметров и модель транзистора становится более сложной.

Еще одна нелинейная динамическая модель биполярного транзистора - модель Гуммеля-Пуна основана на интегральных соотношениях для зарядов и связывает внешние электрические характеристики транзистора с зарядом в базе [10, 12]. Это очень точная модель, объясняющая многие физические эффекты, соответственно для ее описания требуется много параметров. Последовательное упрощение модели Гуммеля-Пуна в конце концов приводит к простейшей модели Эберса - Молла.

При анализе функционирования транзисторов на малом переменном сигнале (см. раздел б) используют линейные модели. Эквивалентные схемы подобных моделей для схем включения транзистора с общим эмиттером и с общей базой приведены на рис. 4.13 [8]. Параметры моделей – коэффициенты передачи α или β , дифференциальное сопротивление базы r_B , коллектора r_K , эмиттера r_E , коэффициент обратной связи по напряжению $\mu_{ЭК}$, емкости коллекторного C_K и эмиттерного C_E переходов – соответствуют стандартизованным справочным значениям параметров транзисторов. При автоматизированном проектировании они определяются, как правило, из нелинейных моделей путем линеаризации характеристик в рабочей точке.

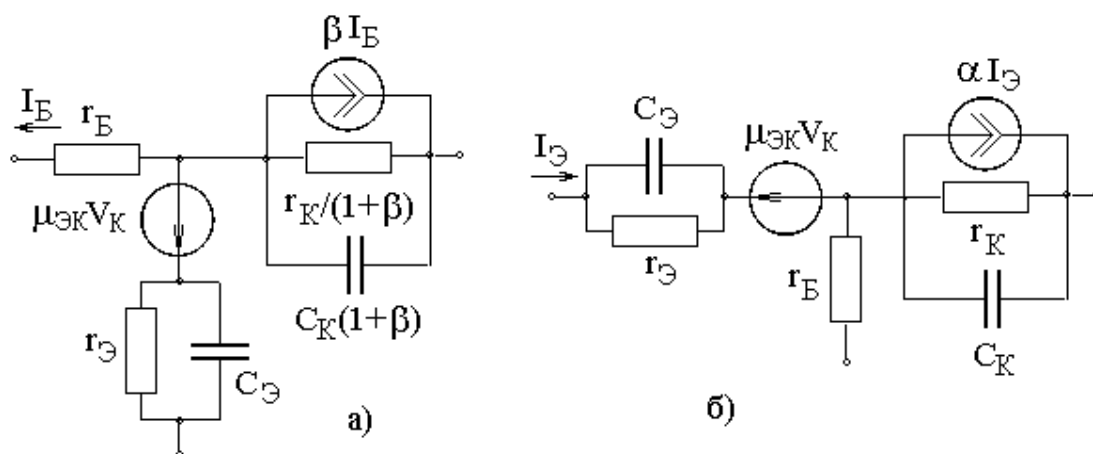


Рисунок 4.13 - Линейные модели биполярного транзистора для схем с общим эмиттером (а) и общей базой (б)

В качестве простейших малосигнальных линейных моделей биполярных транзисторов используют также схемы замещения уравнений четырехполюсника, представляющие собой формальную аппроксимацию его характеристик. Наибольшее распространение получили уравнения с y – параметрами и h – параметрами.

Из уравнений четырехполюсника можно получить схемы замещения транзистора с двумя зависимыми источниками (см. рис. 4.14).

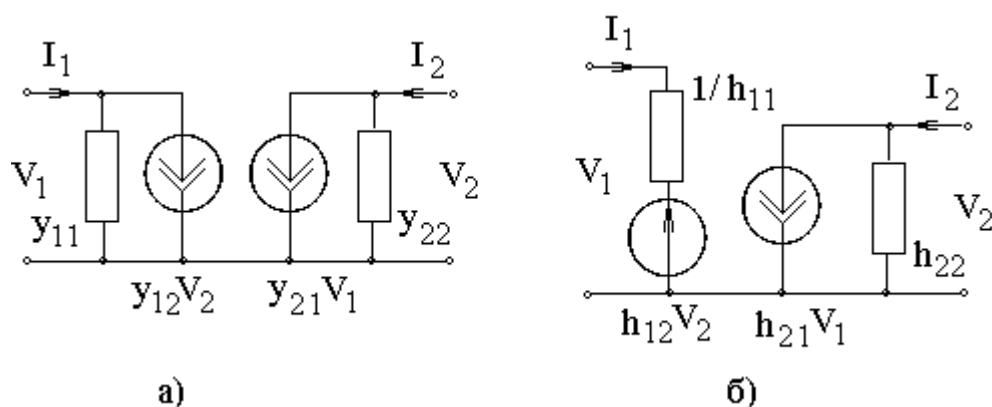


Рисунок 4.14 – Схемы замещения транзистора как четырехполюсника с y –параметрами (а) и h –параметрами (б)

На рис. 4.14 пассивными элементами являются входное и выходное сопротивление или проводимости транзистора в режиме холостого хода или короткого замыкания (по переменному току). Зависимые источники характеризуют усилительные свойства транзистора (передачу сигнала с входа на выход) и обратную связь (передачу сигнала с выхода на вход).

Поскольку для транзистора $|y_{21}| > |y_{12}|$ систему с y –параметрами можно представить в виде

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2;$$

$$I_2 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 + (y_{21} - y_{12})V_1.$$

Множитель в скобках представляет собой управляемый напряжением источник тока на выходе четырехполюсника, остальная часть описывает

пассивный двухполюсник. Полученная модель (см. рис. 4.15) называется гибридной П-моделью.

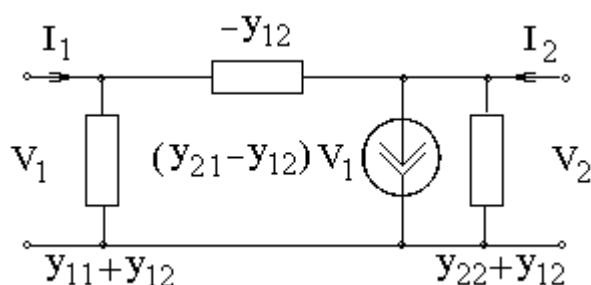


Рисунок 4.15 – Малосигнальная модель транзистора с одним зависимым источником

Если от операторного представления перейти к обычному, получим малосигнальную гибридную П - модель транзистора рис. 4.16. Типичные значения параметров модели [9]: $R_{ББ'}$ = (25 ÷ 100) Ом, $R_{Б'К'}$ = (10^6 ÷ 10^7) Ом, $R_{Б'Э'}$ = (150 ÷ 1000) Ом, $R_{К'Э'}$ = ($2 \cdot 10^4$ ÷ 10^6) Ом, $C_{Б'Э'}$ = (10 ÷ 200) пФ, $C_{Б'К'}$ = (0,2 ÷ 6) пФ, $C_{К'Э'}$ = (0,1 ÷ 1) пФ, G_T = (0,02 ÷ 0,2) мСм.

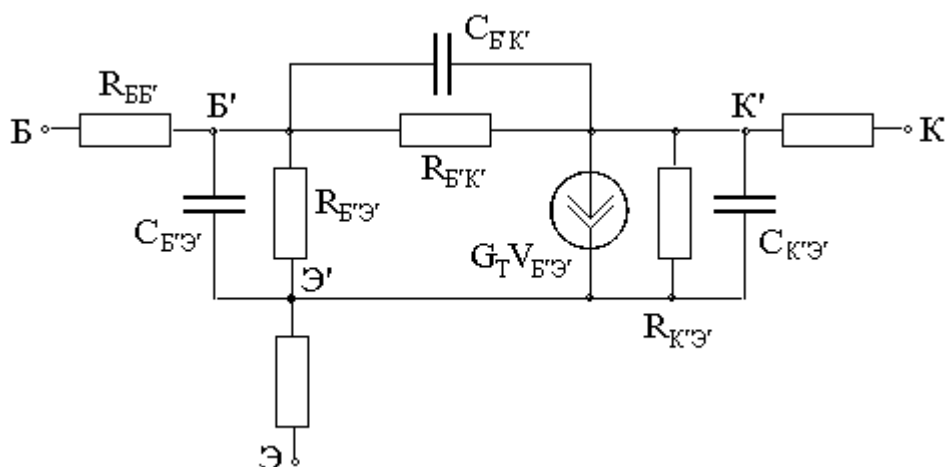


Рисунок 4.16 – Малосигнальная гибридная П - модель биполярного транзистора

4.5 Определение параметров моделей

Источниками информации о параметрах моделей элементов РЭС являются [14]:

- 1) нормативно – справочные данные;
- 2) конструкторская и технологическая документация;
- 3) экспериментальные данные.

Нормативно – справочные данные – наиболее доступный, регламентированный и дешевый источник информации. Однако сведений, приводимых в этом источнике, как правило, бывает недостаточно для определения всей совокупности параметров модели элемента. Обычно нет сведений, характеризующих инверсный режим работы таких распространенных элементов как биполярные транзисторы. Недостаточно информации для определения режимных и температурных зависимостей параметров моделей, статистических характеристик. Пользуясь одними нормативно – справочными данными, можно получить параметры лишь очень неточных моделей для конкретного (типового) режима работы элемента.

Конструкторско-технологическая документация на элементы РЭС содержит их физико-топологические характеристики, информацию о технологических режимах производства, используемых материалах. Определение параметров электрических моделей элементов по конструкторской и технологической документации предполагает разработку физико-топологических моделей (на микроуровне, см. раздел 2.4) и связано с рядом трудностей. Основными из них являются:

- 1) зависимость режимов технологических операций от конкретных условий производства;
- 2) трудность получения достоверных электрических и невозможность получения статистических параметров моделей;
- 3) труднодоступность конструкторско-технологической документации.

Информация, получаемая в результате экспериментального исследования реальных элементов, - наиболее достоверная и полная. По экспериментальным данным могут быть определены не только номинальные значения параметров модели, но и их статистические характеристики, а также режимные и температурные зависимости параметров. Вместе с тем, обладая очевидными преимуществами, метод экспериментального определения параметров моделей является наиболее трудоемким и дорогим.

Определение параметров моделей элементов РЭС по экспериментальным данным включает два основных этапа [14]:

- 1) измерение характеристик элементов в ходе специальных тестовых испытаний;
- 2) расчет параметров моделей элементов согласно рассмотренной ранее общей методике (см. раздел 2.5).

Предположим, что в ходе специального тестового испытания получены n точек экспериментальной зависимости $R_{\text{э}}(Z)$, где R и Z – выходная и входная фазовые переменные. Тогда, казалось бы, все m параметров модели - компонент вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ - можно легко определить путем минимизации некоторой целевой функции S (см. раздел 2.6), зависящей от вектора отклонений

$$e_i = R_i - R_{\text{э}i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где i - параметр плана эксперимента, R_i и $R_{\text{э}i}$ – соответственно рассчитанные с помощью модели и экспериментальные значения выходной фазовой переменной R в точках Z_i .

