Министерство высшего образования и науки РФ
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
Кафедра экономической математики, информатики и статистики

«Вычислительная математика»

В.И.Смагин

Методические указания
к практическим работам для студентов направления 09.03.02
«Информатика и вычислительная техника»

Предлагаемые задания к практическим и лабораторным работам выполняются студентами в компьютерном классе с использованием пакета прикладных программ MATLAB. В приложении к описанию даны варианты исходных данных к заданиям.

Томск - 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация……………………………………………...……3

Перечень закрепленных за дисциплиной компетенций…………………….………………………………..4

Практическое занятие № 1. Алгоритмизация вычислительных процессов с использованием интегрированного пакета прикладных программ MATLAB……………………………………..5

Практическое занятие № 2. Анализ погрешностей……………6

Практическое занятие № 3. Метод наименьших квадратов…11

Практическое занятие № 4. Численное дифференцирование.15

Практическое занятие № 5. Численное интегрирование…….20

Практическое занятие № 6. Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения……………………………………..28

Практическое занятие № 7. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений………………………………………..31

Практическое занятие № 8. Численное решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта……………………….34

Практическое занятие № 9. Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка…………………………………………………………..36

ПРИЛОЖЕНИЕ…………………………………………………39

ЛИТЕРАТУРА……………………………………………….….56

АННОТАЦИЯ

Методические указания
к практическим работам для студентов направления 09.03.02
«Информатика и вычислительная техника»

В методических указаниях для дисциплины «Вычислительная математика» рассматриваются разделы теории погрешностей, методов аппроксимации, численного дифференцирования и интегрирования, методов решения задач линейной алгебры и методов численного решения систем дифференциальных уравнений. Цель методических указаний оказать студентам помощь при решении задач вычислительной математики с использованием анализа погрешностей, научить выбирать эффективные численные методы и дать студентам навыки применения численных методов для решения практических задач с использованием ЭВМ.

Предлагаемые задания к практическим и лабораторным работам выполняются студентами в компьютерном классе с использованием пакета прикладных программ MATLAB. В приложении к описанию даны варианты исходных данных к заданиям.

Перечень закрепленных за дисциплиной компетенций

Компетенции закрепленные за дисциплиной «Вычислительная математика» приведены в таблице

<table>
<tr><th>Код</th><th>Формулировка компетенции</th><th>Этапы формирования компетенции</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2">Должен знать:
- математические методы обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований.

Должен уметь:
- применять математические методы обработки информации, анализа полученных результатов.

Должен владеть:
- математическими методами и способами синтеза результатов профессиональных исследований в информационные системах и технологиях.</td></tr>
<tr><td>ПК-25</td><td>способностью использовать математические методы обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований</td></tr>
</table>

Практическое занятие № 1.

Алгоритмизация вычислительных процессов
с использованием интегрированного пакета прикладных
программ MATLAB на простейших примерах

Задание.

1. Изучить по описанию пакета прикладных программ MATLAB разделы:

- панели инструментов;
- описание переменных, основных операторов и функций системы MATLAB;
- реализация графиков с помощью команды plot;
- основы программирования в системе MATLAB.

2. Составить программу формирования массива и отображения его в виде графика. Варианты заданий к лабораторной работе приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки алгоритмизации вычислительных процессов с использованием интегрированного пакета прикладных программ MATLAB.

Указания к выполнению. При выполнении лабораторной работы студенты используют знания, полученные при изучении курса «Информатика» и учебное пособие:

Смагин В.И. Matlab и система Simulink. Изд-во ТУСУР, 2006. 123 с.

Практическое занятие № 2.
Анализ погрешностей

Задание. Определить для п.п. а) и б) число верных знаков приближенного числа, если известна абсолютная погрешность; для п. в) определить абсолютную и относительную погрешность, если известно число верных знаков; для п. г) определить абсолютную погрешность Δz, если известны абсолютные погрешности аргументов $\Delta x = 0,5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta y = 0,1 \cdot 10^{-4}$ $(x = 0,871, \quad y = 1,153)$. Значение функции z записать с верными знаками.

