Министерство образования Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра математики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. каф. математики
__________ А.Л. Магазинникова
«   » ___________ 20   г.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методические указания

РАЗРАБОТЧИКИ

Доценты каф. математики
_________________ А.П. Ерохина
____________ А.Л. Магазинников
« 02 » июня 2016 г.

2016

Лабораторная работа №1

Вычисление длины кривой

Если плоская кривая *AB* задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. $t \in [\alpha;\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемые функции, причём точке *A* соответствует $t = \alpha$, точке *B* значение $t = \beta$, то длина кривой находится по формуле $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$

Для пространственной кривой , заданной уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha;\beta]$ справедлива аналогичная формула $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt.$

Если кривая *AB* задана уравнениям $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, то $l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

В случае задания плоской кривой в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то её длина находится по формуле $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$

<u>Пример 7</u>. Найти длину кривой $x^2 + y^2 = 2x$.
В данном случае целесообразно перейти к заданию кривой в полярных координатах.
Уравнение окружности имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$.

$$l = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi .$$

<u>Замечание</u> Уравнение $x^2 + y^2 = 2x$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$ задаёт окружность с центром в точке (1;0) и радиусом *R*=1. Известно, что длина окружности равна $2\pi R$.

Лабораторная работа №2

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской области D, находится по формуле $S=\iint\limits_D dxdy,$

Или в полярных координатах $S=\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Если область D определена, например, неравенствами $a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),$

то $S=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy.$

Если область D определена неравенствами $c\le y\le d,\ \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y),$ то

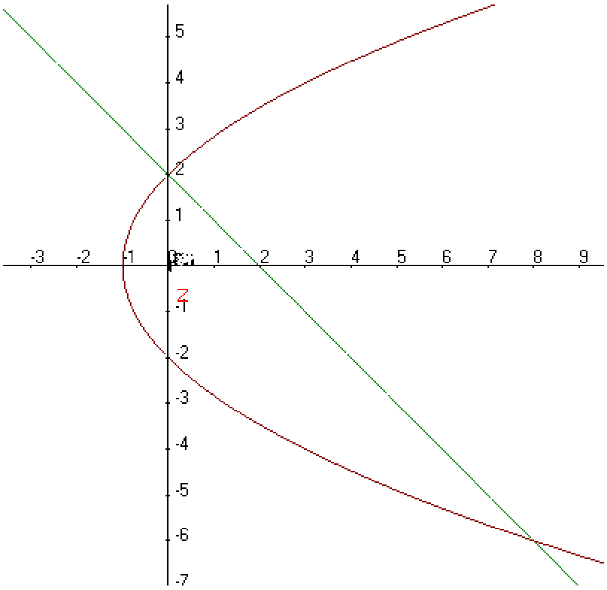
$$S=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}dx.$$

Если в полярных координатах область D определена неравенствами $\alpha\le\varphi\le\beta,$

$\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi),$ то $S=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\, d\rho.$

Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x+4$ и прямой $y=2-x.$

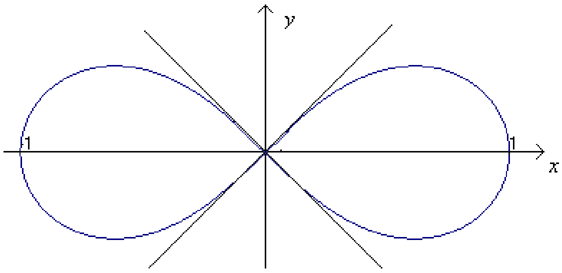


Из рисунка видно, что внутренний интеграл целесообразно брать по x, а внешний по y. При другом порядке интегрирования мы получили бы сумму двух повторных интегралов. Найдём точки пересечения прямой с параболой. Решая систему уравнений, находим *A(0;2)* и *B(8;-6)*. Переменная y изменяется от -6 до 2, а пределы внутреннего интеграла находятся из уравнений параболы и прямой, если их решить относительно x: $x=\dfrac{y^2-4}{4},\ x=2-y.$

Таким образом, $S=\int\limits_{-6}^{2}dy\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}dx=\int\limits_{-6}^{2}\left(2-y-\dfrac{y^2-4}{4}\right)dy=\dfrac{64}{3}(\text{кв.ед.})$

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right).$



Ввиду симметрии относительно осей координат можно вычислить площадь части фигуры, расположенной в первой четверти и результат умножить на 4. Здесь выгодно перейти к полярным координатам. Уравнение лемнискаты в полярных координатах примет вид: $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ или $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$ Найдём область определения данной функции. Так как $\cos 2\varphi \geq 0,$ то $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\varphi \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n$.

При $n = 0$ получим $-\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$, т.е. правая петля лемнискаты,

при $n = 1$ получим $\dfrac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{5\pi}{4}$, (левая петля).

Получаем $S = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\right) d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \dfrac{2a^2 \sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$

Лабораторная работа №3

Исследование точек разрыва функций и построение графиков

Рекомендуется изучить раздел «Непрерывность функции в точке» пособия Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников Дифференциальное исчисление.

Цель работы: классификация точек разрыва сложных функций и построение графиков с помощью стандартных графопостроителей.

Рассмотрим пример.

