

Министерство образования и науки Российской Федерации
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

А.В. Новиков

**ДЕМОДУЛЯЦИЯ БИНАРНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ
СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД**

Учебное пособие для студентов радиотехнических специальностей

2016

Демодуляция бинарных цифровых сигналов. Статистический подход.

Оглавление

Предисловие.....	3
Постановка задачи.....	3
Решение.....	5
Примеры.....	10
Когерентные системы.....	10
Амплитудная манипуляция (АМ).....	10
Фазовая манипуляция (ФМ).....	12
Частотная манипуляция (ЧМ).....	13
Некогерентные системы.....	15
Амплитудная манипуляция.....	15
Частотная манипуляция.....	18
Численные примеры.....	19
Послесловие.....	19
Список источников.....	20
Приложение А. Графическое представление вероятности ошибки для разных видов бинарной модуляции.....	21

Предисловие

В данном пособии в контексте систем связи рассматривается статистическая задача различения двух сигналов гармонической формы с частично или полностью известными параметрами. В качестве мешающего фактора выступает аддитивная помеха в виде гауссова белого шума.

Пособие может быть рекомендовано не только при изучении дисциплин систем связи, но и при изучении любых радиосистем в контексте статистической теории сигналов.

Постановка задачи

Рассматриваются системы связи, в которых бит (**0** и **1**) кодируется двумя импульсами $u_0(t)$ и $u_1(t)$ длительностью T .

Рассматривается канал, который вносит заранее известную задержку τ_0 и масштабирование H_0 сигнала. Передаточная функция такого канала имеет вид

$$H(\omega) = H_0 \exp(-i\omega\tau_0) .$$

Форма принимаемых (received) импульсов $s_{rec}(t)$ в этом случае совпадёт с формой передаваемых (transmitted) $s_{tr}(t)$

$$s_{rec}(t) = H_0 s_{tr}(t - \tau_0) .$$

Пусть в канале имеется аддитивная помеха типа белого гауссового шума $n(t)$ с нулевым средним и двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$ (рис. 1).

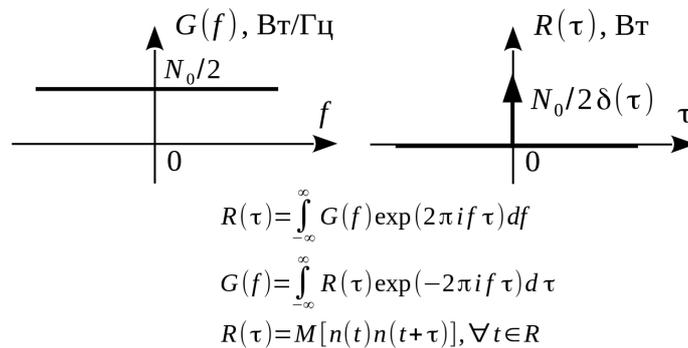


Рисунок 1: Корреляционная (спектральная) модель белого шума

Такая модель общепринята для описания тепловых шумов, неизбежно присутствующих в любой электрической цепи. Для справедливости этой модели средняя мощность шума должна быть равномерно распределена в рабочем частотном диапазоне приёмника. Так оправдывают «белость» шума. Гауссовость (нормальность) оправдывают измерениями.

Будем считать, что передаваемые и принимаемые биты равновероятные: $p(u_0) = p(u_1) = 0,5$. В системах связи делается всё, чтобы к этому приблизиться: скремблирование (**scrambling**, слабое шифрование без цели сокрытия информации), сжатие (экономное кодирование). Гарантированный баланс и слабая коррелированность нулей и единиц позволяют гарантированно сформировать желаемую **форму** спектра передаваемого сигнала, которая в этом случае определяется лишь формой импульса-носителя (немодулированного импульса). Так, например, избавляются от постоянной составляющей в сигнале, которая приводит к лишним затратам энергии.

Приёмник цифровой системы связи должен угадать сигнал, который был передан, выставив в итоге **0** или **1** на выходе решающего устройства демодулятора. Из-за помех, зашумляющих переданный сигнал, могут быть неверные угадывания. Частота таких событий (ошибок) определяется *вероятностью ошибки* p .

Считается, что риск при двух возможных типах ошибок — $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$ — одинаков, то есть все ошибки вредны в равной степени. Для систем связи это верно, а, например, в радиолокации — нет, так как по последствиям событие **Пропуск цели** не равнозначно событию **Появление ложной цели**.

Для определённости рассматриваются гармонические импульсы

$$u(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где E — энергия импульса длительностью T , нормированная на один ом сопротивления. В случае кратности длительности импульса и периода несущей

$$T = k/f, \quad k = 1, 2, \dots,$$

квадрат амплитуды синусоиды можно точно заменить удвоенной энергией, деленной на длительность. В этом легко убедиться, если вспомнить про определение энергии (на 1 Ом)

$$E = \int_0^T u^2(t) dt.$$

При несоблюдении кратности такая замена будет тем точнее, чем больше периодов несущей укладывается на длительность импульса.

Большое количество периодов требуется ещё и для того, чтобы радиоимпульс успел набрать свою номинальную мощность — ведь переходные процессы в цепях никто не отменял. Большие провалы амплитуды характерны, например, для фазовой манипуляции, когда скачок фазы при переходе от одного бита к другому максимален (180 градусов¹).

Считаем, что приёмник (демодулятор) точно знает моменты наилучшего взятия

1 Скачок 270 градусов равнозначен скачку 90 градусов (неважно, в плюс или в минус).

