МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации

Утверждаю:
Зав. каф. АОИ
профессор
___________Ю.П. Ехлаков
«__» _____________2015 г.

Методические указания к выполнению
практических работ
по дисциплине

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

для студентов специальности
230102 - «Автоматизированные системы обработки
информации и управления»

Разработчик:
доцент каф. АОИ
__________ Т.О. Перемитина

Томск – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1 «Формулы алгебры высказываний»

Учение о высказываниях – алгебра высказываний, или алгебра логики, – является простейшей логической теорией. Атомарным понятием алгебры высказываний является ***высказывание*** – повествовательное предложение, в отношении которого имеет смысл утверждение об его истинности или ложности.

Пример истинного высказывания: "Земля вращается вокруг Солнца". Пример ложного высказывания: "3 > 5". Не всякое предложение является высказыванием, к высказываниям не относятся вопросительные и восклицательные предложения. Не является высказыванием предложение: «Каша – вкусное блюдо», так как не может быть единого мнения о том, истинно оно или ложно. Предложение «Есть жизнь на Марсе» следует считать высказыванием, так как объективно оно либо истинно, либо ложно, хотя никто пока не знает, какое именно.

Поскольку предметом изучения логики являются только значения истинности высказываний, для них вводят буквенные обозначения A, B, … или X, Y…

Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно. Для краткости, будем вместо значения истинно писать 1, а вместо значения ложно – 0. Например, X = "Земля вращается вокруг Солнца" и Y = "3 > 5", причем X =1 и Y = 0. Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Высказывания могут быть простыми и составными. Высказывания "Земля вращается вокруг Солнца" и "3 > 5" являются простыми. Составные высказывания образуются из простых с помощью связок естественного (русского) языка НЕ, И, ИЛИ, ЕСЛИ-ТО, ТОГДА-И-ТОЛЬКО-ТОГДА. При использовании буквенных обозначений для высказываний эти связки заменяются специальными математическими символами, которые можно рассматривать как символы логических операций.

Ниже, в таблице 1 приведены варианты символов для обозначения связок и названия соответствующих логических операций.

Отрицанием (инверсией) высказывания X называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда X ложно (обозначается $\neg X$ или $\overline{X}$, читается “не X” или “неверно, что X”).

Конъюнкцией $X \& Y$ двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания X и Y. Эта логическая операция соответствует соединению высказываний союзом ”и”.

Дизъюнкцией $X \vee Y$ двух высказываний X и Y называется высказывание ложное в том и только в том случае, когда оба высказывания X и Y ложны. В разговорной речи этой логической операции соответствует союз “или” (не исключающее “или”).

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда X истинно, а Y – ложно (обозначается $X \to Y$; читается “X влечет Y”, “если X, то Y”). Операнды этой операции имеют специальные названия: X – посылка, Y – заключение.

Эквиваленцией двух высказываний X и Y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения X и Y одинаковы (обозначение: $X \sim Y$, $X \leftrightarrow Y$).

Таблица 1. Логические операции

Связка	Варианты символов	Наименование операции
не	$\rceil$ $\bar{\ }$	отрицание
и	$\&$ $\wedge$ $\cdot$	конъюнкция
или	$\vee$	дизъюнкция
если то	$\to$	импликация
тогда и только тогда	$\leftrightarrow$ $\sim$	эквивалентность

Операнды логических операций могут принимать только два значения: 1 или 0. Поэтому каждую логическую операцию $\neg$, &, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ легко задать с помощью таблицы, указав значение результата операции в зависимости от значений операндов. Такая таблица называется ***таблицей истинности*** (табл. 2).

Таблица 2. Таблица истинности логических операций

X	Y	$\neg X$	$X\&Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

С помощью логических операций, определенных выше, можно из простых высказываний строить ***формулы логики высказываний***, представляющие различные составные высказывания. Логическое значение составного высказывания зависит от структуры высказывания, выраженной формулой, и логических значений образующих его элементарных высказываний.

Для систематического изучения формул, выражающих высказывания, вводят переменные высказывания P, P_1, P_2, ..., P_N, принимающие значения из множества $\{0, 1\}$.

Формула логики высказываний $F\ (P_1,\ P_2,...,\ P_N)$ называется тавтологией или ***тождественно истинной***, если ее значение для любых значений $P_1,\ P_2,...,\ P_N$ есть 1 (истина). Формулы, принимающие значение “истина” хотя бы при одном наборе списка переменных, называются ***выполнимыми***. Формулы, принимающие значение “ложь” при любых значениях переменных, называются ***противоречиями*** (тождественно ложными, невыполнимыми).

Пример 1:

Даны два высказывания:

A={число 174 делится на 3}, B={идет дождь}.

В чем заключаются высказывания:

$\overline{A},\ A \vee B,\ A \,\&\, B,\ A \to B,\ \overline{A} \to B,\ A \leftrightarrow \overline{B}$?

Какие из этих высказываний истинны, а какие ложны?

Решение:

1) По определению операции отрицания:
   $\overline{A}$ = {число 174 не делится на 3}. Данное высказывание является ложным.
2) $A \vee B$ = {число 174 делится на 3 или идет дождь}. Так как высказывание A является истинным, то независимо от логического значения высказывания B высказывание $(A \vee B)$ является истинным (см. табл.2).
3) $A \,\&\, B$ = {число 174 делится на 3 и идет дождь}. Если высказывание B является истинным, то высказывание $(A \,\&\, B)$ истинно. Иначе, если B ложно, то и $(A \& B)$ ложно.
4) $A \to B$ = {если число 174 делится на 3, то идет дождь}. Высказывание $(A \to B)$ ложно только в случае, когда высказывание B ложно.
5) $\overline{A} \to B$ = {если число 174 не делится на 3, то идет дождь}. Данное высказывание истинно.
6) $A \leftrightarrow \overline{B}$ = {число 174 делится на 3 тогда и только тогда, когда не идет дождь}. Так как высказывание A истинно, то $A \leftrightarrow \overline{B}$ будет истинным в случае, когда высказывание $\overline{B}$ истинно. Таким образом, сложное высказывание $A \leftrightarrow \overline{B}$ истинно, если B ложно.

Пример 2:

Выпишите все подформулы формулы

$$F = ((A_0 \to A_1) \,\&\, (A_1 \to A_2)) \to \overline{A_0}\ .$$

Решение:

Для решения примера воспользуемся определением:

Подформулой формулы *A* называется любое подслово *A*, само являющееся формулой.

Вначале выписываем все высказывательные переменные, затем отрицания высказывательных переменных и далее логические выражения:

A_0; A_1; A_2; $\overline{A_0}$; $(A_0 \to A_1)$; $(A_1 \to A_2)$; $(A_0 \to A_1) \& (A_1 \to A_2)$.

Пример 3:

Для формулы $F = (A_1 \to \overline{A_2}) \& (\overline{A_1} \vee A_2)$ составьте таблицу истинности. Определите, является ли данная формула тождественно истинной, выполнимой или невыполнимой.

Решение:

Расставим приоритеты логических операций:

$$F = (A_1 \overset{\mathbf{2}}{\to} \overset{\mathbf{1}}{\overline{A_2}}) \overset{\mathbf{5}}{\&} (\overset{\mathbf{3}}{\overline{A_1}} \overset{\mathbf{4}}{\vee} A_2).$$

Таблица истинности будет иметь следующий вид:

A_1	A_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0

Данная формула алгебры высказываний является выполнимой, так как принимает значение “истина” при двух наборах списка переменных.

Упражнения:

1.1. Среди следующих предложений выделить те, которые являются высказываниями, и установить, если это возможно, истинны они или ложны.

