Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика

Учебное пособие
(курс лекций)

2-й семестр
Часть 2

для специальности:
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
(группа 445)

Томск
ТУСУР
2016

Электронное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ в группе 445 весной 2016 года.

Во второй половине 2 семестра, согласно рабочей программе, на специальности 09.03.03 изучаются следующие темы:

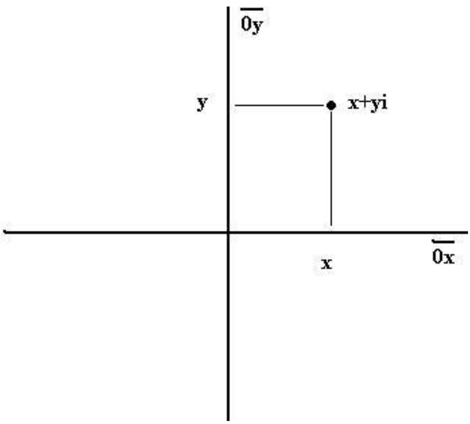
1. Основы комплексных чисел.
2. Числовые и функциональные ряды.
3. Степенные ряды, ряды Тейлора и Лорана.
4. Ряды Фурье.

Глава 3. Ряды
§ 0. Комплексные числа.

При изучении числовых систем в школе становится привычным понятие «действительная ось», «действительные» («вещественные») числа. Но эта система чисел является неполной, так как не содержит корни некоторых, казалось бы, простых уравнений, например $x^2+1=0$. Если у квадратичного уравнения $ax^2+bx+c=0$ отрицательный дискриминант, то есть $b^2-4ac<0$, то на действительной оси нет ни одного корня уравнения. Однако существует система условных, обобщённых чисел, где и такие уравнения тоже имеют решения. Они называются комплексными числами и геометрически соответствуют точкам на плоскости, а известная ранее действительная ось - это горизонтальная ось Ox в данной плоскости. Введено абстрактное понятие «мнимая единица» $i=\sqrt{-1}$ обозначающая «квадратный корень из минус 1». При этом получается $i^2=-1$.

Геометрическая интерпретация. На плоскости, горизонтальная ось отождествляется со множеством действительных чисел, а мнимая ось, содержащая $i=\sqrt{-1}$, перпендикулярна оси действительных чисел.

Но ведь и множество отрицательных чисел тоже когда-то в прошлом считали абстракцией, потому что они не отражают никакое реальное количество объектов.



$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Комплексные числа - ещё более абстрактное обобщение. Оно полезно при решении различных физических задач. Плоскость комплексных чисел есть расширение множества действительных чисел. Каждой точке на плоскости с координатами (x, y) можно поставить в соответствие комплексное число, состоящее из действительной и мнимой части: $z = x + iy$. Проекция на действительную и мнимую ось называются действительной частью и мнимой частью комплексного числа. $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Если $y = 0$, то число $x + 0i = x$ это обычное действительное число.

Сложение и вычитание комплексных чисел определяется покоординатно, как для обычных векторов в плоскости.

$(a+bi)+(c+di) = a+c+bi+di = (a+c)+(b+d)i$.

Для вычитания аналогично: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$.

Умножение.

$(a+bi)(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2$, учитывая тот факт, что $i^2 = -1$, получаем $ac-bd+bci+adi = (ac-bd)+(bc+ad)i$.

Таким образом, после раскрытия скобок, надо просто учесть $i^2 = -1$ и привести подобные.

Пример. $(1+i)(2+i) = 2+i+2i+i^2 = 1+3i$.

Для числа $z = x+iy$, число $\bar{z} = x-iy$ называется сопряжённым.

Умножим два взаимно сопряжённых комплексных числа:

$(x+iy)(x-iy) = x^2+ixy-ixy+i^2y^2 = x^2+y^2$, получилось действительное число.

ЛЕКЦИЯ № 9. 22. 04. 2016

Мы заметили, что при умножении на сопряжённое мнимая часть станет 0, и получается действительное число. Этот факт можно использовать для процедуры деления. Если домножить на сопряжённое в знаменателе, то там получится действительное число, и это даст возможность разбить на сумму двух дробей. При этом, конечно, в числителе тоже домножаем на сопряжённое к знаменателю, чтобы дробь не изменилась.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd+bci-adi}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Пример. Вычислить $\frac{2+i}{1+i}$.

$$\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2+i-2i-i^2}{1+i-i-i^2}=\frac{2+i-2i+1}{1+i-i+1}=\frac{3-i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

Поиск корней многочлена 2 степени при D < 0.

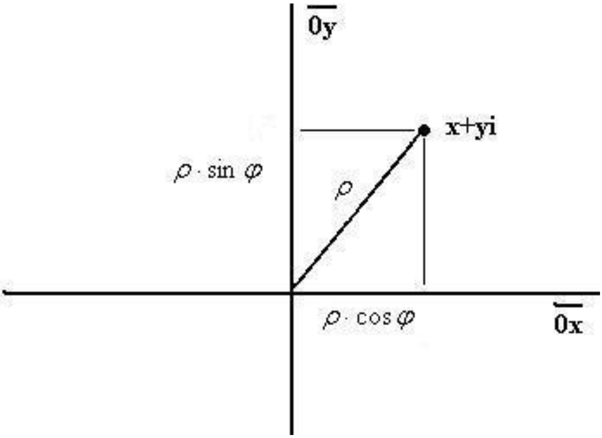
Пример. Решить уравнение $x^2+x+1=0$. $D=b^2-4ac=-3<0$.
Теперь можно вычислить 2 корня, правда, они не на действительной прямой:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Как видим, 2 корня получились взаимно сопряжённые, то есть вида $a\pm bi$, так как в выражении было $\pm\sqrt{D}$, где D отрицательно. Для многочлена с отрицательным дискриминантом всегда получаются 2 взаимно сопряжённых корня.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Введём величину $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ тогда x, y можно представить в таком виде: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ для некоторого φ, ведь геометрически в этом случае x, y - катеты прямоугольного треугольника, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ - его гипотенуза.



Абсцисса и ордината точки (x, y) на плоскости это проекции на оси, они равны $\rho \cdot \cos\varphi$ и $\rho \cdot \sin\varphi$ соответственно. Кстати, эти величины ρ и φ называются полярными координатами точки на плоскости.
Если записать комплексное число $x+iy$ с помощью введённых выше величин ρ и φ, получим:

$$x+iy=\rho\cdot\cos\varphi+i\cdot\rho\cdot\sin\varphi = \rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi).$$

Выражение $z=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа, φ - его аргументом, ρ - модулем.

$$\varphi=\arg(z) \quad \rho=|z|.$$

Понятие модуля не противоречит известному понятию, применявшемуся раньше для отрицательных чисел: и там, и здесь модуль - есть расстояние по кратчайшей линии до начала координат.
Для любой точки $x+iy$ модуль вычисляется как $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Для вычисления аргумента верна формула $\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ если точка в 4-й и 1-й четверти, либо $\varphi=\pi+arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, если во 2-й и 3-й четверти. Это связано с тем, что период тангенса равен π, график этой функции непрерывен на интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Число $1+i$ запишется в виде $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Число i соответствует $1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Если вычислить синус и косинус, то снова перейдём к обычной, «алгебраической» форме числа:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+i.$$

Действительное число имеет аргумент 0 (если оно положительно) или π (если оно отрицательно).

Угол может определяться разными способами, так, например, вместо угла $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ во всех вычислениях для комплексных чисел в тригонометрической форме можно использовать $\varphi=-\frac{5\pi}{4}$, и это не будет ошибкой, так как тригонометрические функции повторяются через промежуток 2π.

Показательная форма комплексного числа.

Известна формула Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, таким образом, выражение $z=\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ может быть записано в виде $z=\rho e^{i\varphi}$.

Так, например, мнимой единице соответствует аргумент $\frac{\pi}{2}$ и модуль 1, поэтому запись в тригонометрической и показательной формах такова:

$$i=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1e^{i\pi/2}.$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Умножение и деление в тригонометрической и показательной форме.

Умножение, и особенно деление комплексных чисел чаще всего бывает легче выполнять в тригонометрической форме, чем в алгебраической, так как для деления не нужно домножать на сопряжённое в знаменателе.

В показательной форме.

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$$

В тригонометрической форме:

$$\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Доказательство формулы :

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\ \rho_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2) =$$

$$\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2) =$$

$$\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Здесь были использованы известные тригонометрические формулы косинуса суммы и синуса суммы.

Таким образом, для умножения двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, достаточно просто умножить их модули и сложить аргументы.

Формула деления двух комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Для деления двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, нужно поделить их модули и вычесть аргументы.

Заметим, что при умножении на мнимую единицу i, а именно при действии $(a+bi)i = -b+ai$, фактически вектор (a,b) на плоскости переходит в $(-b, a)$, то есть как раз и прибавляется аргумент числа i, то есть 90 ^{0}.

Пример. Поделить $\frac{i}{1+i}$.

$$\frac{1e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

В качестве домашнего задания, можно это выполнить и с помощью умножения на сопряжённое, чтобы повторить ранее изученный алгоритм.

Решение: $\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-i^2+i}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

Формула Муавра, степень. Корни.

Если умножали бы в тригонометрической форме не два разных числа, а одно и то же число $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, то получилось бы: $\rho\rho(\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi))$, то есть $z^2 = \rho^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$.

Таким же образом можно умножить z в третий раз и снова в аргументе прибавится φ, а модуль снова умножится на ρ. Таким образом, по индукции доказывается, что

$$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Эта формула называется **формулой Муавра** и позволяет не перемножать множество скобок, если требуется вычислить большую степень числа, а вычислить её по формуле.

И снова можно сказать, что ещё легче возводить в степень с помощью показательной формы числа:

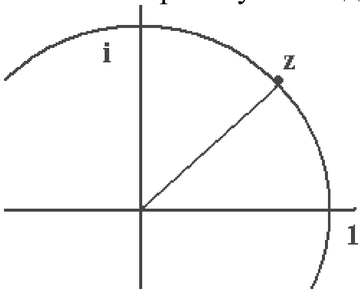
$$z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

Пример. Найти $(1+i)^8$.

Вычислим модуль и аргумент. $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, соответствующая точка расположена в первой четверти на пересечении биссектрисы угла и единичной окружности.