отсчётов из принимаемых импульсов (идеальная *тактовая синхронизация*).

Рассматривать гармонические импульсы (радиосигналы, **narrow-band**) вовсе не обязательно, так как можно построить систему связи на видеосигналах (низкочастотная передача, **baseband**). Радиосигналы превращаются в видео путём сброса частоты на ноль с помощью опорного генератора немодулированной несущей. Использовать радиосигналы вынуждает в первую очередь физика радиоволн, а во вторую — частотный план.

Определив начальные условия, ставим задачу:

Найти максимально правдоподобный способ обработки принимаемых импульсов. Дать формулы для вычисления вероятности ошибки.

Решение

На вход приёмника поступает сумма переданного сигнала и шума. Так как задержка в канале постоянная, то приёмник может заранее настроиться на верные моменты прихода сигнала. Ослабление (возможно, что и усиление) в канале постоянное и заранее известное, так что в приёмнике выставляется фиксированный коэффициент масштабирования (нормировки) сигнала.

Результат обработки импульса — уровень напряжения (или тока), выраженный, например, в виде числового кода, который математически сравнивается с порогом (с другим числом). Результат сравнения по принципу «больше-меньше» и является искомым битом **0** или **1**. Таким образом, демодулятор отображает принятый импульс в бит (двоичный символ)².

Так как принятый сигнал содержит шум, то вычисляемое число будет содержать случайную компоненту. Каков будет закон распределения этого числа — зависит от закона распределения шума и от способа вычисления числа.

Приёмник генерирует образцы эталонных (*априорных*, известных до опыта) сигналов $u_0(t)$ и $u_1(t)$ и сравнивает их с принятым сигналом. Так как рассматриваются гармонические сигналы, то возникает вопрос: какие параметры сигнала известны приёмнику и с какой точностью они им реализуются?

Амплитуда, как правило, известна и реализуется с достаточной точностью, так что имеющиеся нестабильности практически не влияют на вероятность ошибки. Проблема возникает с более «тонким» параметром — фазой, так как она связана со временем, генераторы (часы) которого в передатчике не могут идеально совпадать с часами в

2 Это «жесткий» (**hard**) демодулятор. Есть еще «мягкие» (**soft**) демодуляторы, в которых несколько порогов и они не так грубо квантуют (**quantizer**) число.

приёмнике. Причём чем быстрее передаётся информация, тем больше будет сказываться неточность часов.

Частота сигнала на выходе любого генератора имеет свойство медленно блуждать вокруг некоторой средней частоты, причём частоты генераторов в приёмнике и передатчике блуждают независимо.

С начальными фазами ещё хуже: фазы по определению независимы и заранее неизвестны. Невозможно так подобрать момент включения генераторов в передатчике и приёмнике, что колебания на их выходах при каждом включении будут происходить согласованно, то есть с постоянной и заранее известной разностью фаз. Даже если это и будет сделано, то блуждания частоты приведут к блужданию разности фаз, так как фаза — это интеграл от частоты.

В итоге, из-за неидеальности генераторов, даже в рассматриваемом канале с постоянными параметрами принимаемый сигнал содержит неопределённость относительно фазы (и частоты соответственно), никак не связанную с наличием аддитивного шума.

Естественно, можно вообразить идеальную систему, где известно всё, а к ошибкам приводит только лишь аддитивный шум. Такие системы называются *когерентными*. Практически к ним можно лишь приближаться с некоторой точностью:

- применять стабилизацию частоты в генераторах (кварцевый, рубидиевый стандарт);
- использовать контур фазовой автоподстройки частоты;
- привлекать спутниковую связь для выравнивания фазы генераторов от единой более точной шкалы времени...

Такие системы называются *частично-когерентными*. На практике их попросту называют когерентными, так как по настоящему когерентных не существует.

Если никаких попыток подстроить фазу приёмного генератора не делается, то такие системы являются *некогерентными*.

Демодулятор содержит устройство сравнения принятого импульса с образцовыми импульсами $u_0(t)$ и $u_1(t)$. Чем больше похож принятый импульс на $u_0(t)$, тем, по идее, большим должно быть число на выходе устройства, отвечающего за бит **0**. Очевидно, что в итоге требуется сравнить два числа (за **0** и за **1**) и выставить распознанный бит.

Известно, что два сигнала одинаковой длительности можно сравнить по *евклидовому расстоянию*

$$d_i^2 = \int_0^T [u(t) - u_i(t)]^2 dt, \text{ здесь дан квадрат расстояния.}$$

Будет ли оптимальным по критерию минимума вероятности ошибки этот способ сравнения, если шум является белым гауссовым?..

Принятый сигнал — сумма нормально распределённого белого шума и одного из двух сигналов $u_i(t)$. Так как **линейные преобразования (суммирование и умножение на константу) не меняют нормальности закона распределения**, то принятый сигнал будет распределён нормально.

Рассмотрим для начала один момент времени; в этом случае принятый сигнал перейдёт в принятую случайную величину $u = u_i + n$, имеющую среднее значение u_i и дисперсию $\overline{(u - u_i)^2} = \overline{n^2} = \sigma^2$, равную дисперсии шума.

Различение возможно, если опорные величины не равны друг другу, то есть $u_0 \neq u_1$.

В качестве примера можно привести априорно заданные величины $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, и приём (измерение) числа $u = 0,95$. Естественно, что измеренное число ближе к u_1 , поэтому приёмник «скажет», что в передатчик, вероятно, передавал число u_1 .