Укажите и охарактеризуйте все точки разрыва функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4} + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-4}$$

Функция $y = \operatorname{arctg}\varphi(x)$ непрерывна во всех точках, в которых непрерывна функция $\varphi(x)$ по теореме о непрерывности сложной функции. В нашем случае $\varphi(x) = \dfrac{5}{(x-7)^4}$. Функция $\varphi(x)$ имеет разрыв только в точке $x_1 = 7$. Поэтому функция $f_1(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-7)^4}$ может иметь разрыв только в точке $x_1 = 7$.

Напомним, что $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = \begin{cases} -(x-2),\ \textit{если}\ x<2, \\ (x-2),\ \textit{если}\ x \geq 2. \end{cases}$

Функция $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-4}$ представляет собой отношение двух непрерывных функций. Она может иметь разрыв только в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. при $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$. Таким образом, точками, подозрительными на разрыв, являются точки $x_1 = 7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

- Исследуем точку $x_1 = 7$.

Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = +\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{5}{(x-7)^4} = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to 7+0}\operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-7)^4} = \lim\limits_{x\to 7-0}\operatorname{arctg}\dfrac{5}{(x-7)^4} = +\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, точка $x_1 = 7$ является точкой устранимого разрыва.

- Исследуем точку $x_2 = -2$.

Находим левый и правый пределы:

$$\lim_{x\to-2\pm0} f(x) = \lim_{x\to-2\pm0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4} + \frac{|x-2|}{(x-2)(x+2)}\right] = \mp\infty.$$

Следовательно, точка $x_2 = -2$ является точкой разрыва второго рода.

- Исследуем точку $x_3 = 2$.

Находим правый предел:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4}+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right] = \lim_{x\to 2+0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4}+\frac{1}{x+2}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{5}{(2-7)^4}+\frac{1}{2+2} = 0{,}258$$

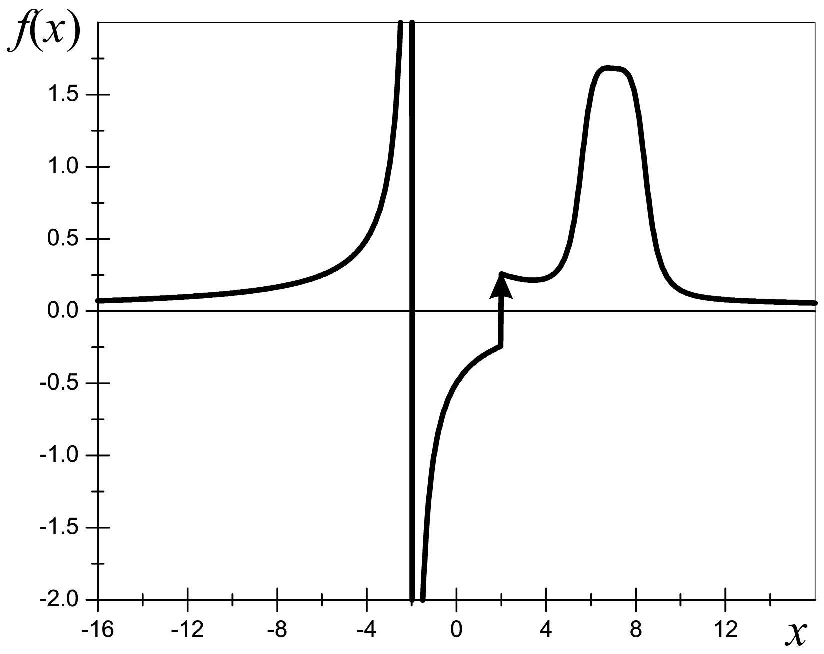
Находим левый предел:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4}+\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right] = \lim_{x\to 2-0}\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{(x-7)^4}-\frac{1}{x+2}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{5}{(2-7)^4}-\frac{1}{2+2} = -0{,}242$$

Так как существуют конечные правые и левые пределы $f(2-0)$ и $f(2+0)$, но они не равны, то точка $x = 2$ является точкой разрыва первого рода.

Строим график указанной функции.



Задание. Укажите и охарактеризуйте все точки разрыва следующих функций. Постройте графики.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-3)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9}$	1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{19}{(x-9)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-9)^2}}{x^2-81}$
2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{(x-9)^3}+\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$	2. $f(x)=\dfrac{\sin(x+4)}{(x+10)(x-14)}+\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-7}$
3. $f(x)=\dfrac{\sin(x-17)}{(x-17)(x-18)}+\dfrac{\ln[1+(x-2)]}{\lvert x-2\rvert}$	3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^5}{x-5}+\dfrac{x^2-64}{(x-19)\sqrt{(x-8)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-7}{(x-14)(x-17)}$	4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-4)(x-18)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{x^2-4}, \text{ если } x\le 4;\\ \dfrac{e^x-e^6}{x^2-36}, \text{ если } x>4\end{cases}$	5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+6}{x^2-36}, \text{ если } x\le 7;\\ \dfrac{\sin(x-14)}{(x-14)(x+28)}, \text{ если } x>7\end{cases}$
ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-3)^2}+\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9}$	1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{6}{(x-4)^2}+\dfrac{\sin\lvert x-5\rvert}{x^2-25}$
2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{13}{(x-3)^2}+\dfrac{\sin\lvert x-6\rvert}{x^2-36}$	2. $f(x)=\dfrac{\sin(x-14)}{(x-14)(x-17)}+\dfrac{\ln[1+(x-9)]}{\lvert x-9\rvert}$
3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^8}{x-8}+\dfrac{x^2-4}{(x+15)\sqrt{(x+2)^2}}$	3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^2}{x-2}+\dfrac{x^2-36}{(x+5)\sqrt{(x-6)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-6}{(x-14)(x-12)}$	4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-4}{(x-5)(x-17)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4}, \text{ если } x\le 14;\\ \dfrac{\sin(x-18)}{(x-18)(x+36)}, \text{ если } x>14\end{cases}$	5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2-25}, \text{ если } x\le 3;\\ \dfrac{e^x-e^7}{x^2-49}, \text{ если } x>3\end{cases}$

