МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС

_________________ И. Г. Боровской

«___» ____________________ 2015 г.

Е.А. ШЕЛЬМИНА

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

2015

Шельмина Е.А. Методы оптимизации – Томск: Изд-во ТУСУР, 2015. – 14 с.

Методическое пособие посвящено изучению методов решения задач оптимизации и их программной реализации на языке программирования С++. Приведены примеры решения экстремальных задач и алгоритмы, реализующие различные методы решения оптимизационных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
по дисциплине «Методы оптимизации»
и руководство по выполнению для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

Краткое содержание тем и результатов их освоения

Тема лабораторных занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:
1. Методы одномерной и многомерной оптимизации	• *изучает* основные понятия методов оптимизации; • *учиться* решать типовые задачи на поиск экстремума функции; • *программирует* решение задач на поиск экстремума функции с помощью средств языка C++;
2. Оптимизационные задачи с ограничениями	• *изучает* методы поиска экстремума функции с ограничениями; • *применяет* полученные знания при решении задач; • *создает* программу на языке программирования C++, реализующую решение задач с ограничениями;
3. Прикладные задачи оптимизации	• *учиться* решать задачи линейного программирования, транспортные задачи; • *осуществляет* программную реализацию симплекс-метода;

ХОД ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС)
2. Ознакомиться с указанной темой в основной и дополнительной литературе.

1. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 512 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67460.

Дополнительная литература

1. Колбин В.В. Специальные методы оптимизации [Электронный ресурс] : . — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2014. — 379 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=41015.
2. Кудрявцева, И.В. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков [и др.]. — Электрон. дан. — Спб. : НИУ ИТМО (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики), 2014. — 166 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=70914.

3. Ознакомиться с принципом выполнения лабораторных работ.
4. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе.

Лабораторная работа 1. Методы одномерной и многомерной оптимизации

Задача 1. Запрограммировать решение следующей задачи. Для заданной функции $F(x)$ найти точки экстремума.

Примеры решения приведены в методическом пособии:

Методы оптимизации: Методические указания по выполнению практических работ/ Параев Ю. И., Панасенко Е. А. – 2012. - 20 с.

Для программной реализации данной задачи необходимо воспользоваться средствами языка С++ (массивы, функции и др.) и компилятором Visual Studio.

Задача 2. Запрограммировать решение задачи. Дана функция многих переменных $F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Найти точки экстремума.

Пример. Найти экстремум следующей функции: $z(x, y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y;$

Решение.

1. Находим первую производную по x и y. После этого первые производные приравниваются к нулю и находятся точки экстремума: (0,2/3) и (2, -2/3).
2. Затем находим вторую производную по x и y и составляем матрицу Гессе:

при x_1=2:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

В этом случае определитель матрицы Δ_1=-36<0, следовательно, (2;-2/3) – точка максимума;

при x_2=0:

$C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

определитель матрицы Δ_2=36>0, (0;-2/3) – точка минимума;

Код программы:

```
#include "stdafx.h"
#include "stdio.h"
#include "conio.h"
// возвращает  значение функции
float main_funct(float x_,float y_){
    return (3*(x_*x_+y_*y_)-x_*x_*x_+4*y_);}
//возвращает  значение второй производной по x
float second_pr_x(float x_,float y_){
    return (6-6*x_);}
// возвращает  значение второй производной по y
float second_pr_y(float x_,float y_)
{return 6; }
// возвращает  значение производной  по y
float second_pr_xy(float x_,float y_)
{   return 0;}
// возвращает значение производной по x
float second_pr_yx(float x_,float y_) {
    return 0;}
int main( )
{// первое значение x, при котором первая производная по x равна нулю
    float x_1=2;
// второе значение x, при котором первая производная по x равна нулю
    float x_2=0;
//матрица Гесса
    float C[2][2];
//определитель матрицы Гесса
    float delta;
// значение y, при котором первая производная по y равна нулю
    float y=(-0.75);
    C[0][0]=second_pr_x(x_1,y);
    C[0][1]=second_pr_xy(x_1,y);
```

```
    C[1][0]=second_pr_yx(x_1,y);
    C[1][1]=second_pr_y(x_1,y);
    delta=C[0][0]*C[1][1]-C[0][1]*C[1][0];
//если определитель больше нуля, то функции имеет минимум
//если определитель меньше нуля, то функция имеет максиму
//если определитель равен нулю, то точки экстремума не существует
    if (delta >0) printf("x_1=2 -min     ");
    else if (delta <0)
        printf("x_1=2 -max     ");
    else if (delta==0)
        printf("x_1=2 -tochki exstrem net     ");
    printf("main_funct= %f \n",main_funct(x_1,y));
    C[0][0]=second_pr_x(x_2,y);
    C[0][1]=second_pr_xy(x_2,y);
    C[1][0]=second_pr_yx(x_2,y);
    C[1][1]=second_pr_y(x_2,y);
    delta=C[0][0]*C[1][1]-C[0][1]*C[1][0];
    if (delta >0)
        printf("x_2=0 -min     ");
    else if (delta <0)
        printf("x_2=0-max");
    else if (delta==0)
        printf("x_2=0 -tochki exstrem net     ");
    printf("main_funct= %f",main_funct(x_2,y));
    getch();
return 0;}
```

