Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика

Учебное пособие
(курс лекций)

2-й семестр
Часть 1

для специальности:
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
(группа 445)

Томск
ТУСУР
2016

Электронное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ в группе 445 весной 2016 года.

В первой половине 2 семестра, согласно рабочей программе, на специальности 09.03.03 изучаются следующие темы:

1. Интегральное исчисление.
2. Дифференциальные уравнения.

Оглавление

ЛЕКЦИЯ № 1.
19. 02. 2016

ГЛАВА 1. ИНТЕГРАЛЫ.

§1. Определения и основные методы.

Определение. Если $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$.

Свойство. Если $F(x)$ первообразная, то $F(x)+C$ (для любого $C \in R$) тоже является первообразной для той же самой функции $f(x)$.

Это легко доказать, действительно, $(F(x)+C)' = f(x)+0 = f(x)$.

Таким образом, первообразных бесконечно много, то есть, если поднять или опустить на любую высоту график $F(x)$, снова будет первообразная.

Определение. Множество всех первообразных от одной и той же функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом этой функции.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Свойство. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две различные первообразные функции $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) \equiv C$.

Доказывается так: $(F_1(x) - F_2(x))' \equiv C'$, то есть $f(x) - f(x) = 0$.

Свойства линейности.

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Таблица основных интегралов.

$$\int 0dx = C \qquad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \; (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx + C \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$$

Объяснение причины возникновения модуля в $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$. Функция $\ln x$ существует только на правой полуоси, тогда как $\frac{1}{x}$ имеет две ветви, на правой и левой полуоси. Получалось бы противоречие, что производная от несуществующей функции есть на левой полуоси. Функция $\ln|x|$ является чётным продолжением $\ln x$ на левую полуось, и именно она там является первообразной для $\frac{1}{x}$ при $x < 0$.

Методы интегрирования.

1. Преобразования подынтегральных выражений.

Различные преобразования, например, арифметические (домножить и поделить, прибавить и отнять), выделение полного квадрата, разбиение многочлена на множители, преобразования по тригонометрическим формулам, и т.д. нередко помогают упростить исходное выражение, разбить его на несколько более простых слагаемых, которые уже сводятся к интегралам табличного типа. На практике рассмотрены разнообразные примеры на виды этих преобразований. Рассмотрим один пример.

Пример. Вычислить $\int \cos^2 x dx$.

Решение. Применим формулу понижения степени.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int \cos 2x dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

2. Замена переменной.

Бывают такие случаи, когда функция имеет вид $f(g(x))$, то есть явно видно, что всё выражение зависит от какого-то однотипного блока, например всё выражается через $\sin x$ или $\sqrt{x}$. Делается замена на t, только нужно не забыть пересчитать dx, потому что $dx \neq dt$, если только замена не является простым линейным сдвигом $t = x + a$.

Пример. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = (t^2)' dt$, $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{t+1}{t} 2tdt = \int (2t+2)dt = t^2 + 2t + C .$$

Обратная замена: $t^2 + 2t + C = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} + C = |x| + 2\sqrt{x} + C$.

Более того, область определения исходной функции $(0,+\infty)$ из-за наличия в ней квадратного корня, точка 0 не входит в область определения, так как корень там и в знаменателе, так что знак модуля в ответе является излишним, ответ можно записать так: $x + 2\sqrt{x} + C$.

Если в функции присутствуют корни разного порядка, например $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$, то замена должна происходить через корень порядка НОК (наименьшее общее кратное). Причина в том, что именно при этом все корни переводятся в целые степени от t.

Если $t = \sqrt[6]{x}$, тогда: $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$.

Почему все корни выразятся через целые степени от t, видно здесь:

$$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{6}}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^2=t^2,$$

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{6}}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=t^3.$$

3. Подведение под знак дифференциала.

Если интеграл имеет вид $\int f(g(x))g'(x)dx$, то есть в функции присутствует какой-то множитель, который достаточно легко подлежит интегрированию, а в остальном множителе есть явная зависимость от его первообразной, то это значит, что подынтегральная функция есть производная от композиции $f(g(x))$. Тогда можно $g'(x)dx$ объединить и назвать $d(g(x))$, и далее $g(x)$ можно будет повсеместно заменить на t. Рассмотрим, как это действует, на примерах.

Пример. Вычислить $\int \sin^2 x\cos x dx$.

Решение. $\int \sin^2 x\cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x)$, фактически здесь уже подготовлена замена $t=\sin x$, более того, дифференциал пересчитывать не нужно, потому что под дифференциалом и так сформировано то же самое, что будет называться t. То есть, это частный случай замены переменных, только более простой.

Итак, вид интеграла получается $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3+C$.

Сделаем обратную замену, и вот ответ: $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\sin^3 x\right)' = \frac{1}{3}3\sin^2 x(\sin x)' = \sin^2 x\cos x$, то есть именно исходную подынтегральную функцию мы и получили.

Пример. Вычислить $\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$.

Решение. $\int \frac{x^2dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$\frac{1}{3}arctg(t)+C = \frac{1}{3}arctg(x^3)+C$.

4. Интегрирование по частям.

Существует более общий метод, чем подведение под знак дифференциала. Иногда вовсе не требуется, чтобы первообразная от того множителя, который подводится под dx, была как-то связана с остальной частью функции. Запишите формулу:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Такой короткий вид легче выучить наизусть, а теперь запишем более подробно, чтобы понять смысл.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx .$$

Если есть два множителя, и один из них интегрируется довольно легко (он обозначен v') то можно перейти к интегралу, в котором наоборот, u понижено до производной, а v' повышено до первообразной. Иногда именно это помогает упростить дальнейшие вычисления.

Доказательство формулы.

Вспомним, что по правилу дифференцирования произведения, которое мы доказывали в прошлом семестре: $\left(u(x)v(x)\right)' =$ $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Тогда $u(x)v'(x) = \left(u(x)v(x)\right)' - u'(x)v(x)$.

Тогда и неопределённые интегралы от этих двух функций совпадают:

$\int u(x)v'(x)dx = \int \left(u(x)v(x)\right)' dx - \int u'(x)v(x)dx$.

Но первообразная от производной, это сама функция и есть, т.е.

$\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x)+C$.

Поэтому

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx .$$

Пример. $\int xe^x dx$

Решение. Если обозначить $u = x$, $v' = e^x$, то при переходе к u' степенной понизится степень, в данном случае она вообще перейдёт в 1. А вот для второго множителя переходим к первообразной, но там не усложняется, остаётся точно так же как и было, e^x. Поэтому на следующем шаге интеграл содержит вообще не два множителя, а один!

Составим таблицу:

$u = x$	$v = e^x$
$u' = 1$	$v' = e^x$

$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx$, тогда получаем ответ: $xe^x - e^x + C$.

Пример. Вычислить интеграл: $\int x\cos x dx$ Составим таблицу:

$u = x$	$v = \sin x$
$u' = 1$	$v' = \cos x$

После применения формулы, останется интеграл, в котором всего лишь один множитель, а не два, потому что x переходит в 1, и один из множителей исчезает.

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C .$$

А есть такие случаи, когда функция состоит не из 2 множителей, а всего из одного, но мы ведь всё равно можем считать, что второй множитель есть, только он равен 1.

Пример. $\int \ln x dx$.

$u = \ln x$	$v = x$
$u' = \frac{1}{x}$	$v' = 1$

Здесь производная от подынтегральной функции устроена лучше и проще, чем сама функция, но правда, пришлось допустить некоторое незначительное усложнение типа функции при переходе от v' к v.

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Пример. $\int arctgx dx$

Производная арктангенса устроена проще, это уже рациональная дробь. И это используем, обозначая её u при интегрировании по частям:

$u = arctgx$	$v = x$
$u' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$v' = 1$

Тогда: $\int arctgx dx = xarctgx - \int \dfrac{x}{x^2+1}dx$.

Второе слагаемое далее уже решается подведением под знак dx.

$$xarctgx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} =$$

$$xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$xarctgx - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. Знак модуля даже не нужен, т.к. $x^2+1>0$.

Интегралы вида $\int e^x \cos x dx$ или $\int e^x \sin x dx$.

Они называются «циклические интегралы», потому что они решаются таким способом: через 2 цикла вычисления получается сведение к исходному интегралу.

Пусть $I = \int e^x \cos x dx$.

. На первом шаге, обозначаем $u_1 = e^x$, $v_1' = \cos x$.

$u_1 = e^x$	$v_1 = \sin x$

$u_1' = e^x$	$v_1' = \cos x$

$$I = \int e^x \cos x dx .= \ e^x \sin x - \left(\int e^x \sin x dx\right).$$

На 2-м шаге, в том интеграле, который получился, обозначим аналогичным образом: $u_2 = e^x$, $v_2' = \sin x$.

$u_2 = e^x$	$v_2 = -\cos x$
$u_2' = e^x$	$v_2' = \sin x$

Получается $I = e^x \sin x - \left(\int e^x \sin x dx\right) =$

$$e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - I .$$

Из равенства $I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$ можно выразить I:

$$2I = e^x \sin x + e^x \cos x , \ I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) .$$

Итак, ответ: $\int e^x \cos x dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$.

§2. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим более подробно методы для интегралов типа

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx ,$$

где $P(x), Q(x)$ - два многочлена каких-либо степеней.

Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то дробь неправильная. Можно свести неправильную дробь к правильной, поделив $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком. В результате, появятся некоторые степенные слагаемые вне этой дроби, найти первообразные от них не проблема. Таким образом, мы должны научиться интегрировать именно правильные дроби.

Есть некоторые виды дробей, действия с которыми сводятся к тем методам, которые мы уже изучали, это так называемые «простейшие дроби» (у них знаменатель дальше нельзя разложить на множители).

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$\int \frac{dx}{(x+a)^n}$ заменой сводится к $\int t^{-n} dt$, а далее как для степенной.

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (обозначим этот интеграл I_n) решается интегрированием по частям, если обозначить всю функцию u а второй множитель 1. Получится «рекурсивная» формула, выражающая I_{n+1} к I_n, значит, все они сводятся к $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ решается так: выделить полный квадрат, и тогда всё сведётся к виду $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ выделить полный квадрат в знаменателе, и получится выражение вида $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

Рассмотрим общий случай, когда степень знаменателя произвольна. Дробь при этом уже правильная, если не так, то мы отделили целую часть и проинтегрировали её отдельно.

Найдём корни знаменателя и разложим его на множители. При этом неразложимые множители могут остаться либо 1 либо 2 степени. Для любого многочлена 3 степени, уже есть хотя бы один действительный корень. Итак, в знаменателе могут быть только $(x \pm a)$ или (x^2+px+q).

Далее, можно разбить на сумму простейших дробей, где знаменатель каждой дроби - это один из множителей, на которые был разложен знаменатель $Q(x)$. Например, если все корни различны, то

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Называется **метод неопределённых коэффициентов.**

Если сумму простейших привести к общему знаменателю, то останется приравнять числители, и найти неопределённые коэффициенты.

Ситуация 1) Если все корни $\in R$ и различны.

Пример. $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$.

Решение. $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$.

Приведём к общему знаменателю $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} =$

$\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$.

Теперь приравняем числители в $\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$ и $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$.

$A(x-2)+B(x-1) = 2x-3$, т.е.

$(A+B)x+(-2A-B) = 2x-3$, получается система уравнений:

$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=-3 \end{cases}$ решая её, находим $A=B=1$.

Получается, что $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx =$

$\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-1| + \ln|x-2| + C$.

ЛЕКЦИЯ № 2.

22. 02. 2016

Ситуация 2. Если все корни $\in R$, но среди них есть кратные.

Например, если два из 3 корней совпадают, дробь имеет такой вид: $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}$. Здесь нельзя записать $\frac{1}{(x-a)(x-a)(x-b)}$ и представить в виде $\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}$, потому что, приводя к общему знаменателю такую сумму, мы получим в знаменателе только $(x-a)(x-b)$, а вовсе не $(x-a)^2(x-b)$. Таким образом, тот вариант метода разложения на простейшие, который был для различных корней, здесь приведёт к противоречию.

Разложение необходимо искать в таком виде:

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{B}{(x-b)}$$

Если корень кратности k, то соответственно, надо включить в общую сумму k таких слагаемых, где есть все степени от 1 до k.

Пример. $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx$

Наличие множителя x^2 означает, что корень 0 кратности 2. Фактически даже можем рассматривать в таком виде:

$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x-0)^2(x+1)}dx$.

Сначала извлечём дробь из интеграла, и ищем разложение в виде:

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Приводим к общему знаменателю.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Так как знаменатели равны, то осталось приравнять числители.

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2 = 2x^2+2x+1,$$

$$\Rightarrow \quad Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2 = 2x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow \quad (A+C)x^2+(A+B)x+B = 2x^2+2x+1$$

Тогда надо приравнять коэффициенты при каждой степени, получится $A+C=2$, $A+B=2$, $B=1$.

То есть система уравнений на поиск трёх неопределённых коэффициентов:

$\begin{cases} A+C=2 \\ A+B=2 \\ \quad B=1 \end{cases}$ решая эту систему, находим $A=B=C=1$.

Тогда исходный интеграл распадается на сумму:

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C.$$

Ситуация 3. Если не все корни $\in R$.

Возможно, что многочлен в знаменателе дроби не полностью разлагается на первые степени, так, могут присутствовать множители 2 степени типа x^2+a^2 или x^2+px+q с отрицательным дискриминантом, которые далее нельзя разложить, потому что у них нет действительных корней (есть комплексные корни, но они $\notin R$). В этом случае вместо пары слагаемых в разложение надо включать одно, вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, т.е. правильная дробь с максимально возможной степенью в числителе, должна содержать там линейную функцию. В некоторых примерах может потом оказаться, что $M=0$, однако сразу искать в виде $\dfrac{A}{x^2+px+q}$ нельзя, иначе может получаться противоречие при приведении к общему знаменателю.

А если неразложимые множители 2 степени сами кратные, то надо включить в сумму несколько слагаемых, где степени идут по нарастающей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots$$

Пример. $\displaystyle\int\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

Решение. Ищем разложение в виде: $\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}$ $=$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Приводим к общему знаменателю.

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$A(x^2+1)+(Mx+N)(x+1) = x^2+x+2 \Rightarrow$$

$$Ax^2+A+Mx^2+Mx+Nx+N = x^2+x+2 \Rightarrow$$

$$(A+M)x^2+(M+N)x+(A+N) = x^2+x+2.$$

Получаем систему:

$\begin{cases} A+M=1 \\ M+N=1 \\ A+N=2 \end{cases}$. Из разности 1-го и 2-го уравнения, получаем $A-N=0$.

В то же время, $A+N=2$. Тогда $A=1, N=1$. Тогда $M=0$.

Итак, заменим в интеграле «большую» дробь на сумму маленьких, каждая из которых приводится к табличному интегралу.

$$\int\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \ln|x+1|+arctg(x)+C.$$

Итак, в этом параграфе мы рассмотрели все типы рациональных дробей. Других случаев нет, т.к. неделимых множителей 3 степени уже быть не может, для многочлена 3 степени есть хотя бы один действительный корень.

§3. Интегрирование иррациональностей и тригонометрических выражений.

Иррациональности.

Если в подынтегральной функции присутствует корень какого-то порядка r, то есть $\int f(x,\sqrt[r]{x})dx$, то замена $t=\sqrt[r]{x}$ позволяет полностью избавиться от корней в выражении и свести к рациональной дроби.

Из $t=\sqrt[r]{x}$ следует $x=t^r$, $dx=rt^{r-1}dt$, то есть как видим, пересчёт дифференциала при замене тоже не добавляет ничего, кроме константы и целой степени от t.