Однако число параметров модели m может оказаться слишком велико. Дело в том, что целевые функции для нелинейных моделей элементов обычно описывают весьма сложные поверхности, поэтому уже при $m = 5$ возникает проблема сходимости процедур определения параметров (резко возрастает расход машинного времени). В силу этого рассмотренный подход (с позиций «черного ящика»), являясь теоретически универсальным, на практике не реализуется, если число определяемых параметров $m \geq 5$.

Снизить реальную размерность оптимизационных задач можно за счет использования априорной информации о физических свойствах элементов. На основе такого рода информации множество определяемых параметров модели X разбивается на ряд подмножеств (групп параметров) X_k с соблюдением следующих условий [14]:

$$\bigcup_{k \in T} X_k = X; \quad \bigcup_{k \in T} L_k = m; \quad X_i \cap X_j = X_q;$$

где \subset – логическое отношение включения; \cup – логическое сложение (объединение); \cap – логическое умножение (пересечение); T – множество испытаний; L_k – количество параметров в k -ой группе; X_q – множество параметров, определенных в результате предыдущих $j - 1 = i$ испытаний (в частном случае X_q – пустое множество).

В результате, проводится уже не одно, а несколько (n_T) специальных тестовых испытаний, но размерность частной k -ой задачи определения параметров снижается до приемлемой величины L_k .

Вначале определяются статические, затем – динамические параметры модели.

Рассмотрим пример. Нелинейная динамическая модель диода рис. 4.5, б (раздел 4.2) характеризуется восемью параметрами. В ходе специальных тестовых испытаний получены прямая и обратная ветви ВАХ диода и режимные зависимости его полной проводимости (адмиттанса) на частотах от 1 до 50 МГц.

Статические параметры I_s , R_δ , U_T модели диода определяются из условия

$$\sum_{i=1}^n (V_{эi} - V_i) = \min, \quad (4.17)$$

где $V_{эi}$, V_i – экспериментальное и расчетное значения падения напряжения на диоде при токе I_i ; n – число экспериментальных точек прямой ветви ВАХ.

При обработке данных по методу наименьших квадратов условие (4.17) с учетом (4.5) сводится к системе линейных уравнений

$$a_{11}G + a_{12}U_T + a_{13}R_\delta = a_{14},$$

$$a_{21}G + a_{22}U_T + a_{23}R_6 = a_{24}, \quad (4.18)$$

$$a_{31}G + a_{32}U_T + a_{33}R_6 = a_{34},$$

где $G = -U_T \ln I_S$, $I_S = \exp(-G/U_T)$, $a_{11} = n$, $a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n \ln I_i$, $a_{13} = a_{31} = \sum_{i=1}^n I_i$,

$$a_{14} = \sum_{i=1}^n I_i, \quad a_{22} = \sum_{i=1}^n (\ln I_i)^2, \quad a_{24} = \sum_{i=1}^n (\ln I_i) V_i, \quad a_{33} = \sum_{i=1}^n (\ln I_i)^2,$$

$$a_{32} = a_{23} = \sum_{i=1}^n (\ln I_i) Li, \quad a_{34} = a_{43} = \sum_{i=1}^n \ln I_i.$$

Из решения системы уравнений (4.18) определяются параметры I_S , U_T , R_6 . Значение параметра R_y , моделирующего сопротивление утечки при обратном включении диода, вычисляется по формуле

$$R_y = V_{обр} / I_{обр}, \quad (4.19)$$

где $I_{обр}$ - заданное значение обратного тока при обратном напряжении $V_{обр}$.

Режимные зависимости полной проводимости диода представляются в виде таблично заданных функций тока (при прямом смещении) или напряжения (при обратном смещении). По этим данным и рассчитанным ранее значениям статических параметров I_S , U_T , R_6 определяются значения полной емкости диода C_i в каждой режимной точке и формируются рабочие массивы для дальнейшей обработки:

$$C_i = (R_6 + R_i)^2 \operatorname{Im}(Y_i) / W R_i^2$$

для $V_i > 0$,

$$C_i \approx \operatorname{Im}(Y_i) / W$$

для $V_i < 0$,

где R_i – дифференциальное сопротивление диода при прямом смещении, W – частота.

Параметры аппроксимирующих выражений, описывающих режимные зависимости динамических параметров модели диода, определяются также по методу наименьших квадратов. Минимизируются суммы квадратов невязок между значениями полной емкости диода, рассчитанными по

экспериментальным значениям y – параметров ($C_{Эi}$) и полученными из уравнения модели (C_i):

$$\sum_{i=1}^n (C_{Эi} - C_i) = \min. \quad (4.20)$$

Для определения параметра T_d используются значения полных проводимостей диода при прямом смещении, а для определения параметров, аппроксимирующих режимную зависимость барьерной емкости p-n перехода, используются значения полных проводимостей диода при обратном смещении.

Подобным образом определяются параметры нелинейных моделей и др. базовых элементов РЭС. В частности, для определения статических параметров модели биполярного транзистора в схеме с общим эмиттером обычно измеряют ВАХ переноса $I_n(V_{ЭБ})$, $I_i(V_{КБ})$ и выходные ВАХ при нормальном и инверсном включении, а также ВАХ $V_{КЭнас}(I_K)$ – для определения R_K . ВАХ переноса используется для определения параметров I_s , U_T , R_b и зависимости коэффициента передачи тока $\beta(I)$ для нормального и инверсного включения, а выходные ВАХ – для определения параметров, характеризующих зависимость коэффициента передачи тока $\beta_n(V_{КБ})$ и $\beta_i(V_{ЭБ})$.

Для определения динамических параметров модели измеряют режимные зависимости малосигнальных параметров транзистора как четырехполюсника и по ним находят емкости переходов в зависимости от рабочей точки.

Параметры малосигнальных линейных моделей обычно определяются автоматически путем линеаризации характеристик нелинейных моделей в рабочей точке.

Статистические модели характеризуются многомерными дискретными распределения параметров [14].

5 МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

В настоящем и двух последующих разделах рассмотрены основные методы и алгоритмы моделирования на макроуровне на примере электронных схем. Аналогии компонентных и топологических уравнений (см. раздел 3) позволяют использовать эти методы и для моделирования технических объектов-систем иной физической природы.

5.1 Общие сведения

Моделирование статических режимов (по постоянному току) проводится для определения режима работы (рабочей точки) нелинейных элементов, и обычно предшествует анализу в частотной (см. раздел 6) и во временной (раздел 7) области.

На постоянном токе идеальная катушка индуктивности представляет собой короткозамкнутую цепь, а конденсатор - разрыв цепи. Математическая модель получается объединением компонентных и топологических уравнений. Топологические уравнения составляются по эквивалентной схеме на основании первого или второго законов Кирхгофа.

В общем случае модель нелинейной схемы представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений

$$F(X) = 0, \quad (5.1)$$

где F - вектор-функция, X – вектор базисных координат.

Для решения нелинейных алгебраических уравнений на ЭВМ используют итерационные методы (последовательного приближения) [7], преимущественно метод Ньютона – Рафсона. Суть метод Ньютона – Рафсона состоит в следующем.

Пусть $x = r$ - решение скалярного уравнения

$$f(x) = 0,$$

$x = x^{(n-1)}$ - некоторое приближенное значение r . Тогда, по теореме Тейлора,

$$F(r) = F[x^{(n-1)}] + [r - x^{(n-1)}]F'[x^{(n-1)}] + \dots,$$

где штрих обозначает производную функции по x .

Если оставить только линейный член в разложении и обозначить $x(n)$ как новое приближение к r , то с учетом $F(r) = 0$ можно записать

$$0 = F[x(n-1)] + [x(n) - X(n-1)]F'[x(n-1)],$$

откуда следует формула для ньютоновских итераций

$$x(n) = x(n-1) - F[x(n-1)]/F'[x(n-1)], \quad (5.2)$$

Рассмотрим пример. На постоянном токе простая схема, представленная на рис. 5.1, а, преобразуется к виду, показанному на рис. 5.1, б, поскольку катушка индуктивности представляет собой короткозамкнутый отрезок, а конденсатор - разрыв цепи.

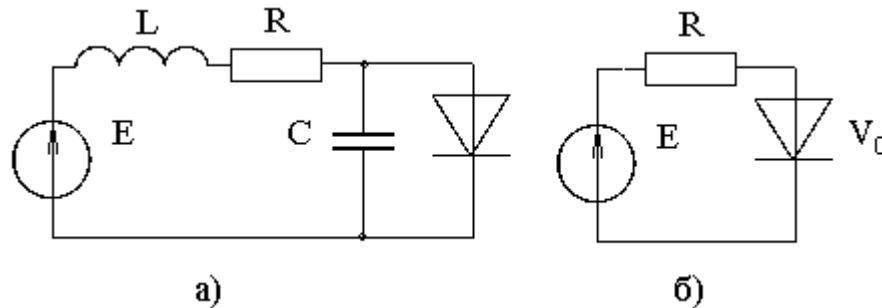


Рисунок 5.1 - Схема электрическая принципиальная (а) и эквивалентная схема (б) на постоянном токе

По законам Кирхгофа и Ома,

$$E = I R + V_0.$$

Падение напряжения на диоде

$$V_0 = I R_\sigma + U_T \ln(I/I_s + 1).$$

Отсюда

$$E = I (R + R_\sigma) + U_T \ln(I/I_s + 1). \quad (5.3)$$

При заданном E ток I можно найти из уравнения (5.3) численными методами.

Используя метод Ньютона - Рафсона, получим

$$I(n) = I(n-1) - \frac{I(n-1)(R + R_\sigma) + U_T \ln[I(n-1)/I_s + 1] - E}{R + R_\sigma + U_T/[I(n-1) + I_s]}.$$

При использовании метода простых итераций

$$I(n) = \{E - U_T \ln[I(n-1)/I_s + 1]\} / (R + R_6).$$

Последовательность $x(n)$ может сходиться к точному решению r , а может и не сходиться. Скорость сходимости исследуют, вычисляя ошибку $e(n) = r - x(n)$ на каждой итерации. Эта ошибка обусловлена усечением ряда Тейлора при выводе формулы (5.2) и связана с ошибкой на предыдущем шаге соотношением

$$e(n) = -0.5[f''(r)/f'(r)]e^2(n-1).$$

Таким образом, метод Ньютона-Рафсона имеет квадратичную сходимость: ошибка на каждом последующем шаге итераций пропорциональна квадрату ошибки на предыдущем шаге.

Условия, при которых метод Ньютона-Рафсона будет сходиться, удобно проиллюстрировать графически [6, 7]. На рис. 5.2, а приведен график монотонной функции $f(x)$ и проведена касательная в точке $x(n-1)$. Новое приближенное значение решения $x(n)$ определяется выражением

$$f'[x(n-1)] = \frac{f[x(n-1)] - 0}{x(n-1) - x(n)}.$$

Это выражение может быть преобразовано в формулу для итераций. На рис. 5.2, а видно, что каждое последующее значение $x(n)$ все больше приближается к точному решению r уравнения $f(x) = 0$, т. е. метод сходится.

