Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика

Учебно-методическое пособие
(курс практических занятий)

2-й семестр (часть 1)

для специальности:
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
(группа 445)

Томск
ТУСУР
2016

Электронное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группе 445 весной 2016 года.

Во втором семестре, согласно рабочей программе, на специальности 09.03.03 в первой половине весеннего семестра изучаются следующие темы:

1. Интегральное исчисление.
2. Дифференциальные уравнения.

Может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий.

ПРАКТИКА № 1
19.02.2016
Элементарные преобразования подынтегрального выражения.

Задача 1. Вычислить $\int x^3 dx$.

Решение. Известно, что $(x^4)' = 4x^3$. Для того, чтобы гарантированно правильно учесть коэффициент, лучше сразу домножить и поделить на 4, чтобы сформировать под знаком интеграла готовое выражение вида $4x^3$.

$\int x^3 dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 dx = \frac{1}{4}\int (x^4)' dx = \frac{1}{4}x^4 + C$. Ответ. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Задача 2. Вычислить $\int e^{5x} dx$.

Решение. Известно, что $(e^{5x})' = 5e^{5x}$. При дифференцровании функций вида $f(kx)$ происходило умножение на константу, а при интегрировании наоборот, деление. Чтобы понять, почему это так, постараемся сначала сформировать внутри интеграла готовую производную от этой экспоненты, для чего домножим и поделим на 5.

$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int (e^{5x})' dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$. Ответ. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$.

Задача 3. Вычислить $\int \cos 3x dx$.

Решение. Замечая, что $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, преобразуем так:

$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x dx = \frac{1}{3}\int (\sin 3x)' dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

Задача 4. Вычислить $\int \frac{1}{x+3} dx$.

Решение. Известна формула $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$. Если в знаменателе линейная функция вида $x + a$, то можно добавить константу под знаком дифференциала, от этого ничего не изменилось бы, ведь производная константы это 0. Итак, $\int \frac{1}{x+3} dx = \int \frac{1}{x+3} d(x+3)$.

Теперь интеграл имеет вид $\int \frac{1}{t} dt$ и конечно, равен $\ln|t| + C$. Фактически применили замену $t = x + 3$. Сделав обратную замену , получаем ответ: $\ln|x+3| + C$.

Задача 5. Вычислить $\int \frac{x}{x+2} dx$.

Решение. Здесь, в отличие от прошлой задачи, уже и в числителе есть переменная, то есть здесь неправильная дробь. Сначала нужно выделить целую часть дроби и отделить правильную дробь. В данном случае для этого достаточно прибавить и отнять 2 в числителе.

$$\int \frac{x}{x+2} dx = \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx =$$

$= \int dx - 2\int \frac{1}{x+2} dx$ и теперь, когда разбили на сумму или разность табличных интегралов, получаем ответ: $x - 2\ln|x+2| + C$.

Задача 6. Вычислить $\int \frac{x^2}{x+5} dx$.

Решение. В данном случае неправильная дробь, причём степень в числителе более высокая. Можно применить общий метод выделения целой части, то есть поделить числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x + 0 & x+5 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 + 5x} & x-5 \\ -5x + 0 & \\ \underline{-5x - 25} & \\ 25 & \end{array}$$

Получили частное $x - 5$, остаток 25. Теперь можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int \frac{x^2}{x+5} dx = \int \left(x - 5 + \frac{25}{x+5} \right) dx = \int (x-5) dx + \int \frac{25}{x+5} dx .$$

Теперь, когда свели к сумме табличных интегралов, то с помощью уже ранее изученных действий получаем такой ответ.

Ответ: $\frac{x^2}{2} - 5x + 25\ln|x+5| + C$.

Задача 7. Вычислить $\int \frac{x}{(x+2)(x+3)}dx$.

Решение. В данном примере нужно сначала разбить дробь на сумму простейших:

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

и после этого, будет сумма двух таких интегралов, каждый из которых сводится к логарифму. Чтобы найти A и B, приведём к общему знаменателю:

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}.$$

Теперь приравняем числители, ведь дроби равны, знаменатели одинаковы, значит и числители тоже:

$A(x+3)+B(x+2) = x \quad \Rightarrow \quad Ax+3A+Bx+2B = x \quad \Rightarrow$ $(A+B)x+(3A+2B) = 1x+0$.

Отсюда получается система уравнений, из которой можно найти неопределённые коэффициенты A и B:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $A=-2$, $B=3$. Тогда интеграл распадается на простейшие:

$$\int \frac{x}{(x+2)(x+3)}dx = \int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right)dx = 3\int\frac{1}{x+3}dx - 2\int\frac{1}{x+2}dx.$$

Ответ: $3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C$.

Метод неопределённых коэффициентов подробнее будет изучаться в параграфе «интегрирование рациональных дробей», но его основная идея понятна уже из этой задачи.

Задача 8. Вычислить $\int \frac{1}{x^2+4x+20}dx$.

Решение. Дискриминант знаменателя отрицательный, поэтому здесь невозможно сделать как в прошлой задаче, так как нет корней знаменателя и дробь невозможно свести к виду $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$.

Но при D < 0 можно выделить полный квадрат:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+20}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+16}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4^2}dx.$$

С помощью замены $t = x+2$ сводится к интегралу:

$\int \frac{1}{t^2+4^2}dt = \frac{1}{4}arctg\left(\frac{t}{4}\right)+C$, и далее с помощью обратной замены получаем ответ: $\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x+2}{4}\right)+C$.

Задача 9. Вычислить $\int \frac{1}{x^2+4x+4}dx$.

Решение. В предыдущих задачах было D>0 и D<0 , а в этой D=0.

Выделяя полный квадрат, получим $\int \frac{1}{x^2+4x+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}dx$.

В этом случае сводится не к арктангенсу, а к степенной функции, потому что получается $\int \frac{1}{t^2}dx = -\frac{1}{t}+C$, и ответ: $-\frac{1}{x+2}+C$.

Тригонометрические преобразования.

Кроме различных арифметических преобразований типа разложения многочленов или дробей, существуют задачи, в которых нужно выполнить тригонометрические преобразования подынтегральной функции.

Задача 10. Вычислить интеграл $\int \sin^2 xdx$.

Решение. Воспользуемся формулой понижения степени, чтобы перейти от степеней тригонометрических функций к выражениям типа $\sin(kx)$ или $\cos(kx)$.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

Итак, ответ: $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Задача 11. Вычислить $\int \cos 2x \cos^2 x dx$.

Решение. Здесь можно было бы применить формулу для косинуса двойного угла, но это преобразование бы только увеличило степени. Поэтому в данном случае для удобнее применить формулу понижения степени ко второму множителю и не менять первый.

$$\int \cos 2x \cos^2 x dx = \int \cos 2x \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x (1+\cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos^2 2x dx.$$

Первый интеграл вычисляется уже известным способом, а во втором снова понизим степень.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x dx,$$

и в итоге ответ: $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + \frac{1}{16}\sin 4x + C$.

Подведение под знак дифференциала.

Задача 12. Вычислить $\int \sin^4 x \cos x dx$.

Решение. Замечаем, что присутствует множитель $\cos x$, который является производной от $\sin x$. А остальная часть функции как раз зависит только от $\sin x$. Поэтому можно подвести $\cos x$ под знак дифференциала: $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x)$

Применяем замену $t = \sin x$: $\int \sin^4 x d(\sin x) = \int t^4 dt$.

Далее, $\int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C$, и после обратной замены получим ответ: $\frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

Задача 13. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5 dx}{x^6+1}$.

Решение. $\int \frac{x^5 dx}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5 dx}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int \frac{d(x^6)}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int \frac{d(x^6+1)}{x^6+1} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} =$ $= \frac{1}{6}\ln|t| + C = \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + C$. Учитывая тот факт, что $x^6+1>0$, знак модуля не нужен.

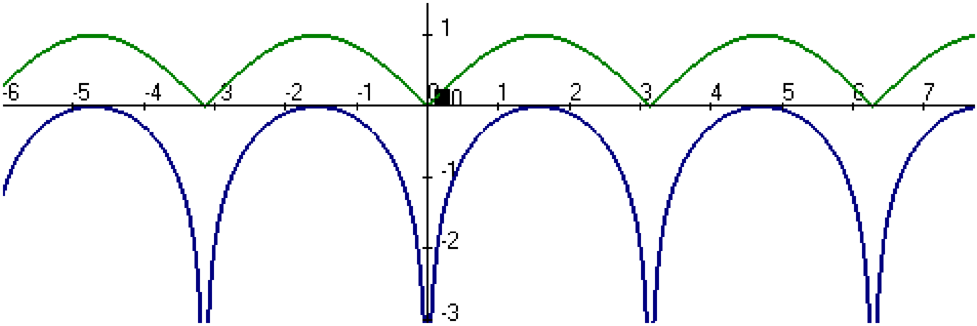
Задача 14. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

Решение. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t) + C =$ $arctg(\sin x) + C$.

Задача 15. Вычислить $\int ctgxdx$.

Решение. $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$ $\ln|\sin x| + C$.

Для сведения, покажем, как выглядит график функции $y = \ln|\sin x|$.



Зелёным цветом изображён график $|\sin x|$, синим $\ln|\sin x|$.

Вертикальные асимптоты $x = \pi k$.

Аналогично решается и следующая задача.

Задача 16. Вычислить $\int tgxdx$.

Решение. $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C =$ $-\ln|\cos x| + C$.

Задача 17. Вычислить $\int xe^{x^2} dx$.

Решение. $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}\int e^t dt =$ $\frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Задача 18. Вычислить $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$.

Решение. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $= \frac{1}{4}\arcsin(t) + C = \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C$.

Задача 19. Вычислить $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

Решение. Если сразу подвести под знак дифференциала то, что есть в числителе, то будет $d(x^{10})$, но тогда в знаменателе получится выражение $\sqrt{\sqrt{x}+1}$. чтобы не происходило такого усложнения и не появились вложенные квадратные корни, надо подводить не весь числитель, а отделить тот множитель, который нам удобнее, чтобы потом всё выражалось через x^5.

$$\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}dx = \int \frac{x^5x^4}{\sqrt{x^5+1}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{x^5(5x^4dx)}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5d(x^5)}{\sqrt{x^5+1}}$$

и теперь, после замены $t = x^5$, получится $\frac{1}{5}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$.

Далее, сделаем преобразование, котрое позволит оставить только однотипные корни:

$$\frac{1}{5}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{5}\int \frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{5}\int \frac{t+1}{\sqrt{t+1}}dt - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt =$$

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{t+1}dt - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{5}\int (t+1)^{1/2}dt - \frac{1}{5}\int (t+1)^{-1/2}dt$$

далее уже с помощью обычных действий со степенными функциями:

$$\frac{1}{5}\frac{1}{3/2}(t+1)^{3/2} - \frac{1}{5}\frac{1}{1/2}(t+1)^{1/2} + C = \frac{2}{15}(t+1)^{3/2} - \frac{2}{5}(t+1)^{1/2} + C.$$

Задача 20. Вычислить $\int x\cos(x^2)dx$.

Решение. $\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)(2xdx) = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)d(x^2) =$

$= \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$

Домашние задачи. 1. $\int \cos x \cdot e^{\sin x}dx$. **2.** $\int 3x^2e^{x^3}dx$.

Ответы к ним. 1. $e^{\sin x} + C$. 2. $e^{x^3} + C$.

ПРАКТИКА № 2
22.02.2016

Задача 1. Вычислить $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[4]{\sin 3x}}dx$.

Решение. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[4]{\sin 3x}}dx = \int (\sin 3x)^{-1/4}\cos 3x dx =$

$$= \frac{1}{3}\int (\sin 3x)^{-1/4}(3\cos 3x dx) = \frac{1}{3}\int (\sin 3x)^{-1/4} d(\sin 3x) = \frac{1}{3}\int t^{-1/4}dt =$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3/4}t^{3/4} + C = \frac{4}{9}t^{3/4} + C = \frac{4}{9}(\sin 3x)^{3/4} + C.$$

Задача 2. Вычислить $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. Заметим, что в числителе производная того выражения, которое в знаменателе. Поэтому

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$\ln\left|x^2+4x+8\right| + C.$$

Задача 3. Вычислить $\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. Здесь, в отличие от прошлой задачи, в числителе уже произвольный многочлен, не соответствующий производной знаменателя. Тем не менее, можно путём арифметических операций получить там дифференциал знаменателя:

Домножим и поделим на 2, чтобы исправился коэффициент при x:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+8}dx$$

Теперь осталось прибавить и отнять 2, и будет получено $2x+4$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)-2}{x^2+4x+8}dx =$$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+8}dx$.