Для максимально правдоподобного различения сигналов необходимо вычислить две вероятности (одну в пользу **0**, другую в пользу **1**) и затем сравнить их между собой

$$\begin{aligned} p(u_0/u) > p(u_1/u) &\Rightarrow u_0 \\ p(u_0/u) < p(u_1/u) &\Rightarrow u_1 \end{aligned}$$

Отношение этих двух вероятностей называется *отношением правдоподобия*

$$\gamma = \frac{p(u_0/u)}{p(u_1/u)} = \frac{p(u_0)w(u/u_0)}{p(u_1)w(u/u_1)}, \text{ порог равен единице,}$$

где $w(u/u_i)$ — плотность вероятности случайной величины u при условии, что в передатчике выставлен символ u_i (рис. 2). Отношение правдоподобия преобразовано на основании формулы умножения вероятностей

$$p(u)p(u_0/u) = p(u_0)p(u/u_0) = p(u_0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_u^{u+\epsilon} w(u/u_0) du$$

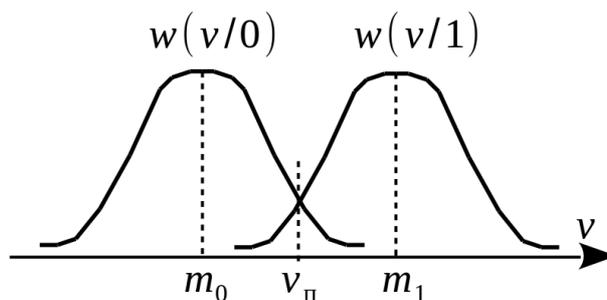


Рисунок 2: Условные плотности вероятности

Для нормально распределённой случайной величины условная плотность выглядит так

$$w(u/u_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-u_i)^2}{2\sigma^2}\right],$$

поэтому отношение правдоподобия можно переписать в виде

$$\gamma = \frac{p(u_0)}{p(u_1)} \exp\left[\frac{(u-u_1)^2 - (u-u_0)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Так как по договорённости биты равновероятные, то

$$\gamma = \exp\left[\frac{(u-u_1)^2 - (u-u_0)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Вычислим логарифм от обеих частей, дабы избавиться от экспоненты

$$\ln \gamma = \frac{(u-u_1)^2 - (u-u_0)^2}{2\sigma^2}.$$

Этот логарифм сравнивается с нулем. Решение принимается в пользу u_0 , если он больше нуля, и в пользу u_1 , если меньше. Параметр σ на результат сравнения не влияет, поэтому способ обработки измеренного числа u можно упростить до

$$|u-u_1| \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} |u-u_0|.$$

Получается, что для нормальной случайной величины при равновероятных символах оптимальный приёмник должен вычислить два **евклидовых расстояния** и сравнить их. Тот из двух символов, к которому ближе u , и будет выдан приёмником за истину.

Естественным образом выбранный порог $\gamma(u=v_n)=1$ обеспечивает **минимум полной вероятности ошибки**

$$P_{err}(v_n) = p(u_0) \int_{v_n}^{\infty} w(u/u_0) du + p(u_1) \int_{-\infty}^{v_n} w(u/u_1) du, \text{ при } u_1 > u_0,$$

причём для любых плотностей $w(u)$ и любых вероятностей символов

$$\frac{dP_{err}}{dv_n} = 0 \Rightarrow \frac{w(v_n/u_0)}{w(v_n/u_1)} = \frac{p(u_1)}{p(u_0)}.$$

Приём сигнала от приёма случайной величины отличается тем, что сигнал — это множество случайных величин. Здесь рассматривается белый шум, поэтому эти случайные величины не будут коррелировать, а так как шум является нормальным, то они будут статистически независимыми. Значит плотность вероятности совокупности этих величин равна произведению плотностей по отдельности, что приведёт в экспоненте к сумме квадратов разностей, а в пределе при уменьшении шага квантования времени — к интегралу

$$d_i^2 = \int_0^T [u(t) - u_i(t)]^2 dt .$$

Если $d_0 < d_1$, то принимаем решение о наличии импульса $u_0(t)$; если $d_1 < d_0$, то считается, что имеется импульс $u_1(t)$. Это демодуляция **по минимуму расстояния**.

Таким образом, доказано, что оптимальный приёмник-различитель двух равновероятных сигналов на фоне аддитивного белого нормального шума должен работать по критерию минимума евклидова расстояния.

Правило сравнения

$$d_1^2 - d_0^2 = \int_0^T [u(t) - u_1(t)]^2 dt - \int_0^T [u(t) - u_0(t)]^2 dt \begin{matrix} > & 0 \\ < & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} ,$$

равнозначно следующему³

$$E_{uw} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{E_1 - E_0}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} , \quad (1)$$

где

$$E_{uw} = \int_0^T u(t)w(t)dt , \quad w(t) = u_1(t) - u_0(t) , \quad E_1 = \int_0^T u_1(t)^2 dt , \quad E_0 = \int_0^T u_0(t)^2 dt .$$

Вывод: оптимальный приемник должен вычислять *корреляционный момент* между принятым сигналом $u(t)$ и опорным $w(t)$, равным разности двух сигналов-образцов.

Такой приемник называют *корреляционным*. Естественно, что если два образца совпадут, то никакого различения не будет в принципе, а полная вероятность ошибки $P_{err}(v_n)$ будет равна 0,5 для любого порога v_n .

