МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ЭМИС
_________________ И. Г. Боровской
«___» ____________________ 2015 г.

Е.А. ШЕЛЬМИНА

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания по выполнению практических работ для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

2015

Шельмина Е.А. Методы оптимизации – Томск: Изд-во ТУСУР, 2015. – 19 с.

Учебно-методическое пособие посвящено основам практического применения методов оптимизации. В пособии рассматриваются методы решения многомерных задач линейного и нелинейного программирования, а также специфические задачи одномерного поиска экстремума. Приведены примеры решения экстремальных задач и алгоритмы, реализующие различные методы решения оптимизационных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
по дисциплине «Методы оптимизации»
и руководство по выполнению для студентов 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

Краткое содержание тем и результатов их освоения

Тема лабораторных занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:
1. Безусловный экстремум функции одной переменной	• *изучает* основные понятия методов оптимизации; • *учиться* решать типовые задачи на поиск экстремума функции;
2. Безусловный экстремум функции многих переменных	• *изучает* методы поиска экстремума функции многих переменных; • *применяет* полученные знания при решении задач;
3. Условный экстремум при ограничениях типа равенств	• *учиться решать задачи на поиск экстремума при ограничениях типа равенств;* • знакомиться с методом исключения переменных и методом множителей Лагранжа;
4. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств	• *учиться* решать задачи на поиск экстремума при ограничениях типа неравенств; • *применяет* метод множителей Лагранжа для поиска условного экстремума;

ХОД ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС)
2. Ознакомиться с указанной темой в основной и дополнительной литературе.

1. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 512 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67460.

Дополнительная литература

1. Колбин В.В. Специальные методы оптимизации [Электронный ресурс] : . — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2014. — 379 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=41015.
2. Кудрявцева, И.В. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков [и др.]. — Электрон. дан. — Спб. : НИУ ИТМО (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики), 2014. — 166 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=70914.

3. Ознакомиться с принципом выполнения заданий на практических занятиях.
4. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе, если он входит в форму отчетности по данному разделу знаний.

Практическая работа 1.1. Методы одномерной и многомерной оптимизации

Постановка задачи. Для заданной функции $F(x)$ найти точки экстремума.

Решение

Вариант 1. Функция *F(x)* непрерывная и дифференцируемая

1. Вычисляется первая производная и записывается уравнение

$$F'(x) = 0 \tag{1.1}$$

Пусть $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k$ – корни этого уравнения (k = 0, 1, ...).

2. Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается в этих точках, нужно вычислить вторую производную.

Если $F'(\hat{x}_i) > 0$, то функция в данной точке имеет минимум.

Если $F'(\hat{x}_i) < 0$, то функция в данной точке имеет максимум.

Если $F'(\hat{x}_i) = 0$, то функция в данной точке имеет перегиб или требуются дальнейшие исследования, связанные с вычислением старших производных.

Пример 1.1. Найти точки экстремума функции $F(x) = xe^{-x}$. Получаем

$$F'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$$

Это уравнение имеет один корень x=1. Вторая производная $F''(x) = e^{-x}(x - 2)$. Поскольку F✧(1)<0, то в точке x=1 функция имеет максимум. График этой функции приведен на рис.1.1.

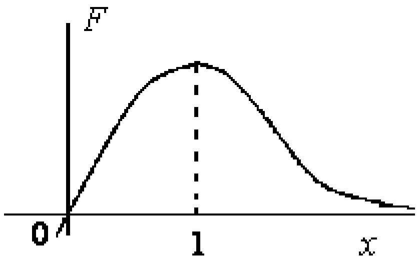

Рис. 1.1. График функции $F(x)=xe^{-x}$

Вариант 2. Функция $F(x)$ имеет точки излома, т.е. в этих точках первая производная терпит разрыв. Поэтому кроме исследования на экстремум точек, где функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема, так, как указано выше, нужно проверять точки излома. Пусть $\hat{x}$ – точка излома. В точке $\hat{x}$ функция $F(x)$ имеет максимум, если

$$F'(x - \varepsilon) > 0 \text{ и } F'(x + \varepsilon) < 0. \tag{1.2}$$

В точке $\hat{x}$ функция F(x) имеет минимум, если

$$F'(x - \varepsilon) < 0 \text{ и } F'(x + \varepsilon) > 0. \tag{1.3}$$

Здесь ε – какое-то малое число. В точке $\hat{x}$ функция $F(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если в этой точке производная $F'(x)$ не меняет знак.

