Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика

Учебно-методическое пособие
(курс практических занятий)

2-й семестр (часть 2)

для специальности:
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»
(группа 445)

Томск
ТУСУР
2016

Электронное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группе 445 весной 2016 года.

Во втором семестре, согласно рабочей программе, на специальности 09.03.03 во второй половине весеннего семестра изучаются следующие темы:

1. Основы комплексных чисел.
2. Числовые и функциональные ряды.
3. Степенные ряды, ряды Тейлора и Лорана.
4. Ряды Фурье.

Может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий.

445 ПРАКТИКА № 10 29.04.2016

Комплексные числа

Задача 1.

Умножить и поделить в алгебраической форме $7+i$ и $2+4i$.

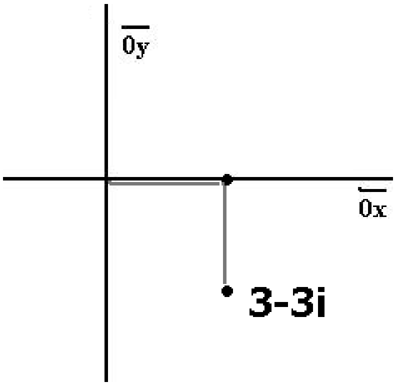
Решение. Умножим эти числа. $(7+i)(2+4i)$ = $14+2i+28i+4i^2$ = $14-4+30i$ = $10+30i$.

Поделим, с помощью умножения на сопряжённое:

$$\frac{7+i}{2+4i} = \frac{(7+i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{14-4i^2+2i-28i}{4-16i^2+8i-8i} = \frac{14+4-26i}{4+16} = \frac{18-26i}{20}$$

$$= \frac{9}{10}-\frac{13i}{10} = 0{,}9-1{,}3i.$$

Задача 2. Запишите число $z=3-3i$ в тригонометрической и показательной формах.



Решение. Здесь первая координата x положительна, вторая координата y отрицательна, то есть от начала координат к данной точке нужно двигаться вправо и вниз, т.е. точка расположена в четвёртой четверти.

Вычислим модуль и аргумент данного числа. $\rho=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

$\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) = arctg\left(\dfrac{-3}{3}\right) = arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$. Впрочем, также будет верно принять $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$, что отличается на полный оборот 2π.

Тригонометрическая форма числа $z = 3 - 3i$:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Показательная форма: $z = \rho e^{i\varphi} = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$.

Задача 3. Разделить $\dfrac{-2+2i}{1+i}$ двумя способами:

1) с помощью умножения на сопряжённое число.

2) в показательной форме.

Решение. 1) $\dfrac{-2+2i}{1+i} = \dfrac{(-2+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{4i}{2} = 2i$.

2) $\dfrac{-2+2i}{1+i} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = 2\cdot e^{i\left(3\pi/4 - \pi/4\right)} = 2\cdot e^{\pi i/2} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$

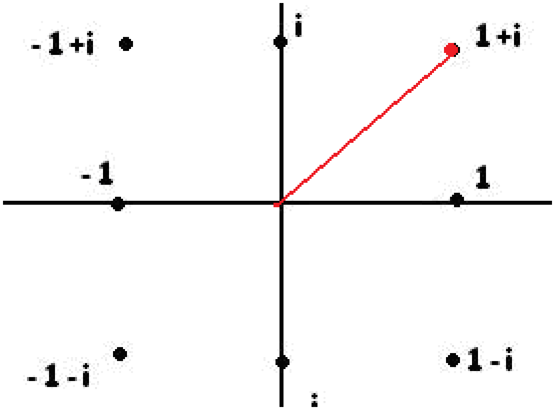
Задача 4. Возвести в степень в алгебраической и показательной форме: $(1+i)^4$.

Решение. Перейдём к показательной форме, для этого сначала найдём модуль и аргумент числа $(1+i)$ с помощью чертежа. Число в 1-й четверти, угол 45 градусов.

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. По формуле Муавра, $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 =$

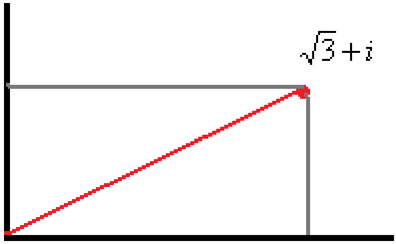
$$\left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 2^2 e^{i\frac{\pi}{4}4} = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4(-1+0i) = -4.$$

Чертёж, показывающий, расположение $(1+i)$ на плоскости, это число выделено красным цветом:



Задача 5. Возвести в степень $\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}$.

Решение. Аналогично прошлой задаче, сначала переводим в показательную форму. Угол здесь 30 градусов, то есть $\frac{\pi}{6}$, модуль $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$. Итак, $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.



Тогда $\left(\sqrt{3}+i\right)^{18} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{18} = 2^{18}e^{i\frac{\pi}{6}18} = 2^{18}e^{i3\pi} = 2^{18}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$

Теперь можем отнять полный оборот 2π , косинус и синус при этом не меняются. тогда получим $2^{18}(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{18}(-1+i0) = -2^{18} = -2^{10}2^8 = -1024\cdot 256 = -262144$.