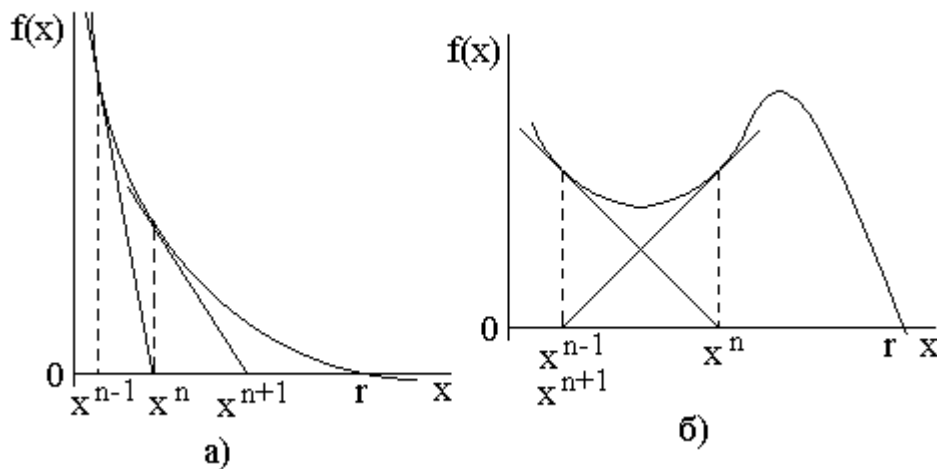


Рисунок 5.2 – Условия сходимости метода Ньютона-Рафсона

Рассмотрим функцию другого вида (рис. 5.2, б). Здесь значение $x(n+1)$ находится дальше от r , чем значение $x(n-1)$. Происходят колебания около локального минимума функции $f(x)$, т. е. при таком выборе начальных условий метод не сходится. Обеспечить сходимость можно, если изменить начальные условия так, чтобы новое приближенное значение решения оказалось справа от минимума функции $f(x)$.

5.2 Преобразования Тевенина и Нортон

Энергию в схемы подают из независимых источников тока или напряжения. Независимые источники, рассмотренные в разделе 3.5, идеальны и физически нереализуемы: идеальный источник напряжения обеспечивает заданное значение напряжения даже при коротком замыкании его полюсов, а идеальный источник тока – заданный ток даже в разомкнутой цепи. Однако при добавлении др. идеальных элементов они могут быть использованы для моделирования реальных независимых источников.

Одна из моделей реального источника напряжения приведена на рис. 5.3, а. Резистор $R_{и}$ моделирует внутреннее сопротивление источника. Напряжение между выводами $A - A'$ равно напряжению идеального источника только в случае, когда ток нагрузки I равен нулю.

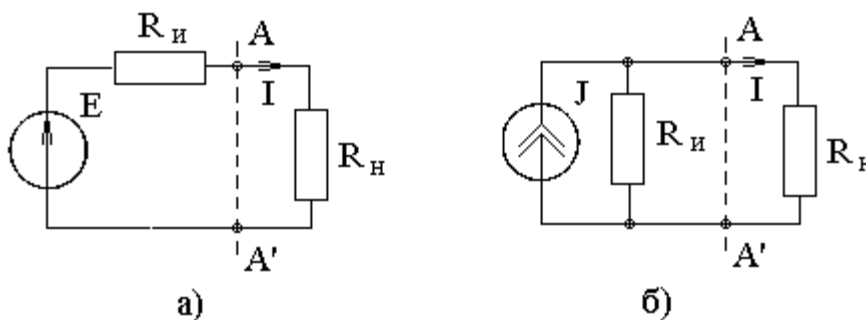


Рисунок 5.3 – Модели реальных источников напряжения (а)
и тока (б)

Модель реального источника тока приведена на рис. 5.3, б. Здесь резистор $R_{\text{и}}$ включен параллельно идеальному источнику тока J .

По отношению к нагрузке цепи рис. 5.3 а, б будут эквивалентны⁷ при условии, что

$$J = E/R. \quad (5.3)$$

Формулу (5.3) можно использовать для преобразования источника напряжения в эквивалентный источник тока.

Заметим, что напряжение E равно напряжению холостого хода между выводами $A - A'$ при исключенной нагрузке, а ток источника J равен току, текущему в цепи при коротком замыкании выводов $A - A'$. Это будет выполняться независимо от того, насколько сложна цепь между источником и выводами $A - A'$, и даже при наличии многих источников. Если сложную цепь слева от сечения $A - A'$ преобразовать к виду, показанному на рис. 5.3, а, то получим схему с эквивалентным генератором напряжения, или так называемый эквивалент Тевенина. Цепь, приведенная на рис. 5.3, б, называется схемой с эквивалентным генератором тока, или с эквивалентом Нортона.

Преобразования Тевенина и Нортона позволяют произвольную сложную цепь (даже содержащую несколько источников) заменить простым эквивалентным источником напряжения или тока. Для этого нужно сделать следующее [9].

1. Отключить нагрузку цепи и определить напряжение холостого хода E между выводами $A - A'$ или замкнуть их накоротко и рассчитать ток короткого замыкания J .

2. Для определения внутреннего сопротивления $R_{\text{и}}$ замкнуть накоротко все независимые источники напряжения и исключить все независимые источники тока. Зависимые источники остаются без изменений. Далее приложить к выводам $A - A'$ единичное напряжение (или единичный ток) и

⁷ Будут различны мощности, потребляемые от идеальных источников.

рассчитать ток I , протекающий через источник напряжения (или напряжение V между выводами источника тока). Тогда $R_{И} = 1/I$ (или $R_{И} = V/I$).

Идеальный источник напряжения можно преобразовать в эквивалентный источник тока, как показано на рис. 5.4 [6]. Сопротивления резисторов имеют одинаковые по модулю значения R и разные знаки, что не изменяет процессов в схеме, само значение R может быть выбрано с учетом удобства вычислений.

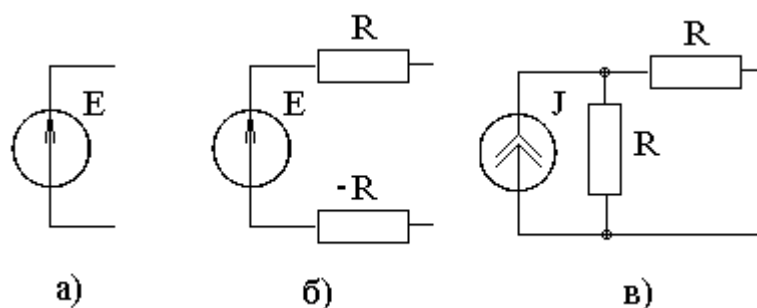


Рисунок 5.4 – Последовательность преобразования идеального источника напряжения в эквивалентный источник тока

5.2 Формирование модели

Для моделирования статических режимов нелинейных схем обычно используется метод узловых потенциалов, основанный на первом законе Кирхгофа. Для каждого узла схемы составляют уравнение баланса токов, причем ток, втекающий в узел, берется со знаком минус, а вытекающий - со знаком плюс. Полученная система уравнений решается методом Ньютона - Рафсона или др. численным методом, пригодным для решения системы нелинейных уравнений [7]. Предварительно из моделируемой схемы исключают реактивные элементы, а источники напряжения, если они есть, преобразуют в эквивалентные источники тока (см. раздел 5.2).

Рассмотрим формирование модели методом узловых потенциалов на примере транзисторного усилителя (рис. 5.5, а) [6].

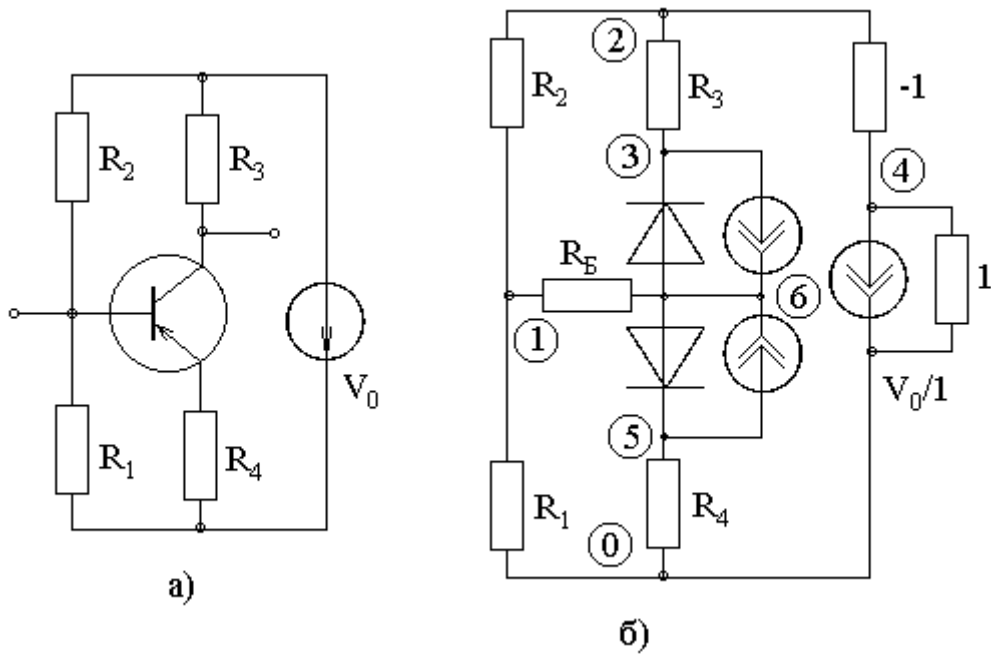


Рисунок 5.5 - Принципиальная а) и эквивалентная б) схемы транзисторного усилителя

Используем инжекционную модель транзистора (см. раздел 4.4). Преобразуя источник напряжения в эквивалентный источник тока, в соответствие с теоремой Нортон, и учитывая сопротивление базы транзистора R_B , получим эквивалентную схему усилителя, показанную на рис. 5.5, б. Уравнения для узлов этой схемы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 I_1 &= V_1/R_1 + (V_1 - V_2)/R_2 + (V_1 - V_6)/R_B, \\
 I_2 &= (V_2 - V_1)/R_2 + (V_2 - V_3)/R_3 + (V_2 - V_4)/(-1), \\
 I_3 &= (V_3 - V_2)/R_3 - I_{36}, \\
 I_4 &= V_4/1 + (V_4 - V_2)/(-1), \\
 I_5 &= V_5/R_5 + I_{56}, \\
 I_6 &= (V_6 - V_1)/R_B + I_{36} - I_{56}, \\
 I_{36} &= I_{KH} \{ \exp[(V_6 - V_3)/U_T] - 1 \} - \alpha_n I_{ЭН} \{ \exp[(V_6 - V_5)/U_T] - 1 \}, \\
 I_{56} &= \alpha_i I_{KH} \{ \exp[(V_6 - V_3)/U_T] - 1 \} - I_{ЭН} \{ \exp[(V_6 - V_5)/U_T] - 1 \}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

В векторной форме (5.4) имеет вид

$$I = W(V), \tag{5.5}$$

где компоненты вектора $W(V)$ являются функциями V_1, V_2, \dots, V_6 , а вектора I - равны нулю все, кроме четвертой: компонента I_4 равна току независимого источника $I_0 = V_0/1$.

