Министерство образования Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра математики

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Руководство к выполнению лабораторных работ

РАЗРАБОТЧИК

Доцент каф. математики
_________ А.Л. Магазинников
« 10 » октября 2016 г.

2016

Лабораторная работа №1

Обратная матрица. Матричные уравнения

Рекомендуется изучить раздел «Обратная матрица. Решение матричных уравнений» в пособии Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова Высшая математика 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Рассмотрим примеры решения заданий.

Задание 1. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -28 \\ p \cdot x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 11 \end{cases}$$

Вводим матрицы $A(p) := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ p & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ $B := \begin{bmatrix} -28 \\ 16 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$

Находим общее решение $X(p) := A(p)^{-1} \cdot B$ $X(p) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-46}{(-47 + 12 \cdot p)} \\ \dfrac{(43 \cdot p - 224)}{(-47 + 12 \cdot p)} \\ 2 \cdot \dfrac{(41 \cdot p - 151)}{(-47 + 12 \cdot p)} \\ \dfrac{(40 \cdot p - 149)}{(-47 + 12 \cdot p)} \end{bmatrix}$ (Упрощаем если нужно командой symplify)

Проверяем решение подстановкой $A(p) \cdot X(p) \rightarrow \begin{bmatrix} -28 \\ 16 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$

Находим значение параметра p, при котором определитель равен нулю $|A(p)|$ solve, p $\rightarrow \dfrac{47}{12}$

Задание 2. . Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 19 \\ 35 & 24 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вводим матрицы $A := \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ $B := \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ $C := \begin{bmatrix} -15 & 19 \\ 35 & 24 \end{bmatrix}$

Набираем матрицу X с неизвестными коэффициентами $X := \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{bmatrix}$

Перемножая матрицы, находим коэффициенты при неизвестных в системе

$$A\cdot\begin{bmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{bmatrix}\cdot B \to \begin{bmatrix} -x3 + 5\cdot x2 & -3\cdot x2 - x4 + 2\cdot x1 \\ -5\cdot x1 + x3 + 5\cdot x4 & -5\cdot x2 - 2\cdot x4 + 2\cdot x3 \end{bmatrix}$$

Составляем матрицу коэффициентов при неизвестных $M := \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Столбец свободных членов (матрица C) $N := \begin{bmatrix} -15 \\ 19 \\ 35 \\ 24 \end{bmatrix}$

Находим неизвестные $X := M^{-1}\cdot N$ $X = \begin{bmatrix} 55 \\ 16 \\ 95 \\ 43 \end{bmatrix}$ Получен ответ $X := \begin{bmatrix} 55 & 16 \\ 95 & 43 \end{bmatrix}$

Проверка подстановкой $A\cdot X - X\cdot B - C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Задания

Вариант 1.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 31 \\ p \cdot x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 56 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 34 & 26 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 2.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -15 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ -5x_1 + p \cdot x_2 + 4x_3 - x_4 = -8 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & -18 \\ -4 & 26 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 3.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ p \cdot x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 36 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 48 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 4.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 5 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} p \cdot x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 31 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & -32 \\ 17 & 20 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 5.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -5 & -3 & 4 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ p \cdot x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 15 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 36 & 38 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 6.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + p \cdot x_4 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 35 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -47 & -48 \\ -23 & -29 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 7.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -11 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -21 \\ -2x_1 + 3x_2 + p \cdot x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -48 & -4 \\ 35 & 11 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Вариант 8.

Задание 1. Найдите матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Проверьте выполнение равенства $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 2. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте решение подстановкой.

Задание 3. Найдите общее решение системы уравнений с параметром p (выразить неизвестные через параметр p). Проверить решение подстановкой. Найти значение параметра p, при котором система не имеет решений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + p \cdot x_4 = 15 \end{cases}$$

Задание 4. Найдите матрицу X из уравнения $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -37 & 22 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$. Проверьте решение подстановкой.

Лабораторная работа №2

Решение матричных уравнений

Рекомендуется изучить раздел «Обратная матрица. Решение матричных уравнений» в пособии Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова Высшая математика 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Рассмотрим примеры решения заданий.

Задание 1. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 16 \\ 7x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases}$$

Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных и столбец свободных членов

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -9 & -8 & 5 \\ 7 & 7 & 12 & 12 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Командой augment объединяем эти матрицы и получаем расширенную матрицу

$$D := \mathrm{augment}(A, B) \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & -9 & -8 & 5 & 16 \\ 7 & 7 & 12 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

Находим ранги матриц A и D $\mathrm{rank}(A) = 2 \quad \mathrm{rank}(D) = 2$

По теореме Кронекера-Капелли делаем вывод, что система неопределённая.

Применяем команду rref и приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$R := \mathrm{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & -9 & -8 & 5 & 16 \\ 7 & 7 & 12 & 12 & 2 \end{bmatrix}\right) \qquad R \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{11}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

По матрице R определяем x3 и x4 как свободные неизвестные, а x1 и x2 как главные. Обозначаем свободные неизвестные буквами p1 и p2 и записываем общее решение, перенося свободные неизвестные в правую часть уравнений.

$$X(p1,p2) := \begin{bmatrix} \frac{10}{7} - \frac{4}{7} \cdot p1 - \frac{11}{7} \cdot p2 \\ \frac{-8}{7} - \frac{8}{7} \cdot p1 - \frac{1}{7} \cdot p2 \\ p1 \\ p2 \end{bmatrix}$$

Проверяем полученный ответ подстановкой в систему $A \cdot X(p1,p2) \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$

Задание 2. Найти значение параметра p, при котором система

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ p \cdot x + 5y + 15z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой.

Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных $A(p) := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ p & 5 & 15 \end{bmatrix}$

Расширенную матрицу получим добавляя нулевой столбец. $D(p) := \text{augment}\left[A(p), \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$

Находим значение параметра p, при котором определитель матрицы равен нулю

$|A(p)|$ solve, p $\rightarrow 8$

Решаем неопределённую систему при p = 8 при помощи команды rref.

$D(8) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 15 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 15 & 0 \end{bmatrix}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Берём свободную неизвестную z = 1, тогда x = -5/3, y = -1/3.

Записываем решение столбцом. $X := \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ Проверим ответ подстановкой

$$A(8) \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Задания

Вариант 1.

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 36 \\ 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -38 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -10 \end{cases}$$
Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 4 \\ 7x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 7x_5 = 5 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$$

<u>Вариант 2.</u>

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 32 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -42 \\ -5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 11 \\ -5x_1 - 9x_2 + 11x_3 + 8x_4 - 10x_5 = 18 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 8z = 0 \end{cases}$

<u>Вариант 3.</u>

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} -5x_1+2x_2+3x_3+4x_4=18 \\ -5x_1+2x_2-x_3-5x_4=-21 \\ x_1-2x_2-5x_3-5x_4=-39 \\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4=6 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_5=-3 \\ 3x_1-2x_3+x_4+x_5=-1 \\ -2x_1+3x_2+x_3+2x_4-2x_5=4 \\ 2x_1-6x_2+6x_3-4x_4-3x_5=-11 \\ -3x_1-x_2+11x_3-x_4-9x_5=-5 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой. $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ -2x+2y-z=0 \\ p\cdot x+5y+8z=0 \end{cases}$

Вариант 4.

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} -5x_1-5x_2+2x_3+3x_4=-17 \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=29 \\ -2x_1+4x_2+2x_3+x_4=18 \\ -2x_1-2x_2-2x_3+4x_4=-18 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4+x_5=2 \\ -3x_1+10x_2-8x_3-x_4-5x_5=-1 \\ 11x_1-2x_2-x_3+8x_4+x_5=8 \\ -5x_1+14x_2-11x_3-2x_4-7x_5=-2 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ -2x+2y-z=0 \\ p\cdot x-y-7z=0 \end{cases}$$

Вариант 5.

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 36 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 48 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 15x_4 - 2x_5 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 14x_4 - 10x_5 = 12 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой. $\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - y - 10z = 0 \end{cases}$

<u>Вариант 6.</u>

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} -2x_1-5x_2+x_3+3x_4=-12 \\ 3x_1-x_2-5x_3+4x_4=16 \\ -x_1-x_2+3x_3+3x_4=18 \\ -x_1+x_2-5x_3-5x_4=-44 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3+x_4+3x_5=1 \\ x_1-3x_2+3x_3+2x_4+x_5=-2 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5=-5 \\ -x_1+3x_2+4x_3+x_4+2x_5=2 \\ 10x_1-7x_3-2x_4+8x_5=3 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой. $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ p\cdot x-5y-7z=0 \end{cases}$

Вариант 7.

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 35 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 7x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 5x_5 = 8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 + 13x_4 + x_5 = 1 \\ 10x_1 - 6x_2 - 11x_3 - x_4 - 7x_5 = 11 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой. $\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 5x - 7y + p \cdot z = 0 \end{cases}$

Вариант 8.

Задание 1. При помощи команды lsolve решить систему $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 31 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 56 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Проверить решение подстановкой.