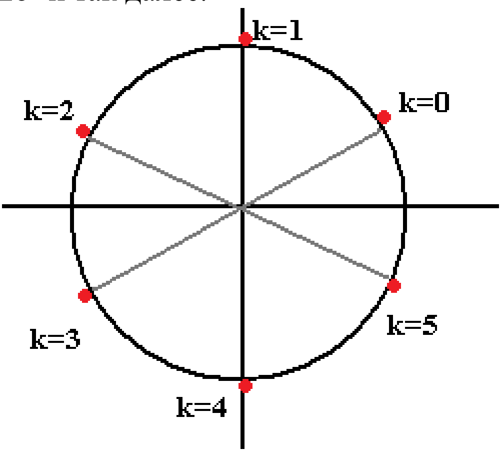
Задача 6. Вычислить $\sqrt[6]{-64}$.

Решение. По формуле $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$.

Сначала запишем число в тригонометрической форме.
$-64=64(\cos\pi+i\sin\pi)$. Тогда

$$\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)=$$

$2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}\right)\right)$. Начертим окружность радиуса 2 и отметим там 6 точек, первой соответствует угол 30^0, остальные больше на 60^0 , 120^0 и так далее.



$$k=0\ \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\ \Rightarrow\ z=\sqrt{3}+i$$

$$k=1\Rightarrow\ z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow\ z=2i$$

$$k=2\Rightarrow\ z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\Rightarrow\ z=-\sqrt{3}+i$$

$$k=3\Rightarrow\ z=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)\Rightarrow\ z=-\sqrt{3}-i$$

$$k=4\Rightarrow\ z=2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right)\Rightarrow\quad z=-2i$$

$$k=5\Rightarrow\ z=2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\Rightarrow\quad z=\sqrt{3}-i\,.$$

Задача 7. Дано $z=2+i\dfrac{\pi}{6}$. Найти e^z.

Решение. $e^{2+i\frac{\pi}{6}}\quad e^2e^{i\frac{\pi}{6}}=e^2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=e^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=$

$\dfrac{e^2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{e^2}{2}i\,.$

Задача 8. Найти все значения $Ln(i)$.

Решение. По формуле $Ln(z)=\ln\rho+i(\varphi+2\pi k)$ ($\forall k\in Z$):

$$Ln(i)=\ln(1)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=0+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right).$$

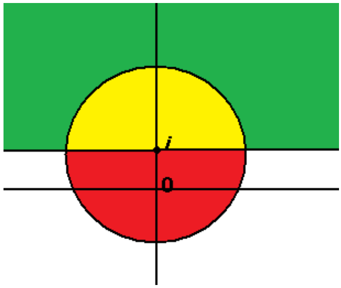
Задача 9. Начертить область, удовлетворяющую условиям:
$\{\operatorname{Re}(z)>0,\operatorname{Im}(z)>0\}$.

Решение. Эти множества можно записать так: $x>0, y>0$.

Первое есть правая полуплоскость, второе - перхняя полуплоскость.
В пересечении получается первая четверть. Чертёж очевиден: заштриховать 1-ю четверть.

Задача 10. Начертить область, удовлетворяющую условиям:
$\{\operatorname{Im}(z)>1,|z-i|<2\}$.

Решение. Первое множество соответствует $y>1$ на плоскости, обозначено зелёным цветом. Второе это круг радиуса 2 вокруг точки i, обозначено красным цветом. Пересечение двух множеств, то есть именно то, что надо найти, показано жёлтым цветом.



Домашняя задача.

Возвести в степень в показательной форме: $(-1+i)^6$

Ответ 8i.

Тема: Числовые ряды.

Задача 11. Найти сумму ряда. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{2}{n^2-6n+8}$.

Решение. Чтобы разбить на группы слагаемых, часть из которых будет взаимно скращаться, сначала разложим знаменатель на множители: $\frac{2}{n^2-6n+8}=\frac{2}{(n-2)(n-4)}$ затем надо разбить на простейшие дроби. $\frac{2}{(n-2)(n-4)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n-4}=\frac{A(n-4)+B(n-2)}{(n-2)(n-4)}$,

откуда $A(n-4)+B(n-2)=0n+2$, $An+Bn-(4A+2B)=0n+2$,

получаем систему $\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B=2 \end{cases}$, отсюда $A=-1, B=1$.

Тогда ряд можно представить так: $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{2}{n^2-6n+8}=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\dots$ Здесь для любого знаменателя, начиная от 3 и выше, всегда есть отрицательная дробь с таким знаменателем, а через 2 шага точно такая же положительная.

Таким образом, сокращается всё, кроме $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Ответ: $\frac{3}{2}$.

Выяснить сходимость по признакам сравнения или интегральному признаку Коши:

Задача 12. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение. По интегральному признаку Коши, можем рассмотреть несобственный интеграл, эквивалентный данному ряду по сходимости. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x} dx\right) = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty$.

Интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

Задача 13. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln n}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{n^3 \ln n} < \frac{1}{n^3}$ для любого $n \ge 3$. Тогда ряд (по признаку сравнения) можно ограничить сверху другим рядом, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln n} < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который, в свою очередь, сходится, так сходится эквивалентный ему несобственный интеграл $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ (заменяем по интегральному признаку Коши). Итак, ответ: ряд сходится (добавим, что сходится абсолютно, так как все слагаемые и так положительны).

Задача 14. Выяснить, сходимость ряда $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Решение. По признаку сравнения в непредельной форме, $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, таким образом, этот ряд получается больше, чем некоторый расходящийся $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$. Гармонический ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, это было доказано в лекциях ранее. Поэтому ответ: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ расходится.