Перепишем (5.5) в форме

$$F(V) = W(V) - I = 0. \quad (5.6)$$

Для решения (5.6) начальное приближение можно выбрать из физических соображений, а далее применять метод Ньютона - Рафсона.

5.3 Метод Ньютона – Рафсона

Рассмотрим систему нелинейных уравнений:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

(5.7)

Обозначим вектор переменных через X и вектор функций через F . Тогда (5.7) можно записать в форме (5.6).

Предположим, что система уравнений имеет решение, обозначим его через X^* и разложим каждую функцию в ряд Тейлора в окрестности решения. Предположив далее, что X близко к X^* , пренебрежем членами высокого порядка и запишем систему уравнений в линеаризованной форме

$$F(X^*) = F(X) + M(X^* - X), \quad (5.8)$$

где

$$M|_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_x$$

- матрица Якоби функции F .

Если приравнять нулю правую часть уравнения (5.8), то решение не будет равно вектору X^* , т. к. пренебрегли членами высокого порядка. В

результате получим некоторое новое значение X . Используя индексы в круглых скобках для обозначения последовательности итераций, получаем

$$F[X(k)] + M[X(k+1) - X(k)] = 0. \quad (5.9)$$

Формально решение (5.9) определяется как

$$X(k+1) = X(k) - F[X(k)]/M. \quad (5.10)$$

На практике же матрица Якоби не обращается. Обозначив

$$dX(k) = X(k+1) - X(k),$$

перепишем (5.9)

$$M dX(k) = - F[X(k)]. \quad (5.11)$$

Решение находим методом Гаусса (или др. методом решения систем линейных уравнений), и значение $X(k+1)$ определяем из выражения

$$X(k+1) = X(k) + dX(k). \quad (5.12)$$

Формулы (5.11), (5.12) и представляют метод Ньютона - Рафсона для систем уравнений.

Программная реализация метода Ньютона - Рафсона возможна по следующей схеме [13].

1. Задаем относительную погрешность - E , число уравнений - N , максимальное число итераций - M и вектор начальных приближений - X (с компонентами x_i , где i принимает значения от 1 до N).

2. Формируем матрицу Якоби - M . Поскольку аналитическое дифференцирование $F(X)$ нежелательно, частные производные $\partial f/\partial x$ заменяем их приближенными конечно - разностными значениями

$$a_{ji} = \partial f_j/\partial x_i = [f_j(x_i+h_i) - f_j(x_i)]/h_i,$$

где i и j принимают значения от 1 до N ; $h_i = E|x_i|$ - малое приращение x_i .

3. Составляем и решаем методом Гаусса систему линейных уравнений для малых приращений dx_i .

4. Вычисляем уточненное значение x_i .

5. Для всех i проверяем условие $|dx_i/x_i| > E$. Если оно выполняется, идем к пункту 2, т. е. выполняем новую итерацию. Иначе считаем вектор X найденным решением.

5.4 Модификации метода Ньютона – Рафсона

Главный недостаток метода Ньютона – Рафсона заключается в том, что сходимость к точному решению имеется не всегда, причем заранее предсказать наличие или отсутствие сходимости не удастся, т. к. условия сходимости метода выражаются довольно сложно и для их использования требуется чрезмерно большой объем вычислений. Стремление повысить надежность метода Ньютона – Рафсона привело к появлению ряда его модификаций. Повышение надежности достигается за счет роста объема вычислений по сравнению с основным методом [8, 9].

Одной из основных модификаций метода Ньютона – Рафсона является метод изменения параметров (движущейся области сходимости), имеющий простую физическую интерпретацию. Пусть решаемая система уравнений отражает состояние физической системы при наличии определенных внешних воздействий. В большинстве случаев выполняется условие $X = 0$, если все внешние воздействия также нулевые, причем с ростом внешних воздействий, как правило, наблюдается рост и большинства компонент вектора X . Поэтому вероятность сходимости будет тем выше, чем меньше уровень внешних воздействий. Это обстоятельство и используется в алгоритме, в котором внешнее воздействие увеличивается сравнительно небольшими скачками, после каждого скачка выполняются ньютоновские итерации и получается некоторое промежуточное решение X , принимаемое за исходную точку для итераций при следующем уровне внешних воздействий. Здесь решение системы уравнений производится столько раз, сколько было скачков при изменении внешних воздействий от нулевого уровня до уровня, заданного по условиям задачи.

6 МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

6.1 Комплексная частотная характеристика

Комплексная частотная характеристика определяется как отношение

$$F(jW) = U_{\text{ВЫХ}}(jW) / U_{\text{ВХ}}(jW), \quad (6.1)$$

где $U_{\text{ВХ}}$, $U_{\text{ВЫХ}}$ – входное и выходное напряжения; j – мнимая единица; W – угловая частота.

Для схемы, содержащей 10 – 20 компонентов, комплексную частотную характеристику можно описать аналитически. В моделировании больших схем широко используется численный подход, когда $F(jW)$ вычисляется по точкам (дискретно-частотный метод) [6].

В качестве входного сигнала используется источник напряжения $E_{\text{ВХ}}$ с единичной комплексной амплитудой, нулевой начальной фазой и малым внутренним сопротивлением. При указанном входном сигнале будет верно соотношение

$$F(jW) = U_{\text{ВЫХ}}(jW) / E_{\text{ВХ}}(jW) = U_{\text{ВЫХ}}(jW). \quad (6.2)$$

По известному на некоторой частоте W_i комплексному значению выходного напряжения $U_{\text{ВЫХ}}(jW_i) = A(W_i) + jB(W_i)$ можно вычислить точку амплитудно-частотной – $K(W_i)$ и фазово-частотной – $\Phi(W_i)$ характеристик электронной схемы:

$$K(W_i) = [A^2(W_i) + B^2(W_i)]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.3, а)$$

$$\Phi(W_i) = \text{arctg}[B(W_i) / A(W_i)]. \quad (6.3, б)$$

6.2 Формирование модели

На начальном этапе моделирования электронной схемы в частотной области формируется эквивалентная схема для малого переменного сигнала. При этом на принципиальной схеме постоянные источники напряжения замыкаются накоротко, а постоянные источники тока размыкаются.

Единичный источник переменного напряжения на входе схемы преобразуется в единичный источник тока $I_{вх}$ (см. раздел 4.2).

Базис метода узловых потенциалов составляют потенциалы всех узлов эквивалентной схемы, кроме опорного узла, потенциал которого принят равным нулю. Основан метод узловых потенциалов на первом законе Кирхгофа, который утверждает, что для любого узла схемы алгебраическая сумма токов, вытекающих через пассивные компоненты и втекающих через независимые источники тока, равна нулю.

Для конкретной частоты W входного сигнала узловые уравнения могут быть записаны в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$Y(jW) V(jW) = I(jW), \quad (6.4)$$

где $Y(jW)$ – матрица узловых проводимостей; $V(jW)$ – искомый вектор узловых потенциалов; $I(jW)$ – вектор узловых токов.

Первый закон Кирхгофа непосредственно показывает, как формируется вектор узловых токов при составлении уравнений: произвольный элемент вектора I_j равен сумме токов независимых источников, втекающих в j -ый узел. Для модели схемы в частотной области составляющая вектора I , соответствующая входной ветви, будет равна $I_{вх}$, а остальные – нулю.

Компонентные уравнения пассивных элементов эквивалентной схемы на частоте W имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_R &= V/R, \\ I_C &= jWCV, \\ I_L &= -jV/WL, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где I_R , I_C , I_L – переменные токи через резистор, конденсатор и катушку индуктивности; V – напряжение на элементе; R , C , L – номиналы элементов.

Соответственно проводимости ветвей равны

$$\begin{aligned} y_R &= 1/R, \\ y_C &= jWC, \\ y_L &= -j/WL. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Рассмотрим алгоритм формирования матрицы узловых проводимостей Y [15]. В этом алгоритме последовательно просматриваются все ветви эквивалентной схемы. Пусть очередной ветвью является ветвь с номером k , включенная между узлами с номерами i и j . Проводимость этой ветви $y_k = dI_k/dV_k$, где I_k и V_k соответственно ток и напряжение ветви. Т. к. $V_k = V_i - V_j$, где V_i и V_j – потенциалы узлов i и j , то $dI_k/dV_i = y_k$, и $dI_k/dV_j = -y_k$. Поэтому проводимость y_k аддитивно (как слагаемое) включается в диагональные элементы y_{ii} , y_{jj} матрицы узловых проводимостей со знаком плюс и в недиагональные элементы y_{ij} и y_{ji} со знаком минус.

Заметим, что если один из узлов ветви – опорный, то проводимость этой ветви учитывается лишь в одном элементе матрицы Y – в собственной проводимости y_{ii} , где i – номер незаземленного узла ветви.

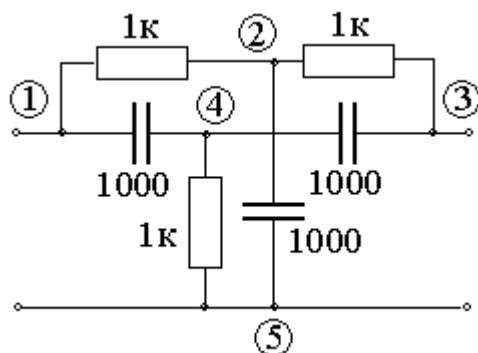


Рисунок 6.1 - Принципиальная электрическая схема двойного Т – образного моста

Для схемы рис. 6.1 матрицу узловых проводимостей при частоте 10^6 рад/с можно представить в виде [4]

$$\begin{vmatrix} 0.001 + j0.001 & -0.001 & 0 & -j0.001 & 0 \\ -0.001 & 0.002 + j0.002 & -0.001 & 0 & -j0.002 \\ 0 & -0.001 & 0.002 + j0.001 & -j0.001 & -0.001 \\ -j0.001 & 0 & -j0.001 & 0.002 + j0.002 & -0.002 \\ 0 & -j0.002 & -0.001 & -0.002 & 0.003 + j0.002 \end{vmatrix}.$$

Такая матрица является вырожденной и называется неопределенной (ее определитель равен нулю). Определенная матрица может быть просто получена из неопределенной путем исключения из нее строки и столбца, соответствующих опорному узлу.

Приведенный пример иллюстрирует свойство симметричности матрицы узловых проводимостей для пассивной схемы, оно может быть использовано как при записи, так и при организации ее хранения в ЭВМ.

Многие нелинейные элементы РЭС моделируются с помощью управляемых напряжением источников тока. При малом сигнале такие элементы могут быть линеаризованы в окрестности рабочей точки и описаны линейной моделью.

