Министерство высшего образования и науки РФ
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
Кафедра экономической математики, информатики и статистики

«Математические модели в экономике»

В.И.Смагин

Учебно-методическое пособие
к лабораторным работам для студентов направления 38.03.01
«Экономика». Профиль: «Фнансы и кредит»

Томск - 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация

Учебно-методического пособия
к лабораторным работам для студентов направления 38.03.01
«Экономика». Профиль: «Финансы и кредит»

В методических указаниях для дисциплины «Математические модели в экономике» рассматриваются разделы: модели экономического равновесия, производственные функции, модели ценообразования, модели межотраслевого баланса, динамические модели фирмы**.**

Предлагаемые задания к лабораторным работам выполняются студентами в компьютерном классе с использованием пакета прикладных программ MathCad

Перечень закрепленных за дисциплиной компетенций

ПК-3	способностью выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами;
ПК-5	способностью анализировать и интерпретировать финансовую, бухгалтерскую и иную информацию, содержащуюся в отчетности предприятий различных форм собственности, организаций, ведомств и т.д., и использовать полученные сведения для принятия управленческих решений.

В результате изучения дисциплины студенты должны
знать:
- теоретические основы экономико-математических систем, используемых в рыночной микро- и макроэкономике, на примере моделей производства, моделей фирмы, управления запасами и моделей межотраслевого баланса;
- закономерности и свойства сложных систем;
- многообразие экономико-математических систем и моделей;
- особенности современных моделей производства, моделей фирмы.

уметь:
- использовать изученные методы для решения конкретных задач построения математических моделей экономики;
- проводить анализ экономических показателей производства;
- выявлять экономико-математические особенности различных систем.

владеть навыками:
- самостоятельного проведения математического исследования экономических систем;
- самостоятельного построения математических моделей в экономике;
- самостоятельной работы со специальной и справочной литературой;
- навыками поиска экономико-математической информации.

1. Модели экономического равновесия

Потребитель, идя на рынок (магазин, мастерскую и т.д.), приобретает там некоторые товары (услуги тоже можно считать товаром). Пусть на рынке имеется в наличии всего n видов товаров – товар №1, товар №2, ... , товар № n. Пусть потребителю предлагается набор товаров, в котором первый товар будет в количестве x_1, второй – в количестве x_2, ..., n-ый товар будет в количестве x_n. Тогда этот набор можно представить в виде вектора-столбца

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T .$$

Очевидно, что $\forall i \quad x_i \geq 0$ (в дальнейшем это будет обозначаться так: $\vec{x} \geq 0$).

Конечно, многие товары можно приобрести только целиком – нельзя купить 1,3 автомобиля. Однако, для нижеследующей теории будем считать, что все товары безгранично делимы, то есть x_i могут принимать любые неотрицательные значения. Это позволит в дальнейшем использовать аппарат дифференциального исчисления.

Пусть потребителю предлагается два набора товаров $\vec{x}$ и $\vec{y}$. В качестве аксиомы предполагается, что потребитель, сравнивая эти наборы, всегда может сказать одно из следующих утверждений:

1. Набор $\vec{x}$ не хуже набора $\vec{y}$ (это обозначается так: $\vec{x} \succ \vec{y}$);
2. Набор $\vec{x}$ лучше (предпочтительнее) набора $\vec{y}$ ($\vec{x} \succ \vec{y}$);
3. Наборы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ для потребителя эквивалентны ($\vec{x} \sim \vec{y}$);
4. Набор $\vec{y}$ лучше набора $\vec{x}$ ($\vec{y} \succ \vec{x}$);
5. Набор $\vec{y}$ не хуже набора $\vec{x}$ ($\vec{y} \succ \vec{x}$).

В качестве аксиом принимаются следующие свойства этого отношения:

1. $\vec{x} \succ \vec{x}$;
2. $\vec{x} \succ \vec{y} \wedge \vec{y} \succ \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \succ \vec{z}$.

Определение. Отношение предпочтения называется непрерывным на некотором множестве X, если множество $\{(\vec{x}, \vec{y}) \colon \vec{x} \in X,\ \vec{y} \in X,\ \vec{x} \succ \vec{y}\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \otimes X$.

Содержательно это определение означает следующее: если для некоторого набора товаров $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ верно $\bar{x}_0 \succ \bar{y}_0$, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение $\succ$ сохраняется, то есть если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ близки к $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ соответственно, то $\bar{x} \succ \bar{y}$.

Определение. Функция $u(\bar{x})$ называется функцией полезности для отношения $\succ$, если.

1. $\bar{x} \succ \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) \geq u(\bar{y})$;
2. $\bar{x} \succ \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) > u(\bar{y})$;
3. $\bar{x} \sim \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) = u(\bar{y})$.

Основной теоремой является так называемая теорема Дебре.

Теорема 1.1. (Дебре) Если множество X связно, а отношение предпочтения удовлетворяет свойствам

1. $\bar{x} \succ \bar{x}$;
2. $\bar{x} \succ \bar{y} \wedge \bar{y} \succ \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \succ \bar{z}$.
3. отношение $\succ$ непрерывно на X,

то для этого отношения существует функция полезности $u(\bar{x})$.

Теорема 1.2.

1. Пусть $f(t)$ есть строго монотонно возрастающая функция и $u(\bar{x})$ есть функция полезности. Тогда $v(\bar{x}) = f(u(\bar{x}))$ есть также функция полезности.

2. Если $u(\bar{x})$ и $v(\bar{x})$ есть две функции полезности для одного и того же отношения предпочтения, то существует такая строго монотонно возрастающая функция $f(t)$, что $v(\bar{x}) = f(u(\bar{x}))$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что функция $u(\bar{x})$ является дважды дифференцируемой функцией. В экономике на функцию полезности накладывают некоторые дополнительные требования, характерные именно для экономики. Рассмотрим их.

1. $\forall i, \bar{x}_i \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0.$

Это условие означает, что чем больше каждого товара, тем лучше.

2. $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = +\infty.$

3. $\forall i = \overline{1,n} \quad \lim\limits_{x_i \to +\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$

Это требование носит название закона убывающей полезности.

4. Пусть $\bar{y} \succ \bar{x}$. Тогда $\forall \alpha \quad 0 < \alpha < 1$ естественно требовать, чтобы

$$\alpha \bar{y} + (1-\alpha)\bar{x} \succ \bar{x}. \tag{1.1}$$

Это приводит к следующему ограничению на $u(\bar{x})$:

$$u(\alpha \bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \geq \min(u(\bar{x}),\, u(\bar{y})). \tag{1.2}$$

Функция, удовлетворяющая этому требованию, называется квазивогнутой.

В дальнейшем мы, для упрощения теории, будем требовать, чтобы $u(\bar{x})$ была вогнутой, то есть

$$\forall \alpha \;\; 0 < \alpha < 1 \;\; u(\alpha \bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \geq \alpha u(\bar{y}) + (1-\alpha)u(\bar{x}), \tag{1.3}$$

или даже строго вогнутой, то есть

$$\forall \alpha \;\; 0 < \alpha < 1 \;\; u(\alpha \bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) > \alpha u(\bar{y}) + (1-\alpha)u(\bar{x}). \tag{1.4}$$

Заметим, что всякая вогнутая функция одновременно и квазивогнута. Обратное, вообще говоря, неверно.

Рассмотрим матрицу $U(\vec{x}) = \|u_{ij}\|$ с элементами

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{1.5}$$

В экономике эта матрица называется матрицей Гессе. Для строго вогнутой функции эта матрица отрицательно определена. Отсюда, в частности, следует, что

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0. \tag{1.6}$$

Приведем примеры функций полезности.

1. Функция Стоуна

$$u(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^{a_i}, \qquad x_i > \bar{x}_i \geq 0, \quad a_i > 0.$$

Это выражение часто логарифмируют и берут в виде

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \ln(x_i - x_i).$$

2. Функция постоянной эластичности

$$u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - \overline{x}_i)^{1-b_i},$$
$$x_i > \overline{x}_i \geq 0,\ a_i > 0,\ 0 < b_i < 1.$$

3. $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a}(x_1 + b - a)^{-b}, \quad b > a.$

Введём теперь цены на товары. Пусть c_i есть цена единицы I- го товара, так что

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$$

есть вектор-столбец цен.

Пусть покупатель идет на рынок имея капитал K. Приобретая набор товаров $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ он, естественно, желает за свои деньги иметь максимум полезности для себя. Поэтому поведение разумного потребителя выглядит как решение задачи

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow \max\limits_{\vec{x}}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \leq K, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Это – типичная задача нелинейного программирования. Заметим, что область допустимых значений $\bar{x}$ выпукла и замкнута.

Теорема 1.3.

1. Для вогнутой функции, определённой на выпуклом замкнутом множестве, любой локальный максимум является глобальным.

2. Для строго вогнутой функции глобальный максимум достигается в единственной точке.

Выведем уравнение для точки максимума $u(\bar{x})$, обозначая ее через $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \bar{x}_3^*, \ldots, \bar{x}_n^*)^T$. Для этого составим функцию Лагранжа

$$L(\vec{x}, \lambda) = u(\vec{x}) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - K\right), \tag{1.8}$$

и запишем необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \tag{1.9}$$

Получаем, что в точке максимума имеют место соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(\vec{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* c_i = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i^* - K = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

где через λ^* обозначено значение множителя Лагранжа, соответствующее точке максимума $\vec{x}^*$.