Выяснить сходимость по признаку Даламбера:

Задача 15. Выяснить, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Решение. Запишем предел отношения последующего (n+1) члена ряда к предыдущему (n). Модули здесь не особо нужны, так как все члены ряда и так положительны, т.е. если сходимость есть, то она заодно и абсолютная.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0.$$

Итак, $q=0<1$, ряд сходится (абсолютно).

Задача 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n n!}$

Решение. Запишем предел отношения модуля (n+1) члена ряда к модулю n-го. При этом мы отбрасываем знакочередование.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!}:\frac{(n+1)}{2^n n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{(n+1)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=1\cdot 0=0.$$

Итак, $q=0<1$, ряд сходится (абсолютно).

445 ПРАКТИКА № 11 06.05.2016

Числовые ряды. Функциональные, степенные ряды, Тейлора.

Задача 1. Выяснить сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+3)}{7^{2n-1}(5n^2-4)}$.

Решение. По признаку Даламбера.

$$a_n=\frac{(2n+3)}{7^{2n-1}(5n^2-4)},\ a_{n+1}=\frac{(2(n+1)+3)}{7^{2(n+1)-1}(5(n+1)^2-4)}=\frac{(2n+5)}{7^{2n+1}(5n+10n+1)}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+5)}{7^{2n+1}(5n+10n+1)}\dfrac{7^{2n-1}(5n^2-4)}{(2n+3)}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3}\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-4}{5n+10n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{7^{2n-1}}{7^{2n+1}}=1\cdot1\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}.$$

$q=\dfrac{1}{49}<1$ ряд сходится (абсолютно).

Задача 2. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{2^n n!}$.

Решение. По признаку Даламбера.

$a_n=\dfrac{n^n}{2^n n!},\ a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\dfrac{2^n n!}{n^n}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{e}{2}>1$, ряд расходится.

Задача 3. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. Здесь можно действовать по радикальному признаку Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}\right)^{-1}=$$

$\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$ используя 2-й замечательный предел, получаем $\dfrac{1}{e}<1$.

$q=\dfrac{1}{e}<1$, ряд сходится (абсолютно).

Задача 4. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

Решение. По радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2+\frac{1}{n}}.$$

Здесь даже не надо использовать 2-й замеч. предел, так как нет неопределённости: и числитель, и знаменатель стремятся каждый к конечному числу.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{2+\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}<1$, абсолютно сходится.

Так как мы изначально рассматривали модуль, то сходимость абсолютная.

Задача 5. Выяснить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{n}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}=0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{n}=\cos 0=1$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, то есть слагаемые не уменьшаются и не стремятся к нулю, тогда по необходимому признаку ряд расходится. Не выполнено необходимое условие сходимости (слагаемые должны уменьшаться к 0 при росте n).

Поиск области сходимости функциональных рядов.

Задача 6. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

Решение. По признаку Даламбера, надо найти отношение модуля следующего слагаемого к модулю предыдущего, причём здесь мы это делаем для произвольного параметра x.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = |x|.$$

Теперь надо решить неравенство $q(x)=|x|<1$. Если $|x|<1$, то $x\in(-1,1)$ есть область гарантированной абсолютной сходимости. За пределами этого интервала расходимость. А вот поведение ряда в граничных точках -1 и 1 надо исследовать вручную, подставляя каждую точку и получая числовой ряд.

При $x=1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, такой ряд сходится, так как степень 2, больше 1, (про это был факт в лекциях).

При $x=1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, такой ряд тем более сходится, причём абсолютно, так как по модулю было бы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а этот ряд сходится (только что заметили, на 1 строку выше).

Таким образом, точки -1 и 1 здесь тоже войдут в область сходимости, и ответ: ряд абсолютно сходится в [-1,1].

Задача 7. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+3x+2)^n}{2^n}$.

Решение. По признаку Даламбера, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x^2+3x+2|^n}{2^n}} =$

$\frac{|x^2+3x+2|}{2}<1$, тогда $|x^2+3x+2|<2$, что равносильно выполнению одновременно двух неравенств: $-2<x^2+3x+2<2$.

Для правого неравенства, получаем $x^2+3x<0$, корни $0,-3$, оно верно для $x\in(-3,0)$.

Для левого неравенства, $x^2+3x+4>0$, но это выполняется на всей числовой прямой, т.к. корней нет, а ветви этой параболы направлены вверх. Верно для $x\in(-\infty,\infty)$. Пересечением этих двух множеств является интервал $(-3,0)$.

Также легко заметить, что в граничных точках ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, расходится. Ответ: абсолютно сходится в $(-3,0)$.

Задача 8. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(x-2)^n}$.

Решение. По признаку Коши, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{|x-2|^n}}=\frac{3}{|x-2|}<1$, т.е. $|x-2|>3$, что равносильно $x>5$ или $x<-1$. Для граничных точек получаются числовые ряды, для которых нет сходимости (по необходимому признаку). Ответ: абсолютно сходится в $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$.

Задача 9. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$.

Решение. По признаку Коши, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln x|^n}=|\ln x|<1$, тогда

$-1<\ln x<1$. Из правого неравенства следует $e^{\ln x}<e^1$, т.е. $x<e$.

Из левого неравенства, $\ln x>-1$, $e^{\ln x}>e^{-1}$, $x>\frac{1}{e}$.

Проверяем граничные точки. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln e)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ расходится,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, тоже расходится.

Ответ. Ряд абсолютно сходится в интервале $\left(\frac{1}{e}, e\right)$.