ВАРИАНТ 5

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{11}{(x-6)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-9)^2}}{x^2-81}$
2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{15}{(x-7)^3}+\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$
3. $f(x)=\dfrac{\sin(x-18)}{(x-18)(x-16)}+\dfrac{\ln[1+(x-9)]}{|x-9|}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-6}{(x-7)(x-19)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-10}{x^2-49}, \text{ если } x\le 10;\\ \dfrac{e^x-e^8}{x^2-64}, \text{ если } x>10\end{cases}$

ВАРИАНТ 6

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{6}{(x-6)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9}$
2. $f(x)=\dfrac{\sin(x-15)}{(x-15)(x-5)}+\dfrac{\ln[1+(x+14)]}{|x+14|}$
3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-18}}{x+18}+\dfrac{x^2-400}{(x-5)\sqrt{(x+20)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-4}{(x-5)(x-3)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+9}{x^2-81}, \text{ если } x\le 8;\\ \dfrac{\sin(x-6)}{(x-6)(x+12)}, \text{ если } x>8\end{cases}$

ВАРИАНТ 7

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{(x-15)^4}+\dfrac{\sqrt{(x-8)^2}}{x^2-64}$
2. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{10}{(x-14)^3}+\dfrac{\sin(x-7)}{x^2-49}$
3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-16}}{x+16}+\dfrac{x^2-324}{(x-6)\sqrt{(x+18)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-12}{(x-15)(x-16)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2-25}, \text{ если } x\le 3;\\ \dfrac{e^x-e^7}{x^2-49}, \text{ если } x>3\end{cases}$

ВАРИАНТ 8

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{(x-16)^2}+\dfrac{\sin|x-5|}{x^2-25}$
2. $f(x)=\dfrac{\sin(x+6)}{(x+6)(x+5)}+\dfrac{\ln[1+(x+12)]}{|x+12|}$
3. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{13}}{x-13}+\dfrac{x^2-361}{(x+14)\sqrt{(x-19)^2}}$
4. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-12}{(x-15)(x-16)}$
5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-6}{x^2-64}, \text{ если } x\le 6;\\ \dfrac{e^x-e^3}{x^2-9}, \text{ если } x>6\end{cases}$

Лабораторная работа №4

Проверка сходимости числовых рядов

Рекомендуется изучить раздел «Числовые ряды» в пособии Л.И. Магазинников Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования.

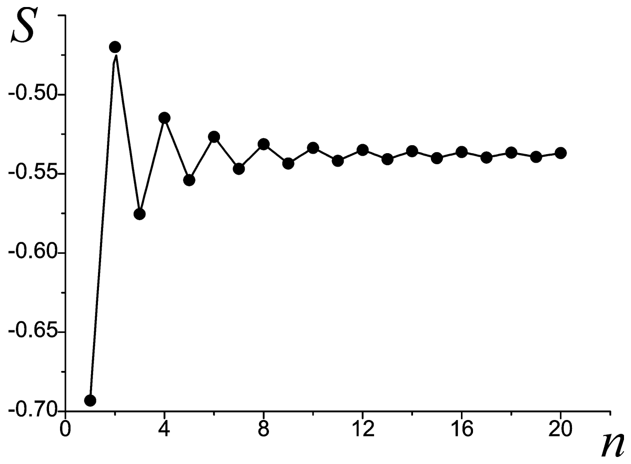
Цель работы: численное и аналитическое исследование сходимости числовых рядов.

Рассмотрим пример.
Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right). \qquad (1)$$

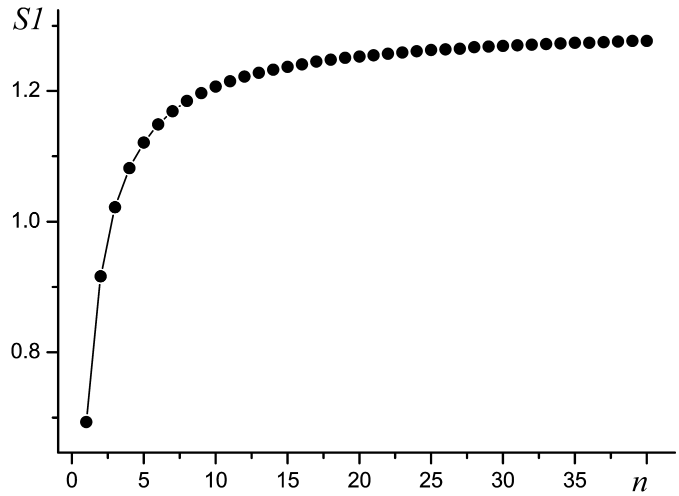
Численное исследование сходимости.