Пример 1.2. Рассмотрим функцию $F(x) = |x|$. Графики этой функции и ее производной приведены на рис.1.2. Видно, что выполняется (1.2) и функция имеет минимум.

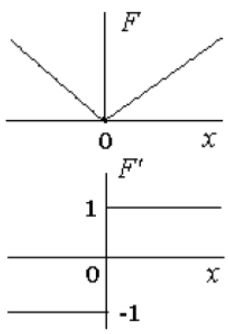

Рис. 1.2 График функции $F(x) = |x|$ и ее производной

Практическая работа 1.2. Безусловный экстремум функции многих переменных (0.5 часа)

Постановка задачи

Дана функция многих переменных $F(x_1, x_2,..., x_n)$. Если из переменных составить n-мерный вектор-столбец *x*, то можно записать $F(x_1, x_2,..., x_n) = F(x)$. Этот вектор можно рассматривать как точку в n-мерном пространстве *Rn* (*x* ∈ *Rn*). Введем также следующие обозначения: градиент функции - n-мерный вектор-столбец:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ --- \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

и гессиан функции – n×n-мерная матрица:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n^2}} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Пусть *C* – симметрическая n×n-мерная матрица с элементами *Cij* и Δ*x* – n-мерный вектор с элементами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, *T* – знак транспонирования. Тогда выражение

$$q(C, \Delta x) = \Delta x^T C \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{2.3}$$

называется квадратической формой. Квадратическая форма $q(C, \Delta x)$ (соответственно матрица С) называется

- положительно определенной, если $q(C, \Delta x) > 0$ при любых $\Delta x (\neq 0)$;
- неотрицательно определенной, если $q(C, \Delta x) \geq 0$ при любых $\Delta x (\neq 0)$;
- отрицательно определенной, если $q(C, \Delta x) < 0$ при любых $\Delta x (\neq 0)$;
- неположительно определенной, если $q(C, \Delta x) \leq 0$, при любых $\Delta x (\neq 0)$;
- знаконеопределенной, если $q(C, \Delta x)$ может иметь разные знаки при разных Δ*x*.

Проверка квадратической формы $q(C, \Delta x)$ или матрицы *C* на знакоопределенность может быть выполнена с помощью критерия Сильвестра. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ – главные миноры матрицы *C*.

Критерий Сильвестра. Квадратическая форма $q(C, \Delta x)$ (соответственно матрица *C*)

- положительно определена, если все $\Delta_i > 0$ (i=1;…,n);.
- неотрицательно определена, если все $\Delta_i \geq 0$ (i=1;…,n);
- отрицательно определена, если все $(-1)^i \Delta_i > 0$ (i=1;…,n);
- неположительно определена, если все $(-1)^i \Delta_i \geq 0$ (i=1;…,n);
- знаконеопределена, если не выполняются предыдущие условия.

Задача. Для заданной функции $F(x)$ нужно найти точки экстремума.

Решение

1. Составляется система уравнений (первое необходимое условие экстремума)

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Эта система уравнений может иметь несколько решений $\hat{x}_1,...,\hat{x}_k$ (k=0,1,…), которые являются точками в Rn.

2. Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается в этих точках, нужно вычислить вторые производные функции $F(x)$ и составить матрицу:

$$C = \frac{d^2F(\hat{x}_m)}{dx^2} = \left.\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right|_{x=\hat{x}_m}$$

или соответствующую квадратическую форму (2.3). Здесь $\hat{x}_m$ – исследуемое решение. В результате получается (второе необходимое условие экстремума):

- Если квадратическая форма (2.3) (или матрица C) положительно определена, то функция $F(x)$ в точке $\hat{x}_m$ имеет минимум.
- Если квадратическая форма (2.3) (или матрица C) отрицательно определена, то функция $F(x)$ в точке $\hat{x}_m$ имеет максимум.
- В остальных случаях точка $\hat{x}_m$ является седловой.