Рассмотрим сразу более общий случай: если функция содержит несколько корней разного порядка, т.е. $\int f(x,\sqrt[r_1]{x},\ldots,\sqrt[r_k]{x})dx$.

Тогда нужна замена на корень порядка r = НОК (r_1,...,r_k).

r это наименьшее общее кратное всех порядков, которые там есть.

Именно тогда все корни перейдут в целые степени от t. Так, к примеру, если $\int f(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x})dx$, то НОК = 6. Замена: $t=\sqrt[6]{x}$, тогда: $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Каждый корень становится целой степенью от t:

$$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{6}}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^2=t^2,$$

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{6}}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=t^3.$$

В общем случае степень равна r/r_i, то есть, какого множителя не хватает до наименьшего общего кратного, такая степень от t и получится.

Рассмотрим на примере, содержащем 3 разных корня.

Пример Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

НОК (2,3,5) = 30. Поэтому замена $t=\sqrt[30]{x}$.

Тогда $\sqrt[5]{x}=x^{1/5}=x^{6/30}=\left(\sqrt[30]{x}\right)^6=t^6$. Дополняющий множитель до НОК для числа 5 как раз и есть 6, ведь НОК = 30.

Другие корни пересчитываются аналогично:

$$\sqrt[3]{x}=x^{1/3}=x^{10/30}=\left(\sqrt[30]{x}\right)^{10}=t^{10},$$

$$\sqrt{x}=x^{1/2}=x^{15/30}=\left(\sqrt[30]{x}\right)^{15}=t^{15}.$$

Надо ещё также пересчитать дифференциал для новой переменной t.

$t = \sqrt[30]{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^{30} \quad \Rightarrow \quad dx = 30t^{29}dt$.

Теперь подставим всё это в интеграл.

$$\int \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{t^6 + t^{10}}{t^{15}} 30t^{29}dt = 30\int (t^6 + t^{10})t^{14}dt =$$

$= 30\int (t^{20} + t^{24})dt = \dfrac{30}{21}t^{21} + \dfrac{30}{25}t^{25} + C$, и после обратной замены:

$$\frac{30}{21}\sqrt[30]{x}^{21} + \frac{30}{25}\sqrt[30]{x}^{25} + C.$$

Если $\int f(x, \sqrt[r_1]{x+a}, \ldots, \sqrt[r_k]{x+a})dx$ т.е. под корнем некоторое линейное выражение, то решается практически так же, замена $t = \sqrt[r]{x+a}$, где r это тоже наименьшее общее кратное. Более сложная ситуация, когда под корнем разные линейные функции.

Например, $\sqrt{x+1}$ и $\sqrt{x+2}$. Если один корень заменить на t , $t = \sqrt{x+1}$, то $x = t^2 - 1$, тогда $\sqrt{x+2} = \sqrt{t^2+1}$. Такие будут рассмотрены чуть позже в этом параграфе, они решаются с помощью тригонометрических функций.

Если интеграл вида $\int f\left(\sqrt[r]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (где r - целое число), то замена $t = \sqrt[r]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ сводят всё к рациональной дроби от t.

$$t = \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^r = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow (cx+d)t^r = ax+b \Rightarrow$$

$t^r cx - ax = b - t^r d \Rightarrow x = \dfrac{b - t^r d}{t^r c - a}$ то есть x выражено в виде рациональной дроби от t, содержащей только целые степени.

Дифференциал тоже выразится в виде рациональной дроби:

$$dx=\left(\frac{b-t^r d}{t^r c-a}\right)' dt = \frac{(b-t^r d)'(t^r c-a)-(t^r c-a)'(b-t^r d)}{(t^r c-a)^2} dt =$$

$$\frac{-rt^{r-1}d(t^r c-a)-rt^{r-1}c(b-t^r d)}{(t^r c-a)^2} dt.$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

Пусть рассматриваются интегралы типа $\int f(\sin x, \cos x)dx$. Если там есть ещё и зависимость от tgx или $ctgx$, то всё равно их можно записать через синус и косинус, поэтому можем считать, что вид именно такой: именно $\int f(\sin x, \cos x)dx$

Универсальная тригонометрическая подстановка и её применение.

Замена $t = tg\frac{x}{2}$ называется универсальной тригонометрической подстановкой. Она иногда приводит к громозким вычислениям, зато универсальна. При этой замене:

$$x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

Решение. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}$.

Свели к рациональной дроби. Далее, преобразуем её:

$$\int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt =$$

$$-\int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = -\int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt = -\int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$\int \frac{2}{t^2+1}dt - \int dt = 2arctg(t) - t + C.$$

Сделаем обратную замену, и получим ответ:

$$2arctg\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) - tg\left(\frac{x}{2}\right) + C = x - tg\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Как видим, при действии универсальной тригонометрической подстановки могут получаться громоздкие 4-этажные дроби. Поэтому для различных частных случаев, где функция обладает какими-то свойствами чётности, придумали другие подстановки.

Частные случаи, связанные с нечётностью по sin и cos, и замены.

Случай 1. Если функция в интеграле нечётная относительно косинуса, то есть $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$, нужна замена: $t = \sin x$.

В чём её смысл. $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$.

Далее, $x = \arcsin t$, поэтому $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Таким образом, будет корень в нечётной степени, полученный при замене в самой функции, и ещё один - из дифференциала. А если корень нечётной степени или умножить, или поделить на ещё один, то в итоге получится корень в чётной степени, то есть просто целая степень от $(1-t^2)$, т.е. какой-то многочлен от t. Таким образом, эта замена сводит всё к целым степеням от t.

Пример. Вычислить интеграл $\int \dfrac{1}{\cos x}dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$.

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{1-t^2} dt$ вот и свелось к рациональной дроби, и дальше для t можем действовать в рамках прошлой темы «рациональные дроби».

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = -\int \frac{1}{t^2-1} dt = -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = -\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt .$$

Приводим к общему знаменателю:

$\frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$, далее $At + A + Bt - B = 0t + 1$,

$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$, отсюда следует $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$.

$$-\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln|t-1| + C$$

это можно после обратной замены и применения свойств логарифмов, записать так: $\ln \sqrt{\left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|} + C$.

Случай 2. Нечётная относительно sin функция в интеграле, то есть выполняется свойство $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$. Тогда замена: $t = \cos x$.

В этом случае $x = \arccos t$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

В результате тоже получается корень $\sqrt{1-t^2}$ в чётной степени.

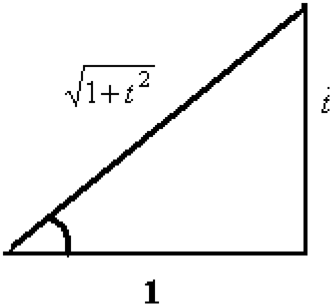
Случай 3. Если при смене знака и синуса, и косинуса знак итогового выражения по меняется 2 раза, то есть останется прежним.

$f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$

Это означает, что суммарная степень чётна. Замена: $t = tgx$.

$x = arctgt$, соответственно, $dx = \frac{1}{t^2+1} dt$.

Выразим синус и косинус. $\sin x = \sin(artcgt)$. Нужно выразить синус того угла, тангенс которого равен t. Рассмотрим прямоугольный треугольник, обозначим противолежащий и прилежащий катеты: t и 1. Но тогда по теореме Пифагора, гипотенуза равна $\sqrt{1+t^2}$. Подпишем её тоже.



А теперь можно выразить синус и косинус:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

Степени обеих функций нечётны, суммарная степень чётна. То есть, это как раз тот случай, когда можно сделать замену $t = tgx$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^5} \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3} \frac{\sqrt{1+t^2}^5}{1} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\int t^3 \sqrt{1+t^2}^2 \frac{dt}{t^2+1} = \int t^3 \frac{(1+t^2)dt}{t^2+1} = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}tg^4 x + C.$$

Ответ. $\frac{1}{4}tg^4 x + C$.

Интегрирование выражений типа $\sqrt{a^2 - x^2}$,$\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$

Они все сводятся к тригонометрическим функциям.

Случай 1. $\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$.

Замена: $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$).

Рассмотрим замену $x = a\sin t$. На самом деле надо было записать $t = \arcsin\frac{x}{a}$, ведь по идее, для замены надо вводить новую переменную и выражать её через старую. Однако, запомнить здесь вам будет легче именно «обратную» замену в виде $x = a\sin t$.

Далее получается $dx = a\cos t$, а корни в этом выражении исчезают так: $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t$. Таким образом, всё сводится к тригонометрическим функциям.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

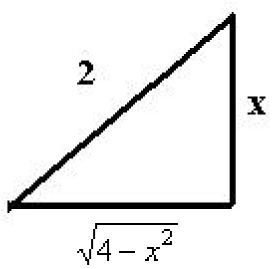
Здесь $a = 2$, потому что $a^2 = 4$.

Замена $x = 2\sin t$. Корень при этом превратится в $2\cos t$.

Итак, $\int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2\sin t}{2\sin t} 2\cos t dt = \int 2\sin t dt = -2\cos t + C$.

после обратной замены, это $-2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C$.

Можем упростить композицию прямой и обратной тригонометрических функций с помощью чертежа, как это делали недавно. Надо найти косинус того угла, синус которого равен $\frac{x}{2}$. Подпишем противолежащий катет и гипотенузу, x и 2. тогда третья сторона по теореме Пифагора $\sqrt{4 - x^2}$.



Ну а тогда косинус равен $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

$$-2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C = -2\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C = -\sqrt{4-x^2}+C.$$

Примечание. Этот пример можно было решить и другим методом: подведением под знак дифференциала.

Пример. Доказать формулу $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$

Сделаем замену $x=a\sin t$, тогда $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\frac{1}{a\cos t}a\cos t dt$ $= \displaystyle\int dt = t+C$, и обратная замена приводит к $\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$.

Случай 2. $\int f\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$.

Здесь замена $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (либо аналогично $x=\dfrac{a}{\cos t}$).

Подробнее рассмотрим, как и почему исчезает корень квадратный при замене $x=\dfrac{a}{\sin t}$. При этом $dx=\left(\dfrac{a}{\sin t}\right)' dt=-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}$,

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}} =$$

$a\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \dfrac{a\cos t}{\sin t}$. Таким образом, все корни преобразуются в тригонометрические функции.

Случай 3. $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$.

Замена $x = atgt$ (либо $x = actgt$).

Как действует такая замена.

$$dx = \frac{a}{\cos^2 t}, \ \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2tg^2t+a^2} = a\sqrt{1+tg^2t} =$$

$$a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = .\frac{a}{\cos t}.$$

Итак, корни вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ могут быть преобразованы к тригонометрическим функциям с помощью замены.

А тогда 2-я замена приведёт к рациональной дроби, для которых затем разложение на протсейшие. То есть, здесь бывают задачи, которые решаются в 3 шага, рассмотрим их на практике.

ЛЕКЦИЯ № 3.
04. 03. 2016

§4. Определённый интеграл.

Определение.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Введём разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

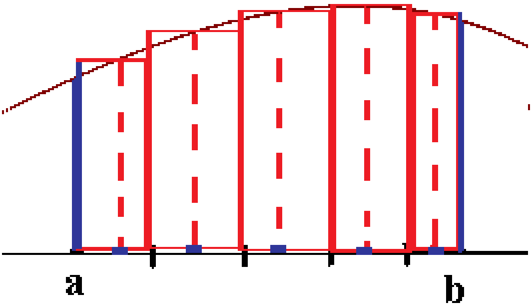
Каждый из n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ обозначим Δx_i, а его длину $|\Delta x_i| = x_i - x_{i-1}$. Возьмём какую-то произвольную точку на каждом из этих отрезков, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Следующая сумма:

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)|\Delta x_i|$ называется интегральной суммой.

Предел σ_n при $n \to \infty$ и при условии, что $\max\limits_{n\to\infty}|\Delta x_i| \to 0$ (то есть разбиение отрезка измельчается повсюду, а не только в какой-то его части) называется интегралом функции f по отрезку $[a,b]$.

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Геометрически σ_n означает сумму площадей прямоугольников, высота каждого из которых равна значению в выбираемой точке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$:



Чем больше n, тем более узкие прямоугольники получаются, и в пределе эта величина стремится к величине площади между графиком и осью. Геометрический смысл интеграла: площадь криволинейной трапеции под графиком (если график выше оси). Впрочем, интеграл может быть и меньше нуля, так, если $f < 0$ то это площадь, расположенная между графиком и осью 0x, взятая с отрицательным знаком.

Свойства определённого интеграла.

1. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Это свойство часто бывает нужно при заменах переменной в определённом интеграле. Так, например, если замена $t = a - x$, то большему x будет соответствовать меньшее t и наоборот. То есть, интеграл получится от большего числа до меньшего, и надо будет поменять пределы интегрирования обратно, и при этом сменится знак.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Кстати, свойство верно даже в том случае, если $c \notin [a,b]$, тогда просто получится, что интегралы по $[b,c]$ и $[c,b]$ взаимоуничтожатся.

Следующие два свойства относятся к уже знакомому понятию «линейность»: можно вынести константу и интеграл от суммы функций разбить на сумму двух интегралов.

3. $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx$ и 4. $\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

5. Если $f \geq (\leq) 0$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq (\leq) 0$.

Действительно, если в интегралоной сумме $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\left|\Delta x_i\right|$ все числа $f(c_i)$ положительны (отрицательны) то и сумма положительна (отрицательна).

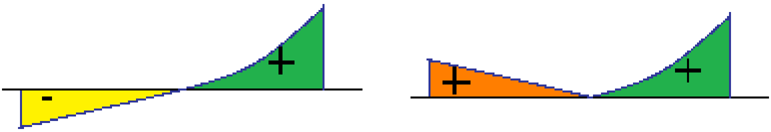
6. если $f \leq g$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Свойство 6 следует из 5, ведь можно рассмотреть $g - f \geq 0$.

Свойство 7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$

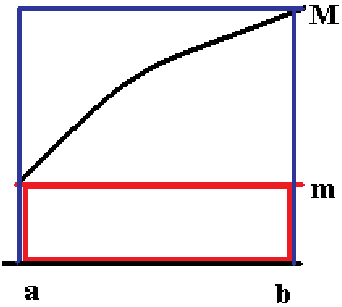
(Модуль интеграла меньше или равен, чем интеграл модуля).
Действительно, если сначала вычислить интеграл, то площади, расположенные выше и ниже оси, частично вычитаются, и число

получается меньше. А если заранее взять модуль функции, то эти площади не вычитаются, а складываются:



Равенство здесь возможно лишь в том случае, когда в области интегрирования функция нигде не меняет знак.

Свойство 8. Если $m \le f \le M$ то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.



Площадь прямоугольника, соответствующего минимальной высоте графика функции, это и есть $m(b-a)$, что меньше, чем площадь криволинейной трапеции, а $M(b-a)$ наоборот, больше, ведь это площадь прямоугольника, соответствущего максимальной высоте графика.

А теперь представьте себе, что высота прямоугольника плавно растёт от m до M. Площадь при этом растёт от $m(b-a)$ до значения $M(b-a)$. Но ведь значение интеграла между этими числами, следовательно, при какой-то высоте h, площадь растущего прямоугольника сравняется со значением интеграла.

Свойство 9. Существует такое h, где $m \le h \le M$, что

$$\int_a^b f(x)dx = h(b-a) \ .$$

Свойство 10. Если f непрерывна, то существует точка $c \in (a,b)$,

такая, что: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Отличие от прошлого свойства в том, что это среднее значение не просто существует, а ещё достигается в какой-то точке, то есть обязательно найдётся точка графика на этой высоте. Для разрывной могло быть и не так: например, если ступенчатая функция на одной половине отрезка навна 1, а на второй половине 2, то средняя высота графика 1,5 но ведь график нигде не проходит через эту высоту.