По формуле Муавра, $\sqrt{2}^8\left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

$= 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16$.

В показательной форме: $\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\right)^8 = 16\cdot e^{2\pi i} = 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16$

.

Корень порядка n вычисляется по такой формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Доказательство.

Если возведём в степень n, получим

$$\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = z.$$

Добавка $\frac{2\pi k}{n}$ после возведения в степень станет кратной 2π, то есть точка, отстоящие на угол $\frac{2\pi}{n}$, просто опишет один лишний оборот вокруг начала координат, то есть в аргументу добавится 360 градусов, и придёт в ту же точку, что и без $\frac{2\pi k}{n}$.

Пример. Найдите все значения корня $\sqrt[3]{8i}$.

Сначала представим комплексное число, которое находится под знаком корня, в тригонометрической форме.

Точка расположена на мнимой оси выше начала координат, поэтому аргумент $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, модуль $\rho = |8i| = 8$.

Теперь находим все 3 корня.

$$\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right) \quad \text{при k = 0,1,2.}$$

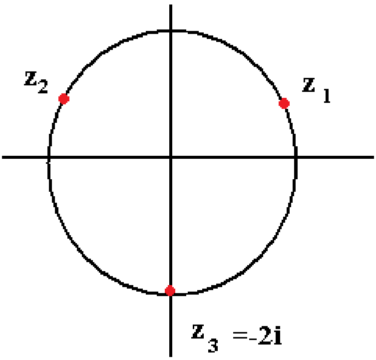
$2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi k \right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi k \right) \right)$, отсюда:

1) $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6} \right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{3} + i$

2) $z_2 = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} \right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} \right) \right) = -\sqrt{3} + i$

3) $z_3 = 2\left(\cos\left(\dfrac{9\pi}{6} \right) + i\sin\left(\dfrac{9\pi}{6} \right) \right) = -2i$

Чертёж:



Если к исходному углу добавить 120 градусов, то для куба этого числа добавится 360 градусов, и результат будет точно такой же. С этим фактом как раз и связано наличие лишнего слагаемого $\frac{2\pi k}{n}$ в формуле.

Квадратных корней два, а именно $\pm\sqrt{a}$. Это происходит по той же причине: если число было положительным, то его аргумент был 0, и тогда по формуле $\sqrt{z} = \sqrt{a}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{2} + i\sin\frac{0+2\pi k}{2}\right)$ то есть $\sqrt{a}(cos\pi k + i\sin\pi k) = \sqrt{a}((-1)^k + i0) = (-1)^k\sqrt{a}$, что и соответствует $\pm\sqrt{a}$ при $k=0$ и $k=1$. К аргументу прибавляется по 360 / 2 = 180 градусов.

Корни квадратные из отрицательного числа имеют вид $\pm i\sqrt{a}$.Там аргумент корня имеет вид $\frac{\pi+2\pi k}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то есть 90 и 270 градусов соответственно.

Обобщённые синус и косинус для комплексного аргумента.

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ и $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Рассмотрим при действительном значении $z = x + i0$, и докажем, что это на самом деле обобщения тех тригонометрических функций.

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2}$ по свойствам чётности и нечётности, получается

$\frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)}{2} = \frac{2\cos x}{2} = \cos x$.

Для синуса, аналогично было бы

$\frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)}{2i} = \frac{2i\sin x}{2i} = \sin x$.

При отступлении в сторону от действительной прямой, значения косинуса и синуса могут быть и больше 1 по модулю, т.е. область значений вовсе не отрезок $[-1,1]$, например $\cos(5i) > 1$.

$$\cos 5i = \frac{e^{i5i} + e^{-i5i}}{2} = \frac{e^{-5} + e^{5}}{2} > \frac{e^{5}}{2} > 1.$$

Эти функции в комплексной плоскости являются неограниченными.

Логарифм комплексного числа.

$Ln(z) = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)$ $(\forall k \in Z)$.

Доказательство формулы $Ln(z) = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)$.

$$e^{Ln(z)} = e^{\ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)} \Rightarrow z = \rho\, e^{i(\varphi + 2\pi k)} =$$

$$z = \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = z$$

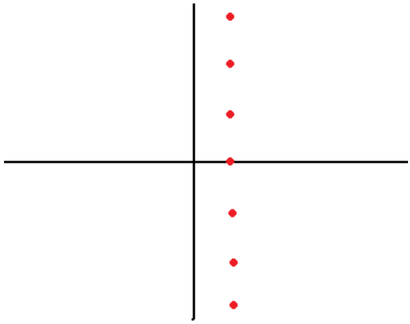
так как синус и косинус не зависят от прибавления угла, кратного 2π.

А это равенство уже очевидно, так как это и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

Таким образом, логарифм существует для всех точек в плоскости, за исключением нуля. Для действительного положительного числа, аргумент равен 0, поэтому это бесконечное множество точек имеет вид $\ln \rho + i(0 + 2\pi k)$, то есть одно из значений, а именно, при $k = 0$, попадёт на действительную ось. Если вычислять логарифм отрицательного числа, то получим $\ln \rho + i(\pi + 2\pi k)$, то есть набор точек сдвинут вверх и ни одна из них не попадает на действительную ось.

Из формулы видно, что только при нулевом аргументе исходного числа одно из значений логарифма попадает на действительную ось. А это соответствует правой полуоси, и именно поэтому в курсе школьной математики рассматривали только логарифмы положительных чисел. Логарифмы отрицательных и мнимых чисел также существуют, но у них нет ни одного значения на действительной оси.

На следующем чертеже показано, где в плоскости расположены все значения логарифма положительного числа. Одно из них на действительной оси, остальные выше и ниже на 2π, 4π, 6π и так далее. Для отрицательного или комплексного числа, аргумент φ отличен от нуля, поэтому происходит сдвиг этой последовательности точек по вертикали, в результате чего на действительной оси не будет ни одной точки.



Пример. Вычислить $Ln(-2)$.

Решение. Определим модуль числа (равен 2) и аргумент 180^0 , то есть π . Тогда $Ln(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k)$.

Пример. Вычислить $Ln(i)$**.**

По формуле, $Ln(z) = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)$,таким образом

$$Ln(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

В обучающем видео (по ссылке) показано, как движутся точки в комплексной плоскости, являющиеся значениями логарифма, при изменении модуля или аргумента:

http://www.youtube.com/watch?v=LKFFn-TSLd0

Разложение функции f(z) в виде u+iv.

Если вычислить функцию, подставляя $z = x + iy$, то можно затем отделить действительную и мнимую часть, и образовать выражение u+iv, состоящее из так называемой действительной и мнимой части функции. u(x,y) = Re(f), v(x,y) = Im(f).

Пример. $f(z) = z^2$.

$(x+iy)(x+iy) = x^2 + ixy + iyx + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

После раскрытия скобок, мы собрали в отдельное слагаемое те части, в которых нет i, и те, в которых есть i, тем самым выделили действительную и мнимую часть функции.

Таким образом, для отображения из плоскости в плоскость верно: $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$.

Рассмотрим функцию e^{rx} если r комплексное число.

$e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$.

то есть здесь действительная и мнимая часть - как раз те самые функции, которые входят в ФСР при наличии комплексных корней.

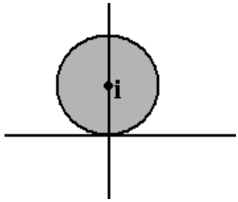
Кстати, далеко не любые две компоненты могут являться частями какой-то комплексной функции. Они должны быть согласованы между собой. Более того, с помощью одной из них можно восстановить вторую часть.

Области в комплексной плоскости и неравенства, задающие их.

$|z| = R$ - окружность радиуса R вокруг начала координат.

Пример. $|z - i| < 1$ это круг радиуса 1 вокруг точки i. Это неравенство задаёт следующее условние: удаление числа z от фиксированного числа i не превышает 1. Можно непосредственно преобразовать в уравнение круга в плоскости: $|z - i| < 1 \Rightarrow |(x + iy) - i| < 1$

$\Rightarrow |x+i(y-1)|<1 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}<1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2<1$ а это уравнение круга, центр которого в точке (0,1), то есть как раз в точке i. Чертёж:



Пример. $|z-1-i|<2 \Rightarrow |z-(1+i)|<2$ это круг радиуса 2 с центром в точке $1+i$, то есть точке (1,1) в плоскости.

Пример. Множество $1<|z-i|<2$ это кольцо вокруг точки i.

§ 1. Числовые ряды.

Пусть дана последовательность $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Можно образовать бесконечную сумму: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Такая сумма называется рядом.

Если суммировать до какого-то номера n, то получается «частичная сумма» $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. Часть, которая следует после слагаемого с номером n при этом называется остатком ряда. $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

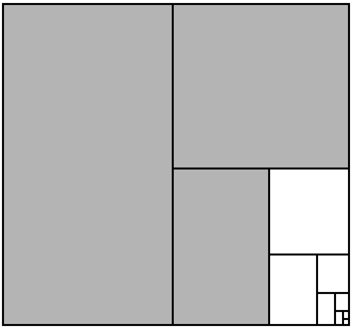
Если сумма ряда обозначена S, то: $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S-S_n$.

Для каждого ряда существует последовательность частичных сумм: $\{S_1, S_2, ..., S_n, ...\}$ ведь мы можем произвести конечное суммирование от 1-го до 1-го, затем от 1-го до 2-го, от 1-го до 3-го и так далее, и так для каждого n. Если сходится последовательность частичных сумм, то есть она имеет конечный предел, то и соответствующий ряд называется сходящимся рядом.

Сходимость ряда эквивалентна сходимости любого из его остатков. Действительно, если отбросить какое-то конечное число членов ряда, то оставшиеся можно пронумеровать снова, начиная с 1-го номера, и получается новый бесконечный ряд, а то что отняли, есть конечная сумма чисел $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$, то есть конечное число. С другой стороны, это следует из того, что предел последовательности частичных сумм также можно считать начиная с любого номера: если есть предел, то неважно, начиная с какого элемента мы начинаем рассматривать последовательность, предел всё равно получается точно такой же.
Более подробное определение сходимости с помощью ε:

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n \in N$, что абсолютная величина остатка ряда (после этого элемента) будет меньше, чем ε.