Пример 2.1. Найти точки экстремума функции

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 .$$

Решение

Составляем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2x_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Они имеют единственное решение $x_1 = x_2 = 0$. Вторые производные равны

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Поэтому квадратическая форма $q(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2>0$, и, следовательно, данная функция в точке $x_1=x_2=0$ имеет минимум.

Пример 2.2. Найти точки экстремума функции
$F(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$. (2.5)

Решение

Составляем уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_2 = 0.$$

Они имеют единственное решение $x_1 = x_2 = 0$. Вторые производные равны

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1{}^2} = 2, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2{}^2} = -2, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \cancel{= 0.}$$

Отсюда матрица

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

и ее главные миноры равны $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = -4$. Поэтому эта матрица не является знако-определенной, и, следовательно, точка $x_1 = x_2 = 0$ является седловой.

Практическая работа 2.1. Условный экстремум при ограничениях типа равенств

Постановка задачи. Для заданной функции многих переменных $F(x)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространства *Rn*, которая задается системой уравнений

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0, \\ g_2(x) &= 0, \\ &\dots \\ g_m(x) &= 0. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

При этом $m<n$ и предполагается, что система (3.1) совместная.

Метод исключения переменных

Решая уравнения (3.1) можно m переменных x' выразить через остальные $n-m$ переменных x', т.е. найти зависимость $x' = h(x')$. Подставляя последнее в функцию $F(x)$, получаем новую функцию $F_0(x')$, зависящую только от переменных x', на которые не накладывается никаких ограничений. Поэтому задача поиска точек экстремума функции $F_0(x')$ может быть решена методом, описанным выше.

Метод множителей Лагранжа

1. Составляется функция Лагранжа

$$L(x,\mu) = F(x) + \sum_{s=1}^{m} \mu_s g_s(x),$$

где μi – некоторые числа, называемые множителями Лагранжа. Затем находится экстремум этой функции.

2. Первое необходимое условие экстремума приводит к системе равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_{s=1}^{m} \mu_s \frac{\partial g_s(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_2} + \sum_{s=1}^{m} \mu_s \frac{\partial g_s(x)}{\partial x_2} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= \frac{\partial F}{\partial x_n} + \sum_{s=1}^{m} \mu_s \frac{\partial g_s(x)}{\partial x_n} = 0 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Объединяя (3.1) и (3.2), получаем $n+m$ уравнений для $n+m$ неизвестных x и μ. Эти уравнения могут иметь несколько решений $(\hat{x}_1, \hat{\mu}_1), \dots, (\hat{x}_k, \hat{\mu}_k)$ (k=0,1,…). Чтобы решить вопрос, какой экстремум достигается при каждом из этих решений, нужно вычислить вторые производные функции $L(x,\mu)$ и составить квадратическую форму

$$q(C,\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \Delta x_i \Delta x_j\ , \qquad (3.3)$$

где теперь

$$C_{ij} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=\hat{x}_m, \mu=\hat{\mu}_m} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{s=1}^{m} \mu_s \frac{\partial^2 g_s(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=\hat{x}_m, \mu=\hat{\mu}_m} \tag{3.4}$$

$(\hat{x}_m, \hat{\mu}_m)$ – исследуемое решение. Последние обозначения означают, что для вычисления элементов *Cij* нужно вычислить вторые производные функции $L(x, \mu)$ и затем в полученные выражения вместо *x* и μ подставить $\hat{x}_m$ и $\hat{\mu}_m$. В отличие от (2.3) переменные Δxi –здесь уже не произвольные числа, а они должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\Delta x_n = 0, \\
&\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\Delta x_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial g_m}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\Delta x_n = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

которые следуют из (3.1).
В этих уравнениях производные $\partial g_i / \partial x_j$ нужно вычислять

при $x = \hat{x}_m, \mu = \hat{\mu}_m$. Так как *m*<*n*, то система (3.5) допускает ненулевые решения. Выражая *m* переменных Δxi через другие $n - m$ переменных Δxi и подставляя их в (3.3), получаем новую квадратическую форму, которую нужно проверять на знакоопределенность.