Напомним, что единичная вероятность ошибки равнозначна нулевой, а вероятность $1/2$ является самым худшим вариантом, при котором вся информация «съедается» каналом связи. Последнее справедливо лишь при независимых ошибках, что как раз обеспечивает рассмотренный приём сигнала в канале с нормальным белым шумом, отсчёты которого как раз-таки независимы. Если, например, ошибки в некотором «чудном» канале чередуются

...01010101...,

то вероятность ошибки будет также равна $1/2$, но ошибки будут строго зависимыми и приёмник, зная это свойство канала, сможет все ошибки гарантированно исправить.

Примеры

Когерентные системы

Амплитудная манипуляция (АМ)

Сигнал на входе демодулятора состоит из сигнальной части и шумовой

$$u(t) = u_s(t) + n(t) \text{ ,}$$

где сигнальная часть в зависимости от передаваемого бита может быть равна одному из двух сигналов

$$u_{1s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f t), \quad u_{0s}(t) = 0 \text{ .}$$

Здесь E — это энергия принятого сигнала непосредственно на входе умножителя (смесителя) демодулятора.

Для когерентных систем в демодуляторе приемника стоит генератор несущей с раз и навсегда определённой разностью фаз по отношению к несущей передатчика. Примем для упрощения эту разность фаз равной нулю, тогда опорный (разностный) сигнал будет равен

$$w(t) = \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \sin(2\pi f t) \text{ .}$$

Энергия опорного импульса $w(t)$ длительностью T равна E_{ref} , тогда неравенство (1) для когерентной АМ будет иметь вид

$$v = \int_0^T u(t)w(t)dt \begin{cases} > \frac{E_{ref}}{2} \\ < \frac{E_{ref}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ .}$$

Вывод: чем больше энергия опорного импульса, тем выше должен быть порог.

Когерентность позволила исключить фазу, то есть по факту она стала неслучайной и потому известной.

Подставим в последнее неравенство вместо $u(t)$ сумму сигнала и шума, и, в зависимости от вида сигнала (**0** или **1**), определим характеристики случайной величины v

$$v = \int_0^T u_{is}(t)w(t)dt + \int_0^T n(t)w(t)dt = v_s + v_n \text{ .}$$

Случайность этой величины обязана шумовой составляющей суммы. Прохождение белого нормального шума через коррелятор не меняет его закона распределения, поэтому величина v также будет распределена по нормальному закону. Её среднее значение зависит от вида передаваемого сигнала (от бита)

$$m_i = \bar{v} = v_s = \begin{cases} \sqrt{E E_{ref}}, & \text{для } \mathbf{1} \\ 0, & \text{для } \mathbf{0} \end{cases},$$

а дисперсия — от спектральной плотности мощности $N_0/2$ белого шума⁴

$$\sigma^2 = \overline{(v - \bar{v})^2} = (N_0/2) \int_0^T w^2(t) dt = (N_0/2) E_{ref}.$$

Вычислим полную вероятность ошибки, учтя то, что все плотности нормальные $N(u, m_i, \sigma)$ со средними m_i и дисперсиями σ^2 , а оптимальный порог равен полусумме m_0 и m_1

$$P_{err}(v_n) = 0,5 \int_{v_n}^{\infty} w(u/u_0) du + 0,5 \int_{-\infty}^{v_n} w(u/u_1) du = \int_{-\infty}^{v_n} w(u/u_1) du = \int_{-\infty}^{0,5(m_0+m_1)} N(u, m_1, \sigma) du.$$

Последний интеграл табличный, поэтому

$$P_{err} = 1 - \Phi\left(\frac{m_1 - m_0}{2\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-x^2/2) dx.$$

В аргументе функции ошибок $\Phi(z)$ стоит заведомо положительное число

$$q = \frac{m_1 - m_0}{\sigma} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}},$$

квадрат которого называют *отношением сигнал-шум на выходе демодулятора*⁵

$$q^2 = \frac{(m_1 - m_0)^2}{\sigma^2} = \frac{2 \int_0^T [u_{1s}(t) - u_{0s}(t)]^2 dt}{N_0}.$$

Энергия опорного сигнала в отношении сигнал-шум не участвует. Интеграл в числителе — это энергия разностного сигнала E_d , которая может быть выражена через среднюю энергию сигнала, приходящуюся на один бит E_b

$$E_d = \int_0^T [u_1(t) - u_0(t)]^2 dt = 2 E_b (1 - \rho),$$

где ρ — коэффициент корреляции двух сигналов. Последняя формула получена в предположении, что сигналы $u_0(t)$ и $u_1(t)$ имеют **равную энергию**, которая и есть искомая средняя энергия на один бит. Эта энергия пропорциональна среднему потреблению

⁴ Доказательство см., например, в книге Бернарда Скляра «Цифровая связь», в приложении

⁵ Обязательно проверьте данное равенство!

энергии модулятором.

Таким образом, для когерентной АМ, у которой два сигнала ортогональны ($\rho=0$), средняя энергия, затрачиваемая на передачу одного бита, равна $E_b = E/2$.

Формула для вероятности ошибки может быть переписана в более универсальном виде

$$P_{err} = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{N_0}}\right). \quad (2)$$

Разные виды манипуляции сравнивают при одинаковом отношении E_b/N_0 .