Лабораторная работа 2. Оптимизационные задачи с ограничениями

Задача 1. Для заданной функции многих переменных $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространства *Rn*, которая задается системой уравнений:

$$g_1(x) = 0,$$
$$g_2(x) = 0,$$
$$\ldots$$
$$gn(x) = 0.$$

Пример. Найти условный экстремум функции $f(x,y) = xy^2$ относительно заданного ограничения x+2y-1=0.

Решение задачи методом исключений:

1. Из заданного ограничения выражаем x и подставляем в функцию: $\tilde{f}(y) = (1-2y)y^2$;
2. Находим первую производную: $\frac{\partial f}{\partial y} = y(2-6y)$;
3. Значение первой производной приравниваем к нулю и вычисляем значения *y*: $y_1=0$ *и* $y_2=1/3$. Полученные значения *y* подставляются в исходную функцию, вычисляются значения *x*: $x_1=1$, $x_2=1/3$.
4. Находим вторую производную: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2-12y$;
5. Определяем точкой минимума или максимума является точка экстремума:

   при $y_1=0$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, следовательно, (1; 0) – точка минимума;

   при $y_2=1/3$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, следовательно, (1/3; 1/3) – точка максимума.

Решение задачи методом Лагранжа:

1. Вводится функция Лагранжа: $L(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x+2y-1)$;
2. Составляется система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y^2 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2yx + 2\lambda = 0; \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решения системы: (1; 0; 0) и (1/3; 1/3; -1/9);

3. Вычисляются вторые производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2x$$

4. Затем вычисляется второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2L = 0dx^2 + 2 * 2y\,dxdy + +2xdy^2$ по которому можно определить тип точки экстремума:

при $x_1=1$ и $y_1=0$: $d^2L > 0$, (1; 0) – точка минимума;

при $x_2=1/3$ и $y_2=1/3$: $d^2L < 0$, (1/3; 1/3) – точка максимума.

Код программы:

```
#include "stdafx.h"
#include "stdio.h"
#include "conio.h"
#include <math.h>
#include <cmath>
int main()
{   float x_1=1;
    float x_2=0.33;
    float y_1=0;
    float y_2=0.33;
    float f_1,f_2,L,delta;
    printf("3.1) x_1= %f, y_1= %f   ",x_1,y_1);
    //вычисляется значение функции при x_1=1 и y_1=0
    f_1=x_1*y_1*y_1;
    //если значение второй производной больше нуля, то найден минимум
    //если значение второй производной меньше нуля, то найден максимум
    if (2-12*y_1>0) printf("min_1  %f\n",f_1);
    else if (2-12*y_1<0) printf("max_1  %f\n",f_1);
    printf("     x_2= %f, y_2= %f   ",x_2,y_2);
    //вычисляется значение функции при x_2=0.33 и y_2=0.33
    f_2=x_2*y_2*y_2;
    //если значение второй производной больше нуля, то найден минимум
    //если значение второй производной меньше нуля, то найден максимум
    if (2-12*y_2>0) printf("min_2  %f\n",f_2);
    else if (2-12*y_2<0) printf("max_2  %f\n",f_2);
    //второй дифференциал функции Лагранжа с учетом ограничения
    L=-4*y_1+2*x_1;
    printf("3.2) x_1= %f, y_1= %f   ",x_1,y_1);
    //если второй дифференциал больше нуля, то найден минимум
    //если второй дифференциал меньше нуля, то найден максимум
    if (L>0) printf("min_1  %f\n",f_1);
    else if (L<0) printf("max_1  %f\n",f_1);
    //второй дифференциал функции Лагранжа с учетом ограничения
```

```
    L=-4*y_2+2*x_2;
    printf("     x_2= %f, y_2= %f   ",x_2,y_2);
    //если второй дифференциал больше нуля, то найден минимум
    //если второй дифференциал меньше нуля, то найден максимум
    if (L>0) printf("min_2  %f\n\n",f_2);
    else if (L<0) printf("max_2  %f\n\n",f_2);
    getch();
    return 0;
}
```

Задача 2. Для заданной функции многих переменных $F(x)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространстве Rn, которая задается системой неравенств

$$\begin{gathered} g_1(x) \le 0, \\ g_2(x) \le 0, \\ \dots \\ g_m(x) \le 0 \end{gathered}$$

Решение задачи 2 проводится аналогично задаче 1 методом Лагранжа, только с учетом того, что система ограничений представлена в виде неравенств.