Задание 2. Исследовать систему на совместность и определённость. Для этого найти ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов при неизвестных при помощи команды rank и сравнить. Убедившись, что система неопределённая, привести расширенную матрицу к ступенчатому виду командой rref. По ступенчатой матрице определить свободные и главные неизвестные. Обозначить свободные неизвестные какими-либо буквами-параметрами и выразить все неизвестные через параметры, взяв коэффициенты из ступенчатой матрицы. Записать общее решение в виде столбца с параметрами. Проверить общее решение подстановкой.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 7x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 10x_5 = 16 \end{cases}$$

Задание 3. Найти значение параметра p, при котором система имеет ненулевые решения. При этом значении p найти решение, в котором одна из неизвестных равна 1. Проверить решение подстановкой. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 8z = 0 \end{cases}$

Лабораторная работа №3

Векторы. Прямые и плоскости

Рекомендуется изучить разделы «Алгебра геометрических векторов», «Прямая и линия на плоскости», «Прямая в пространстве» в пособии Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинникова Высшая математика 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Рассмотрим примеры решения заданий.

Решение задания 1. Даны два вектора $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти их длины $\left|\overline{a}\right|$, $\left|\overline{b}\right|$; сумму $\overline{a}+\overline{b}$; линейную комбинацию $2\overline{a}-3\overline{b}$; скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$; векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$; угол φ (в градусах) между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|a| \to \sqrt{29} \qquad |b| \to \sqrt{3} \qquad a+b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad 2a-3b = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad a\cdot b = -5 \qquad a\times b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{acos}\left(\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}\right)\cdot\frac{180}{\pi} = 122.416$$

Решение задания 2. Найдите координаты вектора $\overline{a} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ в базисе $\begin{pmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{pmatrix}$, если он задан в базисе $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{8}{9}e_3 \\ e_2' = -8e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

$$a := \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{8}{9} \\ -8 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

По условию задачи имеют место равенства

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad e' = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{bmatrix} \quad e' = A \cdot e \quad e = A^{-1} \cdot e' \quad a = a^T \cdot e = a^T \cdot A^{-1} \cdot e'$$

Тогда координаты вектора **a** в новом базисе можно найти по формуле:

$$a^T \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -45 & -12 & 42 \end{bmatrix}$$

<u>Решение задания 3</u>. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $x + 2y + 2z + 2 = 0,\ 2x - y + 2z - 16 = 0$.

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{acos}\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 44.195$$

<u>Решение задания 4</u>. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ и плоскости $x + 3y + 5z - 42 = 0$.

$x(t) := 2\,t + 2 \qquad y(t) := 2 - t \qquad z(t) := 3\,t + 4 \qquad F(x, y, z) := x + 3\,y + 5\,z - 42$

$F(x(t), y(t), z(t))\ \text{solve}, t \ \rightarrow 1$

$x(1) = 4 \qquad y(1) = 1 \qquad z(1) = 7$

<u>Решение задания 5</u>. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(1 \quad 1 \quad -1),\ B(2 \quad 3 \quad 1),\ C(3 \quad 2 \quad 1),\ D(5 \quad 9 \quad -8)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

$$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$AB := B - A \qquad AC := C - A \qquad AD := D - A$

$$S := \frac{|AB \times AC|}{2} \qquad V := \frac{|(AB \times AC) \cdot AD|}{6} \qquad h := \frac{3\,V}{S}$$

$V = 7.5 \qquad S = 2.062 \qquad h = 10.914$

Задания

Вариант 1.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-1 \quad 2 \quad 1)$ и $\bar{b} = (2 \quad 1 \quad -1)$.
Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$; сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$;
скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$; векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (6 \quad -1 \quad 3)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y + 5z - 16 = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$ и плоскости $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(1 \quad 3 \quad 6)$, $B(2 \quad 2 \quad 1)$, $C(-1 \quad 0 \quad 1)$, $D(-4 \quad 6 \quad -3)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 2.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-1 \quad 2 \quad 3)$ и $\bar{b} = (2 \quad 1 \quad -1)$. Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$;
сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$; скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$;
векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (1 \quad 2 \quad 4)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_2' = 1.5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $x - 3y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$ и плоскости $x + 2y - 5z + 20 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(-4 \quad 2 \quad 6)$, $B(2 \quad -3 \quad 0)$, $C(-10 \quad 5 \quad 8)$, $D(-5 \quad 2 \quad -4)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 3.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (3 \quad 2 \quad 1)$ и $\bar{b} = (1 \quad 1 \quad -1)$.
Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$; сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$;
скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$; векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (1 \quad 3 \quad 6)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3 \\ e_2' = \frac{4}{3}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0,\ x - 4y - z + 9 = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ и плоскости $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(7 \quad 2 \quad 4),\ B(7 \quad -1 \quad -2),\ C(3 \quad 3 \quad 1),\ D(-4 \quad 2 \quad 1)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 4.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-1 \quad 2 \quad 0)$ и $\bar{b} = (2 \quad 2 \quad -1)$. Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$;
сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$; скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$;
векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (2 \quad 4 \quad 1)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e_2' = 3e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями
$3x - y + 2z + 15 = 0,\ 5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$ и плоскости $2x - y + 4z = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(2 \quad 1 \quad 4),\ B(-1 \quad 5 \quad -2),\ C(-7 \quad -3 \quad 2),\ D(-6 \quad -3 \quad 6)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 5.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-2 \quad 2 \quad 1)$ и $\bar{b} = (2 \quad -1 \quad -1)$.
Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$; сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$;
скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$; векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (8 \quad 4 \quad 1)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3 \\ e_2' = 5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $2x + 3y + z + 6 = 0,\ x - 3y - 2z + 3 = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$ и плоскости
$3x + y - 5z - 12 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(-1 \quad -5 \quad 2)$, $B(-6 \quad 0 \quad -3)$, $C(3 \quad 6 \quad -3)$, $D(-10 \quad 6 \quad 7)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 6.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-1 \quad 2 \quad -3)$ и $\bar{b} = (2 \quad -2 \quad -1)$. Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$;
сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$; скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$;
векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (1 \quad 4 \quad 8)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3 \\ e_2' = \frac{5}{4}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $3x + y - z - 6 = 0,\ 3x - y + 2z = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскости
$x + 3y - 5z + 9 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(0 \quad -1 \quad -1)$, $B(-2 \quad 3 \quad 5)$, $C(1 \quad -5 \quad -9)$, $D(-1 \quad -6 \quad 3)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 7.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-1 \quad 4 \quad 1)$ и $\bar{b} = (2 \quad 1 \quad -2)$.
Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$; сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$;
скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$; векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (2 \quad 5 \quad 10)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3 \\ e_2' = \frac{6}{5}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями $3y - z = 0,\ 2y + z = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ и плоскости $x - 2y + 5z + 17 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(5 \quad 2 \quad 0),\ B(2 \quad 5 \quad 0),\ C(1 \quad 2 \quad 4),\ D(-1 \quad 1 \quad 1)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 8.

Задание 1. Даны два вектора $\bar{a} = (-1 \quad -2 \quad 1)$ и $\bar{b} = (-2 \quad 1 \quad -1)$. Найти их длины $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$;
сумму $\bar{a} + \bar{b}$; линейную комбинацию $2\bar{a} - 3\bar{b}$; скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$;
векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$;
угол φ (в градусах) между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (10 \quad 5 \quad 1)$ в базисе $(e_1' \quad e_2' \quad e_3')$, если он задан в базисе $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$, а старый и новый базисы связаны соотношениями $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3 \\ e_2' = 6e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$.

Задание 3. Найдите угол (в градусах) между плоскостями
$3x + 4y - 2z + 1 = 0,\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-4}{1}$ и плоскости $x - 2y + 4z - 19 = 0$.

Задание 5. Найти объём, площадь основания ABC и высоту пирамиды с вершинами в точках $A(2 \quad -1 \quad -2),\ B(1 \quad 2 \quad 1),\ C(5 \quad 0 \quad -6),\ D(-10 \quad 9 \quad -7)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

Лабораторная работа №4

Исследование точек разрыва функций и построение графиков

Рекомендуется изучить раздел «Непрерывность функции в точке» пособия Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников Дифференциальное исчисление.

Цель работы: классификация точек разрыва сложных функций и построение графиков с помощью стандартных графопостроителей.

Рассмотрим пример.

Укажите и охарактеризуйте все точки разрыва функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4}+\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-4}$$

Функция $y=\operatorname{arctg}\varphi(x)$ непрерывна во всех точках, в которых непрерывна функция $\varphi(x)$ по теореме о непрерывности сложной функции. В нашем случае $\varphi(x)=\dfrac{5}{(x-7)^4}$. Функция $\varphi(x)$ имеет разрыв только в точке $x_1 = 7$. Поэтому функция $f_1(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-7)^4}$ может иметь разрыв только в точке $x_1 = 7$.

Напомним, что $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases}-(x-2),\ \textit{если}\ x<2,\\ (x-2),\ \textit{если}\ x\ge 2.\end{cases}$

Функция $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-4}$ представляет собой отношение двух непрерывных функций. Она может иметь разрыв только в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. при $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$. Таким образом, точками, подозрительными на разрыв, являются точки $x_1 = 7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

- Исследуем точку $x_1 = 7$.

Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=+\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{5}{(x-7)^4}=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to 7+0}\operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-7)^4}=\lim\limits_{x\to 7-0}\operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-7)^4}=+\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, точка $x_1 = 7$ является точкой устранимого разрыва.

- Исследуем точку $x_2 = -2$.

Находим левый и правый пределы:

$$\lim_{x\to-2\pm0}f(x)=\lim_{x\to-2\pm0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4}+\frac{|x-2|}{(x-2)(x+2)}\right]=\mp\infty.$$

Следовательно, точка $x_2 = -2$ является точкой разрыва второго рода.

- Исследуем точку $x_3 = 2$.

Находим правый предел:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4} + \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right] = \lim_{x\to 2+0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4} + \frac{1}{x+2}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{5}{(2-7)^4} + \frac{1}{2+2} = 0{,}258$$

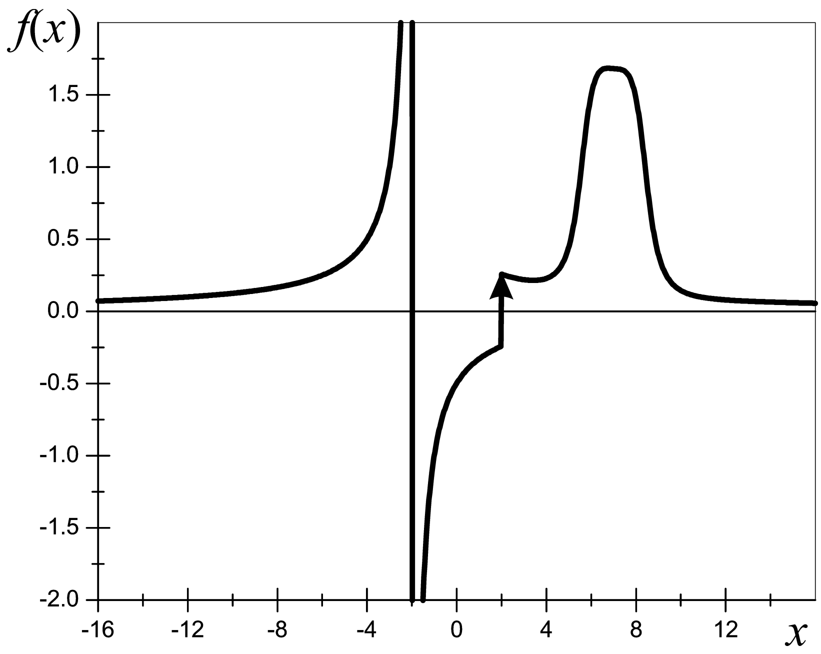
Находим левый предел:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4} + \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right] = \lim_{x\to 2-0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4} - \frac{1}{x+2}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{5}{(2-7)^4} - \frac{1}{2+2} = -0{,}242$$

Так как существуют конечные правые и левые пределы $f(2-0)$ и $f(2+0)$, но они не равны, то точка $x = 2$ является точкой разрыва первого рода.

Строим график указанной функции.



Задание. Укажите и охарактеризуйте все точки разрыва следующих функций. Постройте графики.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-3)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9}$	1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{19}{(x-9)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-9)^2}}{x^2-81}$
2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{(x-9)^3}+\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$	2. $f(x)=\dfrac{\sin(x+4)}{(x+10)(x-14)}+\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-7}$
3. $f(x)=\dfrac{\sin(x-17)}{(x-17)(x-18)}+\dfrac{\ln[1+(x-2)]}{\lvert x-2\rvert}$	3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^5}{x-5}+\dfrac{x^2-64}{(x-19)\sqrt{(x-8)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-7}{(x-14)(x-17)}$	4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-4)(x-18)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{x^2-4}, & \textit{если } x\le 4;\\ \dfrac{e^x-e^6}{x^2-36}, & \textit{если } x>4\end{cases}$	5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+6}{x^2-36}, & \textit{если } x\le 7;\\ \dfrac{\sin(x-14)}{(x-14)(x+28)}, & \textit{если } x>7\end{cases}$
ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-3)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9}$	1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{6}{(x-4)^2}+\dfrac{\sin\lvert x-5\rvert}{x^2-25}$
2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-3)^2}+\dfrac{\sin\lvert x-6\rvert}{x^2-36}$	2. $f(x)=\dfrac{\sin(x-14)}{(x-14)(x-17)}+\dfrac{\ln[1+(x-9)]}{\lvert x-9\rvert}$
3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^8}{x-8}+\dfrac{x^2-4}{(x+15)\sqrt{(x+2)^2}}$	3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^2}{x-2}+\dfrac{x^2-36}{(x+5)\sqrt{(x-6)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-6}{(x-14)(x-12)}$	4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-4}{(x-5)(x-17)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4}, & \textit{если } x\le 14;\\ \dfrac{\sin(x-18)}{(x-18)(x+36)}, & \textit{если } x>14\end{cases}$	5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2-25}, & \textit{если } x\le 3;\\ \dfrac{e^x-e^7}{x^2-49}, & \textit{если } x>3\end{cases}$

ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{11}{(x-6)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-9)^2}}{x^2-81}$ 2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{15}{(x-7)^3}+\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$ 3. $f(x)=\dfrac{\sin(x-18)}{(x-18)(x-16)}+\dfrac{\ln[1+(x-9)]}{\vert x-9\vert}$ 4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-6}{(x-7)(x-19)}$ 5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-10}{x^2-49},\ \textit{если}\ x\le 10;\\ \dfrac{e^x-e^8}{x^2-64},\ \textit{если}\ x>10\end{cases}$	1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{6}{(x-6)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9}$ 2. $f(x)=\dfrac{\sin(x-15)}{(x-15)(x-5)}+\dfrac{\ln[1+(x+14)]}{\vert x+14\vert}$ 3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-18}}{x+18}+\dfrac{x^2-400}{(x-5)\sqrt{(x+20)^2}}$ 4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-4}{(x-5)(x-3)}$ 5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+9}{x^2-81},\ \textit{если}\ x\le 8;\\ \dfrac{\sin(x-6)}{(x-6)(x+12)},\ \textit{если}\ x>8\end{cases}$
ВАРИАНТ 7	ВАРИАНТ 8
1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{(x-15)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-8)^2}}{x^2-64}$ 2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{10}{(x-14)^3}+\dfrac{\sin(x-7)}{x^2-49}$ 3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-16}}{x+16}+\dfrac{x^2-324}{(x-6)\sqrt{(x+18)^2}}$ 4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-12}{(x-15)(x-16)}$ 5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2-25},\ \textit{если}\ x\le 3;\\ \dfrac{e^x-e^7}{x^2-49},\ \textit{если}\ x>3\end{cases}$	1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{(x-16)^2}+\dfrac{\sin\vert x-5\vert}{x^2-25}$ 2. $f(x)=\dfrac{\sin(x+6)}{(x+6)(x+5)}+\dfrac{\ln[1+(x+12)]}{\vert x+12\vert}$ 3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{13}}{x-13}+\dfrac{x^2-361}{(x+14)\sqrt{(x-19)^2}}$ 4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-12}{(x-15)(x-16)}$ 5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-6}{x^2-64},\ \textit{если}\ x\le 6;\\ \dfrac{e^x-e^3}{x^2-9},\ \textit{если}\ x>6\end{cases}$

Лабораторная работа №5

Проверка сходимости числовых рядов

Рекомендуется изучить раздел «Числовые ряды» в пособии Л.И. Магазинников Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования.

Цель работы: численное и аналитическое исследование сходимости числовых рядов.

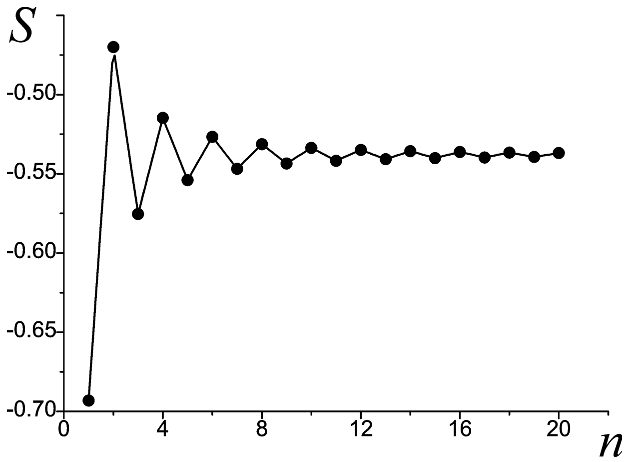
Рассмотрим пример.

Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

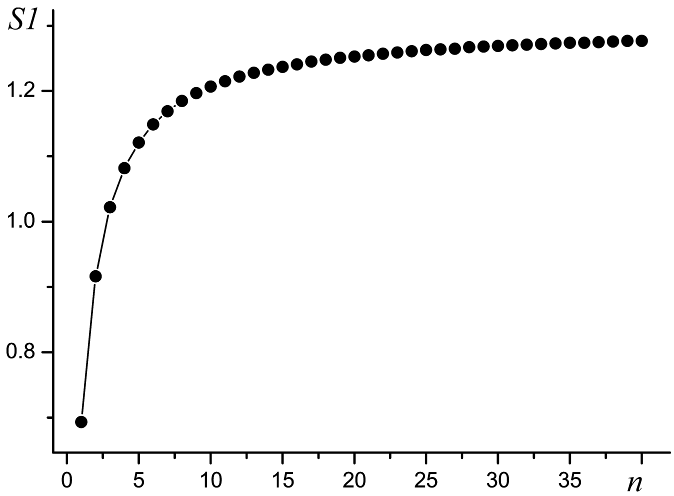
Численное исследование сходимости.