Варианты исходных данных для задания приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки определения погрешностей.

Указания к выполнению. При выполнении лабораторной работы студенты используют следующую информацию об основах теории погрешностей.

Математические оценки точности приближенного числа

Введем обозначения: x^* – точное значение числа, x – приближенное значение число, $\varepsilon = x^* - x$ – погрешность числа (ошибка), $|\varepsilon| = |x^* - x|$ – модуль ошибки. В силу того, что точное значение x^*, как правило, неизвестно вводится понятие абсолютной погрешности числа Δx.

Абсолютной погрешностью числа называется наименьшее из всех возможных чисел Δx, которого не превышает модуль ошибки

$$|\varepsilon| \le \Delta x .$$

Для того, чтобы характеризовать точность вычислений (измерений) вводится понятие *относительной погрешности*, определяющей величину погрешности, которая приходится на единицу измеряемой величины

$$\delta = \frac{|\varepsilon|}{|x^*|}.$$

На практике используют следующую оценку относительной погрешности

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Верные знаки приближенного числа

Приближенные числа принято записывать с верными знаками. Если β – основание системы счисления (β – обычно равно 2, 3, 8, 10, 16), то число может быть представлено в виде

$$x^* = \pm(\alpha_1\beta^m + \alpha_2\beta^{m-1} + ... + \alpha_n\beta^{m-n+1} + ...).$$

Приближенное число x имеет n верных знаков, если для абсолютной погрешности справедливо неравенство

$$\Delta x \le \omega\beta^{m-n+1}.$$

Для десятичной системы счисления (β=10), если ω=0,5 , то число x имеет n верных знаков в узком смысле

$$\Delta x \le 0,5 \cdot 10^{m-n+1}, \tag{1}$$

если ω=1,0, то число x имеет n верных знаков в широком смысле. Если число имеет n верных знаков, то цифры $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ называются сомнительными.

Относительная погрешность числа, содержащего n верных знаков, определяется соотношением

$$\delta x = \frac{\omega\beta^{m-n+1}}{\alpha_1\beta^m + \alpha_2\beta^{m-1} + ...} \le \frac{\omega\beta^{m-n+1}}{\alpha_1\beta^m} \le \frac{\omega}{\alpha_1}\beta^{1-n} \le \omega\beta^{1-n}.$$

На практике обычно используется понятие числа с верными знаками в узком смысле. Тогда можно сказать, что абсолютная погрешность числа с верными знаками равна половине последнего правильного разряда. Отметим также, что при записи числа с верными знаками необходимо пользоваться правилами округления чисел.

Пример. Записать с верными десятичными знаками в узком смысле значение числа $x = 0,009665212$, если оно задано с погрешностью $\Delta x = 0,0000031$. Для решения задачи необходимо сначала определить значение m, оно в нашем случае равно -3. Затем необходимо для погрешности Δx записать неравенство

$$0,0000031 \le 0,5 \cdot 10^{-5},$$

в котором справа должна стоять минимально возможная целая степень. Далее в силу формулы (1) составляется уравнение

$$m - n + 1 = -5,$$

решение, которого дает количество верных знаков числа. Очевидно $n = 3$. Тогда, записанное с верными знаками число с учетом правил округления, имеет вид

$$x = 0,00967.$$

Погрешность вычисления функции многих переменных

Пусть требуется вычислить значение функции многих переменных

$$y^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*). \qquad (2)$$

Будем предполагать, что нам известны приближенные значения аргументов функции $x_1, x_2, ..., x_n$, которые заданы с погрешностями Δx_i. Необходимо определить абсолютную погрешность y. Дополнительно будем предполагать, что:

1) погрешности Δx_i малы;

2) частные производные $\dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}$ существуют и являются непрерывными плавно изменяющимися функциями.

Разлагая функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в ряд Тейлора нулевой степени, оценим ошибку

$$\varepsilon = y^* - y = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) - f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

В результате получим

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)}{\partial x_i}(x_i^* - x_i),$$

где $\xi_i = x_i + \Theta_i(x_i^* - x_i)$, Θ_i – некоторое заранее неизвестное число, принадлежащее интервалу [0 1] ($i = \overline{1, n}$). Заметим, что здесь ε представляет собой остаточный член многочлена Тейлора.