Смысл: начиная с некоторого номера, сумма оставшихся элементов меньше любой заранее заданной погрешности, это и означает, что ряд сходится, а частичные суммы стабилизируются при $n \to \infty$.
Пример. Рассмотрим убывающую геометрическую прогрессию - кстати, прогрессия это один из важных частных случаев ряда.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ Геометрическая интерпретация: возьмём квадрат



Если закрасить половину, затем четверть квадрата, и каждый раз половину того, что осталось до целого, то мы никогда не превысим площадь квадрата, а закрашенная площадь будет приближаться к 1. Известна формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. В данном случае $S = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Для погрешности $\varepsilon = 0{,}01$ найдём такой элемент, что частичная сумма отклоняется от суммы прогрессии менее чем на $\varepsilon = 0{,}01$, то есть остаток меньше $\varepsilon = 0{,}01$.

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{128} + \ldots$ После 7-го элемента, $\dfrac{1}{256} + \dfrac{1}{512} + \ldots$ то есть для остатка, который тоже есть геометрическая прогрессия,

$S - S_7 = \dfrac{1/256}{1-1/2} = \dfrac{1/256}{1/2} = 1/128 < 0{,}01$. Таким образом, после 7-го элемента, частичные суммы отклоняются от суммы менее чем на $\varepsilon = 0{,}01$.

Теорема 1. Необходимый признак сходимости.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_n \to 0$.

Доказательство. Так как остаток ряда стремится к нулю, то есть сумма

$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ по модулю меньше чем ε, то одно первое слагаемое из остатка - тем более, меньше чем ε. Получается, что при росте номера $|a_n| \to 0$, а значит и общий член ряда уменьшается к нулю, $a_n \to 0$.

Замечание. Это необходимый, а не достаточный признак! Т.е. если $a_n \to 0$, это ещё не всегда означает, что ряд сходящийся, а вот если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, то есть такие ряды даже не надо исследовать, про них сразу же известно, что сходимости нет.

Сейчас мы увидим пример, где слагаемые стремятся к 0, а сходимости всё же нет.

Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

Доказательство его расходимости.

Возьмём сумму от элемента номер n+1 до 2n. Докажем, что она больше 1/2, то есть для произвольного ε, невозможно сделать её меньше, чем ε.

Если была бы сходимость, то для любого ε остаток, начиная с какого-то номера, меньше чем ε. Запишем для n даже не весь остаток ряда, а его часть, а именно, последующие n элементов.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Наименьший элемент здесь $\frac{1}{2n}$. Если мы заменим все слагаемые на него, то сумма лишь уменьшится, т.е.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Итак, часть частичной суммы от номера n+1 до 2n больше, чем $\frac{1}{2}$, то есть не может быть меньше ε. Определение сходимости не выполнено, ряд расходится. Здесь это происходит из-за того, что слагаемые уменьшаются слишком медленно.

Замечание. Тема «ряды» связана с темой «несобственные интегралы», там тоже рассматриваются только функции, стремящиеся к 0, и для них может быть либо сходимость, либо расходимость несобственного интеграла 1-го рода. Но там непрерывные, а здесь дискретные величины. Вспомним, что там тоже интеграл от $\frac{1}{x}$ был расходящимся, аналогичное мы сейчас увидели для ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

ЛЕКЦИЯ № 10. 29. 04. 2016

Суммы рядов в некоторых случаях можно найти, используя формулу Тейлора. Вспомним, например, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ если здесь положим $x=1$, то получается $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$, то есть сумма $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e-1$.

Либо вспомним разложение функции $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$, тогда при $x=1$ получается $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\ln 2$.

Если все слагаемые здесь были бы со знаком «+» то это был бы гармонический ряд, расходимость которого доказали ранее. Получается, что если знаки чередуются, то сходимость может быть из-за частичной компенсации слагаемых, а если взять по модулю, то сходимости может и не быть. В связи с этим возникает такое понятие.

Абсолютная и условная сходимость.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и при этом также $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся. А если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то исходный ряд называется условно сходящимся.
Если все слагаемые положительны, то сходимость равносильная абсолютной, а понятие «условно» не имеет смысла и не применяется.

Изменение суммы от перестановки бесконечного числа слагаемых (пример). $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\ln 2$. Теперь переставим так, чтобы после каждого положительного следовали ровно по 2 отрицательных члена ряда.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots$$

объединим первые 2 слагаемых в каждой скобке.

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots$ а теперь вынесем $\frac{1}{2}$.

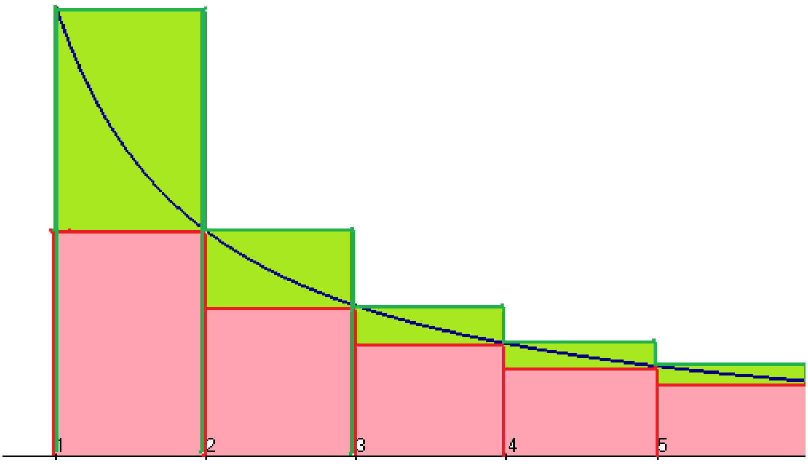
$\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)$ мы получили точно такой же ряд, как и был в начале, но с коэффициентом $\frac{1}{2}$. То есть сумма теперь должна быть не ln2, а $\frac{1}{2}\ln 2$.
Вот такой парадокс: привычный закон коммутативности далеко не всегда выполняется в бесконечных суммах!
Если ряд абсолютно сходится, то его сумма не зависит от перестановки бесконечного количества слагаемых. В связи с этим как раз и введено понятие абсолютной сходимости.

Признаки сходимости числовых рядов.

признаки сходимости - это теоремы, дающие конкретные методы исследования рядов на сходимость или расходимость.
Теорема 2. Интегральный признак Коши.

Если дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и при этом существует функция $f(x)$, такая, что при целых значениях она совпадает с членами этого ряда, т.е. $f(n) = a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим чертёж. Высоты столбцов, расположенных выше графика (включающие в себя и зелёную и красную часть), это числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$., так как эти высоты $f(1), f(2)$ и т.д. Сумма площадей этих столбцов, как раз и есть сумма ряда. И это больше, чем несобственный интеграл.
В то же время столбцы, расположенные ниже графика (только красная часть на чертеже), имеют высоту $a_2, a_3, a_4, \ldots$ так как у первого из них высота $f(2)$. Сумма их площадей это сумма остатка ряда без 1-го слагаемого. Но они все ниже графика, то есть их суммарная площадь меньше, чем несобственный интеграл.



Итак, получили: $a_2 + a_3 + ... \le \int_1^{\infty} f(x)dx \le a_1 + a_2 + a_3 + ...$

Правое неравенство означает: из того, что ряд сходится, следует, что несобственный интеграл сходится. А левое неравентство значит, что из сходимости интеграла следует сходимость остатка ряда, начиная со 2-го элемента. Но ведь сходимость остатка ряда равносильна сходимости самого ряда. Поэтому в итоге получается такой факт: ряд сходится тогда и только тогда, когда несобственный интеграл сходится.

Фактически, с помощью этой теоремы можно во многих случаях как бы заменять n на x, и исследовать не дискретные, а непрерывные величины, а это удобнее, т.к. можно интегрировать, применять перавообразные, то есть гораздо больше способов для исследования.

Пример. Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, сходятся при $a > 1$. Они эквивалентны интегралам $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx$, про которые известно, что при $a > 1$ есть сходимость. Итак, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходятся, а вот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходятся, здесь степень меньше или равна 1.

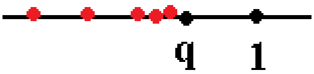
Но не всегда удаётся подобрать такую функцию, чтобы применить интегральный признак Коши. Например, в ряде может содержаться n! Поэтому нужны и другие признаки.

Если исследовать внутреннюю структуру ряда, а именно отношение следующего слагаемого к предыдущему, то например, для геометрической прогресмсии это число всегда одно и то же q (называется знаменатель прогрессии). А вот если ряд не является прогресией, то оно как-то варьируется, для сходимости важно, чтобы оно оказалось меньше какого-то q, то есть было меньше сходящейся прогрессии.

Теорема 3. Признак Даламбера в конечной (не-предельной) форме.

Если при всех $n > n_0$ (то есть начиная с некоторого номера) выполняется условие $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q < 1$, то ряд абсолютно сходится.

Доказательство. Во-первых, сходимость ряда равносильная сходимости его остатка, т.е. можем рассмотреть остаток ряда и заново перенумеровать члены ряда, начиная с n_0, поэтому можно доказывать даже при том условии, что $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q < 1$ верно, даже начиная с первого номера. Обратите внимание, что условие $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q < 1$ это не то же самое что $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. В нашем случае все они меньше q, которое само меньше 1, т.е. отделено от 1 некоторым расстоянимем на числовой прямой, т.е. предел этих величин не может быть равен 1, от любой из них до 1 остаётся некоторое расстояние $(1-q)$!



$$\frac{|a_2|}{|a_1|} \le q \quad \Rightarrow |a_2| \le q\,|a_1|,$$

$$\frac{|a_3|}{|a_2|} \le q \quad \Rightarrow |a_3| \le q\,|a_2| \;\Rightarrow\; |a_3| \le q^2\,|a_1|.$$

Продолжая таким образом, можно модуль каждого члена ряда оценить с помощью $|a_1|$ и какой-то степени числа q.

Итак, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \le |a_1| + q|a_1| + q^2|a_1| + \ldots =$ $|a_1|\left(1 + q + q^2 + \ldots\right)$ получилось, что ряд, состоящий из модулей, меньше некоторой убывающей геометрической прогрессии.