Основной формулой в теме «определённый интеграл» является формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Она позволяет сразу же вычислить определённый интеграл, если известен неопределённый.

Но на самом деле, связь между этими двумя видами интегралов двусторонняя, т.е. и неопределённый интеграл может быть вычислен с помощью определённого. А именно, если рассматривать функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ то есть определённый интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 1. Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. Нужно доказать, что $\Phi'(x) = f(x)$.

Рассмотрим подробнее производную функции $\Phi(x)$. По определению,

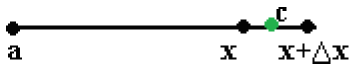
$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}.$$

В данном случае, это $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$, по свойству 2, интеграл по отрезку $[a, x+\Delta x]$ можно представить в виде суммы двух интегралов, а именно, по $[a, x]$ и $[x, x+\Delta x]$. Чертёж:

При этом интеграл по $[a, x]$ там есть ещё и со знаком минус, то есть он сокращается в итоге.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}.$$

По свойству 10, интеграл по отрезку $[x, x+\Delta x]$ можно представить как некоторое среднее значение, т.е. в какой-то точке $c \in [x, x+\Delta x]$, умноженное на длину отрезка.



В общем случае длина была равна $b-a$, а для данного отрезка это просто Δx. Тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x \cdot f(c)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$.

Однако точка $c \in [x, x+\Delta x]$, поэтому при $\Delta x \to 0$, точка c, которая находится где-то между x и $x+\Delta x$, стремится к левой границе отрезка: $c \to x$. Поэтому в итоге $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$.

Теорема 2. (Ньютона-Лейбница). Если $F(x)$ - какая-либо первообразная от $f(x)$, то верна формула: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Если $F(x)$ есть произвольная первообразная, то она отличается на какую-то константу C от той первообразной, которую мы рассматривали в теореме 1. То есть $F(x) = \Phi(x) + C$, что означает

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Запишем это равенство в точке a, получится $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$ но ведь интеграл по одной точке это 0, там нулевая длина основания, а значит и нулевая площадь. Тогда $F(a) = 0 + C = C$. вот, кстати, мы заодно и установили, как связана константа C с выбором начальной точки a.

$\Phi(a) = 0$, а на сколько по высоте отличается от Φ любая другая первообразная - это и есть значение $C = F(a)$.

Итак, теперь ясно, что $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$.

А теперь рассмотрим это выражение в точке b.

$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$, то есть $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$. Но ведь переменная t вводилась исключительно для того, чтобы отличать x внутри функции и на верхнем пределе интеграла. Теперь, когда перешли к фиксированным границам в интеграле, можно сделать тривиальную замену $x = t$ и запись примет вид

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, что и требовалось доказать.

Примеры вычисления по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример. Найти интеграл $\int_0^1 x dx$.

Решение. $\int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$.

Пример. Найти интегралы $\int_0^1 x^2 dx$ и $\int_1^2 x^2 dx$.

Решение. Первый вариант: $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Второй вариант: $\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Пример. Найти интеграл $\int_0^\pi \sin x dx$.

Решение. $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$.

Пример. Найти интеграл $\int_0^\pi \cos x dx$.

Решение. $\int_0^\pi \cos x dx = \sin x\big|_0^\pi = 0 - 0 = 0$.

Вид формулы интегрирования по частям для определённого интеграла.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Особенности замены переменной в определённом интеграле (пересчёт пределов интегрирования, и можно не возвращаться к старой переменной).

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

При замене $t=\sqrt{x}$ мы адаптируем границы к новой переменной, то есть, если $x\in[0,4]$, то $t\in[\sqrt{0},\sqrt{4}]=[0,2]$.

Тогда $\int\limits_0^2 \frac{1+t}{t}2tdt = \int\limits_0^2 (2+2t)dt = (2t+t^2)\Big|_0^2 = 8.$

Конечно, старые границы могут остаться прежними, например, при такой замене $[0,1]$ отобразится в $[0,1]$. Но как правило, при замене верхний и нижний предел интегрирования тоже изменяются.

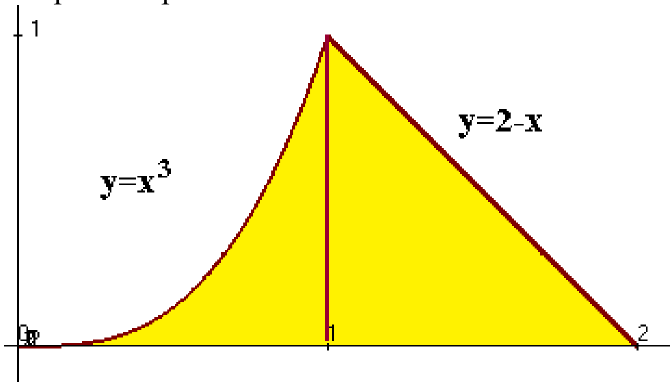
Приложения определённых интегралов.

Пункт 1. Вычисление площадей фигур.

Так как площадь криволинейной трапеции связана с интегралом, то это приложение очевидно. Но есть особенности, связанные со строением геометрической фигуры, в некоторых случаях надо разбить фигуру на несколько частей.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\{y=0, y=x^3, y=2-x\}$.

Решение. Построим чертёж:



Так как верхняя граница после точки 1 переходит с одной кривой на другую, то придётся разбить на сумму двух вычислений по каждой части отдельно: $\int\limits_0^1 x^3 dx + \int\limits_1^2 (2-x)dx$.

Итак, получим $\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{4} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) =$

$\frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Пункт 2. Вычисление объёмов тел вращения.

Если график функции вращать вокруг оси 0x, то получится так называемое тело вращения. Каждое сечение плоскостью, паерпендикулярной оси 0x , это круг, его площадь равна $\pi f^2(x)$, так как $f(x)$ это как раз и есть радиус (равно удалению вращающейся точки от оси вращения). В итоге, $V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx$.

Пример. Вывести этим методом формулу объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Решение. Чтобы получить шар, достаточно вращать верхнюю полуокружность, которая задаётся такой функцией: $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V = \int\limits_{-R}^{R} \pi f^2(x)dx = \int\limits_{-R}^{R} \pi \sqrt{R^2 - x^2}^{\,2} dx = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$$

$$\pi\left(R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R}\right) = \pi\left(2R^3 - 2\frac{R^3}{3}\right) = \pi \frac{4}{3}R^3.$$

Пример. Найти объём, получающийся при вращении кривой $y = \sqrt{x}$, при условии что $x \in [0,1]$.

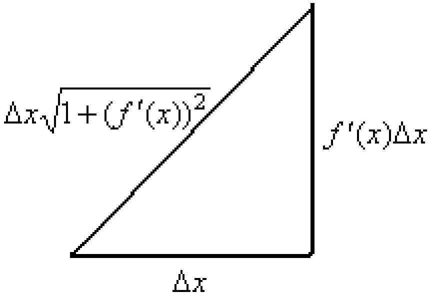
Решение. $V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int\limits_0^1 x dx = \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$. Ответ $\pi/2$.

Пункт 3. Вычисление длины дуги кривой.

Формула для явно заданной кривой: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Выведем (докажем) эту формулу.

Разобьём область определения на n частей, рассмотрим подробнее одну часть графика.



Длина фрагмента кривой приближённо равна гипотенузе. При этом, тангенс угла наклона равен производной. Поэтому, если горизонтальный катет Δx то вертикальный равен $f'(x)\Delta x$. Но в этом случае гипотенуза, по теореме Пифагора, равна:

$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \Delta x\sqrt{1+(f'(x))^2}$.

При переходе к пределу при $n \to \infty$, получится $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Чем круче наклон фрагмента графика, тем больше величина $(f'(x))^2$, и тем больше корень $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ и соответственно, длина части этой кривой. Напротив, если график горизонтальный (функция = константа) то $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+0^2} = 1$. Длина такой кривой просто равна длине отрезка в области определения, то есть $b-a$.

Для параметрически заданной в плоскости формула принимает такой вид: $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

В трёхмерном пространстве: $L=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$.

Длина кривой в полярной системе координат.
Пусть кривая задана формулой $r=r(\varphi)$. Тогда:

$$L=\int\limits_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Доказательство этой формулы.
Рассмотрим формулы взаимосвязи между полярными и декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

Теперь применим параметр φ таким же образом, как в прошлой формуле был параметр t.

$x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi$.

Найдём производные:

$x'(\varphi)=r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi$

$y'(\varphi)=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi$

Их надо подставить в формулу: $L=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,d\varphi$.

$$L=\int\limits_a^b \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

применим формулу сокращённого умножения в каждом квадрате под корнем. Там получатся квадраты и удвоенные произведения, которые, впрочем, сократятся, ведь они будут разного знака. Выражение под корнем преобразуется так:

$(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2 =$

$(r'(\varphi))^2\cos^2\varphi+(r(\varphi))^2\sin^2\varphi-2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi +$

$(r'(\varphi))^2\sin^2\varphi+(r(\varphi))^2\cos^2\varphi+2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi =$

$(r'(\varphi))^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+(r(\varphi))^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$

$(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2$.

Поэтому и получается в итоге: $L=\int\limits_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}\,d\varphi$.

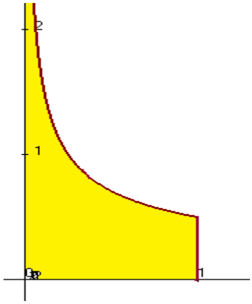
ЛЕКЦИЯ № 4. 18. 03. 2016

§5. Несобственный интеграл.

Если криволинейная трапеция бесконечно вытянута вправо или вверх, то тоже может быть конечная площадь.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1.$

Но ведь она неограниченная в окрестности точки 0, т.е. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$. А при вычислении мы этого даже и не заметили, так как первообразная ограниченная, и в неё можно просто подставить $x=0$ и $x=1$. Вот график этой функции $\frac{1}{2\sqrt{x}}$:



Здесь область значений E(f) не является ограниченной.

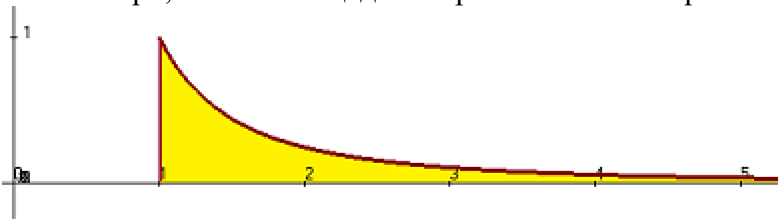
$\int\limits_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ можно рассматривать как предел $\lim\limits_{b\to 1}\int\limits_0^b \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Пример. Вычислить $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Такой интеграл можно рассматривать как предел интегралов вида $\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2}$ при $b\to\infty$.

Если просто вычислить $\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2}$ то получится $-\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b}+\frac{1}{1}=1-\frac{1}{b}$.

Предел $\lim\limits_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1-0=1$. Снова получилось, что, несмотря на

неграниченность трапеции под интегралом, площадь конечна.
Здесь область определения D(f) не является ограниченной.
Тем не менее, трапеция слишком узкая, т.е. её ширина убывает достаточно быстро, чтобы площадь не превысила некоторое число.



Основные определения:
Если неограниченная D(f), то интеграл называется **несобственным интегралом 1-го рода**, а если E(f) то **несобственным интегралом 2-го рода.**

Если при вычислении несобственного интеграла с помощью предела получается конечное число, то он называется **сходящимся**, если в процессе вычисления предела выясняется, что предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется **расходящимся**.

Кстати, для сравнения, геометрическая прогрессия также бывает сходящейся либо расходящейся. Так вот, если площадь такой бесконечно вытянутой криволинейной трапеции разбить на части по целым числам, например от 1 до 2, от 2 до 3 и так далее, то если они образуют сходящуюся прогрессию, и в сумме равны некоторой константе, то интеграл очевидно, сходится.

Пример расходящегося несобственного интеграла.

Пример. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\Big|_1^\infty = \infty$. Здесь расходимость из-за

неограниченности первообразной.

Пример. $\int\limits_0^\infty \sin x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b \sin x dx = -\lim\limits_{b\to\infty} \cos x\Big|_0^b = -\lim\limits_{b\to\infty}\cos b + \cos 0 =$ $1-\lim\limits_{b\to\infty}\cos b$. Но этот предел не существует, косинус колеблется от -1 до 1 и при увеличении переменной его график не стремится ни к какой конкретной высоте. И хотя даже функция ограничена, несобственный интеграл расходится. Площадь криволинейной трапеции, при увеличении x, сначала растёт до значения 2, что равно $\int\limits_0^\pi \sin x dx$, а потом снова убывает до 0, и так далее.

Ещё примеры сходящихся несобственных интегралов.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = arctgx\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример. $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = -e^{-\infty} + e^0 = -0+1=1$.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 1. Несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ сходится при $a>1$ и расходится при $a\le 1$, несобственный интеграл 2-го рода сходится $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a}$ при $a<1$ и расходится при $a\ge 1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим просто первообразную.

$\int \frac{1}{x^a}dx = \int x^{-a}dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1}$, что можно записать в виде $\frac{1}{1-a}\frac{1}{x^{a-1}}$.

Если пределы интегрирования от 1 до ∞, то не бесконечный результат получится лишь в том случае, когда переменная в знаменателе, то есть степень $-a+1<0$, то есть $-a<-1$, то есть $a>1$.

А вот если пределы интегрирования от 0 до 1, то наоборот, наличие переменной в знаменателе очень плохо, это приводит к бесконечности, и интеграл расходится. То есть для сходимости, надо чтобы степень была такая, чтобы переменная находилась именно в числителе! Тогда $-a+1>0$, то есть, $-a>-1$, $a<1$.
Что и требовалось доказать.

Обратите внимание, что в случае $a=1$ расходятся оба этих интеграла, так как первообразная -это логарифм, а он не ограничен ни при $x\to 0$, ни при
$x\to\infty$.

Для таких интегралов 2 рода, для сходимсти надо, чтобы степень перешла в положительные, например, если у функции степень $-\frac{1}{2}$, а у первообразной на 1 больше, уже $+\frac{1}{2}$. Если же она $-\frac{3}{2}$, то после интегрирования станет $-\frac{1}{2}$, то есть ещё не переходит через 0 в положительные.
Примеры

$\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx$, $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}^3}dx$, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ расходятся, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходятся.

$\int_0^\infty \frac{1}{x^3}dx$, $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx$, $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}^3}dx$ сходятся, $\int_0^\infty \frac{1}{x}dx$, $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ расходятся.

Если степень превысила -1, то для интегралов 2-го рода - сходимость, кстати а для знаменателя это степень $-a$, см. 1-ю теорему, там $-a>-1$ как раз и требуется. И наоборот, если степень меньше, чем -1, то для интегралов 1-го рода сходимость.

Теорема 2. Несобственный интеграл сходится $\Leftrightarrow$ первообразная на границах интегрирования имеет конечный предел.
Разъяснение. Если интеграл 1 рода, то например $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C$. Если 2 рода, то в точках a, b должны быть конечные пределы.

Идея доказательства. Действительно, $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = \left(\lim\limits_{b\to\infty} F(b)\right) - F(a)$. Второе слагаемое конечное число. Первое слагаемое (предел) есть конечное число тогда и только тогда, когда разность - конечное число. То есть, сходятся именно те несобственные интегралы, где график первообразной стабилизируется по высоте, т.е. имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C$.

Следствие (необходимый признак сходимости).
$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
Действительно, если $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C$ то $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C' = 0$.