В первом слагаемом делается ровно то же самое, что в прошлой задаче, а во втором - выделить полный квадрат, и в итоге сводится к арктангенсу:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right| - \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

Задача 4. Вычислить $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Несмотря на то, что интеграл похож на $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, но, тем не менее, в числителе есть переменная x, поэтому это не табличный интеграл, и ответ здесь вовсе не арксинус. Заметим, что в числителе 1-я степень, а под корнем в знаменателе 2-я. Домножим и поделим так, чтобы в числителе оказалось то выражение, которое под корнем в знаменателе.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

после замены переменной, это можно переписать так: $-\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

а значит, $-\sqrt{t}+C$ и после обратной замены, ответ: $-\sqrt{1-x^2}+C$.

Задача 5. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+18x-5}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+18x-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(-9x^2+18x-9)+4}} =$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x^2-2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-3^2(x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(3x-3)^2}}.$$

Для того, чтобы применить формулу, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$ нужно обозначить $t = 3x - 3$. Но сначала сделаем так, чтобы и в числителе оказался не просто dx а $d(3x-3)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (3x-3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{\sqrt{2^2 - (3x-3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-3)}{\sqrt{2^2 - (3x-3)^2}}.$$

Теперь интеграл имеет вид $\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}}$, и равен $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + C$.

После обратной замены, ответ: $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-3}{2}\right) + C$.

Задачи по теме «Интегрирование по частям»

Вспомнить формулу $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$.

Задача 6. Вычислить $\int xe^{3x}dx$.

Решение. Пусть $u = x$, так надо, чтобы понизилась степень на следующем шаге. Составим таблицу:

$u = x$	$v = \frac{1}{3}e^{3x}$
$u' = 1$	$v' = e^{3x}$

Тогда $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$.

Задача 7. Вычислить $\int x\cos 5x dx$.

Решение.

$u = x$	$v = \frac{1}{5}\sin 5x$
$u' = 1$	$v' = \cos 5x$

$$\int x\cos 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C.$$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int x^2 e^x dx$.

Решение. Так как степенная функция 2-й степени, то эта задача решается в 2 шага. На первом шаге, обозначаем $u_1 = x^2$, $v_1' = e^x$.

$u_1 = x^2$	$v_1 = e^x$
$u_1' = 2x$	$v_1' = e^x$

Тогда $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(\int x e^x dx\right)$.

На 2-м шаге, обозначим $u_2 = x$, $v_2' = e^x$.

$u_2 = x$	$v_2 = e^x$
$u_2' = 1$	$v_2' = e^x$

В скобке происходит вычисление как бы для нового примера, выполним это вложенное действие:

$$x^2 e^x - 2\left(\int x e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) + C .$$

Итак, ответ: $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$.

Задача 9. $\int \arcsin x dx$

Решение. Пусть $u = \arcsin x$, второго множителя нет, но мы формально можем считать, что он есть, только равен 1. Итак, $v' = 1$. Построим таблицу:

$u = \arcsin x$	$v = x$
$u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$v' = 1$

Тогда $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$$x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$x \arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{t} + C .$$

Ответ: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Задача 10. Вычислить $\int xarctgxdx$.

Решение. На этом примере вы увидите, что иногда полезно отступить от того, что мы, как правило, степенную функцию обозначали через u. Дело в том, что если так сделать, то при переходе от dv к v возникает целая новая задача, связанная с поиском интеграла от арктангенса. Напротив, если $u = arctgx$, то его производная состоит только из степенных, то есть происходит значительное упрощение. Конечно же здесь придётся смириться с тем что $v' = x$ усложняется, растёт его степень, т.е. перейдёт в $v = \frac{x^2}{2}$, но зато арктангенс упрощается очень сильно. Итак, построим таблицу:

$u = arctgx$	$v = \frac{x^2}{2}$
$u' = \frac{1}{x^2+1}$	$v' = x$

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + C =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)arctgx - \frac{x}{2} + C\ .$$

Задача 11. Вычислить $\int\left(e^{ax}\cos bx\right)dx$.

Решение. На первом шаге,

$u_1 = e^{ax}$	$v_1 = \frac{1}{b}\sin bx$
$u_1' = ae^{ax}$	$v_1' = \cos bx$

$I = \int\left(e^{ax}\cos bx\right)dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(\int e^{ax}\sin bxdx\right)$. Теперь в скобках аналогичное выражение, применим к нему такие же преобразования.

$u_2 = e^{ax}$	$v_2 = -\frac{1}{b}\cos bx$
$u_2' = ae^{ax}$	$v_2' = \sin bx$

Продолжим преобразования:

$$\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(\int e^{ax}\sin bx dx\right) =$$

$$\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx\right).$$

После двух действий, мы видим снова интеграл I в конце строки. Можно записать так, раскрыв скобки:

$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I$. А теперь можно просто выразить это I арифметическим путём.

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{a^2+b^2}{b^2}I = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C .$$

Итак, $\int\left(e^{ax}\cos bx\right)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$.

Задача 12. Получить формулу вычисления интегралов $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

Решение. Обозначим всю функцию u и применим интегрирование по частям, при этом формально считаем второй множитель равным 1.
Для удобства, временно применим отрицательные степени вместо дробей.

$u = (x^2+a^2)^{-n}$	$v = x$
$u' = -n(x^2+a^2)^{-n-1}2x$	$v' = 1$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - (-2n)\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

Теперь можем разбить на две дроби, интеграл от первой сводится к I_n, а второй к I_{n+1}.

$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, то есть

$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, откуда выразим I_{n+1} через I_n:

$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n$,

вывели «рекурсивную» формулу $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$, с помощью которой интеграл такого типа для большей степени сводится к меньшей степени, а значит, все они последовательно сводятся к $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$, который равен $\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$.

Задача 13. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Применим формулу, при этом n+1 = 2 (n=2 неправильно, ведь в формуле та степень, которую выражаем, это n+1 а та, через которую, это n). При этом n = 1. a = 1.

Формула приобретает такой вид: $I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1$.

Ответ: $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}arctgx + C$.

Задача 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$.

Применим формулу, при этом n+1 = 3, n = 2. a = 2.

$I_3 = \frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} I_2$, в свою очередь I_2 надо выразить через I_1, используя параметры n+1 = 2, n = 1. a = 2.

$I_2 = \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{8} I_1$, а вот I_1 уже просто табличный интеграл, а именно:

$\int \frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + C$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = I_3 = \frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{8} I_1\right) =$$

$$I_3 = \frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16} arctg \frac{x}{2}\right) + C =$$

$$\frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{128}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{256} arctg \frac{x}{2} + C.$$

Домашние задачи. 1. $\int \frac{x+1}{x^2+9} dx$

Решение. $\int \frac{x+1}{x^2+9} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+9} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9} dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+9} dx =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} + \int \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3} arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-18x+9}}$. Ответ. $\frac{1}{3}\ln|3x-3| + C$.

445 ПРАКТИКА № 3 04.03.2016

Рациональные дроби.

Ситуация 1. Если все корни знаменателя различны.

Задача 1. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$.

Решение. Разложение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Приравняем к исходной дроби. Знаменатели у них и так равны, осталось приравнять числители:

$A(x-2)+B(x-1)=1$ из этого следует:

$(A+B)x+(-2A-B)=0x+1$.

Так как в исходном числителе была только константа 1, то искусственно приписали $0x$, для того, чтобы присутствовали все степени, коэффициенты при которых надо сравнить.

Получается система уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$$

Решаем систему, складывая уравнения между собой, получится $-A=1$, т.е. $A=-1$, тогда $B=1$. Теперь интеграл можно разбить на два интеграла от таких слагаемых:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx.$$

Ответ: $\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, либо в такой форме: $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

Задача 2. Найти интеграл $\int \frac{1}{x^2-1}dx$.

Решение. Сначала разложим знаменатель на множители:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}dx.$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}.$$

$Ax-A+Bx+B=0x+1$, тогда

$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases}$, отсюда $B=\frac{1}{2}$, $A=-\frac{1}{2}$.

$$\int\frac{1}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

$$= \ln\left(\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right)+C.$$

Задача 3. $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

Решение. В данном случае знаменатель уже разложен в произведение множителей первой степени. Теперь представим дробь в виде суммы:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

После приведения к общему знаменателю:

$$\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Тогда $A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)=1$.

Перегруппируем слагаемые, так, чтобы вынести отдельно вторые степени, первые степени и константы.

$$(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+(6A+3B+2C)=0x^2+0x+1.$$

Отсюда строим систему уравнений:

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases}$ чтобы её решить, построим расширенную

матрицу системы и применим метод Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Сначала ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на 5, затем от 3-й отняли 1-ю, умноженную на 6.

Так мы обнулили всё ниже углового элемента a_{11}.

А теперь к 3-й строке прибавили 2-ю, умноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уже получилась треугольная основная матрица.

Ей соответствует такая система:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B+2C=0 \\ 2C=1 \end{cases}$$, т.е. $C=\frac{1}{2}$, тогда $B=-1$, а тогда $A=\frac{1}{2}$.

Теперь интеграл сводится к такому виду:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x-2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}dx \ ,$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx$.

Решение. Во-первых, найдём корни знаменателя и разложим его на множители: $\int \frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}dx$.

Далее, $\frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$,

$$\frac{A(x^2-4)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{x^2+4x-2}{x(x+2)(x-2)}.$$

В числителе уже и так был многочлен, а не просто число 1, поэтому не придётся добавлять $0x^2$, ведь все коэффициенты, к которым надо приравнять, в наличии есть.

Приравняем числители:

$$Ax^2-4A+Bx^2-2Bx+Cx^2+2Cx=x^2+4x-2 \quad \rightarrow$$

$$(A+B+C)x^2+(-2B+2C)x-4A=x^2+4x-2.$$

Тогда система принимает вид:

$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2B+2C=4 \\ -4A=-2 \end{cases}$, отсюда $A=\frac{1}{2}$,

тогда с учётом этого система примет вид:

$\begin{cases} B+C=1/2 \\ -B+C=2 \end{cases}$, тогда $2C=\frac{5}{2}$, т.е. $C=\frac{5}{4}$, $B=-\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}dx.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$.

Задача 5. Вычислить интеграл $\int\frac{x+4}{(x+1)(x-5)}dx$.

Решение. $\frac{x+4}{(x+1)(x-5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x+1)}{(x+1)(x-5)}$.

$(A+B)x+(-5A+B)=1x+4$, тогда система уравнений для неопределённых коэффициентов:

$\begin{cases} A+B=1 \\ -5A+B=4 \end{cases}$. Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получим:

$6A=-3$, т.е. $A=-\frac{1}{2}$, тогда $B=\frac{3}{2}$.

Итак, $\int \frac{x+4}{(x+1)(x-5)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-5}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx =$
$\frac{3}{2}\ln|x-5| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$.

Рациональные дроби.
Случай 2. Если есть кратные корни.

Задача 6. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение. Как видим, здесь корень 1 имеет кратность 2. Разложение на простейшие дроби нельзя проводить так, как будто бы здесь три независимых множителя $(x-1)$, $(x-1)$, $(x+2)$, т.е. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$, иначе получится противоречие, ведь общий знаменатель будет содержать всего лишь 1-ю степень $(x-1)$ но никак не вторую. Надо степени знаменателя учитывать по возрастающей, до кратности корня, а именно, так: $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$.

Приведём к общему знаменателю:
$\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$.

Числитель этой дроби равен числителю исходной, той, которая была в интеграле:
$A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1) = x^2+x+3$.
$(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C) = x^2+x+3$, система:
$\begin{cases} A \quad +C = 1 \\ A+B-2C = 1 \\ -2A+2B+C = 3 \end{cases}$. Построим расширенную матрицу и решим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Система приведена к виду: $\begin{cases} A \quad + C = 1 \\ B - 3C = 0 \\ \quad 3B = 5 \end{cases}$

Тогда $B = \frac{5}{3}$, $C = \frac{5}{9}$, $A = \frac{4}{9}$. И теперь интеграл распадается на сумму трёх интегралов: $\frac{4}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{5}{9}\int \frac{1}{x+2}dx$.

В 1 и 3 слагаемых - как раньше, а вот во 2-м логарифм в ответе не получится, ведь тут уже 2-я а не 1-я степень в знаменателе.

Полезно вспомнить, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

То есть, интеграл от -2 степени будет содержать -1 степень, и меняется знак.

Ответ: $\frac{4}{9}\ln|x-1| - \frac{5}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{9}\ln|x+2| + C$.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^4 - x^2}dx$.

Решение. $\int \frac{1}{x^4 - x^2}dx = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)}dx = \int \frac{1}{x^2(x+1)(x-1)}dx$.

Здесь корень 0 имеет кратность 2, остальные корни простые.

$$\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}.$$

После приведения к общему знаменателю, числитель будет такой:

$Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x-1) + Dx^2(x+1)$.

После приведения подобных:

$(A + C + D)x^3 + (B - C + D)x^2 - Ax - B$, это надо приравнять к

$0x^3+0x^2+0x+1$. Получится систему с 4 неизвестными:

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B-C+D=0 \\ -A=0 \\ -B=1 \end{cases}$$ Поскольку A,B определяются сразу же, $A=0$, $B=-1$,

то матрицу 4 порядка для метода Гаусса строить не надо, а останется только маленькая система на C,D.

$$\begin{cases} C+D=0 \\ -C+D=1 \end{cases}$$ тогда $C=-\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{2}$.