Задача 10. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{2n} 9^n$.

Решение. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x-1|^{2n} 9^n} = 9|x-1|^2 = 9(x-1)^2 < 1 \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{9} \Rightarrow$

$(x-1)^2 < \frac{1}{9} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x-1 < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$.

В обеих граничных точках получим $\sum_{n=1}^{\infty} 9^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, расходится.

Ответ. Ряд абсолютно сходится в интервале $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Степенные ряды - поиск радиуса сходимости.

Вспомним формулы из лекций: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Задача 11. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Решение. Запишем коэффициенты с номерами n и n+1.

$a_n = \frac{1}{n2^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. Тогда $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} \frac{(n+1)2^{n+1}}{1} =$

$2\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2$. Ответ. $R = 2$.

Задача 12. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$.

Решение. $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)n}$. Тогда $R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-n} = 1$. Ответ. $R = 1$.

Задача 13. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(2n-1)3^n}$.

Решение. $a_n = \frac{1}{(2n-1)3^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$,

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)3^{n+1}}{(2n-1)3^n} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 3$. Ответ. $R = 3$.

Задача 14. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n}$.

Решение. $a_n = \frac{1}{4^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}$, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$. Ответ. $R = 4$.

Задача 15. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n!}$.

Решение. $a_n = \frac{10^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда $R = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty$.

Ответ. $R = \infty$, то есть сходимость на всей числовой оси.

Задача 16. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2^n} x^n}{n}$.

Решение. $a_n = \frac{3^{2^n}}{n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{2^{n+1}}}{n+1}$. Тогда $R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2^n}}{n} \frac{n+1}{3^{2^{n+1}}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2^n}}{3^{2^n 2}} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2^n}}{\left(3^{2^n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2^n}}{3^{2^n} 3^{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{2^n}} = 0$.

Ответ. $R = 0$, т.е. сходимость только в самой точке $x = 0$ и нигде больше.

445 ПРАКТИКА № 12 13.05.2016

Поиск суммы степенного ряда.

Задача 1. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$

Решение. Если $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$ то первообразная от $S(x)$ равна $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n} = x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{3^2}+...$ а это уже геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{x}{3}$, её сумма равна $\frac{x}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3x}{3-x}$. После дифференцирования получим $S(x) = \left(\frac{3x}{3-x}\right)' = \frac{3(3-x)-(-1)3x}{(3-x)^2} = \frac{9}{(3-x)^2}$. Ответ. $S(x) = \frac{9}{(3-x)^2}$.

Задача 2. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$.

Решение. Проинтегрируем почленно каждое слагаемое:

$$\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int(2n+1)x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1} = x+x^3+x^5+x^7+...$$

Это геометрическая прогрессия, её сумма $\frac{x}{1-x^2}$. Тогда $S(x) =$

$$\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2)-(-2x)x}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Ответ. $S(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

Задача 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$.

Решение. Эта задача решается в 2 шага. Видно, что только 2-я первообразная здесь не будет иметь коэффициентов, так, чтобы можно было использовать прогрессию.

$(n+2)\big((n+1)x^n\big) \to (n+2)x^{n+1} \to x^{n+2}$.

Найдём $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 + x^3 + x^4 + ... = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Тогда $S(x) = \left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)''$. Найдём поочерёдно 2 производных.

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x)-(-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

$$\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(2-2x)(1-x)^2-2(1-x)(-1)(2x-x^2)}{(1-x)^4}$$ сократим на (1-x)

$$\frac{(2-2x)(1-x)-2(-1)(2x-x^2)}{(1-x)^3} = \frac{2(1-x)^2+2(2x-x^2)}{(1-x)^3} =$$

$$\frac{2(1-2x+x^2)+4x-2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2-4x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ответ. $S(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Задача 4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$.

Решение. $\int S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = -x^2 + x^3 - x^4 + ... = \dfrac{-x^2}{1-(-x)} =$

$-\dfrac{x^2}{1+x}$. Знакочередование приводит к тому, что в знаменателе появилась сумма, а не разность.

$$S(x) = -\left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = -\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} = -\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} =$$

$$-\frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2} = -\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}.$$

Ответ. $S(x) = -\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$.

Задача 5. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Решение. Здесь степень не соответствует коэффициенту, то есть прямое интегрирование или дифференцирование не избавит от наличия коэффициента. Производная равна n^2x^{n-1} а первообразная $\frac{n}{n+1}x^{n+1}$. Но вот если бы степень была (n-1) то всё бы получилось. Так вот, мы можем сделать сдвиг степени, и получить более удобное выражение, если вынести x за скобку, то есть за знак ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + ... = x\left(1 + 2x + 3x^2 + ...\right) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Теперь обозначим новое выражение через S_1 и для него уже задача вполне решаема тем методом, который изучили ранее.

$S(x) = xS_1(x)$, где $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Первообразная от S_1 это

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + ... = \frac{x}{1-x}.$$

$S_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Вспомним про то, что мы отделили одну степень, чтобы улучшить функцию. А сейчас мы нашли $S_1(x)$. При этом $S(x) = xS_1(x)$. Тогда ответ $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Задача 6. Доказать с помощью почленного дифференцирования формулу: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$

Решение. $\left(\ln(1+x)\right)' = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right)' \quad \Leftrightarrow$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$ но ведь это и есть геометрическая прогрессия и её сумма: $\frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - ...$.