Посмотрим, как ведёт себя частичная сумма. Подсчитаем частичные суммы *S* и построим графики зависимости частичных сумм *S* от количества слагаемых *n*.



Частичная сумма стремится к постоянному конечному значению. Выдвигаем предположение, что ряд сходится.

Поскольку ряд знакочередующийся, исследуем его на условную и абсолютную сходимость. Для этого подсчитаем частичные суммы *S1* ряда (1), составленного из модулей.



С увеличением n частичная сумма *S1* стремится к некоторому постоянному конечному значению (при необходимости, число слагаемых n можно изменить). Выдвигаем предположение, что ряд (1) сходится абсолютно.

Аналитическое исследование сходимости.

Сравним ряд (1) со следующим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}. \tag{2}$$

По признаку Лейбница ряд (2) сходится.

Ряд, составленный из модулей членов ряда (2), сходится, как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ (здесь $s=2$).

Таким образом, ряд (1) сходится абсолютно.

Задание.

1. Составить программу для подсчёта частичных сумм числовых рядов.
2. Используя рассмотренный выше пример, протестировать программу.
3. Численно и аналитически исследовать на сходимость следующие числовые ряды. Если ряд знакопеременный, указать, сходится условно, абсолютно, либо расходится.

Вариант 1 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{1}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{3^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!(3^n+1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$	Вариант 2 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\arcsin\frac{1}{n^4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n^2+4)\cdot 2^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$
Вариант 3 1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n-1)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{n!}$	Вариант 4 1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n\cdot(n^3+4)}{(n+2)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+6}\right)^{n^2}$
Вариант 5 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n+\ln n}}$	Вариант 6 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n\sqrt{n}+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n-4}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+4)!}{10^n\cdot n^3}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{n^2}$
Вариант 7 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot(n+1)!}{(2n)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)}{\ln(n+4)}$	Вариант 8 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{n^2}}{(n+1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)^2}{2^n}$

Лабораторная работа №6

Построение графиков частичных сумм ряда Фурье

Рекомендуется изучить раздел «Ряды Фурье» в пособии Л.И. Магазинников Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования.

Цель работы:
1) изучение правил разложения функций в тригонометрический ряд Фурье;
2) построение графиков частичных сумм.

Рассмотрим пример.

Функцию $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } -2<x<0,\\ x, \text{ если } 0\le x\le 2\end{cases}$ разложить в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–2, 2].

Решение.

Определяем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2-\frac{1}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{1}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

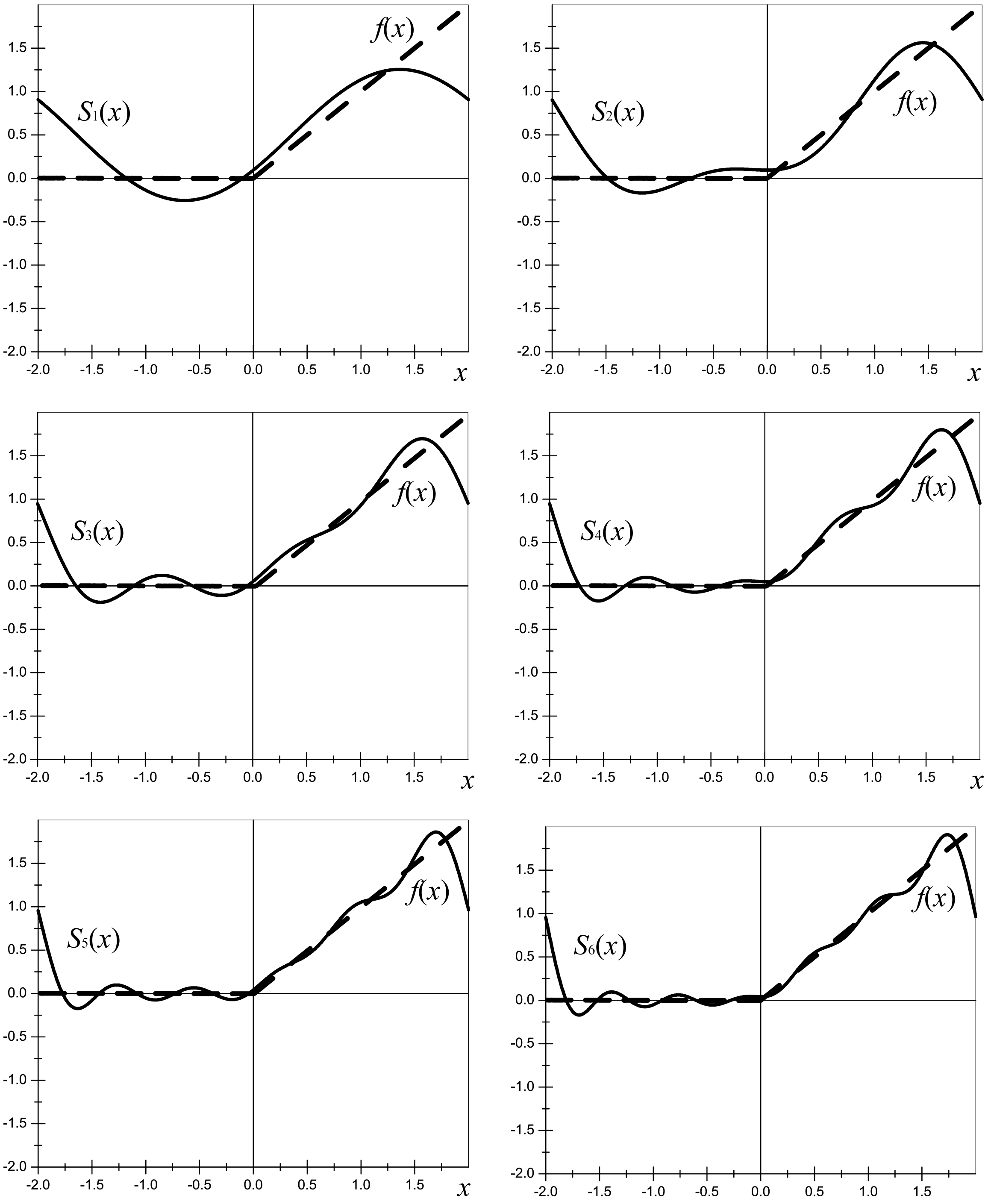
$$=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi},\ n=1,2,\ldots$$

Заметим, что $a_{2m}=0$, $a_{2m-1}=-\dfrac{4}{(2m-1)^2\pi^2}$.

Мы нашли, что

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}.$$

Графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$, $S_5(x)$ и $S_6(x)$ изображены на рисунках. Обратите внимание, как при увеличении количества слагаемых n, частичные суммы стремятся к функции $f(x)$.



Задание. Следующие функции разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$, $S_5(x)$ и $S_6(x)$, а также график функции $f(x)$.

ВАРИАНТ 1 $f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если} -4<x\le -2, \\ \frac{2}{3}(x+2),\ \text{если} -2\le x<4. \end{cases}$	ВАРИАНТ 2 $f(x)=\begin{cases} x+2,\ \text{если} -2<x\le 0, \\ 2,\ \text{если}\ 0\le x<2. \end{cases}$
ВАРИАНТ 3 $f(x)=\begin{cases} -x,\ \text{если} -1<x<0, \\ 0,\ \text{если}\ 0\le x<1. \end{cases}$	ВАРИАНТ 4 $f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x\in(-4;0]\cup[1;4), \\ 2x,\ \text{если}\ x\in[0;1). \end{cases}$
ВАРИАНТ 5 $f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x\in(-2;-1]\cup[0;2], \\ -x,\ \text{если}\ x\in(-1;0]. \end{cases}$	ВАРИАНТ 6 $f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x\in(-4;0]\cup[2;4), \\ 2-x,\ \text{если}\ x\in(0;2]. \end{cases}$
ВАРИАНТ 7 $f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если} -2<x<0, \\ 2-x,\ \text{если}\ 0<x<2. \end{cases}$	ВАРИАНТ 8 $f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если} -2<x<1, \\ 2x-2,\ \text{если}\ 1\le x<2. \end{cases}$

Лабораторная работа №7

Численное решение дифференциальных уравнений

Рекомендуется изучить раздел «Уравнения высших порядков» в пособии А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения.

Цель работы: применение численного и аналитического методов решений линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример.

Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

$$y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

и находим его корни:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},\ k_1 = 2,\ k_2 = 3.$$

Записываем общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Определяем константы C_1 и C_2. Поскольку $y(0) = 1$, то: $C_1 + C_2 = 1$.

Находим производную $y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Поскольку $y'(0) = 0$, то: $2C_1 + 3C_2 = 0$.