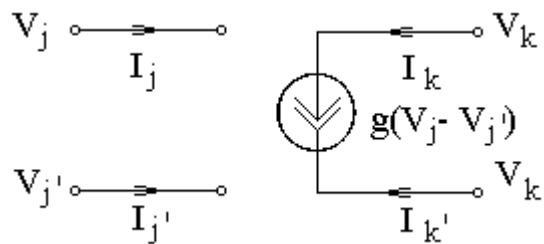


Рисунок 6.2 - Управляемый напряжением источник

Управляемый напряжением источник тока можно легко включить в уравнения, записанные по методу узловых потенциалов [6]. Обозначим (см. рис. 6.2) его входные клеммы j, j' , а выходные – k, k' . Токи и напряжения элемента связаны соотношениями:

$$I_j = 0;$$

$$I_{j'} = 0;$$

$$I_k = g(V_j - V_{j'});$$

$$I_{k'} = -g(V_j - V_{j'}).$$

Проведя необходимые преобразования, получим матрицу узловых проводимостей для управляемого напряжением источника тока

$$\begin{array}{c|cccc} & j & j' & k & k' \\ j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & g & -g & 0 & 0 \\ k' & -g & g & 0 & 0 \end{array}.$$

Рассмотрим пример. Для модели полевого транзистора, приведенной на рис. 4.11, б, матрица узловых проводимостей имеет вид:

$$\begin{array}{c|ccc} & З & С & И \\ З & y_{ЗС} + y_{ЗИ} & -y_{ЗС} & -y_{ЗИ} \\ С & -y_{ЗС} + g & y_{ЗС} + y_{СИ} & -y_{СИ} - g \\ И & -y_{ЗИ} - g & -y_{СИ} & y_{ЗИ} + y_{СИ} + g \end{array},$$

где $y_{ЗС} = j\omega C_{ЗС}$; $y_{ЗИ} = j\omega C_{ЗИ}$; $y_{СИ} = j\omega C_{СИ} + 1/R_{СИ}$.

Решение уравнения (6.4) можно выполнить, используя стандартную программу либо обращения комплексной матрицы, либо решения системы линейных уравнений с комплексными коэффициентами (см. раздел 6.3). Подставляя в формулу (6.4) разные значения частоты ω_i и вычисляя вектор $V(j\omega_i)$ на каждой частоте, получим комплексную частотную характеристику моделируемого устройства.

6.3 Методы решения систем линейных уравнений

Для решения систем линейных алгебраических уравнений на ЭВМ используют прямые и итерационные методы. Прямые методы являются универсальными, их применяют в основном для систем сравнительно невысокой размерности ($n \leq 200$). Итерационные методы более удобны для решения систем высокой размерности с разреженными матрицами (см. раздел 6.4).

Пусть система линейных алгебраических уравнений представлена в виде

$$AX = B, \tag{6.7}$$

где A – матрица коэффициентов уравнений a_{ij} размерностью (n,n) ; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор искомых неизвестных; $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор правых частей.

Для решения системы (6.7) итерационными методами ее преобразуют к виду [7]

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11} + x_1, \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots - a_{2n}x_n) / a_{22} + x_2, \\ &\dots \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn}x_n) / a_{nn} + x_1. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Вектор правых частей B можно представить как $(n+1)$ -ый столбец матрицы A .

Задав вектор-столбец начальных приближений $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$, итерационный процесс можно организовать следующим образом (здесь $m+1$ – порядковый номер итерации):

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= f_1[x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)], \\ x_2(m+1) &= f_2[x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)], \\ &\dots \\ x_n(m+1) &= f_n[x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)], \end{aligned} \quad (6.9)$$

Процесс (6.9) соответствует методу простых итераций для системы уравнений. Его можно изменить, если использовать приближения к решениям, найденные при выполнении текущей итерации:

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= f_1[x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)], \\ x_2(m+1) &= f_2[x_1(m+1), x_2(m), \dots, x_n(m)], \\ &\dots \\ x_n(m+1) &= f_n[x_1(m+1), x_2(m+1), \dots, x_n(m)], \end{aligned} \quad (6.10)$$

Такое изменение носит название метода Зейделя и приводит, как правило, к ускорению сходимости. Заканчивается итерационный процесс, когда выполняется условие

$$|x_k(m+1) - x_k(m)| < \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где δ – заданная погрешность.

Для сходимости итерационных методов необходимо, чтобы значения диагональных элементов матрицы A были преобладающими по абсолютной величине по сравнению с др. элементами. Выполнение этого условия можно обеспечить путем перестановки в исходной матрице уравнений и неизвестных. Методы простых итераций и Зейделя имеют разные области сходимости. Их можно применять и к решению систем нелинейных уравнений (ср. раздел 5.3).

К прямым методам решения систем линейных алгебраических уравнений относятся классический метод Гаусса и его модификации.

Алгоритм метода Гаусса включает прямой и обратный ход [5]. Прямой ход заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы (6.7). Сначала первое уравнение представляется в явном относительно x_1 виде:

$$x_1 = - (a_{12}/a_{11}) x_2 - \dots - (a_{1n}/a_{11}) x_n + b_1/a_{11}. \quad (6.11)$$

Затем x_1 подставляется во все оставшиеся уравнения. Эта подстановка приводит к исключению из уравнений со второго по n -е переменной x_1 и к изменению коэффициентов a_{ij} в этих уравнениях в соответствии с выражением

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{i1} a_{1j}/a_{11}. \quad (6.12)$$

Далее второе уравнение представляется в явном относительно x_2 виде, после чего x_2 исключается из уравнений с третьего по n -е, и т.д. Другими словами, исключение x_k сводится к пересчету коэффициентов по формуле

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}/a_{kk} \quad (6.13)$$

для $i = (k+1), (k+2), \dots, n$. При этом столбец правых частей B удобно рассматривать как $(n+1)$ -й столбец матрицы A , т. е. пересчет по (6.13) производится для $j = (k+1), (k+2), \dots, (n+1)$. Процедура исключения выполняется для всех x_i , кроме последнего x_n . В результате прямого хода преобразованная матрица A принимает треугольный вид.

Обратный ход заключается в вычислении вектора искомых неизвестных X . Он начинается с последнего уравнения. В нем после прямого хода осталась

единственная переменная x_n , которая вычисляется делением b_n на a_{nn} (величины b_n , a_{nn} , как и большинство других коэффициентов уравнений, изменили свои значения по сравнению с исходными при прямом ходе). Далее из $(n - 1)$ -го определяется x_{n-1} и т. д. Другими словами, обратный ход выполняется по формуле

$$x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j) / a_{kk}. \quad (6.14)$$

Как следует из (6.13), все элементы на диагонали a_{kk} должны быть отличны от нуля, иначе численный процесс остановится из-за деления на нуль. Если какой-либо диагональный элемент a_{kk} будет иметь очень маленькое значение, то при вычислении по (6.13) возникнут большие ошибки округления, распространяемые на весь дальнейший процесс исключения. В методе Гаусса эта проблема может быть решена выбором в качестве a_{kk} на каждой стадии исключений максимального по модулю из оставшихся коэффициентов с соответствующей перестановкой строк и столбцов матрицы A (способ выбора главного элемента).

Более эффективным методом решения систем линейных алгебраических уравнений считается метод LU-разложения, в котором матрица A представляется произведением нижней и верхней треугольных матриц L и U :

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Алгоритм разложения на треугольные матрицы (по Крауту), основывается на выражениях [9]:

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}, \quad (6.16, a)$$

при $i \geq k$;

$$u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}) / l_{kk}, \quad (6.16, б)$$

при $j \geq k$.

Выражения (6.16) применяются поочередно при $k = 1, 2, \dots, n$.

После того как проведено разложение матрицы A на треугольные матрицы L и U вычисляют вектор $Z = UX$ из системы уравнений

$$LZ = B, \quad (6.17)$$

а затем – вектор X из уравнений

$$UX = Z. \quad (6.18)$$

Решение системы (6.17) называют прямой, а (6.18) – обратной подстановкой. Прямая и обратная подстановки в методе LU-разложения аналогичны прямому и обратному ходу метода Гаусса, но осуществляются предельно просто ввиду треугольной формы матриц L и U .

Основные особенности метода LU-разложения состоят в следующем:

1. Легко вычисляется определитель матрицы A , - как произведение диагональных элементов матрицы L :

$$\det A = \prod_{i=1}^n l_{ii}.$$

2. Матрицы L и U могут быть записаны на месте матрицы A (в те же ячейки памяти), поскольку запоминать единичные элементы на главной диагонали матрицы U необходимости нет.

3. Для решения системы уравнений с др. вектором правых частей B не нужно повторять разложение матрицы A на треугольные, - достаточно провести прямую и обратные подстановки.

4. Для уравнения с транспонированной матрицей решение находится при том же LU-разложении (анализ таких систем уравнений необходим при расчете чувствительностей [9]).

При решении системы n уравнений методом LU-разложения число арифметических операций для m правых частей B равно

$$n^3/3 + m n^2 - n/3,$$

тогда как при использовании метода Гаусса необходимо

$$m(n^3/3 + n^2 - n/3)$$

арифметических операций.

Существуют и др. модификации метода Гаусса. Например, для решения систем с диагональными матрицами A применяют так называемые методы прогонки и матричной прогонки [15].

6.4 Повышение эффективности алгоритмов анализа

Для больших сложных электронных схем даже однократный анализ в частотной области требует значительных затрат машинного времени и памяти ввиду того, что размерность n решаемой системы уравнений весьма велика. Один из путей повышения эффективности алгоритмов анализа – учет разреженности матриц, т. е. наличия в них большого количества нулевых элементов. Такой учет возможен по нескольким направлениям [15]:

- 1) хранение только ненулевых элементов матриц, что экономит память ЭВМ и позволяет увеличить мощность программ;
- 2) проведение операций только с ненулевыми элементами, что сокращает время вычислений;
- 3) изменение нумерации элементов схемы для получения матриц с максимальным числом нулевых элементов.

Другая возможность повышения эффективности алгоритмов анализа в частотной области связана с понижением размерности системы уравнений. Дело в том, что для расчета КЧХ электронной схемы достаточно знать потенциалы нулевого, выходного и входного узлов в зависимости от частоты, а внутренние узлы можно исключить. При таком подходе моделируемая схема фактически замещается эквивалентным четырехполюсником.

Исключение произвольного внутреннего узла k достигается удалением k -ой строки и k -ого столбца матрицы узловых проводимостей Y с пересчетом остальных элементов матрицы по формуле Гаусса

$$Y_{ij}' = Y_{ij} - Y_{ik} Y_{kj} / Y_{kk}, \quad (6.12)$$

где y_{ij}' – новое значение элемента матрицы Y . Элементы вектора узловых токов подлежат пересчету в том случае, если к исключаемому k -ому узлу подключен независимый источник, но при моделировании в частотной области независимый источник может присутствовать только на входе схемы. В результате исключения k -го узла размер матрицы узловых проводимостей и вектора узловых токов уменьшается на единицу. Процесс исключения продолжается до получения матрицы узловых проводимостей размером 2 на 2 элемента:

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}.$$

Это уравнение представляет собой уравнение четырехполюсника в у-параметрах. Входными узлами четырехполюсника являются первый и нулевой узлы, а выходными – второй и нулевой.

С ростом числа исключаемых узлов растут ошибки округления, что особенно заметно для диагональных элементов матрицы Y' , т. е. для собственных проводимостей y_{ii}' ; в этом случае формула пересчета содержит разность двух больших сравнимых чисел. Поэтому процесс редукции по Гауссу целесообразно проводить на неопределенной матрице узловых проводимостей. Она обладает тем свойством, что сумма элементов любого ее столбца или строки равна нулю. Для строки i неопределенной матрицы Y

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = 0$$

и, следовательно, диагональный элемент y_{ii} можно рассчитать путем суммирования всех оставшихся элементов строки. С учетом этого уравнение для пересчета элементов неопределенной матрицы Y по Гауссу можно представить в виде

$$y_{kk} = - \sum_{j=1, j \neq k}^{n'} y_{kj},$$

где n' – определяет размерность матрицы на любом этапе ее понижения.