Заметим, что в точке максимума выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = K, \tag{1.11}$$

то есть потребитель тратит на рынке весь свой капитал. Так как

$$\lambda^* = \frac{1}{c_i} \cdot \frac{\partial u(\vec{x}^*)}{\partial x_i}, \tag{1.12}$$

то при оптимальном выборе потребителя имеют место соотношения

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{\partial u(\vec{x}^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial u(\vec{x}^*)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{\partial u(\vec{x}^*)}{\partial x_n}. \tag{1.13}$$

Величину $\partial u / \partial x_i$ называют предельной полезностью i-го товара. Таким образом, в точке оптимального выбора предельные полезности пропорциональны ценам на товар.

Из этого же соотношения следует, что $\lambda^* > 0$, так как цены отрицательными быть не могут.

Понятие компенсирующего дохода или просто компенсации проще всего понять из рассмотрения примера.

Пример. Пусть имеется всего лишь два вида товаров – товар номер 1 и товар номер 2 с ценами за единицу товара c_1 и c_2 соответственно. Пусть количества приобретаемых товаров равны x_1 и x_2 и функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Тогда, имея капитал K, покупатель должен решить следующую задачу:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \max, \\ c_1x_1 + c_2x_2 = K, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Составляем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 \cdot x_2 - \lambda(c_1x_1 + c_2x_2 - K).$$

Запишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad x_2 - \lambda c_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \qquad x_1 - \lambda c_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \qquad c_1x_1 + c_2x_2 - K = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

относительно переменных x_1, x_2 и λ. Решение этой системы имеет вид

$$x_1^* = \frac{K}{2c_1};\ x_2^* = \frac{K}{2c_2}. \tag{1.16}$$

При этом

$$\max u(x_1, x_2) = u(x_1^*, x_2^*) = \frac{K^2}{4c_1c_2}. \tag{1.17}$$

Если, например, K=120, c_1=10, c_2=20, то x_1^*=6, x_2^*=3. При этом $u(x_1^*, x_2^*)$=18.

Постановка задачи. Пусть теперь покупателю предлагают увеличить цену за первый товар с 10 до 15 за единицу товара, но при этом обещают компенсировать увеличение его расходов, возникшее за счёт этого увеличения цены. Определим размер компенсации. Величина компенсации получается из того условия, что после изменения цен и получения компенсации максимальное значение функции полезности должно остаться неизменным.

Пусть компенсация равна ΔK и новые цены есть c_1', c_2'. Тогда до компенсации

$$\max u(x_1, x_2) = \frac{K^2}{4c_1c_2}, \tag{1.18}$$

а после компенсации

$$\max u(x_1, x_2) = \frac{(K + \Delta K)^2}{4c_1'c_2'}. \tag{1.19}$$

Должно выполняться равенство

$$\frac{K^2}{4c_1c_2} = \frac{(K+\Delta K)^2}{4c_1'c_2'}, \qquad (1.20)$$

откуда легко получить, что

$$\Delta K = K \cdot \left(\sqrt{\frac{c_1'c_2'}{c_1c_2}} - 1 \right). \qquad (1.21)$$

В примере

$$\Delta K = 120 \cdot \left(\sqrt{\frac{15 \cdot 20}{10 \cdot 20}} - 1 \right) \approx 27, \qquad (1.22)$$

то есть компенсация должна составить 27 единиц.

Отметим, что при изменении цен на товары происходит изменение структуры потребления. В этом изменении структуры потребления одновременно сказываются два эффекта:

- изменение соотношения цен между различными товарами;
- изменение финансовой ситуации для покупателя.

Понятие компенсации позволяет исключить второй эффект и выделить эффект влияния изменения соотношения цен между товарами на их приобретение в чистом виде.

ЗАДАНИЕ

1. Пусть имеется два вида товаров с ценами, c_1 и c_2. Функция полезности имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + d_3 x_1 x_2.$$

Имеющийся в наличии капитал, равен K. Какое количество товаров должен приобрести потребитель, для максимизации функции полезности. Значения c_1, c_2, d_1, d_2, d_3, K приведены в таблице. Расчет выполнить сначала при $d_3 = 0$, затем для того значения d_3, которое приведено в таблице 1.1.

2. Пусть цена c_1 увеличилась на 2у.е. Рассчитать компенсацию ΔK для капитала при тех же исходных данных, обеспечив при этом прежнее значение функции полезности. При этом параметр d_3 принять равным нулю.

Таблица 1.1.

п/п	c_1	c_2	d_1	d_2	d_3	K
1	40	50	2	2	1	1000
2	5	10	1	1	0,3	200
3	10	30	1	2	1	600
4	40	20	4	2	1	700
5	10	20	1	1	0,4	500
6	12	24	1	1	0,1	100
7	35	22	2	3	0,5	600
8	30	20	4	1	0,4	400
9	5	15	2	1	0,8	750
10	20	30	2	1	0,5	250
11	20	25	1	4	1	800
12	40	50	2	1	1	1200

2. Производственные функции

Рассмотрим основные понятия и теоремы для производственных функций, которые используются в качестве моделей макроэкономики и моделей микроэкономики (например, в качестве модели фирмы).

Пусть: $Y \geq 0-$ валовой продукт, $K \geq 0-$ основные фонды, $L \geq 0-$ трудовые ресурсы. Тогда функция $F(K,L) \geq 0$, определяющая зависимость валового продукта от основных фондов и трудовых ресурсов, т.е.

$$Y = F(K,L), \tag{2.1}$$

называется производственной функцией (ПФ), а аргументы K и $L-$ факторами производства.

Если для $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место свойство

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K,L), \tag{2.2}$$

то ПФ $F(K,L)$ называется однородной ПФ со степенью однородности γ. Если $\gamma=1$, то однородная ПФ $F(K,L)$ называется линейно-однородной ПФ.

Теорема 2.1. (Теорема Эйлера). Если $F(K,L)$ является однородной ПФ со степенью однородности γ, то справедливо равенство

$$\gamma F(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L. \qquad (2.3)$$

ПФ $F(K,L)$ называется неоклассической ПФ, если для $K\geq 0$ и $L\geq 0$ она удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
&1^0)\ \frac{\partial F}{\partial K}>0,\ \frac{\partial F}{\partial L}>0;\\
&2^0)\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0;\\
&3^0)\ \lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K}=\infty,\ \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L}=\infty;\\
&4^0)\ \lim_{K\to\infty}\frac{\partial F}{\partial K}=0,\ \lim_{L\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L}=0.
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Пусть $A>0,\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \alpha+\beta=1$, тогда ПФ вида

$$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

называется ПФ Кобба–Дугласа.

Теорема 2.2. Пусть $F_i(K,L),\ i=\overline{1,N}$, являются однородной ПФ со степенями однородности γ_i, тогда ПФ

$$F(K,L)=\prod_{i=1}^{N}F_i(K,L) \qquad (2.5)$$

являются однородной ПФ со степенью однородности

$$\gamma=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i. \qquad (2.6)$$

Рассмотрим основные экономико–математические характеристики.

Средней производительностью труда называется величина

$$y=F(K,L)/L, \qquad (2.7)$$

т.е. y – это количество валового продукта, приходящегося на единицу трудовых ресурсов.

Средней фондоотдачей называется величина

$$z = F(K, L) / K, \tag{2.8}$$

т.е. z – это количество валового продукта, приходящегося на единицу основных фондов.

Фондовооруженностью труда называется величина

$$k = K / L, \tag{2.9}$$

т.е. k – это количество основных фондов, приходящееся на единицу трудовых ресурсов.

Предельной производительностью труда или нормой прибыли с трудовых ресурсов называется величина

$$\upsilon = \partial F(K, L) / \partial L, \tag{2.10}$$

т.е. υ – это прирост валового продукта, приходящийся на единицу прироста трудовых ресурсов.

Предельной фондоотдачей или нормой прибыли с основных фондов называется величина

$$r = \partial F(K, L) / \partial K, \tag{2.11}$$

т.е. r – это прирост валового продукта, приходящийся на единицу основных фондов.

Пусть при заданном K прирост трудовых ресурсов, равный ΔL, вызывает прирост валового продукта, равный ΔF. Тогда, согласно (2.4), $\upsilon = \Delta F / \Delta L$. Пусть при заданном L прирост основных фондов, равный ΔK, вызывает прирост валового продукта, равный ΔF. Тогда, согласно (2.11), $r \cong \Delta F / \Delta K$. Таким образом, экономический смысл параметров υ и r очевиден.

Очевидно, что

$$Y_K = \frac{\partial F}{\partial K} K, \ Y_L = \frac{\partial F}{\partial L} L, \tag{2.12}$$

являются соответственно доходами, полученными с основных фондов и трудовых ресурсов. Тогда для линейно-однородной ПФ, согласно (2.11), (2.12), следует, что

$$F(K, L) = Y_K + Y_L.$$

Таким образом, теорема Эйлера для линейно-однородная ПФ дает представление валового продукта в виде суммы Y_K и Y_L.

Коэффициентом эластичности по фондам называется величина

$$\alpha = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \frac{K}{F(K,L)}, \tag{2.13}$$

т.е. $\alpha -$ это процентный прирост валового продукта, приходящийся на один процент прироста основных фондов.