$A=0$, то есть, как видим, некоторые слагаемые в некоторых примерах могут и пропадать, однако те, где степень самая высокая, равная кратности - не могут, так, здесь не могло бы быть $B=0$, иначе возникло бы противоречие при приведении к общему знаменателю.

$$-\int\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx$.

Решение. Сначала запишем знаменатель подробнее, с учётом корней:

$$\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx = \int\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2}dx.$$

Это тот случай, когда оба корня кратные, кратности 2.

Разложение на простейшие дроби будет иметь такой вид:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}.$$

После приведения к общему знаменателю, в числителе будет такое выражение:

$$A(x+1)(x-1)^2+B(x-1)^2+C(x-1)(x+1)^2+D(x+1)^2 =$$

$$A(x+1)(x^2-2x+1)+B(x^2-2x+1)+C(x-1)(x^2+2x+1)+D(x^2+2x+1)$$

$$= A(x^3-x^2-x+1)+B(x^2-2x+1)+C(x^3+x^2-x-1)+D(x^2+2x+1).$$

перегруппируем слагаемые, чтобы вынести каждую степень отдельно:

$$(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(-A-2B-C+2D)x+(A+B-C+D).$$

Этот многочлен равен $0x^3+0x^2+0x+1$, таким образом, получается система уравнений:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=0 \\ -A-2B-C+2D=0 \\ A+B-C+D=1 \end{cases}$$

Построим расширенную матрицу и применим метод Гаусса:
Сначала обнулим всё ниже чем a_{11}, затем ниже a_{22}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ниже a_{33} можно уже и не обнулять, ведь идея метода Гаусса состоит в том, чтобы количество неизвестных снижалось, вплоть до одной в последнем уравнении, а здесь уже так и есть, в последнем уравнении всего один элемент. Сначала выразим C, затем через неё D и так далее. Система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+2C+D=0 \\ 4C+4D=0 \\ -4C=1 \end{cases} \Rightarrow C=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4},\ A=\frac{1}{4}.$$

Тогда в интеграле функция распадается на сумму 4 слагаемых:

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

из всех вынесли общий коэффициент $1/4$, и перед третьим слагаемым поставили знак минус. Получается:

$$\frac{1}{4}\left(\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right)+C=$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)+C.$$

Рациональные дроби.

Случай 3. Если есть комплексные корни.

В следующих задачах в знаменателе будут неразложимые множители 2-й степени с отрицательным дискриминантом.

Задача 9. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x(x^2+4)}dx$.

Решение. Запишем разложение на простейшие дроби: $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$.

Это равно $\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)}$. Тогда

$$Ax^2+4A+Bx^2+Cx=0x^2+0x+1.$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 4A=1 \end{cases}, \text{ итого } A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ C=0.$$

Тогда $\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{4}\int\frac{x}{x^2+4}dx$.

Во втором слагаемом, можно подвести под знак дифференциала:

$$\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+C.$$

Задача 10. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Применим формулу суммы кубов

$$\int\frac{1}{x^3+1}dx = \int\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx.$$

Знаменатель дальше разложить невозможно, ведь во второй скобке отрицательный дискриминант. Теперь извлечём дробь и разложим на простейшие.

$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$. Тогда

$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1$ (приравняли числители этой дроби и той исходной, что была в интеграле).

Тогда $Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C=0x^2+0x+1$.

$(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)=0x^2+0x+1$

Система уравнений:

$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$, решая её методом Гаусса, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на последнем этапе, от 3 строки отняли 2-ю. Получили систему:

$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ -3B=1 \end{cases}$, здесь $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, $A=\frac{1}{3}$.

Тогда надо рассматривать такую сумму интегралов:

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{6}\int\frac{3}{x^2-x+1}dx =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{6}\int\frac{3}{x^2-x+1}dx$$

Разбили дробь так, чтобы в одной части подвести под знак дифференциала, а во второй в числителе 1, там можно выделить полный квадрат и свести к арктангенсу.

Модуль во втором логарифме не нужен, так как там у выражения отрицательный дискриминант, т.е. нет корней, оно положительно.

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}/2} arctg\left(\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C .$$

445 ПРАКТИКА № 4 18.03.2016
Интегрирование иррациональностей.

Задача 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$.

Решение. Здесь есть корни порядка 2 и 3. Наименьшее общее кратное, НОК(2,3) = 6. Поэтому замена $t = \sqrt[6]{x+1}$. При этом,

$x+1 = t^6, \quad x = t^6 - 1, \ dx = 6t^5 dt ,$

$\sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} = (x+1)^{2/6} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 = t^2 ,$

$\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} = (x+1)^{3/6} = \left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 = t^3 .$

Тогда $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{t^6 - 1 + t^3}{t^2} 6t^5 dt = 6\int (t^6 - 1 + t^3) t^3 dt =$

$6\int (t^9 - t^3 + t^6) dt = \frac{6}{10} t^{10} - \frac{6}{4} t^4 + \frac{6}{7} t^7 + C .$

Сделаем обратную замену и получим ответ:

$\frac{6}{10} \sqrt[6]{x+1}^{10} - \frac{6}{4} \sqrt[6]{x+1}^4 + \frac{6}{7} \sqrt[6]{x+1}^7 + C .$

Задача 2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}^2}dx$.

Решение. Здесь также корни порядка 2 и 3, НОК(2,3) = 6.

Замена $t=\sqrt[6]{x}$. При этом, $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt{x}=t^3$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}^2}dx = \int \frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{t^6-t^4}dt = 6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt =$$

$$6\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}dt = 6\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1}dt + \int \frac{6}{t^2-1}dt =$$

$$6\int (t^2+1)dt + \int \frac{6}{(t+1)(t-1)}dt.$$

Во втором интеграле надо разложить на простейшие дроби.

$$\frac{6}{3}t^3+6t+\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}\right)dt.$$

$\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}=\frac{At-A+Bt+B}{(t+1)(t-1)}=\frac{0t+6}{(t+1)(t-1)}$, откуда получаем

$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=6 \end{cases}$ $\quad 2B=6$, то есть $B=3$, $A=-3$.

Тогда $\frac{6}{3}t^3+6t+\int\left(\frac{-3}{t+1}+\frac{3}{t-1}\right)dt = 2t^3+6t+3\ln|t-1|-3\ln|t+1|+C =$

$2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$. После обратной замены, ответ:

$$2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Сначала сделаем замену $t=\sqrt{x}$. При этом $x=t^2$, значит, $dx=2tdt$. Тогда $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int\sqrt{1+t}\,2tdt$.

Но внешний корень ещё не устранили, поэтому сделаем 2-ю замену: $z=\sqrt{t+1}$. Тогда $t+1=z^2$, $t=z^2-1$, $dt=2zdz$, соответственно:

$$\int\sqrt{1+t}\,2tdt = \int z2(z^2-1)2zdz = 4\int(z^4-z^2)dz.$$

После второй замены, уже получили интеграл от степенных функций!

$$4\int(z^4-z^2)dz = \frac{4}{5}z^5-\frac{4}{3}z^3+C.$$

Сделаем обратную замену:

$$\frac{4}{5}z^5-\frac{4}{3}z^3+C = \frac{4}{5}\sqrt{t+1}^5-\frac{4}{3}\sqrt{t+1}^3+C =$$

$$\frac{4}{5}\sqrt{1+\sqrt{x}}^5-\frac{4}{3}\sqrt{1+\sqrt{x}}^3+C.$$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

Решение. В интеграле $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ обозначим $t=\sqrt{x}$, при этом $dx=2tdt$. При этом, правда, второй корень усложняется:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = \int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}2tdt = 2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Необходима 2-я замена, чтобы устранить корень $\sqrt{a^2-t^2}$.

У нас здесь $a=1$. Вводим замену $t=\sin z$. Тогда $\sqrt{1-t^2}=\cos z$.

Итак, $2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int\frac{\sin^2 z}{\cos z}\cos zdz = 2\int\sin^2 zdz$.

Теперь уже просто по формуле понижения степени.

$$2\int\sin^2 zdz = 2\int\frac{1-\cos 2z}{2}dz = \int(1-\cos 2z)dz = z-\frac{1}{2}\sin 2z+C =$$

$$z-\frac{1}{2}2\sin z\cos z+C = z-\sin z\cos z+C.$$

Обратные замены: сначала обращаем обратно вторую замену, которыу сделали последней: если $t=\sin z$ то $\arcsin t-t\sqrt{1-t^2}+C$.

Далее, обращаем 1-ю замену: $t=\sqrt{x}$, тогда в итоге:

Ответ. $\arcsin\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}\sqrt{1-x}+C$.

Проверка. $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}\sqrt{x}'-\sqrt{x}'\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x}'=$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-(1-x)+x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{2x}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}.$$

Интегрирование тригонометрических функций:

Задача 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{2+\sin x}{1+\cos x}dx$.

Решение. Функция не обладает свойствами чётности или нечётности, то есть, сменив знак синуса или косинуса, мы не получим, что знак минус будет у всей дроби. Поэтому применяем универсальную тригонометрическую подстановку: $t=tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Напомним, что при этом

$$x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Итак, сделаем замену:

$$\int\frac{2+\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dx=\int\frac{\dfrac{2+2t+2t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dx=\int\frac{2t^2+2t+2}{t^2+1}dx=$$

$$2\int 1+\frac{t}{t^2+1}dx=2t+\int\frac{2t}{t^2+1}dx=2t+\ln(t^2+1)+C.$$

Теперь сделаем обратную замену:

$$2t+\ln(t^2+1)+C=2tg\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C.$$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int \cos^3 x dx$.

Решение. Видим, что здесь функция нечётная относительно косинуса, то есть $(-\cos x)^3 = -\cos^3 x$. Поэтому применим замену $t = \sin x$.

В этом случае $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$\int \cos^3 x dx$ = $\int \sqrt{1-t^2}^{\,3} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Нечётная степень этого корня сократится с одним дополнительным корнем, который появился при пересчёте дифференциала, и станет чётная степень корня квадратного.

$$\int \sqrt{1-t^2}^{\,3} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \sqrt{1-t^2}^{\,2} dt = \int \left(1-t^2\right) dt.$$

Знак модуля здесь вовсе не нужен, ведь $t = \sin x$ с областью значений $[-1,1]$, так что заведомо выполняется $1-t^2 \geq 0$.

$$\int \left(1-t^2\right) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Задача 7. Вычислить интеграл $\int \dfrac{1}{\cos^3 x} dx$.

Решение. Здесь, как и в прошлом примере, функция нечётная относительно косинуса, замена $t = \sin x$,

$\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Однако в этом примере квадратные корни не сокращаются, а наоборот, умножаются, ведь косинус теперь не в числителе, а в знаменателе: $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}^{\,3}} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Но всё равно, будет чётная степень корня: $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}^{\,4}} dt$.

Итак, $\int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^2} dt$, что равно $\int \frac{1}{\left(t^2-1\right)^2} dt = \int \frac{1}{(t+1)^2 (t-1)^2} dt$.

Теперь мы можем воспользоваться тем разложением, которое получали для такого случая в теме «рациональные дроби» на прошлой практике, см. задачу где оба корня знаменателя кратные.
Курс специально построен так, чтобы использовать некоторые коэффициенты из старых примеров и не искать их здесь повторно.

Разложение было такое: $\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$.

После приведения к общему знаменателю и решения системы уравнений, там получалось $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{4}$.

Итак, $\int \frac{1}{(t+1)^2 (t-1)^2} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt =$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} \right) + C =$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1\_t}{1-t}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{2t}{t^2-1} \right) + C.$$

Сделаем обратную замену.

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\sin^2 x - 1} \right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C.$$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$.

Решение. Здесь нечётная степень синуса, применяем замену $t = \cos x$.

Тогда $\int \sin^3 x \cos^8 x dx = \int \sqrt{1-t^2}^{\,3} t^8 \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \sqrt{1-t^2}^{\,2} t^8 dt =$

$$-\int (1-t^2) t^8 dt = \int (t^{10} - t^8) dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Задача 9. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Решение. Здесь суммарная степень чётная, то есть, если сменить знак перед sin и cos, то знак сменится 2 раза, и останется «+». Поэтому надо применить замену $t = tgx$. Тогда (см. в лекции):

$$dx = \frac{1}{t^2+1}dt \,.\, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}^2}}\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{\sqrt{1+t^2}^4}{t^2}\frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$\int \frac{(t^2+1)^2}{t^2}\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1}{t^2}dt = \int dt + \int \frac{1}{t^2}dt = t - \frac{1}{t} + C.$$

После обратной замены получается ответ: $tgx - ctgx + C$.

Задача 10. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}dx$.