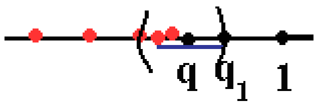
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \le |a_1|\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = |a_1|\frac{1}{1-q}.$$

Итак, сумма меньше некоторого конечного числа, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Теорема 4. Признак Даламбера в предельной форме.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q<1$ то ряд абсолютно сходится, если при этом $q>1$ то ряд расходится.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы таким образом. Если предел равен q и оно строго меньше 1, то для всякого $\varepsilon>0$, начиная с некоторого номера, все отношения вида $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ входят в окрестность $(q-\varepsilon,q+\varepsilon)$, а если заранее возьмём $\varepsilon<1-q$, то все эти элементы окажутся левее, чем $q_1=q+\varepsilon$, при этом $q_1<1$.



То есть, они всё равно будут отделены от 1 неким расстоянием. А тогда выполняются условия прошлой теоремы, и ряд абсолютно сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$.

Поделим n+1 й член ряда на n-й. На практике лучше пользоваться предельным признаком, т.е. сразу перейти к пределу и получить q.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}:\dfrac{1}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}<1$. Ответ: ряд сходится.

Замечание. Сходимость здесь сразу абсолютная, так как все слагаемые и так положительны.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Итак, $q=0<1$, ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$, ряд сходится (абсолютно).

Замечание. Если было бы знакочередование, для признака Даламбера всё равно надо было бы рассмотреть по модулю, т.е. отбросить $(-1)^n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$ тоже сходится абсолютно. Знакочередование - вовсе не значит, что сходимость условная. Если исследовать здесь ряд даже без знакочередования, то он сходится.

Теорема 5. Радикальный признак Коши в конечной форме.

Если при всех $n>n_0$ выполнено условие $\sqrt[n]{|a_n|}\le q<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится.

Доказательство. Если $\sqrt[n]{|a_n|}\le q$, то $|a_n|\le q^n$. Таким образом, начиная с некоторого номера, остаток ряда меньше или равен, чем убывающая геометрическая прогрессия.

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots \;\le\; q+q^2+q^3+\ldots=\dfrac{q}{1-q}$. Эта сумма конечна, то есть ряд абсолютно сходится.

Теорема 6. Радикальный признак Коши в предельной форме.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q<1$ то ряд абсолютно сходится, если $q>1$ расходится.
Доказательство. Как и для признака Даламбера в предельной форме, следует из предыдущей теоремы. Если предел равен q, то после какого-то номера, все элементы меньше, чем $q_1=q+\varepsilon$, т.е. для числа q_1 верны условия теоремы 5.

Пример. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$
(использовали 2-й замеч. предел) ряд расходится.

Замечание. При $q=1$ признак Даламбера и радикальный признак Коши не дают никакого ответа, в этом случае надо применять какие-либо другие признаки.

Теперь серия признаков, основанных не на внутренней структуре ряда, а на сравнении с каким-то внешним, «эталонным» рядом.
Теорема 7. Признак сравнения в конечной форме.

Даны 2 ряда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, причём, начиная с какого-то номера n_0 верно $a_n\le b_n$. Тогда:

1) Из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,

2) Из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Пример. Выяснить сходимость $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\ln n}$.

Заметим, что $\dfrac{1}{2^n \ln n} < \dfrac{1}{2^n}$ при $n \geq 3$, так как $\ln n > \ln e = 1$.

В то же время ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, с помощью которого мы ограничили сверху, это сходящаяся геометрическая прогрессия, поэтому тот исходный ряд тоже сходится.

Теорема 8. Признак сравнения в предельной форме.

Даны 2 ряда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C$, где C константа, $C \neq 0, \infty$, т.е. a_n, b_n - бесконечно малые одного порядка, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Пример. Выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^3+2}$.

Пусть $a_n = \dfrac{n+1}{n^3+2}$, тогда возьмём $b_n = \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Предел отношения этих величин равен 1.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^3+2} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^2}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3+2} = 1.$$

Поэтому для исследования сходимости, можно рассматривать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ вместо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^3+2}$, они эквивалентны в смысле сходимости. В то же время $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ уже легко сравнить с несобственным интегралом $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2} dx$, который в свою очередь сходится. Ответ: ряд сходится (абсолютно, т.к. слагаемые все положительны).

Теорема 9. Признак Лейбница. Если выполнены 2 условия:
1) Ряд знакочередующийся, 2) $|a_n|$ монотонно убывает к нулю.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Идея доказательства. У нас есть ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$

Сначала объединим так: $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ...$ в каждой скобке положительное число, так как вычитаемое меньше по модулю, из-за монотонности. Получается, что подпоследовательность в последовательности частичных сумм возрастает.

А теперь перегруппируем так: $a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ...$ из элемента a_1 вычитаются какие-то положительные числа, то есть частичный суммы меньше, чем a_1. Итак, последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит, у неё есть предел. тогда ряд сходится.

Пример. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ условно сходится.

§2. **Функциональные ряды.**

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется функциональным рядом.

Для функций комплексного переменного $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Если фиксировать ту или иную точку из области определения, будет получать различные числовые ряды. Фактически, здесь имеется бесконечное множество числовых рядов, так как бесконечное множество точек в области определения.

Область сходимости функционального ряда. Множество D называется областью сходимости, если для каждой точки $z_0 \in D$

соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ сходится.

Если ряды из комплексных функций, то D это область в плоскости, например круг, а если действительные функции, то D какой-либо интервал или объединение интервалов на действительной прямой.

Метод нахождения области сходимости. применять те же самые признаки (Даламбера, Коши) но только для «произвольного» x.
То есть, в пределе так до конца и остаётся переменная. а затем решить неравентво.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{|x|^n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}2^n}{2^{n+1}|x|^n} = \frac{|x|}{2} = q(x) < 1.$$

Если раньше, в теме «числовые ряды» мы просто получали в пределе какое-то число q и могли сказать, что оно больше либо меньше 1, то теперь получили функцию от x, т.е. при одних значениях больше 1, а при других меньше. Надо решить неравенство и найти, где это выражение меньше 1.

$\frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2,2)$ это интервал, где есть абсолютная сходимость.

Там, где $q(x) > 1$, то есть $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$ ряд расходится.

При $q(x) = 1$ признак Даламбера не даёт ответа, надо проводить исследование поведения ряда в граничных точках в ручном режиме.

Подставим $x = 2$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ он расходится.

Подставим $x = -2$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ он тоже расходится, не выполнен необходимый признак, т.е. слагаемые не уменьшаются к 0. Итак, граничные точки не добавятся к области сходимости, и ответ остаётся таким: $x \in (-2,2)$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{n+1}:\frac{|x|^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}n}{|x|^n(n+1)} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|.$$

Теперь решим неравенство $|x|<1$. Это означает $x\in(-1,1)$ - вот область абсолютной сходимости.

Исследуем граничные точки.

При $x=1$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, он расходится (гармонический ряд, изучали ранее). При $x=-1$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, знакочередующийся, сходится по признаку Лейбница, но условно, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ это и есть ряд из его модулей а он расходится. итак, ответ: область сходимости $x\in[-1,1)$.

ЛЕКЦИЯ № 11. 06. 05. 2016

Пример. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(x-1)^n}$.

Решение. Извлечём корень n порядка из модуля. Получим $\frac{2}{|x-1|}$.

Решим неравенство $\frac{2}{|x-1|}<1$, т.е. $|x-1|>2$. Удаление от 1 на расстояние 2 и больше. Решением неравенства будет множество $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.

Подставляя граничные точки, получаем расходимость, там слагаемые не стремятся к 0, по необходимому признаку должна быть расходимость.

При $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$ ряд расходится.

При $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(-1-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(-2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ряд расходится.

Ответ: $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.

§3. Степенные ряды.

Общий вид степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, где a_n числовые коэффициенты. В этом ряде только положительные степени одного и того же выражения $(z-z_0)$ и константа (что получается при нулевой степени). Возможно, что часть коэффициентов равна 0, то есть некоторые степени пропущены.

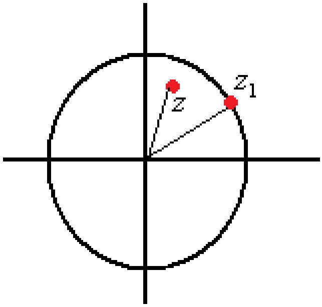
Теорема 1 (Абеля). 1) Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ сходится в точке z_1, то он сходится в любой точке z, для которой $|z|<|z_1|$, причём абсолютно.

2) Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ расходится в точке z_1 то он расходится в любой точке, для которой $|z|>|z_1|$.

Доказательство. Сходимость в точке z_1 ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ означает, что

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n {z_1}^n=C$. Если этот ряд сходится, то согласно необходимому признаку, слагаемые стремятся к 0. Тогда среди них есть максимальное по модулю, и таким образом, они ограничены в совокупности, некоторой константой M, т.е. $\left|a_n {z_1}^n\right|\le M$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ в произвольной точке z, которая ближе к началу координат на комплексной плоскости.



Итак, взяли точку, для которой $|z| < |z_1|$. Тогда $\left|\dfrac{z}{z_1}\right| = q < 1$.

Для доказательства абсолютной сходимости, рассмотрим ряд, состоящий из модулей: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z_1{}^n| \left|\dfrac{z}{z_1}\right|^n$ (домножили и поделили). При этом $|a_n z_1{}^n| \le M$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z_1{}^n| \left|\dfrac{z}{z_1}\right|^n \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n =$ $M \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = M(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = M \dfrac{1}{1-q}$ то есть меньше или равно некоторой сходящейся геометрической прогрессии.

Итак, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \le M \dfrac{1}{1-q}$, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ сходится, то есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно.

Пункт 2. Нужно доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке, которая дальше от начала координат. Допустим, что в z_1 расходимость, но есть сходимость в какой-то более далёкой точке z. Но тогда это противоречило бы уже доказанному пункту 1, так как из сходимости в z следовала бы сходимость в более близкой к началу координат точке z_1.

Следствие. Область сходимости степенного ряда есть круг.

Действительно, по теореме 1, во всех более близких к центру точках - сходимость, а если нашлась точка, где ряд расходится, то сразу же во всех, более далёких от центра - тоже расходимость. Тогда область есть круг.