Коэффициентом эластичности по трудовым ресурсам называется величина

$$\beta = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \frac{L}{F(k,L)}. \tag{2.14}$$

т.е. $\beta -$ это процентный прирост валового продукта, приходящийся на один процент прироста трудовых ресурсов.

Справедливость следующих двух формул очевидна

$$\alpha = r / z, \quad \beta = \upsilon / y. \tag{2.15}$$

Теорема 2.3. Пусть $F(K,L)$ являются линейно-однородная ПФ со степенью однородности γ, тогда имеет место свойство

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Пусть $F(K,L)$ – однородная ПФ со степенью однородности γ. Тогда соотношению $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K,L)$ эквивалентно соотношение

$$y = L^{\gamma - 1} f(k),$$

где $y = Y / L, \ k = K / L$ – соответственно средняя производительность труда и фондовооруженность труда, а $f(k) \ge 0$ для $k \ge 0$ имеет вид

$$f(k) = F(k,1).$$

Очевидно, что неоклассические условия для $f(k)$ имеют вид (здесь и далее штрихи, как правые верхние индексы, означают производные соответствующего порядка по k)

$$1^0)\ f'(k) > 0;$$
$$2^0)\ f''(k) < 0;$$
$$3^0)\ \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty;$$
$$4^0)\ \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0.$$

Теорема 2.4. Если $F(K,L)$ – однородная ПФ со степенью однородности γ, то $F(K,L)$ и $f(k)$ связаны соотношениями

$$F(K,L) = L^{\gamma} f(k).$$

Теорема 2.5. Экономико–математические параметры $z, \upsilon, r, \alpha, \beta$ для однородной ПФ определяются формулами

$$z = (1/k)L^{\gamma-1} f(k),$$

$$\upsilon = L^{\gamma-1}[\gamma\, f(k) - kf'(k)],$$

$$r = L^{\gamma-1} f'(k),$$

$$\alpha = k[f'(k)/ f(k)],$$

$$\beta = \gamma - k[f'(k)/ f(k)].$$

Если $F(K,L)$ – линейно-однородная ПФ, то r является убывающей, а υ – возрастающей функцией фондовооруженности k.

Если хотя бы один из коэффициентов эластичности α либо β не зависит от фондовооруженности k, то линейно-однородная ПФ является ПФ Кобба–Дугласа.

Рссмотрим параметры эластичности замены факторов.

Пусть фактор K получил приращение ΔK. Ставится вопрос: на какую величину ΔL должен уменьшиться фактор L, чтобы величина валового продукта не изменилась. Справедлив и обратный вопрос. Таким образом, основное соотношение для решения поставленного вопроса замены одного фактора производства другим имеет вид

$$\Delta Y = \Delta F(K,L) = \frac{\Delta F}{\Delta K}\Delta K + \frac{\Delta F}{\Delta L}\Delta L = 0. \qquad (2.16)$$

В пределе получаем

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} dL = 0. \qquad (2.17)$$

Предельные нормы замены трудовых ресурсов основными фондами S_K и основных фондов трудовыми ресурсами S_L определяются как

$$S_K = -\frac{dK}{dL}, \quad S_L = -\frac{dL}{dK},$$

и выражаются формулами

$$S_K = \frac{\partial F(K,L)/\partial L}{\partial F(K,L)/\partial K} = \frac{\upsilon}{r}, \;\; S_L = \frac{\partial F(K,L)/\partial K}{\partial F(K,L)/\partial L} = \frac{r}{\upsilon}.$$

Произведение предельных норм замены равно единице, т.е.

$$S_K S_L = 1.$$

Если ПФ является однородной со степенью однородности γ, то имеют место формулы

$$S_K = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k, \quad S_L = \frac{f'(k)}{\gamma f(k) - kf'(k)}.$$

Эластичностью замены σ_K фактора L фактором K называется процентное изменение фактора K, вызывающее изменение предельной нормы замены S_K на один процент. Эластичностью замены σ_L фактора K фактором L называется процентное изменение фактора L, вызывающее изменение предельной нормы замены S_L на один процент.

Согласно определению

$$\sigma_K = \left(\frac{dS_K}{dk} \frac{k}{S_K} \right)^{-1},$$

$$\sigma_L = \left(-\frac{dS_L}{dk} \frac{k}{S_L} \right)^{-1} = \left(\frac{dS_L}{dk^{-1}} \frac{k^{-1}}{S_L} \right)^{-1}.$$

Для однородной ПФ со степенью однородности γ имеет место свойство $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$, которая определяется формулой

$$\sigma = \frac{f'(k)[\gamma\, f(k) - kf'(k)]}{k[(\gamma - 1)(f'(k))^2 - \gamma\, f(k) f''(k)]}.$$

Теорема 2.6. Для того, чтобы норма замены S_K либо S_L линейно-однородной ПФ не зависела от фондовооруженности k, необходимо и достаточно, чтобы она была линейной, т.е.

$$F(K, L) = AK + BL, \quad f(k) = Ak + B.$$

Рассмотрим случай произвольного числа факторов производства. Если $x_i \geq 0,\ i = \overline{1;n}$, являются факторами производства, то функция $F(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, определяющая валовой продукт Y через факторы производства, т.е.

$$Y = F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

называется производственной функцией.

Если для $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место свойство

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^\gamma F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

то ПФ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется однородной ПФ со степенью однородности γ. Если $\gamma = 1$, то однородная ПФ называется линейно–однородной ПФ.

Теорема 2.7. (Теорема Эйлера). Если $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является однородной ПФ со степенью однородности γ, то имеет место свойство

$$\gamma F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i .$$

ПФ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется неоклассической ПФ, если для $x_i \geq 0,\ i = \overline{1; n}$, она удовлетворяет условиям

$$1^0)\ \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} > 0;$$

$$2^0)\ \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, ..., x_{n)}}{\partial x_i^{\ 2}} < 0;$$

$$3^0) \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \infty;$$

$$4^0) \lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = 0.$$

Пусть константы $A,\ \alpha_i,\ i = \overline{1; n}$, такие, что

$$A > 0;\ \ 0 < \alpha_i < 1;\ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Тогда ПФ вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = Ax_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}$$

называется ПФ Кобба–Дугласа.

Средней производительностью фактора x_i называется величина

$$y_i = \frac{F(x_1, x_2, ..., x_n)}{x_i},\ \ i = \overline{1; n},$$

т.е. y_i – это количество валового продукта, приходящегося на единицу фактора x_i.

Фондовооруженностью фактора x_j относительно фактора x_i называется величина

$$r_{ij} = \frac{x_i}{x_j},$$

т.е. r_{ij} – это количество фактора x_i, приходящегося на единицу фактора x_j.

Предельной производительностью фактора x_i или нормой прибыли с фактора x_i называется величина

$$\upsilon_i = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i},$$

т.е. υ_i – это прирост валового продукта, приходящийся на единицу прироста фактора x_i.

Очевидно, что

$$Y_i = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} x_i$$

является доходом, полученным за счет фактора x_i. Тогда для линейно-однородная ПФ, справедливо равенство

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} Y_i ,$$

т.е. для линейно-однородной ПФ теорема Эйлера дает представление валового продукта в виде суммы Y_i.

Коэффициентом эластичности по фактору x_i называется величина

$$\alpha_i = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{F(x_1, x_2, ..., x_n)},$$

т.е. α_i – это процентный прирост валового продукта, приходящийся на один процент прироста фактора x_i.

Теорема 2.8. Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является однородной ПФ со степенью однородности γ. Тогда имеет место свойство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \gamma .$$

Теорема 2.9. Пусть

$$F(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}) = \\ = f(k_{1,i}, k_{2,i}, ..., k_{i-1,i}, 1, k_{i+1,i}, ..., k_{n,i}) = f_i(\cdot).$$

Тогда

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i^{\gamma} f_i(\cdot),$$

$$y_i = x_i^{\gamma-1} f_i(\cdot),$$

$$\upsilon_i = x_i^{\gamma-1}[\gamma\, f_i(\cdot) - \sum_{j\neq i} k_{j,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{j,i}}],$$

$$\upsilon_j = x_i^{\gamma-1} \frac{\partial f_i}{\partial k_{j,i}},$$

$$\alpha_i = \gamma - \sum_{j\neq i} k_{j,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{j,i}} \cdot \frac{1}{f_i(\cdot)},$$

$$\alpha_j = k_{j,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{j,i}} \cdot \frac{1}{f_i(\cdot)}.$$

Предельной нормой замены $S_{i,j}$ фактора x_j фактором x_i называется величина

$$S_{i,j} = -\frac{dx_i}{dx_j},$$

определяемая формулой

$$S_{i,j} = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)/\partial x_j}{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)/\partial x_i} = \frac{\upsilon_j}{\upsilon_i}.$$

Предельная норма замены имеет представление

$$S_{i,j} = \frac{\partial f_i(\cdot)/\partial k_{j,i}}{\gamma f_i(\cdot) - \sum_{m\neq i} k_{m,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{m,i}}}.$$

Произведение предельных норм замены $S_{i,j}$ и $S_{j,i}$ равно единице, т.е.

$$S_{i,j} S_{j,i} = 1.$$

ЗАДАНИЕ

1. Пусть $F(K,L)$ является производственной функцией Кобба-Дугласа, т.е.

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{2.18}$$

$$A > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

- Проверить, что ПФ вида (1) является неоклассической.
- Показать, что ПФ вида (1) является линейно-однородной ПФ, т.е. $\gamma = 1$.