1) Для произвольных множеств A и B верно включение $A \subset A \cup B$.
2) Сумма углов в треугольнике равна 180°.
3) Информатика – самый интересный предмет.
4) $\sqrt{2} \in N$.
5) Солнечная система насчитывает девять больших планет.
6) На улице светит солнце.
7) Летайте самолетами Аэрофлота!
8) Всякое подмножество конечного множества конечно.

1.2. Даны два высказывания:

$P = \{конъюнкция\ коммутативна\}$,

$Q = \{если\ число\ нечетное,\ то\ оно\ простое\}$.

В чем заключаются высказывания:

$\overline{Q}$, $\overline{Q \to P}$, $(P \& \overline{Q}) \to P$, $(Q \vee P) \to \overline{Q}$?

Какие из них истинны, а какие ложны?

1.3. В каких случаях приведенные ниже данные противоречивы?

1) $a = 1, \quad a \& b = 1$;
2) $a = 0, \quad a \& b = 1$;
3) $a = 1, \quad a \vee b = 0$;
4) $a = 0, \quad a \vee b = 1$.

1.4. Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях:

1) $z \to (x \to y)$;
2) $(\overline{x \to y}) \to y$;
3) $(x \to y) \to z$.

1.5. Выписать все подформулы следующих формул:

1) $((A \to B) \& (B \to D)) \to \overline{A} \vee D$;
2) $(\overline{A} \to \overline{B}) \leftrightarrow (B \leftrightarrow D)$;
3) $A_1 \& (A_2 \vee A_3 \& (B \vee C))$.

1.6. Составить таблицы истинности для формул:

1) $(A \to \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$;
2) $(P \leftrightarrow Q) \to (P \& Q)$;
3) $(P \& (Q \to P)) \vee \overline{P}$;
4) $(P \& (Q \to \overline{P})) \& (\overline{Q} \to P) \vee Q$;
5) $(P \to (\overline{Q \& P})) \to P \vee R$;
6) $(P \& (Q \vee \overline{P})) \& ((\overline{Q} \to P) \vee Q)$;
7) $(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))$.

1.7. Какие из высказываний P, Q, R должны быть истинны, а какие ложны, чтобы формула $(\overline{P} \& Q) \to R$ была истинной?

1.8. Доказать тождественную истинность формул:

1) $P \to (Q \to P \& Q)$;
2) $(P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \to \overline{P})$;
3) $\overline{P} \to (P \to Q)$.

Практическое занятие № 2 «Равносильные преобразования формул алгебры высказываний»

Две формулы алгебры высказываний называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые истинностные значения при любых значениях входящих в них переменных.

Таблица 3. Основные равносильности логики высказываний

№	Формула	Название
1	$X \vee \overline{X} \equiv И$	Закон исключенного третьего
2	$X \,\&\, \overline{X} \equiv Л$	Закон противоречия
3	$X \,\&\, Y \equiv Y \,\&\, X,\ X \vee Y \equiv Y \vee X$	Законы коммутативности
4	$(X \,\&\, Y) \,\&\, Z \equiv X \,\&\, (Y \,\&\, Z)$ $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$	Законы ассоциативности
5	$X \,\&\, (Y \vee Z) \equiv (X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, Z)$ $X \vee (Y \,\&\, Z) \equiv (X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$	Законы дистрибутивности
6	$\neg\neg X \equiv X$	Закон двойного отрицания
7	$X \,\&\, X \equiv X,\ X \vee X \equiv X$	Закон идемпотентности
8	$(\overline{X \vee Y}) \equiv \overline{X} \,\&\, \overline{Y}$; $(\overline{X \,\&\, Y}) \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$	Законы де Моргана
9	$X \vee (X \,\&\, Y) \equiv X,\ X \,\&\, (X \vee Y) \equiv X$	Законы поглощения
10	$(X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \overline{Y}) \equiv X$ $(X \vee Y) \,\&\, (X \vee \overline{Y}) \equiv X$	Законы склеивания
11	$X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y$	Замена импликации
12	$X \leftrightarrow Y \equiv (X \,\&\, Y) \vee (\overline{X} \,\&\, \overline{Y})$	Замена эквиваленции

Пример:

Пользуясь основными равносильностями логики высказываний, проверить, являются ли формулы F_1 и F_2 равносильными (перечислите все используемые законы равносильности):

$$F_1 = (A \,\&\, B) \rightarrow \neg B \text{ и } F_2 = \neg A \vee \neg B.$$

Решение: Преобразуем первую формулу, для этого воспользуемся основными законами равносильности логики высказываний.

1). Заменим операцию импликации с помощью закона:

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, тогда формула F_1:

$F_1 \equiv \neg(A \& B) \vee \neg B.$

2). Применим закон де Моргана:

$\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$, получим следующее преобразование F_1:

$F_1 \equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg B.$

3). Воспользуемся законом идемпотентности:

$\neg B \vee \neg B \equiv \neg B$, тогда F_1 принимает следующий вид:

$F_1 \equiv \neg A \vee \neg B.$

Таким образом, доказано, что $F_1 \equiv F_2$.

Упражнения:

2.1. Выписать все подформулы формулы:

1) $((A_0 \to A_1) \& (A_1 \to A_2)) \to (\overline{A_0} \vee A_2)$;

2) $(\overline{A_1} \to \overline{A_2}) \leftrightarrow (A_2 \leftrightarrow A_3)$;

3) $A_1 \& (A_2 \vee A_3 \& (B \vee C))$.

2.2. Найти все существенные переменные формул:

1) $(X \& Y) \vee (\overline{Y} \& Z)$;

2) $P \to (Q \to P \& Q)$;

3) $\overline{X} \& (\overline{X \& Y})$;

4) $P \to \overline{\overline{P}}$;

5) $\overline{Y} \vee (\overline{X \vee Y})$.

2.3. Доказать следующие равносильности:

1) $\overline{A \to B} \equiv A \& \overline{B}$;

2) $A \to B \equiv A \& \overline{B} \to B$;

3) $A \to B \equiv (A \& \overline{B}) \to (C \& \overline{C})$;

4) $A \to B \equiv A \& \overline{B} \to \overline{A}$;

5) $A \& (A \vee C) \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$;

6) $(A \& B) \vee ((A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})) \equiv A \vee B$.

Практическое занятие № 3 «Нормальные формы формул»

Элементарной конъюнкцией (ЭК) называется конъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые:

$$\overline{A}\,\&\,A;\;\; A\,\&\,\overline{C};\;\; A\,\&\,B\,\&\,\overline{C}\,.$$

Элементарной дизъюнкцией (ЭД) называется дизъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые:

$$\overline{A}\vee A;\;\; A\vee\overline{C};\;\; A\vee B\vee\overline{C}\,.$$

Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется ***правильной***, если каждая переменная входит в нее не более одного раза, включая вхождения под знаком отрицания.

Правильная элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется ***полной*** относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ если каждая из переменных входит в нее один и только один раз.

Например, для набора переменных x_1, x_2, x_3, x_4, $x_1\,\&\,x_2\,\&\,x_3\,\&\,\overline{x_4}$ – полная правильная ЭК, а $x_1\,\&\,\overline{x_1}\,\&\,x_2\,\&\,x_3$ – неправильная ЭК.

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ):

$$(A\,\&\,\overline{B})\vee(\overline{A}\,\&\,\mathrm{C})\,.$$

Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем конъюнктивной нормальной формой (КНФ):

$$(A\vee\overline{B})\,\&\,(\overline{A}\vee\mathrm{C})\,.$$

Совершенной ДНФ называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием):

$$(A\,\&\,\mathrm{B}\,\&\,\overline{C})\vee(\mathrm{A}\,\&\,\mathrm{B}\,\&\,\mathrm{C})\,.$$

Совершенной КНФ называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием):

$$(A\vee\mathrm{B}\vee\overline{C})\,\&\,(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\vee\mathrm{C})\,.$$

Пример:

Записать формулу в ДНФ и КНФ:

$$P\,\&\,(Q\to P)\to\neg P.$$

Решение:

Построим ДНФ по алгоритму:

1) Заменяем импликацию: $F_1 \equiv \neg(P \,\&\, (\neg Q \vee P)) \vee \neg P$.