В силу сделанных предположений, $|\varepsilon|$ будет приблизительно ограничен сверху величиной

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

которая и будет *абсолютной погрешностью* величины y, т.е.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \qquad (3)$$

Разделив левую и правую части равенства (3) на $|y|$ оценим *относительную погрешность* функции y

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right| \delta x_i. \qquad (4)$$

Величины

$$S_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right|$$

называются *чувствительностями*. Они определяют степень влияния погрешности i-го аргумента на погрешность результата.

Пример. Рассмотрим задачу вычисления функции

$$y = \arcsin(x) .$$

Чувствительность для этой функции определится по формуле

$$S(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)} .$$

Если значение x находится вблизи 1, то чувствительность будет высокой, а значит исходная задача неустойчива (малые отклонения исходных данных приводят к большим отклонениям результата).

Практическое занятие № 3.

Метод наименьших квадратов

Задание. Найти приближенное значение функции $f(x)$ по таблице значений этой функции, используя многочлен 3-ей степени, построенный по методу наименьших квадратов. Построить график аппроксимирующего многочлена с табличными значениями функции, отмеченными символом «*». Варианты исходных данных приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки построения аппроксимирующих многочленов с помощью метода наименьших квадратов.

Указания к выполнению. При выполнении лабораторной работы студенты составляют программу с использованием системы MATLAB.

Опишем метод наименьших квадратов (МНК). Пусть x_j – узлы исходной таблицы данных, а $f(x_j)$, $j=\overline{0,n}$ – значения экспериментальных данных или некоторой неизвестной функции в узловых точках. Введем непрерывную аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$. В узлах x_j функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут уже отличаться на величину ε_j

$$\varepsilon_j=\varphi(x_j)-f(x_j), \quad j=\overline{0,n}.$$

Тогда сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ в узловых точках x_j, $j=\overline{0,n}$, запишется в виде:

$$S=\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j^2=\sum_{j=0}^{n}(\varphi(x_j)-f(x_j))^2.$$

Метод построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ из условия минимизации суммы квадратов отклонений S называется методом наименьших квадратов.

Аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ зададим в виде:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x),$$

где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, $m \le n$ – линейно независимые *базисные функции*, $a_0,\ldots,a_m$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из условия минимума S, т. е. из условий равенства нулю частных производных S по $a_0,\ldots,a_m$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{n}(c_0\varphi_0(x_j) + \ldots + c_m\varphi_m(x_j) - f(x_j))\varphi_k(x_j) = 0, \quad (5)$$

$$k = \overline{0,m}.$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений вида $G \cdot a = b$ для определения коэффициентов a_k, $k = \overline{0,m}$. Эта система называется системой нормальных уравнений. Матрица системы имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \ldots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & \ldots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{pmatrix}$$

и называется матрицей Грама.

Элементами матрицы Грама являются скалярные произведения базисных функций:

$$(\varphi_i,\varphi_k) = \sum_{j=0}^{n}\varphi_i(x_j)\varphi_k(x_j).$$

Вектор свободных членов системы нормальных уравнений имеет вид:

$$b = \begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_2, f) \\ \ldots \\ (\varphi_m, f) \end{pmatrix},$$

элементами этого вектора являются скалярные произведения

$$(\varphi_k, f) = \sum_{j=0}^{n}\varphi_k(x_j) f(x_j).$$

Если аппроксимирующая функция задана в виде алгебраического полинома степени m

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

то базисные функции в имеют вид:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \ldots,\ \varphi_m(x) = x^m.$$