Уравнение применяют для всех узлов схемы, кроме входного, выходного и нулевого, что приводит к получению неопределенной матрицы Y размером 3 на 3 элемента. Удалив строку и столбец для нулевого узла, получим матрицу u -параметров эквивалентного четырехполюсника.

Столь значительное понижение размерности системы уравнений весьма существенно экономит машинные ресурсы при многовариантном анализе в частотной области.

7 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Переходной процесс – установление равновесия в объекте после возмущающего воздействия. Математические модели переходных процессов в электронных схемах и др. объектах на макроуровне представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$V' = F(V, t), \quad (7.1)$$

где t – время; V – вектор базисных координат; F – вектор-функция; V' – вектор производных V по времени.

7.1 Методы численного интегрирования

Для решения систем ОДУ на ЭВМ применяются явные и неявные методы численного интегрирования. Решение системы (7.1) при известных начальных условиях $V(0) = V_0$ заключается в последовательном вычислении значений вектора базисных координат $V(k)$ на конечном множестве k точек временной оси

$$t_k = \sum_{i=1}^k h_i,$$

где $h_i = t_i - t_{i-1}$ – величина i -го шага интегрирования. Результаты решения – зависимость $V(k)$ в табличной форме.

Различия между методами численного интегрирования заключается в способах предсказания $V(k)$ по известному значению $V(k-1)$, а в общем случае и по др. уже известным значениям V . Большинство этих способов основано на аппроксимации производных конечно – разностными (алгебраическими) выражениями. Вид аппроксимирующего выражения существенно влияет на точность, устойчивость и скорость вычислений.

Представление об явных методах численного интегрирования ОДУ можно получить, если воспользоваться разложением элементов вектора $V(t)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки $t(k)$ [16]:

$$V_j(k+1) = V_j(k) + V_j'(k) \cdot h + V_j''(k) \cdot h^2 / 2! + \dots$$

Ограничим разложение членами до p -й производной включительно и, считая $h = \text{const}$, заменим оставшиеся производные отношениями конечных разностей. С учетом (7.1) находим:

$$V(k+1) = V(k) + h \cdot \sum_{i=1}^p A_i \cdot F[V(k+1-i)]. \quad (7.2)$$

Величину p называют порядком метода интегрирования. Коэффициенты A_i зависят от способа аппроксимации элементов вектора $V(t)$ (применение разложения в ряд Тейлора не является единственно возможным способом).

Формула (7.2) характеризует большую группу явных разностных методов численного интегрирования. Ее характерная особенность – искомое на k -м шаге значение $V(k)$ явно выражено через значения переменных, определенных на предыдущих шагах.

Простейший из явных методов – метод Эйлера ($p = 1$), его формула

$$V(k+1) = V(k) + h F[V(k)] \quad (7.3)$$

получается непосредственно из разложения $V(t)$ в ряд Тейлора при пренебрежении членами со второй и более высокими степенями h .

Из методов с $p > 1$ наиболее известны методы Адамса ($p = 5$) [15] и Рунге – Кутта. Вариант метода Рунге - Кутта с $p = 4$ характеризуется вычислениями по следующим формулам [7]:

$$V(k+i) = V(k) + h (F_1 + 2 F_2 + 2 F_3 + F_4)/6,$$

где $F_1 = F[V(k), t_k]$; $F_2 = F[V(k) + F_1/2, t_k + h/2]$; $F_3 = F[V(k) + F_2/2, t_k + h/2]$; $F_4 = F[V(k) + F_3, t_k + h]$.

Явные формулы численного интегрирования удобно применять в тех случаях, когда модель схемы удается представить в нормальной форме Коши (7.1) с известными начальными условиями V_0 .

Обобщение группы неявных разностных формул интегрирования, полученное аналогично (7.2), имеет вид [16]

$$V(k+1) = V(k) + h \sum_{i=1}^p B_i F[V(k+2-i)]. \quad (7.4)$$

В этой формуле, в отличие от (7.2), вектор базисных координат для новой точки $V(k+1)$ не выражен явно через уже известные величины. Действительно, при $i = 1$ в правой части (7.4) фигурирует $V(k+1)$. Следовательно, (7.4) должна рассматриваться как запись системы нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений с неизвестным вектором $V(k+1)$.

В методе первого порядка – неявном методе Эйлера – (7.4) имеет вид

$$V(k+1) = V(k) + h F[V(k+1), t(k+1)]. \quad (7.5)$$

Неявная формула второго порядка - формула Шихмана - получается из (7.4) при $B_1=2/3$ и $B_2=1/3$:

$$V(k+1) = -1/3 V(k-1) + 4/3 V(k) + 2/3 h F[V(k+1), t(k+1)].$$

Важным свойством неявных методов является удобство их применения к решению систем алгебро - дифференциальных уравнений вида

$$Q(V', V, t) = 0. \quad (7.6)$$

Эта возможность реализуется путем подстановки в (7.6) вместо вектора производных V' выражения, вытекающего из формулы численного интегрирования (7.4). В самом деле, (7.4) можно записать в явном виде относительно $F[V(k+1)]$:

$$F[V(k+1)] = V'(k+1) = 1/B_1 \{ [V(k+1) - V(k)]/h - \sum_{i=2}^p B_i F[V(k+2-i)] \}. \quad (7.7)$$

В правой части (7.7) неизвестен только вектор $V(k+1)$, все остальные величины определены при выполнении предыдущих шагов. Поэтому после подстановки $V'(k+1)$ в (7.6) получаем систему алгебраических и трансцендентных уравнений

$$Q[V'(k+1), V(k+1), t_{k+1}] = 0, \quad (7.8)$$

подлежащую решению на каждом шаге интегрирования.

Чаще всего решение систем алгебраических и трансцендентных уравнений в процессе неявного интегрирования выполняется методом Ньютона (см. раздел 5).

7.2 Точность и устойчивость методов

Полная ошибка интегрирования ОДУ на k -м шаге зависит от следующих составляющих [16]:

- 1) ошибки аппроксимации $E_A(k)$, связанной с заменой производных конечно - разностными выражениями;
- 2) ошибки вычислений $E_B(k)$, обусловленной погрешностями выполнения арифметических действий;
- 3) ошибки накопления $E_H(k)$, равной полной ошибке на предыдущем шаге.

Метод численного интегрирования называется устойчивым, если накопленная погрешность $E_H(k)$ остается ограниченной при k стремящемся к бесконечности.

Устойчивость методов обычно исследуют на модельной задаче:

$$V' = A V, \quad (7.9)$$

где A - постоянная действительная матрица (n, n) ; шаг интегрирования h полагается постоянным.

Если метод неустойчив для системы (7.9), то он, как правило, будет неустойчив и для нелинейной системы (7.1). В последнем случае матрице A будет соответствовать матрица Якоби в точке t_k , т. к. в пределах шага интегрирования $h(k)$ матрицу Якоби можно считать квазипостоянной.

Устойчивость метода численного интегрирования зависит не только от h , но и от собственных значений матрицы A (или матрицы Якоби).

Собственными значениями матрицы A называют корни характеристического уравнения

$$\det(A - L \cdot B) = 0,$$

где B - единичная матрица, \det - определитель. Спектр собственных значений - L_i , $i = 1, 2, \dots, n$. В общем случае L_i – комплексные величины, т. е. $L_i = \text{Re}(L_i) + j \text{Im}(L_i)$, где j - мнимая единица. Отношение $g = \max|L_i|/\min|L_i|$ называют числом обусловленности матрицы A .

Аналитическое решение системы (7.9) можно представить в виде суммы отдельных фундаментальных решений, т. е.

$$V(t) = \sum_{i=1}^N C_i \cdot X_i \cdot \exp(L_i \cdot t), \quad (7.10)$$

где C_i – постоянные; X_i - собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению L_i .

Каждое фундаментальное решение характеризует отклик системы на внешнее воздействие. Если $\text{Re}(L_i) < 0$ для всех i , то все фундаментальные решения будут иметь затухающий характер, а система ОДУ будет устойчивой. Если хотя бы одно $\text{Re}(L_i) > 0$ для некоторого i , то i -я компонента для каждой переменной в (7.10) неограниченно возрастает, а система ОДУ будет неустойчивой. Если $\text{Im}(L_i) = 0$ для всех i , то переходные процессы носят апериодический характер. Если $\text{Im}(L_i)$ отлична от нуля для некоторых i , то каждая переменная $v_i(t)$ в (7.10) содержит осциллирующую синусоидальную компоненту

$$C_i \sin (\text{Im}(L_i) t + \varphi_i) \exp(\text{Re}(L_i) t),$$

где C_i, φ_i - постоянные.

Таким образом, собственные значения матрицы A (или матрицы Якоби) характеризуют переходные процессы в моделируемом объекте: устойчивость, наличие осцилляций и т. п. В то же время они определяют и математические свойства самой модели. В частности, система ОДУ будет плохо обусловленной (или жесткой), если число обусловленности $g \gg 1$.

Для большинства задач анализа наиболее важен случай, когда $\text{Re}(L_i) < 0$ для всех i , т. е. все фундаментальные решения затухают при увеличении t со

скоростью, пропорциональной $T_i = -1/\text{Re}(L_i)$, называемой постоянной времени системы.

Явный метод Эйлера устойчив при $h < 2 \min|T_i|$, а неявный – при любых значениях шага h .

7.3 Выбор шага интегрирования

Шаг численного интегрирования ОДУ должен быть переменным и выбираться в процессе анализа автоматически [1]. Автоматический выбор шага производится с целью интегрирования с величинами шагов, максимально возможными при условии сохранения требуемой точности. При применении неустойчивых методов автоматический выбор шага должен гарантировать также выполнение условий устойчивости.

Как правило, автоматический выбор шага основан на сопоставлении заданной $E_{\text{зад}}$ и получающейся E погрешностей. Способы оценки общей погрешности интегрирования, накопленной за все предыдущие шаги, отсутствуют: имеется возможность контролировать лишь локальную погрешность, т. е. погрешность E , допущенную на одном шаге. В связи с этим возникают определенные трудности в назначении величин $E_{\text{зад}}$, т. к. эти величины непосредственно не характеризуют погрешность численного интегрирования. Однако, приобретя некоторый опыт применения программ анализа переходных процессов, инженер может для класса интересующих его задач установить соответствие между $E_{\text{зад}}$ и получающейся погрешностью численного решения.