2. Пусть $F(K,L)$ является однородной ПФ. Доказать свойство

$$\alpha + \beta = \gamma, \tag{2.19}$$

где α и β – коэффициенты эластичности.

3. Пусть $F(K,L)$ является линейно-однородной ПФ. Доказать свойства

$$y > v,\ z > r\ . \tag{2.20}$$

4. Пусть $F(K,L)$ является линейно-однородной ПФ. Получить функциональные зависимости

$$\alpha = \varphi(\,r,z),\ \beta = \psi(\,v,y\,), \tag{2.21}$$

$$y = \chi\,(k,r,v),\ \ z = \theta(\,k,r,v), \tag{2.22}$$

$$\alpha = (r\,/\,z);\ \beta = v\,/y;\ y = r\,k + v;\ z = (v\,/\,k) + r. \tag{2.23}$$

5. Пусть $F(K,L)$ является ПФ Кобба-Дугласа.

- Показать, что параметры α и β в представлении функции являются соответственно коэффициентами эластичности по фондам и трудовым ресурсам. Найти z, v, r.
- Показать, что

$$y = Ak^{\alpha}\,;\ v = \beta y;\ r = \alpha z. \tag{2.24}$$

- Найти экономико–математические параметры на основе представления $f(k) = A\,k^{\alpha}$ и показать, что полученные формулы совпадают с найденными выражениями на основе $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

6. Пусть $F(K,L)$ является однородной ПФ. Показать, что

$$y = L^{\gamma-1}f(k), \tag{2.25}$$

$$F(K,L) = L^{\gamma}\,f(k). \tag{2.26}$$

7. Пусть $F(K,L)$ является однородной ПФ. Показать, что

$$\begin{aligned} &z = L^{\gamma-1}\,\frac{f(k)}{k}, \quad v = L^{\gamma-1}[\gamma f(k) - kf'(k)], \\ &r = L^{\gamma-1}\,f'(k), \quad \alpha = k\,\frac{f'(k)}{f(k)},\ \beta = \gamma - k\,\frac{f'(k)}{f(k)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

8. Доказать, что для того, чтобы норма замены S_K или S_L линейно-однородная ПФ не зависела от k, необходимо и достаточно, чтобы она была линейной, т.е.

$$F(K,L) = AK + BL,\ \ f(k) = Ak + B. \tag{2.28}$$

3. Теория ценообразования

Рассмотрим сначала простейшую паутинообразную модель.

В основе цены на товар лежат две кривые: зависимость спроса D от цены товара C ($D(C)$) и зависимость предложения (производства) товара S от той же цены C, Их стандартный вид изображен на рис. 1.

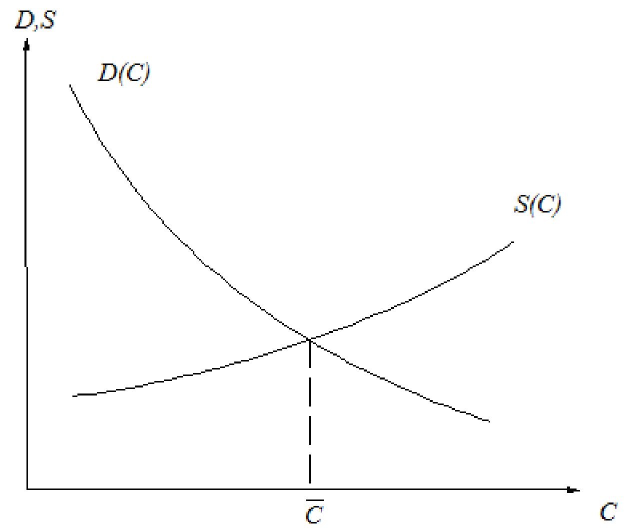

Рис. 3.1. Зависимости спроса и предложения

Равновесная цена $\overline{C}$, когда спрос равен предложению, определяется уравнением

$$D(\overline{C}) = S(\overline{C}). \tag{3.1}$$

Однако эта цена заранее никому не известна и устанавливается в процессе торговли и производства товара. Ниже рассматривается несколько моделей такого процесса установления цены. Простейшая, так называемая паутинообразная модель, получается из следующих соображений. Разобьём всю ось времени на равные промежутки и пронумеруем их $0,1,2,3,\ldots,t,\ldots$ Будем считать, что длительность этих промежутков равна длительности цикла производства или доставки товара (скажем, неделя, месяц). На интервале t продается товар, произведенный (или доставленный) на интервале $t-1$. На интервале $t-1$ его было произведено $S(C_{t-1})$. Но на интервале t его продавали уже по цене C_t и спрос был $D(C_t)$. Считая, что спрос равен предложению, получим основное соотношение

$$D(C_t) = S(C_{t-1}). \tag{3.2}$$

Оно позволяет, по крайней мере в принципе, построить вид траекторий цены P_t в зависимости от времени t. А именно

$$\begin{aligned} D(C_1) &= S(C_0), \\ D(C_2) &= S(C_1), \\ D(C_3) &= S(C_2), \\ \ldots & \quad \ldots \end{aligned}$$

Отсюда, зная C_0, и находятся $C_1, C_2, \ldots$ Из-за характерного графика изменения цены (см. рис. 2), эта модель и получила название паутинообразной модели.

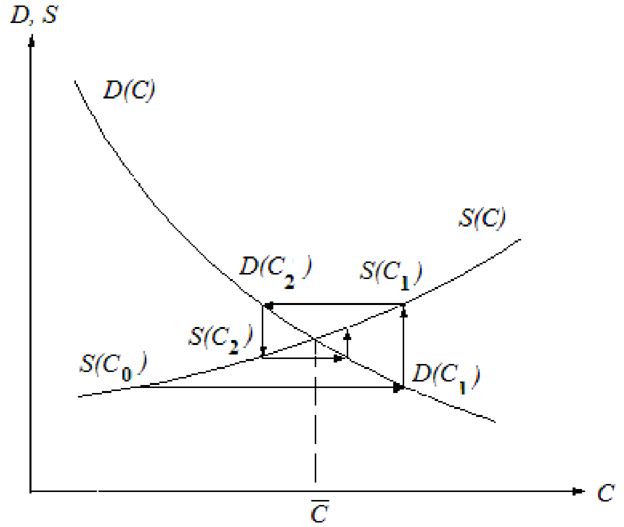

Рис. 3.2. Графическая иллюстрация паутиновой модели ценообразования

Для теоретического исследования рассмотрим случай, когда в окрестности равновесной цены $\bar{C}$ кривые $D(C)$ и $S(C)$ можно аппроксимировать прямыми линиями

$$\begin{aligned} D(C) &= \alpha - a \cdot C, \quad \alpha > 0,\ a > 0, \\ S(C) &= \beta + b \cdot C, \quad \beta > 0,\ b > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

По смыслу, перед коэффициентом a (считая $a > 0$) должен стоять знак минус.

Тогда равновесная цена определится соотношением

$$\alpha - a \cdot \bar{C} = \beta + b \cdot \bar{C},$$

откуда

$$\bar{C} = \frac{\alpha - \beta}{a + b}. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.2) примет вид

$$\alpha - a \cdot C_t = \beta + b \cdot C_{t-1},$$

или

$$C_t = \frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{b}{a} C_{t-1}. \qquad (3.5)$$

Последнее уравнение представим в виде $C_t = \lambda C_{t-1} + \omega$,

где $\lambda = -\frac{b}{a}$ и $\omega = \frac{\alpha - \beta}{a}$

Возможны следующие случаи.

1. $0 < |\lambda| < 1$. В этом случае $(-b/a)^t \to 0$ при $t \to \infty$ и поэтому $C_t \to \overline{C}$ при $t \to \infty$. Но этот процесс носит колебательный характер – цена C_t колеблется около равновесной цены, приближаясь к ней.

2. $|\lambda| > 1$. В этом случае $(-b/a)^t \to \infty$ при $t \to \infty$ и C_t расходится при $t \to \infty$.

Вряд ли этот случай имеет место в жизни.

3. $|\lambda| = 1$. Построить зависимость C_t от t.

Перейдем к рассмотрению модели ценообразования с запаздыванием. Если продавцы считают, что сохранится цена предыдущего периода, то они то и дело разочаровываются в своих ожиданиях. Но наша модель исходит из предпосылки, что продавцы ничему не научились. Однако её можно расширить на случай, когда ожидания продавцов зависят и от предшествующих интервалов времени.

Пусть в период $t-1$ цена была C_{t-1}, а в период $t-2$ она была C_{t-2}. Пусть в период t цена, на которую рассчитывает продавец (ожидаемая им цена), будет

$$\hat{C}_t = C_{t-1} - \rho(C_{t-1} - C_{t-2}), \qquad (3.6)$$

где ρ – некоторый коэффициент. Обычно в таких ситуациях принято считать, что ρ удовлетворяет условию $0 < \rho < 1$, но можно рассматривать и ситуации, когда ρ произвольно.