2) Вносим знак отрицания, применяя закон де Моргана и закон идемпотентности, получаем: $F_2 \equiv (\neg P \vee (Q \,\&\, \neg P)) \vee \neg P$.

*3)*Преобразуем выражение с применением законов идемпотентности и поглощения:

$F_3 \equiv (Q \,\&\, \neg P) \vee (\neg P \vee \neg P) \equiv (Q \,\&\, \neg P) \vee \neg P \equiv \neg P$.

Формула $F_3 \equiv F$ в силу транзитивности отношения $\equiv$ и записана в ДНФ и КНФ.

Упражнения:

3.1. Привести к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:

1) $((P \to Q) \to (R \to \overline{P})) \to (\overline{Q} \to \overline{R})$;

2) $((((P \to Q) \to \overline{P}) \to \overline{Q}) \to \overline{R}) \to R$;

3) $(P \to (Q \to R)) \to (P \to \overline{R}) \to (P \to \overline{Q})$.

3.2. Привести к дизъюнктивной нормальной форме, построить карту Карно:

1) $A \to (B \,\&\, C)$;

2) $(X \,\&\, Y) \to \overline{Y}$;

3) $(B \to \overline{A}) \,\&\, C$;

4) $(A \leftrightarrow B) \,\&\, C$;

5) $(P \to Q) \to P$;

6) $\overline{A} \to (B \leftrightarrow C)$.

3.3. Привести к совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:

1) $(X \to Y) \,\&\, (\overline{Y} \to \overline{X})$;

2) $\overline{((A \,\&\, B) \to \neg A)} \,\&\, \overline{((A \,\&\, B) \to \neg B)}$;

3) $\overline{(X \leftrightarrow Y)}$;

4) $(A \,\&\, B) \to (B \,\&\, C)$;

5) $(X \vee Y) \to X$;

6) $(B \leftrightarrow \overline{C}) \,\&\, (A \to B)$;

7) $(A \vee \overline{C}) \to (B \,\&\, C)$;

8) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \vee Y)$;

9) $(B \to \overline{A}) \,\&\, (C \leftrightarrow B)$;

10) $(A \,\&\, B) \vee ((A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B}))$.

Практическое занятие № 4 «Логические рассуждения»

Пусть даны две формулы $P_1,...P_m, D$. Формула D является логическим следованием формул $P_1,...P_m$, если, придавая значения переменным $x_1,...x_n$, от которых зависят все рассматриваемые формулы, всякий раз, когда истинны одновременно все формулы $P_1,...P_m$, истинна и формула D.

Для логического следования используется запись: $P_1,...P_m \vdash D$.

Логически правильное рассуждение будем записывать в виде схемы рассуждения:

$$\left| \frac{P_1, P_2, \ldots, P_m}{D} \right.$$

Для проверки наличия логического следования достаточно построить таблицу истинности.

Три способа проверки правильности логического рассуждения:

I. Применить определение:
   а) записать все посылки и заключения в виде формул логики высказываний;
   б) составить конъюнкцию формализованных посылок $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_m$;
   в) проверить по таблице истинности, следует ли заключение D из формулы $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_m$.

II. Использовать Признак логического следования:

   Формула D логически следует из формулы P тогда и только тогда, когда формула $P \to D$ является тавтологией. Для проверки необходимо построить таблицу истинности для формулы $P \to D$, или преобразовать эту формулу с помощью равносильных преобразований к известной тавтологии.

III. Применить сокращенный способ проверки правильности логического рассуждения.

   Рассуждение строится «методом от противного»:

   Рассуждение является неправильным, если найдется набор значений переменных $X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$ такой, что посылка P ($X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$) =1, а заключение D ($X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$) =0.

   Сокращенный метод заключается в следующем.

Пусть требуется проверить правильность логического следования формулы D из посылок $P_1,...P_m$.

Предположим, что существует набор $X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$, при котором все посылки истинны, а заключение ложно, и попытаемся найти этот набор. Если такой набор будет обнаружен, то наше предположение оправдалось, и рассуждение является логически неправильным. Если в процессе поисков набора придем к противоречию, то наше предположение ошибочно, а рассуждение является логически правильным.

***Пример 1*:**

Проверить тремя способами правильность логического рассуждения:

«Если в параллелограмме диагонали ортогональны, то параллелограмм – ромб. В данном случае диагонали не ортогональны, следовательно, данный параллелограмм – не ромб».

Решение:

Имеем следующие высказывания:

A ={в параллелограмме диагонали ортогональны};

B = {параллелограмм – ромб}**;**

Схема логического рассуждения имеет вид:

$$\left| \begin{array}{l} P_1 = A \to B \\ P_2 = \overline{A} \\ \hline D = \overline{B} \end{array} \right.$$

Первый способ проверки правильности логического рассуждения - по определению:

Составляем конъюнкцию формализованных посылок:

$P = P_1 \& P_2 = (A \to B) \& \overline{A}$.

Проверим по таблице истинности:

A	B	P_1	P_2	P	D
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0

По определению, логическое рассуждение является правильным если $P = 1$, то и $D = 1$ на этом же наборе переменных. В нашем случае существует два набора переменных на которых посылка $P = 1$ и лишь на одном из них ($A = 0, B = 0$) $D = 1$, следовательно, данное логическое рассуждение не является правильным.

Второй способ, основанный на признаке логического следования.

Построим формулу $P \to D$ и проверим, является ли она тавтологией.

$$P \to D = ((\mathrm{A} \to B)\,\&\,\overline{A}) \to \overline{B}.$$

Расставим приоритеты логических операций и построим таблицу истинности.

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	P	D	$P \to D$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Формула $P \to D$ не является тавтологией, следовательно, данное логическое рассуждение не является правильным.

Третий способ – сокращенный.

Проверим сокращенным способом правильность логического рассуждения $A \to B, \overline{A} \vdash \overline{B}$.

Пусть существует набор A_0, B_0, при котором посылки истинны, а заключение ложно. Оформим это предположение в виде таблицы

№	Истина	Ложь	Примечания
1	$A_0 \to B_0$		это наши предположения
2	$\overline{A_0}$		
3		$\overline{B_0}$	
4	$A_0 \to B_0$		Из 2, 3 и определения импликации

Запишем в четвертой строке таблицы импликацию $A_0 \to B_0$, учитывая, что $A_0 = 0$ (так как $\overline{A_0} = 1$), а $B_0 = 1$.

Противоречий нет, следовательно, рассуждение $A \to B, \overline{A} \vdash \overline{B}$ логически неправильное.

Упражнения:

4.1. «Если будут мобилизованы внутренние ресурсы, то возрастет производительность труда или будет выполнено задание по валу». «Если будет внедрена новая техника, то задание по валу будет выполнено, если новая техника не будет внедрена, то производительность не возрастет и будут мобилизованы внутренние ресурсы». Следует ли из этих трех утверждений, что будет выполнено задание по валу?

4.2. «Если почтальон не будет приносить газеты вовремя, люди будут покупать газеты в киоске или слушать радио. Если люди не будут покупать газеты в киоске, то тираж будет уменьшен. Если тираж будет уменьшен, и почтальон не будет приносить газеты вовремя, то люди не будут слушать радио. Следовательно, люди будут покупать газету в киоске».

4.3. «Если цены высоки, то и зарплата высока. Цены высоки или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция, следовательно, зарплата высока».

4.4. «Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то параллелограмм – ромб; в данном параллелограмме диагонали не взаимно перпендикулярны, следовательно, параллелограмм не есть ромб».