Задача 7. Разложить в ряд Тейлора: $f(z) = \frac{z}{z+2}$ по степеням z .

Решение. Сначала определим круг сходимости ряда. Центр в 0, так как требуется разложить по степеням z , т.е. в ряде должны быть только степенные функции типа $(z-0)$ то есть центр 0.

Ближайшая точка разрыва это $z = -2$. Поэтому круг радиуса 2 с центром в нуле, т.е. $|z| < 2$.

Дальше, чтобы получать в знаменателе структуру типа $1-q$, есть 2 пути: вынести за скобку либо z либо 2.

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} \quad \text{либо}$$

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z}{2+z} = \frac{z}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}.$$

Но ведь $|z| < 2$, поэтому $\frac{|z|}{2} < 1$ а $\frac{2}{|z|} > 1$, так что первый вариант использовать нельзя, ведь там получилось бы $q > 1$ и нельзя считать по формуле сходящейся геометрической прогрессии, для которой должно быть обязательно $q < 1$. Поэтому выносим за скобку именно константу, а не z .

Итак, $\frac{z}{z+2} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} - \frac{z^4}{16} + ...$ это и есть требуемое разложение в степенной ряд Тейлора.

Задача 8. Разложить в ряд Тейлора $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)}$ по степеням z и найти $f^{(4)}(0)$.

Решение. В этой задаче сначала надо разложить на простейшие, чтобы в каждой дроби в знаменателе была только сумма или разность двух объектов.

$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} = \frac{A(z+3)+B(z-1)}{(z-1)(z+3)}$, тогда

$Az + 3A + Bz - B = 1z + 0 \Rightarrow$ система $\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow B = \frac{3}{4}$. Тогда функция имеет вид $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$.

Точки разрыва $z = 1$ и $z = -3$, поэтому наибольший круг с центром в нуле может быть радиуса 1. Итак, ряд будет существовать в круге $|z| < 1$. При этом очевидно, что $|z| < 1 < 3$, поэтому автоматически выполнено и условие $|z| < 3$, т.е. $\frac{|z|}{3} < 1$. Поэтому во второй дроби можно выносить 3 за скобку для формирования структуры суммы прогрессии вида $\frac{1}{1-q}$. Итак, $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z+3} =$

$-\frac{1}{4}\frac{1}{1-z} + \frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-z} + \frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} =$

$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n$. Можно объединить эти две суммы в одну.

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)z^n \quad .$$

Теперь найдём коэффициент при 4 степени, чтобы найти $f^{(4)}(0)$. Приравняем коэффициент из этого ряда и тот его вид, который следует из теории. $\frac{1}{4}\left(-1+\frac{(-1)^4}{3^4}\right)=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ тогда

$$f^{(4)}(0)=\frac{4!}{4}\left(-1+\frac{(-1)^4}{3^4}\right) = 6\left(-1+\frac{1}{81}\right)= -\frac{6\cdot 80}{81} = -\frac{160}{27}.$$

Ответ. Ряд $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)z^n$, $\quad f^{(4)}(0) = -\frac{160}{27}$.

Задача 9. Найти $f^{(10)}(0)$ для $f(x)=x\sin x$.

Решение. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора. Прогрессия здесь не нужна, можно воспользоваться известной формулой для синуса.

$$x\sin x = x\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\right) = x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\frac{x^{10}}{9!}-...$$

Здесь нам нужен только коэффициент при степени 10.

$$\frac{1}{9!}=\frac{f^{(10)}(0)}{10!} \Rightarrow f^{(10)}(0)=\frac{10!}{9!}=10.$$

Задача 10. Приближённо найти значение интеграла $\int_0^{0,1}\sin(x^2)dx$ с точность 10^{-5}.

Решение. Разложим функцию под интегралом в ряд.

$$\int_0^{0,1}\sin(x^2)dx = \int_0^{0,1}\left((x^2)-\frac{(x^2)^3}{3!}+\frac{(x^2)^5}{5!}-\ldots\right)dx = \int_0^{0,1}\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots\right)dx$$

$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{0,1} - \left.\frac{x^7}{7\cdot 3!}\right|_0^{0,1} + \left.\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}\right|_0^{0,1} - \ldots$ Видно, что даже второе слагаемое меньше, чем 10^{-7}, то есть может повлиять лишь на 6 знак после запятой. $\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{0,1} = \frac{0,001}{3} \approx 0,00033$.

Задача 11. Найти $f^{(8)}(0)$ для $f(z) = 2x^3\sin\frac{x}{2}$.

Решение. $f(z) = 2x^3\sin\frac{x}{2} = 2x^3\left(\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!}-\ldots\right) =$

$x^4 - \frac{x^6}{2^2\cdot 3!}+\frac{x^8}{2^4\cdot 5!}-\ldots$ Извлекаем слагаемое при степени 8 и сравниваем его с теоретическим значением.

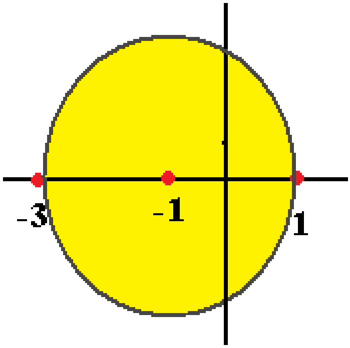
$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = \frac{1}{2^4\cdot 5!} \Rightarrow f^{(8)}(0) = \frac{8!}{2^4\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2^4} = \frac{6\cdot 7\cdot 2^3}{2^4} = \frac{42}{2} = 21.$$

Ответ. $f^{(8)}(0) = 21$.