Примечание. Центр круга сходимости это точка z_0. Мы доказали теорему Абеля для центра в точке 0 для простоты и ясности обозначений, но полностью аналогичные выкладки верны и для центра в любой другой точке.

Но на самом деле, выше был рассмотрен случай в комплексной плоскости. А для рядов из действительных степенных функций $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, пересечение круга с действительной прямой порождает симметричный интервал с центром в точке x_0. Таким образом, область сходимости это интервал $(x_0 - c, x_0 + c)$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$. Если рассматривать как раньше, т.е. просто как для функциональных рядов, по радикальному признаку Коши, получим $\frac{|x-1|}{2} < 1$, т.е. $|x-1| < 2$, $-2 < x-1 < 2$, решая эти два неравенства, получим $x > -1, x < 3$, то есть $x \in (-1,3)$ - интервал абсолютной сходимости. Это и есть симметричный интервал с центров в точке 1 и радиуса 2.

Теорема 2. Формулы радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ и } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Заметим, что в этих формулах a_n обозначает не просто n-е слагаемое, а лишь его часть, сам числовой коэффициент без степенной функции, а дроби обратные по сравнению с теми, как в признаках Даламбера или Коши. Рассмотрим доказательство, чтобы понять, почему так происходит.

Доказательство.

Применим к степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ признак Даламбера.

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\cdot|z-z_0|^{n+1}}{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, из чего следует

$|z-z_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$, т.е. $|z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$.

Вот и получилось условие, задающее круг в комплексной плоскости. Это можно считать также вторым, независимым доказательством того следствия из теоремы Абеля, где говорилось, что область сходимости есть круг.

Докажем вторую формулу.

Применим к степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ признак Коши.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, т.е. $|z-z_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, т.е.

$|z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$.

Пример. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$.

Отбросим степенную часть и извлечём коэффициент.

$a_n = \frac{1}{2^n}$, тогда $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Тогда $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \frac{2^{n+1}}{1} = 2$.

Можно считать и по второй формуле: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$.

Итак, центр в точке 1, а радиус 2, то есть область сходимости - интервал $(-1,3)$. Примечание. Чуть раньше мы решали этот же пример другим способом, просто по признаку Даламбера, а здесь по формулам радиуса R.

Пример. Найти радиус и область сх. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{5^n}$.

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$. R=5, интервал сходимости $(-4,6)$.

Поиск суммы для рядов с помощью почленного интегрирования и дифференцирования.

До сих пор мы искали область сходимости, то есть «где» сходится ряд. А теперь научимся находить суммы рядов, обозначаемые через $S(x)$. Проще всего, если ряд это геометрическая прогрессия, можно воспользоваться формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$. Однако далеко не всегда ряд это прогрессия. Тем не менее, бывают такие ряды, для котрых сумма производных или сумма первообразных от его слагаемых будет геометрической прогрессией. То есть, можно свести к прогрессии с помощью почленного дифференцирования или интегрирования.

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ тогда $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$. Рассмотрим на примерах.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Подробная запись: $1+2x+3x^2+4x^3+...$ заметим, что первообразные уже просто степенных функции, т.е. здесь легче найти не $S(x)$ а её первообразную.

$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + ...$ а это уже геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x$. Её сумма $\frac{x}{1-x}$, и это напомним, первообразная от $S(x)$. Тогда $S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' =$

$\frac{1\cdot(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Ответ $\frac{1}{(1-x)^2}$.

А бывают примеры, где наоборот, сначала надо дифференцировать.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Здесь тоже не прогрессия, но тот случай, когда можно свести к прогрессии. Если $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ то $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} =$ $1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$. При этом, сходимость прогрессии обеспечена только при $|x| < 1$, то есть $x \in (-1,1)$.

А теперь, чтобы вернуться к $S(x)$, надо проинтегрировать. $S(x) = \int\frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) + C$, знак модуля под логарифмом не нужен, так как при $x \in (-1,1)$ будет $x < 1$, т.е. $1 - x > 0$, выражение и так положительное. Однако мы искале через первообразную, и там ещё есть неопределённая константа С. Чтобы её найти, надо присвоить какое-то значение x одновременно в ряде и функции, например 0. $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n} = 0$ а с другой стороны, это равно $-\ln(1-0) + C$, то есть $C = 0$. Ответ $S(x) = -\ln(1-x)$.

На практике рассмотрим другие примеры, где есть особенности, связанные с реализацией этих методов. Например, иногда надо решать в 2 шага, а иногда домножать на что-либо, чтобы потом можно было продифференцровать и получить прогрессию.

\

§4. Ряды Тейлора и Лорана.

До сих пор мы изучали степенные ряды и находили суммы. А бывает наоборот, дана функция, и надо представить её в виде степенного ряда.

Ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ - разложение функции $f(z)$ в степенной ряд в окрестности точки z_0, он называется рядом Тейлора этой функции.

Соответственно, для действительных функций,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Метод определения круга сходимости (до ближайшей точки разрыва).

Пусть $f(z)=\frac{1}{1-z}$. Если надо разложить её в ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, то центр $z_0=0$, а ближайшая точка, где ряд точно расходится, это точка разрыва $z=1$. Тогда круг сходимости как раз и будет $|z|<1$.

Разложим $f(z)=\frac{1}{1-z}$ в степенной ряд, то есть найдём её ряд Тейлора. Первый способ - найти производные до любого порядка n, и записать по формуле.

$f(z)=\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$. Тогда:

$f'(z)=(-1)(1-z)^{-2}(1-z)' = f'(z)=(-1)(-1)(1-z)^{-2} = (1-z)^{-2}$.

$f''(z)=(-1)^2(-1)(-2)(1-z)^{-3} = (1-z)^{-3}2!$

$f'''(z)=(-1)^3(-1)(-2)(-3)(1-z)^{-4} = (1-z)^{-4}3!$, и.т.д.

В точке 0 n-я производная равна n!

Тогда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n = 1+z+z^2+z^3+\ldots$.

Но не обязательно так искать все производные и устанавливать закономерность при их вычислении. Иногда количество слагаемых при дифференцировании экспоненциально возрастает (если там было произведение) на каждом шаге в 2 раза и равно 2^n, а закономерности очень сложно находятся. Так что напрямую по формуле считать не всегда удобно. Есть 2 способ - получать всё разложение сразу, используя геометрическую прогрессию.

$f(z)=\frac{1}{1-z}$, заметим, что при $|z|<1$ эта функция может рассматриваться как сумма прогрессии (т.е. уже свёрутая по формуле суммы). Здесь знаменатель прогрессии $q=z$. Тогда $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ как видим, то же самое и получили.

Рассмотрим разные модификации для других случаев.

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z)=\frac{1}{1+z}$ по степеням z, то есть в круге с центром 0.

Сумма вместо разности вовсе не является препятствием к тому, чтобы использовать прогрессию, запишем $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}$ тогда $q=-z$ и $\frac{1}{1-(-z)}=1-z+z^2-z^3+\ldots$ когда в знаменателе была сумма, получается знакочередующийся ряд.

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z)=\frac{1}{2+z}$ по степеням z.

Решение. $f(z)=\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\ldots$$

Пример. Разложить в ряд Тейлора с помощью геометрической прогрессии: $f(z)=\dfrac{1}{3+z}$ по степеням $(z-1)$, то есть в круге с центром в точке 1.
Здесь мы сначала определим круг сходимости. От точки 1 до точки разрыва $z=-3$ расстояние 4, так что разложение в ряд возможно в круге $|z-1|<4$.
Отделим разность $(z-1)$ искусственным путём, т.е. прибавим и отнимем 1.
$f(z)=\dfrac{1}{3+z} = \dfrac{1}{4+(z-1)}$. А теперь далее не раскрываем блок $(z-1)$ вплоть до ответа, то есть эта скобка так и будет как единое целое.

$$\frac{1}{4+(z-1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n =$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{4^{n+1}}$. Заметим, что при этом знаменатель прогрессии $q=-\dfrac{z-1}{4}$, он должен быть меньше 1 по модулю, но так и есть, ведь круг сходимости $|z-1|<4$, как уже заметили раньше.

Мы в этих примерах всегда применяем формулу суммы прогрессии $\dfrac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n = 1+q+q^2+\ldots$, при этом, желательно заранее вынести все множители из числителя за пределы дроби, чтобы «очистить» числитель до 1, этим самым мы обеспечиваем то, что можно пользоваться упрощённой формулой суммы прогрессии $\dfrac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$, так как 0 степень как раз и равна 1.

ЛЕКЦИЯ № 12. 13. 05. 2016

Приложения рядов Тейлора.

1. Приближённые вычисления.

Значения функции в точке можно приближённо вычислять с помощью разложения в ряд Тейлора, более того, во всех калькуляторах и компьютерах именно так и запрограммировано. Каждая функция там задана просто в виде набора коэффициентов ряда, и при обращении к функции именно это и вычисляется автоматически, с той точностью, с которой позволяет разрядная сетка калькулятора.

Так, вычислим e^1. Ихвестно, что $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$. Тогда $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \quad = \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ Так, для первых шагов сразу получаем значение 2,5 затем прибавляется $\frac{1}{6} \approx 0{,}1666666$ и стало 2,6666666 а затем $\frac{1}{24} \approx 0{,}0416666$ станет 2,7083333 и так с каждым шагом всё ближе к $e \approx 2{,}71828$.

2. Нахождение производной высокого порядка.

Если разложить функцию в ряд и рассмотреть слагаемое со степенью n, то можно сравнить его с теоретически полученным видом $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ и отсюда извлекается информация о значении $f^{(n)}(x_0)$, причём не требуется вычислять все производные включительно до n порядка, а сразу получаем значение n-й производной в точке. Ведь бывает так, что функция содержит произведение, и там число слагаемых удваивается на каждом шаге, и их уже 1024 для 10-й производной.

Пример. Найти $f^{(10)}(0)$ для $f(x) = x^3 \sin x$.

$$f(x) = x^3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\right) = x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \frac{x^{12}}{9!} - \dots$$

Здесь нам нужен только коэффициент при степени 10.

$$-\frac{1}{7!}=\frac{f^{(10)}(0)}{10!} \Rightarrow f^{(10)}(0)=-\frac{10!}{7!}=-8\cdot 9\cdot 10=-720.$$

Ответ. -720.