Решение. Здесь тоже суммарная степень чётная, замена $t = tgx$.

$$dx = \frac{1}{t^2+1}dt \,.\, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}dx = \int \frac{1}{\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}^5}}\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{\sqrt{1+t^2}^8}{t^3}\frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$\int \frac{(t^2+1)^4}{t^3}\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{(t^2+1)^3}{t^3}dt = \int \frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^3}dt$$

здесь мы воспользовались формулой $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$\int \left(t^3 + 3t + 3\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + 3\ln|t| - \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + C.$$

После обратной замены получаем ответ:

$$\frac{1}{4}tg^4 x + \frac{3}{2}tg^2 x + 3\ln|tgx| - \frac{1}{2}ctg^2 x + C.$$

Иррациональности, содержащие сумму или разность квадратов, с применением тригонометрических замен.

Задача 11. Вычислить интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$.

Решение. В этом случае нужно замена (см. лекции) $x = \frac{3}{\sin t}$.

Приэтом корень квадратный исчезает:

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\sin^2 t}-9} = 3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}} = 3\frac{\cos t}{\sin t}.$$

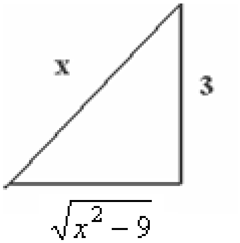
$$dx = \left(3\sin^{-1} t\right)' = -3\sin^{-2} t\cos t dt = -3\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt.$$

Итак, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{3}{\sin t}\frac{\sin t}{3\cos t}(-3)\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt =$

$$-3\int \frac{1}{\sin^2 t}dt = 3ctgt + C.$$

Для обратной замены, вспомним, что $x = \frac{3}{\sin t}$, то есть $\sin t = \frac{3}{x}$,

$t = \arcsin\left(\frac{3}{x}\right)$. Тогда $3ctgt + C = 3ctg\left(\arcsin\left(\frac{3}{x}\right)\right) + C$. Получается, что надо найти котангенс того угла, синус которого равен $\frac{3}{x}$. Подпишем соответствующие стороны на чертеже прямоугольного треугольника. Третья сторона вычисляется по теореме Пифагора: $\sqrt{x^2-9}$.



Тогда котангенс этого угла: $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3}$.

$$3ctg\left(\arcsin\left(\frac{3}{x}\right)\right)+C = 3\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+C = \sqrt{x^2-9}+C.$$

Задача 12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx$.

Решение. Здесь под корнем сумма квадратов, и при этом $a^2=25$, поэтому замена $x=5tgt$. Тогда $dx=\dfrac{5}{\cos^2 t}dt$,

$$\sqrt{25tg^2t+25} = 5\sqrt{1+tg^2t} = \frac{5}{\cos t}$$

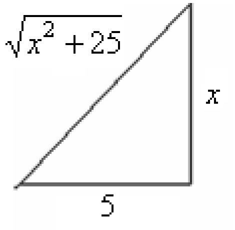
$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx = \int\frac{5tgt}{5/\cos t}\frac{5}{\cos^2 t}dt = \int\frac{5\sin t/\cos t}{5/\cos t}\frac{5}{\cos^2 t}dt =$$

$$5\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = -5\int\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = -5\int\frac{dz}{z^2} = \frac{5}{z}+C = \frac{5}{\cos t}+C.$$

Сделаем обратную замену.

$x=5tgt$, то есть $t=arctg\left(\dfrac{x}{5}\right)$. Тогда $\dfrac{5}{\cos t}+C = \dfrac{5}{\cos\left(arctg\left(\frac{x}{5}\right)\right)}+C$.

Упростим композицию (косинус арктангенса) с помощью прямоугольного треугольника, как в прошлой задаче. Тангенс некоторого угла равен $x/5$, а требуется найти его косинус.



Подпишем 2 катета x и 5. Гипотенуза легко вычислится по теореме Пифагора. Теперь видно, что косинус это $\dfrac{5}{\sqrt{x^2+25}}$.

Итак, $\dfrac{5}{\left(\dfrac{5}{\sqrt{x^2+25}}\right)}+C = \sqrt{x^2+25}+C$.

Ответ: $\sqrt{x^2+25}+C$.

Основы темы «определённый интеграл»

Задача 13. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}$

здесь мы можем заменить $\sin x$ на t, но тогда нужно сделать пересчёт верхнего и нижнего пределов. Если $x \in [0, \pi/2]$ то $t \in [\sin(0), \sin(\pi/2)]$, т.е. $t \in [0,1]$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t)\Big|_0^1 = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

А можно было сначала вычислять интеграл как неопределённый, тогда надо было бы вернуться к исходной переменной x (то есть сделать обратную замену), но пределы можно не пересчитывать.

$$\int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t) + C = arctg(\sin x) + C$$

$$arctg(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = arctg\left(\sin \pi/2\right) - arctg\left(\sin 0\right) = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Впрочем, как видно, от способа не зависит, получается один и тот же ответ $\frac{\pi}{4}$.

Домашнее задание:

1. Аналогично задаче 6, вычислить интеграл $\int \sin^3 x dx$.

Указание: замена $t = \cos x$.

2. В задаче 11 или 12, решить без замены, а подведением под знак дифференциала.

Группа 445!
Рекомендуется повторить к контрольной № 1 такие задачи:

ТЕМА: Подведение под знак дифференциала.

№ 1. Вычислить $\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. Здесь, в отличие от прошлой задачи, в числителе уже произвольный многочлен, не соответствующий производной знаменателя. Тем не менее, можно путём арифметических операций получить там дифференциал знаменателя:
Домножим и поделим на 2, чтобы исправился коэффициент при x:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+8}dx$$

Теперь осталось прибавить и отнять 2, и будет получено $2x+4$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)-2}{x^2+4x+8}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+8}dx.$$

В первом слагаемом делается ровно то же самое, что в прошлой задаче, а во втором - выделить полный квадрат, и в итоге сводится к арктангенсу:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right| - \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

№ 2. (было дом. задание) Найти $\int \frac{x+1}{x^2+9}dx$.

Решение.

Ответ $\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$.

ТЕМА: Интегрирование по частям

№ 3. Вычислить $\int xe^{3x}dx$.

Решение. Пусть $u = x$, так надо, чтобы понизилась степень на следующем шаге. Составим таблицу:

$u = x$	$v = \frac{1}{3}e^{3x}$
$u' = 1$	$v' = e^{3x}$

Тогда $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$.

№ 4. Вычислить $\int x\cos 5x dx$.

Решение.

$u = x$	$v = \frac{1}{5}\sin 5x$
$u' = 1$	$v' = \cos 5x$

$\int x\cos 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$.

ТЕМА: Рациональные дроби.

№ 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 + x + 3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение. Как видим, здесь корень 1 имеет кратность 2. Разложение на простейшие дроби нельзя проводить так, как будто бы здесь три независимых множителя $(x-1)$, $(x-1)$, $(x+2)$, т.е. $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$, иначе получится противоречие, ведь общий знаменатель будет содержать всего лишь 1-ю степень $(x-1)$ но никак не вторую. Надо степени знаменателя учитывать по возрастающей, до кратности корня, а именно, так: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$.

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Числитель этой дроби равен числителю исходной, той, которая была в интеграле:

$A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1)=x^2+x+3$.

$(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)=x^2+x+3$, система:

$\begin{cases} A \quad +C=1 \\ A+B-2C=1 \\ -2A+2B+C=3 \end{cases}$. Построим расширенную матрицу и решим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Система приведена к виду: $\begin{cases} A \quad +C=1 \\ B-3C=0 \\ \quad 3B=5 \end{cases}$

Тогда $B=\frac{5}{3}$, $C=\frac{5}{9}$, $A=\frac{4}{9}$. И теперь интеграл распадается на сумму трёх интегралов: $\frac{4}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{5}{9}\int\frac{1}{x+2}dx$.

В 1 и 3 слагаемых - как раньше, а вот во 2-м логарифм в ответе не получится, ведь тут уже 2-я а не 1-я степень в знаменателе.

Полезно вспомнить, что $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

То есть, интеграл от -2 степени будет содержать -1 степень, и меняется знак.

Ответ: $\frac{4}{9}\ln|x-1|-\frac{5}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{5}{9}\ln|x+2|+C$.

ТЕМА: Иррациональности.

№ 6. Вычислить интеграл $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Здесь есть корни порядка 2 и 3. Наименьшее общее кратное, НОК(2,3) = 6. Поэтому замена $t=\sqrt[6]{x+1}$. При этом,

$x+1=t^6,\quad x=t^6-1,\ dx=6t^5dt,$

$\sqrt[3]{x+1}=(x+1)^{1/3}=(x+1)^{2/6}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2,$

$\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}=(x+1)^{3/6}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3.$

Тогда $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt = 6\int (t^6-1+t^3)t^3dt =$

$6\int (t^9-t^3+t^6)dt = \frac{6}{10}t^{10}-\frac{6}{4}t^4+\frac{6}{7}t^7+C.$

Сделаем обратную замену и получим ответ:

$\frac{6}{10}\sqrt[6]{x+1}^{10}-\frac{6}{4}\sqrt[6]{x+1}^{4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x+1}^{7}+C.$

ТЕМА: Тригонометрические функции.

№ 7. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x\cos^8 xdx$.

Решение. Здесь нечётная степень синуса, применяем замену $t=\cos x$.

Тогда $\int \sin^3 x\cos^8 xdx = \int \sqrt{1-t^2}^3 t^8 \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int \sqrt{1-t^2}^2 t^8dt =$

$-\int (1-t^2)t^8dt = \int (t^{10}-t^8)dt = \frac{t^{11}}{11}-\frac{t^9}{9}+C = \frac{\cos^{11}x}{11}-\frac{\cos^9 x}{9}+C.$

№ 8. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$.

Решение. Здесь тоже суммарная степень чётная, замена $t=tgx$.

$dx=\frac{1}{t^2+1}dt.\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx = \int \frac{1}{\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}^5}} \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{\sqrt{1+t^2}^8}{t^3} \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\int \frac{\left(t^2+1\right)^4}{t^3} \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{\left(t^2+1\right)^3}{t^3} dt = \int \frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^3} dt$$

здесь мы воспользовались формулой $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

$$\int \left(t^3 + 3t + 3\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4} t^4 + \frac{3}{2} t^2 + 3\ln|t| - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + C .$$

После обратной замены получаем ответ:

$$\frac{1}{4} tg^4 x + \frac{3}{2} tg^2 x + 3\ln|tgx| - \frac{1}{2} ctg^2 x + C .$$

445 ПРАКТИКА № 5 21.03.2016

Задача 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \Bigg|_0^1 =$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{0^2+1} \right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4} .$$

Задача 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Решение. При замене $\sqrt{x} = t$, если $x \in [0,3]$ то $t \in [0, \sqrt{3}]$.

$$\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} 2tdt = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt =$$

$$2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2t\Big|_0^{\sqrt{3}} - 2arctgt\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} .$$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_2^3 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}dx$.

Решение. Сделаем замену $\sqrt{x-2}=t$, тогда $t\in[0,1]$.

$$\int\limits_2^3 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}dx = \int\limits_0^1 \frac{t}{t+1}2tdt = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt = 2\int\limits_0^1 \frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt =$$

$$2\int\limits_0^1 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = t^2\Big|_0^1 - 2t\Big|_0^1 + 2\ln(t+1)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 xe^x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям,

$u=x$, $v'=e^x$, тогда $u'=1$, $v=e^x$.

$$\int\limits_0^2 xe^x dx = xe^x\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 = 2e^2-(e^2-e^0) = e^2+1.$$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi x\cos x dx$.

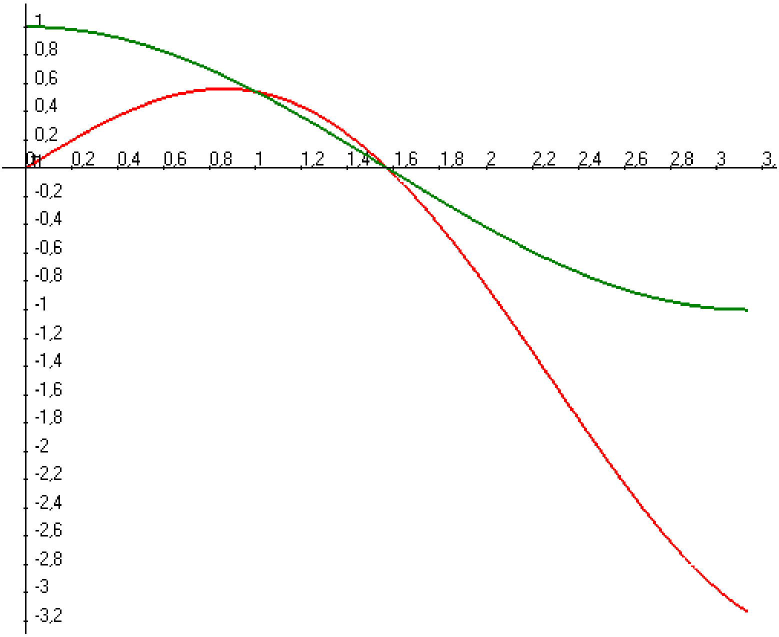
Решение. Тоже решается интегрированием по частям,

$u=x$, $v'=\cos x$, тогда $u'=1$, $v=\sin x$.

$$\int\limits_0^\pi x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin x dx = \pi\sin\pi - 0 + \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$0-0+\cos\pi-\cos 0 = -1-1=-2.$$

Из строения графика видно, что ответ и должен был получиться отрицательным: изначально $\cos x$ имеет две одинаковые части площади над и под осью, и его интеграл был бы 0, а если мы умножаем на x, то сильнее увеличится по модулю именно та часть, которая дальше от 0, то есть отрицательная. Вот графики, зелёным показан $\cos x$, красным $x\cos x$.