4.5. «Если функция непрерывна на данном интервале и имеет разные знаки на его концах, то внутри данного интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала, но на концах интервала имеет разные знаки; следовательно, функция разрывна».

4.6. «Либо аудитория была закрыта, либо, если преподаватель опоздал, то все студенты ушли в столовую. Если аудитория не была закрыта, то преподаватель не опоздал. Если все студенты ушли в столовую, то преподаватель опоздал. Следовательно, аудитория не была закрыта».

Практическое занятие № 5 «Формулы логики предикатов»

Логика предикатов – это расширение возможностей логики высказываний, позволяющее строить высказывания с учетом свойств изучаемых объектов или отношений между ними.

Одноместным предикатом $P(x)$ называется функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества $\{1, 0\}$.

Множество M, на котором определен предикат $P(x)$, называется ***предметной областью*** или областью определения предиката. Множество всех $x \in M$, при которых $P(x)=1$, называется ***множеством истинности*** предиката.

Многоместным предикатом называется всякая функция n переменных $Q(x_1, x_{2,}, ..., x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times ..... \times M_n$ (декартово произведение) и принимающая на этом множестве одно из двух значений $\{1, 0\}$.

В общем случае n-местным предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, аргументы которой являются элементами произвольного множества M, а значения принадлежат множеству $\{1,\ 0\}$, или $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \ \{1,\ 0\}$. Элементы множества M называются ***предметными переменными***. Количество предметных переменных есть порядок (местность) предиката.

Чтобы сделать более прозрачной структуру сложных высказываний, удобно ввести специальные обозначения для некоторых часто встречающихся выражений - ***кванторы***. Для их обозначения используются символы:

$\forall$ - квантор всеобщности;

$\exists$ - квантор существования.

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве М. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ будем понимать высказывание, которое принимает значение истина тогда и только тогда, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x множества M. Это высказывание уже не зависит от x. Переменную x в предикате $P(x)$ называют ***свободной***, а в высказывании $\forall x P(x)$ – ***связанной*** квантором всеобщности.

Аналогично, под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если найдется хотя бы один элемент x

множества M , для которого $P(x)$ истинно, и ложным, если ни одного такого элемента во множестве M нет. Высказывание $\exists x P(x)$ не зависит от x, в нем переменная x связана квантором существования.

Из предикатных символов с помощью знаков логических операций и кванторов строятся формулы логики предикатов, которые используются в информационных задачах для описания предметной области. При этом определяется содержание множества предметных переменных M , а каждому предикатному символу придается смысл – задается свойство, которое описывает этот предикат. Таким образом, формулам придается некоторая интерпретация. Одна и та же формула в разных интерпретациях может иметь разные значения.

Если формула F истинна при любых значениях своих аргументов в некоторой интерпретации, то она называется истинной в данной интерпретации. Формула, истинная в любой интерпретации, называется общезначимой. Две формулы логики предикатов называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые истинностные значения при любых значениях переменной в любой интерпретации. Все равносильности логики высказываний (табл. 3) справедливы в логике предикатов. Кроме этого, в логике предикатов есть равносильности, связанные с преобразованиями формул, содержащих кванторы (табл. 4).

Таблица 4. Основные равносильности логики предикатов

№	Формула
1	$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$
2	$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
3	$(\forall x P(x))\,\&\,(\forall x Q(x)) \equiv \forall x(P(x)\,\&\,Q(x))$
4	$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$
5	$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))$
6	$(\exists x P(x))\,\&\,(\exists x Q(x)) \equiv \exists x \exists y(P(x)\,\&\,Q(y))$

Специальную форму записи формулы логики предикатов называют предваренной нормальной формой (ПНФ).

Алгоритм получения формулы ***в предваренной нормальной форме***:
1) перейти от символов $\rightarrow$ и $\sim$ к символам $\&$, $\vee$, $\neg$;
2) внести все отрицания внутрь формулы, “приклеив” их к предикатным символам;
3) вынести все кванторы в начало формулы.

Пример 1:
Даны утверждения:

A(n) = {число n делится на 3};
B(n) = {число n делится на 2};
C(n) = {число n делится на 4};
D(n) = {число n делится на 6};
E(n) ={число n делится на 12}.

Будет ли истинна формула логики предикатов $\forall n(A(n) \,\&\, B(n) \to E(n))$?

Решение:
а) Рассмотрим подформулы формулы логики предикатов:

1. $A(n) \,\&\, B(n)$ ={число n делится на 6};
2. $A(n) \,\&\, B(n) \to E(n)$ ={если число n делится на 6, то оно делится на 12}.

Вторая формула истинна не для всех значений n, например, для n =6 формула $A(n) \,\&\, B(n) \to E(n)$ будет ложной. Следовательно, формула логики предикатов $\forall n(A(n) \,\&\, B(n) \to E(n))$ является ложной.

Пример 2:
Является ли формула логики предикатов $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ тождественно истинной?

Решение:
Используем закон замены импликации:

$$\forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x P(x).$$

Применим закон де Моргана и закон равносильностей логики предикатов (табл. 4):

$$\neg(\forall x P(x)) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x(\neg P(x)) \vee P(x)) \equiv 1.$$

Данная формула является тождественно истинной.

Пример 3:
Записать формулу логики предикатов $F = \neg(\exists x(P(x) \to \forall y P(y)))$ в ПНФ.

Решение:

В преобразованиях будем использовать законы логики высказываний (табл. 3) и логики предикатов (табл. 4).

$$F \equiv \neg(\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))) \equiv \forall x(\neg(\neg P(x) \vee \forall y Q(y))) \equiv$$
$$\equiv \forall x(P(x) \,\&\, \neg(\forall y Q(y))) \equiv \forall x(P(x) \,\&\, (\exists y \neg Q(y))) \equiv \forall x \exists y(P(x) \,\&\, \neg Q(y)).$$

Упражнения:

5.1. Даны утверждения:

A(n) = {число n делится на 3};

B(n) = {число n делится на 2};

C(n) = {число n делится на 4};

D(n) = {число n делится на 6};

E(n) ={число n делится на 12}.

Будет ли истинна формула логики предикатов $\exists n(B(n) \& C(n) \to \neg D(n))$?

5.2. Найти области истинности предикатов:

1) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0;$

2) $\begin{cases} x^2-13x+40\ge 0, \\ 2x^2+x+30<0. \end{cases}$

5.3. Установить, какие из следующих предикатов истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с Z :

1) $\forall x((x^2-6x+8\ge 0)\vee(x^2-6x+8<0));$

2) $\exists x(x^2+x+0{,}5=0).$

5.4. Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна области истинности предикатов:

1) $P(x)\to Q(x);$

2) $P(x)\to \overline{Q(x)};$

3) $\overline{P(x)}\leftrightarrow \overline{Q(x)};$

4) $(P(x)\vee Q(x))\,\&\,R(x).$

5.5.Проверить, являются ли формулы логики предикатов равносильными:

1) $F_1=\forall x\overline{Q(x)}\to(\exists xP(x)\,\&\,\exists xQ(x));\quad F_2=\exists xQ(x);$

2) $F_1=\exists xP(x)\vee(\exists xP(x)\,\&\,\exists x\overline{Q(x)});\quad F_2=\exists xP(x);$

5.6. Доказать, что формула является тождественно истинной:

$$F=\forall xP(x)\to\exists xP(x).$$

5.7.Доказать, что формула является тождественно ложной:

$$F=\exists x\exists y((F(x)\to F(y))\,\&\,(F(x)\to\overline{F(y)})\,\&\,F(x)).$$

5.8.Привести формулы к предваренной нормальной форме:

1) $\overline{\exists x(P(x)\to\forall yQ(y))};$

2) $\overline{P\to\exists xR(x)};$

3) $\overline{\forall x\exists y(A(x)\leftrightarrow A(y))}.$

Практическое занятие № 6 «Булевы функции»

Булевы функции можно рассматривать как математические модели дискретных устройств переработки информации. В процессе работы каждый вход такого устройства может находиться только в одном из двух состояний (обозначим 0 и 1).В зависимости от комбинации нулей и единиц на входе устройства, получим преобразованную устройством комбинацию нулей и единиц на выходе, при этом каждое значение y можно считать функцией от $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим $E = (0{,}1)$. Определим булеву функцию (БФ) n переменных как отображение $f : E^n \to E$. Область определения БФ – конечное множество, поэтому БФ можно задать с помощью таблицы, содержащей $|E| = 2^n$ строк. Столбец значений БФ при этом представляет собой двоичное слово длиной 2^n.