Пример 3.1. Пусть имеется прямоугольник со сторонами x_1 и x_2 и пусть

$$x_1 = x_2 = 1. \tag{3.6}$$

При каких x_1 и x_2 площадь прямоугольника $S = x_1 \cdot x_2$ максимальна?

Метод исключения переменных

Из (3.6) находим $x_1 = 1 - x_2$. Подставляя в *S*, получаем

$$S(x_2) = (1 - x_2)x_2 .$$

Вычисляя первую производную функции $S(x_2)$, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 1 - 2x_2 = 0 .$$

Отсюда следует, что экстремум площади *S* достигается при

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} .$$

Вторая производная функции $S(x_2)$ равна

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} = -2 < 0 .$$

Отсюда следует, что площадь S имеет максимум. Таким образом, из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат.

Метод множителей Лагранжа

Составляется функция Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \mu) = x_1 x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 1),$$

где μ – множитель Лагранжа. Первое необходимое условие экстремума приводит к системе равенств

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \mu = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \mu = 0.$$

Решая эти уравнения вместе с (3.6), получаем

$$, \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \qquad \mu = -\frac{1}{2}$$

Вторые производные функции Лагранжа равны

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 1.$$

Поэтому квадратическая форма (ср. с (3.3)) равна

$$q(\Delta x_1, \Delta x_2) = \Delta x_1 \Delta x_2 .$$

Но согласно (3.5) и (3.6) величины Δx_1 и Δx_2 должны удовлетворять условию: $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$. Отсюда следует, что $\Delta x_1 = -\Delta x_2$, и, следовательно, $q(\Delta x_1, \Delta x_2) = -\Delta x_2^2 < 0$, т.е. достигается максимум.

Пример 3.2. Пусть имеется цилиндрическая емкость высотой h и радиусом r (см. рис. 3.1). Объем цилиндра равен $V = \pi r^2 h$, а общая поверхность

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h).$$

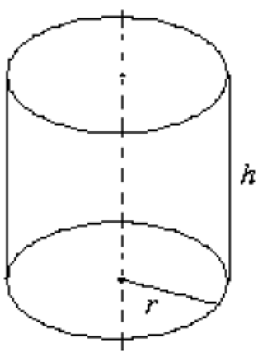

Рис. 3.1.Цилиндрическая емкость

Задача: Пусть поверхность

$$S = 2\pi r(r + h) = S_0 \tag{3.7}$$

задана. Найти такие r и h, при которых объем $V = \pi r^2 h$ максимален.

Решение

Метод исключения переменных

Из (3.7) находим:

$$h = \frac{S_0}{2\pi r} - r.$$

Подставляя это в выражение для объема, получаем

$$V = \pi r^2 \left(\frac{S_0}{2\pi r} - r \right) = \frac{r S_0}{2} - \pi r^3.$$

Вычисляя первую производную функции $V(r)$, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{S_0}{2} - 3r^2 = 0.$$

Отсюда следует, что экстремум объема V достигается при

$$r = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}, \quad h = 2r, \tag{3.8}$$

т.е. диаметр цилиндра равен его высоте. Здесь предполагается, что $r>0$.

Вторая производная функции $V(r)$ равна

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -6\pi r < 0,$$

т.е. достигается максимум.

Метод множителей Лагранжа

Составляется функция Лагранжа

$$L(x, \mu) = \pi r^2 h + \mu\bigl(2\pi r(r+h) - S_0\bigr),$$

где μ – множитель Лагранжа. Первое необходимое условие экстремума приводит к системе равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= 2\pi r h + 2\pi\mu(2r+h) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial h} &= \pi r^2 + 2\pi\mu r = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Решая совместно уравнения (3.7) и (3.9), получаем (3.8) и $\mu = -r/2$.