Посмотрим, как ведёт себя частичная сумма. Подсчитаем частичные суммы *S* и построим графики зависимости частичных сумм *S* от количества слагаемых *n*.



Частичная сумма стремится к постоянному конечному значению. Выдвигаем предположение, что ряд сходится.

Поскольку ряд знакочередующийся, исследуем его на условную и абсолютную сходимость. Для этого подсчитаем частичные суммы *S1* ряда (1), составленного из модулей.



С увеличением n частичная сумма $S1$ стремится к некоторому постоянному конечному значению (при необходимости, число слагаемых n можно изменить). Выдвигаем предположение, что ряд (1) сходится абсолютно.

Аналитическое исследование сходимости.

Сравним ряд (1) со следующим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}. \qquad (2)$$

По признаку Лейбница ряд (2) сходится.

Ряд, составленный из модулей членов ряда (2), сходится, как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ (здесь $s=2$).

Таким образом, ряд (1) сходится абсолютно.

Задание.

1. Составить программу для подсчёта частичных сумм числовых рядов.
2. Используя рассмотренный выше пример, протестировать программу.
3. Численно и аналитически исследовать на сходимость следующие числовые ряды. Если ряд знакопеременный, указать, сходится условно, абсолютно, либо расходится.

Вариант 1	Вариант 2
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{1}{n^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!(3^n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\arcsin\frac{1}{n^4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n^2+4)\cdot 2^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$
Вариант 3	**Вариант 4**
1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n-1)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{n!}$	1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n\cdot(n^3+4)}{(n+2)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+6}\right)^{n^2}$
Вариант 5	**Вариант 6**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n+\ln n}}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n\sqrt{n}+2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n-4}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+4)!}{10^n\cdot n^3}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{n^2}$
Вариант 7	**Вариант 8**
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot(n+1)!}{(2n)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)}{\ln(n+4)}$	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{n^2}}{(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)^2}{2^n}$

Лабораторная работа №5

Вычисление площади поверхности

Если поверхность σ задана уравнением $z = z(x, y)$ и её проекция на плоскость xOy есть область *D,* то площадь поверхности вычисляется по формуле $S = \iint\limits_{\sigma} ds$ или .

$$S = \iint\limits_{D_{xOy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

Аналогично, если поверхность задана уравнением $x = x(y, z)$, то

$S = \iint\limits_{D_{yOz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz$, где D_{yOz} проекция поверхности σ на плоскость yOz.

Если уравнение поверхности имеет вид $y = y(x, z),$ то $S = \iint\limits_{D_{xOz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$,

где D_{xOz} проекция поверхности σ на плоскость xOz.

<u>Пример 6.</u> Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x.$ Находим частные производные из уравнения конуса: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Областью интегрирования *D* является круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$, то есть центр окружности в точке (1;0) и радиус равен 1.

Двойной интеграл удобнее считать в полярных координатах. Окружность $x^2 + y^2 = 2x$ в полярных координатах имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$. Тогда

$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_{D} dxdy = S(D) = \sqrt{2}\pi$ (Площадь круга равна πR^2. У нас $R = 1$).

<u>Лабораторная работа №6</u>

Вычисление объёмов тел

Объём цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью вырезающей на плоскости xOy область *D*, вычисляется по формуле $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$

Объём области *V* можно находить и с помощью тройного интеграла

$V = \iiint\limits_V dv$ или $V = \iiint\limits_V dxdydz$ в декартовых координатах,

$V = \iiint\limits_V \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ в цилиндрических координатах,

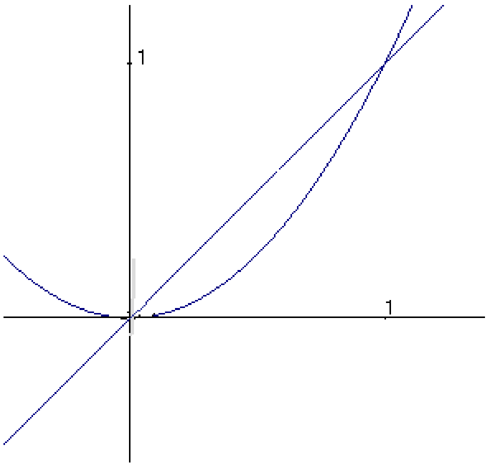
$V = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$ в сферических координатах.

Во избежание возможных ошибок при вычислении объёма тела полезно сделать пространственный рисунок, который давал бы представление о форме данного тела. Если же тело построить не удаётся, то можно ограничиться хотя бы рисунком, изображающим проекцию данного тела на одну из координатных плоскостей (область интегрирования двойного интеграла). Однако и в этом случае необходимо представить себе, какая поверхность ограничивает тело сверху.

<u>Пример 3</u>.