Представление БФ в нормальном виде использует три операции: дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Булевы функции дизъюнкция и сложение по модулю 2 (неравнозначность), а также функция – константа единица, позволяют представлять БФ в виде полиномов, по своим алгебраическим свойствам аналогичных обычным алгебраическим полиномам. Будем говорить, что БФ $f(x_1, ..., x_n)$ представлена в виде полинома Жегалкина, если

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 ... a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus ... \oplus a_{n-1,n} x_{n-1} x_n \oplus$$
$$\oplus a_{123} x_1 x_2 x_3 \oplus ... \oplus a_{1...n} x_1 x_2 ... x_n ,$$

причем коэффициенты полинома $a_0, ..., a_{1...n} \in \{0{,}1\}$.

Операция сложения по модулю 2 обладает свойствами:

$x \oplus y = y \oplus x$; $\quad x \oplus 0 = x$;

$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$; $\quad x \oplus x = 0$;

$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$; $\quad x \oplus 1 = \bar{x}$.

Учитывая эти свойства, а также свойства конъюнкции, будем преобразовывать формулы, содержащие только $\oplus$ и $\&$ по обычным алгебраическим законам: переставлять множители и слагаемые, раскрывать скобки, выносить общие множители. Особенность преобразования только одна: если в сумме встречаются два одинаковых слагаемых, их можно опустить.

Пример 1:

Представить полиномом Жегалкина формулу $F = xy \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y} z$.

Решение:

Будем использовать свойства операции сложения по модулю два.

$$F = xy \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,z \equiv \overline{\overline{xy}\ \&\ \overline{\bar{x}\,\bar{y}}\ \&\ \overline{\bar{y}\,z}} \equiv (xy \oplus 1)((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1)((y \oplus 1)z \oplus 1) \oplus 1 \equiv$$
$$\equiv (xy \oplus 1)(xy \oplus x \oplus y)(yz \oplus z \oplus 1) \oplus 1 \equiv (x \oplus y)(yz \oplus z \oplus 1) \oplus 1 \equiv$$
$$\equiv xyz \oplus yz \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1 \equiv xyz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus 1.$$

Система БФ $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ называется полной, если любую БФ можно представить в виде суперпозиций функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$.

Для того чтобы система БФ $\{f_1, \ldots, f_r\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала:

1) функцию, не сохраняющую нуль;
2) функцию, не сохраняющую единицу;
3) несамодвойственную функцию;
4) немонотонную функцию;
5) нелинейную функцию.

Пример 2:

Определить принадлежность функций системы пяти замкнутым классам. Проверить выполнение условий теоремы Поста для системы БФ: $f_1 = x \to y$; $f_2 = 0$.

Решение:

Определим, принадлежат ли функции системы к классу T_0. Функция f_1 зависит от двух переменных, x и y. Найдем значение функции $f_1(0,0) = 0 \to 0 = 1$, следовательно, $f_1 \notin T_0$. Функция $f_2 \in T_0$.

Определим принадлежность функций системы классу T_1. Для этого найдем значения функций, при значениях входных переменных, равных 1.

$$f_1(1,1) = 1 \to 1 = 1 \Rightarrow f_1 \in T_1; \qquad f_2 = 0 \Rightarrow f_2 \notin T_1;$$

Определим принадлежность функций системы классу S. Очевидно, что $f_1 \notin S, f_2 \notin S$.

Определим принадлежность функций системы классу L. Для этого построим полиномы Жегалкина для каждой функции системы.

$f_1 = xy \oplus x \oplus 1$ - степень полинома равна двум, следовательно, $f_1 \notin L$. $f_2 = 0$ - степень полинома равна единице, следовательно, $f_2 \in L$.

Определим принадлежность функций системы классу M.

Функция f_1 зависит от двух переменных ($n = 2$) и при $(10) \succeq (00)$ условие $f_1(1,0) > f_1(0,0)$ не выполняется, следовательно, $f_1 \notin M$.

Занесем все данные в таблицу Поста, знак «+» будет обозначать что функция принадлежит к классу, и знаком «-» если функция не принадлежит классу.

Таблица Поста.

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	-	+	-	-	-
f_2	+	-	-	+	+

Система БФ будет полной, если в каждом столбце таблицы Поста встретится хотя бы один знак «-». Таким образом, система БФ $\{\to,0\}$ - полная система.

Проверим выполнение условий теоремы Поста: построим с помощью функций f_1, f_2 конъюнкцию и отрицание.

Так как $f_1 \notin T_0$ и $f_2 \notin T_1$, то согласно первому шагу доказательства *теоремы 7*, $\varphi(x) = f_1(x,y) \equiv 1$ и $\phi(x) = f_2 \equiv 0$, т.е. имеем случай г. Для построения отрицания найдем немонотонную функцию – это функция f_1. Выбираем два соседних набора - $(0,0)$ и $(1,0)$. При этом $f_1(0,0)=1$, а $f_1(1,0)=0$. Тогда $\overline{x} = f_1(x,0)$. Выполним подстановку $\overline{x} = f_1(x, f_2)$. Тогда $\overline{x} = x \to 0$.

Построим конъюнкцию, нелинейной является функция f_1. Ее полином Жегалкина имеет вид - $f_1 = xy \oplus x \oplus 0y \oplus 1$ (т.е. $a=1, b=0, d=1$)

Поэтому преобразование $x_1 x_2 = \mu(x_1 \oplus b, x_2 \oplus a) \oplus ab \oplus d$ означает в нашем случае $\mu(x_1 \oplus 0, x_2 \oplus 1) \oplus 0 \oplus 1$, т.е.

$$\overline{f_1(x,\overline{y})} = \overline{f_1(x, f_1(y, f_2))} = f_1(f_1(x, f_1(y,f_2)), f_2) = .$$
$$(x \to (y \to 0)) \to 0 = x \,\&\, y.$$

Конъюнкция построена. Убедиться в последнем равенстве можно по таблице истинности или воспользовавшись равносильностями логики высказываний.

Итак, конъюнкция и отрицание представлены в виде суперпозиций функций $f_1 = x \to y$, $f_2 = 0$, следовательно, любую БФ можно представить в виде суперпозиции этих функций, т.е. система $\{\to,0\}$ - полная система.

Упражнения:

6.1. Представить полиномом Жегалкина формулы:

1) $F = \overline{x}\,\overline{y} \vee xy\overline{z};$
2) $F = \overline{x}\,\overline{y} \vee x\overline{z} \vee y\overline{z};$

3) $F = xyz \vee \bar{x}\,y \vee \bar{z};$

4) $F = x\bar{y} \vee \bar{x}\,y \vee x\bar{z};$

5) $F = \bar{x}yz \vee x\bar{z}.$

6.2. Выразить функции через полином Жегалкина, построить таблицы истинности:

1) $f_1 = x \vee y;$

2) $f_2 = x \,\&\, y;$

3) $f_3 = \overline{x \to y};$

4) $f_4 = \overline{y \to x};$

5) $f_5 = \overline{x \vee y};$

6) $f_6 = \overline{x \leftrightarrow y};$

7) $f_7 = x \leftrightarrow y;$

8) $f_8 = x \to y;$

9) $f_9 = y \to x.$

6.3. Представив функцию полиномом Жегалкина, выяснить, является ли она линейной:

1) $F = \overline{(x \leftrightarrow y)} \oplus \bar{x}y;$

2) $F = x\bar{y}(x \leftrightarrow y);$

3) $F = (x \vee yz) \oplus \bar{x}\,y\,z;$

6.4. Какие из функций являются монотонными?