Тогда в период t продавец произведёт продукцию в соответствии с ожидаемой ценой, то есть

$$S = S(\hat{C}_t) = S(C_{t-1} - \rho(C_{t-1} - C_{t-2})) \qquad (3.7)$$

и основное уравнение, определяющее динамику цены, примет вид

$$D(C_t) = S(C_{t-1} - \rho(C_{t-1} - C_{t-2})). \qquad (3.8)$$

В случае, когда $D(C)$ и $S(C)$ аппроксимируются прямыми линиями (3.3), это уравнение имеет вид:

$$\alpha - aC_t = \beta + b(C_{t-1} - \rho(C_{t-1} - C_{t-2})). \quad (3.9)$$

Равновесная цена получится, если в этом уравнении считать $C_t = C_{t-1} = C_{t-2} = \bar{C}$ и будет той же, что и ранее.

$$\lambda^2 + \lambda\gamma(1-\rho) + \gamma\rho = 0. \quad (3.10)$$

Изучим модель ценообразования при наличии запасов. Пусть теперь кроме производителей продукции и покупателей имеются некоторые посредники (оптовики), создающие запасы Q и устанавливающие цены. Пусть Q_t есть запасы в конце интервала t. Тогда

$$\Delta Q_t = Q_t - Q_{t-1} = S_t - D_t, \quad (3.11)$$

есть увеличение запасов на протяжении интервала t (приращение запасов равно их производству минус продажа).

Возможны различные модели установления цен при наличии запасов.

$$C_t = C_{t-1} - \rho \cdot \Delta Q_{t-1}, \quad (3.12)$$

где ρ – положительная величина. Смысл очевиден: при увеличении запасов цены надо снижать

Далее, пусть, как и раньше

$$D_t = \alpha - a \cdot C_t, \qquad S_t = \beta + b \cdot C_t,$$

и поэтому

$$\Delta Q_{t-1} = S_{t-1} - D_{t-1} = \beta + bC_{t-1} - \alpha + aC_{t-1} = (\beta - \alpha) + (a+b)C_{t-1}.$$

Подстановка этого соотношения в (3.12) даёт

$$\begin{aligned} C_t &= C_{t-1} + \rho(\alpha - \beta) - \rho(a+b)C_{t-1} = \\ &= \rho(\alpha-\beta) + [1 - \rho(a+b)]C_{t-1}. \end{aligned}$$

Равновесная цена определяется уравнением

$$\bar{C} = \rho(\alpha - \beta) + [1 - \rho(a+b)]\bar{C},$$

откуда снова $\bar{C} = (\alpha - \beta)/(a+b)$.

Возможны следующие варианты.

1. $0 < 1 - \rho(a+b) < 1$, то есть $0 < \rho < \dfrac{1}{a+b}$.

В этом случае монотонный устойчивый. При $t \to \infty$ $C_t \to \overline{C}$ при $t \to \infty$ также монотонно.

2. $-1 < 1 - \rho(a+b) < 0$, то есть $\frac{1}{a+b} < \rho < \frac{2}{a+b}$.

В этом случае при $t \to \infty$ имеем место затухающие колебания.

3. $1 - \rho(a+b) < -1$, то есть $\rho > \frac{2}{a+b}$.

В этом случае меняя знак, цена стремится к ∞ при $t \to \infty$. Цена неустойчива.

ЗАДАНИЕ

1. Пусть функции предложения и спроса аппроксимируются линейными зависимостями. Значения параметров $\alpha, a,$ $\beta,$ b C_0 взять из таблицы 3.1. Построить график изменения C_t для паутинообразной модели ценообразования при изменении t от 0 до 15. Проверить условие устойчивости модели ценообразования.

2. Функции предложения и спроса аппроксимируются линейными зависимостями. Значения параметров $\alpha, a,$ $\beta,$ $b,$ $\rho,$ C_0 взять из таблицы 3.2. Построить график изменения C_t для модели ценообразования с запаздыванием при изменении t от 0 до 15. Проверить условие устойчивости модели ценообразования.

3. Функции предложения и спроса аппроксимируются линейными зависимостями. Значения параметров $\alpha, a,$ $\beta,$ $b,$ $\rho,$ C_0 взять из таблицы 3.3. Построить график изменения C_t для модели ценообразования с учетом запасов (t от 0 до 15). Проверить условие устойчивости модели ценообразования с учетом запасов.

Таблица 3.1.

n/n	α	a	β	b	C_0
1	70	1,5	20	1	1
2	65	1,3	18	1,1	2
3	55	1,2	22	1,2	1,4
4	75	1,1	16	1,6	2,5
5	80	1,5	25	1,6	1,2
6	84	1	28	1,4	3
7	72	1,5	20	1	1
8	63	1,3	18	1,1	2
9	55	1,5	22	1,2	1,4
10	72	1,9	18	1,4	3,5
11	80	1,5	25	1,6	3,2
12	64	1	28	1,4	1,8

Таблица 3.2.

n/n	α	a	β	b	C_0	ρ
1	70	1,5	20	1	1	0,25
2	65	1,3	18	1,1	2	0,9
3	55	1,2	22	1,2	1,4	0,7
4	75	1,1	16	1,6	2,5	0,55
5	70	1,5	25	1,6	1,2	0,9
6	94	1,4	28	1,5	3	0,45
7	72	1,5	20	1	1	0,35
8	63	1,3	18	1,1	2	0,78
9	55	1,5	22	1,2	1,4	0,46
10	62	1,4	19	1,4	2,5	1,2
11	80	1,5	25	1,6	1,2	1,1
12	67	1,8	29	1,4	1,8	1,8

Таблица 3.3.

п/п	α	a	β	b	C_0	ρ
1	700	3	200	1,1	3,5	0,2
2	650	2,5	250	1,0	2,5	0,25
3	720	2,6	220	1,3	3,6	0,18
4	680	3,1	210	0,9	1,5	0,22
5	770	3,6	250	1,1	2,5	0,2
6	760	2,9	220	1,0	3,1	0,21
7	730	2,5	178	1,3	1,8	0,2
8	810	2,6	190	0,9	2,7	0,27
9	820	3,1	180	1,2	3,6	0,26
10	685	1,9	245	1,0	1,5	0,29
11	675	2,8	220	1,3	3,1	0,19
12	715	3	170	1,9	3,2	0,24

4. Межотраслевой баланс. Модель Леонтьева

В модели Леонтьева принимается следующая идеализация. Вся экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой вид продукции. Продукция считается достаточно однородной (например, электроэнергия, уголь, черная металлургия и т.д.), чтобы ее выпуск можно было оценить в натуральной форме (количество киловатт-часов электроэнергии, тонн угля, тонн чугуна и стали и т.д.) или в денежной форме. В первом случае говорят о натуральном балансе, во втором – о стоимостном.

Пусть мы подводим итоги работы, скажем, за год. Пусть v_i это общий объём продукции (валовой выпуск) i-й отрасли. Часть этой продукции, равная c_i, пошла на потребление в непроизводственной сфере. Кроме того, продукция i-й отрасли потреблялась и другими отраслями. Обозначим через B_{ij} объём продукции i-й отрасли потреблённой j-й отраслью. Тогда эти данные можно представить в виде следующей таблицы:

Таблица 4.1.

отрасль	валовой выпуск	потреб-ление	потребление в других отраслях				
1	v_1	c_1	B_{11}	B_{12}	B_{13}	…	B_{1n}
2	v_2	c_2	B_{21}	B_{22}	B_{23}	…	B_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
n	v_n	c_n	B_{n1}	B_{n2}	B_{n3}	…	B_{nn}

Очевидно, что справедливо следующее соотношение:

$$v_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} B_{ij},\ i = \overline{1,n}\ . \tag{4.1}$$

Формула (4.1) называется уравнением баланса.

Величины $A_{ij} = B/v_j$ представляют собой объём продукции i-й отрасли, необходимый для производства единицы продукции j-й отрасли. Они называются коэффициентами прямых затрат и играют в дальнейшем изложении ключевую роль.

Очевидно, что все $c_i \ge 0$ и все $A_{ij} \ge 0$.

Представим себе, что мы планируем производство продукции на следующий год и хотим запланировать i-й отрасли выпуск продукции в объёме x_i. Сделаем два важных предположения для составления такого плана.

1. Технология производства в следующем году не потерпит существенных изменений. Это проявится в том, что в следующем году коэффициенты прямых затрат A_{ij} останутся теми же самыми, что и в этом году.

2. Технология производства обладает свойством линейности. Это означает, что если j-й отрасли запланировать выпуск продукции в объёме x_j, то для этого потребуется израсходовать $A_{ij} \cdot x_j$ продукции i-й отрасли.

Пусть x_i – планируемый выпуск продукции i-й отрасли и $C_{\text{п}i}$ – планируемый объём потребления этой отрасли в непроизводственной сфере. Тогда, по аналогии с (4.1), можно записать следующее условие баланса

$$x_i = C_{\text{п}i} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j . \tag{4.2}$$

Перейдём к векторно-матричным обозначениям. Пусть

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,$$
$$\vec{C}_{\text{п}} = (C_{\text{п}1}, C_{\text{п}2}, \ldots, C_{\text{п}n})^T,$$
$$A = \left\| A_{ij} \right\|,\ i, j = \overline{1,n}.$$

Тогда уравнение баланса (4.2) примет вид

$$\vec{x} = \vec{C}_{\text{п}} + A\vec{x} \tag{4.3}$$

Эта модель экономики и называется моделью Леонтьева.

Продуктивность модели Леонтьева. Пусть основным в нашем планировании является будущий объём потребления в непроизводственной сфере $\vec{c}$ и нам необходимо знать, какое производство продукции по отраслям необходимо запланировать для обеспечения этого потребления. Перепишем (4.3) в виде

$$\vec{x} - A\vec{x} = \vec{C}_{\text{п}}, \tag{4.4}$$

откуда получаем, что

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \vec{C}_{\text{п}}, \tag{4.5}$$

где E – единичная матрица размерности $n \times n$.