Замечание. Это необходимый, а не достаточный признак, то есть, из сходимости следует, что f стремится к 0, но не наоборот. То есть, при $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ могут быть как сходящиеся, так и расходящиеся интегралы, а вот если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, тогда только расходящиеся.

Сравним $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$ и $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$. Здесь в обоих случаях $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ выполнено. А тем не менее, первых из них расходится, а второй сходится. Их графики кажутся похожими, но ведь второй уменьшается существенно быстрее: так, при $x = 1000$ значение у первой их них $1/1000$, а у второй $1/1000\,000$, то есть в 1000 раз меньше! То есть кроме условия $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ важна ещё и скорость сходимости. Но если это условие не выполнено, то сходимости точно нет, в этом и состоит понятие «необходимый» признак.

Теорема 3. Признак сравнения в конечной (не-предельной) форме.

Если $f(x)\le g(x)$ и сходится интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Действительно, если интеграл для большей функции равен C, то для меньшей он меньше чем C, то есть, не равен бесконечности.

Теорема 4. Признак сравнения в предельной форме.

Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C$, причём константа C отлична от 0 и от ∞, то интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ - это бесконечно малые одного порядка.

Эти признаки позволяют сравнивать интегралы, содержащие громоздкие функции, с какими-то более простыми «эталонными», например, степенными.

Примеры применения признаков сравнения.

Пример на признак в не-предельной форме (теорема 3).

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2\ln x}$.

Учитывая тот факт, что при $x>3>e$ верно $\ln x>1$, получается

$\frac{1}{x^2 \ln x} < \frac{1}{x^2}$. Тогда $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2 \ln x} < \int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2}$, а он сходится, так как степень знаменателя больше 1. Тогда и исходный интеграл сходится.

Замечание. Аналогично тому, как мы ограничиваем сверху какой-либо сходящейся функцией, можно ограничить снизу какой-либо расходящейся функцией. Если интеграл от этой меньшей функции расходится, то и исходный тоже расходится.

Пример на признак в предельной форме (теорема 4).

Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$.

Рассмотрим для функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ более просто устроенную, но эквивалентную ей $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$, котрую можно записать в виде $\frac{1}{x^{3/2}}$.

Предел их отношения равен 1:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} : \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$

Тогда сходимость первого интеграла равносильна сходимости второго, то есть можно рассматривать $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$. Степень $a = \frac{3}{2} > 1$, поэтому интеграл сходится.

§6. Кратные интегралы.

Определение.Пусть дана функция $z = f(x, y)$, её область определения - некоторая область D в плоскости. Введём разбиение D на части двумя семействами прямых линий. В каждой части D_i возьмём произвольную точку c_i с координатами (x_i, y_i). Площадь D_i обозначим $S(D_i)$.

Величина $\sigma = \sum f(c_i)S(D_i)$ называется интегральной суммой. Предел этой величины при измельчении разбиения называется двойным интегралом функции $z = f(x,y)$ по множеству D, и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Как правило, сначала будем рассматривать область D - прямоугольник: $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$.

Геометрический смысл. Интегральная сумма означает сумму объёмов параллелепипедов, построенных на каждом из оснований D_i, а интеграл - объём под поверхностью, которая задана уравнением $z = f(x,y)$.

Физический смысл. Если функция задаёт плотность какой-либо плоской пластины, то двойной интеграл - масса.

Аналогично определяется понятие тройного интеграла. Если дана функция $w = f(x,y,z)$, определённая в трёхмерной области, то её можно разбить на части с помощью трёх семейств плоскостей, выбрать по точке в каждой части, и составить интегральную сумму. То, что получается в пределе, называется тройным интегралом. $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$.

Физический смысл тройного интеграла: если функция - плотность некоторой породы, то в результате вычисления тройного интеграла получится масса.

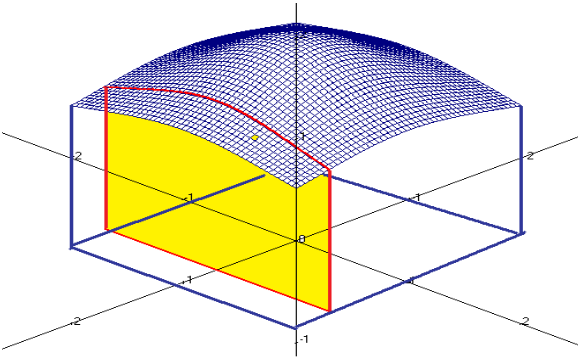
Метод вычисления.

При вычислении кратных интегралов, как двойных, так и тройных, сводят к так называемым «повторным» интегралам.

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad = \quad \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$. Также в этом случае можно применять запись вида: $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ где дифференциал пишется именно после того интеграла, которому он соответствует.

Почему именно так можно вычислить двойной интеграл? Дело в том, что при фиксировании одной переменной, мы получаем функцию уже не двух, а одной переменной. Так, при $y \equiv c$ получается $f(x,c)$. На чертеже этому соответствует сечение поверхности вдоль оси Ox, то есть кривая.

Интеграл по одной переменной при фиксированной второй, это площадь криволинейной трапеции, которая получается в сечении.



Если проинтегрировать все эти величины по второму направлению, то получится объём тела под поверхностью.
Аналогично, если разрезать булку хлеба на очень тонкие слои, а затем вычислить площадь каждого, и сложить все эти величины, умножая при этом на их толщину, то получим объём.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (xy)dxdy$, где D есть квадрат: $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$.

Решение. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 xydy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\left. \frac{xy^2}{2} \right|_0^1 \right) dx$ вычислили сначала «частную первообразную» по переменной y, то есть ту функцию, частная производная от которой по y была бы xy. Во внутренних скобках применяем формулу Ньютона-Лейбница по переменной y.

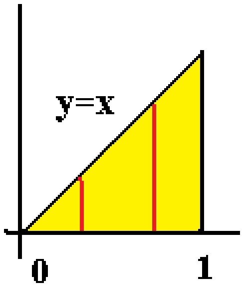
$\int\limits_0^1 \left(\left. \frac{xy^2}{2} \right|_0^1 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x1^2}{2} - \frac{x0^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{2} dx$. Далее, оставшийся интеграл по переменной x вычисляется уже обычным образом: $\int\limits_0^1 \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^2}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Однако, область D может быть и не прямоугольной. Аналогично тому, как массив в программировании может быть не прямоугольным, тогда во внутреннем цикле двойного цикла границы переменные и зависят от переменной, определённой во внешнем цикле:

```
for i : = 1 to 10 do
for j : = 1 to i do
read (a[i,j]);
end;
end;
```

В случае, если область не прямоугольная, границы вложенного интеграла могут быть не числами, а зависеть от внешней переменной. Рассмотрим пример.

Пример. Найти интеграл функции $f(x,y) = x^2 y$ по треугольнику с вершинами (0,0), (1,0), (1,1).



Здесь глобальные границы фигуры по переменной x это $[0,1]$, при других значениях x нет точек этого треугольника вообще. При каждом x, вертикальный отрезок имеет разную высоту, сначала вообще 0, а затем чем правее, тем больше. Чем больше x, тем выше отрезок по y. Вертикальные отрезки внутри треугольника от высоты 0 доходят до линии $y = x$. Поэтому при каждом $x \in [0,1]$, верно $y \in [0, x]$.

Интгерал будет записан в виде: $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x x^2 y dy \right) dx$.

Граница во внутреннем интеграле зависит от внешней переменной x.
Границы внешнего интеграла обязательно должны быть контантами.
Во вложенной скобке, вычислится первообразная по y, и будет применена формула Ньютона-Лейбница по y.

$$\int_0^1\left(\int_0^x x^2 y dy\right)dx = \int_0^1\left(\left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_0^x\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2x^2}{2}-\frac{x^2 0^2}{2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2}dx .$$

И хотя границы зависят от x, они подставлены в переменную y, т.е. всё равно получилась функция от x, так же, как если был бы прямоуголник и границы были бы числовыми. Далее, уже обычным путём вычислим интеграл по x .Итак, $\int_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \left.\frac{x^5}{10}\right|_0^1 = \frac{1}{10}$.

Смена порядка интегрирования.

Любую прямоугольную таблицу можно суммировать сначала по строкам, и затем сложить все полученные результаты, а можно сначала по столбцам. Но в итоге всё равно получится сумма всех элементов. Подобное есть и для двойных интегралов. Можно разбить поверхность на сечения вдоль оси Ox, а можно в перпендикулярном направлении, вдоль Oy.

Для прямоугольной области:

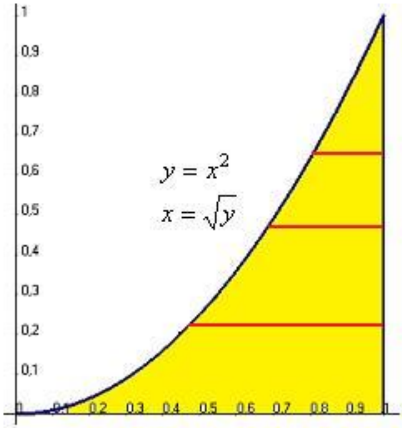
$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy .$$

Проблема возникает в том случае, когда область не прямоугольная. Там так просто заменить интегралы наоборот уже не получится, ведь границы внутреннего зависят от внешней переменной. В этом случае надо заново рассмотреть (с помощью чертежа) поведение одной переменной в зависимости от другой.

Можно провести не вертикальные, а горизонтальные отрезки, и найти их пересечения с областью определения. Теперь нужны не верхняя и нижняя граница, а левая и правая.

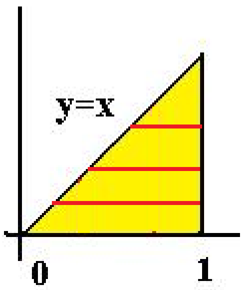
Пример. Сменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$.

Сначала построим чертёж. Закрасим область под параболой. Это область определения D функции двух переменных.



Глобальные границы по y от 0 до 1, так как ниже 0 или выше 1 вообще нет точек этой фигуры Теперь надо узнать, от какой до какой абсциссы будет проходить горизонтальный отрезок внутри фигуры. Нужно границу $y = x^2$ записать с помощью обратной функции: $x = \sqrt{y}$. Горизонтальная линия чем выше, тем позже начинается, а именно от линии $\sqrt{y}$, а заканчивается всё время при $x = 1$. Итак, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$.

Пример. Сменить порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy$.

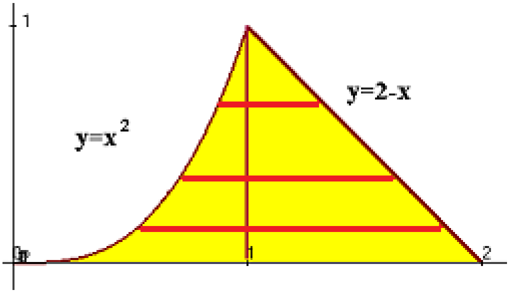


Линия $y = x$, задающая верхнюю границу, для левой границы может быть переписана как $x = y$. Горизонтальный отрезок начинается с этой наклонной линии и завершается при $x = 1$.

Итак, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx$.

Иногда смена порядка позволяет свернуть два слагаемых в одно.
Пример. Сменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy .$$



Видно, что здесь верхняя граница переходит с одной кривой на другую, поэтому от 0 до 1 и от 1 до 2 пришлось разбить на 2 разных слагаемых, если внешняя переменная x. А если внешняя переменная будет y, то надо будет найти левую и правую границы горизонтальных отрезков. А они не переходят на другую кривую: левая всегда на параболе, а правая граница на линии $y = 2 - x$. Если записать через обратные функции, то вместо $y = x^2$ будет $x = \sqrt{y}$, а вместо $y = 2 - x$ соответственно, $x = 2 - y$.

Тогда вся область будет учтена сразу, то есть два слагаемых свернутся в единое одно: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

Если $f \equiv 1$ то при вычислении интеграла получится просто площадь области D (если двойной интеграл) или объём области (если тройной интеграл). Если плотность равна 1, то масса как раз и равна объёму.
Для сравнения, для определённых интегралов было то же самое, только там получалась длина отрезка: $\int\limits_a^b 1dx = x\Big|_a^b = b - a$.

Вычисление тройных интегралов.

Пример. Вычислить интеграл функции $f(x,y,z)=xyz$ по кубу, где $x,y,z\in[0,1]$.

Решение. Здесь уже будет 3 вложенных действия: $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 xyzdz\right)dy\right)dx$.

Сначала вычислим первообразную по z и применим формулу Ньютона-Лейбница по z, получаем $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left(xy\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1\right)dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{xy}{2}dy\right)dx$.

После этого вычислим первообразную по y:

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{xy}{2}dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\left.\frac{xy^2}{4}\right|_0^1\right)dx = \int\limits_0^1\frac{x}{4}dx = \left.\frac{x^2}{8}\right|_0^1 = \frac{1}{8}\ .$$

Замечание. В самом внутреннем интеграле (по переменной z) может быть зависимость уже от обеих внешних переменных, а именно x,y.

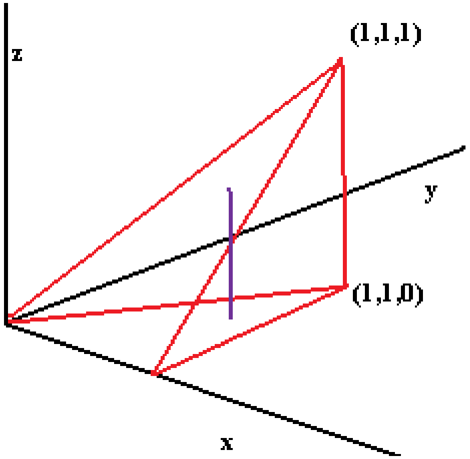
Но тройные интегралы тоже могут быть по сложной области, а не параллелепипеду или кубу.

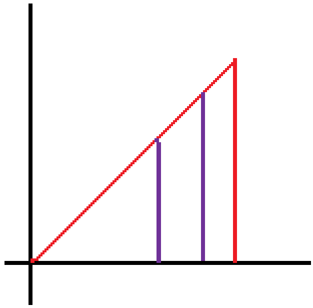
Пример. Найти объём тетраэдра с вершинами (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1).

Так как надо вычислить объём, то функция в данном случае $f(x,y,z)=1$.

Для того, чтобы записать интеграл, лучше сначала нарисовать проекцию на плоскость Oxy, то есть вид сверху. Тогда мы сможем распознать границы по y в зависимости от x. А уже после этого, для точки (x,y) выяснить границы изменения z по трёхмерному чертежу.

Глобальные границы по x от 0 до 1. В плоской проекции видим треугольник, там границы по y в зависимости от первой переменой x это $[0,x]$. Итак, уже можно записать $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x\left(\int 1\ dz\right)dy\right)dx$. А теперь запишем границы по z. От высоты 0 до наклонной плоскости, уравнение которой легко может быть получено по 3 точкам (0,0,0), (1,0,0), (1,1,1). Это плоскость $z = y$. Тогда интеграл получается такой: $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y 1 \ dz \right) dy \right) dx$.





Вычислим интеграл. В самой внутренней скобке, интеграл от 1 по z.

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(z\Big|_0^y \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x (y-0) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x y dy \right) dx.$$

Остался уже не тройной, а двойной интеграл. Далее,

$$\int_0^1 \left(\int_0^x y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Замечание. Впрочем, для тетраэдра можно было обойтись и без тройного интеграла: ведь это пирамида, построенная на основании треугольника, а для пирамиды $V = \frac{1}{3} Sh$, а в данном примере высота 1, площадь основания = площади треугольника, составляющего ровно половину единичного квадрата, то есть $S = \frac{1}{2}$. И тогда $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3}\frac{1}{2} 1 = \frac{1}{6}$.