При разработке алгоритмов автоматического выбора шага приходится выбирать способ оценки E и способ изменения шага по результатам сравнения E с $E_{\text{зад}}$. Для оценки E наиболее часто используют приближенное вычисление погрешностей усечения или сопоставление результатов прогноза и коррекции. Одним из наиболее популярных способов выбора величины шага h является способ трех зон, в котором в качестве исходных данных задаются два критических значения допустимых погрешностей: $E_{\text{зад}1}$ –

граница между зонами недопустимо большой погрешности и оптимальной, в которой при приемлемой погрешности обеспечиваются большие величины шагов; $E_{\text{зад}2}$ – граница между оптимальной зоной и зоной, где малая погрешность достигается за счет неоправданно малых шагов. Алгоритм трех зон можно выразить следующим образом:

$$h_{k+1} = \begin{cases} m_1 h_k, & \text{если } E > E_{\text{зад}1}, \\ h_k, & \text{если } E_{\text{зад}1} > E > E_{\text{зад}2}, \\ m_2 h_k, & \text{если } E < E_{\text{зад}2}, \end{cases} \quad (7.11)$$

где $m_1 < 1$, $m_2 > 1$.

Константы $E_{\text{зад}1}$, $E_{\text{зад}2}$, m_1 , m_2 обычно выбираются на основе накопленного опыта; часто $E_{\text{зад}1}/E_{\text{зад}2} = 8$; $m_1 = 0,5$; $m_2 = 2$.

Обычно в алгоритмах автоматического выбора шага результаты очередного шага не учитываются, если $E > E_{\text{зад}1}$. Новый шаг величиной $h_k m_1$ осуществляется из той же точки, что и предыдущий неудачный шаг, что приводит к потерям машинного времени. Поэтому представляют интерес алгоритмы плавного изменения шага без отбрасывания результатов завышенных шагов. Такие алгоритмы основаны на применении формулы

$$h_{k+1} = h_k (E_{\text{зад}1}/E)^{p+1}, \quad (7.12)$$

где p – порядок метода.

Рассмотренные способы выбора шага h по вычисленной погрешности E наиболее удобны при применении устойчивых неявных методов численного интегрирования. Менее удачно использование этих способов в явных методах, в которых шаг целесообразно выбирать из условия сохранения устойчивости.

Устойчивость вычислений в явных методах достигается, если вместо постоянного шага по оси времени h обеспечить постоянный шаг K_1 изменения нормы вектора базисных координат. При этом h выбирается по формуле

$$h_k = K_1 / [K_2 + E], \quad (7.13)$$

где E – m -норма вектора производных базисных координат (правых частей системы ОДУ в форме Коши), вычисленная в точке V_k ; K_2 выбирают из

условия ограничения шага h_k сверху величиной h_{\max} : $K_2 = K_1 / h_{\max}$. В этом случае наиболее быстро изменяющаяся базисная координата не может в течение шага измениться более, чем на величину K_1 .

7.4 Комбинированные алгоритмы

Для реализации математических моделей с жесткими системами уравнений высокой размерности прибегают к комбинированию различных методов интегрирования в ходе решения конкретной системы ОДУ [1].

В ряде программ анализа используют комбинирование неявных формул разного порядка точности. На очередном шаге интегрирования выбирается формула такого порядка p (в пределах от 1 до 6), при котором обеспечивается максимальная величина шага при условии сохранения погрешности в допустимых пределах. Выбор p производится автоматически на основе погрешностей усечения ряда Тейлора для формул разных порядков.

Другой вариант комбинирования - совместное применение явных и неявных формул. Обозначим h_n и h_y автоматически рассчитываемые величины шагов неявного и явного методов интегрирования соответственно, q - отношение трудоемкости выполнения одного шага неявным и явным методом. Обычно $q \gg 1$, и при резком изменении фазовых переменных со временем часто выполняется условие $h_n < h_y q$, что указывает на предпочтительное применение явных формул. При этом выигрыш достигается, если модель представлена в нормальной форме Коши. Это порождает проблему топологических вырождений в эквивалентных схемах моделируемых объектов (см. следующий раздел).

Представление модели в нормальной форме Коши не требуется при использовании алгоритма численного интегрирования с двухшаговыми сериями. В этом алгоритме первый шаг каждой серии выполняется по неявной, а второй по явной формуле.

Предположим, что используются методы первого порядка точности, а система ОДУ представлена в неявной форме (7.6). Обозначим V_0, V_1, V_2

векторы базисных координат к началу серии, после первого и после второго шагов соответственно. На первом шаге серии решается система уравнений

$$Q[(V_1 - V_0)/h_H, V_1, t_1] = 0,$$

в результате вычисляется вектор V_1 . На втором шаге используется явная формула

$$V_2 = V_1 + h_{я} V'(t_1) = V_1 + h_{я} (V_1 - V_0) h_H.$$

Далее осуществляется новая двухшаговая серия.

Особенность представленного алгоритма в исключительной простоте явного шага, т. к. необходимые для этого шага данные уже вычислены на предыдущем неявном шаге. Вычислительный процесс, порождаемый данным алгоритмом, устойчив при $h_H \leq h_{я}$. Следовательно, величины шагов $h_{я}$ можно выбирать столь же большими, как и при неявном методе Эйлера. Поэтому в сравнении с ним общее количество неявных шагов окажется приблизительно в два раза меньше, соответственно в два раза сократятся затраты машинного времени.

7.5 Метод переменных состояния

Исходная математическая модель схемы для анализа переходных процессов может быть представлена в явной (7.1) или неявной (7.6) форме.

Методика формирования модели в явной форме (нормальной форме Коши) включает два этапа [1]:

1) на основе законов Кирхгофа емкостные токи I_C и индуктивные напряжения U_L выражаются через токи и напряжения остальных ветвей;

2) I_C и U_L заменяются производными в соответствии с компонентными уравнениями, а остальные переменные выражаются через I_C и U_L .

Представление модели в явной форме накладывает ограничение на выбор независимых фазовых переменных. Ими могут быть только переменные состояния – переменные, характеризующие запасы энергии в элементах системы – емкостные напряжения (или заряды конденсаторов) и

индуктивные токи (или потокосцепления катушек индуктивности). В частных случаях для получения нормальной системы ОДУ можно использовать и др. переменные; так, если в схеме отсутствуют индуктивности, можно использовать узловые потенциалы.

Рассмотренный способ формирования модели переходного процесса называется метод переменных состояния.

Проиллюстрируем метод переменных состояния простым примером формирования модели для схемы рис. 7.1. Система топологических уравнений имеет вид

$$I_1 = J(t) - I_2 - I_3,$$

$$I_2 R_2 = (U_1 - U_2),$$

$$I_3 = U_1/R_1.$$

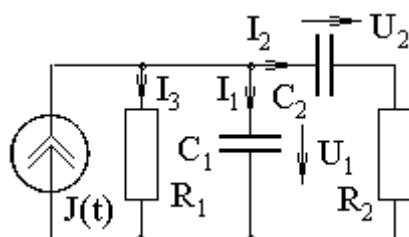


Рисунок 7.1 – Электрическая цепь:

$$R_1 = 2/3 \text{ МОм}; R_2 = 1 \text{ МОм}; C_1 = 3 \text{ мкФ}; C_2 = 3 \text{ мкФ};$$

$$J(t) = 0, \text{ при } t < 0, J(t) = 6 \text{ мкА, при } t \geq 0$$

Используя компонентные уравнения $I_1 = C_1 dU_1/dt$, $I_2 = C_2 dU_2/dt$, получаем нормальную систему ОДУ:

$$dU_1/dt = [J(t) - (U_1 - U_2)/R_2 - U_1/R_1]/C_1,$$

$$dU_2/dt = (U_1 - U_2)/(R_2 C_2).$$

С учетом номиналов элементов схемы рис. 7.1

$$U_1' = -5 \cdot U_1/6 + U_2/3 + 2.5,$$

$$U_2' = U_1/3 - U_2/3,$$

(7.14)

при начальных условиях $U_1(0) = U_2(0) = 0$.

Матрица Якоби для системы уравнений (7.14) имеет собственные значения $L_1 = -1$, $L_2 = -1/6$, которым соответствуют постоянные времени $T_1 = 1$ и $T_2 = 6$.

Аналитическое решение системы имеет вид

$$U_1 = -2 \cdot \exp(-t) - 3 \cdot \exp(-t/6) + 5,$$

$$U_2 = \exp(-t) - 6 \cdot \exp(-t/6) + 5.$$

Порядок n нормальной системы ОДУ соответствует количеству в схеме реактивных элементов с независимыми начальными запасами энергии – конденсаторов с зарядами Q_0 и катушек индуктивности с потокосцеплениями Ψ_0 . При наличии в схеме так называемых топологических вырождений – емкостных контуров или индуктивных звезд (см. рис. 7.2) – запасы энергии на одном из конденсаторов, входящих в контур (C_1, C_2, C_3), и на одной из катушек индуктивности, образующих звезду (L_1, L_2, L_3), уже не будут независимыми. Соответственно n уменьшается на количество топологических вырождений n_T , что затрудняет формирование модели.

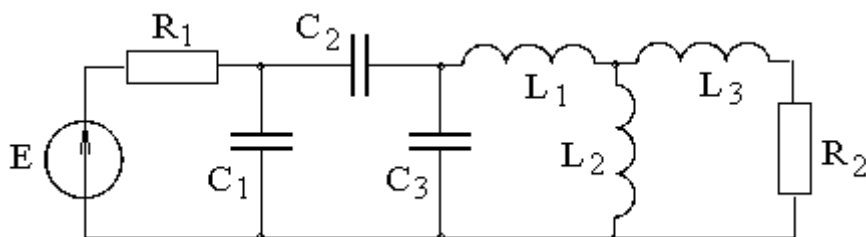


Рисунок 7.2 – Электрическая цепь с топологическими вырождениями

Устранить топологические вырождения можно включением в емкостной контур небольшого сопротивления R или включением параллельно одной из индуктивностей звезды малой проводимости G . Погрешность расчета при малых значениях R и G будет невелика. Однако это может повлечь за собой увеличение числа обусловленности (степени жесткости) системы и, соответственно, времени численного расчета.

Методику составления нормальной системы ОДУ усложняют так же контуры или звезды из нелинейных резистивных элементов, т. к. выражение их токов и напряжений через емкостные напряжения и индуктивные токи потребует решения дополнительных систем конечных уравнений.

Таким образом, в общем случае модель переходного процесса в явной форме состоит из двух подсистем [1]. Первая подсистема (а) – это система ОДУ в нормальной форме Коши. Вторая подсистема (б) – система конечных, в общем случае нелинейных уравнений. Организация вычислений заключается в поочередном решении подсистем а и б. Пусть из расчета статического режима известны начальные значения U_{C0} , I_{L0} переменных состояния и W_0 резистивных переменных. Тогда:

- 1) подставляя U_{C0} , I_{L0} в систему ОДУ и решая ее любым численным методом, определяем значения U_{C1} , I_{L1} ;
- 2) считая U_{C1} , I_{L1} постоянными источниками напряжения и тока, рассчитываем квазистатический режим схемы, т. е. решаем систему конечных уравнений б и определяем вектор $W_1 = W(t_1)$ токов и напряжений нелинейных элементов.

После этого опять выполняем пункт 1).