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - x - y,\ \ y = x^2,$ $y = x$ и $z = 0.$

Сверху тело ограничено плоскостью $z = 2 - x - y,$ снизу плоскостью $xOy,$ с боков – цилиндрической поверхностью $y = x^2$ и плоскостью $y = x$. Основанием тела, т. е. областью интегрирования является плоская область *D*, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$.



$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2 - x - y)dy = \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx =$$

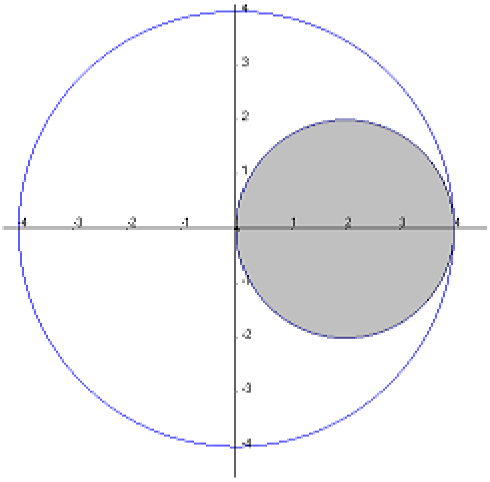
$$= \int_0^1 \left[\left(2x - x^2 - \frac{x^2}{2} \right) - \left(2x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{7x^2}{2} + 2x \right) dx = \frac{7}{20}.$$

<u>Пример 4</u>. Вычислить объём тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = 4x$ из шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$.

Заметим, так как оба уравнения поверхностей содержат сумму квадратов $x^2 + y^2$, то удобнее перейти к цилиндрическим координатам $x^2 + y^2 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 4\cos\varphi$ и

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 + z^2 = 16$ или $z = \pm\sqrt{16 - z^2}$.

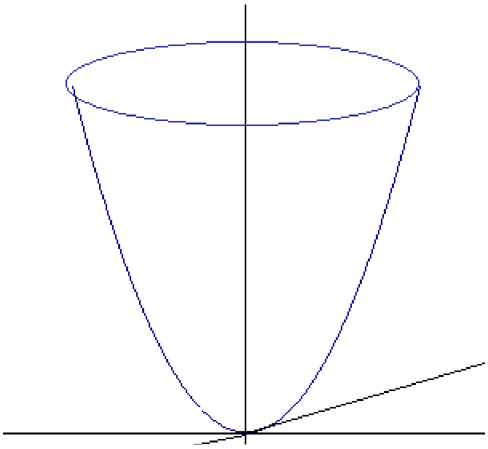


В силу симметрии тела можно ограничиться вычислением четвёртой части тела, расположенной в первом октанте. Область интегрирования – полукруг в первой четверти.

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (16-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{128}{3}(\pi - \frac{2}{3})$$

<u>Пример 5</u>. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2$ и $z = h$.



Решение. Снизу тело ограничено параболоидом $z = \dfrac{x^2+y^2}{h}$, сверху плоскостью $z = h$ и проектируется в круг $x^2 + y^2 \le h^2$ плоскости xOy. Используем цилиндрические координаты, в которых уравнение параболоида примет вид $z = \dfrac{\rho^2}{h}$. Объём тела равен $V = \iiint\limits_V \rho\,d\varphi\,d\rho\,dz =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho\,d\rho \int_{\frac{\rho^2}{h}}^{h} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(h - \frac{\rho^2}{h}\right)\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi}\left(\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h d\varphi = \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{2}.$$

Лабораторная работа №7

Численное решение дифференциальных уравнений

Рекомендуется изучить раздел «Уравнения высших порядков» в пособии А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения.

Цель работы: применение численного и аналитического методов решений линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример.

Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

$$y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

и находим его корни:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},\ k_1 = 2,\ k_2 = 3.$$

Записываем общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Определяем константы C_1 и C_2. Поскольку $y(0) = 1$, то: $C_1 + C_2 = 1$.

Находим производную $y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Поскольку $y'(0) = 0$, то: $2C_1 + 3C_2 = 0$.

Получаем систему двух уравнений

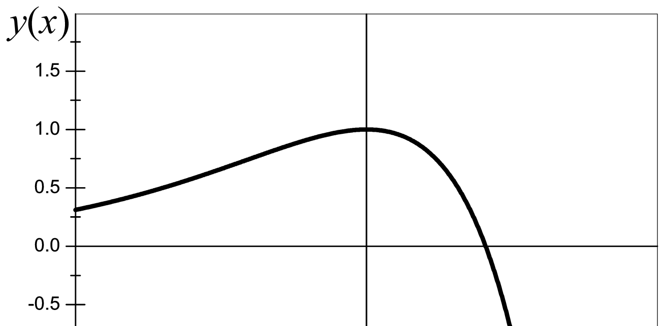
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0, \end{cases}$$

из которой $C_1 = 3$, $C_2 = -2$.

Записываем частное решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$$

Строим график зависимости $y(x)$:



Задание.