Схема когерентного АМ демодулятора

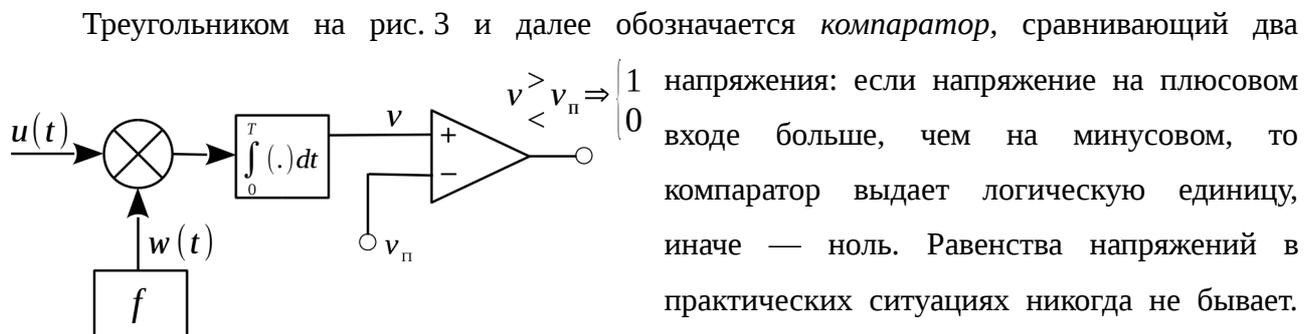


Рисунок 3: Схема когерентного АМ демодулятора

Интегратор сбрасывается в момент прихода нового импульса. Бит с компаратора считывается в момент окончания импульса. В реальности никаких интеграторов со сбросом нет, так как вместо них стоит согласованный фильтр (см. пособие «Демодуляция бинарных цифровых сигналов. Сигнальный подход»).

Фазовая манипуляция (ФМ)

При ФМ оба битовых сигнала имеют одинаковую энергию, но разнесены по фазе на 180 градусов (на π радиан)

$$u_{1s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f t), \quad u_{0s}(t) = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f t).$$

Опорный сигнал **пропорционален** разности двух образцовых

$$w(t) \sim u_1(t) - u_0(t) = 2\sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f t),$$

Так как энергия опорного сигнала может регулироваться и теоретически не влияет на вероятность ошибки, то можно записать

$$w(t) = \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \sin(2\pi f t).$$

Энергии **1** и **0** для ФМ равны, поэтому из неравенства (1) следует сравнение

$$v = \int_0^T u(t)w(t)dt \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} .$$

Случайная величина v , аналогично случаю когерентной АМ, будет иметь нормальное распределение, но с несколько другими средними

$$m_i = \bar{v} = v_s = \begin{cases} \sqrt{E E_{ref}}, & \text{для } 1 \\ -\sqrt{E E_{ref}}, & \text{для } 0 \end{cases} ,$$

но той же самой дисперсией

$$\sigma^2 = (N_0/2) \int_0^T w^2(t)dt = (N_0/2) E_{ref} .$$

Полная вероятность ошибки при оптимальном пороге (нулевом)

$$P_{err} = 1 - \Phi\left(\frac{m_1 - m_0}{2\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) .$$

Отношение сигнал-шум на выходе

$$q^2 = \frac{(m_1 - m_0)^2}{\sigma^2} = \frac{8E}{N_0} ,$$

а средняя энергия на один бит $E_b = E$. Коэффициент корреляции двух ФМ сигналов $\rho = -1$.

Доказано, что когерентная ФМ является наиболее помехоустойчивой для рассматриваемого канала связи и типа помехи.

Схема когерентного ФМ демодулятора имеет такой же вид, что и схема для когерентного АМ демодулятора (рис. 3), за исключением того, что порог будет нулевым.

Частотная манипуляция (ЧМ)

Для данного типа манипуляции оба сигнала имеют равные энергии, равные фазы, но разные частоты несущих

$$u_{1s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f_1 t), \quad u_{0s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f_0 t) ,$$

Неравенство (1) перейдет в

$$v = \int_0^T u(t)w(t)dt \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} .$$

При ЧМ бывает удобнее преобразовать последнее неравенство в следующее

$$v_1 \begin{cases} > \\ < \end{cases} v_0 \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} ,$$

где

$$v_1 = \int_0^T u(t) u_1(t) dt, \quad v_0 = \int_0^T u(t) u_0(t) dt.$$

Величины v_1 и v_2 на выходах корреляторов будут нормальными случайными величинами со средними значениями

$$\overline{v_1} = \begin{cases} \sqrt{E E_{ref}}, & 1 \\ 0, & 0 \end{cases}, \quad \overline{v_0} = \begin{cases} 0, & 1 \\ \sqrt{E E_{ref}}, & 0 \end{cases},$$

и одинаковой дисперсией

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (N_0/2) \int_0^T u_1^2(t) dt = (N_0/2) \int_0^T u_0^2(t) dt = (N_0/2) E_{ref}.$$

Нулевые средние при «чужих» сигналах появились за счёт ортогональности двух сигналов-образцов

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_0 E_1}} \int_0^T u_1(t) u_0(t) dt = 0.$$

Доказано, что ортогональность двух сигналов разных частот является наилучшим выбором по выигрышу сигнал-шум после демодуляции. Этот наилучший выигрыш совпадает с выигрышем когерентной АМ, в которой два сигнала-образца тривиально ортогональны. При ФМ они противоположны, то есть отличаются максимально возможно.

Чтобы вычислить вероятность ошибки, удобно рассмотреть разность $v_1 - v_0$, которая будет гауссовой случайной величиной со средними

$$\overline{v_1 - v_0} = \begin{cases} \sqrt{E E_{ref}}, & 1 \\ -\sqrt{E E_{ref}}, & 0 \end{cases},$$

и одинаковой дисперсией

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = N_0 E_{ref}.$$

Простое суммирование дисперсий возникло из-за ортогональности (некоррелированности) образцов.