7.6 Неявные динамические модели

Неявная форма представления динамической модели схемы в общем случае имеет вид [8]

$$Q\left(\frac{dx}{dt}, \int x(t)dt, x(t)\right). \quad (7.15)$$

Модель может содержать также уравнения без производных, без интегралов или только конечные уравнения. Это зависит от типа компонентов, входящих в контуры или инцидентных узлам, для которых составляются уравнения Кирхгофа. В отличие от явной модели, где выделены подсистемы дифференциальных и конечных уравнений, здесь такого разделения нет. Нет ограничений и на выбор независимых переменных: можно использовать не

только переменные состояния, но и узловые потенциалы, контурные токи, токи или напряжения ветвей и т. д.

Далее вместо производных в (7.15) подставляются их конечно – разностные аппроксимации, соответствующие тем или иным формулам численного дифференцирования:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\text{д}}(x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-p}). \quad (7.16)$$

Численное интегрирование обычно выполняется методом скользящего суммирования [7]. Разбивая заданный интервал интегрирования и интервал текущего времени интегрирования на отрезки h , получаем $t = k h$. Полагая на каждом из отрезков h значения $x(t)$ постоянными, что соответствует численному интегрированию методом прямоугольников, получаем при $dt = h$ вместо интеграла его дискретную аппроксимацию в виде суммы

$$\int_a^b x(t) dt = f_{\text{и}}(x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-p}). \quad (7.17)$$

Применяя иные виды аппроксимации выражения $x(t)$ на интервалах dt , можно получить более точные формулы, соответствующие вычислению интеграла методом трапеций, парабол (Симпсона) и др.

В результате из исходной системы (7.15) получается система конечно-разностных алгебраических уравнений

$$F(x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-p}) = 0. \quad (7.18)$$

Замена производных и интегралов конечно-разностными формулами (7.16), (7.17) называется дискретизацией компонентных уравнений емкости и индуктивности, а подстановка этих формул в (7.15) и получение системы (7.18) называется алгебраизацией. Дискретизация и алгебраизация составляют существо построения динамической модели в неявной форме [1].

Система конечно-разностных уравнений (7.18) решается относительно каким-либо численным методом, обычно методом Ньютона-Рафсона

$$F'(x_{k+1}(m), x_k, \dots, x_{k-p}) \Delta x_{k+1}(m) = -F(x_{k+1}(m), x_k, \dots, x_{k-p}). \quad (7.19)$$

где $\Delta x_{k+1}(m) = x_{k+1}(m+1) - x_{k+1}(m)$ - вектор поправок; $F'(\cdot)$ - матрица Якоби; m - индекс ньютоновских итераций.

После вычисления с заданной точностью значений x_{k+1} сдвигаем все рассчитанные значения на один шаг по оси времени и снова решаем (7.19), уже относительно нового значения x_{k+1} . Процесс повторяется до тех пор пока не будет пройден весь заданный интервал времени t .

Способ дискретизации (7.16), (7.17) связан с типом метода решения (7.15) – явным или неявным. Дискретизация производных по формулам дифференцирования «назад», т. е. только через предыдущие значения, а также дискретизация интегралов по формулам численного интегрирования закрытого типа (с включением концов интервала интегрирования) соответствует неявным методам решения ОДУ. Дискретизация производных и интегралов по формулам дифференцирования «вперед» и по формулам численного интегрирования открытого или полуоткрытого типа соответствует явным методам решения. В первом случае нужно решать (7.18) относительно x_{k+1} , например, с помощью (7.19), а во втором можно выразить x_{k+1} явно, в виде формулы, без решения системы (7.18) численными методами.

Вместе с тем, формулы дискретизации (7.16), (7.17) можно и не связывать с конкретным методом решения ОДУ (явным или неявным). Каждый реактивный элемент схемы может быть описан своей формулой дискретизации, и при расчете схемы в целом одновременно будут использоваться разные численные методы расчета переходных процессов, соответствующие этим формулам.

При реализации неявных методов уравнения равновесия схемы составляются для следующего $(k+1)$ -го момента времени. Это требует вычисления резистивных переменных тоже для $(k+1)$ -го момента времени. При реализации явных методов уравнения равновесия схемы составляются для данного k -го момента времени и соответственно для этого же момента

времени должны быть вычислены резистивные переменные. Данное положение является определяющим при организации расчета переходных процессов явным или неявным численным методом решения ОДУ.

В базисе узловых потенциалов формулам дискретизации компонентных уравнений

$$I_{C,k+1} = C \frac{dU_C(t)}{dt} \cong C \frac{U_{C,k+1} - U_{C,k}}{\Delta t},$$

$$I_{L,k+1} = I_{L,k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_L(t) dt \cong I_{L,k} \frac{\Delta t}{L} U_{L,k+1}$$

можно поставить в соответствие схемы замещения емкости и индуктивности, приведенные на рис. 7.3. Компоненты $\Delta t/C$, $L/\Delta t$ играют роль фиктивных резисторов, поскольку имеют соответствующую размерность. Математическая модель схемы, соответствующая алгоритму Ньютона (7.19), имеет вид

$$Y[\varphi_{k+1}(m)] \Delta \varphi_{k+1}(m) = -I[\varphi_{k+1}(m), \varphi_k, \dots, \varphi_{k-p}]. \quad (7.20)$$

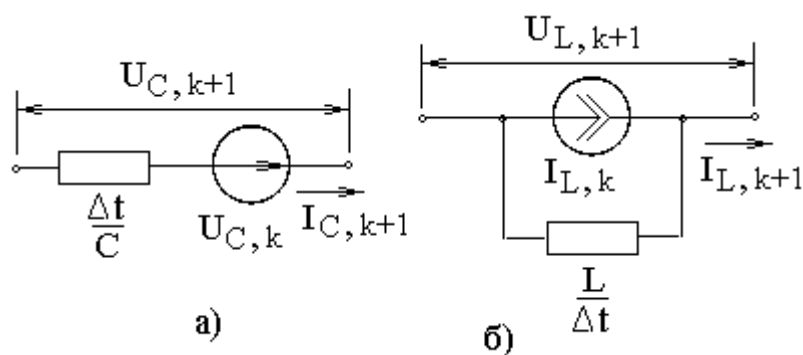


Рисунок 7.3 – Схемы замещения емкости и индуктивности

При формировании матрицы узловых проводимостей Y вклад каждой емкостной ветви равен проводимости $C/\Delta t$, а вклад каждой индуктивной ветви – проводимости $\Delta t/L$ с соответствующими знаками (см. раздел б). При формировании вектора токов I каждое из дискретизированных компонентных уравнений рассматривается как уравнение тока соответствующей ветви. Если

шаг численного интегрирования Δt изменяется автоматически проводимости реактивных ветвей необходимо пересчитывать в процессе решения при каждом изменении шага.

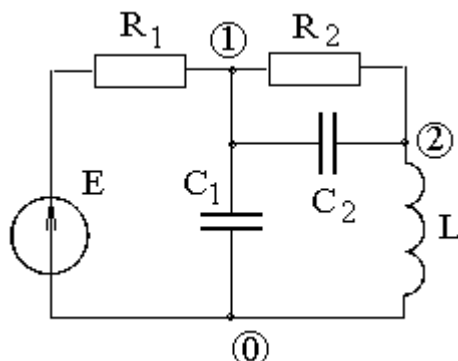


Рисунок 7.4 – К формированию динамической модели схемы в базисе узловых потенциалов

Рассмотрим пример. Для электрической цепи, приведенной на рис. 7.4, матрицу узловых проводимостей можно представить в виде [8]:

$$Y = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{C_1}{\Delta t} + \frac{1}{R_2} + \frac{C_2}{\Delta t} & -\frac{1}{R_2} - \frac{C_2}{\Delta t} \\ -\frac{1}{R_2} - \frac{C_2}{\Delta t} & \frac{1}{R_2} + \frac{C_2}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{L} \end{vmatrix}.$$

Вектор узловых токов имеет вид:

$$I(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{E - \varphi_{1,k+1}}{R_1} + C_1 \frac{(\varphi_{1,k+1} - \varphi_{0,k+1}) - U_{C1,k}}{\Delta t} + C_2 \frac{(\varphi_{1,k+1} - \varphi_{2,k+1}) - U_{C2,k}}{\Delta t} + \\ + \frac{\varphi_{1,k+1} - \varphi_{2,k+1}}{R_2} \\ -\frac{\varphi_{1,k+1} - \varphi_{2,k+1}}{R_2} - C_2 \frac{(\varphi_{1,k+1} - \varphi_{2,k+1}) - U_{C2,k}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{L} \varphi_{2,k+1} + I_{L,k} \end{vmatrix}.$$

В базисе узловых потенциалов формирование динамической модели схемы (7.18) не отличается от формирования модели для расчета статического режима. Это важное достоинство метода узловых потенциалов значительно упрощает программы математического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования /Авт. пред. А.А.Самарский. - М.: Наука, 1988. - 176 с.
- 2 Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
- 3 Информатика. Базовый курс /Симонович С.В. и др. – СПб: «Питер», 2000. – 640 с.
- 4 Системы автоматизированного проектирования. Кн. 1.: Учебн. пособие для вузов в 9 кн. /Под ред. И.П.Норенкова. – Минск: Выш. шк., 1987. – 159 с.
- 5 Системы автоматизированного проектирования. Кн. 4. Математические модели технических объектов: Учебное пособие для вузов в 9 кн. / В. А. Трудоношин, Н. В. Пивоварова; Под ред.: И. П. Норенкова. - Минск: Выш. шк., 1988. - 159 с.
- 6 Фидлер Дж. К., Найтингейл К., Машинное проектирование электронных схем / Пер. с англ. и предисл. Панфилова Д. И., Соколова А. Г. / Под ред. Казеннова Г. Г. – М.: Высш. шк., 1985. – 216 с.
- 7 Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль. – Томск: МП «РАСКО», 1991. – 272 с.
- 8 Автоматизация схемотехнического проектирования: Учебн. пос. для вузов/ В.Н. Ильин, В.Т. Фромкин, А.И. Бутко и др.; Под ред. В.Н. Ильина.- М.: Радио и связь, 1987.- С. 224.
- 9 Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с.
- 10 Зи С. Физика полупроводниковых приборов: В 2-х книгах. - М.: Мир, 1984. – Кн. 1, 2 – 912 с.
- 11 Степаненко И.П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. – М.: Энергия, 1973. – 608 с.

- 12 Бубенников А.Н. Моделирование интегральных микротехнологий, приборов и схем. – М.: Высш. шк., 1989. – 320 с.
- 13 Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. - М.: Наука, 1967. - С. 207.
- 14 Диалоговые системы схемотехнического проектирования / В.И. Анисимов, Г.Д. Дмитриевич, К.Б. Скобелицын и др.; Под ред. В.И. Анисимова.- М.: Радио и связь, 1988.- С. 77.
- 15 Норенков И.П., Маничев В.Б. Системы автоматизированного проектирования электронной и вычислительной аппаратуры. - М.: Высш. шк., 1983. - С. 165.
- 16 Системы автоматизированного проектирования. Кн. 5. Автоматизация функционального проектирования: Учеб. пособие для вузов в 9 кн. / П. К. Кузьмин, В. Б. Маничев; Под ред. И. П. Норенкова, - Минск: Выш. шк., 1988. - 159 с.