3. Нахождение определённого интеграла.

Если функция требует больших трудоёмких подстановок, или многократного интегрирования по частям, можно разложить функцию в ряд, состоящий из степенных функций, и приближённо вычислить.

Пример. Приближённо найти интеграл $\int\limits_0^{1/2}\sin(x^3)dx$ с точностью 10^{-4}.

$$\int\limits_0^{0,5}\sin(x^3)dx = \int\limits_0^{0,5}\left((x^3)-\frac{(x^3)^3}{3!}+\frac{(x^3)^5}{5!}-...\right)dx =$$

$$\int\limits_0^{0,5}\left(x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}-...\right)dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{1/2} - \left.\frac{x^{10}}{10\cdot 3!}\right|_0^{1/2} + \left.\frac{x^{16}}{16\cdot 5!}\right|_0^{1/2} - ... =$$

$\frac{1}{2^4\cdot 4}-\frac{1}{2^{10}\cdot 10\cdot 6}+\frac{1}{2^{16}\cdot 16\cdot 120}-...$очевидно, здесь 3 и последующие слагаемые заведомо меньше 10^{-5}, и не повлияют на 4-й знак после запятой, поэтому приближённое значение

$$\frac{1}{2^4\cdot 4}-\frac{1}{2^{10}\cdot 10\cdot 6} = \frac{1}{64}-\frac{1}{1024\cdot 60} \approx 0{,}0156-0{,}000016\approx 0{,}0156.$$

Как видим, даже 2-е слагаемое можно было не рассматривать, т.к. оно меньше, чем 10^{-4}.

4. Решение дифференциальных уравнений.

Можно представить неизвестную функцию $y(x)$ в виде степенного ряда $y=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ и подставить его в дифференциальное уравнение, тогда решение найдётся тоже в виде ряда, т.е. можно знать строение решения, его график и т.д. даже без аналитического выражения этой функции. .

Пример. $y'=y$ решить с помощью рядов.

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ тогда $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...$

Из равенства $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ получаем: $a_1 = a_0$, $2a_2 = a_1$, $3a_3 = a_2$ и так далее.

В этом случае все коэффициенты можно последовательно выразить через a_0. А именно, $a_1 = a_0$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}$ и т.д.

Тогда $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \right)$ здесь видно, что в скобках получилось разложение экспоненты. Итак, $y = a_0 e^x$.

Эту единственную константу можно переобозначить C и получится знакомый из вид общего решения такого уравнения: $y = Ce^x$.

Ряды ЛОРАНА.

Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, то есть содержащий как положительные, так и отрицательные целые степени, называется рядом Лорана.

Совокупность слагаемых с нулевой и положительной степенью называется его правильной частью, а отрицательных - главной частью.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ правильная часть, $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ главная часть,

впрочем, её также можно переписать в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$.

Теорема 1. Область сходимости ряда Лорана есть кольцо вида $r < |z - z_0| < R$.

Доказательство. Распишем по отдельности на главную и правильную часть: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$.

1. Для правильной части верна теорема Абеля, ведь это обычный степенной ряд. Правильная часть абсолютно сходится в некотором круге $|z - z_0| < R$.

2. Рассмотрим главную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

Сделаем в ней замену с целью представить через положительные степени и применить теорему Абеля. $w = \frac{1}{z-z_0}$. тогда для новой переменной w ряд принимает такой вид: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$. Это степенной ряд, его круг сходимости с центром в 0. То есть, $|w| < r_1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z-z_0|} < r_1$ $\Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{r_1}$, обозначим $\frac{1}{r_1} = r$, вот и получили $|z-z_0| > r$.

Итак, область сходимости есть $r < |z-z_0| < R$, это кольцо.

Бывают и крайние случаи: круг с выколотой точкой $0 < |z-z_0| < R$
внешняя часть некоторого круга $r < |z-z_0| < \infty$.
Это если $r = 0$ либо $R = \infty$.

Пример. Найти кольцо сх ряда Лорана $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-1)^n}$.

Решение. Найдём отдельно по радикальному признаку Коши область сходимости правильной и главной части.

1. Для $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{5^n}$ получается $\frac{|z-1|}{5} < 1$, т.е. $|z-1| < 5$

2. Для $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-1)^n}$ получается $\frac{1}{2|z-1|} < 1$, т.е. $|z-1| > \frac{1}{2}$.

Ответ. Кольцо сходимости: $\frac{1}{2} < |z-1| < 5$.

Разложение в ряд Лорана с помощью геометрической прогрессии.

Пример. Разложить функцию $\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}$

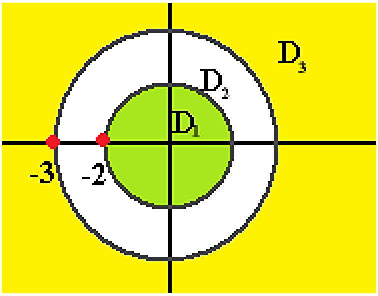
а) в ряд Лорана в кольце $2<|z|<3$

б) во внешней области $|z|>3$

в) в ряд Тейлора в круге $|z|<2$.

Во-первых, если центр кольца 0, а точки разрыва $z=-2$ и $z=-3$, то есть 3 области: $D_1=\{|z|<2\}$, $D_2=\{2<|z|<3\}$, $D_3=\{|z|>3\}$.

Чертёж:



$D_2=\{2<|z|<3\}$ кольцо, расположенное между двумя точками разрыва, так, чтобы ни одна из низ не была внутри кольца.

Разложим на простейшие дроби. Это действие необходимо в любом случае, независимо от того, в каком множестве надо получать разложение в ряд.

$$\frac{1}{(z+2)(z+3)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z+2)}{(z+2)(z+3)}$$

$$\Rightarrow (A+B)z+(3A+2B)=0z+1 \Rightarrow \text{система: } \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A=1, B=-1 \;\Rightarrow\; f(z)=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}.$$

1) Для разложения в ряд Лорана в кольце, надо вынести за скобку иногда константу, а иногда z, чтобы всегда получалось что-то меньшее 1.

Из условия $2<|z|<3$ следует $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{3}<1$, то есть в знаменателе можно получать $\frac{2}{z}$ и $\frac{z}{3}$, но нельзя $\frac{z}{2}$ и $\frac{3}{z}$.

$$\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}$$

теперь в каждом случае получено выражение вида $\frac{1}{1-q}$ котрое и является суммой геометрической прогрессии, и его можно превратить в бесконечную сумму по формуле $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$.

$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}=\quad ...+\frac{2^2}{z^3}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}-\frac{1}{3}+\frac{z}{3^2}-\frac{z^2}{3^3}-...$$

2) Теперь разложим в ряд во внешней области, которую, впрочем, можно также считать кольцом типа $3<|z|<\infty$. Здесь $|z|>3$ причём автоматически выполнено также и $|z|>2$, т.е. надо получать в знаменталелях выражения $\frac{2}{z}$ и $\frac{3}{z}$, и в итоге в ответе будут только отрицательные степени.

$$\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)}=$$

$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n$ в данном случае их можно и объединить, т.к. в каждом слагаемом есть одинаковые степени.

$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n - \left(-\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n - 3^n}{z^{n+1}}$. В этом ряде Лорана есть только главная часть.

3) Если требуется разложить в ряд в круге, то это получится ряд Тейлора, там наоборот, в обеих дробях надо выносить константу, чтобы было $\frac{z}{3}$ и $\frac{z}{2}$.

$$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n .$$

Пример (со сдвигом центра)

Разложить функцию $\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ в ряд Лорана по степеням $z-1$.

Решение. Центр в точке 1, тогда расстояние до ближайшей особой точки равно 3, а до второй 4. Получается, что кольцо, где будет ряд, для этой задачи: $3 < |z-1| < 4$.

Разложение на простейшие дроби то же самое, $\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$.

Но после этого надо отделить выражение $z-1$.

$\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+3} - \frac{1}{(z-1)+4}$ далее в соответствии с неравенствами $|z-1| < 4$ $|z-1| > 3$ надо вынести за скобку в одной дроби константу, а в другой $z-1$.

$$\frac{1}{(z-1)+3}-\frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}}=$$

$$\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z-1}\right)}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-1}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n.$$

Объединить их нельзя, так как в одной части отрицательные степени, а в другой части положительные, это главная и правильная часть ряда соответственно.

ЛЕКЦИЯ № 13. 20. 05. 2016 Ряды Фурье

§4. Ряды Фурье.

Скалярное произведение функций.

Вспомним скалярное произведение векторов $(a,b)=a_1b_1+...a_nb_n$.

Для функций можно построить обобщение. Если заданы 2 функции $f(x),g(x)$, то очевидно, их можно умножить в каждой точке. Затем все эти произведения надо проинтегрировать, так как точек на интервале бесконечное количество. Получается как бы бесконечное количество координат.

Итак, определим скалярное произведение пары функций на интервале (a,b) по формуле: $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Можно считать, что это верно и на отрезке $[a,b]$, ведь две граничные точки не влияют на величину интеграла.

Пример. Найти скалярное произведение $f(x)=x$ и $g(x)=x^2$ на интервале (0,1).

Решение. $(f,g)=\int\limits_0^1 x\cdot x^2dx=\int\limits_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}$.

Свойства скалярного произведения, которые легко следуют из свойств линейности интеграла:

$(f, g) = (g, f)$

$(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$, $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$

$(cf, g) = c(f, g)$, $(f, cg) = c(f, g)$

Вспомним, что для векторов есть понятие модуля,

$|a| = \sqrt{a_1^{\ 2} + .. a_n^{\ 2}} = \sqrt{(a, a)}$. Аналогичное понятие для функций называется **нормой функции:**

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x) f(x) dx} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} = \sqrt{(f, f)} .$$

Очевидно, что этот квадратный корень существует, ведь $f^2(x) \geq 0$, а значит и $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$.

Ортогональные функции.

Две функции называются ортогональными на интервале (a, b), если $(f, g) = 0$, то есть $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$.

Здесь нет такого простого геометрического смысла, как в случае перпендикулярных векторов, для функций ортогональность значит, что произведение функций где-то больше, а где-то меньше нуля так, чтобы эти части компенсировались и уничтожились при интегрировании.