Задача 6. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$.

Решение. $\int\limits_1^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = -\int\limits_1^2 e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} dx \right) = -\int\limits_1^2 e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x} \right)$

используя известное выражение $\int e^t dt = e^t + C$, получим:

$$-e^{\frac{1}{x}} \Big|_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^1 \right) = e - \sqrt{e}\ .$$

Повторение к контрольной. Контрольная работа (4 задачи).

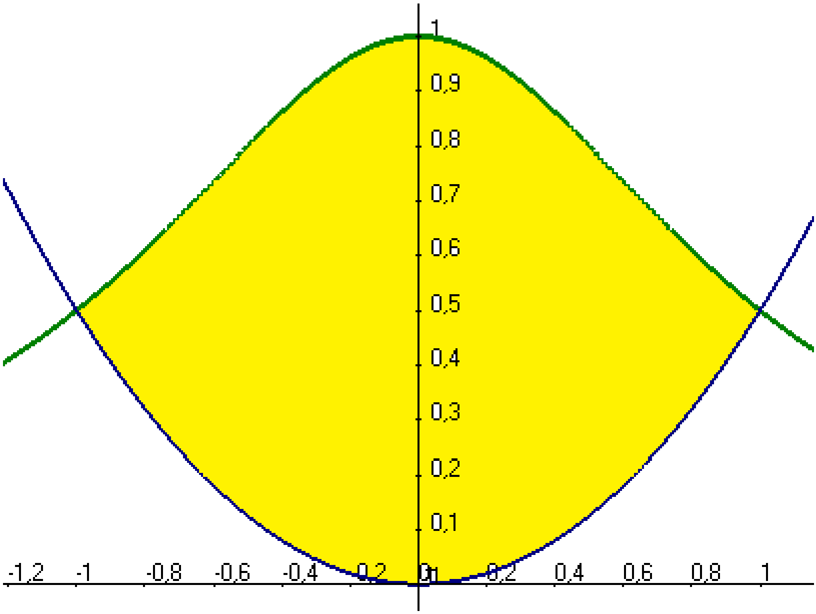
45 минут: контрольная работа.
1. Подведение под знак дифференциала, преобразования.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей.
4. Интегрирование иррациональностей и тригонометрических функций.

445 ПРАКТИКА № 6   01.04.2016

Задача 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y_1 = \dfrac{x^2}{2}$ и $y_2 = \dfrac{1}{x^2+1}$.



Решение. Рассмотрим чертёж, найдём точки пересечения графиков и увидим, какую часть плоскости они ограничивают. График

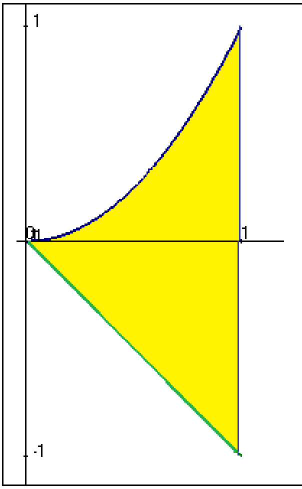
$y_2 = \dfrac{1}{x^2+1}$ имеет макстмум в точке 0 и проходит выше, чем $y_1 = \dfrac{x^2}{2}$, у которой, напротив, там минимум. Точки перечечения $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = arctgx\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{6}\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) - \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) =$$

$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$. Замечание. Мы могли воспользоваться тем фактом, что обе функции чётные, и фигура симметрична, вычислить площадь правой половины и удвоить: $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$

$2arctgx\Big|_{0}^{1} - 2\dfrac{x^3}{6}\Bigg|_{0}^{1} = 2\left(\dfrac{\pi}{4} - 0 \right) - 2\left(\dfrac{1}{6} - 0 \right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$. Так даже легче, потому что на нижнем пределе подставлять 0, из-за этого меньше вычислений.

Задача 2. Найти площадь области, ограниченной линиями $\{y = x^2, y = -x, x = 1\}$



Здесь чертёж не представляет особых сложностей, парабола проходит выше, а линейная функция ниже, поэтому:

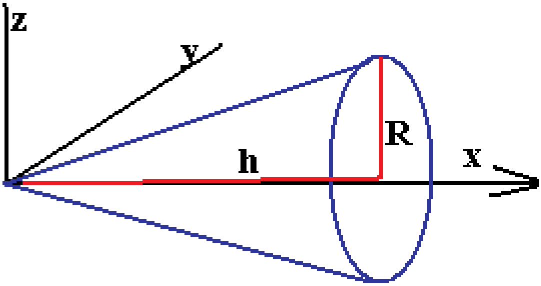
$$\int_{0}^{1} \left(x^2 - (-x) \right) dx = \int_{0}^{1} \left(x^2 + x \right) dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} =$$

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Ответ: $\dfrac{5}{6}$.

Задача 3. С помощью основной формулы вычисления объёмов тел вращения, доказать формулу объёма конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Решение. Для удобства применения основной формулы, повернём конус на 90 градусов, так, чтобы высота лежала на оси $0x$.



На чертеже видно, что два катета имеют длины R и h. Тогда отрезок, вращением которого образована боковая поверхность конуса, находится на прямой $y = f(x) = \frac{R}{h}x$.

$$\int_0^h \pi \ f^2(x)dx = \int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \pi\frac{R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \pi\frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} =$$

$$\pi\frac{R^2}{1}\frac{h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Задача 4. Найти длину 1 витка винтовой линии в пространстве $\{x = R\cos t, y = R\sin t, z = at\}$ $t \in (0,2\pi)$

Решение. В данном случае кривая параметрически задана, в 3-мерном пространстве. Формула $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$.

Производные: $\{x' = -R\sin t, y' = R\cos t, z' = a\}$.

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + a^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2 + a^2}\,dt = \sqrt{R^2 + a^2}\int_0^{2\pi} 1dt$$

Ответ: $2\pi\sqrt{R^2+a^2}$.

Замечание. Если была бы не винтовая линия, а окружность, а это было бы при параметре $a=0$, то как раз бы и получалось $2\pi\sqrt{R^2+0}=2\pi R$ длина окружности.

Несобственный интеграл.

Задача 5. Найти несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty} =$

$\frac{1}{2}\left(arctg(\infty)-arctg(1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$.

Здесь под символом $arctg(\infty)$ понимается предел $\lim\limits_{t\to\infty} arctg(t)$.

Задача 6. Выяснить сходимость по признакам сравнения:

$\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+1}}dx$.

Решение. Так как $\sin x \le 1$, то заменив функцию $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+1}}$ на $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$,

получим $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+1}}dx \le \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx$ причём, по признаку сравнения в не предельной форме, если второй интеграл сходится (обозначим его (II)), то и исходный тоже сходится. А теперь заменим на ещё более простую функцию, но уже по признаку сравнения в предельной форме.

Бесконечно малая величина $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ при $x\to\infty$ эквивалентна $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Докажем это: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} : \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x^3+1}} = 1.$

Поэтому сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}dx$. Обозначим его (III). А про этот интеграл уже известно, что он сходится, ведь здесь классический случай, рассмотренный в лекциях, а именно $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x^a}dx$ где степень $a = \dfrac{3}{2} > 1$.

Итак, (III) сходится, что эквивалентно тому, что (II) сходится, а (II) > (I), поэтому исходный интеграл (I) тоже сходится.

Двойные интегралы в декартовых координатах. Вычисление.

Задача 7. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где D прямоугольник, $x \in [0,1], y \in [0,2]$.

Решение. Есть эквивалентные формы записи в таком случае:

$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 xydy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 xydy \right) dx$. Итак, сначала во внутреннем цикле найдём первообразную по переменной y: $\int\limits_0^1 \left(x\dfrac{y^2}{2}\Bigg|_0^2 \right) dx = \int\limits_0^1 (2x)dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$

Замечание. Если изменили бы порядок интегрирования, то есть внутреннее действие по x а внешнее по y то по объёму вычислений было бы то же самое.

$$\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^1 xydx \right) dy = \int\limits_0^2 \left(y\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 \right) dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{y}{2} \right) dy = \frac{y^2}{4}\Bigg|_0^2 = 1.$$

Задача 8. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$, где D квадрат, $x \in [0,1], y \in [0,1]$.

Решение. У нас есть 2 варианта: сделать внешний цикл по x, а внутренний по y, то есть $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 ye^{xy}dy \right) dx$, либо наоборот, $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 ye^{xy}dx \right) dy$. Несмотря на то, что область квадрат, и казалось бы, всё равно, каков порядок интегрирования, но если сделать внутренний цикл по y то в обоих множителях есть переменная интегрирования, то есть мы сразу столкнёмся с интегрированием по частям, а вот если внутренний цикл по x, то только в одном множителе есть переменная, по которой интегрируем. Более того, y служит коэффициентом при x в степени экспоненты, то есть надо будет разделить на y, и он сократится, останется вообще одна экспонента! Этот путь более рациональный и предпочтительно здесь сделать именно так.

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 ye^{xy}dx \right) dy = \int\limits_0^1 \left(y \frac{1}{y} e^{xy} \Big|_0^1 \right) dy = \int\limits_0^1 \left(e^{xy} \Big|_0^1 \right) dy = \int\limits_0^1 \left(e^y - e^0 \right) dy =$$

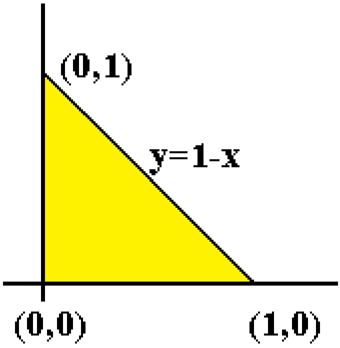
$$\int\limits_0^1 \left(e^y - 1 \right) dy = \left(e^y - y \right) \Big|_0^1 = \left(e^1 - e^0 \right) - (1-0) = e-2.$$ Ответ: $e-2$.

Замечание. А если $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$ то наоборот, надо сделать внутренний цикл по y, а внешний по x.

Задача 9. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по треугольнику D, вершины которого: $(0,0),(1,0),(0,1)$.

Решение. Строение треугольника понятно (см. чертёж).

Наклонная линия задаётся уравнением $y = 1 - x$.

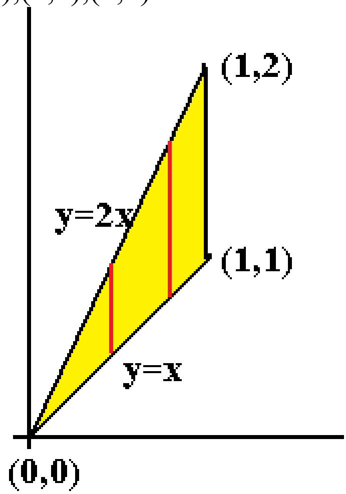


Вычисление: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(xy\Big|_0^{1-x} + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \right) dx =$

$$\int\limits_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2 + \frac{1-2x+x^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$\frac{x}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Задача 10. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$ по треугольнику D, вершины которого: (0,0),(1,1),(1,2).



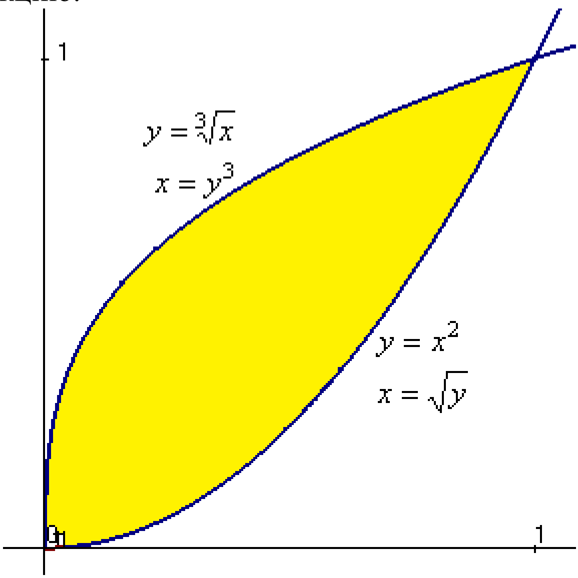
Решение. Итак, по чертежу видно, что $x \in [0,1]$, а в свою очередь при каждой фиксированной абсциссе, $y \in [x, 2x]$.

$$\iint\limits_D (3x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (3x+2y)dy = \int_0^1 \left(3xy\Big|_x^{2x} + y^2\Big|_x^{2x} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(6x^2 - 3x^2 + 4x^2 - x^2\right) dx = \int_0^1 6x^2 dx = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2.$$

Задача 11. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy$.