Но тут возникает одна чисто математическая трудность. Очевидно, что $C_{\text{п}i} \geq 0$ ($\forall i = \overline{1, n}$). Очевидно, что вектор $\bar{x}$ также должен удовлетворять этому же ограничению, то есть должно быть $\bar{x} \geq 0$, так как выпуск отрицательного объема продукции отраслью невозможен. Необходимо, чтобы решение (4.5) удовлетворяло бы этому условию.

Определение. Если для любого вектора $\vec{C}p \geq 0$ вектор $\vec{x} = (E - A)^{-1} \vec{C}p$ также удовлетворяет условию $\bar{x} \geq 0$, то говорят, что модель Леонтьева продуктивна (матрица прямых затрат A продуктивна).

Условия продуктивности модели Леонтьева сформулируем следующим образом:

Модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$. Здесь λ_A максимальное положительное собственное число матрицы А.

Это утверждение и даёт необходимое и достаточное условие продуктивности модели Леонтьева.

Изложенная выше модель Леонтьева неудовлетворительна в том смысле, что она не учитывает ограничений, которые неизбежно имеют место в реальной жизни. Одним из таких ограничений являются ограничения на трудовые ресурсы.

Пусть R_i есть затраты трудовых ресурсов (измеряемые, например, в человеко-часах) в i-й отрасли при производстве единицы продукции. Вектор $\vec{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T$ мы будем называть вектором трудовых затрат. Тогда, если плановый выпуск в i-й отрасли равен x_i, то суммарный объём трудовых затрат будет равен

$$\sum_{i=1}^{n} R_i x_i = \vec{R}^T \vec{x}. \tag{4.6}$$

В качестве ограничения на все планы должно выполняться ограничение на трудовые ресурсы вида

$$\vec{R}^T \vec{x} \leq L, \tag{4.7}$$

где L – имеющийся в нашем распоряжении объем трудовых ресурсов.

В этом случае, очевидно, нельзя требовать достижимости любого вектора потребления $C_п$. Пусть вектор потребления $\vec{K}$ задаёт не конечный спрос, а лишь его структуру. Тогда потребление равно $z\vec{K}$.

Тогда естественно задачу планирования экономики записать в виде

$$\begin{cases} z \Rightarrow \max\limits_{\vec{x},z}, \\ \vec{x} - A\vec{x} \geq zK, \\ \vec{R}^T\vec{x} \leq L, \\ \vec{x} \geq 0, \ \ z \geq 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

которая является типовой задачей линейного программирования. Смысл первого ограничения очевиден – на потребление должно остаться не меньше, чем требуется структурой потребления, определяемой вектором zK. Второе ограничение учитывает ограниченность трудовых ресурсов. Написанная выше задача и называется моделью Леонтьева при ограничениях на трудовые ресурсы и ее смысл, в частности, состоит а рациональном распределении трудовых ресурсов.

ЗАДАНИЕ

1. Выполнить планирование валового выпуска по отраслям. Значения матрицы B взаимопотребления по отраслям, вектор потребления C и вектор планируемого потребления на будущий год $C_п$ приведены в таблице. При планировании проверить матрицу прямых затрат на продуктивность.

2. Выполнить планирование валового выпуска по отраслям при ограничениях на трудовые ресурсы. Значения матрицы B взаимопотребления по отраслям, вектор стоимостей трудовых ресурсов по отраслям $\vec{R}$, структурный вектор потребления $\vec{K}$ приведены в таблице. Объем трудовых ресурсов L =3000.

n/n	Матрица взаимопотребления по отраслям	Вектор потребления	Вектор планируемого потребления	Структурный вектор потребления	Вектор стоимостей трудовых ресурсов по отраслям
1	$B=\begin{bmatrix}50 & 16 & 120\\ 35 & 10 & 170\\ 15 & 14 & 140\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}60\\ 100\\ 90\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}60\\ 110\\ 96\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}6\\ 9\\ 5\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$
2	$B=\begin{bmatrix}60 & 16 & 120\\ 45 & 20 & 20\\ 15 & 14 & 140\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}60\\ 100\\ 100\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}70\\ 100\\ 105\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}6,5\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$
3	$B=\begin{bmatrix}20 & 18 & 105\\ 25 & 25 & 30\\ 35 & 22 & 100\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}80\\ 120\\ 110\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}85\\ 122\\ 120\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$
4	$B=\begin{bmatrix}30 & 24 & 100\\ 45 & 12 & 40\\ 55 & 28 & 112\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}70\\ 96\\ 120\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}75\\ 100\\ 125\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}5,3\\ 4\\ 3\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$
5	$B=\begin{bmatrix}30 & 24 & 110\\ 55 & 12 & 50\\ 65 & 30 & 122\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}80\\ 90\\ 120\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}88\\ 92\\ 125\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 4\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$
6	$B=\begin{bmatrix}50 & 40 & 100\\ 50 & 10 & 40\\ 38 & 30 & 110\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}70\\ 82\\ 120\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}77\\ 84\\ 120\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}5,7\\ 3,2\\ 5\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$
7	$B=\begin{bmatrix}30 & 35 & 110\\ 50 & 15 & 55\\ 65 & 30 & 120\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}65\\ 55\\ 90\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}60\\ 57\\ 93\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}6\\ 8\\ 5\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$
8	$B=\begin{bmatrix}50 & 25 & 120\\ 25 & 10 & 150\\ 15 & 12 & 140\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}60\\ 110\\ 55\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}60\\ 103\\ 65\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}6,2\\ 4\\ 4\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$
9	$B=\begin{bmatrix}60 & 16 & 120\\ 45 & 20 & 20\\ 15 & 14 & 140\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}60\\ 100\\ 100\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}70\\ 95\\ 106\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}6\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$
10	$B=\begin{bmatrix}30 & 23 & 150\\ 26 & 22 & 40\\ 36 & 20 & 100\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}80\\ 110\\ 120\end{bmatrix}$	$C_{п}=\begin{bmatrix}85\\ 120\\ 110\end{bmatrix}$	$K=\begin{bmatrix}9\\ 8\\ 5\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 3\end{bmatrix}$

5. Взаимодействие двух фирм на рынке одного товара

Случай, когда существует несколько производителей (продавцов), называется олигополией. Случай, когда имеются две фирмы, выпускающие однотипную продукцию, называется дуополией.

Рассмотрим стратегию Курно взаимодействия двух фирм. Пусть x_i – обозначает количество выпускаемого товара i – ой фирмой, C_{0i} – себестоимость производства одной единицы i-го товара. Произведенный обеими фирмами товар поступает на общий рынок. Будем предполагать, что в соответствии с экономической теорией, цена на товар будет уменьшаться в зависимости от поступающего на рынок общего количества товаров $x = x_1 + x_2$. Будем также предполагать, что цена товара линейно зависит от x:

$$C(x) = a - b\,x \qquad (a > 0, \quad b > 0). \tag{5.1}$$

Вычислим прибыль i -ой фирмы:

$$W_i(x_1, x_2) = x_i(a - bx) - C_{0i}x_i = bx_i[(\frac{a}{b} - x) - \frac{C_{0i}}{b}].$$

Окончательно получим:

$$W_i(x_1, x_2) = bx_i(d_i - x), \tag{5.2}$$

где

$$d_i = \frac{(a - C_{0i})}{b}.$$

Стратегия управления Курно заключается в том, что обе фирмы знают объем выпуска продукции каждой фирмы. Тогда каждая фирма можем максимизировать свою прибыль. Для этого необходимо решить два уравнения

$$\frac{dW_1(x_1, x_2)}{dx_1} = 0, \quad \frac{dW_2(x_1, x_2)}{dx_2} = 0.$$

Корни этих уравнений дадут нам оптимальный объем выпуска для каждой фирмы. Выполнив соответствующие математические расчеты, получим:

$$x_1 = \frac{d_1 - x_2}{2}, \quad x_2 = \frac{d_2 - x_1}{2}. \tag{5.3}$$

Исследуем динамику процесса управления фирмами по Курно. Для этого дополнительно будем предполагать, что обе фирмы имеют одинаковую продолжительность цикла производства товара, кроме того, будем предполагать, что циклы производства товаров в обеих фирмах начинаются одновременно. Введем в рассмотрение дискретное время процесса $t = 1,2, \dots$, один такт которого соответствует одному полному циклу производства товара от начала до конца. Реально динамика стратегии Курно будет реализовываться не по уравнениям (5.3), а в соответствии со следующими уравнениями:

$$x_1(t) = \frac{d_1 - x_2(t-1)}{2}, \ x_1(0) = x_{10}, \tag{5.4}$$

$$x_2(t) = \frac{d_2 - x_1(t-1)}{2}, \ x_2(0) = x_{20}, \tag{5.5}$$

где x_{10}, x_{20} – начальные значения выпусков товаров для фирм. Исследуем эти уравнения на устойчивость. Для этого преобразуем уравнения (5.4), (5.5) к виду

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2(t-1) + \frac{d_1}{2},$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}x_1(t-1) + \frac{d_2}{2},$$

и представим их в векторно-матричной форме

$$z(t) = Az(t-1) + \tilde{d}, \tag{5.6}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ z(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \tilde{d} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} \\ \frac{d_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим собственные числа матрицы A, для этого определим корни уравнения:

$$\det\{A - \lambda E\} = 0,$$

где E – единичная, λ – переменная. В результате получим.