Вероятность ошибки

$$P_{err} = 1 - \Phi\left(\frac{m_1 - m_0}{2\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Средняя энергия на один бит $E_b = E$.

Таким образом, помехоустойчивость когерентных АМ и ЧМ одинакова.

Схема когерентного ЧМ демодулятора

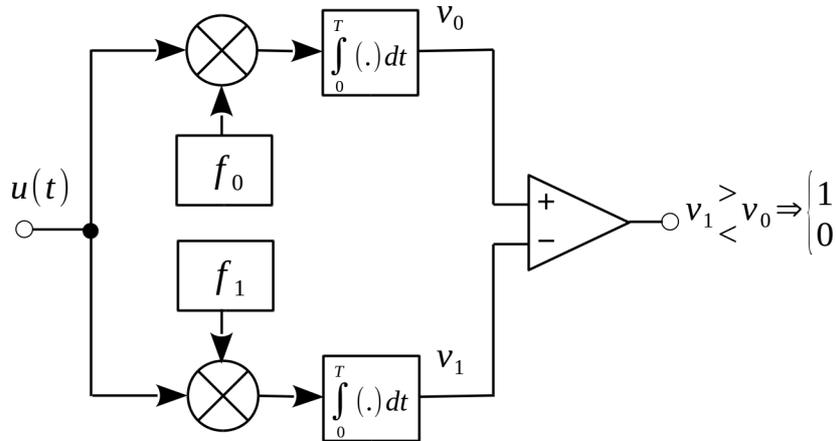


Рисунок 4: Схема когерентного ЧМ демодулятора

На рис. 4 порога в явном виде нет, так как сравниваются напряжения из двух ветвей. Можно обойтись одним коррелятором, но для этого надо иметь опорный сигнал, равный разности двух образцовых. В варианте с одним коррелятором порог будет равен нулю.

Некогерентные системы

Амплитудная манипуляция

Полезный сигнал, в отличие от когерентной АМ, будет иметь случайный параметр — фазу

$$u_{1s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi ft + \varphi), \quad u_{0s}(t) = 0,$$

где φ — та самая случайная фаза, по сути равная разности фаз между принимаемым импульсом и сигналом опорного генератора приёмника. От этой фазы необходимо избавиться, так как она не несёт никакой информации.

Геометрически, при демодуляции необходимо измерить длину вектора со случайным углом. Для этого потребуются два ортогональных колебания одинаковой энергии с любой начальной фазой — лишь бы разность фаз поддерживалась 90 градусов

$$u_c(t) = \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \cos(2\pi ft) \quad \text{— это квадратурные сигналы.}$$

$$u_s(t) = \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \sin(2\pi ft)$$

Перемножаем $u_{1s}(t)$ с квадратурными сигналами $u_c(t)$ и $u_s(t)$, интегрируем произведения по длительности импульса, получая два числа v_I и v_Q соответственно, по которым находим модуль, избавляясь от случайной фазы

$$v = \sqrt{v_I^2 + v_Q^2} = \sqrt{(\sqrt{E E_{ref}} \sin \varphi)^2 + (\sqrt{E E_{ref}} \cos \varphi)^2} = \sqrt{E E_{ref}} .$$

Некогерентный метод обработки АМ импульса готов (рис. 5). Осталось определить оптимальный порог и вероятность ошибки.

Схема некогерентного АМ демодулятора

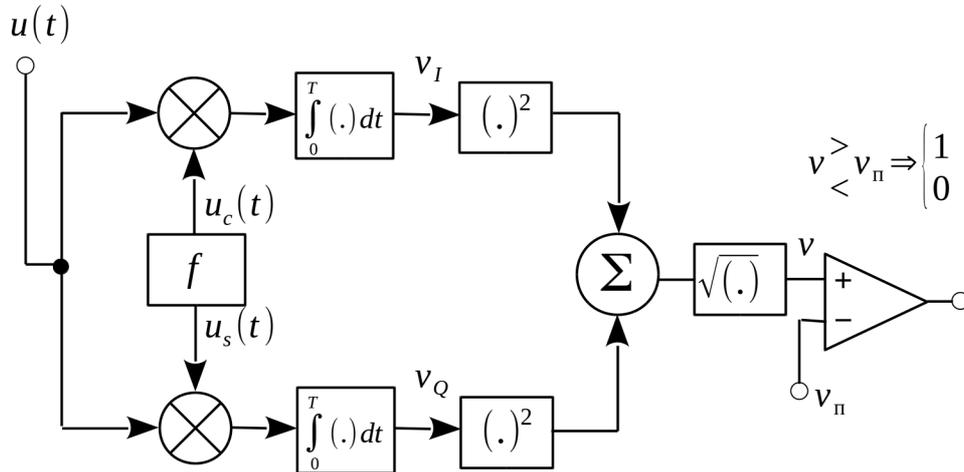


Рисунок 5: Схема некогерентного АМ демодулятора

Числа v_I и v_Q — нормальные случайные величины, так как гауссов шум прошёл через линейный фильтр (коррелятор). Средние значения этих чисел равны

$$\overline{v_I} = \begin{cases} \sqrt{E E_{ref}} \sin \varphi, & 1 \\ 0, & 0 \end{cases}, \quad \overline{v_Q} = \begin{cases} \sqrt{E E_{ref}} \cos \varphi, & 1 \\ 0, & 0 \end{cases},$$

а их дисперсии одинаковы

$$\sigma^2 = \sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = (N_0/2) \int_0^T u_c^2(t) dt = (N_0/2) \int_0^T u_s^2(t) dt = (N_0/2) E_{ref} .$$

Однако случайная величина v (модуль) уже не будет гауссовой (рис. 6).