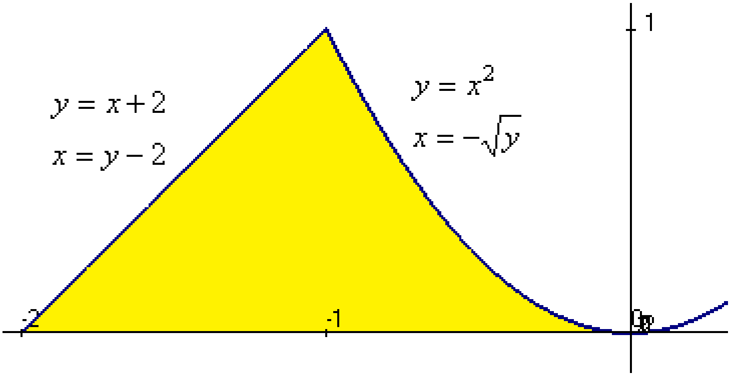
Решение. Сделаем чертёж, также выразим в каждом уравнении через обратную функцию.



Уравнение $y = x^2$ переходит в $x = \sqrt{y}$, а $y = \sqrt[3]{x}$ в $x = y^3$. Нижняя граница здесь фактически становится правой, а верхняя граница исполняет роль левой. Тогда после смены порядка, интеграл будет в виде: $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Задача 12. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{0}^{x+2} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy$.

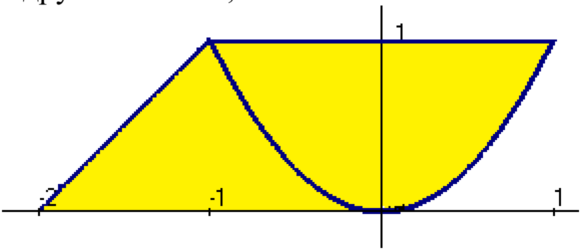
Решение. Построим чертёж.



Перепишем через обратные функции. Уравнение $y = x+2$ записывается в виде $x = y-2$, а $y = x^2$ в виде $x = -\sqrt{y}$.

Тогда ответ такой: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-2}^{-\sqrt{y}} f \; dx$.

Замечание. Перед корнем квадратным именно минус, потому что $x < 0$, то есть именно отрицательная ветвь корня. Если по ошибке не заметить этого и взять $x = +\sqrt{y}$, то получится продление до правой ветви, и совсем другая область, а именно:



Тройной интеграл в декартовых координатах.
Задача 13.

Вычислить $\iiint\limits_D (x+yz)dxdydz$ по кубу $x,y,z\in[0,1]$.

Решение. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+yz)dz$. Здесь уже 3 а не 2 вложенных цикла.

Это также можно записать в виде: $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 (x+yz)dz\right)dy\right)dx$.

Сначала вычислим внутренний интеграл по z и применим формулу Ньютона-Лейбница именно к переменной z, остальные при этом вычислении остаются в роли параметров, вместо них ничего не подставляется.

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left(xz\Big|_0^1 + y\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1\right)dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left(x+\frac{y}{2}\right)dy\right)dx.$$

Теперь первообразная по y и формула Ньютона-Лейбница применяется в этой скобке именно к y.

$\int\limits_0^1\left(xy\Big|_0^1 + \frac{y^2}{4}\Bigg|_0^1\right)dx = \int\limits_0^1\left(x+\frac{1}{4}\right)dx$. А теперь уже обычный определённый интеграл. $\int\limits_0^1\left(x+\frac{1}{4}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

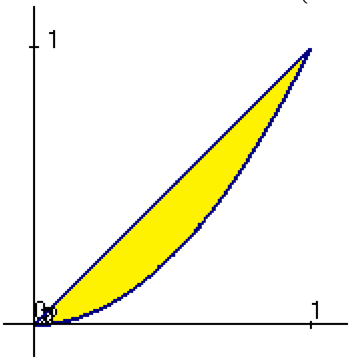
Задача 14. Вычислить тройной интеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} (x^3y^3z)dz$.

Решение. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} (x^3y^3z)dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x\left(\frac{x^3y^3z^2}{2}\Bigg|_0^{xy}\right)dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x \frac{x^5y^5}{2}dy =$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^5 y^6}{12} \Bigg|_0^x \right) dx = \int_0^1 \frac{x^{11}}{12} dx = \frac{x^{12}}{144} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{144}.$$

Задача 15. Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $\{y = x, y = x^2, z = 0, z = x^2 + y^2\}$.

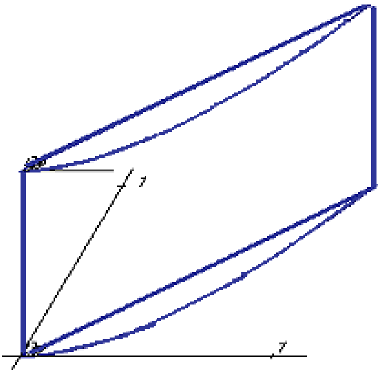
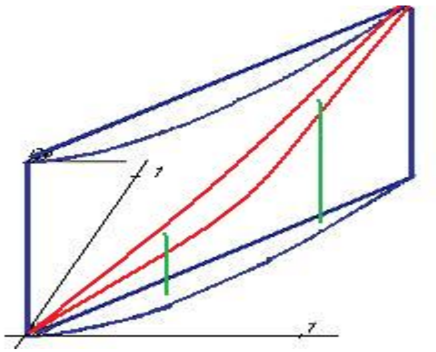
Решение. Метод построения 3-мерного чертежа: сначала выбрать все те уравнения, которые не содержат z, и построить плоскую проекцию (вид сверху) этой фигуры. Строим графики $\{y = x, y = x^2\}$.



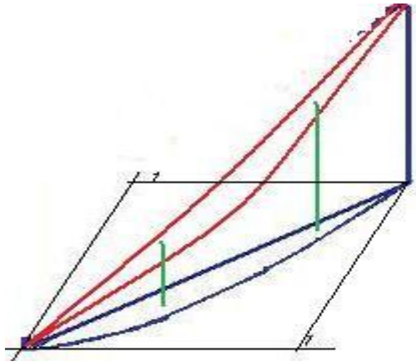
Теперь видно, что $x \in [0,1]$, а при каждом фиксированном x, $y \in [x^2, x]$.

Вообще, $\{y = x, y = x^2\}$ в плоскости это - уравнения кривых, но для пространства это уравнения поверхностей. Отсутствие z означает, что z любое, то есть к прямой и параболе присоединены вертикальные образующие. Представьте, что один вертикально поставленный лист ровный, а второй изогнут по параболе. Внутри такой узкой «шахты» как раз и располагается искомая фигура.

А теперь определим границы по высоте, чтобы окончательно построить чертёж. Для каждой точки, взятой на плоскости в том основании, которое показано на предыдущем чертеже, высота меняется от $z = 0$ до $z = x^2 + y^2$, эти линии отмечены зелёным цветом. Эллиптический параболоид пересекается с каждой из указанных ранее вертикальных стенок, пересечения показаны красным цветом.

Самая верхняя точка (1,1,2). Итак, покажем получившийся чертёж этой фигуры:



Так как вычисляется объём, то надо полагать $f \equiv 1$.

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left(\int_0^{x^2+y^2} 1dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left(z\Big|_0^{x^2+y^2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2 \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\left(x^2 y\Big|_{x^2}^{x} + \frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{x} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{35-21-5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}.$$

Ответ: $V = \dfrac{3}{35}$.

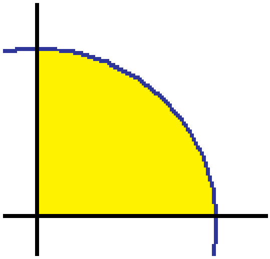
445 ПРАКТИКА № 7 04.04.2016

Двойные интегралы в полярных координатах.

Задача 1. Вычислить $\iint\limits_D x^9 y dxdy$, где D - четверть круга радиуса 1 (в первой координатной четверти).

Решение.

Заменим $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$, а также умножим на якобиан ρ.



$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 (\rho\cos\varphi)^9(\rho\sin\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho^{11}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\rho\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos^9\varphi\sin\varphi\left.\frac{\rho^{12}}{12}\right|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\varphi$$

Дальше остаётся интеграл от одной переменной, там можно применять обычный способ, подведение под знак дифференциала.

$$\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\ d\varphi = -\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi(-\sin\varphi\ d\varphi) =$$

$$-\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\ d(\cos\varphi) = -\frac{1}{12}\frac{1}{10}\cos^{10}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{120}(0-1) = \frac{1}{120}.$$

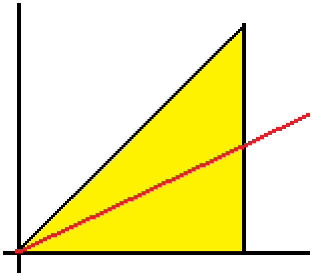
Задача 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xdxdy$ по полукругу радиуса 1 в правой полуплоскости.

Решение. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_{0}^{1}(\rho\cos\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_{0}^{1}(\rho^2\cos\varphi)d\rho\right)d\varphi =$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\varphi\ \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\ d\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}(1-(-1)) = \frac{2}{3}.$$

Задача 3. Записать в полярных координатах двойной интеграл по треугольнику с вершинами (0,0), (1,0), (1,1).

Решение.



В декартовых координатах интеграл был бы в виде: $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{x}f(x,y)dy\right)dx$.

Границы изменения угла от 0 до 45 градусов. Определим верхнюю границу роста радиуса в зависимости от угла поворота. Для этого нужно задать линию $x=1$ в полярных координатах. Подставим выражение x через полярные координаты в уравнение этой линии, получим $\rho\cos\varphi=1$, тогда $\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

Тогда: $\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(\int\limits_{0}^{1/\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\ d\rho\right)d\varphi$.

Как видим, полярные координаты можно применять далеко не только в случае круговых областей, однако большого преимущества здесь это уже не даёт, пределы внутреннего интеграла здесь тоже зависят от внешнего.

Площадь поверхности (с помощью двойного интеграла).

Задача 4. Найти площадь поверхности $z = x^2 + y^2 \, (z \le 1)$.

Физический смысл задачи: сколько металла потребуется на изготовление параболической антенны.

Решение. Найдём интеграл $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\,dxdy$ где D окружность радиуса 1. Здесь $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$.

$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$, перейдём к полярным координатам.

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,8\rho\,d\rho\right)d\varphi =$$

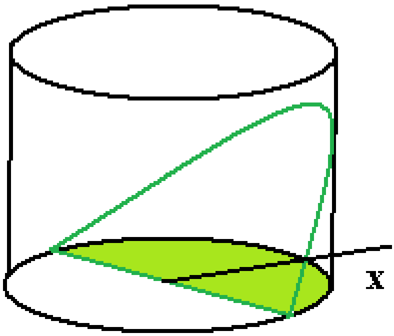
$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,d(1+4\rho^2)\right)d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(1+4\rho^2\right)^{1/2} d(1+4\rho^2)\right)d\varphi =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{8}\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(5^{3/2} - 1^{3/2}\right)d\varphi = \frac{1}{12}\left(\sqrt{5}^3 - 1\right)\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{1}{12}\left(\sqrt{5}^3 - 1\right)2\pi = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi .$$

Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Задача 5. Вычислить объём тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и двумя плоскостями $z = 0, z = x$ в цилиндрических координатах.



Решение. На чертеже показано строение фигуры: 2 среза из цилиндра, один с помощью горизонтальной плоскости $z = 0$, другой с помощью наклонной плоскости $z = x$. Зелёным закрашено основание этой фигуры, а именно, полукруг в правой полуплоскости.

Для того, чтобы точка в плоскости находилась в основании этой фигуры, требуется $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0,1]$. Определим теперь границы последнего из вложенных интегралов, самого внутреннего, который по переменной z. Если $z \in [0, x]$, от горизонтальной до наклонной плоскости. При этом, x нужно выразить в цилиндрических координатах, ведь границы интегрирования внутреннего интеграла должны зависеть от внешних переменных ρ, φ. Поэтому $z \in [0, \rho\cos\varphi]$. Функция тождественная 1, чтобы вычислить объём, но при этом не забываем домножить на якобиан цилиндрических координат, то есть на ρ. Итак, получается $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\rho\cos\varphi}\rho\ dz\right)d\rho\right)d\varphi$.

Вычислим этот интеграл. Сначала в самом внутреннем из них применяется формула Ньютона-Лейбница по переменной z.

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1\left(\rho\ z\Big|_0^{\rho\cos\varphi}\right)d\rho\right)d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1\rho^2\cos\varphi\ d\rho\right)d\varphi$$

Теперь уже остался не тройной, а двойной интеграл. Во внутренней скобке применяется формула Ньютона-Лейбница по ρ.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\varphi\ \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^1\right)d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{3}\cos\varphi\ d\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\ \bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1-(-1)}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ответ $\frac{2}{3}$.