$$\det\{A - \lambda E\} = \det\left\{\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}\right\} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0. \tag{5.7}$$

Корни уравнения (5.7) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ являются собственными числами матрицы A. В силу того, что оба собственных числа по модулю меньше 1, динамика стратегии Курно всегда устойчива и сходится в состояния устойчивого равновесия. Найдем точку Курно – значения x_1 и x_2 , соответствующие равновесному состоянию. Для этого необходимо решить систему уравнений (5.3). В результате получим:

$$x_1^K = \frac{2d_1 - d_2}{3}, \quad x_2^K = \frac{2d_2 - d_1}{3}. \tag{5.8}$$

Здесь x_1^K и x_2^K – координаты точки Курно. Осуществим анализ экономических показателей стратегии Курно в устойчивом состоянии. Для упрощения будем считать, что $d_1 = d_2 = d$. Тогда координаты точки Курно будут следующие:

$$x_1^K = \frac{d}{3}, \quad x_2^K = \frac{d}{3}.$$

Вычислим прибыль в точке Курно W_1^K и W_2^K, в результате получим:

$$W_1^K = W_2^K = bx_i^K(d - (x_1^K + x_2^K)) = \frac{bd^2}{9}.$$

Суммарная прибыль для стратегии Курно равна

$$W^K = W_1^K + W_2^K = \frac{2bd^2}{9}.$$

И наконец, установившаяся цена на товар равна:

$$C^K = a - \frac{2bd}{3}.$$

Рассмотрим случай когда одна из фирм зная, что конкурент выбрал стратегию Курно, действует не по стратегии Курно, а используюя эту информацию выбирает себе другую стратегию. Такая стратегия называется стратегией Стакельберга. Для простоты будем считать, что $d_1 = d_2 = d$. Пусть первая фирма дает возможность узнать свой ход x_1, тогда вторая фирма выбирает стратегию

$$x_2 = \frac{(d - x_1)}{2}. \tag{5.9}$$

Но первая фирма будет действовать тайно по другому с учетом знания стратегии второй фирмы. Подставим в формулу для прибыли первой фирмы значение x_2 , определяемое формулой (5.9), в результате получим:

$$W_1 = bx_1(d - (x_1 + x_2)) = bx_1(d - (x_1 + \frac{d - x_1}{2})) = bx_1(d - x_1).$$

Тогда решив уравнение:

$$\frac{dW_1}{dx_1} = 0,$$

Найдем оптимальное значение x_1, соответствующее стратегии Стакельберга, в результате получим:

$$x_1^S = \frac{d}{2}.$$

Подставив это значение формулу (8) получим:

$$x_2^S = \frac{d}{4}.$$

Общий выпуск товаров по стратегии Стакельберга равен:

$$x^S = x_1^S + x_2^S = \frac{3d}{4}.$$

Вычислим прибыли фирм, в результате получим:

$$W_1^S = bx_1^S(d - (x_1^S + x_2^S)) = \frac{bd^2}{8} > W_1^K,$$

$$W_2^S = bx_2^S(d - (x_1^S + x_2^S)) = \frac{bd^2}{16} < W_2^K.$$

Суммарная прибыль по Стакельбергу равна:

$$W^S = \frac{3bd}{16}.$$

Установившаяся цена на товар равна

$$C^S = a - b(x_1^S + x_2^S) = a - \frac{3bd}{4}.$$

Как видно, цена на товар в случае Стратегии Стакельберга меньше, чем в стратегии Курно, т.е. стратегия Стакельберга для потребителя выгодней, чем стратегия Курно. Итак, мы видим, что прибыль первой фирмы возрастает. Но здесь обе фирмы могут попасть в ловушку, если обе начнут действовать по стратегии Стакельберга. Тогда их прибыль будет уменьшаться. Эта стратегия опасна для фирм.

Фирмы могут объединиться в монополию или образовать картель (это тайный сговор двух фирм с целью поддержания заданной цены). Рассмотрим его подробней в предположении, что $d_1 = d_2 = d$. В этом случае суммарная прибыль двух фирм равна:

$$W = W_1 + W_2 = bx_1(d - x) + bx_2(d - x) = bx(d - x).$$

Максимум прибыли достигается при выпуске:

$$x^M = \frac{d}{2}.$$

Равновесная цена будет следующей:

$$C^M = a - b(x_1^M + x_2^M) = a - \frac{bd}{2}.$$

Для объединения фирм в форме картеля имеем:

$$x_1^C = x_2^C = \frac{d}{4}, \quad W_1^C = W_2^C = \frac{bd^2}{8}.$$

Итак, из расчетов видно, для потребителя наиболее выгодна стратегия Стакельберга и наименее выгодной является стратегия монополии или картеля.

ЗАДАНИЕ

1. Для заданных значений параметров a, b, C_{01}, C_{02}, $x_1(0)$, $x_2(0)$ получить графики динамики изменения объемов выпуска фирм, динамики изменения прибылей фирм и динамики изменения цены для стратегии Курно. Построить фазовый портрет, найти точку Курно, установившиеся значения прибылей фирм, объемов выпуска и установившуюся цену. Исходные данные приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

n/n	a	b	C_{01}	C_{02}	$x_1(0)$	$x_1(0)$
1	15	1,1	1,1	1,4	7,0	4,5
2	17	1,2	1,05	1,5	5,0	4,7
3	20	1,1	1,2	1,3	6,5	4,2
4	19	1,3	1,2	1,1	5,6	5,5
5	21	1,3	1,2	1,3	6,5	4,7
6	13	1,4	1,1	1,7	7,6	4,5
7	24	1,0	1,2	1,5	4,5	6,2
8	20	1,3	1,08	1,2	6,2	6,2
9	15	1,0	1,4	1,2	6,0	4,5
10	20	1,1	1,2	1,3	6,2	4,8
11	15	1,6	1,3	1,4	5,0	6,5
12	25	1,35	1,4	1,3	6,5	5,2

6. Динамические модели фирмы

Рассмотрим модель производства n видов товаров в условиях рынка. Вектор состояния $x(k)$ представлен компонентами:

$$x(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ v_1(k) \\ z_2(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \\ v_n(k) \\ w(k) \end{bmatrix}, \qquad (6.1)$$

где $z_i(k)$ – количество товаров i-го вида на рынке; $v_i(k)$ – количество товаров i-го вида у потребителя, $i = \overline{1,n}$; $w(k)$ – прибыль.

Математическая модель динамики изменения количества товаров у потребителей и на рынке, а также прибыли может быть записана в следующем виде:

$$z_1(k+1) = (1 - k_{11}) z_1(k) - s_1(k) + u_1(k),$$

$$v_1(k+1) = (1 - k_{21}) v_1(k) + s_1(k),$$

$$z_2(k+1) = (1 - k_{12}) z_2(k) - s_2(k) + u_2(k),$$

$$v_2(k+1) = (1 - k_{22}) v_2(k) + s_2(k),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n(k+1) = (1 - k_{1n}) z_n(k) - s_n(k) + u_n(k),$$

$$v_n(k+1) = (1 - k_{2n}) v_n(k) + s_n(k),$$

$$w(k+1) = w(k) + c_1 s_1(k) + c_2 s_2(k) + \ldots + c_n s_n(k) - k_{31} z_1(k) - k_{32} z_2(k) - \ldots$$

$$\ldots - k_{3n} z_n(k) - c_{01} u_1(k) - c_{02} u_2(k) - \ldots - c_{0n} u_n(k), \qquad (6.2)$$

где $u_i(k)$ – количество товаров, выпускаемых за один такт, $i = \overline{1,n}$, k_{1i} – коэффициенты потерь; k_{2i} – коэффициенты потребления; k_{3i} – стоимость хранения единицы товаров; c_{0i} – себестоимости; $s_i(k)$ – количество проданных товаров i-го вида в один такт, $i = \overline{1,n}$. Функции продаж определяются по формулам:

$$s_i(k) = n_i \exp(-c_i)(1 - v_i(k) Y_i^{-1}) z_i(k)\,, \tag{6.3}$$

n_i – коэффициенты продаж; c_i – цены на товары, $i = \overline{1,n}$; Y_i – потенциальный спрос для i-го вида товара (объем рынка для i-го вида товара).