ЛЕКЦИЯ № 5.   21. 03. 2016

Приложения кратных интегралов.

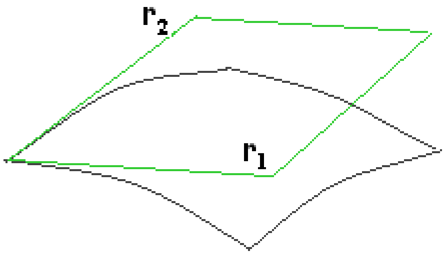
Во-первых, очевидное приложение к вычислению объёмов тел (тройной интеграл) и площадей плоских фигур (двойной интеграл). Но далеко не только этим ограничивается круг приложений.

Площадь поверхности.

Формула площади явно заданной поверхности:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy\,.$$

Доказательство. Разобьём область определения на прямоугольники небольшого размера, со сторонами Δx и Δy. Над таким прямоугольником есть часть поверхности, за счёт малости размера она очень близка к касательной плоскости. Рассмотрим параллелограмм на касательной плосоксти и вычислим его площадь. Его стороны это векторы r_1 и r_2. Рассмотрим подробнее, какие у них координаты.



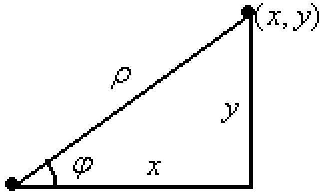
r_1 направлен по касательной в сечении, параллельном оси Ox, то есть тангенс угла наклона для него это $f_x'(x, y)$. Тогда его координаты: $(\Delta x, 0, \Delta x \cdot f_x') = \Delta x(1, 0, f_x')$. Аналогично вектор r_2 расположен в сечении вдоль оси Oy, его координаты $(0, \Delta y, \Delta y \cdot f_x')$, если вынести дельта, то это $\Delta y(0, 1, f_x')$. Площадь параллелограмма вычисляется с помощью векторного произведения, она равна модулю векторного произведения (вспомните 1 семестр, векторная алгебра и геометрия).

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = \left(-f_x', -f_y', 1\right), \text{ модуль этого вектора: } \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\,.$$

Вспомним, что мы вынесли за скобку коэффициенты Δx и Δy. Поэтому в интегральных суммах получается $\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\Delta x\Delta y$. Тогда при переходе к пределу, будет интеграл: $S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}dxdy$, где D это область определения в горизонтальной плоскости (то есть область, над которой расположена поверхность).

Замена переменных в кратных интегралах.

Замена в двойном интеграле. Полярные координаты на плоскости.
Кроме пары чисел (x, y), которыми можно задать точку на плоскости, можно задать также и таким образом: соединим точку с началом координат, длину этого отрезка обозначим ρ. Угол между осью $0x$ и этим отрезком обозначим φ.



Так как x это прилежащий катет, а ρ гипотенуза, тогда $\cos\varphi=\frac{x}{\rho}$, аналогично $\sin\varphi=\frac{y}{\rho}$, откуда следуют такие формулы:

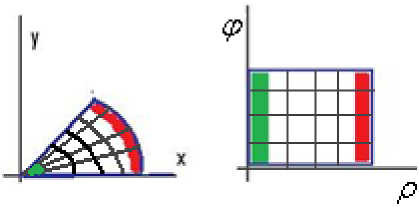
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Также возможен обратный пересчёт: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, а угол: $\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ (это верно для 4 и 1 четвертей, то есть там, где основная непрерывная ветвь тангенса) и $\varphi=\pi+arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ для 2,3 четвертей.

Полярная система фактически применяется в жизни, например в городах с радиальной сеткой улиц. Так, в Москве есть юго-западный округ, северовосточный и т.д. То есть там практически важно расстояние от центра (Кремля) и направление от центра (на юг, запад, восток, северо-запад и т.д.).

При замене переменных, соответственно, надо все x, присутствующие в функции, заменить на $\rho\cos\varphi$, а все y на $\rho\sin\varphi$, то есть получим $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

Однако необходимо ещё заменить дифференциал, если помните, в 1-мерном случае это делали так: например, при $x = t^2$ было $dx = (t^2)'dt = 2tdt$.
В двумерном случае, дополнительный множитель также есть. Если бы просто написали $d\rho d\varphi$ вместо $d\,x\,d$, то неверно задали бы искажение сетки координат при замене. Еслди изобразить дуги и радиусы, то сектора круга сужаются к центру, а когда переносим изображение в плоскость параметров (ρ,φ) то мы растягиваем эту сетку на некоторый прямоугольник, зелёный сектор по площади гораздо меньше красного, но без правильного пересчёта дифференциалов они получились бы равны.
Чертёж - слева в плоскости параметров (x, y), справа в плоскости (ρ,φ).



При том же растворе угла, чем ближе сектор к центру, тем меньше его площадь, и соответственно, меньше его влияние на интеграл. Для правильного учёта этих искажений, надо умножить на определитель матрицы линейного оператора порядка 2, эта матрица в то же время и является производной матрицей отображения $(\rho,\varphi) \to (x, y)$.
При замене двух старых на две новые переменные в плоскости, существует уже 4 различных частных производных, и из них можно образовать матрицу 2-го порядка. Строение матрицы таково: $\begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix}$.

Она называется матрицей Якоби, а её определитель - определителем Якоби, или «якобианом». В данном случае,

$$\begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$, её определитель: $\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$.

Итак, определитель Якоби полярной системы координат: $I = \rho$.

Это означает, что выражение $dxdy$ заменяется на $\rho\ d\rho\ d\varphi$.

Как видите, интеграл по той части фигуры, которая ближе к центру, как раз и будет взят с меньшим весом, а которая дальше от центра - с большим весом, ведь там ρ больше.

При замене $x = t^2$, где $dx = (t^2)'dt = 2tdt$, множитель $2t$ фактически является одномерным якобианом, но только для матрицы порядка 1 определитель вычислять было не нужно, так как он совпадает с самим этим элементом.

При переходе к полярным координатам, фрагмент круга фактически отображается в прямоугольную область. А это удобнее для вычисления, так как границы внутреннего и внешнего циклов становятся независимы друг от друга.

Пример: Вычислить интеграл $\iint\limits_D xy^2 dxdy$ где D - четверть круга единичного радиуса в первой четверти плоскости.

В декартовых координатах, этот интеграл имеет такой вид:

$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx$, что при вычислении внутреннего интеграла дало бы y^3, в итоге привело бы к $\sqrt{1-x^2}^{\,3}$ и потребовало бы ещё серию подстановок.

В полярных координатах, решение гораздо более просто и удобно:

Луч находится в 1 четверти при $\varphi \in [0, \pi/2]$. Радиус 1. Тогда:

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^1 (\rho\cos\varphi)(\rho\sin\varphi)^2 \rho \cdot d\rho \right) d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^1 (\sin^2\varphi\cos\varphi) \cdot \rho^4 d\rho \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi \left(\int\limits_0^1 \rho^4 d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi\left(\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi\; d\varphi =$$

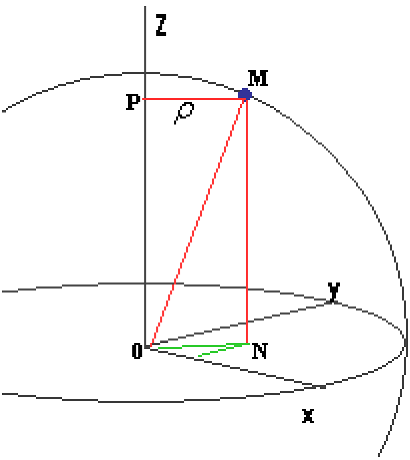
$$\frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\; d(\cos\varphi) = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\; d(\cos\varphi) = \left.\frac{1}{5}\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}.$$

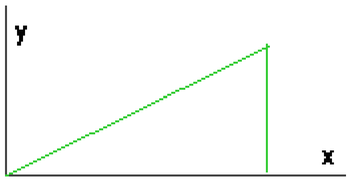
Кстати, множители, не зависящие от ρ, можно было сразу вынести во внешний интеграл, как видим, они всё равно умножаются на первообразную по ρ и остаются неизменными, и выносятся во внешний интеграл по φ.

Пример. Доказать формулу площади круга с помощью полярных координат.
Решение. Так как надо вычислить площадь, то считаем $f=1$.

$$\iint_D dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\cdot d\rho\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^R\right)d\varphi = \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2.$$

Цилиндрические и сферические координаты в пространстве.
Существует два различных обобщения полярных координат для трёхмерного пространства.
Цилиндрические координаты.





Соединим точку (x, y, z) кратчайшей линией с осью $0z$, и это расстояние (отрезок PM) обозначим ρ. В проекции на горизонтальную плоскость, такую же длину имеет отрезок ON, соединяющий точку (x, y) с началом координат в плоскости. Получается, что в плоскости $0xy$ пересчёт в ρ, φ такой же, как и для полярных координат. Координата z не меняется, они и в старой, и в новой системе одна и так же. Тогда формулы перехода:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

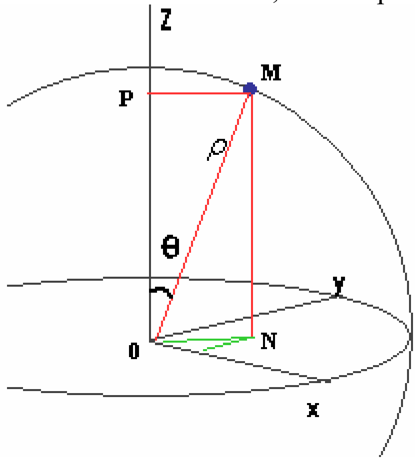
Вычислим определитель Якоби.

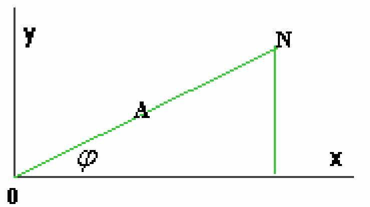
$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

Диапазоны изменения таковы: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.

Сферические координаты.

Эта система очень сильно похожа на географические координаты на планете. Если соединим точку (x, y, z) кратчайшей линией теперь не с осью $0z$, а с точкой $(0,0,0)$, и именно это расстояние обозначим ρ, то чертёж получается несколько иной, чем в прошлом случае.





Угол между отрезком, соединяющим (x, y, z) с началом координат, и вертикальной осью, обозначим θ (греческая буква «тетта»), а угол в горизонтальной плоскости между осью $0x$ и его проекцией обозначим φ.
Координата z, равная расстоянию OP, это прилежащий катет для угла θ, таким образом, $z = \rho\cos\theta$.
Расстояние PM = ON ещё обозначенное буквой А, это противолежащий катет, поэтому $A = \rho\sin\theta$. А в треугольнике в плоскости $0xy$, это А является гипотенузой, где $x = A\cos\varphi$, $y = A\sin\varphi$. Поэтому в итоге получаем:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}.$$

Здесь θ это и есть $90-\alpha$, если α географическая широта. В этой системе «широта» фактически отмеряется от северного полюса, на экваторе она равна 90 градусов, а на южном полюсе 180. Угол φ это аналог географической долготы.
Диапазоны изменения таковы: $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, +\infty)$
Рассматривать $\theta > \pi$ нет смысла, потому что до этой же самой точки можно будет от северного полюса провести более короткую дугу с другой стороны, по другому мередиану, при $\varphi + \pi$.

Вычислим определитель Якоби.

$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

разложим по 3 строке:

$$\cos\theta\begin{vmatrix} \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + \rho\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

вынесем ρ из каждого столбца, где оно есть, и продолжим:

$$\rho^2\cos\theta(\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi) +$$

$$\rho^2\sin\theta(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi) =$$

$\rho^2 \cos^2\theta \sin\theta + \rho^2 \sin\theta \sin^2\theta = \rho^2 \sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) =$

$\rho^2 \sin\theta$. Итак, якобиан $I = \rho^2 \sin\theta$.

Известно, что площадь сферы пропорциональная квадрату расстояния от центра, и как видим, в определителе Якоби присутствует ρ^2. Появление $\sin\theta$ также не случайно и физически понятно: ведь при приближении к полюсу, площадь сегмента сферы между соседними широтами меньше, чем на экваторе. Так, между 0 и 10 градусов помещается много экваториальных стран, а длина экватора 40 тыс.км, а вот между 80 и 90 градусов - очень небольшая территория, и параллель 80^0 намного короче, чем 10^0.

Примеры вычислений с помощью сферических координат.

Пример 1. Вычислить массу половины шара радиуса 1, если плотность пропорциональна квадрату расстояния от центра шара.

Решение. Функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, это равно ρ^2, так как $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Для верхнего полушария, $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0,1]$.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^2 (\rho^2 \sin\theta) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^4 \sin\theta d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left(\left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^1 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} \sin\theta d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$\frac{1}{5} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{2\pi}{5}.$$

Пример 2. С помощью сферических координат вывести формулу объёма шара.

В этом примере надо рассматривать фнукцию $f = 1$.

Для шара, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, R]$.

Функция равна 1, и её умножаем на якобиан.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^R \right) d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$\frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2R^3}{3}2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Материал в ознакомительном порядке.

Криволинейные интегралы от векторной функции.

Пусть задана кривая L в плоскости либо 3-мерном пространстве.
$(x(t), y(t), z(t))$.

В каждой точке можно вычислить касательную:
$v = (x'(t), y'(t), z'(t))$. обозначим этот вектор также dl.

$d\bar{l} = (x'(t), y'(t), z'(t))dt = (dx, dy, dz)$

Пусть в каждой точке этой кривой задана векторная функция
$\bar{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Если эта функция задана не только на кривой, а вообще в пространстве, говорят, что задано векторное поле.

Можно в каждой точке скалярно умножить $\bar{F}$ на $\bar{v}$. Получится работа силы по перемещению точки. Если проинтегриррвать величину (F, v) по всей кривой, то это будет работа силы по перемещению точки по кривой L.

Краткая формула для запоминания: $\int\limits_L (\bar{F}, d\bar{l}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Ведь вектор $\bar{F} = (P, Q, R)$, а $d\bar{l} = (dx, dy, dz)$, и именно их мы скалярно умножаем. Здесь $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$.

В плоскости формула принимает более короткий вид:

$\int\limits_L (\bar{F}, d\bar{l}) = \int\limits_L Pdx + Qdy$, расшифруем подробнее, так чтобы применять для вычисления: $\int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right)dt$.

На практике, надо все переменные выразить через t в соответствии с тем, как параметрически задана кривая, и получится просто обычный интеграл от одной переменной t.

Если кривая задана явно, то $x = t$, а $y(t) = y(x) = f(x)$, тогда формула имеет такой вид:

$$\int_L (\bar{F}, d\bar{l}) = \int_a^b \big(P(x, f(x))\cdot 1 + Q(x, f(x)) f'(x)\big) dx .$$

Пример. Вычислить работу поля $F = (xy, x^2 y)$ по участку параболы $y = f(x) = x^2$ от (0,0) до (1,1).

$$\int_0^1 \left(x\cdot x^2 + x^2\cdot x^2\cdot 2x\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 + 2x^5\right)dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} .$$

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

ЛЕКЦИЯ № 6.   01. 04. 2016

ГЛАВА 2. Дифференциальные уравнения

Уравнение, содержащее переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$, а также её производные до какого-то порядка n, называется дифференциальным уравнением порядка n:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 .$$

Например, $y'' + y' = x$, $y'' = -4y$.