1) $F = x \to (x \to y);$

2) $F = (\overline{x \vee y}) \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y});$

3) $F = xy \vee x \vee \bar{x}z.$

Практическое занятие № 7 «Частично рекурсивные функции»

Алгоритм – это общий, единообразный, точно установленный способ решения любой задачи из данной массовой проблемы.

Приведенное понятие нестрогое, но оно позволяет выделить некоторые характерные черты алгоритма:

1. Дискретность. Каждая последующая величина получается из значений предыдущих по определенному закону. Все величины получаются последовательно друг за другом.

2. Детерминированность. Между всеми величинами, получаемыми алгоритмом, существует жесткая причинная связь. Последующие значения зависят от предыдущих.

3. Элементарность шагов алгоритма. Закон получения последующей системы величин из предшествующей должен быть простым.

4. Массовость. Начальная система величин выбирается из некоторого множества. Начальные условия могут варьироваться в бесконечных пределах.

5. Результативность. Конечный результат всегда должен быть получен.

Интуитивное определение алгоритма приемлемо, когда речь о найденном алгоритме решения конкретной задачи. В случае, когда возникает алгоритмическая проблема, решение которой не найдено, необходимо доказать либо существование алгоритма решения, либо его отсутствие. Для доказательства несуществования алгоритма необходимо точное формальное определение.

В дальнейшем будут рассмотрены два основных типа алгоритмических моделей, различающиеся исходными трактовками, что такое алгоритм:

1. Первый тип связывает понятие алгоритма с традиционным представлением – процедурами вычисления значений числовых функций. Основной теоретической моделью этого типа являются рекурсивные функции – исторически первая формализация понятия алгоритма. А. Черчем и К. Геделем выделен класс частично рекурсивных функций, имеющих строгое математическое определение.
2. Второй тип трактует алгоритм как некоторое детерминированное устройство, способное выполнять в каждый момент лишь строго фиксированное множество операций. Основной теоретической моделью такого типа является машина Тьюринга, предложенная им в 30-х годах и

оказавшая существенное влияние на понимание логической природы разрабатываемых ЭВМ. Другой теоретической моделью данного типа является машина произвольного доступа (МПД) – введенная достаточно недавно (в 70-х годах) с целью моделирования реальных вычислительных машин и получения оценок сложности вычислений.

Вычислимые, частично рекурсивные и общерекурсивные функции

Рассмотрим класс вычислимых функций, предложенный в 30-х годах (Гедель, Клини, Черч) в качестве уточнения понятия алгоритма – класс ***частично рекурсивных функций***.

Пусть функция y зависит от целочисленных аргументов $x_1, x_2,.., x_n$. Функция $y = f(x_1, x_2,.., x_n)$ называется эффективно вычислимой, если существует алгоритм, позволяющий вычислять ее значения. Данный класс определяется путем указания конкретных исходных функций и фиксированного множества операций получения новых функций из заданных. В качестве базисных эффективно вычислимых функций берутся следующие:

1) $O(x) = 0$ – оператор аннулирования (нуль-функция);
2) $\lambda(x) = x+1$ – оператор сдвига (функция следования);
3) $I_n^m(x_1, x_2,...., x_n) = x_m,\ 1 \le m \le n$ – оператор проектирования функции выбора аргументов).

Допустимыми операциями над функциями являются операции суперпозиции (подстановки), рекурсии и минимизации.

Операция суперпозиции. Пусть даны n-местная функция g и n функций $f_1,..., f_n$. Считаем, что функции $f_1,..., f_n$ зависят от одних и тех же переменных $x_1,..., x_m$. Это можно сделать путем введения фиктивных переменных. Суперпозицией (подстановкой) функций g и $f_1,..., f_n$ называется функция:

$$h(x_1,..., x_m) = g(f_1(x_1,..., x_m),..., f_n(x_1,..., x_m)).$$

Если среди заданных функций имеются частичные, то и функция h будет частичной. Функция h на наборе переменных $x_1,..., x_m$ определена тогда и только тогда, когда определены все функции $f_1(x_1,..., x_m),..., f_n(x_1,..., x_m)$ и функция g определена на наборе $f_1(x_1,..., x_m),..., f_n(x_1,..., x_m)$. Операцию суперпозиции обозначают $h = S(g, f_1,..., f_n)$.

Операция рекурсии. Пусть заданы n-местная функция $g(x_1,...,x_n)$ $(n+2)$-местная функция $h(x_1,...,x_n,y,z)$. Определим $(n+1)$-местную функцию f индуктивным образом с помощью соотношения:

$f(x_1,...,x_n,0)=g(x_1,...,x_n)$,

$f(x_1,...,x_n,y+1)=h(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y))$.

Ясно, что данные соотношения однозначно определяют функцию f. Если функции g и h частичные, то $f(x_1,...,x_n,y+1)$ считается определенной в том и только в том случае, когда определены $f(x_1,...,x_n,y)$ и $h(x_1,...,x_n,y,t)$ при $t=f(x_1,...,x_n,y)$. Таким образом, если $f(x_1,...,x_n,y_0)$ неопределено, то и $f(x_1,...,x_n,y)$ неопределено при $y>y_0$. Тогда про функцию f говорят, что она получена рекурсией из функций g и h, и обозначают: $f=R(g,h)$.

Операция минимизации. Пусть задана n-местная функция $g(x_1,...,x_{n-1},y)$. Зафиксируем набор $(x_1,...,x_{n-1},x_n)$ и рассмотрим уравнение относительно y: $g(x_1,...,x_{n-1},y)=x_n$.

Будем решать данное уравнение, вычисляя последовательно $g(x_1,...,x_{n-1},0),g(x_1,...,x_{n-1},1),g(x_1,...,x_{n-1},2),...,$ и сравнивая с x_n. Наименьшее y, для которого выполнено исходное уравнение обозначим через $\mu_y(g(x_1,...,x_{n-1},y)=x_n)$. При этом считаем, что y определено, если $g(x_1,...,x_{n-1},z)$ определено при всех $z\le y$ z. В противном случае считаем, что y неопределено. Значение y есть функция f от переменных $x_1,...,x_n$, про которую говорят, что она получена из функции g операцией минимизации.

Заметим, что определенные выше операции S и R, будучи примененными к всюду определенным функциям, дают всюду определенные функции. Операция M может давать частичные функции даже при применении к всюду определенным функциям.

Функция $f(x_1,..., x_n)$ называется ***частично рекурсивной***, если она может быть получена из базисных функций $O(x),\lambda(x),I_m^n(x_1,...,x_n)$ применением конечного числа раз операций суперпозиции, рекурсии и минимизации.

Иногда частично рекурсивные функции называют функциями, вычислимыми по Черчу. Всюду определенная частично рекурсивная функция называется ***общерекурсивной***. Если рассматривать тот же базис функций, но в качестве допустимых операций брать операции суперпозиции и рекурсии, то получаемые функции называются ***примитивно-рекурсивными***. Обозначим: **Ч** – класс частично рекурсивных функций, $\mathbf{Ч_0}$ - класс общерекурсивных функций, $\mathbf{Ч_{пр}}$ – класс примитивно рекурсивных функций. Класс частично рекурсивных функций – одно из главных понятий теории алгоритмов. Это объясняется тем, что какие бы классы точно очерченных «алгоритмов» до сих пор не рассматривались, во всех случаях оказывалось, что соответствующие числовые функции, вычислимые посредством алгоритмов этих классов, были частично рекурсивными. Поэтому общепринятой является гипотеза, формулируемая как ***Тезис Черча*** (для частично рекурсивных функций):

Класс алгоритмически вычислимых функций совпадает с классом всех частично рекурсивных функций.