1. Составить программу для решения линейных дифференциальных уравнений.
2. Используя рассмотренный выше пример, протестировать программу.
3. Построить график получившейся зависимости $y(x)$. Сравнить графики численного и аналитического решений; сделать выводы.
4. Численно и аналитически решить следующие дифференциальные уравнения. Во всех примерах построить графики зависимостей $y(x)$. Сравнить графики численного и аналитического решений; сделать выводы.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x,$ $y'(0) = y(0) = 0$	1. $y'' + 9y = 6e^{3x},$ $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1,$ $y(0) = 2;\ y'(0) = 3$	2. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,$ $y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}$
3. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$	3. $y'' + 3y' - 4y = (x+2)e^x,$ $y'(0) = y(0) = 0$
4. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	4. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x},$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
1. $y'' - 4y' = 2xe^{4x},$ $y(0) = y'(0) = 0$	1. $y'' - 4y' = 4xe^{4x},$ $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x,$ $y'(0) = y(0) = 0$	2. $y'' + 4y = \sin x,$ $y'(0) = y(0) = 1$
3. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$	3. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}},$ $y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3$
4. $y'' + y = 4\,\mathrm{ctg}\, x,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$	4. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos\frac{\pi}{x}},$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
1. $2y''+y'-y=3xe^{x}$, $y(0)=y'(0)=0$ 2. $y''+y=2\cos x$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$ 3. $y''+3y'=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$, $y(0)=\ln 4,\ y'(0)=3-3\ln 2$ 4. $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}$	1. $y''-y'-6y=xe^{2x}$, $y(0)=y'(0)=0$ 2. $y''+4y=12\cos 2x$, $y(0)=y'(0)=0$ 3. $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{1+e^{-2x}}$, $y(0)=1+2\ln 2,\ y'(0)=6\ln 2$ 4. $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$
ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**
1. $y''-4y=xe^{2x}$, $y(0)=y'(0)=0$ 2. $y''-4y'+13y=26x+5$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$ 3. $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0)=4\ln 4,\ y'(0)=9\ln 4-3$ 4. $y''+4y=8\operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$	1. $y''+4y=e^{-2x}$, $y(0)=y'(0)=1$ 2. $y''+y=x^3+1$, $y(0)=y'(0)=0$ 3. $y''+6y'+8y=4e^{-2x}(2+e^{2x})$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$ 4. $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0)=3,\ y'(0)=0$

Лабораторная работа №8

Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений

В случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно или способ его решения слишком сложен, решение такого уравнения следует искать в виде ряда Тейлора $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$. Коэффициенты ряда c_n находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $(x-x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удаётся найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд служит решением во всей своей области сходимости. Этим способом можно интегрировать линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

Пример 10. Решить задачу Коши для уравнения $y''+xy'+y=x\cos x;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

Сначала разложим правую часть в степенной ряд по степеням *x*, т.к. у нас $x_0=0.$

$$x\cos x = x\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right).$$

Будем искать решение уравнения в виде ряда $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots.$

Тогда $y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\cdots$

$$y''=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+\cdots$$

Из начальных условий находим $c_0=0,\quad c_1=1.$ Подставим полученные ряды в исходное уравнение

$$(2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+\cdots)+x\,(c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\cdots)+$$

$$+(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots)=x\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

$$\begin{array}{c|c}
x^0 & 2c_2=0\\
x^1 & 6c_3+2=1\\
x^2 & 12c_4+3c_2=0\\
x^3 & 20c_5+4c_3=-1/2
\end{array}$$

…………………….

Решая эту систему, находим: $c_2=c_4=c_6=\cdots=c_{2n}=0$, $c_3=-\frac{1}{3!},\ c_5=\frac{1}{5!},\ c_7=-\frac{1}{7!},\cdots$

Получаем искомое решение в виде ряда $y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$ или $y=\sin x$.

Лабораторная работа №9

Разложение функции в ряды Тейлора и Лорана

Всякая бесконечно дифференцируемая дробь в интервале $|x-x_0|<r$ может быть единственным образом разложена в сходящийся ряд Тейлора из этого интервала ряд Тейлора с

$f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$, если в этом интервале выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$, где $R_n(x)$ - остаток ряда, $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

На практике можно пользоваться следующей теоремой, которая даёт простое достаточное условие разложимости $f(x)$ в ряд Тейлора.

Теорема. Если модули всех производных функции $f(x)$ ограничены в интервале $|x-x_0|<r$ одним и тем же числом $M>0$, то для любого x из этого интервала ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$.

При $x=0$ получается ряд $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$, называемый рядом Маклорена. Приведём примеры разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots, \text{ где}$$

$$\text{x}\in\begin{cases}[-1;1], \text{ если } \alpha\ge 0,\\ (-1;1], \text{ если } -1<\alpha<0,\\ (-1;1), \text{ если } \alpha\le -1\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1;1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1;1]$$

$$arctg\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in[-1;1]$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\ x\in[-1;1]$$

Для разложения $f(x)$ в ряд Тейлора (Маклорена) нужно:

1) найти производные $f'(x), f''(x),..., f^{(n)}(x)$,
2) сосчитать значения производных в точке $x = x_0$ (для ряда Маклорена в точке $x = 0$),
3) написать ряд для заданной функции и найти его интервал сходимости,
4) найти интервал, в котором $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нём сумма составленного ряда совпадает с функцией $f(x)$.