Пример. Функции $f = \sin x$, $g = \cos x$ на интервале $(0, \pi)$.

$$\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^\pi = -\frac{1}{4} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Замечание. Если одна из функций в произведении тождественно равна 0, то интеграл очевидно, равен 0. Поэтому тождественный 0 это ортогональная всем функция.

Ортогональные системы. Если любая пара функций в системе ортогональна, то система называется ортогональной.

$\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ ортогональна, если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ для любых $i \neq j$.

Вывод формул для вида коэффициента (Фурье) разложения по ортогональной системе.

$c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ или $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

Доказательство. Пусть функция f представлена в виде суммы:

$f = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + ...c_n\varphi_n + ...$ найдём коэффициенты .

Можно скалярно домножить на φ_n. Получим

$(f, \varphi_n) = (c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + ...c_n\varphi_n + ..., \varphi_n) =$

$c_0(\varphi_0, \varphi_n) + c_1(\varphi_1, \varphi_n) + ...c_n(\varphi_n, \varphi_n) + ...$

среди этих слагаемых, лишь одно отлично от нуля, ведь система ортогональна, и при $i \neq n$ будет $(\varphi_i, \varphi_n) = 0$.

Тогда $(f, \varphi_n) = c_n(\varphi_n, \varphi_n)$, тогда $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$ то есть $c_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

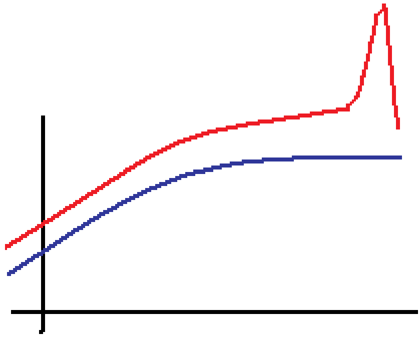
Можно записать и с помощью интегралов: $c_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^{\,2}(x)dx}$.

Аналогичное равенство верно и для векторов: $a_1 = \dfrac{(a, e_1)}{|e_1|^2} = \dfrac{a_1}{1}$.

Равномерное, среднее и среднеквадратичное отклонение.

Чтобы исследовать взаимосвязь 2 функций, а конкретно, их удаление друг от друга, можно использовать такую величину:

$\Delta = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ называемую «равномерным» отклонением между графиками. Однако это не совсем точно характеризует взаимосвязь пары функций, ведь они могут идти очень близко, а затем удалиться на коротком интервале, а отклонение будет считаться большим. Например, как на чертеже:



Вместо этого можно рассматривать среднее значение модуля разности, и это уже более точная оценка.

$\Delta_2 = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx$ - среднее отклонение.

Но чтобы посчитать интеграл от модуля, надо искать точки пересечения и разбивать интервал на части. Чтобы избежать этих громоздких вычислений, можно рассматривать такую величину:

$\Delta_3 = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$ среднеквадратичное отклонение между f и g. Когда среднее стремится к 0, то и среднеквадратичное тоже, и хотя они не прямо пропорциональны, но минимальное значение одной из этих величин достигается при тех же условиях, что и у другой.

Если домножить функции из системы на какие-то коэффициенты, то получится выражение $P_n = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$ многочлен по ортогональной системе.

Теорема. Среднеквадратичное отклонение между f и P_n минимально $\Leftrightarrow$ коэффициенты $\alpha_i = c_i$ (совпадают с коэффициентами Фурье).

Доказательство. $\Delta_3 = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$ минимально тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx$ минимально, так что мы можем рассмотреть просто интеграл от квадрата разности, то есть величину $(f-P_n, f-P_n)$. Во-первых, она по построениею больше или равна 0. Рассмотрим её подробнее:

$(f-P_n, f-P_n) = \left(f-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i, f-\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right)$ применим свойства скалярного произведения, будет так:

$$\left(f, f\right) - 2\left(f, \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i, \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\right) =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} 2a_i\left(f,\varphi_i\right) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j\left(\varphi_i,\varphi_j\right).$$

Но от двойной суммы где $(n+1)^2$ слагаемых, фактически остаётся только (n+1) так как при несовпадении номера, скалярные произведения 0, ведь это ортогональная система.

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} 2a_i\left(f,\varphi_i\right) + \sum_{i=0}^{n} a_i\left(\varphi_i,\varphi_i\right) = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} 2a_i\left(f,\varphi_i\right) + \sum_{i=0}^{n} a_i\|\varphi_i\|^2$$

преобразуем 2-е слагаемое по формуле $c_n = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

$\|f\|^2 - \sum\limits_{i=0}^{n} 2a_i c_i\|\varphi_i\|^2 + \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\|\varphi_i\|^2$ теперь прибавим и вычтем такое слагаемое, чтобы образовать разность квадратов:

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} 2a_i c_i\|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} a_i\|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} c_i\|\varphi_i\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i\|\varphi_i\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i\|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n}\left(a_i - 2a_i c_i + c_i\right)\|\varphi_i\|^2 =$$

$$\| f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^{n} (a_i - c_i)^2 \|\varphi_i\|^2 \quad .$$

Это выражение минимально, когда разность $(a_i - c_i)$ равна 0, то есть в точности, когда $a_i = c_i$ что и требовалось доказать.

Отсюда следует **неравенство Бесселя:** $\| f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2 \ge 0$

При $n \to \infty$ получается равенство $\| f\|^2 = \sum_{i=0}^{n} c_i \|\varphi_i\|^2$, которое

называется уравнением замкнутости.

Аналоги в векторных пространствах: если рассмотреть неполную сумму квадратов координат какого-то вектора, то очевидно, она меньше, чем квадрат его модуля. Так, для вектора из 3 координат

$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = |a|^2, \quad a_1{}^2 + a_2{}^2 < |a|^2$. Так и здесь, если рассматривать не всю систему функций, а всего лишь до номера n то получим неравенство, а если всю - то равенство.

Кстати, с помощью скалярных произведений и норм можно доказать аналог теоремы Пифагора для систем функций.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \; = \; \|x\|^2 + \|y\|^2$$

если $x(t), y(t)$ ортогональные функции.

Основная тригонометрическая система

Рассмотрим на отрезке $[-l, l]$ такую систему функций:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, ..., \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}, ... \right\}$$

Рассмотрим подробнее, какие у них периоды. Известно, что при умножении на коэффициент частота увеличивается, а соответственно период уменьшается.

Если $\sin x$ имеет период 2π, то
$\sin \pi x$ имеет период 2,
$\sin \frac{\pi x}{l}$ имеет период $2l$, то есть как раз совершает одно колебание на $[-l, l]$. Впрочем, можно было бы рассматривать и на $[0, 2l]$.
$\sin \frac{n\pi x}{l}$ имеет период $\frac{2l}{n}$, то есть для двух первых тригонометрических функций (не считая константы, конечно) на этом промежутке укладывается ровно одна волна, а для последующих - кратное число колебаний.

Докажем её ортогональность.
Константа ортогональна любой из функций этой системы, так как в интегралах $\int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ и $\int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ интегрируется функция, у которой целое количество периодов на данном отрезке, и такой интеграл равен 0.
Ортогональность всех остальных функций доказывается по формулам тригонометрии:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\right).$$

$$\left(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx =$$

$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx$ но так как $n \neq m$ (мы же взяли разные функции из системы) то будет $\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{k\pi x}{l} - \cos\frac{s\pi x}{l}\right)dx$ то есть разность интегралов, каждый из которых 0 в силу того, что там периодическая функция, у которой на промежутке укладывается целое число полных периодов.

Для двух косинусов аналогично: $\left(\cos\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right) =$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

Для синуса и косинуса $\left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{l} - \sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0 .$$

А если умножать не разные функции, а одну и ту же, то получится квадрат нормы. Посчитаем квадраты норм всех функций:

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}2l = \frac{l}{2}.$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \left(\sin\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{n\pi x}{l}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}(2l-0) = l .$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \left(\cos\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}(2l+0) = l .$$

Ряд Фурье: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

его коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Ряд Фурье с помощью синусов и косинусов разных частот осуществляет наилучшее приближении графика функции, в том смысле, что наименьшее среднеквадратичное отклонение. Для частичных сумм ряда, чем больше взято частот, тем более мелкие особенности графика будут учтены, и огибающая пройдёт ближе.

Почему коэффициенты выглядят именно так? Вспомним общую формулу $c_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$. У нас квадрат нормы равен l для этой конкретной системы. Скалярное произведение определяется через интеграл. Вот поэтому и получаются такие формулы.

Свойства чётности и нечётности.
Если $f(x)$ чётная, то $b_n = 0$ и ряд состоит только из константы и косинусов. При вычислении $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ в интеграле одна функция чётная, а синус нечётный, произведение нечётное. Интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку равен 0. Аналогично, если $f(x)$ нечётная, то $a_n = 0$, ведь в интеграле $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ одна нечётная вторая чётная, и интеграл получается от нечётной, по симметричному промежутку, и он равен 0.

Ряд Фурье более подробно учитывает поведение функции на всём протяжении промежутка, в отличие от ряда Тейлора, который учитывает производные только в одной точке.

Пример. Разложить в триг-й ряд Фурье: $f(x) = |x|$ на (-1,1).

$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_0^1 xdx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$, при этом $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, кстати, это и есть средняя высотра графика.

$a_n = \int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$, интегрируем по частям.

$u = x, u' = 1$, $v' = \cos(n\pi x)$, $v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$.

$$2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = 2\left(\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx\right) =$$

$$2\left((0-0) + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right) = 2\frac{\cos(n\pi) - \cos 0}{n^2\pi^2} = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

Обратите внимание, что $\cos(n\pi)$ равен $+1$ при чётных n и -1 при нечётных, поэтому совпадает с $(-1)^n$.