Лабораторная работа 3. Прикладные задачи оптимизации

Задача 1. Используя симплекс метод найти экстремум линейной функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

на линейном многообразии S, задаваемом условиями:

1) все $x_i \ge 0, i = 1,\dots,n.$
2) должны выполняться либо равенства:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i = b_1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i = b_m, \end{gathered}$$

либо неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \le b_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \le b_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \le b_m.$$

Пример. Предприятие выпускает 2 вида продукции и использует 3 типа основного оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице 2.1. В ней указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации максимальна.

Тип оборудования	Затраты времени на единицу продукции вида		Общий ресурс рабочего времени
	1	2	
Токарное	1	3	300
Фрезерное	2	1	180
Шлифовальное	1	-	80
Прибыль	2	3	

Решение.

Пусть x_1 и x_2 – объемы выпуска каждого из изделий. Тогда можно составить целевую функцию: $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ и систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 300; \\ 2x_1 + x_2 \le 180; \\ x_1 \le 80; \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 300; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 180; \\ x_1 + x_5 = 80; \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

Далее нужно составить симплекс-таблицу:

базис	С-базис	A_0	$C_1=2$	$C_2=3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	300	1	**3**	1	0	0
A_4	0	180	2	1	0	1	0
A_5	0	80	1	0	0	0	1
$z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0	0

Для колонок, в которых $z_j - c_j$ отрицательны, находятся $\theta_j = \min \frac{b_j}{a_{ij}}$ для всех $a_{ij} > 0$:

В зависимости θ_j определяется базисный элемент и строятся новые симплекс-таблицы:

Б.	С-базис	A_0	$C_1=2$	$C_2=3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	100	1/3	1	1/3	0	0
A_4	0	180-300*1/3=80	2-1*1/3=5/3	0	0-1/3=-1/3	1-0=1	0-0=0
A_5	0	80-300*0/3= 80	1-1*0/3=1	0	0-0=0	0-0=0	1-0=0
$z_j - c_j$		300	-1	0	1	0	0

Б.	С-базис	A_0	$C_1=2$	$C_2=3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	3	84	0	1	6/15	-1/5	0
A_1	2	48	1	0	-1/5	3/5	0
A_5	0	32	0	0	1/5	-3/5	0
$z_j - c_j$		348	0	0	12/15	3/5	0

Так как все оценки $z_j - c_j > 0$, то решение найдено: x_1=48, x_2=84. Прибыль: 348.
Код программы

Задача 2 (транспортная задача). Пусть имеется *m* складов, на которых находится $a_1, a_2 \ldots a_m$ единиц товара (запасы товара) и *n* магазинов, которым требуется $b_1, b_2 \ldots b_n$ единиц товара (потребление товара). Известны c_{ij} - стоимости перевозки единицы товара из i-го склада в j-й магазин. Требуется найти план перевозок, при котором бы полностью удовлетворялся спрос всех потребителей, при этом хватало бы запасов поставщиков и суммарные транспортные расходы были бы минимальными.

Пример. Даны таблица 1 и таблица 2 с указанием запасов, заявок и стоимости перевозок. Распределить запасы и заявки методом северо-западного угла для таблицы 1 и методом минимальных элементов для таблицы 2.

Таблица 1

	Заявки				
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20
	35	25	16	71	19
	45	41	13	27	15

	20	18	54	75	17
	15	12	21	35	10

Таблица 2

	Заявки					
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20	30
	35	25	16	71	19	8
	45	41	13	27	15	9
	20	18	54	75	17	7
	15	12	21	35	10	11
	21	17	20	9	7	31

Решение

Метод северо-западного угла

Сумма запасов меньше суммы заявок, поэтому нужно провести балансировку (вводится дополнительная строка в таблицу):

	Заявки				
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20
	35	25	16	71	19
	45	41	13	27	15
	20	18	54	75	17
	15	12	21	35	10
	14	0	0	0	0

Далее начиная с верхнего левого угла, распределяются запасы и заявки по правилам:

- для количества груза x_{ij}, вывозимого из a_i во все b_j: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = \overline{1,n}$;
- для количества груза x_{ij}, ввозимого в b_j из всех a_i: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, i = \overline{1,m}$;

	Заявки				
Запас	a_i/b_j	18	40	51	20
	35	25 **18**	16 **35-18=17**	71	19

	45	41	13 **40-17=23**	27 **45-23=22**	15
	20	18	54	75 **20**	17
	15	12	21	35 **51-42=9**	10 **15-9=6**
	14	0	0	0	0 **20-6=14**

Стоимость перевозок по формуле f(x)=$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$: f(x)= 3490.

Метод минимальных элементов

Начиная с ячеек с меньшей стоимостью распределяются запасы и заявки :

	Заявки					
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20	30
	35	25 **3**	16	71 **22**	19	8 **10**
	45	41	13 **40**	27 **5**	15	9
	20	18	54	75	17	7 **20**
	15	12 **15**	21	35	10	11
	21	17	20	9 **1**	7 **20**	31
	23	0	0	0 **23**	0	0

Стоимость перевозок f(x)=2841.