Задача 6. Есть 1/8 часть шара радиуса 1 в первом октанте, причём плотность вещества в нём пропорциональна расстоянию от начала координат. Вычислить массу (применить сферические координаты).

Решение. Если бы мы записали в декартовых координатах, было бы так: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$. Чтобы избежать таких громоздких вычислений, перейдём к сферическим координатам.

Если у нас часть шара только в 1 октанте, то $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

При этом радиус равен 1, так что очевидно, $\rho \in [0,1]$.

Функция $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$, и кроме этого, умножим на определитель Якоби сферических координат, то есть $\rho^2 \sin\theta$.

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\ \rho^2\sin\theta\ d\rho\right)d\theta\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho^3\sin\theta\ d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\sin\theta\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1\right)d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\ d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left((-\cos\theta\ )\Big|_0^{\pi/2}\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$ Ответ $\frac{\pi}{8}$.

Примечание. Соответственно, масса всего шара была бы π.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Уравнения 1-го порядка.
Уравнения и разделяющимися переменными.

Задача 7. Решить уравнение $y' = 5y$.

Решение. Запишем $\frac{dy}{dx} = 5y$. Теперь домножим на dx, разделим на y. $\frac{dy}{y} = 5dx$. Особое решение $y \equiv 0$. Далее, $\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow$ $\ln|y| = 5x + C_1 \Rightarrow |y| = e^{C_1} e^{5x} = Ce^{5x}$ (где C > 0 так как $C = \pm e^{C_1}$). Но нам надо выразить не $|y|$, а само y, тогда и ограничение на положительность C также исчезает, и в итоге общее решение этого уравнения, что и является ответом: $y = Ce^{5x}$, где $C \in R$.

Задача 8. Решить уравнение $y' = xy$.

Решение. $y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow |y| = e^{C_1} e^{x^2/2} \Rightarrow y = Ce^{x^2/2}.$$

Ответ: $y = Ce^{x^2/2}$.

Проверка. Если $y = Ce^{x^2/2}$, то $y' = Cxe^{x^2/2}$, действительно, производная имеет лишний множитель x по сравнению с исходной функцией, и подходит в качестве решения уравнения $y' = xy$.

Задача 9. Решить уравнение $xyy' = 1 - x^2$.

Решение. $xyy' = 1 - x^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \Rightarrow xydy = (1 - x^2)dx \Rightarrow$

$$ydy = \frac{1-x^2}{x}dx = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx \Rightarrow \int ydy = \int\left(\frac{1}{x} - x\right)dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y^2 = 2\ln|x| - x^2 + 2C_1 \Rightarrow y^2 = \ln(x^2) - x^2 + 2C_1$$

Возьмём $C = e^{2C_1}$, т.е. переобозначим константу $2C_1 = \ln C$.

Тогда $y^2 = \ln(Cx^2) - x^2$, и ответ: $y = \pm\sqrt{\ln(Cx^2) - x^2}$.

Проверка: $y' = \pm\dfrac{\dfrac{2Cx}{Cx^2} - 2x}{2\sqrt{\ln(Cx^2) - x^2}}$, тогда:

$$xyy' = x\sqrt{\ln(Cx^2) - x^2}\,\frac{\dfrac{2Cx}{Cx^2} - 2x}{2\sqrt{\ln(Cx^2) - x^2}} = x\left(\frac{1}{x} - x\right) = 1 - x^2.$$

Задача 10. Решить уравнение $xy' = y^2 - y$, и найти частное решение задачи Коши: $y(2) = -1$.

Решение. $xy' = y^2 - y \Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2 - y} = \dfrac{dx}{x}$.

Чтобы найти интеграл левой части, надо разложить на простейшие дроби, а именно $\dfrac{1}{y^2 - y} = \dfrac{1}{y(y-1)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y-1}$. При приведении к общему знаменателю, получается $\dfrac{Ay - A + By}{y(y-1)} = \dfrac{0y + 1}{y(y-1)}$, что приводит к системе уравнений $\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$, тогда $A = -1, B = 1$.

$$\int\frac{dy}{y^2 - y} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}\right)dy = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln C|x| \Rightarrow \frac{y-1}{y} = Cx \Rightarrow 1-\frac{1}{y} = Cx \Rightarrow \frac{1}{y} = 1-Cx$$, и

ответ: $y = \dfrac{1}{1-Cx}$. Это «общее решение», то есть бесконечный набор решений. Теперь найдём частное решение. Применим условие $y(2) = -1$, то есть подставим $x = 2, y = -1$ и сможем найти С.

$$y = \frac{1}{1-Cx} \Rightarrow -1 = \frac{1}{1-2C} \Rightarrow 1-2C = -1 \Rightarrow C = 1.$$

Тогда частное решение: $y = \dfrac{1}{1-x}$.

Однородные уравнения

Задача 11. Решить уравнение $y' = \dfrac{y+x}{x}$.

Решение. Уравнение можно рассматривать как «однородное», то есть вида $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Оно может быть записано в виде $y' = \dfrac{y}{x} + 1$.

Сделаем замену $u = \dfrac{y}{x}$, при этом $y = ux$, а значит, $y' = u + xu'$. Тогда уравнение приводится к виду $u + xu' = u + 1$, то есть $xu' = 1 \Rightarrow$

$$x\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow u = \ln|x| + C.$$

надо сделать обратную замену, $\dfrac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x\ln|x| + Cx$.

Ответ. $y = x\ln|x| + Cx$.

Линейные уравнения 1 порядка.

Линейное однородное:

Задача 12. Решить уравнение $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.

Решение. Линейное однородное фактически является уравнением с разделяющимися переменными.

$$(1+x^2)y'-2xy=0 \;\Rightarrow\; (1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y}=\frac{2x}{1+x^2}dx \;\Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \;\Rightarrow\; \ln|y|=\ln(x^2+1)+\ln C \;\Rightarrow\; y=C(x^2+1).$$

445 ПРАКТИКА № 8 15.04.2016

Линейные неоднородные уравнения.

Задача 1. Решить уравнение $xy'-2y=3x^5$

Решение. 1) Решим соответствущее однородное.

$$xy'-2y=0 \;\Rightarrow\; x\frac{dy}{dx}=2y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y}=\frac{2}{x}dx \;\Rightarrow\; \ln|y|=2\ln|x|+\ln C \Rightarrow$$

$y=Cx^2$ - общее решение однородного уравнения.

2) Ищем общее решение неоднородного в виде $y=C(x)x^2$, при этом получится $y'=C'(x)x^2+C(x)2x$, подставляя y и y' в уравнение $xy'-2y=3x^5$, получаем:

$$C'(x)x^3+C(x)2x^2-2C(x)x^2=3x^5 \;\Rightarrow\; C'(x)x^3=3x^5 \;\Rightarrow\; C'(x)=3x^2$$

$\Rightarrow C(x)=x^3+C$. Тогда $y=(x^3+C)x^2$, и ответ: $y=x^5+Cx^2$.

Здесь частное решение неоднородного это x^5. Кстати, можно сделать и проверку этого ответа: $x(x^5)'-2x^5=x5x^4-2x^5=3x^5$.

Задача 2. $2y'+4xy=x$.

Решение. 1) Сначала решим однородное $2y'+4xy=0$.

$$2y'+4xy=0 \;\Rightarrow\; y'=-2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y}=-2xdx \;\Rightarrow$$

$\ln y=-x^2+\ln C \;\Rightarrow$ решение однородного $y=Ce^{-x^2}$.

2) Ищем решение неоднородного в виде $y=C(x)e^{-x^2}$.

При этом $y'=C'(x)e^{-x^2}-C(x)2xe^{-x^2}$.

Подставляем y и y' в исходное неоднородное уравнение $\Rightarrow$

$$2C'(x)e^{-x^2} - 4xC(x)e^{-x^2} + 4xC(x)e^{-x^2} = x \Rightarrow 2C'(x)e^{-x^2} = x \Rightarrow$$

$$C'(x) = \frac{1}{2}xe^{x^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{x^2}(2xdx) \Rightarrow$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{x^2}(2xdx) \Rightarrow C(x) = \frac{1}{4}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{4}e^{x^2} + C .$$

Тогда $y = \left(\frac{1}{4}e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = \frac{1}{4} + Ce^{-x^2}$. Ответ. $y = \frac{1}{4} + Ce^{-x^2}$.

Уравнения Бернулли.

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение $y' - 3x^2 y = x^2 y^4$

Решение. Разделим на y^4. Получаем $\frac{y'}{y^4} - 3x^2\frac{1}{y^3} = x^2$.

Введём замену $\frac{1}{y^3} = z$, при этом $z' = -3y^{-4}y' = -3\frac{y'}{y^4}$.

Тогда $-\frac{1}{3}z' - 3x^2 z = x^2$. Для удобства умножим ещё на -3.

$z' + 9x^2 z = -3x^2$. Это линейное неоднородное уравнение. Оно решается в 2 шага: сначала соответствующее однородное.

1) $z' + 9x^2 z = 0$. Однородное является уравнением с разделяющимися переменными. $z' = -9x^2 z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -9x^2 z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -9x^2 dx$

$\Rightarrow \int\frac{dz}{z} = -\int 9x^2 dx \Rightarrow \ln|z| = -3x^3 + \ln C \Rightarrow z = Ce^{-3x^3}$ это общее решение однородного уравнения.

2) Метод Лагранжа. Ищем решение неоднородного в виде:

$z = C(x)e^{-3x^3}$. Тогда $z' = C'(x)e^{-3x^3} - 9x^2C(x)e^{-3x^3}$. Подставим эти выражения в неоднородное уравнение $z' + 9x^2 z = -3x^2$.

$$C'(x)e^{-3x^3} - 9x^2C(x)e^{-3x^3} + 9x^2C(x)e^{-3x^3} = -3x^2 \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-3x^3} = -3x^2 \Rightarrow C'(x) = -3x^2e^{3x^3} \Rightarrow C(x) = -\int 3x^2e^{3x^3}dx \Rightarrow$$

$C(x) = -\int e^{3x^3} d(x^3)$. Так как $\int e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t} + C$, то $C(x) = -\frac{1}{3} e^{3x^3} + C$.

Тогда $z = C(x) e^{-3x^3} \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{3} e^{3x^3} + C \right) e^{-3x^3} \Rightarrow z = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x^3}$.

Обратная замена: вспомним, что $\frac{1}{y^3} = z$, тогда $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \Rightarrow$

Ответ. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{3} + Ce^{-3x^3}}}$.

Дифф. уравнения высшего порядка.

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение $y'' = (y')^2$.

Это уравнение сводится к $z' = z^2$ заменой $z = y'$, $z' = y''$.

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C_1 \Rightarrow z = -\frac{1}{x + C_1}.$$

Провести обратную замену здесь означает вычислить первообразную, ведь у нас было $z = y'$.

$$y = -\int \frac{1}{x + C_1} dx = -\ln|x + C_1| + C_2.$$

Задача 5. Найти общее решение уравнения $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ и частное решение при условиях Коши: $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

Решение. Сделаем замену $y' = z$, тогда $y'' = z'$.

Тогда уравнение сведено к виду $z'(x^2 + 1) = 2xz$.

$$\frac{dz}{dx}(x^2 + 1) = 2xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln(x^2 + 1) + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 (x^2 + 1).$$

Теперь вспомним, что было $y' = z$ и сделаем обратную замену.

$y = \int C_1 (x^2 + 1) dx = \frac{C_1 x^3}{3} + C_1 x + C_2$ - это общее решение.

Теперь конкретизируем константы с помщью условий Коши, то есть найдём частное решение. У нас есть информация:

$$y = \frac{C_1 x^3}{3} + C_1 x + C_2, \quad z = y' = C_1(x^2 + 1)$$

а также $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

Тогда $y(0) = \frac{C_1 0^3}{3} + C_1 0 + C_2 = 1$, $y'(0) = C_1(0^2 + 1) = 3$, то есть $C_1 = 3, C_2 = 1$. Тогда частное решение: $y_ч = x^3 + 3x + 1$.

Задача 6. Найти общее решение уравнения $xy''' = y''$ и частное решение при условиях Коши: $y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = 3$.

Решение. Сделаем замену $y'' = z$, тогда уравнение сводится к $xz' = z$, решаем его: $x\frac{dz}{dx} = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \ln x + \ln C \Rightarrow z = C_1 x$.

Теперь вспомним, что z это y'', и сделаем обратную замену, для этого надо 2 раза перейти к первообразной.

$$y'' = C_1 x \Rightarrow y' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 \Rightarrow y = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3.$$

Уравнение 3 порядка, и здесь получилось 3 константы. Теперь найдём частное решение. У нас есть такая информация:

$$y = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3, \quad y' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2, \quad y'' = C_1 x.$$

и $y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = 3$.