Принятие данного тезиса позволяет истолковывать доказательство, что некоторая функция не является частично рекурсивной, как доказательство отсутствия алгоритма вычисления ее значений.

Пример 1:

Определить аналитический вид общерекурсивной функции:

$$\begin{cases} f(0,x) = x, \\ f(y+1,x) = f(y,x)+1. \end{cases}$$

Решение:

Очевидно, $\varphi(x) = x$, будем устанавливать функцию $\psi(x,y,z)$.

По определению примитивной рекурсии (п.3.5.2):

$$f(y+1,x) = \psi(y,\ f(y,x),x) = \left\langle \begin{array}{c} \textit{обозначим} \\ x = y \\ y = f(y,x) \\ z = x \end{array} \right\rangle == \psi(x,y,z).$$

Вернемся к функции $f(y+1,x) = f(y,x)+1$, принимая во внимание введенные обозначения $y = f(y,x)$, получаем:

$$f(y+1,x) = y+1.$$

Итак, $\psi(x,y,z) = y+1$. Тогда числовые значения также легко находятся:

$$f(0,0)=0,\qquad f(0,1)=1,\qquad f(0,2)=2,$$
$$f(1,0)=\psi(0,f(0,0),0)=\psi(0,0,0)=0+1=1,$$
$$f(2,0)=\psi(1,f(1,0),0)=\psi(1,1,0)=1+1=2,$$
$$f(3,0)=\psi(2,f(2,0),0)=\psi(2,2,0)=2+1=3,$$
$$f(1,1)=\psi(0,f(0,1),1)=\psi(0,1,1)=1+1=2,$$
$$f(2,1)=\psi(1,f(1,1),1)=\psi(1,2,1)=2+1=3,$$
$$f(3,1)=\psi(2,f(2,1),1)=\psi(2,3,1)=3+1=4,$$
$$f(1,2)=\psi(0,f(0,2),2)=\psi(0,2,2)=2+1=3,$$
$$f(2,2)=\psi(1,f(1,2),2)=\psi(1,3,2)=3+1=4,$$
$$f(3,2)=\psi(2,f(2,2),2)=\psi(2,4,2)=4+1=5,$$

Выясним, как аналитически выглядит функция $f(y,x)$:

$$\left.\begin{aligned}f(0,x)&=0,\\ f(1,x)&=1+f(0,x)=1+x,\\ f(2,x)&=2+f(1,x)=1+(1+x)=2+x,\\ f(3,x)&=1+f(2,x)=1+(2+x)=3+x,\end{aligned}\right\}y+x.$$

Таким образом, аналитический вид функции имеет вид:

$$f(y,x)=y+x.$$

Пример 2:

Доказать общерекурсивность функции $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Решение:

Функцию $\operatorname{sgn}(x)$ можно определить с помощью простейшей рекурсии таким образом:

$$\begin{cases}\operatorname{sgn}(0)=0,\\ \operatorname{sgn}(y+1)=1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\operatorname{sgn}(0)=O(x),\\ \operatorname{sgn}(y+1)=C_1(y)\end{cases},\ \text{где}\ C_1(y)\equiv 1.$$

Тогда по определению функция $\operatorname{sgn}(x)$ общерекурсивна.

Упражнения:

7.1. Определить аналитический вид общерекурсивной функции:

$$\begin{cases} f(0,x)=0, \\ f(y+1,x)=f(y,x)+x. \end{cases}$$

7.2. Доказать общерекурсивность функции:

1) $P(x,y)=x\cdot y$;

2) $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, x\neq 0, \\ 0, x=0. \end{cases}$

7.3. Доказать, что функции $\max(x,y)$ и $\min(x,y)$ примитивно рекурсивны.

Практическое занятие № 8 «Машины Тьюринга»

Рассмотрим другую алгоритмическую модель, представляющую собой идеализированную ЭВМ и предложенную в 70-х годах с целью моделирования реальных вычислительных машин и анализа сложности вычислений. В результате попыток разложить интуитивно известные нам вычислительные процедуры на элементарные операции построена математическая модель, называемая ***машиной Тьюринга***. Повторение элементарных операций, определенных в этой машине, достаточно для проведения любого возможного вычисления.

Машина Тьюринга включает:

1. Внешний алфавит $A=\{a_0, a_1, ..., a_n\}$, т.е. конечное множество символов. В этом алфавите (в символах этого алфавита) информация вводится в машину. Машина преобразует введенную информацию в новую.
2. Внутренний алфавит $Q=\{q_0, q_1, ..., q_m, R, L, C, P, E\}$. Символы $q_0, q_1, ..., q_m$ выражают конечное число состояний машины, причем q_1 – начальное состояние, q_0 – стоп-состояние.
3. Бесконечную в обе стороны ленту, представляющую память машины. Эта память разбита на клетки. В каждую клетку может быть записана только одна буква. Где a_0 – пустая клетка, она всегда может появиться при движении вправо или влево, если закончится слово информации $a_0 a_1 a_2 ... a_n$.
4. Считывающее устройство. Оно передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки и воспринимать записанный там символ исходного слова. В одном такте работы машины считывающее устройство может сдвигаться на одну клетку или оставаться на месте.

Работа машины складывается из тактов, по ходу которых происходит преобразование начальной информации в промежуточную. В качестве начальной информации на ленту можно подать любую конечную систему знаков внешнего алфавита, расставленного произвольным образом по ячейкам. При этом работа машины Тьюринга может заканчиваться так:

- После конечного числа тактов машина останавливается в q_0 состоянии. При этом на ленте оказывается преобразованная информация. В этом случае говорят, что машина применима к начальной информации I_1 и преобразует ее в результирующую информацию I_2;

- Машина никогда не останавливается (не переходит в q_0 состояние). В этом случае машина не применима к начальной информации I_1.

В каждом такте работы машина Тьюринга действует по единой ***функциональной схеме***:

$$a_i q_j \Rightarrow a_l \begin{Bmatrix} R \\ L \\ C \\ P \\ E \end{Bmatrix} q_s,$$

где $a_i, a_l \in A,\ q_j, q_s \in Q$ и a_i – буква на ленте, обозреваемая считывающим устройством на данном такте, q_j – текущее состояние машины на данном такте.

На каждом такте функциональной схемой вырабатывается команда, состоящая из трех элементов (правая часть формулы):

1. Буква внешнего алфавита a_l, на которую заменяется обозреваемая буква a_i.
2. Адрес внешней памяти и дополнительные действия для выполнения на следующем такте R, L, C, P или E.
3. Следующее состояние машины.

Формирование правой части функциональной схемы происходит по командам, совокупность которых образует программу машины Тьюринга. Программа представляется в виде двумерной таблицы (табл. 5), называемой ***тьюринговой функциональной схемой***, в каждой клетке которой записываются отдельные команды. Работа машины Тьюринга полностью определяется ее программой.

Говорят, что непустое слово α в алфавите A воспринимается машиной в стандартном положении, если оно записано в последовательных клетках ленты, все другие клетки пусты, и машина обозревает крайнюю клетку справа из тех, в которых записано слово α.