Коэффициенты $b_n = 0$ так как функция чётная. Итак, получаем ряд:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

Более подробная запись:

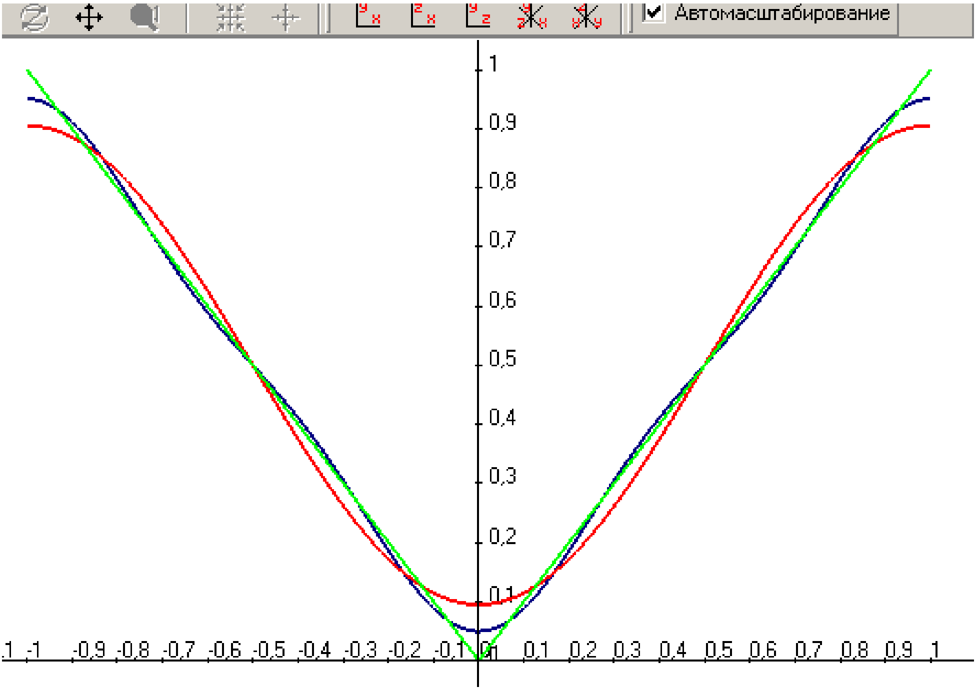
$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2}\cos 5\pi x - \ldots$$

Графики:

Зелёным цветом показан график модуля,

красным частичная сумма $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$.

синим - частичная сумма $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x$.


Автомасштабирование
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-1
-0,9
-0,8
-0,7
-0,6
-0,5
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

ЛЕКЦИЯ № 14. 27. 05. 2016

Периодическое продолжение.

Мы ищем разложение функции в ряд на $[-l, l]$, однако функции sin и cos существуют на всей действительной оси. Таким образом, в каждой точке $x+2l$ из интервала $[l, 3l]$ они принимают точно такое же значение, как и в точке $x \in [-l, l]$. Таким образом, ряд Фурье сходится на $[l, 3l]$ к точно такой же функции, как и на $[-l, l]$. То же самое будет на $[-3l, -l]$, и на $[3l, 5l]$, и так далее. Получается, что сумма ряда Фурье это функция, определённая на всей числовой оси,

Поведения ряда в точках разрыва, теорема Дирихле.

Ряд Фурье в точке разрыва сходится к среднему арифметическому правостороннего и левостороннего пределов функции в этой точке:

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

Если точка разрыва на конце интервала, то $S(l) = \dfrac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$.

Гармонический вид ряда Фурье.

Обозначим $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ тогда $\dfrac{a_n}{A_n} = \cos\varphi_n$, $\dfrac{b_n}{A_n} = \sin\varphi_n$.

Тогда ряд принимает вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos\varphi_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

что по тригонометрической формуле

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ можно свести к выражению

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n \right)$$

здесь A_n - амплитуда, $\dfrac{n\pi}{l}$ - частота, φ_n - фаза.

Как видим, сумма $a\cos x + b\sin x$ на самом деле представляет собой одно колебание, одну волну, с амплитудой $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Комплексный ряд Фурье.

Пусть $\varphi : R \to C$ комплексная функция действительного аргумента, то есть $\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. Скалярное произведение комплекснозначных функций определено так: $(f,\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi}(x)dx$.

Вторая сопряжённая, т.к. только таким способом можно корректно ввести понятие нормы функции. Если по этому правилу умножать одну и ту же функцию, то $(f, f) = \int\limits_a^b f(x)\,\bar{f}(x)dx$ =

$\int\limits_a^b (f_1 + if_2)(f_1 - if_2)dx = \int\limits_a^b (f_1{}^2 + f_2{}^2)dx \ge 0$. Таким образом, существует корень квадратный из этой величины, $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Рассмотрим систему функций $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}_{n \in Z}$ т.е. $\ldots, e^{-\frac{i\pi x}{l}}, 1, e^{\frac{i\pi x}{l}}, e^{\frac{i2\pi x}{l}}, \ldots$

причём при n = 0 получается именно $e^0 = 1$, т.е. константа автоматически находится в составе такой системы функций.

Докажем ортогональность системы $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}$ и вычислим нормы этих функций.

$\left(e^{\frac{in\pi x}{l}}, e^{\frac{im\pi x}{l}} \right) = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{im\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{i(n-m)\pi x}{l}} dx$, что при $n \ne m$ означает

$\int\limits_{-l}^{l} e^{\frac{ik\pi x}{l}} dx = \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} dx + i\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l} dx = 0 + 0i$ так как на отрезке $[-l, l]$ будет целое количество полных периодов этих тригонметрических функций.

Если вычислять это скалярное произведение при одном и том же номере n ,то мы получим этим самым квадраты норм этих функций.

$$\left\| e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\|^2 = \left(e^{\frac{in\pi x}{l}}, e^{\frac{in\pi x}{l}} \right) = \int_{-l}^{l} e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^{l} e^{\frac{0i\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^{l} e^0 dx = \int_{-l}^{l} 1dx =$$

$2l$. Квадраты норм равны $2l$.

Комплексный ряд Фурье. $f(x) = c_0 + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$.

Где $c_0 = \dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$, $c_n = \dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx$.

Пример. Найти комплексный ряд Фурье для функции:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1,0) \\ 1 & x \in (-01) \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2} \ . \ c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi x} dx = -\frac{1}{2in\pi} e^{-in\pi x}\Big|_0^1 = -\frac{e^{-in\pi} - e^0}{2in\pi} =$$

$$-\frac{\cos n\pi - i\sin n\pi - 1}{2in\pi} = -\frac{\cos n\pi - 1}{2in\pi} = -\frac{(-1)^n - 1}{2in\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2in\pi}$$

Ответ. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{2in\pi} e^{in\pi x}$

Если дальше преобразовать экспоненту в комплексной степени, то можно свести к обычному тригонометрическому ряду Фурье. Сделаем это. Объединим пары слагаемых при номерах $n,-n$.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{2n\pi} e^{in\pi x} + \frac{1-(-1)^{-n}}{2(-n)\pi} e^{-in\pi x} \right) =$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\frac{1-(-1)^n}{2in\pi} (e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}) \right) =$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\frac{1-(-1)^n}{n\pi} \frac{e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}}{2i} \right) =$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin n\pi x .$$

Если записать подробнее комплексный ряд Фурье, т.е. внутри суммы подробно представить коэффициент, то получим:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx\right) e^{\frac{in\pi x}{l}} .$$

Обозначим частоту $\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}$. Приразение частоты от предыдущего к следующему номеру: $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{(n+1)\pi}{l} - \dfrac{n\pi}{l} = \dfrac{\pi}{l}$.

Разложение в ряд Фурье существует для функции на $[-l, l]$ для любого сколь угодно большого l. При этом период увеличивается, а частота уменьшается. Если представить что $l \to \infty$ то вся действительная ось представляет собой один большой период, при этом $\Delta\omega_n = \dfrac{\pi}{l} \to 0$.

Очевидно, что можно рассматривать тригонометрические функции с любым действительным коэффициентом, т.е. может ьыть не лискретный, а непрерывный набор частот синуса и косинуса. Предельным переходом при $\Delta\omega_n \to 0$ сумма превращается в интеграл (как интегральные суммы в прошлых темах).

Интеграл Фурье $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du\right) e^{i\omega x} d\omega$$

Промежуточная переменная u во внутренней части этого двойного интеграла пишется для того, чтобы отличать её от внешней переменной x. Но ведь можно коэффициент поделить поровну между внешним и внутренним интегралом,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du\right) e^{i\omega x} d\omega.$$ Та функция от ω, которая здесь в скобке, называется преобразованием Фурье:

Преобразование Фурье $$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Когда мы не рассматриваем её в двойном интеграле, то можно x не заменять на новую переменную u.

Симметричность формул прямого и обратного преобразования Фурье:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad \text{и} \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(F(\omega)\big)e^{i\omega x}d\omega$$

Пример. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in(-\infty,0) \\ e^{-3x} & x\in(-0,\infty)\end{cases}$$

Решение. Здесь на левой части действительной оси функция тождественно 0, так что интеграл только по правой части:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-3x}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(3+i\omega)x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{3+i\omega}e^{-(3+i\omega)x}\Big|_0^\infty =$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{3+i\omega}(0-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(3+i\omega)}$. Можно ещё и домножить на сопряжённое, чтобы в знаменателе получить действительное выражение, тогда ответ: $F(\omega)=\frac{3-i\omega}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)}$.

Числовые ряды и ряды Фурье, их взаимосвязь.

С помощью разложения функции $f(x)=x^2$ в тригонометрический ряд Фурье в $[-1,1]$ можно найти суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Функция является четной, $b_n=0$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$a_n=\int_{-1}^{1}x^2\cos n\pi x dx$ в силу чётности равно $a_n=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx$, такой интеграл можно найти с помощью интегрирования по частям в 2 шага.

Сначала $u_1=x^2, u_1'=2x$, $v_1'=\cos n\pi x, v_1=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$.

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx = 2\left(\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x dx\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx\right) =$$

$-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx$. Затем 2-й шаг,

$$u_2 = x, u_2{}' = 1,\ v_2{}' = \sin n\pi x, v_1 = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x.$$

$$-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx\right) =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi + 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

Итак, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{3}$, $b_n = 0$.

Разложение функции в ряд Фурье:

$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$ то есть $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$.

Подставим $x = 0$. $0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, то есть

$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{3}$, из чего следует $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Подставим $x = 1$. $1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi$, то есть

$\frac{2}{3} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, из чего следует $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

ЛЕКЦИЯ № 15. 27. 06. 2016

Обзорная лекция + дополнительный материал.