Задача 12. Разложить в ряд Тейлора: $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)}$ по степеням $z+1$.

Решение. Разложение на простейшие сначала производится точно так же, как в задаче 8: $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$. Но здесь центр круга не в 0, а в точке -1 потому что $z+1 = z-(-1)$. Точки разрыва $z=1$ и $z=-3$.

Поэтому расстояние до ближайшей точки разрыва равно 2, и круг здесь имеет вид $|z+1|<2$. Он показан на чертеже:



В выражении $\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3}$ сначала надо прибавить и отнять константы, чтобы в знаменателе явно был выделен блок $z+1$.

$\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{z+3} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{(z+1)+2}$ теперь скобку вида $(z+1)$ мы не будем раскрывать вплоть до ответа, можно даже переобозначить её через w (но не обязательно).

Выносим за скобку константу 2 в каждой из дробей.

$-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{3}{8}\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}$. В круге $|z+1|<2$ получается, что верно

$\frac{|z+1|}{2}<1$ то есть там как раз получается такое $q<1$, как и надо для сходящейся геометрической прогрессии. Тогда далее

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{3}{8}\frac{1}{1-\left(-\frac{z+1}{2}\right)} = -\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n+\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n .$$

Здесь в 2 частях индексы меняются синхронно, т.е. можно объединить

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+3(-1)^n}{2^{n+3}}(z+1)^n .$$

Задача 13. Разложить в ряд Тейлора: $f(z)=\frac{z+2}{z^2-1}$ по степеням z.

Решение. Сначала надо разложить на простейшие дроби.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-1} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+B(z-1)}{(z-1)(z+1)} \Rightarrow$$

$Az+A+Bz-B=1z+2 \Rightarrow$ система $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow 2A=3 \Rightarrow A=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$. Итак, функция имеет вид: $\frac{3}{2}\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)}$.

Теперь оценим, в каком круге будет разложение. Центр в 0, так как по степеням z. Точки разрыва $z=1$, $z=-1$. Расстояние от центра до ближайшей точки разрыва равно 1. Поэтому разложение в ряд будет в круге $|z|<1$.

$\frac{3}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-z)}$ теперь то, что следует в знаменателе после единицы, уже и так удовлетворяет условию $|z|<1$, то есть выносить за скобки никакие константы уже не надо. Можно уже использовать формулу суммы прогрессии.

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-z)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-3-(-1)^n}{2}z^n =$$

$$-2-z-2z^2-z^3-\ldots$$

445 ПРАКТИКА № 13 20.05.2016

Задача 1. Найти производную $f^{(6)}(0)$ для $f(x)=e^x \sin x$.

Решение. Запишем разложения в ряд Тейлора для каждой функции.

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\ldots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

Найдём все те комбинации, которые дают 6 степень.

$x\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^3}{3!}\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}x = \left(\dfrac{2}{5!}-\dfrac{1}{3!3!}\right)x^6$, что надо приравнять к $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$.

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\frac{2}{5!}-\frac{1}{3!3!}=\frac{2}{120}-\frac{1}{36} = \frac{1}{60}-\frac{1}{36}=\frac{6-10}{360}=\frac{-4}{360}=\frac{-1}{90}.$$

$$f^{(6)}(0)=-\frac{6!}{90}=-\frac{720}{90}=-8.$$

Задача 2. Найти кольцо сх ряда Лорана: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{z^n}{1+3^n}$

Решение. Сначала исследуем правильную часть.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{1+3^n}$, по признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|z|^{n+1}}{1+3^{n+1}}\dfrac{1+3^n}{|z|^n} = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3^n}{1+3^{n+1}}$

сократим на 3^n числитель и знаменатель.

$$|z|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{1}{3^n}+3} = |z|\frac{0+1}{0+3}=\frac{|z|}{3}<1, \text{ тогда } |z|<3.$$

Теперь рассмотрим главную часть $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{z^n}{1+3^n}$. Можно задать индексацию натуральными числами, если сделать замену $m=-n$ и после этого уже применять обычный признак Даламбера.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{1+3^n} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{-m}}{1+3^{-m}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^m\left(1+\frac{1}{3^m}\right)}.$$

Тогда $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{|z|^{m+1}\left(1+\frac{1}{3^{m+1}}\right)}\dfrac{|z|^m\left(1+\frac{1}{3^m}\right)}{1} = \dfrac{1}{|z|}\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3^m}}{1+\frac{1}{3^{m+1}}} =$

$$\frac{1}{|z|}\frac{1+0}{1+0}=\frac{1}{|z|}<1, \text{ тогда } |z|>1.$$

Ответ $1<|z|<3$ - кольцо сходимости.

Задача 3. Разложить в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z+4}$ по степеням z

Решение. Точки разрыва $z=3$ и $z=-4$, центр кольца в 0, значит, кольцо определяется условием $3<|z|<4$.

$$f(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+4}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n=$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{4^{n+1}}$. Можно ещё произвести сдвиг индекса в главной части, чтобы не был индекс 0 в двух частях сразу:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{4^{n+1}}$ но фактически и так было видно, что главная часть начинается с -1 степени.