Вычисляя вторые производные функции $L(x, \mu)$, получаем с учетом (3.8)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} = 2\pi h + 4\pi\mu = 2\pi r, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial h} = 2\pi r + 2\pi\mu = \pi r, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} = 0.$$

Отсюда квадратическая форма (3.3) равна

$$q(\Delta r, \Delta h) = 2\pi r\left(\Delta r^2 + \Delta r \Delta h\right). \tag{3.10}$$

Чтобы найти соотношение между Δr и Δh воспользуемся уравнениями (3.5) и (3.7). Поскольку в данном случае

$$g(r, h) = 2\pi r(r+h) - S_0,$$

то из (3.5) имеем с учетом (3.8)

$$\frac{\partial g}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial g}{\partial h}\Delta h = 2\pi(2r+h)\Delta r + 2\pi r\Delta h = 8\pi r\Delta r + 2\pi r\Delta h = 0 .$$

Отсюда получаем, что $\Delta h = -4\Delta r$. Подставляя это в (3.10), получаем окончательно, что $q(\Delta r, \Delta h) = -3\pi r \Delta r^2 < 0$, т.е. достигается максимум.

Пример 3.3. Пусть имеется кусок проволоки длиной l, который разрезается на два куска длиной x_1 и x_2 соответственно, т.е.

$$x_1 + x_2 = l . \tag{3.11}$$

Из первого куска выгибается квадрат, из второго равносторонний треугольник со сторонами $x_1/4$ и $x_2/3$ соответственно (см. рис. 3.2).

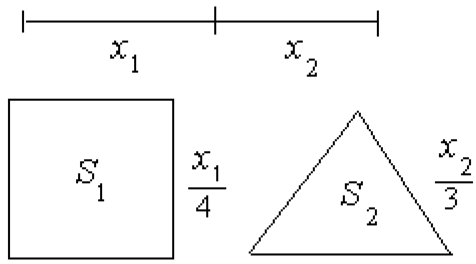

Рис. 3.2 Квадрат и равносторонний треугольник

Задача. Найти x_1 и x_2, при которых суммарная площадь обеих фигур минимальна и максимальна. Используя известные формулы из геометрии, можно подсчитать, что $S_1 = c_1 x_1^2$ и $S_2 = c_2 x_2^2$, где c_1=1/16 и c_2=$\sqrt{3}/36$. Главное для дальнейшего то, что $c_1 > c_2$. В результате общая площадь равна

$$F(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 . \tag{3.12}$$

Метод исключения переменных

Из (3.11) находим $x_2 = l - x_1$. Подставляя это в (3.12), получаем

$$F(x_1) = c_1 x_1^2 + c_2 (l - x_2)^2 ,$$

т.е. получаем функцию одной переменной. Первое необходимое условие экстремума приводит к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2c_1 x_1 - 2c_2 (l - x_1) = 0.$$

Отсюда получается

$$x_1 = \frac{c_2 l}{c_1 + c_2}, \quad x_2 = \frac{c_1 l}{c_1 + c_2}. \tag{3.13}$$

Вычисляя вторую производную, получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2c_1 + 2c_2 > 0 ,$$

и, следовательно, в точке (3.13) функция $F(x_1, x_2)$ имеет минимум. Проведенное решение не позволяет найти максимум функции $F(x_1, x_2)$. Причина заключается в том, что при решении не учтены требования, чтобы $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Полное решение этой задачи будет получено в следующем разделе. Метод множителей Лагранжа приводить не будем, так как он дает тот же результат. Геометрическое решение задачи легко получить из рис. 3.3, где приведен график функции $F(x_1)$. Видно, что на интервале [0, l] эта функция имеет максимум в угловых точках x_1=0 и x_1=l. Причем при x_1=l получается глобальный максимум. На рис. 3.3 $x_0 = \dfrac{c_2 l}{c_1 + c_2}$, т.е. это точка, где достигается минимум.