Если в уравнении максимальный порядок производной равен 1, то есть оно имеет вид $F(x, y, y') = 0$, то называется дифф. уравнением первого порядка. Вот их сначала мы изучим подробнее.

§ 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ называется дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Если первая производная явно выражена, т.е. уравнение имеет вид $y' = f(x,y)$, то оно называется «разрешённым относительно производной».

Замечание. Кстати, задачи на вычисление неопределённого интеграла - это тоже частный случай дифференциальных уравнений. Если нет зависимости от y, то $y' = f(x,y)$ превращается в $y' = f(x)$, т.е. известная производная, а надо найти саму функцию y. Такие дифференциальные уравнения мы решали в течение всей прошлой темы «интеграл». Решение такого дифференциального уравнения это $F(x)+C$, где $F(x)$ первообразная.

Уравнение $y' = 2y$ уже не решается с помощью нахождения первообразной, здесь зависимость от y. Это уравнение задаёт такое свойство: производная функции равна удвоенной исходной функции. Его решением является, например, $y = e^{2x}$, а также $y = 0$. Вообще, $y = Ce^{2x}$ тоже являются его решениями, для любого $C \in R$.
А вот например, для уравнения $y'' = -4y$ решениями будут функции типа $\sin 2x$ и $\cos 2x$, ведь для них 2-я производная другого знака и приобретает коэффициент 4 после двух операций дифференцирования. Впрочем, это уравнение 2 порядка, вернёмся к 1 порядку.

§ 1, пункт 1) Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения вида $y' = f_1(x) f_2(y)$, то есть такие, в которых можно функцию разбить на отдельные множители, зависящие только от x или только от y, называются уравнениями с разделяющимися переменными.

К слову, далеко не все уравнения - с разделяющимися переменными. Так, если присутствует множитель $(x+y)$, то что бы вы ни выносили за скобку, в скобках всё равно останутся обе переменные, а не одна:

$$(x+y) = x\left(1+\frac{y}{x}\right) \text{ или } (x+y) = y\left(\frac{x}{y}+1\right).$$

Пример. Решим уравнение $y' = y$.
Это означает, что надо найти все такие функции, которые равны своей производной. Метод решения: сначала представить y' в виде $\frac{dy}{dx}$.

Итак, $\frac{dy}{dx} = y$. Теперь домножим на dx, получили $dy = ydx$, затем разделим на y, и получили $\frac{dy}{y} = dx$.

При таком делении мы неявно предполагаем, что y не является тождественно равной 0. Поэтому при дальнейших действиях мы упускаем случай $y \equiv 0$, и его надо проверить отдельно. При этом, $y \equiv 0$ фактически является решением, подходит в уравнение $y' = y$, ведь $0' = 0$. Это называется «особым решением».

Итак, получилось следующее: y и её дифференциал с одной стороны равенства, а переменная x и (или) её дифференциал - с другой стороны. Теперь это выглядит так, как будто слева и справа были продифференцированы какие-то две различные функции от двух различных переменных x, y. Рассмотрим их как две независимые функции. Если теперь их проинтегрировать, то слева и справа можно получить две функции, одна от y, другая от x, а затем выразить y через x.

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + D_1 = x + D_2.$$

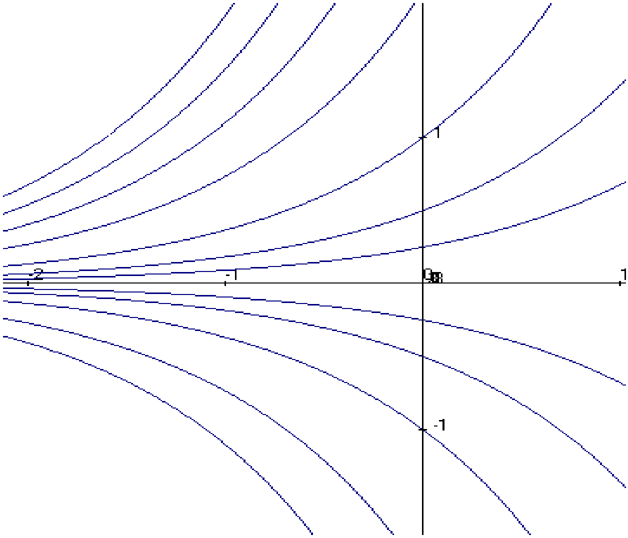
Естественно, каждый неопределённый интеграл находится с точностью до константы, поэтому там и написали D_1, D_2. Но можно перенести одну из констант в другую сторону равенства, и записать единую константу:

$\ln|y| = x + (D_2 - D_1)$, то есть $\ln|y| = x + C_1$.

Лучше всего константу писать именно там где x, чтобы максимально очистить выражение, содержащее y, ведь цель - выразить y.

$e^{\ln|y|} = e^{x+C_1} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{C_1}e^x$. Слева модуль, но и константа по построению является положительной, $e^{C_1} > 0$. Но надо выразить сам

y, а не его модуль, тогда справа также возможны и отрицательные константы, т.е. общее решение будет записано в виде $y = Ce^x$, где $C = \pm e^{C_1}$ (константу для удобства переобозначили, чтобы записать ответ).
Кстати, особое решение входит сюда как частный случай, при $C = 0$.
Итак, ответ: $y = Ce^x$ - общее решение дифф. уравнения $y' = y$.



Решений бесконечно много, и они заполняют всю плоскость. Как видим, здесь это происходит совершенно по-другому, чем в задачах на интегралы: там первообразные отличаются на константу, то есть получаются одна из другой параллельным переносом. Здесь С может быть и множителем или участвовать в уравнении как-то иначе.

В то же время, через каждую конкретную точку плоскости проходит одна кривая из этого семейства кривых. Если задать точку (x_0, y_0) и наложить условие, что кривая проходит через неё, то есть $y(x_0) = y_0$, то можно определить конкретное значение параметра C, и одну кривую из бесконечного множества. Это дополнительное условие называется условием Коши. Чтобы найти эту одну кривую, надо подставить (x_0, y_0) в общее решение, и там останется одна неизвестная C. Например, если (x_0, y_0) = $(0{,}3)$, то есть кривая проходит через точку $(0,3)$, то $y = Ce^x$ запишется в виде $3 = Ce^0$, тогда $C = 3$. Функция $y = 3e^x$ называется частным решением.

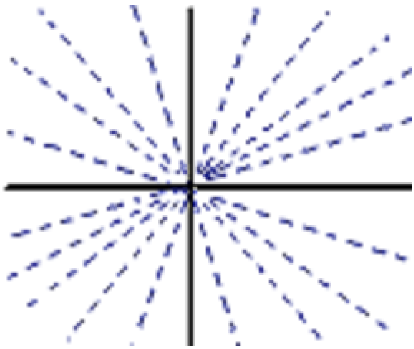
Кстати, движение в гравитационном поле задаётся с помощью уравнений со 2-й производной, и там в общем решении две константы, поэтому-то как раз и требуется 2 условия (начальная координата и начальная скорость), чтобы определить конкретную траекторию.

Поле направлений.

Если задано дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$, то это означает, что в каждой точке некоторой области D задано направление касательной, т.е. под каким углом наклона там пройдёт кривая. Ведь y' это тангенс угла наклона производной, и он дан для каждой точки, а именно равен $f(x,y)$. Возникает так называемое «поле направлений». Иногда даже зрительно можно заранее предположить, какие кривые являются решениями дифф. уравнения. Увидим это на следующем примере.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Заметим, что тангенс угла наклона касательной для любого решения здесь равен y/x, то есть касательные направлены радиально от центра.



Можно предположить, что решения это прямые вида $y = kx$. А теперь решим задачу аналитически.

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow xdy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\ln|y| = \ln|x| + C_1$. Кстати, любую константу можно задать в виде $\ln C$, так как область значений логарифма $(-\infty,+\infty)$. Для удобства сразу запишем $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, чтобы логарифмировать это выражение. Впрочем, это не обязательно делать именно так, $C = e^{C_1}$ можно преобразовать и позже.

Далее, $e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + \ln C} = e^{\ln|x|} e^{\ln C} \Rightarrow |y| = C|x|$.

В итоге, общее решение $y = Cx$.

Проверка. $y = Cx$, $y' = C$, подставим в уравнение $y' = \frac{y}{x}$ получим $C = \frac{Cx}{x}$. Действительно, верно.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$.

Решение. $y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \int ydy = -\int xdx$
$\Rightarrow$
$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$, умножим на 2: $y^2 = -x^2 + 2C_1$. Константа $2C_1$ не может быть отрицательной, иначе $y^2 < 0$ и не будет существовать корень квадратный. Тогда $2C_1 > 0$, и можно обозначить её в виде C^2.

Итак, $y^2 = C^2 - x^2$, это уравнение окружности.

Общее решение: $y^2 = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$.

Замечание. Поле направлений здесь такое: тангенс угла наклона равен $-\frac{x}{y}$, то есть касательные перпендикулярны к прямой, проведённой к началу координат. Для окружностей именно это и выполняется.

Проверка общего решения: $y' = \sqrt{C^2 - x^2}' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{C^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$.

Пункт 2) Однородные уравнения.

Уравнения, сводящиеся к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ называются однородными (по степени).

Примечание. Не путать: название «однородные» будет использоваться ещё и для других свойств, например, когда правая часть линейного уравнения равна 0.

Допустим, $y' = \dfrac{xy^2}{x^3 + y^3}$. Как видим, суммарная степень везде однородна, и равна 3, то есть, если обе перемнные умножить на k, то и в числителе и в знаменателе за скобку выйдет 3 степень: $\dfrac{(kx)(ky)^2}{(kx)^3 + (ky)^3} = \dfrac{k^3xy^2}{k^3(x^3 + y^3)}$. Рекомендуется вспомнить «однородngые функции» в теме «конические поверхности» в геометрии. Так вот, при таком строении уравнения, можно привести его к виду, где будут только блоки типа y/x. Вынесем за скобку x^3 и сократим.

$$y' = \frac{xy^2}{x^3 + y^3} \Rightarrow y' = \frac{x^3 \dfrac{y^2}{x^2}}{x^3\left(1 + \dfrac{y^3}{x^3}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\dfrac{y^2}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{y^3}{x^3}\right)}.$$

Докажем, что заамена $u = \dfrac{y}{x}$ сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

$u(x) = \dfrac{y(x)}{x} \Rightarrow x \cdot u(x) = y(x)$, тогда

$y' = \left(x \cdot u(x)\right)' = u(x) + xu'(x)$.

Тогда $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ преобразуется к $u + xu' = f(u)$, далее

$$xu' = (f(u) - u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = (f(u) - u) \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Таким образом, свели к уравнению с разделяющимися переменными.

3) Линейные уравнения.

Уравнение вида $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ называется **линейным.**

Если $b(x) = 0$, то оно называется линейным однородным.

При этом, $a_1(x)$ не может быть тождественно равно 0, иначе вообще нет слагаемого с производной $a_1(x)y'$, то есть уравнение не являлось бы дифференциальным. Но тогда можно поделить всё уравнение на $a_1(x)$ и свести к виду $y' + p(x)y = q(x)$.

Линейные однородные уравнения фактически являются уравнениями с разделяющимися переменными. Действительно, $y' + p(x)y = 0 \Rightarrow$

$$y' = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx,$$

где $-\int p(x)dx = -P(x) + C_1$ первообразная, с точностью до константы.

В итоге, $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, то есть общее решение линейного однородного уравнения имеет вид: константа, умноженная на экспоненту в степени первообразной от коэффициента $p(x)$, взятую с другим знаком.

Пример. Решить уравнение $y' - 2y = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln y = 2x + \ln C \Rightarrow y = Ce^{2x}.$$

Мы видим коэффициент -2, её первообразная $-2x$, и в ответе есть e^{2x}.

Пример. Решить уравнение $y' + xy = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow \ln y = -\frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-x^2/2}.$$

Линейные неоднородные уравнения. Метод Лагранжа (ещё называется метод вариации произвольной постоянной).
Предположим, что на месте С некоторая неизвестная функция, и ищем решение в виде: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.
Тогда $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$.
Подставим эти y, y' в неоднородное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$.
$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.
Два слагаемых получились одинаковые, и они сокращаются, осталось:
$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.
Отсюда можно выразить $C'(x)$. $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$.
$C(x) = \int C'(x) = \int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx$ что состоит в итоге из 2 слагаемых: первообразной от $q(x)e^{\int p(x)dx}$ и константы C. Поэтому решение однородного обязательно окажется отдельным слагаемым в общем решении неоднородного. В конкретных примерах, это выглядит менее громоздко, сейчас это увидим:

Пример. $y' - 2y = e^{5x}$.

1 шаг. Решаем соответствующее однородное уравнение. $y' - 2y = 0$.
$\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln y = 2x + \ln C \Rightarrow y_{00} = Ce^{2x}$ - общее решение однородного.

2 шаг. Методом Лагранжа решаем неоднородное.
Ищем решение в виде: $y = C(x)e^{2x}$. Ищем производную:
$y' = \left(C(x)e^{2x}\right)' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$. Всё это подставим в неоднородное:
$y' - 2y = e^{5x} \Rightarrow C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = e^{5x} \Rightarrow$
$C'(x)e^{2x} = e^{5x}$, тогда $C'(x) = e^{5x-2x} = e^{3x}$.

Тогда $C(x) = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

Теперь подставим это в $y = C(x)e^{2x}$, получается

$$y = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right)e^{2x} = \frac{1}{3}e^{5x} + Ce^{2x}.$$

Общее решение неоднородного состоит из двух слагаемых: частное решение неоднородного (его мы и искали на 2-м шаге методом Лагранжа) и общее решение однородного, которое нашли на 1-м шаге, и оно воспроизвелось само в конце 2-го шага. Это происходит из-за того, что $C(x)$ всегда ищется с помощью её производной, а значит, в ней присутствует слагаемое $+C$.

Проверка. Можно подставить частное решение неоднородного, и это слагаемое само по себе тоже является решением:

Выполняется ли $y' - 2y = e^{5x}$?

$$\left(\frac{1}{3}e^{5x}\right)' - 2\left(\frac{1}{3}e^{5x}\right) = \frac{5}{3}e^{5x} - \frac{2}{3}e^{5x} = \frac{3}{3}e^{5x} = e^{5x}.$$ Верно.

4) Уравнения Бернулли. $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)y^n$

Так как коэффициент $a_1(x)$ не тождественно равен 0, то на него можно поделить, поэтому будем рассматривать в виде:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Отличаются от линейных только наличием y^n в правой части.

Если n=0 получается линейное неоднородное $y' + p(x)y = q(x)$.

Если n=1 то ещё лучше, получается однородное: $y' + p(x)y = q(x)y$ то есть $y' + (p(x) - q(x))y = 0$.

При $n \neq 0$, $n \neq 1$ получается уже собственно, уравнение Бернулли. Оно является обобщением линейного уравнения.

Алгоритм решения.

1) Разделить на y^n. Получится $\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$.

2) Сделать замену $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$. Тогда оно сведётся к линейному по z.

Затем надо будет

3) решить линейное (в 2 шага, сначала однородное, потом неоднородное) и 4) сделать обратную замену.

Рассмотрим подробнее, как и почему водится к линейному.

$z(x) = y(x)^{-n+1}$, тогда $z'(x) = (-n+1)y(x)^{-n}\,y'(x)$ по правилам дифференцирования композиции. Получили, что $z' = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$.

Тогда уравнение $\dfrac{y'}{y^n} + p(x)\dfrac{1}{y^{n-1}} = q(x)$ сводится к такому виду:

$\dfrac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x)$, или $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$.

Оно линейное неоднородное.