Задача 4. Разложить в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z+4}$ по степеням $(z-1)$ в кольце.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь центр смещён в 1. Это влияет и на радиусы кольца. Ближайшая точка разрыва на расстоянии 2, а более далёкая на расстоянии 5. Поэтому условие кольца $2<|z-1|<5$. Но сначала надо прибавить и отнять 1, чтобы создать отдельное слагаемое $z-1$ его мы не будет раскрывать вплоть до ответа.

$f(z)=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z+4}=\dfrac{1}{(z-1)-2}+\dfrac{1}{(z-1)+5}$ теперь выносим за скобку либо константу, либо $z-1$ с учётом того, что должно получаться 1 и второй объект, который меньше 1.

$\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}+\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{5}\right)}$ согласно условию $2<|z-1|<5$, каждый объект в знаменателе здесь по модулю меньше 1 и может служить знаменателем сходящейся геометрической прогрессии.

Далее, $\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^n}+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{5^n}=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{5^{n+1}}.$$

Задача 5. Разложить в ряд Лорана $f(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+4}$ во внешней области $|z-1|>5$.

Решение. Здесь $|z-1|>5$, а значит атоматически и $|z-1|>2$. Поэтому выносить за скобку в знаменателе надо так, чтобы всегда получались константы, делённые на $z-1$.

$$\frac{1}{(z-1)-2}+\frac{1}{(z-1)+5}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(-\frac{5}{z-1}\right)}=$$

$$\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^n}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{(z-1)^n}$$

Первая часть преобразуется, как и в прошлом примере, а вот вторая по-новому. Кстати, здесь можно объединить, так как обе суммы относятся к главной части, там везде отрицательные степени.

$$\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n+2^n}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n+2^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

45 минут контрольная № 3. Темы:

1. Действия с комплексными числами.

2. Формула Муавра.

3. Числовые ряды.

4. Функциональные ряды.

Пример. Контрольная работа №3. Вариант № 0.

1. Поделить $\dfrac{1+5i}{1+7i}$.

2. Вычислить в показательной форме: $(-\sqrt{3}+i)^9$
ответ дать в виде a+bi.

3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$

4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{3^n}$

445 ПРАКТИКА № 14 27.05.2016 Ряды Фурье.

Задача 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)=x$ на (-1,1).

Решение. Так как функция нечётная, то все коэффициенты a_0 и a_n равны 0. Поэтому считаем только b_n. Учитываем, что $l=1$.

$b_n=\dfrac{1}{1}\int\limits_{-1}^{1}x\sin n\pi x dx$. Вычисляем интеграл по частям.

$u=x$, $u'=1$, $v'=\sin n\pi x$, $v=-\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$b_n=-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$-\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi+\dfrac{-1}{n\pi}\cos(-n\pi)+\dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1}$ так как косинус чётная функция, то далее $-\dfrac{2}{n\pi}\cos n\pi+\dfrac{1}{n^2\pi^2}(0-0) = -\dfrac{2}{n\pi}\cos n\pi =$

$-\dfrac{2(-1)^n}{n\pi}=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$. Ответ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Задача 2. Разложить в триг. ряд Фурье $f(x) = 2x + 3$ на (-1,1)

Решение. Заметим, что функция $f(x) - 3 = 2x$ нечётная. То есть, f это сумма нечётной и константы. Таким образом, коэффициенты a_n здесь тоже окажутся равны 0. Надо вычислить a_0 и b_n.

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x+3)dx = (x^2+3x)\Big|_{-1}^{1} = (1+3)-(1-3) = 4-(-2) = 6,\ \frac{a_0}{2} = 3.$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x+3)\sin n\pi x dx$$. Вычисляем интеграл по частям.

$u = 2x+3,\ u' = 2,\ v' = \sin n\pi x,\ v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$b_n = -\frac{2x+3}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$$-\frac{5}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}(0-0) = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Ответ. Ряд Фурье: $3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

Замечание. Для поиска коэффициентов b_n можно было воспользоваться результатом, полученным в задаче 1.

$$b_n = \int_{-1}^{1}(2x+3)\sin n\pi x dx = 2\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x dx + 3\int_{-1}^{1}\sin n\pi x dx$$

первое слагаемое содержит интеграл, равный в итоге $\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$ а второе равно 0. Тогда $b_n = 2\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$.

Задача 3. Найти ряд Фурье для $f(x) = \begin{cases} x+1 & if\ x \in (-1,0) \\ 1 & if\ x \in (0,1) \end{cases}$

Решение. Здесь функция не является чётной либо нечётной, поэтому надо будет искать все коэффициенты.
При этом, на левой и правой части интервала надо считать отдельно, ведь там функция задана по-разному.

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx + \int\limits_{0}^{1}1dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + x\Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{2}-1\right)+1 = \frac{3}{2}, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}.$$

$a_n = \int\limits_{-1}^{0}(x+1)\cos n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1}\cos n\pi x dx$. Первый интеграл вычисляется методом «по чсатям», второй просто в один шаг.
Кстати, для убодства вычислений можно раскрыть скобки и объединить так:

$$a_n = \int\limits_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx + \int\limits_{-1}^{0}\cos n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1}\cos n\pi x dx =$$

$\int\limits_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx + \int\limits_{-1}^{1}\cos n\pi x dx$. Тогда интеграле по частям остаётся не скобка, а только x.