Получаем систему двух уравнений

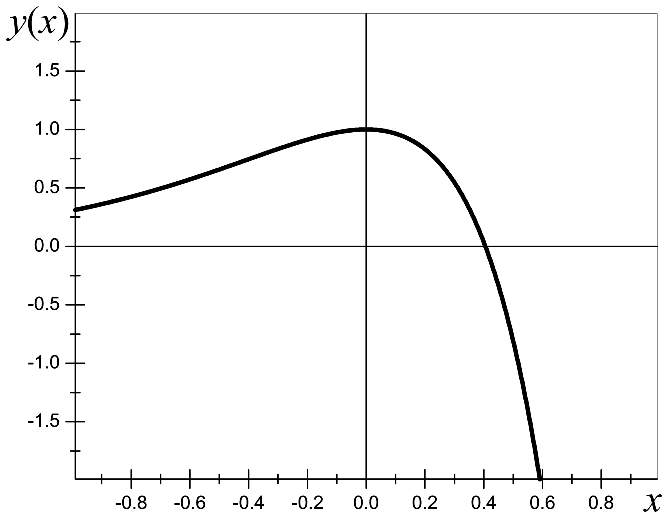
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0, \end{cases}$$

из которой $C_1 = 3$, $C_2 = -2$.

Записываем частное решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$$

Строим график зависимости $y(x)$:



Задание.

1. Составить программу для решения линейных дифференциальных уравнений.
2. Используя рассмотренный выше пример, протестировать программу.
3. Построить график получившейся зависимости $y(x)$. Сравнить графики численного и аналитического решений; сделать выводы.
4. Численно и аналитически решить следующие дифференциальные уравнения. Во всех примерах построить графики зависимостей $y(x)$. Сравнить графики численного и аналитического решений; сделать выводы.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x,$ $y'(0) = y(0) = 0$	1. $y'' + 9y = 6e^{3x},$ $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1,$ $y(0) = 2;\ y'(0) = 3$	2. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,$ $y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}$
3. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$	3. $y'' + 3y' - 4y = (x+2)e^x,$ $y'(0) = y(0) = 0$
4. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	4. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x},$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
1. $y'' - 4y' = 2xe^{4x},$ $y(0) = y'(0) = 0$	1. $y'' - 4y' = 4xe^{4x},$ $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x,$ $y'(0) = y(0) = 0$	2. $y'' + 4y = \sin x,$ $y'(0) = y(0) = 1$
3. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$	3. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}},$ $y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3$
4. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$	4. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos\frac{\pi}{x}},$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

<table>
<tr><td>

ВАРИАНТ 5

1. $2y'' + y' - y = 3xe^{x}$,
$y(0) = y'(0) = 0$

2. $y'' + y = 2\cos x$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

3. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$,
$y(0) = \ln 4,\ y'(0) = 3 - 3\ln 2$

4. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$,
$y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$

</td><td>

ВАРИАНТ 6

1. $y'' - y' - 6y = xe^{2x}$,
$y(0) = y'(0) = 0$

2. $y'' + 4y = 12\cos 2x$,
$y(0) = y'(0) = 0$

3. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1+e^{-2x}}$,
$y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 6\ln 2$

4. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$,
$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$

</td></tr>
<tr><td>

ВАРИАНТ 7

1. $y'' - 4y = xe^{2x}$,
$y(0) = y'(0) = 0$

2. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

3. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$,
$y(0) = 4\ln 4,\ y'(0) = 9\ln 4 - 3$

4. $y'' + 4y = 8\,\mathrm{ctg}\, 2x$,
$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$

</td><td>

ВАРИАНТ 8

1. $y'' + 4y = e^{-2x}$,
$y(0) = y'(0) = 1$

2. $y'' + y = x^3 + 1$,
$y(0) = y'(0) = 0$

3. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}(2 + e^{2x})$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

4. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

</td></tr>
</table>

Лабораторная работа №8

Классическое и геометрическое определения вероятности

Рекомендуется изучить раздел «Понятие вероятности события» пособия Л.И. Магазинников Высшая математика IV. Теория вероятностей.

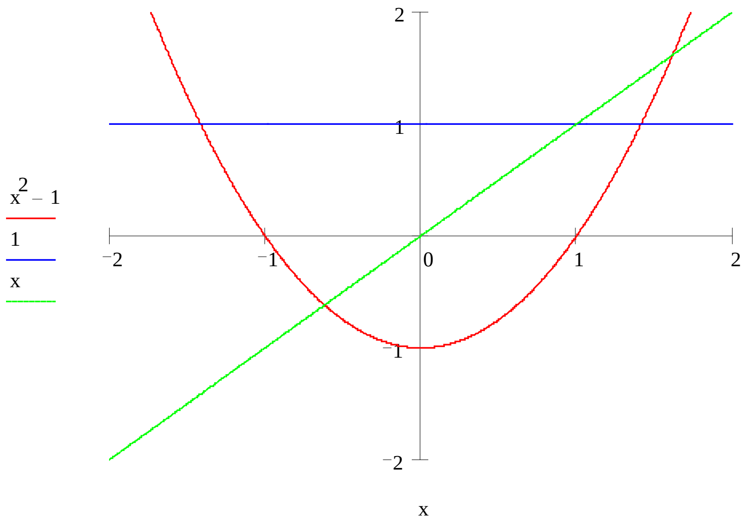
Рассмотрим примеры решения заданий.

Решение задания 1.
В урне содержится 250 чёрных и 50 белых шаров. Случайным образом вынимают 100 шаров. Найти вероятность, что среди них менее 20 белых шаров.

$$\frac{\sum_{k=0}^{19} \frac{50!}{k!\cdot(50-k)!}\cdot\frac{250!}{(100-k)!\cdot(150+k)!}}{\frac{300!}{100!\cdot 200!}} \rightarrow \frac{2527470293432633582244258552924038498764559}{3065315010846905062451250810583327197270998} = 0.825$$

Решение задания 2. Область D ограничена линиями $y = x^2 - 1$ и $y = 1$. Найти вероятность, что для точки упавшей в область D её координаты удовлетворяют неравенству $y > x$.

Сначала изобразим на графике области D и D1.



Находим точки пересечения линий

$$x^2 - 1 = 1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad x^2 - 1 = x \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

Для нахождения площади D1 интеграл берём по оси Y, поэтому выразим из уравнения параболы x через y.

$$x^2 - 1 = y \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{1+y} \\ -\sqrt{1+y} \end{bmatrix}$$

Находим площади областей D и D1.

$$SD1 := \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}}^{1} y - -\sqrt{1+y}\,dy \qquad SD1 = 2.037 \qquad SD := \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - \left(x^2 - 1\right) dx$$

$$SD = 3.771$$

Находим вероятность согласно геометрическому определению

$$P := \frac{SD1}{SD} \qquad P = 0.54021$$

Задания.

Вариант 1.

Задание 1. В урне содержится 60 чёрных и 40 белых шаров. Случайным образом вынимают 50 шаров. Найти вероятность, что среди них менее 20 белых шаров.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 2$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 < x0 + 1$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 2.

Задание 1. В урне содержится 70 чёрных и 50 белых шаров. Случайным образом вынимают 60 шаров. Найти вероятность, что среди них менее 20 белых шаров.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $x = y^2$ и $x = 2$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 < x0 - 1$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 3.

Задание 1. В урне содержится 40 чёрных и 70 белых шаров. Случайным образом вынимают 50 шаров. Найти вероятность, что среди них более 30 белых шаров.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $x = -y^2$ и $y = -2$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 < x0 + 1$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 4.

Задание 1. На складе лежали 200 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп не более 10 бракованных.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $y = x - x^2$ и $y = -1$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координата y0 точки M положительна.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 5.

Задание 1. На складе лежали 300 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп не более 20 бракованных.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $y = -x^2$ и $y = -2$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 > x0 - 1$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 6.

Задание 1. На складе лежали 300 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп более 30 бракованных.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $x = 2y^2$ и $x = 2$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 < x0 - 1$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 7.

Задание 1. На складе лежали 250 ламп, из которых 50 бракованных. На продажу взяли наудачу 100 ламп. Найдите вероятность, что среди взятых ламп более 20 бракованных.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности .

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $y = 1 - 2x^2$ и $y = -1$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 > x0$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Вариант 8.

Задание 1. В урне содержится 100 чёрных и 200 белых шаров. Случайным образом вынимают 60 шаров. Найти вероятность, что среди них более 50 белых шаров.

Указание: Найдите число всех исходов и число благоприятных исходов и примените классическое определение вероятности.

Задание 2. На плоскости задана область D, ограниченная линиями $x = -1 - y^2$ и $x = -3$. На область D наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что координаты x0 и y0 точки M удовлетворяют неравенству $y0 > x0 + 2$.

Указания: Сначала изобразите линии, ограничивающие область D. Затем на том же графике изобразите линию разбивающую область на 2 части D1 и D2 так, что в области D1 неравенство выполняется, а в области D2 нет. Далее, используя интегралы, найдите площади D и D1. Далее примените определение геометрической вероятности.

Лабораторная работа №9

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Рекомендуется изучить разделы «Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Формулы умножения вероятностей. Правило сложения вероятностей» в пособии Л.И. Магазинников Высшая математика IV. Теория вероятностей.

Рассмотрим пример решения задания.