Лабораторная работа №10

Вычисление значений функций с помощью степенных рядов

Для вычисления значения функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью функцию в интервале $(-R; R)$ разлагают в степенной ряд

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x_1 \in (-R; R)$. Точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, а приближённое – частичной сумме $S_n(x_1)$, т.е. $f(x_1) \approx S_n(x_1)$.

Точность этого равенства увеличивается с ростом n, а абсолютная погрешность равна $\left| f(x_1) - S_n(x_1) \right| = \left| r_n(x_1) \right|$, где $r_n = a_{n+1} x_1^{n+1} + a_{n+2} x_1^{n+2} + \cdots$

Таким образом, для оценки погрешности нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются подобрать положительный ряд с большими членами, который легко бы суммировался. Обычно это бесконечно убывающая прогрессия. В качестве оценки $\left| r_n(x_1) \right|$ берут величину остатка этого нового ряда. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $\left| r_n(x_1) \right| < \left| a_{n+1} x_1^{n+1} \right|$.

Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$\left| f(x_1) - S_n(x_1) \right| = \left| r_n(x_1) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|, \quad \text{где } 0 < c < x_1$$

Пример 8. Вычислить число ***e*** с точностью до 0,001.

В формулу $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ подставим $x = 1$: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

Для нахождения числа ***e*** оставим *n* слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right].$$ В квадратных скобках стоит бесконечно убывающая прогрессия с знаменателем $q = \frac{1}{n+1}$, тогда сумма прогрессии равна $\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$. Окончательно получаем $\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n! \cdot n}$, т.е. $\left| r_n(x) \right| < \frac{1}{n! \cdot n}$.

Подберём наименьшее натуральное число *n*, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n! \cdot n} < 0{,}001$.

Подбором убеждаемся, что это неравенство выполняется при $n \ge 6$, поэтому

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Лабораторная работа №11

Применение степенных рядов к вычислению определённых интегралов

Для приближённых вычислений неопределённых и определённых интегралов, в случае, когда первообразная не выражается через элементарные функции или её нахождение сложно, применяются степенные ряды.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$ с заданной точностью. Подынтегральную функцию $f(x)$ раскладываем в ряд по степеням x в интервале $(-R;R)$, который включает в себя отрезок $[a;b]$. Для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться теоремой о почленном интегрировании степенного ряда. Ошибка вычислений определяется так же, как и при вычислении функций.

Пример 9. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ с точностью 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена в интервале $(-\infty;+\infty)$

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

Интегрируя обе части равенства на отрезке $[0;\frac{1}{4}]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty;+\infty)$, получим $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\cdots\right)\Bigg|_0^{1/4}=$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}+\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}-\frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7}+\cdots$. Так как $\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}>0{,}0052>0{,}001$, а $\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}<0{,}001$, то погрешность по модулю меньше первого отброшенного члена (ряд Маклорена Лейбнецкого типа). Получим $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}\approx 0{,}245$

Лабораторная работа №12

Построение графиков частичных сумм ряда Фурье

Рекомендуется изучить раздел «Ряды Фурье» в пособии Л.И. Магазинников Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования.

Цель работы:

1) изучение правил разложения функций в тригонометрический ряд Фурье;
2) построение графиков частичных сумм.

Рассмотрим пример.

Функцию $f(x)=\begin{cases}0, \textit{если} -2<x<0,\\ x, \textit{если}\ 0\le x\le 2\end{cases}$ разложить в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–2, 2].

Решение.

Определяем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 x dx = 1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{1}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{1}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

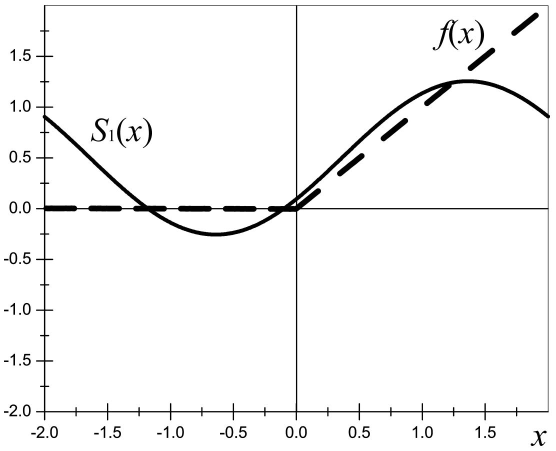
$$=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi},\ n=1,2,\ldots$$

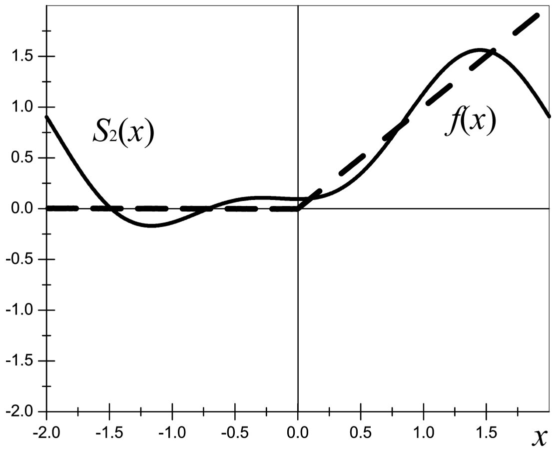
Заметим, что $a_{2m}=0$, $a_{2m-1}=-\dfrac{4}{(2m-1)^2\pi^2}$.