$u = x$, $u' = 1$, $v' = \cos n\pi x$, $v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{0}x\cos n\pi x dx + \int\limits_{-1}^{1}\cos n\pi x dx = \frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-1}^{0}\sin n\pi x dx + \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{-1}{n\pi}\sin(-n\pi) - \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-1}^{0}\sin n\pi x dx + \frac{0-0}{n\pi} = 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Bigg|_{-1}^{0} + 0 =$$

$$\frac{\cos 0 - \cos(-n\pi)}{n^2\pi^2} = \frac{1-\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n = \int\limits_{-1}^{0}(x+1)\sin n\pi x dx + \int\limits_{0}^{1}\sin n\pi x dx = \int\limits_{-1}^{0}x\sin n\pi x dx + \int\limits_{-1}^{1}\sin n\pi x dx$$

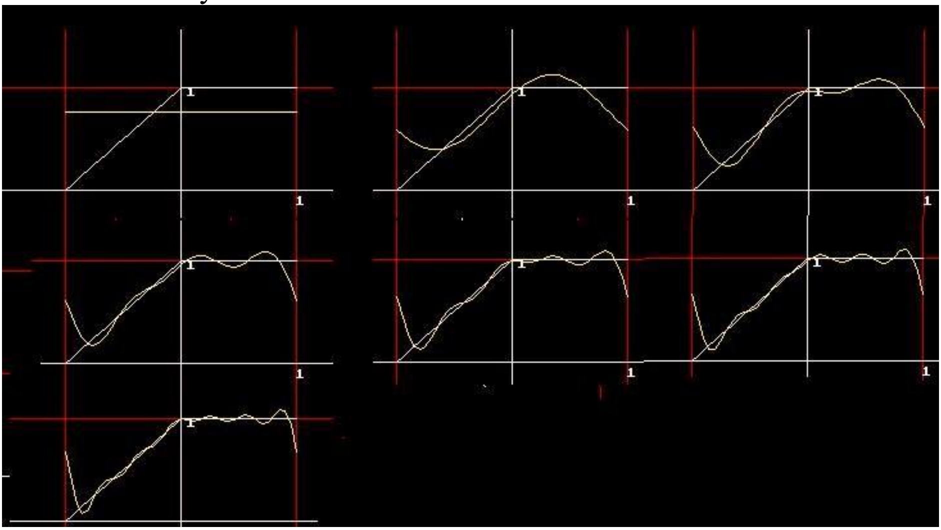
В первом $u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin n\pi x$, $v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. Тогда

$$-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0} - \frac{\cos n\pi - \cos n\pi}{n\pi} = \frac{-(-1)^n}{n\pi} + 0 - 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Ответ. Ряд Фурье: $\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$.

Ниже показан чертёж к этой задаче, получившийся в результате работы программы. Видно, что чем больше n, тем более точно кривая огибает ломаную.



Задача 4. Разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (-2,0) \\ 5, x \in (0,2) \end{cases}.$$

Решение. Здесь функция ступенчатая, поэтому вычислять интегралы по частям не придётся, будет в 1 шаг. Но разбивать на две части надо, т.к. функция задана по-разному справа и слева от 0. Кроме того, надо учесть, что $l=2$ здесь.

$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 1dx + \int\limits_{0}^{2} 5dx\right) = \frac{1}{2}(2+10) = 6$. Тогда $\frac{a_0}{2} = 3$. Кстати, это и есть средняя высота графика этой функции.

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} \cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int\limits_{0}^{2} 5\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + 5\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}(\sin 0 - \sin(-n\pi)) + 5\frac{2}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)\right) = 0$ так как синус любого угла, кратного π, есть 0. В ряде Фурье не будет косинусов. Впрочем, об этом можно было догадаться и сразу и не считать интегралы: ведь если сместить этот график вниз на 3, то получится нечётная функция.

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} \sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int\limits_{0}^{2} 5\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + 5\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)$$

$= \frac{-1}{n\pi}\left((\cos 0 - \cos n\pi) + 5(\cos n\pi - \cos 0)\right)$ притом здесь мы уже сразу учли чётность косинуса, что $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$.

Итак, $\frac{-1}{n\pi}\left(1-(-1)^n + 5(-1)^n - 5\right) = \frac{-1+(-1)^n - 5(-1)^n + 5}{n\pi} =$

$\frac{4-4(-1)^n}{n\pi} = 4\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$.

Ответ. Ряд Фурье: $3 + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Задача 5. Разложить в тригонометрический ряд Фурье $f(x) = x + |x|$ на интервале (-1,1).

Решение. Сначала исследуем, что такое $f(x) = x + |x|$ и как это выражение ведёт себя на разных частях интервала: $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Поэтому здесь на левой части интеграл считать не надо, он равен 0. Остаётся только на (0,1).

$a_0 = \int\limits_0^1 2x dx = x^2\Big|_0^1 = 1$, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$. $a_n = \int\limits_0^1 2x \cos n\pi x dx$ интегрируем по частям: $u = 2x$, $u' = 2$, $v' = \cos n\pi x$, $v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$.

Тогда $a_n = \frac{2x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^1 \sin n\pi x dx = 0 + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 =$

$\frac{2(\cos n\pi - \cos 0)}{n^2\pi^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$.

$b_n = \int\limits_0^1 2x \sin n\pi x dx$ тоже по частям,

$u = 2x$, $u' = 2$, $v' = \sin n\pi x$, $v = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$.

Тогда $b_n = \frac{-2x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^1 \cos n\pi x dx =$

$\frac{-2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{-2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2(\sin n\pi - \sin 0)}{n^2\pi^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$.

Ответ. $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$.

445 ПРАКТИКА № 15 03.06.2016

Исправление долгов и пропущенных контрольных.