Если данное состояние описывается машинным словом M, то машинное слово, описывающее следующее состояние машины, будет обозначаться через $M^{(1)}$. Далее аналогично $M^{(i+1)} = (M^{(i)})^{(1)}$, $i = 0,1,2,\ldots$ Переход машины Тьюринга из начального в последующие состояния изображается в виде цепочки слов $M \vdash M^{(1)} \vdash M^{(2)} \vdash \ldots$

Таблица 5. Функциональная схема Тьюринга

Состояния	Символы внешнего алфавита			
	a_0	a_1	$\cdots$	a_n
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	$\cdots$	a_2Lq_1
q_2	a_1Cq_0	a_2Cq_1	$\cdots$	a_1Cq_2
…	…	…	…	…
q_m	a_1Pq_3	a_0Rq_{m-1}	$\cdots$	$a_{n-1}Rq_1$

Чтобы описывать работу машины Тьюринга более удобным образом, текущее состояние машины пишут не внизу алфавита, а перед обозреваемой ячейкой. Например, пусть $A=\{0,1\}, Q=\{q_0,q_1,q_2\}$, q_0 - символ остановки. Начальная информация: $q_1 11.$ Тогда программа строится следующим образом:

$$q_1 0 \to q_2 R,\ q_2 0 \to q_0 1,\ q_1 1 \to q_1 R,\ q_2 1 \to q_2 R.$$

Если первое направление уточняет понятие алгоритма через класс рекурсивных функций, то второе, связанное с машинной арифметикой, сначала уточняет понятие алгоритма, а затем определяет класс вычислимых функций. Основная идея этого направления заключается в том, что алгоритмические процессы – это процессы, которые могут имитироваться на специально построенных машинах, которые описываются в точных математических терминах. В результате оказывается, что сложные процессы можно моделировать на простых устройствах. Всякий алгоритм может быть задан некоторой функциональной схемой и реализован в соответствующей машине Тьюринга. Эта гипотеза называется ***тезисом Тьюринга***.

Пример 1:

Пусть $A=\{a_0,a_1,a_2\}$, $Q=\{q_0,q_1,q_3,q_4\ R,\ L,\ C\}$ и машина Тьюринга управляется функциональной схемой:

Состояния	Символы внешнего алфавита		
	a_0	a_1	a_2
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	a_2Lq_1
q_2	a_1Cq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_2
q_3	a_0Rq_0	a_1Rq_4	a_2Cq_1
q_4	a_1Cq_3	a_0Rq_4	a_2Rq_4

Определить конечный результат работы машины, если начальная конфигурация имеет вид:

а) $a_0 a_1 \underset{q_1}{a_2} a_2 a_0$; б) $a_0 \underset{q_1}{a_1} a_0$.

Решение:

а) Рассмотрим работу машины пошагово:

1. Считывающим устройством обозревается буква a_2 (слово считывается слева направо, a_0 – пустая клетка), а машина находится в состоянии q_1: $a_0 \underset{q_1}{a_1} a_2 \underset{\Uparrow}{a_2} a_0$. При этом вырабатывается команда $a_2 L q_1$, т.е. считывающее устройство сдвигается влево, a_2 заменяется на a_2, состояние q_1 меняется на q_1, получаем конфигурацию $a_0 a_1 \underset{q_1 \Uparrow}{a_2} a_2 a_0$.
2. Следующая конфигурация, по аналогии, будет: $a_0 \underset{\Uparrow}{a_1} \underset{q_1}{a_2} a_2 a_0$ (считывающее устройство сдвинулось влево). Теперь обозревается буква a_1, машина находится в состоянии q_1, т.е. вырабатывается команда $a_1 R q_2$ – считывающее устройство сдвигается вправо, a_1 заменяем на a_1, состояние q_1 меняется на q_2, получаем конфигурацию $a_0 a_1 \underset{q_2 \Uparrow}{a_2} a_2 a_0$.
3. Обозревается буква a_2, машина находится в состоянии q_2, т.е. вырабатывается команда $a_1 C q_2$ – считывающее устройство стоит на месте, a_2 заменяется на a_1, состояние q_2 меняется на q_2, получаем конфигурацию $a_0 a_1 \underset{q_2 \Uparrow}{a_1} a_2 a_0$.
4. Обозревается буква a_1, машина находится в состоянии q_2, т.е. вырабатывается команда $a_2 C q_1$ – считывающее устройство стоит на месте,

a_1 заменяется на a_1, состояние q_2 меняется на q_1, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_1\Uparrow}{a_2}a_2a_0$.

Таким образом, мы пришли в начальное состояние. Процесс работы машины повторяется, и, следовательно, конечный результат не может быть получен. Данная машина Тьюринга не применима к исходной информации.

б) Пусть начальная информация имеет вид $a_0\underset{q_1}{a_1}a_0$. Тогда, действуя аналогично, придем к следующим конфигурациям:

1. $a_0\underset{q_1\Uparrow}{a_1}a_0$ обозревается буква a_1, машина находится в состоянии q_1, вырабатывается команда a_1Rq_2 – считывающее устройство сдвигается вправо, a_1 заменяется на a_1, состояние q_1 меняется на q_2, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_2\Uparrow}{a_0}$.
2. Обозревается буква a_0, машина находится в состоянии q_2, вырабатывается команда a_1Cq_0 – считывающее устройство стоит на месте, a_0 заменяется на a_1, состояние q_2 меняется на q_0, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_0\Uparrow}{a_1}a_0$. Мы пришли в стоп состояние q_0, следовательно, слово a_1a_1 – результат ее работы, и машина применима к исходной информации.

Пример 2:

Пусть $A=\{0,1\}$, $Q=\{q_0,q_1,q_2\}$, q_0 - символ остановки,. Программа строится следующим образом: $q_10\to q_2R,\ q_20\to q_01,\ q_11\to q_1R,\ q_21\to q_2R.$ Определить конечный результат работы машины, если начальная конфигурация имеет вид:

а) q_111; б) q_2101.

Решение:

а) $q_1 11 \vdash 1q_1 1 \vdash 11q_1 0 \vdash 110q_2 0 \vdash 110q_0 1$,

где 0 – символ пустой ячейки ленты машины.

б) $q_2 101 \vdash 1q_2 01 \vdash 1q_0 11$.

Упражнения:

8.1. Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_3, q_4\ R,\ L,\ C\}$ и машина Тьюринга управляется функциональной схемой:

Состояния	Символы внешнего алфавита			
	a_0	a_1	a_2	a_3
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	a_3Lq_1	a_2Cq_1
q_2	a_3Cq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_2	a_2Rq_0
q_3	a_0Rq_0	a_1Rq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_3
q_4	a_1Cq_3	a_0Rq_4	a_3Rq_4	a_3Lq_3

Определить конечный результат работы машины, если начальная конфигурация имеет вид:

1) $a_0 a_1 \underset{q_1}{a_2} a_3 a_0$;

2) $a_0 \underset{q_2}{a_2} a_0$;

3) $a_0 a_3 \underset{q_3}{a_1} a_2 a_0$;

4) $a_0 \underset{q_4}{a_3} a_2 a_0$;

5) $a_0 \underset{q_1}{a_1} a_1 a_0$;

6) $a_0 \underset{q_3}{a_3} a_0$.

8.2. Построить машину Тьюринга для вычисления функции «левый сдвиг»: $01^x q_1 0 \Rightarrow q_0 01^x 0$.

8.3. Построить машину Тьюринга для вычисления функции «правый сдвиг»: $q_0 01^x 0 \Rightarrow 01^x q_0 0$.

Рекомендуемая литература:

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие для вузов. - М.: Академия, 2004. - 446 с.
2. Шапорев С. Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий: Учебное пособие для вузов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 410 с.
3. Шевелев Ю. П. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие. - Томск: Дельтаплан, 2007. - 219 с.
4. Шелупанов А.А.Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. - Томск : STT, 2001. - 176 с.
5. Перемитина Т.О. Математическая логика и теория алгоритмов: методические указания к выполнению практических работ для студентов специальности 230102 - Автоматизированные системы обработки информации и управления. – Томск: ТУСУР , 2007. - 36 с.