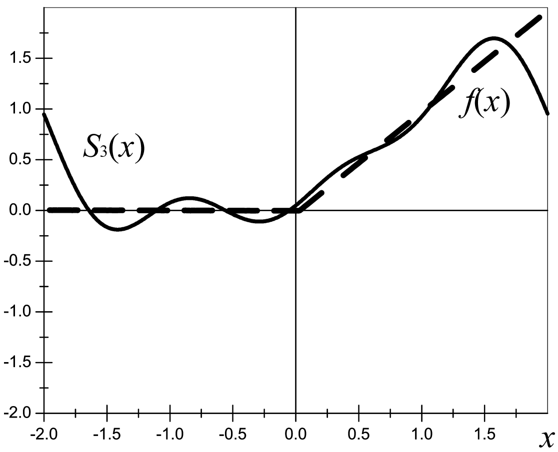
Мы нашли, что

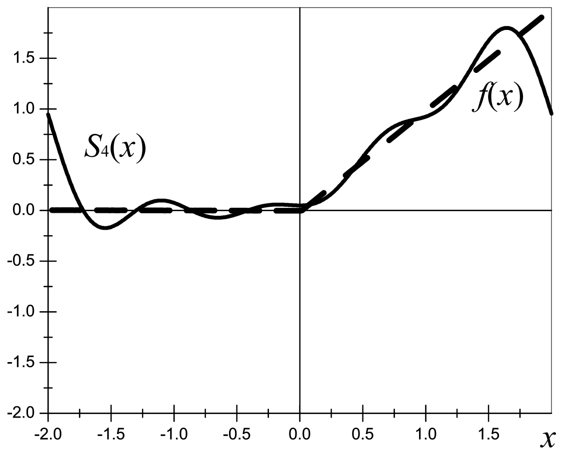
$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}.$$

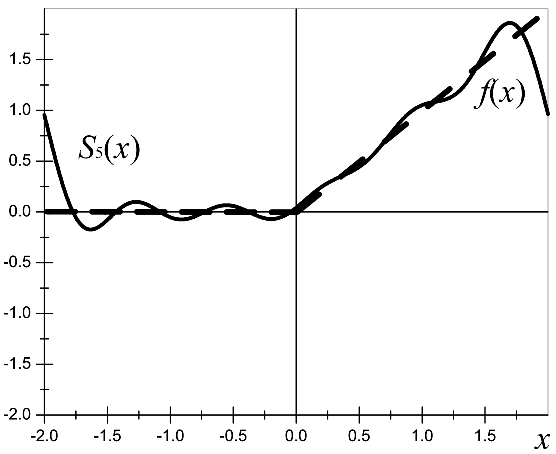
Графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$, $S_5(x)$ и $S_6(x)$ изображены на рисунках. Обратите внимание, как при увеличении количества слагаемых n, частичные суммы стремятся к функции $f(x)$.

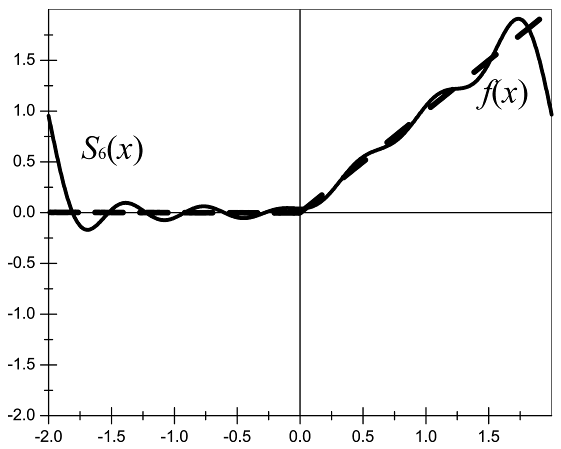












Задание. Следующие функции разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x)$, $S_5(x)$ и $S_6(x)$, а также график функции $f(x)$.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ -4<x\le -2, \\ \frac{2}{3}(x+2),\ \text{если}\ -2\le x<4. \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} x+2,\ \text{если}\ -2<x\le 0, \\ 2,\ \text{если}\ 0\le x<2. \end{cases}$
ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
$f(x)=\begin{cases} -x,\ \text{если}\ -1<x<0, \\ 0,\ \text{если}\ 0\le x<1. \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x\in(-4;0]\cup[1;4), \\ 2x,\ \text{если}\ x\in[0;1). \end{cases}$
ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x\in(-2;-1]\cup[0;2], \\ -x,\ \text{если}\ x\in(-1;0]. \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x\in(-4;0]\cup[2;4), \\ 2-x,\ \text{если}\ x\in(0;2]. \end{cases}$
ВАРИАНТ 7	ВАРИАНТ 8
$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ -2<x<0, \\ 2-x,\ \text{если}\ 0<x<2. \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ -2<x<1, \\ 2x-2,\ \text{если}\ 1\le x<2. \end{cases}$