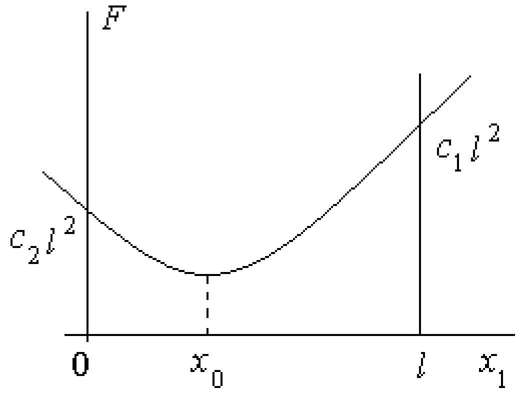

Рис. 3.3 График функции $F(x_1)$

Практическая работа 2.2. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств

Постановка задачи. Для заданной функции многих переменных $F(x)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространстве Rn, которая задается системой неравенств

$$\begin{aligned} &g_1(x) \le 0,\\ &g_2(x) \le 0,\\ &\dots\\ &g_m(x) \le 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

При этом предполагается, что система (4.1) совместная.

Решение. С помощью введения новых переменных система (4.1) может быть приведена к системе равенств вида

$$\begin{aligned} &g_1(x) + x_{n+1}^2 = 0,\\ &g_2(x) + x_{n+2}^2 = 0,\\ &\dots\dots\\ &g_m(x) + x_{n+m}^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В результате приходим к задаче, решение которой обсуждалось в теме 3.

Пример 4.1. Найти экстремумы функции $F(x)=x^2$ на интервале [a,b]. Графическое решение приведено на рис. 4.1.

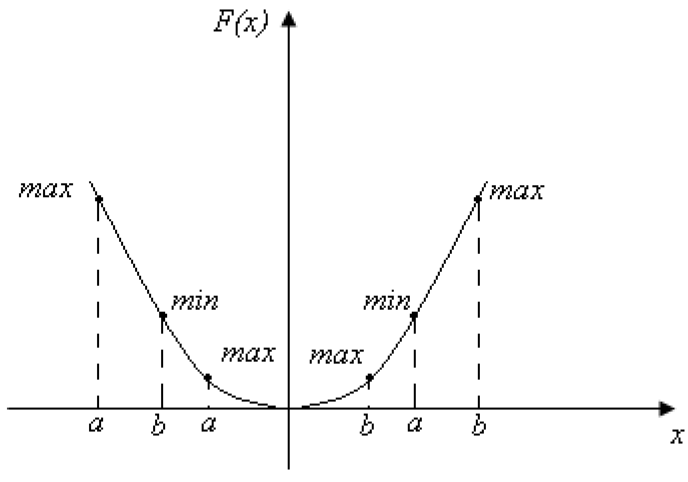

Рис. 4.1. График функции $F(x) = x^2$

Последние неравенства запишем в виде двух равенств

$$\begin{aligned} &g_1 = x - a - x_1^2 = 0,\\ &g_2 = b - x - x_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где x_1 и x_2 – новые переменные.

Составим функцию Лагранжа

$$L = x^2 + \mu_1\left(x - a - x_1^2\right) + \mu_2\left(b - x - x_2^2\right),$$

где μ, μ_1 – множители Лагранжа. Условия первого порядка приводят к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \mu_1 - \mu_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2\mu_1 x_1 = 0, \qquad (4.4)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2\mu_2 x_2 = 0.$$

Чтобы решить вопрос об экстремумах функции, вычислим вторые производные функции $L(x, \mu)$. Эти производные равны:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому квадратическая форма (3.3) равна

(4.5)

$$q(\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2) = 2\Delta x^2 - 2\mu_1 \Delta x_1^2 - 2\mu_2 \Delta x_2^2. \quad (()$$

При этом величины $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2$ согласно (3.5) и (4.3) должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta x - 2x_1 \Delta x_1 = 0,$$
$$-\Delta x - 2x_2 \Delta x_2 = 0. \qquad (4.6)$$

Решая совместно уравнения (4.3) и (4.4), получаем три варианта решений.

Вариант I. Пусть x1=0. Тогда

$$x = a, \mu_1 \neq 0, x_1 = 0, x_2 = \pm\sqrt{b-a} \neq 0, \mu_2 = 0, \quad \mu_1 = -2a.$$

Далее из (4.6) получаем: $\Delta x = \Delta x_2 = 0, \Delta x_1 \neq 0$. Поэтому $q = 2a\Delta x_1^2$. В результате получается, что в точках $x=a$ функция имеет максимум при $a<0$ и минимум при $a>0$.