Замтем решить линейное, а потом сделать обраную замену:

если $z = y^{-n+1}$ то $y = \sqrt[-n+1]{z}$.

§ 2. Дифференциальные уравнения n-го порядка.

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0.$$

Если уравнение сведено к виду $y^{(n)} = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$ то оно называется разрешённым относительно старшей (высшей) производной.

Примеры дифференциальных уравнений 2 порядка из физики:

Уравнение колебаний $y'' = -ky$. Здесь чем больше координата, тем больше действует сила (ускорение) в противоположную сторону. Если координата y отрицательна, то сила действует в положительную сторону.

Методы понижения порядка.

Случай 1. Если в уравнении отсутствуют младшие порядки производных. Так, в уравнении $y^{(n)} = f(x, y^{(k)},..., y^{(n-1)})$ отсутствуют все производные до порядка k-1, в том числе 0-го порядка, а именно сама функция y, и начинаются с порядка k. В этом случае можно сдедать замену $z = y^{(k)}$, то есть в качестве новой функции взять производную самого младшего порядка, которая в уравнении есть. В этом случае понизится на k порядков: $y^{(n-k)} = f(x, z, .z', ...)$.

Пример. Решить уравнение $xy'' = y'$.

Замена: $z(x) = y'(x)$, тогда $z'(x) = y''(x)$.

Уравнение сводится к виду $xz' = z$. Для z уравнение 1 порядка и решается обычными методами, изученными ранее.

$$x\frac{dz}{dx} = z \quad \Rightarrow \quad xdz = zdx \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln z = \ln x + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad z = C_1 x .$$

Вспомним о том, что $z = y'$, то есть теперь, чтобы сделать обрануую замену и восстановить y, надо 1 раз проинтегрировать.

$y = \int C_1 x dx \; = \; \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$. В общем решении здесь не одна, а две константы, вторая появляется из-за того, что интегрировали для обратной замены. А если уравнение 3 порядка, то будет 3 константы в общем решении.

Пример. $xy''' = y''$ сводится к $xz' = z$ но только в этом случае - заменой $z = y''$, ведь самая младшая из производных, существующих в этом уравнении - вторая.

Уравнение 1 порядка решается аналогично, и получаем $z = C_1 x$.

Теперь надо два раза вычислить первообразную:

$z = y'' = C_1 x$, тогда $y' = \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$, а тогда $y = \dfrac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3$.

ЛЕКЦИЯ № 7.   04. 04. 2016

Случай 2. Если в уравнении содержатся y и все порядки производных, но нет переменной x. Тип уравнения $F(y, y' ..., y^{(n)}) = 0$.

Например, $y'' = -y$ - уравнение колебательногол процесса в физике.

В этом случае замена $y' = p(y)$, то есть y будет выступать в роли переменной, а y' - в роли функции от y.
В данном случае, y'' не равно просто следующей производной p', потому что фактически здесь композиция: $y' = p(y(x))$, и следующую производную от неё надо вычислять именно как для композиции.
Получается $y'' = p'(y(x))y'(x) = p'p$.
$y''' = (p'p)' = (p'(y(x))p(y(x)))'$
вычисляем производную произдведения двух сомножителей, причём в каждом из них ещё и композиция:
$p''(y(x))y'(x)p(y(x)) + p'(y(x))p'(y(x))y'(x)$
учитывая, что $y' = p$, получится $y''' = p''p^2 + (p')^2 p$.
1-я производная от y выражается через 0-ю производную от p,
2-я производная от y выражается максимум через 1-ю производную от p, 3-я производная от y выражается через 2-ю, 1-ю и 0-ю производную от p:

$$y' = p$$
$$y'' = p'p$$
$$y''' = p''p^2 + (p')^2 p.$$

Таким образом, порядок при таком преобразовании обязательно понизится на 1 единицу.
Естественно возникает вопрос: а существуют ли в принципе такие преобразования, не содержат ли они противоречия? Всегда ли вообще можно выразить y' как функцию от y? Изучим этот вопрос подробнее. Оказывается, надо лишь найти обратную функцию и подставить её в производную y'. Примеры:
Пример 1. $y = x^2$, $y' = 2x$. Выразим $x = \sqrt{y}$, и подставим в производную, тогда верно, что $y' = 2\sqrt{y}$.
Пример 2. $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$. Тогда $x = e^y$, и в итоге $y' = \frac{1}{e^y}$.
Как видите, y' может быть записано не только как функция от x, но и как функция от y.

Пример: $y'' = -y$ (уравнение колебаний).
После замены, уравнение преобразуется к виду: $p'p = -y$.
Сначала 1-й шаг: ищем неизвестную функцию $p(y)$.

$$\frac{dp}{dy} p = -y \quad \Rightarrow \quad pdp = -ydy \quad \Rightarrow \quad \int pdp = -\int ydy \quad \Rightarrow$$

$\frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C}{2} \quad \Rightarrow p^2 = -y^2 + C$.При этом $C \geq 0$, иначе справа всё выражение было бы отрицательно и не могло бы быть равно p^2. Если $C \geq 0$, то эту константу можно представить в виде C_1^2. Итак, $p^2 = C_1^2 - y^2$, то есть $p = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$. Итак, мы нашли неизвестную функцию $p(y)$, то есть выполнели действия после замены. Теперь нужно сделать обратную замену, фактически для этого выполнить такой же по объёму 2-й шаг, решить новое дифференциальное уравнение. Ведь $p = y'$, то есть теперь надо решить уравнение:

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}.$$

2 шаг. Обратная замена.

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm\int dx \quad \Rightarrow \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2 \quad \Rightarrow \frac{y}{C_1} = \sin(\pm x + C_2) \Rightarrow$$

$y = C_1 \sin(\pm x + C_2)$. Здесь C_1 называется амплитудой колебаний, C_2 - фазой. Впрочем, при $C_2 = \frac{\pi}{2}$ получается не синус, косинус, а именно, по формуле приведения $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Поэтому в решении есть и косинусы. Более того, мы могли при решении знак плюс-минус также

перенести, $\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}}=dx$, тогда бы слева сразу получалось 2 варианта: или арксинус, или арккосинус.
Ещё решение этого уравнения можно записать в виде:
$y=D_1\sin x+D_2\cos x$.
На этом примере увидели, что уравнение $y''=-y$ действительно является уравнением колебаний, то есть в его решении периодические функции.
Здесь показаны лишь две основные наиболее известные замены. Существуют и другие замены и преобразования, применяемые в разных частных случаях, например, иногда удобно поделить всё уравнение на y или на y', чтобы оно упростилось.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка.

Уравнение вида $a_n(x)y^{(n)}+...+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением порядка n.
Если $b(x)\neq 0$ то оно называется неоднородным, а если $b(x)\equiv 0$, то однородным: $a_n(x)y^{(n)}+..a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$.

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:
$a_ny^{(n)}+..a_2y''+a_1y'+a_0y=0$.
Ищем решение в виде $y=e^{rx}$. Сейчас мы докажем, что экспоненты могут быть решениями этого уравнения, и узнаем, при каких конкретно значениях r.
Если $y=e^{rx}$, то $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$, ... $y^{(n)}=r^ne^{rx}$.
Подставим в уравнение $a_ny^{(n)}+..a_2y''+a_1y'+a_0y=0$.
Получим $a_nr^ne^{rx}+..a_2r^2e^{rx}+a_1re^{rx}+a_0e^{rx}=0$.
Во всех слагаемых одинаковая экспонента, вынесем её за скобку.
$e^{rx}(a_nr^n+..a_2r^2+a_1r+a_0)=0$.
Но поскольку $e^{rx}\neq 0$, то $a_nr^n+..a_2r^2+a_1r+a_0=0$.

Многочлен, который получили в скобках, называется характеристическим многосленом, а уравнение

$a_n r^n + .. a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ - характеристическим уравнением.

Для него существует не более чем n различных корней.

Таким образом, решениями могут быть не все экспоненты, а лишь некоторые избранные, не более n штук.

Сформулируем то, что мы доказали, в виде теоремы:

Теорема 1. Функция e^{rx} является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\Leftrightarrow r$ есть характеристический корень.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение: $r^2 - 3r + 2 = 0$, оно сводится к виду $(r-1)(r-2) = 0$, корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Тогда решениями могут быть только e^x и e^{2x}. Сделаем проверку для каждой из экспонент. Подставим каждую из них в уравнение.

1) $(e^x)'' - 3(e^x)' + 2e^x = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$.

2) $(e^{2x})'' - 3(e^{2x})' + 2e^{2x} = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$.

Проверка выполнена. Обе экспоненты являются решениями.

При этом никакая третья экспонента не может служить решением этого же уравнения, потому что характеристический многочлен 2-й степени, и он имеет максимум 2 корня.

Чуть забегая вперёд, скажем, что эта система функций называется фундаментальной системой решений (ФСР). Их линейные комбинации тоже будут решениями этого уравнения, то есть общее решение можно записать в виде: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Случай 1. Все характеристические корни действительны и различны. $r_1, r_2, ..., r_n \in R$, $r_i \neq r_j$. Тогда фундаментальная система решений состоит из экспонент $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}\}$.

Общее решение: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$.

Пример, рассмотренный выше, как раз и относится к этому случаю.

Ещё пример. $y'' - 25y = 0$.

Случай 2. Все характеристические корни действительные, но среди них есть кратные.
Если r есть корень кратности k, то в системе решений будут присутствовать $\{e^{rx}, xe^{rx}, ..., x^{k-1}e^{rx}\}$, то есть одну и ту же экспоненту k раз включать в фундаменатльную систему решений нельзя, иначе фактическое количество функций в ФСР получится меньше, чем n. Кроме самой экспоненты, нужно взять ещё и с домножением на степенные, по нарастанию степеней до $k-1$.
Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.
Характеристическое уравнение: $r^2 - 2r + 1 = 0$, то есть $(r-1)^2 = 0$, характеристическое корни $r_1 = r_2 = 1$. Тогда ФСР: $\{e^x, xe^x\}$, а общее решение: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.
Сделаем проверку. Для e^x очевидно. Проверим xe^x.
$y = xe^x$, тогда $y' = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$, $y'' = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.
$y'' - 2y' + y = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x$
$= (x - 2x + x)e^x + (2-2)e^x = 0.$

Случай 3. Не все корни действительны (есть комплексные характеристические корни).
Если корень $a + bi$ (а также при этом и $a - bi$), то в ФСР, в числе всех прочих, входят две такие функции: $e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$.
Пример. $y'' = -y$, характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$, корни $\pm i$, то есть $0 \pm 1i$. Решения это $\sin x, \cos x$.

Теорема 2. Линейная комбинация решений линейного однородного дифференциального уравнения тоже является его решением.
Доказательство.
Пусть y_1 и y_2 - два различных решения уравнения

$a_n y^{(n)} + .. a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

То есть, они оба обращают его в тождество:

$a_n y_1^{(n)} + .. a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$ и

$a_n y_2^{(n)} + .. a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$.

Надо доказать, что линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ тоже подходит в качестве решения. Известно, что для производной, а также и последующих выполняется свойство линейности: $(f+g)' = f' + g'$, поэтому $(\alpha y_1 + \beta y_2)' = \alpha y_1' + \beta y_2'$, $(\alpha y_1 + \beta y_2)'' = \alpha y_1'' + \beta y_2''$, и т.д.

Тогда, подставляя линейную комбинацию в дифференциальное уравнение, получим:

$$a_n(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + .. a_2(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a_1(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_0(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$\alpha(a_n y_1^{(n)} + .. a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + \beta(a_n y_2^{(n)} + .. a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2)$$

Но ведь в каждой скобке 0, так как каждая из этих функция была решением уравнения. Получается $\alpha 0 + \beta 0 = 0$.

Таким образом, линейная комбинация решений тоже является решением линейного уравнения.

Теорема 3. (Теорема о наложении решений). Если y_1 - решение линейного неоднородного дифф.уравнения с правой частью $b_1(x)$, а y_2 - решение такого же дифф.уравнения, но с правой частью $b_2(x)$, то линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ является решением уравнения с правой частью $\alpha b_1(x) + \beta b_2(x)$.

Доказывается аналогично предыдущей теореме.

Верно $a_n y_1^{(n)} + .. a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = b_1(x)$ и

$a_n y_2^{(n)} + .. a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = b_2(x)$.

Происходит перегруппировка слагаемых в выражении

$$a_n(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + .. a_2(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a_1(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_0(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

как в прошлой теореме, только теперь получается $\alpha b_1(x) + \beta b_2(x)$, а не $\alpha 0 + \beta 0$.

Таким образом, если в неоднородном уравнении правая часть состоит из нескольких слагаемых, то можно решить более простые уравнения (для каждого из них отдельно) и сложить решения.

Следствие 1. Сумма решений линейного неоднородного и соответствующего однородного дифференциального уравнения является решением неоднородного уравнения.
В условиях прошлой теоремы, взять одну правую часть $b_1(x)$, а вторую $b_2(x) \equiv 0$. тогда сумма решений $y_1 + y_2$ является решением уравнения с правой частью $b_1(x) + 0$.

Следствие 2. Разность двух различных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения является решением соответствующего однородного.

(Слово «соответствующего» здесь означает, что с той же левой частью, что и было неоднородное).

Понятие линейной комбинации, которое рассмотрели выше, здесь обобщено из векторной алгебры (вспомнить системы векторов). Рассмотрим другие обобщения, например, линейной зависимости и независимости системы.

Определение. Система функций $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ называется линейно-независимой, если из равенства $\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n = 0$ следует, что все коэффициенты $\alpha_i = 0$. Если же это равенство возможно при каком-то наборе коэффициентов (т.е. не все они равны 0), то симстема называется линейно-зависимой.

Примеры. $\{x, 2x\}$ ЛЗС. Возьмём коэффициенты 2 и -1.
$2x + (-1)2x = 0$. Если в системе есть хотя бы две пропорциональные функции, то системы ЛЗС.

$\{x, x^2\}$ ЛНС. Какими бы ни были коэффициенты, получается многочлен 2 степени $ax+bx^2$, и здесь 0 может получиться, только лишь в том случае, если обнулить все коэффициенты.
$\{e^{kx}, e^{mx}\}$ ЛНС. Ни одна экспоненты одной степени не представляется в виде другой экспоненты, умноженной на коэффициент.

Чтобы выяснить, ЛЗС или ЛНС система векторов, применяли определители. Здесь же фактически нет матрицы, так как просто n скалярных функций. Тем не менее, оказывается, что здесь тоже можно достроить до квадратной матрицы, а именно с помощью их производных. Если во 2-й строке записать все их первые производные, в 3-й строке - вторые производные, и так далее, до $(n-1)$ порядка, с той целью, чтобы получилась именно квадратная матрица, такой определитель называется определителем Вронского.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим определители Вронского в тех примерах, которые были выше.

Система функций $\{x, 2x\}$. $W(x)=\begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2x-2x\equiv 0$

Система функций $\{x, x^2\}$. $W(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2=x^2\neq 0$.

Система функций $\{e^{kx}, e^{mx}\}$. $W(x)=\begin{vmatrix} e^{kx} & e^{mx} \\ ke^{kx} & me^{mx} \end{vmatrix}=me^{(k+m)x}-ke^{(k+m)x}=$

$(m-k)e^{(k+m)x}\neq 0$, так как числа разные (разность в скобке точно не 0) а экспонента не равна 0.

Как видим на примерах, определитель Вронского для линейно зависимой системы получился тождественно равен 0, а для независимых - нет. Докажем этот факт как общую теорему.