Подставляем $x = 1$, и получаем:

$$\frac{C_1}{6} + C_2 + C_3 = 1, \quad \frac{C_1}{2} + C_2 = 0, \quad C_1 = 3.$$

Фактически это система из 3 уравнений, но только метод Гаусса в полном объёме здесь не нужен, потому что сразу определено $C_1 = 3$, тогда из второго уравнения получим $C_2 = -\dfrac{3}{2}$, подставляем в первое

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} + C_3 = 1 \Rightarrow \; C_3 = 2$.

Итак, $y_ч = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x + 2$.

Линейные однородные уравнения высшего порядка.

Задача 7. Найти частное решение дифф. уравнения $y'' - 10y' + 9y = 0$ при условиях Коши: $y(0) = -1, y'(0) = 7$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 10r + 9 = 0$, его корни: $r_1 = 1,\; r_2 = 9$. Тогда ФСР состоит из e^x и e^{9x}, общее решение такое: $y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$.

Теперь найдём решение задачи Коши. Сначала запишем функцию и её производную:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$ и $\quad y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}$.

Кроме того, у нас есть информация: $y(0) = -1, y'(0) = 7$.

Тогда $C_1 + C_2 = -1$, $\; C_1 + 9C_2 = 7$. Получается система уравнений

$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_1 + 9C_2 = 7 \end{cases}$ вычитая 1-е уравнение из 2-го, находим, $\; 8C_2 = 8$, т.е. $C_2 = 1$, тогда $C_1 = -2$. Тогда частное решение: $y = -2e^x + e^{9x}$.

Задача 8. Найти общее решение дифф. уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 + r - 2 = 0$, его корни 1 и -2. Тогда ФСР = $\{e^x, e^{-2x}\}$, и общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Задача 9. Найти общее решение дифф. уравнения $2y'' + y' - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $2r^2 + r - 1 = 0$, его корни -1 и $\dfrac{1}{2}$. Тогда ФСР = $\{e^{-x}, e^{x/2}\}$, общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}$.

Задача 10. Найти общее решение дифф. уравнения $y^{(5)} - y''' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^5 - r^3 = 0$, то есть $r^3(r-1)(r+1) = 0$, его 5 корней: $0,0,0,1,-1$.

ФСР состоит из функций $\{1, x, x^2, e^x, e^{-x}\}$, где для кратного корня записали степенные функции (по возрастающей), причём у них из-за корня 0 есть множитель e^{0x}, равный 1, поэтому его не пишем.

Общее решение: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x}$.

Задача 11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ при условиях Коши: $y(0) = 4, y'(0) = 3, y''(0) = 5$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^3 - 3r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 3r + 2) = 0 \Rightarrow r(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow$ корни: 0, 1, 2.

Фундаментальная система решений состоит из e^{0x}, e^x и e^{2x}.

Общее решение в таком случае $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$.

Теперь надо найти решение задачи Коши. Есть информация, что $y(0) = 4, y'(0) = 3, y''(0) = 5$. Поэтому мы запишем саму функцию, а также 1 и 2 производную, применим условия Коши и получим систему на определение всех трёх констант:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \qquad y(0) = 4 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 4,$$

$$y' = C_2 e^x + 2C_3 e^{2x}, \qquad y'(0) = 3 \Rightarrow C_2 + 2C_3 = 3,$$

$$y'' = C_2 e^x + 4C_3 e^{2x}, \qquad y''(0) = 5 \Rightarrow C_2 + 4C_3 = 5.$$

Решаем систему методом Гаусса. Можно из 3 уравнения вычесть 2-е.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 4 \\ C_2 + 2C_3 = 3 \\ C_2 + 4C_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 4 \\ C_2 + 2C_3 = 3 \\ 2C_3 = 2 \end{cases}.$$

Итак, $C_3 = 1$, тогда $C_2 = 1$, $C_1 = 2$. Итак, частное решение

$y_ч = 2 + e^x + e^{2x}$.

Задача 12. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' - 9y' + 18y = 0$ при условиях Коши:
$y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

Решение. Характеристическое уравнение: $r^3 - 2r^2 - 9r + 18 = 0$, то есть $r^2(r-2) - 9(r-2) = 0$, то есть $(r^2 - 9)(r-2) = 0$. Корни $2, 3, -3$.

Общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$.

Запишем также производные, и применим условия Коши:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}, \qquad y(0) = 1 \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + C_3 = 1,$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} - 3C_3 e^{-3x}, \ y'(0) = 1 \Rightarrow \quad 2C_1 + 3C_2 - 3C_3 = 1,$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} + 9C_3 e^{-3x}, \ y''(0) = -1 \Rightarrow \quad 4C_1 + 9C_2 + 9C_3 = -1.$$

Для решения системы методом Гаусса, запишем и преобразуем расширенную матрицу. Из 2-й строки вычитаем 1-ю, домноженную на 2, а из третьей - 1-ю,домноженную на 4. Затем к 3-й строке прибавляем 2-ю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 9 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Теперь сразу видно, что $C_2 = -1$. Тогда $C_3 = 0$, $C_1 = 2$.

Частное решение: $y_ч = 2e^{2x} - e^{3x}$.

445 ПРАКТИКА № 9 22.04.2016

Линейные неоднородные уравнения.

Задача 1. Уравнение $y'' - y = xe^x$ решить методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных).

Решение. Шаг 1. Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Характеристическое уравнение для него: $r^2 - 1 = 0$. Его корни 1 и -1. Фундаментальная система решений в этом случае: $\{e^x, e^{-x}\}$, а общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Шаг 2. Теперь будем искать решение неоднородного в виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$, то есть на месте констант поставим неопределённые функции.
Производные от этих функций можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = xe^x \end{cases}$$

Прибавим 1-е уравнение ко 2-му. Получим

$2C_1'(x)e^x = xe^x$, т.е. $C_1'(x) = \dfrac{x}{2}$. Теперь подставим в первое уравнение, получим $\dfrac{x}{2}e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0$, откуда

$C_2'(x)e^{-x} = -\dfrac{x}{2}e^x$, тогда $C_2'(x) = -\dfrac{x}{2}e^{2x}$.

Сейчас, когда нашли $C_1'(x) = \dfrac{x}{2}$ и $C_2'(x) = -\dfrac{x}{2}e^{2x}$, надо проинтегрировать их для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

$$C_1(x) = \int C_1'(x) = \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4} + C_1.$$

$C_2(x) = \int C_2'(x) = -\dfrac{1}{2}\int xe^{2x}dx$ применим интегрирование по частям, метод, который изучали ранее. $u = x$, $v' = e^{2x}$, тогда $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$, $u' = 1$.

$$-\frac{1}{2}\int xe^{2x}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right) = -\frac{x}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}\int e^{2x}dx =$$

$$-\frac{x}{4}e^{2x} + \frac{1}{8}e^{2x} + C_2.$$

Теперь подставим найденные выражения в $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$.

$y = \left(\dfrac{x^2}{4} + C_1\right)e^x + \left(-\dfrac{x}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{8}e^{2x} + C_2\right)e^{-x}$ тогда

$y=\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8}\right)e^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$. Как видим, решение однородного уравнения, которые было в конце 1 шага, проявилось здесь в виде отдельного слагаемого. Частное решение неоднородного уравнения также является отдельным слагаемым.

Задача 2. Решить уравнение: $y''-5y'+4y=e^{3x}$ методом неопределённых коэффициентов (по правой части специального вида).

Решение. Шаг 1. Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'+4y=0$. Характеристическое уравнение $r^2-5r+4=0$, его корни 1 и 4. Их можно было как найти через дискриминант, так и просто заметить, что многочлен представляется в виде $(r-1)(r-4)$.

Тогда общее решение однородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Шаг 2. Заметим, что $b(x)=1\cdot e^{3x}$, число 3 не является характеристическим корнем, т.е. экспонента в правой части не совпадает ни с одной из экспонент, присутствующих в решении однородного уравнения. Тогда кратность $k=0$, то есть дополнительный множитель в частном решении имеет вид $x^0=1$, то есть фактически, его не будет. Многочлен нулевой степени, а именно 1, должны заменить на произвольный многочлен той же степени, то есть константу A. Итак, структура частного решения будет иметь вид $y=x^0\cdot A\cdot e^{3x}=Ae^{3x}$. Если $y=Ae^{3x}$, то легко установить, что $y'=3Ae^{3x}$, $y''=9Ae^{3x}$. Подставим их в исходное неоднородное уравнение $y''-5y'+4y=e^{3x}$. Получим $9Ae^{3x}-15Ae^{3x}+4Ae^{3x}=e^{3x}$, то есть $-2Ae^{3x}=e^{3x}$, откуда $-2A=1$, $A=-\dfrac{1}{2}$.

Частное решение $-\frac{1}{2}e^{3x}$. Тогда ответ, то есть общее решение неоднородного уравнения: $y = -\frac{1}{2}e^{3x} + C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

Задача 3. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = e^x$.

Решение. Шаг 1. Найдём решение однородного $y'' - 2y' + y = 0$.
Характеристическое: $r^2 - 2r + 1 = 0$, то есть $(r-1)^2 = 0$. Два корня совпадают, $r_{1,2} = 1$. Тогда ФСР состоит из функций e^x, xe^x, а общее решение однородного: $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Шаг 2. Правая часть $b(x) = e^x$ содержит экспоненту степени 1, но число 1 является корнем кратности 2 левой части. Тогда $k = 2$.
Тогда структура частного решения будет такая: $y = Ax^2 e^x$.

Если $y = Ax^2 e^x$, то $y' = A(x^2 + 2x)e^x$, $y'' = A(x^2 + 2x + 2x + 2)e^x$.
Подставляя в неоднородное уравнение, и сразу сокращая на одну и ту же экспоненту, которая есть во всех слагаемых, получим:

$A(x^2 + 2x + 2x + 2) - 2A(x^2 + 2x) + Ax^2 = 1$, следовательно

$(A - 2A + A)x^2 + (4Ax - 4Ax) + 2A = 1$, то есть $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$.

Итак, частное решение неоднородного: $\frac{1}{2}x^2 e^x$. Прибавим общее решение однородного, которое было получено на 1 шаге.

Ответ. $y = \frac{1}{2}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 xe^x$.

В следующей задаче оставим ту же левую часть, и изменим правую, а именно, возьмём другую степень экспоненты, и пусть там ещё будет множитель - многочлен 1 степени.

Задача 4. Решить уравнение. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$.

Решение. Шаг 1. Решаем однородное аналогично прошлой задаче, получаем $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Шаг 2. Правая часть $b(x) = xe^{2x}$ содержит экспоненту степени 2, такого корня нет для левой части, поэтому $k = 0$. Тогда структура частного решения не содержит лишней степенной функции, а вот из-за многочлена x мы должны написать произвольный многочлен 1 степени. Итак, частное решение надо искать в виде: $y = (Ax + B)e^{2x}$.

Если $y = (Ax + B)e^{2x}$, то $y' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}$,

$y'' = (4Ax + 4B + 2A + 2A)e^{2x}$. Производные искали по правилу дифференцирования произведения, при этом, когда дифференцируем экспоненту, то вся скобка удваивается, а второе слагаемое - производная всего, что было в скобке, умноженная на ту же экспоненту без изменения.

Теперь всё это подставим в неоднородное уравнение и сократим на одну и ту же экспоненту.

$(4Ax + 4B + 2A + 2A) - 2(2Ax + 2B + A) + (Ax + B) = x \quad \Rightarrow$

$4Ax + 4B + 4A - 4Ax - 4B - 2A + Ax + B = 1x + 0 \quad \Rightarrow$

$Ax + 2A + B = 1x + 0$, откуда $\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$. Тогда $A = 1, B = -2$.

Частное решение неоднородного $(x-2)e^{2x}$.

Ответ: $y = (x-2)e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Затем в рамках оставлегося времени до середины пары повторение.

Пример задачи на повторение.

Линейные дифф. уравнения 2 порядка с задачей Коши.

Найти частное решение дифф. уравнения $y'' - 9y = 0$ при условиях Коши: $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $r^2 - 9 = 0$, его корни: $r_1 = 3$, $r_2 = -3$. Тогда ФСР состоит из e^{3x} и e^{-3x}, общее решение такое: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

Теперь найдём решение задачи Коши. Сначала запишем функцию и её производную:

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ и $y' = 3C_1 e^{3x} - 3C_2 e^{-3x}$.

Кроме того, у нас есть информация: $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

Тогда $C_1 + C_2 = 2$, $3C_1 - 3C_2 = 0$. Получается система уравнений

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 3C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases}$, решая её, находим $6C_1 = 6$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Тогда частное решение: $y = e^{3x} + e^{-3x}$.

45 минут: Контрольная работа № 2.

1. Определённый интеграл и его приложения (площадь).

2. Двойной интеграл (в декартовых координатах по треугольнику или в полярных по части круга).

3. Дифф. уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными.

4. Линейные дифф. уравнения 2 порядка с задачей Коши.