Вариант II. Пусть $x_2=0$. Тогда

$$x = b, \mu_2 \neq 0, x_2 = 0, x_1 = \pm\sqrt{b-a} \neq 0, \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 2b.$$

Далее из (4.6) получаем: $\Delta x = \Delta x_1 = 0, \Delta x_2 \neq 0$. Поэтому $q = -2b\Delta x_2^2$. В результате получается, что в точках $x=b$ функция имеет минимум при $b<0$ и максимум при $b>0$.

Вариант III. Пусть $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Тогда $x = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Поэтому $q = 2\Delta x^2 > 0$ и в точке $x=0$ функция имеет минимум.

Пример 4.2. Рассмотрим пример 3.3. Добавим условия $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Эти условия можно преобразовать в равенства, если ввести новые переменные x_3 и x_4,

$$g_1 = x_1 - x_3^2 = 0,$$
$$g_2 = x_2 - x_4^2 = 0. \qquad (4.7)$$

Учитывая (3.11), (3.12) и (4.7), составим функцию Лагранжа

$$L = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - l) + \mu_1(x_1 - x_3^2) + \mu_2(x_2 - x_4^2),$$

где μ, μ_1, μ_2– множители Лагранжа. Условия первого порядка приводят к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2c_1x_1 + \mu + \mu_1 = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2c_2x_2 + \mu + \mu_2 = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial x_3} = -2\mu_1x_3 = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial x_4} = -2\mu_2x_4 = 0.
\end{aligned}
\qquad (4.8)
$$

Вторые производные функции $L(x, \mu)$ равны:

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \begin{vmatrix} 2c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu_2 \end{vmatrix}.
$$

Поэтому квадратическая форма (3.3) равна

$$
q(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4) = 2c_1\Delta x_1^2 + 2c_2\Delta x_2^2 - 2\mu_1\Delta x_3^2 - 2\mu_2\Delta x_4^2. \qquad ((4.9)
$$

При этом величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4$ согласно (3.5) и (4.7) должны удовлетворять уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0,\\
&\Delta x_1 - 2x_3\Delta x_3 = 0,\\
&\Delta x_2 - 2x_4\Delta x_4 = 0.
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

Решая совместно уравнения (3.11), (4.7) и (4.8), получаем три варианта решений.

Вариант I. Пусть x_3=0. Тогда

$$x_1 = 0, x_2 = l,\ x_4 \neq 0, \mu_2 = 0, \mu = -2c_2l, \mu_1 = 2c_2l.$$

Далее из (4.10) получаем: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_4 = 0, \Delta x_3 \neq 0$. Поэтому $q = -2c_2\Delta x_3^2 < 0$. В результате получается, что при $x_1 = 0, x_2 = l$ функция имеет максимум.

Вариант II. Пусть x_4=0. Тогда

$x_1 = l, x_2 = 0,\ x_3 \neq 0, \mu_1 = 0, \mu = -2c_1l, \mu_2 = 2c_1l$.

Далее из (4.10) получаем: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0, \Delta x_4 \neq 0$. Поэтому $q = -2c \ \Delta x^2 < 0$. В результате получается, что при $x_1 = l, x_2 = 0$ функция имеет максимум.

Вариант III. Пусть $x_3 \neq 0, x_4 \neq 0$. Тогда:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, x_1 = \frac{c_2 l}{c_1 + c_2}, x_2 = \frac{c_1 l}{c_1 + c_2}.$$

Поэтому $q = 2c \ \Delta x^2 + 2c\Delta x^2 > 0$ и, следовательно, в указанной точке функция имеет минимум. Таким образом, найдено полное решение задачи, которое соответствует рис.3.3.

Практическая работа 3-4

Данные работы приведены в методическом пособии:

Параев Ю.И. Методы оптимизации (Часть 2. Линейное программирование) – Методические указания для проведения практических занятий для студентов направления 230100 «Информатика и вычислительная техника». 2010 – 46 с.