Задание. Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.432, для 2-го 0.325, для 3-го 0.288. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй и третий по одному. Найти вероятность, что

1) нет ни одного попадания
2) имеется 4 попадания
3) имеется 1 попадание
4) имеется 2 попадания
5) имеется 3 попадания
6) хотя бы 1 попадание
7) первый стрелок попал хотя бы 1 раз
8) первый не попал ни разу, но имеется 1 попадание
9) третий попал и имеется 2 попадания
10) все стрелки хотя бы 1 раз промахнулись

Для решения первых 5 пунктов можно найти коэффициенты производящей функции (кто не знаком с понятием производящей функции решает задания непосредственно)

$$(p1 + q1\cdot x)^2\cdot(p2 + q2\cdot x)\cdot(p3 + q3\cdot x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{bmatrix} p1^2\cdot p2\cdot p3 \\ 2\cdot p3\cdot p1\cdot q1\cdot p2 + p3\cdot p1^2\cdot q2 + p1^2\cdot p2\cdot q3 \\ p3\cdot q1^2\cdot p2 + 2\cdot p3\cdot p1\cdot q1\cdot q2 + 2\cdot q3\cdot q1\cdot p1\cdot p2 + q3\cdot p1^2\cdot q2 \\ q1^2\cdot q2\cdot p3 + q3\cdot q1^2\cdot p2 + 2\cdot q3\cdot q1\cdot p1\cdot q2 \\ q1^2\cdot q2\cdot q3 \end{bmatrix}$$

Вводим данные

$p1 := 0.432 \qquad p2 := 0.325 \qquad p3 := 0.288 \qquad q1 := 1 - p1 \qquad q2 := 1 - p2 \qquad q3 := 1 - p3$

Находим вероятности первых пяти пунктов, набирая их непосредственно или копированием коэффициентов производящей функции.

$P1 := q1^2\cdot q2\cdot q3 \qquad P2 := p1^2\cdot p2\cdot p3 \qquad P3 := 2\cdot p1\cdot q1\cdot q2\cdot q3 + q1^2\cdot(p2\cdot q3 + q2\cdot p3)$

$P4 := p1^2\cdot q2\cdot q3 + q1^2\cdot p2\cdot p3 + 2\cdot p1\cdot q1\cdot(p2\cdot q3 + q2\cdot p3) \qquad P5 := 2\cdot q1\cdot p1\cdot p2\cdot p3 + p1^2\cdot(p2\cdot q3 + q2\cdot p3)$

Проверим, что их сумма равна 1.

$P1 + P2 + P3 + P4 + P5 = 1$

Находим остальные вероятности

$P6 := 1 - P1$ $\quad P7 := 1 - q1^2$ $\quad P8 := q1^2 \cdot (p2 \cdot q3 + q2 \cdot p3)$ $\quad P9 := p3 \cdot \left(2\ p1 \cdot q1 \cdot q2 + q1^2 \cdot p2\right)$
$P10 := 1 - P2$

Выводим ответы

$P1 = 0.155$ $\quad P2 = 0.017$ $\quad P3 = 0.373$ $\quad P4 = 0.329$ $\quad P5 = 0.125$ $\quad P6 = 0.845$ $\quad P7 = 0.677$ $\quad P8 = 0.137$
$P9 = 0.126$ $\quad P10 = 0.983$

Задания.

Вариант 1.

Задание. Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.231, для 2-го 0.421, для 3-го 0.312. Первый стрелок сделал 2 выстрела, второй и третий по одному. Найти вероятность, что

1) нет ни одного попадания
2) имеется 4 попадания
3) имеется 1 попадание
4) имеется 2 попадания
5) имеется 3 попадания
6) хотя бы 1 попадание
7) первый стрелок попал хотя бы 1 раз
8) первый не попал ни разу, но имеется 1 попадание
9) третий попал и имеется 2 попадания
10) все стрелки хотя бы 1 раз промахнулись

Вариант 2.

Задание. Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 60 вт, одну на 40 вт и одну на 25 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 60 вт равна 0.431, на 40 вт равна 0.354, на 25 вт равна 0.226. Найти вероятность, что за месяц

1. ни одна лампа не сгорит
2. сгорят все лампы
3. сгорит 1 лампа
4. сгорят 2 лампы
5. сгорят 3 лампы
6. сгорит хотя бы одна лампа
7. сгорит хотя бы одна лампа на 60 вт
8. все лампы на 60 вт уцелеют, но одна из ламп сгорит
9. сгорит лампа на 25 вт и ещё одна
10. сгорят более половины ламп

Вариант 3.

Задание. На работу случайным образом приняли четырёх гастарбайтеров: двух из Таджикистана, одного из Киргизии и одного из Узбекистана. Среди таджикских гастар-бай-теров водительские права имеют 12.7% , среди киргизских 21.56%, среди узбекских 28.35%. Найти вероятность, что среди принятых гастарбайтеров

1. никто не имеет водительских прав
2. все имеют водительские права
3. водительские права имеет 1 гастарбайтер
4. водительские права имеют 2 гастарбайтера
5. водительские права имеют 3 гастарбайтера
6. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
7. хотя бы один таджик имеет водительские права
8. ни один таджик не имеет прав, но один из оставшихся гастарбайтеров имеет права
9. права имеет киргиз и ещё один гастарбайтер
10. права имеют менее половины принятых гастарбайтеров

Вариант 4.

Задание. Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.338, для 2-го 0.223, для 3-го 0.411. Второй стрелок сделал 2 выстрела, первый и третий по одному. Найти вероятность, что

1) нет ни одного попадания
2) имеется 4 попадания
3) имеется 1 попадание
4) имеется 2 попадания
5) имеется 3 попадания
6) хотя бы 1 попадание
7) второй стрелок попал хотя бы 1 раз
8) второй не попал ни разу, но имеется 1 попадание
9) первый попал и имеется 2 попадания
10) все стрелки хотя бы 1 раз промахнулись

Вариант 5.

Задание. Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 40 вт, одну на 60 вт и одну на 25 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 40 вт равна 0.431, на 60 вт равна 0.504, на 25 вт равна 0.318. Найти вероятность, что за месяц

1. ни одна лампа не сгорит
2. сгорят все лампы
3. сгорит 1 лампа
4. сгорят 2 лампы
5. сгорят 3 лампы
6. сгорит хотя бы одна лампа
7. сгорит хотя бы одна лампа на 40 вт
8. все лампы на 40 вт уцелеют, но одна из ламп сгорит
9. сгорит лампа на 25 вт и ещё одна
10. сгорят менее половины ламп

Вариант 6.

Задание. На работу случайным образом приняли четырёх гастарбайтеров: одного из Таджикистана, двух из Киргизии и одного из Узбекистана. Среди таджикских гастарбайтеров водительские права имеют 18.7% , среди киргизских 23.51%, среди узбекских 25.34%. Найти вероятность, что среди принятых гастарбайтеров

1. никто не имеет водительских прав
2. все имеют водительские права
3. водительские права имеет 1 гастарбайтер
4. водительские права имеют 2 гастарбайтера
5. водительские права имеют 3 гастарбайтера
6. хотя бы один гастарбайтер имеет водительские права
7. хотя бы один киргиз имеет водительские права
8. ни один киргиз не имеет прав, но один из оставшихся гастарбайтеров имеет права
9. права имеет узбек и ещё один гастарбайтер
10. права имеют менее половины принятых гастарбайтеров

Вариант 7.

Задание. Три стрелка стреляют по цели. Вероятности попадания равны для 1-го стрелка 0.411, для 2-го 0.224, для 3-го 0.307. Третий стрелок сделал 2 выстрела, первый и второй по одному. Найти вероятность, что

1) нет ни одного попадания
2) имеется 4 попадания
3) имеется 1 попадание
4) имеется 2 попадания
5) имеется 3 попадания
6) хотя бы 1 попадание
7) третий стрелок попал хотя бы 1 раз
8) третий не попал ни разу, но имеется 1 попадание
9) второй попал и имеется 2 попадания
10) все стрелки хотя бы 1 раз промахнулись

Вариант 8.

Задание. Для освещения коридора установили 4 лампы: две на 25 вт, одну на 40 вт и одну на 60 вт. Вероятность, что в течение месяца сгорит лампа на 60 вт равна 0.531, на 40 вт равна 0.454, на 25 вт равна 0.322. Найти вероятность, что за месяц

1. ни одна лампа не сгорит
2. сгорят все лампы
3. сгорит 1 лампа
4. сгорят 2 лампы
5. сгорят 3 лампы
6. сгорит хотя бы одна лампа
7. сгорит хотя бы одна лампа на 25 вт
8. все лампы на 25 вт уцелеют, но одна из ламп сгорит
9. сгорит лампа на 40 вт и ещё одна
10. сгорят более половины ламп

Лабораторная работа №10

Числовые характеристики выборки. Гистограммы.

Рекомендуется изучить раздел «Элементы математической статистики» пособия Л.И. Магазинников Высшая математика IV. Теория вероятностей.

Рассмотрим примеры решения заданий.

Решение задания 1.

Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

$ORIGIN := 1$
Вводим строкой значения X X: = (заказываем одну строку и 50 столбцов и вводим все значения).
Обращаем X в столбец командой X: = X^T
Находим наименьшее и наибольшее значения $m := \min(X)$ $M := \max(X)$ $m = -1.901$
$M = 3.192$
Находим медиану $\mathrm{median}(X) = 1.027$ и выборочное среднее $MX := \mathrm{mean}(X)$ $MX = 0.959$
Находим выборочные дисперсию и среднеквадратическое отклонение
$DX := \mathrm{var}(X)$ $DX = 0.801$ $SX := \mathrm{stdev}(X)$ $SX = 0.895$
Находим уточнённые дисперсию и среднеквадратическое отклонение
$DX' := \mathrm{Var}(X)$ $DX' = 0.817$ $SX' := \mathrm{Stdev}(X)$ $SX' = 0.904$

Решение задания 2

Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 6 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Находим выражение для предполагаемой плотности $p(x) := \mathrm{dnorm}(x, MX, SX')$
Заказываем число интервалов гистограммы $n := 6$
Вычисляем шаг (отступаем на 0.25 шага влево от наименьшего и вправо от наибольшего значений X)

$$h := \frac{M - m}{2\,n^2}\cdot(2\,n + 1)$$

Находим границы интервалов

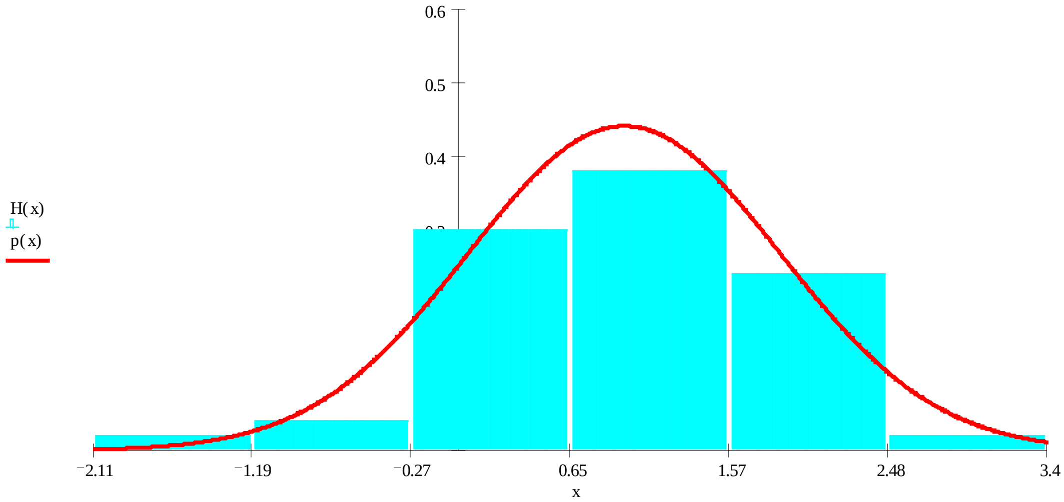
$$G_1 := \left(1 + \frac{1}{4\,n}\right)\cdot m - \frac{M}{4\,n} \qquad i := 2..\,n + 1 \qquad G_i := G_1 + (i - 1)\cdot h$$

Чтобы гистограмма выглядела лучше, устанавливаем зазор между столбиками $\delta := \frac{h}{70}$.

Для большей наглядности изображения гистограммы составляем функцию для неё, используя панель программирования. Составляем процедуру, вызывая с панели программирования блок-черту addline и операторы присвоения ←, цикла for, условный оператор if

$$H(x) := \left| \begin{array}{l} H \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad H \leftarrow \dfrac{\text{hist}(G, X)_i}{50} \text{ if } G_i + \delta < x < G_{i+1} - \delta \\ H \end{array} \right.$$

Строим графики гистограммы и кривой плотности распределения. Назначаем через format для гистограммы тип линии bar, цвет голубой, кривую плотности делаем красной толщины 2. Число по оси X слева можно поставить G_1, справа G_7, количество чисел на оси X ставим 6. Границы и количество чисел по оси У устанавливаем после появления графика.



Задания

Вариант 1.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	0.122	-0.359	0.053	-0.903	-2.371	1.087	0.759	2.113	5.384	2.617	2.97

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	2.724	2.831	2.346	-1.089	1.138	-0.511	2.393	0.636	-0.289	-0.446	-0.033	2.116	0.51

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	1.179	3.524	-0.411	1.004	3.215	2.785	-4.802	-3.314	1.412	-0.232	-1.395	1.198	2.542

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	1.612	1.023	-0.529	0.182	-0.348	0.736	3.036	1.361	2.027	2.48	0.967	1.558	1.324

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 6 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 2.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	0.643	-0.713	-1.043	4.572	-0.43	-1.92	1.139	-0.589	-1.805	-1.555	-0.029

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	0.048	0.397	0.737	0.357	-1.027	-2.422	2.117	1.457	-1.734	0.216	2.546	-0.48	-3.047

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	-2.117	-1.988	-0.776	0.093	-0.894	-0.496	0.809	0.328	0.608	-1.734	-1.658	-1.655	-0.611

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	-1.97	-4.261	1.914	1.187	0.214	-1.509	-1.39	-1.317	0.417	-0.603	1.953	-2.067	0.57

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 5 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 3.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	0.938	2.26	-0.147	1.051	2.046	-1.322	1.808	-0.549	0.959	-0.552	-0.742

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	0.924	-1.417	0.376	0.913	1.966	-0.729	0.115	0.976	0.686	0.696	1.021	1.323	1.431

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	1.397	0.76	-0.193	0.966	0.349	-0.363	2.614	-0.736	-1.194	0.886	-0.929	0.089	1.374

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	-0.069	-0.41	-0.368	1.597	-0.523	-0.752	1.125	-0.238	1.041	1.164	1.02	0.646	0.449

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 6 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 4.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	2.316	2.249	1.829	1.547	2.294	2.151	1.066	2.793	2.716	3.044	2.811

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	2.617	1.755	1.914	2.685	2.791	2.358	1.789	1.844	2.136	2.864	3.958	2.069	2.565

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	2.557	3.891	3.479	-0.294	2.662	1.559	1.526	2.089	1.301	2.347	1.125	3.9	-0.726

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	2.87	4.179	3.085	3.176	1.029	0.424	2.464	3.474	3.165	1.237	2.509	2.496	1.198

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 7 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 5.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	1.236	1.302	1.489	1.382	2.026	1.464	1.554	2.961	1.975	3.678	0.394

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	1.871	2.178	3.265	2.358	0.255	0.565	3.956	2.46	1.798	1.039	0.884	0.332	0.852

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	2.804	2.651	2.484	0.845	1.428	3.246	1.821	1.502	1.389	2.157	2.247	1.729	1.875

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	2.18	1.105	1.679	0.483	1.982	3.313	0.983	2.508	1.687	0.794	2.451	2.062	1.006

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 6 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 6.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	-4.267	-2.319	-3.054	-1.187	-2.417	-1.588	1.494	1.209	-1.066	-3.996	0.949

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	-5.813	-0.886	-3.126	-1.994	-1.615	-0.888	0.259	1.868	-1.616	-1.624	-2.581	-1.453	-1.014

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	-0.696	-2.353	-0.969	-1.113	-2.688	-0.591	-0.934	-3.471	0.142	0.428	-5.595	-2.793	-2.209

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	1.241	1.726	-2.003	-1.004	-0.658	-0.042	-0.458	-1.338	-0.895	-2.11	0.215	-2.095	-1.4

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 5 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 7.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	-0.028	-0.698	-0.033	-1.084	-0.157	-0.402	-0.077	2.043	-0.187	-0.663	1.143

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	1.57	-1.86	1.445	-1.499	-1.78	-0.719	-0.314	0.67	-0.349	-1.99	-0.128	0.341	0.837

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	1.84	-0.832	0.066	-1.528	-3.215	1.715	-0.646	-2.264	-2.064	0.173	0.519	-1.198	1.868

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	0.614	1.456	0.48	-1.622	1.092	-1.505	-0.134	-0.489	-1.258	-2.129	0.318	0.672	-0.359

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 6 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Вариант 8.

По результатам 50 наблюдений над случайной величиной X получена таблица

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение X	4.848	2.896	2.26	-0.985	1.096	5.162	2.655	2.437	5.242	3.461	3.066

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	1.883	3.825	1.658	1.06	4.475	-0.217	2.094	1.834	2.429	4.285	4.333	1.378	0.577

№	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
X	1.759	0.816	4.409	3.157	4.032	5.137	2.924	4.108	6.047	-0.296	2.047	3.438	2.516

№	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X	3.412	4.349	3.462	2.136	2.181	5.722	1.031	2.254	0.554	2.202	-1.089	5.441	0.93

Задание1 . Найдите числовые характеристики величины X: наибольшее и наименьшее значения, выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, уточнённую дсперсию и уточнённое среднеквадратическое отклонение.
При вычислении характеристик используйте функции max, min, median, mean, var, stdev, Var, Stdev.

Задание2. Для данной выборки постройте гистограмму относительных частот с 5 интервалами. При построении гистограммы используйте функцию hist. Вместе с гистограммой изобразите кривую плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным среднему выборочному и среднеквадратическим отклонением равным выборочному уточнённому среднеквадратическому отклонению. Для получения выражения плотности используйте функцию dnorm.