Если передается **0**, то средние квадратуры равны нулю и v имеет распределение Рэлея [1]

$$w_0(v) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-v^2}{2\sigma^2}\right), \quad v \geq 0 .$$

Если передается **1**, то средние квадратуры не равны нулю и v имеет обобщённое распределение Рэлея (распределение Райса) [2]

$$w_1(v) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left[\frac{-(v^2 + a^2)}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{av}{\sigma^2}\right), \quad v \geq 0 ,$$

где $a = \sqrt{\overline{v_I^2} + \overline{v_Q^2}} = \sqrt{E E_{ref}}$,

$I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

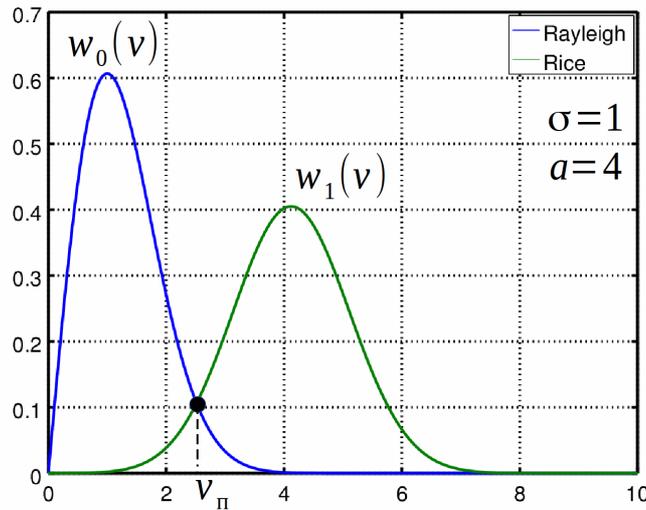


Рисунок 6: Плотности вероятности для числа на входе детектора (компаратора) демодулятора некогерентной АМ

На рис. 6 показан пример рэлеевского $w_0(v)$ и райсовского $w_1(v)$ распределений для $\sigma=1$ и $a=4$. Параметр a практически совпадает с модой (вершиной графика) распределения Райса, причём это совпадение тем лучше, чем больше отношение a/σ . При $a=0$ мода совпадёт с σ и две кривых сольются.

Различение сигналов для битов **0** и **1** возможно лишь при $a>0$; в противном случае вероятность ошибки будет равна $1/2$ (максимальное неразличение). Так как при АМ сигнал для бита **0** нулевой, то правильнее говорить об обнаружении сигнала в шуме.

Чем больше a по сравнению с σ , тем меньше вероятность ошибки при обнаружении. По сути, отношение этих величин — это отношение сигнал-шум по выходу (то есть после демодуляции). Средняя энергия на один бит равна $E_b = E/2$, поэтому отношение сигнал-шум по входу можно выразить так

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\sigma} \right)^2 .$$

Полная вероятность ошибки

$$P_{err}(v_{\pi}) = 0,5 \int_{v_{\pi}}^{\infty} w_0(v) dv + 0,5 \int_0^{v_{\pi}} w_1(v) dv .$$

Минимум вероятности ошибки достигается при условии (см. рис. 6)

$$w_0(v_{\pi}) = w_1(v_{\pi}) ,$$

что даёт уравнение

$$I_0 \left(\frac{a v_{\pi}}{\sigma} \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma^2} \right) ,$$

относительно переменной v_n . Найдя из него (численно) оптимальный порог, можно вычислить вероятность ошибки

$$P_{err} = 0,5 \exp\left(\frac{-v_n^2}{2\sigma^2}\right) + 0,5 \left[1 - Q_1\left(\frac{a}{\sigma}; \frac{v_n}{\sigma}\right)\right],$$

где [3]

$$Q_1(a; b) = \int_b^{\infty} t \exp\left(-\frac{t^2 + a^2}{2}\right) I_0(at) dt \quad —$$

функция Маркума, а $I_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Простой способ вычисления $Q_1(a, b)$ можно найти в [4]

$$Q_1(a, b) = 1 - \frac{b^2}{2} \exp\left(\frac{-a^2}{2}\right) \sum_{n \geq 0} P_n\left(\frac{a^2}{2}, -\frac{b^2}{2}\right),$$

где

$$P_{n+1}(a, b) = \frac{(2n+1-a)b}{(n+1)(n+2)} P_n(a, b) - \frac{nb^2}{(n+1)^2(n+2)} P_{n-1}(a, b),$$

$$P_0(a, b) = 1, \quad P_1(a, b) = \frac{(1-a)b}{2}.$$

Таким образом, вероятность ошибки для некогерентной АМ вычисляется не так просто, как для когерентных систем.

Частотная манипуляция

Принимаемые сигналы будут иметь две разные частоты, одинаковые энергии и длительности, но случайные фазы

$$u_{1s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1), \quad u_{0s}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0).$$

В отличие от некогерентной АМ, здесь потребуются четыре квадратуры — по две на каждую частоту

$$\begin{aligned} u_{s1}(t) &= \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \sin(2\pi f_1 t) & u_{s0}(t) &= \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \sin(2\pi f_0 t) \\ u_{c1}(t) &= \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \cos(2\pi f_1 t) & u_{c0}(t) &= \sqrt{\frac{2E_{ref}}{T}} \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}.$$

Схему некогерентного ЧМ демодулятора предлагается нарисовать самим, скомбинировав два некогерентных АМ демодулятора.