Модель (6.2), (6.3) может быть представлена в следующем векторно-матричном виде:

$$x(k+1) = A\varphi(x(k)) + Bu(k)\,, \tag{6.4}$$

где вектор $\varphi(x(k))$ следующий:

$$\varphi(x(k)) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ v_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \\ v_n(k) \\ w(k) \\ v_1(k) z_1(k) \\ v_2(k) z_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) z_n(k) \end{bmatrix}.$$

Матрица динамики A для данного объекта имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{1,2n+2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{2,2n+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1,3n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,3n+1} \\ a_{2n+1,1} & 0 & a_{2n+1,3} & \cdots & a_{2n+1,2n-1} & 0 & 1 & a_{2n+1,2n+2} & a_{2n+1,2n+3} & \cdots & a_{2n+1,3n+1} \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы определяются по формулам:

$$a_{11} = 1 - k_{11} - n_1 \exp(-c_1),$$

$$a_{1,2n+2} = \frac{n_1 \exp(-c_1)}{Y_1},$$

$$a_{21} = n_1 \exp(-c_1),$$

$$a_{22} = 1 - k_{21},$$

$$\vdots$$

$$a_{2,2n+2} = -\frac{n_1 \exp(-c_1)}{Y_1},$$

$$a_{2n-1,2n-1} = 1 - k_{1n} - n_n \exp(-c_n),$$

$$a_{2n-1,3n+1} = \frac{n_n \exp(-c_n)}{Y_n},$$

$$a_{2n,2n-1} = n_n \exp(-c_n) ,$$

$$a_{2n,2n} = 1 - k_{2n} ,$$

$$a_{2n,3n+1} = -\frac{n_n \exp(-c_n)}{Y_n},$$

$$a_{2n+1,1} = -k_{31} + c_1 n_1 \exp(-c_1),$$

$$a_{2n+1,3} = -k_{32} + c_2 n_2 \exp(-c_2),$$

$$\vdots$$

$$a_{2n+1,2n-1} = -k_{3n} + c_n n_n \exp(-c_n),\, ,$$

$$a_{2n+1,j} = -\frac{c_i n_i \exp(-c_i)}{Y_i},\, ,\ j = \overline{2n+2, 3n+1},\ i = \overline{1,n}\,.$$

Матрица B имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_{01} & -c_{02} & -c_{03} & -c_{04} & \cdots & -c_{0n} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим модель производства двух видов товаров в условиях рынка. Вектор состояния $x(k)$ состоит из пяти компонент:

$$x(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ v_1(k) \\ z_2(k) \\ v_2(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}, \qquad (6.5)$$

где $z_1(k)$, $z_2(k)$ – количество товаров 1-го и 2-го вида на рынке; $v_1(k)$, $v_2(k)$ – количество товаров 1-го и 2-го вида у потребителя, $w(k)$ – прибыль.

Математическая модель динамики изменения количества товаров у потребителей и на рынке, а также прибыли может быть записана в следующем виде:

$$z_1(k+1) = (1-k_{11})z_1(k) - s_1(k) + u_1(k)\,,$$

$$v_1(k+1) = (1-k_{21})v_1(k) + s_1(k)\,,$$

$$z_2(k+1) = (1-k_{12})z_2(k) - s_2(k) + u_2(k)\,,$$

$$v_2(k+1) = (1-k_{22})v_2(k) + s_2(k)\,,$$

$$w(k+1) = w(k) + c_1 s_1(k) + c_2 s_2(k) - k_{31}z_1(k) - k_{32}z_2(k) -$$

$$-c_{01}u_1(k) - c_{02}u_2(k)\,, \qquad (6.6)$$

где $u_1(k)$, $u_2(k)$ – количество товаров, выпускаемых за один такт; k_{11}, k_{12} – коэффициенты потерь; k_{21}, k_{22} – коэффициенты потребления; k_{31}, k_{32} – стоимость хранения единицы товаров; c_{01}, c_{02} – себестоимости; $s_1(k)$, $s_2(k)$ – количество проданных товаров 1-го и 2-го вида в один такт (функции продаж). Формулы для $s_1(k)$, $s_2(k)$ имеют вид:

$$s_1(k) = n_1 \exp(-c_1)(1 - v_1(k)Y_1^{-1})z_1(k)\,, \qquad (6.7)$$

$$s_2(k) = n_2 \exp(-c_2)(1 - v_2(k)Y_2^{-1})z_2(k)\,, \qquad (6.8)$$

n_1, n_2 – коэффициенты продаж; c_1, c_2 – цены на товары; Y_1, Y_2 – потенциальный спрос на товар 1-го вида и 2-го вида.

В векторно-матричном виде модель следующая:

$$x(k+1) = A\varphi(x(k)) + Bu(k)\,,\ x(0) = x_0\,, \qquad (6.9)$$

В (6.9) вектор $\varphi(x(k))$ представляется в виде:

$$\varphi(x(k)) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k)x_4(k) \end{bmatrix}. \qquad (6.10)$$

Матрица динамики A для данного объекта имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1-k_{11}-n_1\exp(-c_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{n_1\exp(-c_1)}{Y_1} & 0 \\ n_1\exp(-c_1) & 1-k_{21} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{n_1\exp(-c_1)}{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1-k_{12}-n_2\exp(-c_2) & 0 & 0 & 0 & \dfrac{n_2\exp(-c_2)}{Y_2} \\ 0 & 0 & n_2\exp(-c_2) & 1-k_{22} & 0 & 0 & -\dfrac{n_2\exp(-c_2)}{Y_2} \\ -k_{31}+c_1n_1\exp(-c_1) & 0 & -k_{32}+c_2n_2\exp(-c_2) & 0 & 1 & -\dfrac{c_1n_1\exp(-c_1)}{Y_1} & -\dfrac{c_2n_2\exp(-c_2)}{Y_2} \end{bmatrix}.$$

Матрица B и вектор управления следующие:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -c_{01} & -c_{02} \end{bmatrix},\ u(k)=\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ

1. Для модели фирмы, производящей два вида товаров (6.6)–(6.8) выполнить моделирование для следующих значений параметров:

$u_1=60,\ u_2=65$ – количество товаров, выпускаемых фирмой за один такт; $n_1=1{,}95,\quad n_2=1{,}8$ – коэффициенты продаж; $c_1=2{,}5$ у.е., $c_2=1{,}5$ у.е. – цены на товары; $c_{0,1}=1{,}0$ у.е., $c_{0,2}=0{,}9$ у.е. – себестоимости; $Y_1=Y_2=1000$ – потенциальный спрос (объем рынка); $k_{1,1}=0{,}15,\quad k_{1,2}=0{,}13$ – коэффициенты потерь; $k_{2,1}=0{,}1,\quad k_{2,2}=0{,}055$ – коэффициенты потребления; $k_{3,1}=0{,}002$ у.е., $k_{3,2}=0{,}001$ у.е. – стоимости хранения единицы товара за один день.

Моделирование выполнить на интервале времени от 0 до 140 (один такт соответствует 1 дню) для следующих начальных условий:

$$z_1(0)=150,\quad z_2(0)=300,\quad v_1(0)=250,\quad v_2(0)=170,\quad w(0)=w_0 \text{ у.е.}$$

Построить графики процессов (величина w_0 приведена в таблице 6.1).

2. Исследовать влияние различных стратегий управления фирмой на полученную прибыль.

Стратегия 1. Увеличить цену 2-го вида товара c_2 до величины 2,3 у.е. Привести в отчет графики изменения прибыли. Определить прибыль в последний день исследуемого периода (w_{140}). Оценить возможность реальной реализации этой стратегии. Сделать выводы.

Стратегия 2. Увеличить коэффициент продаж n_2 до величины 3,2 (увеличение этого коэффициента можно осуществить, реализовав рекламную компанию). В модели учесть затраты на рекламу в 2у.е. в течении первых 10 дней. Затем этот коэффициент должен уменьшаться по линейному закону в течение 60 дней до первоначальной величины $n_2 = 1{,}8$. Затем опять провести рекламную компанию в течение 10 дней.

Построить графики изменения прибыли. Определить прибыль в последний день исследуемого периода (w_{140}). Сделать выводы.

Стратегия 3. Увеличить потенциальный спрос (объем рынков для 1-го и 2-го вида товаров). В модели учесть затраты на расширение рынка в 8у.е. в течении первых 60 дней. По окончании этого периода значения Y_1 и Y_2 принять равными 2000 (увеличение этих параметров осуществляется посредством расширения рынка в течении первых 60 дней, например, создав новые торговые точки в новом регионе).

Построить графики изменения прибыли. Сделать выводы.

3. Применить метод покоординатного спуска для максимизации критерия $J(u_1, u_2) = w_{140}$ (прибыли фирмы в последний день), применив метод деления шага пополам. Начальное значение шага принять равным 10. оптимизацию осуществить сначала по переменной u_2, затем по переменной u_1.

Промежуточные результаты оформить в виде таблицы. Привести в отчете оптимальные значения объемов производства и оптимальное значение прибыли.

4. Найти оптимальные значения объемов производства и прибыли с учетом ограничений (величина $u_{\text{мах}}$ приведена в таблице 6.2):

$$u_1 + u_2 \le u_{\text{мах}}.$$

Таблица 6.1.

n/n	1	2	3	4	5	6
w_0	10	25	30	0	45	50

n/n	7	8	9	10	11	12
w_0	35	15	40	55	65	70

Таблица 6.2.

n/n	1	2	3	4	5	6
$u_{\max}$	20	25	30	35	40	45

n/n	7	8	9	10	11	12
$u_{\max}$	15	28	38	32	42	50

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренко М.Г. Математические модели в экономике. Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2000.

2. Шапкин А.С., Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник для вузов. – М.: Дашков и К°, 2007.

3. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование: учебник для вузов. – М.: Дашков и К°, 2008.

4. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Учебное пособие. – М.: ЮНИТИ, 2000.

5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебное пособие. – М.: Дело, 2006.

6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2005.

7. Усков Л.Ф. Математические модели в экономике: Учебное пособие. – М.: ИМПЭ им. А.С. Грибоедова, 2005.

8. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Питер, 2000.

9. Терпугов А.Ф. Экономико-математические модели. – Томск: Изд-во ТГПУ, 1999.

10. Смагин В.И. Оптимальное и адаптивное управление экономическими системами. Учебно-методическое пособие. –Томск: – Изд-во ТГУ, 2010.