Лабораторная работа №11

Проверка статистических гипотез

Рекомендуется изучить раздел «Элементы математической статистики» пособия Л.И. Магазинников Высшая математика IV. Теория вероятностей.

Рассмотрим примеры решения заданий.

Решение задания 1

Вводим данные

$X := (37.99\ \ 37.73\ \ 38.27\ \ 39.42\ \ 38.58\ \ 38.91\ \ 39.14\ \ 38.38\ \ 38.68\ \ 38.56\ \ 38.83\ \ 37.92\ \ 37.7\ \ 41.45\ \ 38.11\ \ 37.12\ \ 39.16\ \ 38.01\ \ 37.2\ \ 37.36)$

$M := 38 \qquad N := 20 \qquad P := 0.95 \qquad X := X^T$

Находим числовые характеристики $MX := \mathrm{mean}(X) \quad DX := \mathrm{Var}(X) \qquad MX = 38.426$

Конкурирующая гипотеза: M[X] больше M

Наблюдаемое значение критерия Стьюдента: $Tnabl := \dfrac{MX - M}{DX} \cdot \sqrt{N} \qquad Tnabl = 2.035$

Табличное значение критерия Стьюдента: $Ttabl := qt(P, N-1) \qquad Ttabl = 1.729$

Так как Tnabl > Ttabl, то принимается конкурирующая гипотеза.

Решение задания 2

Вводим данные

$X := (27.21\ \ 27.38\ \ 27.82\ \ 28.48\ \ 27.34\ \ 27.64\ \ 27.63\ \ 28.43\ \ 28.19\ \ 25.92\ \ 27.7\ \ 27.04\ \ 27.02\ \ 27.35\ \ 26.88\ \ 27.51\ \ 26.78\ \ 28.44)$

$Y := (26.21\ \ 27.65\ \ 28.17\ \ 27.73\ \ 27.77\ \ 26.91\ \ 26.67\ \ 27.49\ \ 27.89\ \ 27.77\ \ 26.99\ \ 27.5\ \ 27.5\ \ 26.98\ \ 27.05\ \ 27.08\ \ 27.16\ \ 27.11)$

$Y := Y^T \qquad X := X^T \qquad n1 := 18 \qquad n2 := 18$

Находим числовые характеристики $DX := \mathrm{Var}(X) \qquad DY := \mathrm{Var}(Y) \qquad DX = 0.432 \qquad DY = 0.239$

$P := 0.94$

Конкурирующая гипотеза: D[X] больше D[Y]

Наблюдаемое значение критерия Фишера: $Fnabl := \dfrac{DX}{DY} \qquad Fnabl = 1.806$

Табличное значение критерия $Ftabl := qF(P, n1-1, n2-1) \qquad Ftabl = 2.17$

Так как Fnabl < Ftabl, то принимается нулевая гипотеза.

Задания

Вариант 1.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 35мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

36.2	35.9	36.1	34.5	34.5	34.6	35.2	34.3	32.8	36.9	36.4	35.8	34.6	34.7	34.8	35.9	35.3	37	34.3	36.0

С доверительной вероятностью 0.95 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 35 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий больше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 16 изделий первого станка и 18 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

12.6	12.2	11.8	13.0	12.4	12.0	12.1	12.6	12.7	12.3	13.0	12.7	12.9	12.7	12.2	12.9

Для второго станка

12.5	12.3	13.1	13.3	11.8	13.2	12.0	11.9	12.3	12.5	12.9	12.5	11.8	12.5	12.7	12.9	13.4	12.3

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.95. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что первый станок точнее второго.

Вариант 2.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 40 мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

40.9	37.7	38.9	39.6	39.1	39.6	40.0	39.6	38.9	38.9	40.7	38.4	39.0	38.1	39	37.3	40.6	38.3	37.3	38.2

С доверительной вероятностью 0.98 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 40 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий меньше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 17 изделий первого станка и 16 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

23.1	22.8	22.6	20.4	21.4	22.5	21.4	22.3	22.3	22.0	21.4	22.9	23.0	22.6	21.6	22.5	22.8

Для второго станка

22.3	23.3	22.2	23.2	22.9	23.1	22.5	23.1	22.6	23.2	22.3	22.3	22.0	21.9	23.0	22.7

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.93. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что второй станок точнее первого.

Вариант 3.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 32 мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

31.6	31.4	31	31.4	33.1	33.0	32.9	31.4	31.9	33.5	32.3	32.0	31.9	32.6	32.7	32.2	32.3	32.6	31.6	32.1

С доверительной вероятностью 0.96 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 32 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий больше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 18 изделий первого станка и 19 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

43.0	43.3	42.6	43.5	42.7	42.5	41.2	42.0	43.6	42.6	42.5	43.7	42.9	42.8	42.3	43.1	42.2	42.0

Для второго станка

43.5	41.1	42.3	42.2	42.5	43.4	43.4	41.9	41.5	42.1	41.7	43.5	42.8	43.3	43.8	42.7	43.3	44.3	41.1

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.94. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что первый станок точнее второго.

Вариант 4.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 28 мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

27.3	27.4	27.9	27.6	29.1	27.8	28.0	31.1	28.9	32.7	25.4	28.7	29.4	31.8	29.8	25.1	25.8	33.3	30.0	28.5

С доверительной вероятностью 0.95 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 28 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий больше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 18 изделий первого станка и 18 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

32.7	32.3	32.5	31.9	33.1	31.9	32.3	32.8	32.3	32.8	31.9	32.7	32.5	32.8	34.5	32.7	32.3	33.8

Для второго станка

32.0	32.5	32.5	31.8	32.7	32.5	31.5	33.0	33.1	30.7	31.8	32.0	33.4	33.6	32.1	32.5	32.7	32.9

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.94. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что станки разной точности.

Вариант 5.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 50 мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

49.5	49.5	46.7	47.2	49.1	48.7	51.2	46.1	50.5	48.9	49.3	50.4	47.2	48.5	49.4	48.8	50.1	46.5	51.2	46.2

С доверительной вероятностью 0.97 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 50 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий меньше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 19 изделий первого станка и 19 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

23.4	23.2	21.7	23.0	22.3	22.5	22.8	21.9	22.6	22.5	23.2	23.2	22.7	22.2	23.5	22.3	24.2	21.4	24.0

Для второго станка

25.1	22.5	22.1	23.3	23.0	22.8	19.9	23.2	22.6	23.5	20.8	22.0	22.6	22.5	23.9	21.4	22.8	21.1	23.7

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.96. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что первый станок точнее второго.

Вариант 6.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 45мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

44.1	44.2	44.6	45.0	44.6	43.0	41.4	46.6	45.8	42.2	44.4	47.0	43.6	40.7	41.8	41.9	43.3	44.3	43.1	43.6

С доверительной вероятностью 0.94 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 45 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий меньше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 17 изделий первого станка и 17 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

21.3	28.5	31.1	28.9	29.1	24.8	23.6	27.7	29.7	29.1	25.2	27.8	27.7	25.2	25.5	25.6	26.1

Для второго станка

26.9	27.6	28.7	26.8	27.3	27.3	28.6	28.2	24.5	27.4	26.3	26.3	26.8	26.1	27.1	25.9	28.7

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.95. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что второй станок точнее первого.

Вариант 7.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 25мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

22.7	25.7	25.5	25.2	22.7	23.6	26.4	24.2	23.7	23.5	24.7	24.8	24.0	24.3	24.7	23.1	24.0	22.1	24.4	26.5

С доверительной вероятностью 0.92 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 25 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий меньше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 18 изделий первого станка и 18 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

33.6	35.3	36.0	37.6	35.9	33.2	36.3	37.1	37.9	39.6	35.1	36.6	34.0	31.2	39.4	35.4	32.7	33.1

Для второго станка

36.6	36.9	35.4	38.0	37	37.7	36.8	35.1	37.3	35.2	36.3	36.0	35.4	34.7	36.7	37.0	36.1	37.3

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.97. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что второй станок точнее первого.

Вариант 8.

Задание1 . Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 21 мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

21.8	21.6	21.7	20.8	20.8	20.8	21.2	20.7	19.8	22.2	21.9	21.5	20.9	20.9	20.9	21.6	21.2	22.2	20.6	21.7

С доверительной вероятностью 0.95 проверьте гипотезу о равенстве размера изделий проектному размеру 21 мм. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что размер изготавливаемых изделий больше проектного.

Задание2. Для сравнения точности двух станков, изготавливающих изделия одного и того же размера, произведены измерения 19 изделий первого станка и 18 изделий второго станка и получены результаты:

Для первого станка

41.7	39.5	42.9	42.8	43.4	43.0	42.6	40.9	41.2	42.7	42.9	42.1	40.9	41.0	41.6	43.1	45.3	41.5	42.5

Для второго станка

41.9	43.2	42.8	39.1	42.0	40.9	40.9	41.4	40.7	41.7	40.5	43.3	38.6	42.2	43.5	42.4	42.5	40.4

Проверьте гипотезу об одинаковой точности станков при доверительной вероятности 0.96. В качестве конкурирующей гипотезы возьмите предположение, что второй станок точнее первого.