Теорема 4. $W(x) \equiv 0 \Leftrightarrow$ система функций линейно-зависима.
Доказательство. Система функций линейно зависима $\Leftrightarrow$ верно $\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n = 0$ при некотором наборе коэффициентов, среди которых есть отличные от 0. Это эквивалентно тому, что одну из функция можно выразить через другие, то есть представить в виде линейной комбинации. Допустим для определённости, что
$y_n = a_1 y_1 + ... + a_{n-1} y_{n-1}$.
Но тогда и для её производной верно аналогичное равенство:
$y'_n = a_1 y'_1 + ... + a_{n-1} y'_{n-1}$.
Это же верно и для вторых производных, и для каждой из последующих. Но это эквивалентно тому, что в определителе

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

последний столбец является линейной комбинацией предыдущих столбцов, тогда определитель равен 0 при любом x, то есть тождественно равен 0.
Достаточность. Если определитель равен 0, то какой-либо столбец линейно выражается через остальные, тогда первый элемент столбца (а это и есть сама функция) является линейной комбинацией остальных функций.

Теорема 5. Существует n линейно-независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n, и всякое другое решение есть их линейная комбинация.

Для доказательства того, что существует n линейно-независимых решений, сначала возьмём какую-либо невырожденную квадратную матрицу A порядка n.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Найдётся такое решение y_1, которое удовлетворяет условиям Коши:

$y(0)=a_{11},\ y'(0)=a_{21},\ y''(0)=a_{31},\ ...,\ y^{(n)}(0)=a_{n1}$

где числа взяты из 1-го столбца.

Аналогично, для чисел 2-го столбца найдётся другое частное решение y_2, для каждого последующего тоже. Нашлось n решений. Причём это такая система функций, для которой определитель Вронского в точке $x=0$ равен определителю матрицы А. Ведь для y_i и всех её производных, значения в точке 0 это и есть i-й столбец матрицы.

Определитель Вронского этой системы функций не может быть тождественно равен 0, потому что, по крайней мере, в одной точке он не равен 0. Значит, эта система ЛНС.

Всякое другое, (n+1) е решение соответствовало бы некоторым новым условиям Коши, которые можно записать в виде столбца из чисел $b_1,...,b_n$. Но тогда обычная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

имеет единственное решение, в то же время $b_1=y_{n+1}(0)$, тогда получается, что новое решение можно как-то выразить через n ранее найденных решений.

ЛЕКЦИЯ № 8. 15. 04. 2016

Определение. Система из n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n разывается фундаментальной системой решений (ФСР).

* В теореме 5 мы доказали, что линейно независимая система решений состоит ровно из n решений, не больше и не меньше. Это и есть ФСР. Она определяется не единственным образом. Если все

характеристические корни различны, в качестве ФСР принимаются n различных экспонент. Если кратные корни, то в систему входят степенные функции, умноженные на экспоненту $\{e^{rx}, xe^{rx},..., x^{k-1}e^{rx}\}$.

Рассмотрим подробнее, почему происходит именно так. Рассмотрим случай, когда 0 является корнем кратности k. Система функций, соответствующих этому корню, имеет вид $\{e^{0x}, xe^{0x},..., x^{k-1}e^{0x}\}$, то есть просто $\{1, x,..., x^{k-1}\}$. Характеристическое уравнение обязательно имеет вид $a_n r^n + ... + a_k r^k = 0$, так как r^k можно вынести за скобку $\Leftrightarrow$ 0 корень кратности k. Но это значит, что исходное дифференциальное уравнение имеет вид $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_k(x)y^{(k)} = 0$.

Оно содержит производные порядка k и выше. Известно, что если степенную функцию продифференцировать столько раз, какова её степень, то получим константу, а если большее количество раз, то обратится в 0. Так, например,

$$x^2 \to 2x \to 2 \to 0, \quad x^3 \to 3x^2 \to 6x \to 6 \to 0.$$

В данном уравнении производные порядка k и выше. Любая из степенных функций порядка $k-1$ и ниже, а именно взятая из набора $\{1, x,..., x^{k-1}\}$, является решением.

Замечание. С помощью замены $z = ye^{rx}$ доказывается, что и для произвольного ненулевого корня r верен такой же факт, то есть $\{e^{rx}, xe^{rx},..., x^{k-1}e^{rx}\}$, где степенные функции взяты по возрастающей, есть решения.

<u>Линейные неоднородные дифференциальные уравнения порядка n.</u>

В этом пункты рассмотрим уравнения такого вида:

$$a_n y^{(n)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

Сначала надо решать соответствующее однородное (1-й шаг). После этого для решения неоднородного уравнения есть различные способы: Лагранжа и неопределённых коэффициентов. Рассмотрим по порядку.

Обобщение метода Лагранжа для уравнений высшего порядка.

Пусть получено общее решение однородного уравнения, а именно $y = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x)$. Здесь функции y_i это как правило, экспоненты (если характеристические корни различны) либо другие типы функций, рассмотренные выше для случая кратных или комплексных корней. Теперь вместо констант запишем на этих местах неизвестные функции $C_1(x),..., C_n(x)$, то есть решение неоднородного будем искать в виде: $y = C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$.

Если продифференцировать 1 раз, то получим уже 2n слагаемых, после второго раза 4n, затем 8n и так далее. Получается, что в итоге у нас было бы 2^n слагаемых, которые подставили бы в дифференциальное уравнение, и было бы одно условие на n функций. Но для того, чтобы получить однозначное решение, можно наложить n условий на n функций, поэтому $n-1$ условие мы можем добавить искусственно. Лагранж придумал такой способ: если приравнивать к нулю ту группу слагаемых, которая содержит $C_i'(x)$ на каждом этапе дифференцирования, то мы получим как раз и уменьшение количества слагаемых в следующих производных, и увеличение количества условий. Так, после 1-го дифференцирования выражения $y = C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$ получаем

$$y' = \left(C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x)\right) + \ldots + \left(C_n'(x)y_n(x) + C_n(x)y_n'(x)\right)$$

но ведь это можно перегруппировать так:

$$y' = \left(C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x)\right) + \left(C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x)\right)$$

искусственно приравняем к нулю первую часть, а вторую будем дифференцировать дальше. Затем сделаем то же самое и во второй раз. Витоге к последнему разу у нас всё равно будет лишь 2n слагаемых, а вовсе не 2^n. После подстановки в уравнение, а также записи всех дополнительных условий, получится система, из которой находятся неизвестные функции:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = b(x)/a_n \end{cases}$$

Её основная матрица точно такая же, как определитель Вронского для ранее найденной ФСР однородного уравнения.

Например, если n=2. Уравнение $a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$

$y = C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$

$y' = C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x)$ (первые слагаемые, как уже было сказано, вынесли в отдельную скобку и приравняли к нулю).

$$y'' = \left(C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x)\right) + \left(C_1(x)y_1''(x) + \ldots + C_n(x)y_n''(x)\right)$$

На этом последнем шаге уже не приравниваем к 0, а просто подставляем в уравнение, и получим:

$$a_2\left(C_1'y_1' + \ldots + C_n'y_n'\right) + a_2\left(C_1y_1'' + \ldots + C_ny_n''\right) +$$

$$a_1\left(C_1y_1' + \ldots + C_ny_n'\right) + a_0\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right) = b(x).$$

Таким образом, получили выражение

$$a_2\left(C_1'y_1' + \ldots + C_n'y_n'\right) + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x).$$

$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ так как это решение однородного уравнения.

Остаётся $a_2\left(C_1'y_1' + \ldots + C_n'y_n'\right) = b(x)$.

Видно, что в случае n = 2 система имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = b(x)/a_2 \end{cases}$$

Пример. Решение методом Лагранжа уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

Сначала решается соответствующее однородное уравнение.

Характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни равны 1 и 2, общее решение однородного $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Далее вместо констант ставим неизвестные функции, то есть решение неоднородного ищем в виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Для того, чтобы найти неизвестные функции, строим систему: $\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = e^{3x} \end{cases}$

Решая её методом Гаусса, находим производные:

вычтем из 2-го уравнения 1-е, будет $C_2'(x)e^{2x} = e^{3x}$, то есть $C_2'(x) = e^x$. Теперь это выражение подставим в первое уравнение, $C_1'(x)e^x + e^x e^{2x} = 0 \;\Rightarrow\; C_1'(x)e^x = -e^{3x} \;\Rightarrow\; C_1'(x) = -e^{2x}$.

Итак, $C_1'(x) = -e^{2x}$, $C_2'(x) = e^x$.

Тогда

$$C_1(x) = -\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1.$$

$$C_2(x) = \int e^x dx = e^x + C_2.$$

Теперь подставляем их в выражение $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$.

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)e^x + \left(e^x + C_2\right)e^{2x}.$$

Приводя подобные, в итоге получим: $y = \frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Как видим, общее решение однородного уравнения, полученное на первом шаге, выделилось в виде отдельного слагаемого. Частное решение неоднородного (слагаемое без констант), которое мы и искали методом Лагранжа, равно $\frac{1}{2}e^{3x}$. Оно очень похоже на правую часть уравнения, разве что с другим коэффициентом. На самом деле, для некоторых случаев можно обойтись без метода Лагранжа, а вид правой части определяет вид частного решения:

Метод неопределённых коэффициентов.

Если правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$b(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$

то частное решение существует в виде
$y = x^k e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)$,
где k это кратность числа $a+bi$ в качестве характеристического корня. Если оно не является корнем, то $k=0$. Тогда домножение происходит на $x^0 = 1$, то есть фактически, не происходит.
Если в правой части нет тригонометрических функций, то всегда может автоматически считаться, что $b=0$, то есть
$b(x) = e^{ax}(P(x)\cos 0 + Q(x)\sin 0) = e^{ax}P(x)$.
Если отсутствует многочлен, а просто есть экспонента, то можем считать, что многочлен просто равен константе 1, то есть формально он всё равно есть, нулевой степени. Тогда в структуре частного решения записывается «произвольный» многочлен 0 степени, то есть константа А.
Для $b(x) = e^{ax}P(x)$ частное решение в виде $y = e^{ax}R(x)$, если a не является характеристическим корнем, либо $y = x^k e^{ax}R(x)$, если a совпадает с каким-то характеристическим корнем кратности k.
Покажем на примере того же уравнения, которое только что решали методом Лагранжа.
Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.
Шаг 1. Решается однородное. Характеристическое уравнение
$r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни равны 1 и 2, общее решение однородного
$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
Шаг 2. Решение неоднородного. Правая часть $b(x) = e^{3x}$, число 3 не совпадает ни с каким характеристическим корнем левой части, так как там корни 1 и 2. Поэтому $k=0$, и по правой части $b(x) = 1 \cdot e^{3x}$ надо записать структуру частного решения: $y = A \cdot e^{3x}$.
Найдём производные до второго порядка от $y = A \cdot e^{3x}$ и подставим их в неоднородное уравнение.
$y = Ae^{3x} \Rightarrow y' = 3Ae^{3x} \Rightarrow y'' = 9Ae^{3x}$.

$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \Rightarrow 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow 2Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow$

$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Таким образом, частное решение неоднородного:

$y = \frac{1}{2}e^{3x}$, а общее решение неоднородного: $y = \frac{1}{2}e^{3x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Решение соответствующего однородного уравнения находится точно так же. Характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$, корни 1 и 2, общее решение $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Шаг 2. Решение неоднородного. $b(x) = e^{2x}$. Здесь, в отличие от прошлого примера, экспонента 2 степени, а число 2 совпадает с корнем 2 (кратности 1). Другими словами, в ФСР однородного уравнения встречается точно такая же экспонента, как и в правой части. Поэтому кратность совпадения здесь $k = 1$.

А теперь рассмотрим пример, в котором есть и многочлен, и экспонента.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = (2x+1)e^{3x}$.

Характеристические корни 1 и 2, общее решение однородного $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Справа степень 3, то есть кратность совпадения 0. Ещё в правой части есть многочлен 1-й степени, в структуре частного решения надо будет записать произвольный многочлен 1-й степени, то есть в итоге, $y = (Ax + B)e^{3x}$.

Найдём производные 1-го и 2-го порядка, чтобы подставить их в уравнение.

$y = (Ax + B)e^{3x}$

$y' = (Ax + B)'e^{3x} + (Ax + B)(e^{3x})' = (3Ax + 3B + A)e^{3x}$.

$y'' = (9Ax + 9B + 3A + 3A)e^{3x}$.

Подставим в уравнение, причём можно сразу сократить на экспоненту, которая там получается во всех слагаемых.

$(9Ax + 9B + 3A + 3A) - 3(3Ax + 3B + A) + 2(Ax + B) = 2x + 1$.

После приведения подобных:
$2Ax+3A+2B=2x+1$, из чего следует $2A=2$ и $3A+2B=1$, тогда $A=1,\ B=-1$. Частное решение неоднородного уравнения $y=(x-1)e^{3x}$, тогда окончательный ответ, т.е. общее решение неоднородного уравнения: $y=(x-1)e^{3x}+C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

§ 4. Системы дифференциальных уравнений.

Если есть несколько равенств, выражающих производные от различных функций через сами эти функции, например,

$$\begin{cases} x'(t)=a_{11}x(t)+a_{12}y(t) \\ y'(t)=a_{21}x(t)+a_{22}y(t) \end{cases}$$

то говорят, что задана система дифференциальных уравнений.
В 3-мерном случае

$$\begin{cases} x'(t)=a_{11}x(t)+a_{12}y(t)+a_{13}z(t) \\ y'(t)=a_{21}x(t)+a_{22}y(t)+a_{23}z(t) \\ z'(t)=a_{31}x(t)+a_{32}y(t)+a_{33}z(t) \end{cases}$$

Физический смысл. Вектор, состоящий из производных, это вектор скорости, а выражен он через координаты в момент времени t. Получается, что система дифференциальных уравнений задаёт закон движения некоторого потока частиц. К примеру, если в некотором объёме дует ветер, то от того, куда поместить пылинку, зависит траектория её дальнейшего полёта. Задать координаты в нулевой момент времени $x(0),y(0),z(0)$ означает задать условия Коши для системы дифф. уравнений.

Рассмотрим методы решения. Можно свести систему из двух уравнений 1-го порядка к одному уравнению, но 2-го порядка. Рассмотрим на примере.

$$\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=-6x+4y \end{cases}$$

Выразим из 1-го $y=x'+x$, тогда $y'=x''+x'$, подставим во 2-е:
$x''+x'=-6x+4(x'+x)$ что сводится к $x''-3x'+2x=0$.

Это линейное однородное уравнение решается обычным образом, его общее решение $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

Тогда $x' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$, $y = x' + x = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t}$.

Итак, общее решение системы:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \quad y = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t}$$

Его можно записать в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Кстати, векторы (1,2) и (1,3) являются собственными векторами матрицы этой системы, причём они соответствуют собственным числам 1 и 2. Существует и второй способ решения систем: с помощью собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(-1-\lambda)(4-\lambda) - (-6) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \ \Rightarrow \ D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

Корни $\dfrac{3 \pm 1}{2}$ то есть 1 и 2. Ищем собственные векторы:

При $\lambda = 1$ нужно решить систему $\begin{pmatrix} -1-1 & 1 \\ -6 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е.

$\begin{cases} -2a + b = 0 \\ -6a + 3b = 0 \end{cases}$, что даёт вектор (1,2).

При $\lambda = 2$ нужно решить систему $\begin{pmatrix} -1-2 & 1 \\ -6 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е.

$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ -6a + 2b = 0 \end{cases}$, что даёт вектор (1,3).

ФСР состоит из собственных векторов, умноженных на экспоненты в степени собственных чисел.

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Примечание.

В связи с большим объёмом файла, материал за 2-ю половину семестра будет выложен отдельно.