При ЧМ требуются два канала: один работает на частоте f_1 , другой — на f_0 . Компаратор сравнивает выходы обоих каналов. Если в одном канале выходная величина

имеет распределение Рэлея, то в другом — Райса, и наоборот. Говоря жаргоном, ошибка демодуляции будет в том случае, когда *рэлеевская величина превысит райсовскую*.

Вероятность этого события вычисляется как обычно

$$P_{err} = \int_0^{\infty} \left[\int_{v_1}^{\infty} w_0(v_0) dv_0 \right] w_1(v_1) dv_1 ,$$

где рэлеевская величина обозначена как v_0 , а райсовская как v_1 .

Внешний интеграл — это усреднение по всем райсовским величинам. Внутренний интеграл — вероятность попадания рэлеевской величины в интервал от v_1 до ∞ , что равносильно неравенству $v_0 > v_1$.

К счастью, несмотря на сложность интеграла, его значение получается простым

$$P_{err} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-E_b}{2N_0}\right) ,$$

чего не скажешь про результат для некогерентной амплитудной манипуляции.

Численные примеры

- Задаём $\frac{E_b}{N_0} = 10$.

Некогерентная АМ: $a/\sigma = 2\sqrt{10} \approx 6,32$, $v_{\pi}/\sigma \approx 3,55$, $P_{err} \approx 1,9 \cdot 10^{-3}$.

Когерентная АМ (ЧМ): $P_{err} = 1 - \Phi(\sqrt{10}) \approx 7,8 \cdot 10^{-4}$.

Некогерентная ЧМ: $P_{err} = 0,5 \exp(-10/2) \approx 3,4 \cdot 10^{-3}$.

Когерентная ФМ: $P_{err} = 1 - \Phi(\sqrt{2 \cdot 10}) \approx 3,9 \cdot 10^{-6}$.

- Задаём $\frac{E_b}{N_0} = 1$.

Некогерентная АМ: $a/\sigma = 2\sqrt{1} = 2$, $v_{\pi}/\sigma \approx 1,75$, $P_{err} \approx 0,257$.

Когерентная АМ (ЧМ): $P_{err} = 1 - \Phi(\sqrt{1}) \approx 0,159$.

Некогерентная ЧМ: $P_{err} = 0,5 \exp(-1/2) \approx 0,303$.

Когерентная ФМ: $P_{err} = 1 - \Phi(\sqrt{2 \cdot 1}) \approx 7,9 \cdot 10^{-2}$.

Послесловие

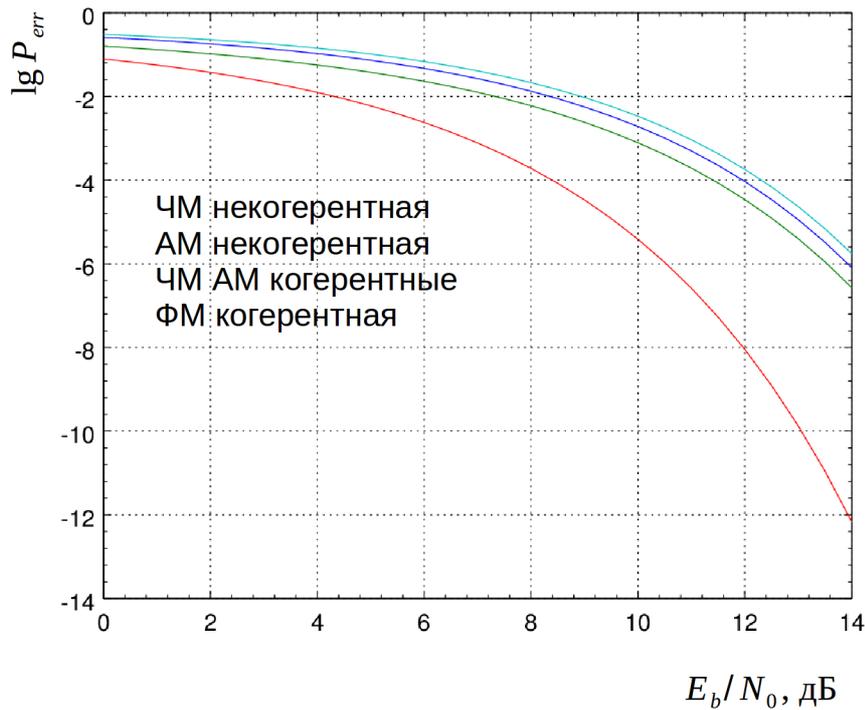
Для подробного ознакомления с процессом формирования и обработки рассмотренных сигналов рекомендуется ознакомиться с пособием «Демодуляция бинарных цифровых

сигналов. Сигнальный подход». Например, там подробно рассмотрена процедура фазовой автоподстройки частоты, а также формирование квадратур без межсимвольной интерференции.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_distribution
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Rice_distribution
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Marcum_Q-function
4. The generalized Marcum Q-function: an orthogonal polynomial approach / Sz. Andras, A. Baricz, Y. Sun // Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 3, 1 (2011) 60–76.

Приложение А. Графическое представление вероятности ошибки для разных видов бинарной модуляции



Вероятность ошибки в зависимости от среднего отношения сигнал-шум на входе демодулятора для разных видов бинарной модуляции: АМ — амплитудной, ЧМ — частотной и ФМ — фазовой. Четырем подписям (легендам) сверху вниз соответствуют четыре кривые также сверху вниз: хуже всего по вероятности ошибки некогерентная ЧМ, лучше всего — когерентная ФМ.