Матрица Грамма G системы нормальных уравнений и вектор свободных членов b для функции $\varphi(x)$ вида (5) записываются следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{j=0}^{n} x_j & \sum_{j=0}^{n} x_j^2 & \ldots & \sum_{j=0}^{n} x_j^m \\ \sum_{j=0}^{n} x_j & \sum_{j=0}^{n} x_j^2 & \sum_{j=0}^{n} x_j^3 & \ldots & \sum_{j=0}^{n} x_j^{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \sum_{j=0}^{n} x_j^m & \sum_{j=0}^{n} x_j^{m+1} & \sum_{j=0}^{n} x_j^{m+2} & \ldots & \sum_{j=0}^{n} x_j^{2m} \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \\ \sum_{j=0}^{n} x_j f(x_j) \\ \sum_{j=0}^{n} x_j{}^2 f(x_j) \\ \ldots \\ \sum_{j=0}^{n} x_j{}^m f(x_j) \end{pmatrix}.$$

Пример. Исходные данные приведены в таблице:

x_i	-1,01	-0,42	0,14	0,52	0,79	1,23
y_i	-1,05	-0,45	0,52	0,51	0,81	0,39

Требуется построить аппроксимирующий многочлен 3-го порядка по методу наименьших квадратов. Сначала строятся матрица G и вектор b, затем, решив систему линейных алгебраических уравнений $Ga = b$, определяем коэффициенты многочлена, которые будут равны следующим: $a_0 = 0{,}189$, $a_1 = 1{,}267$, $a_2 = -0{,}390$, $a_3 = -0{,}412$. На рис 2.8 приведены график аппроксимирующего многочлена и исходные данные в виде точек. Как видно из графика (см. рис. 1) исходные точки не лежат на аппроксимирующей кривой.

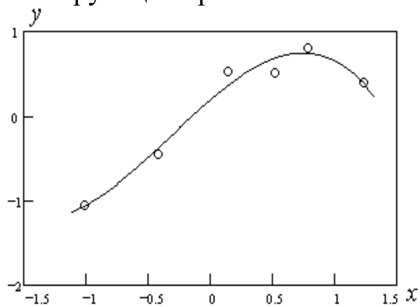

Рис. 1. График аппроксимирующего многочлена

Практическое занятие № 4.
Численное дифференцирование

Задание. Для функции заданной в виде таблицы на равномерной сетке $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,10},\ \ x_0 = 1,\ h = 0{,}1,$ оценить значение первой производной в точке $1{,}5$. Определить погрешности считая, что табличные значения заданы с верными знаками $\Delta_{\text{М}}$, $\Delta_{\text{Н}}$, $\Delta_{\text{П}}$ и $h_{\text{опт}}$. Варианты исходных данных приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки численного дифференцирования функций, заданных в виде таблицы по равномерной сетке.

Указания к выполнению. Так как точка x, в которой необходимо выполнить операцию численного дифференцирования находится в средине таблицы и для $t = \dfrac{x - x_k}{h}$ справедливо $|t| \le 0{,}25$. Тогда выберем формулу Стирлинга:

$$f(x_k + th) \approx S(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!}\frac{(\Delta y_k + \Delta y_{k-1})}{2} + t^2\Delta^2 y_{k-1} +$$
$$+\frac{t(t^2-1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-1} + \Delta^3 y_{k-2})}{2} + \cdots \tag{6}$$

Дифференцируя по t левую и правую части равенства (6), учитывая связь между t и x, получим:

$$f'_x(x_k + th) \approx \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} + \frac{t\Delta^2 y_{k-1}}{h} +$$
$$+\frac{(3t^2-1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{k-2} + \Delta^3 y_{k-1})}{2h} + \cdots. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу вычисления первой производной по формуле (7), в которой будут учитываться только первых два слагаемых. Тогда для частного случая дифференцирования в точке x_k (в нашем случае $t=0$) получим:

$$f_x'(x_k) = \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} + R_3{}'(x_k),$$

где

$$R_3{}'(x_k) = -\frac{f^{(3)}(\xi)h^2}{3!}. \quad (8)$$

Формула (8) получена в результате дифференцирования остаточного члена формулы Стирлинга и вычисления его в точке $t=0$. В силу (8) погрешность метода численного дифференцирования имеет вид:

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{M_3 h^2}{3!},$$

где $M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f^{(3)}(x) \right|$. Погрешность метода с уменьшением шага уменьшается. Расчетная формула вычисления первой производной в точке x_k будет следующей:

$$f_x'(x_k) \approx \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2h} = \frac{y_{k+1} - y_k + y_k - y_{k-1}}{2h} =$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}. \quad (9)$$

Пусть все табличные значения функции y_j заданы с одинаковой погрешностью $\varepsilon > 0$, тогда можно оценить неустранимую погрешность, возникающую из-за неточности исходных данных следующим образом:

$$\Delta_{\text{Н}} = \frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что неустранимая погрешность с уменьшением шага возрастает. Если посмотреть на график полной погрешности (см. рис. 2)

$$\Delta_{\text{П}} = \Delta_{\text{М}} + \Delta_{\text{Н}} = \frac{M_3 h^2}{3!} + \frac{\varepsilon}{h}, \quad (11)$$

то можно сделать вывод, что существует оптимальный шаг $h_{\text{опт}}$, обеспечивающий минимум полной погрешности.

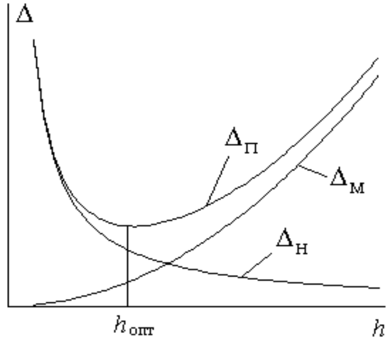

Рис. 2. Графики погрешностей

Найдем оптимальный шаг, из условия $(\Delta_{\text{П}})'_h = 0$

$$(\Delta_{\text{П}})'_h = \frac{hM_3}{3} - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0,$$

и окончательно получаем

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}. \tag{12}$$

Отметим, что величину M_3 можно оценить по формуле

$$M_3 \approx \max_j \frac{\left|\Delta^3 y_j\right|}{h^3}. \tag{13}$$

Пример. Требуется вычислить значение первой производной функции, которая задана в виде следующей таблице:

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	6,246	5,357	4,634	4,036	3,539	3,122

в точке $x = 1,4$. Необходимо также оценить погрешность метода, неустранимую погрешность, полную погрешность, оптимальный шаг таблицы, считая, что табличные значения функции заданы с верными знаками.

При выполнении расчетов будем использовать конечные разности, приведенные в таблице

Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
-0,889	0,166	-0,041	0,017	-0,014
-0,723	0,125	-0,024	0,003	
-0,598	0,101	-0,021		
-0,497	0,080			
-0,417				

В этом случае для аппроксимации функции можно выбрать формулу Стирлинга при $x_k = 1,4$, где $k = 2$. Оценивать производную будем по первому слагаемому от производной формулы Стирлинга. В нашем примере $h = 0,2,\ \ t = 0$, погрешность табличного значения функции равна $\varepsilon = 0,0005$. Тогда в соответствии с формулами (9)-(13) получим следующие результаты:

$$f'_x(1,4) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = \frac{4,036 - 5,357}{2 \cdot 0,2} = -3.3025,$$

$$\Delta_{\text{Н}} = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{0,0005}{0,2} = 0,0025,$$

$$M_3 \approx \max_j \frac{\left|\Delta^3 y_j\right|}{h^3} = \frac{0,41}{0,2^3} = 5,125,$$

$$\Delta_{\text{М}} = \frac{M_3 h^2}{3!} = \frac{5,125 \cdot 0,2^2}{6} = 0,0312,$$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,0005}{5,125}} = 0,066,$$

$$\Delta_{\text{П}} = \Delta_{\text{М}} + \Delta_{\text{Н}} = 0,0367.$$

Расчеты производной первого порядка показали, что производная вычисляется с погрешностью $0,0367$. При этом минимальное значение полной погрешности может быть достигнуто для таблицы с шагом $h_{\text{опт}} = 0,066$.

Практическое занятие № 5.

Численное интегрирование

Задание. Вычислить $I = \int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ методами:

1) левых прямоугольников;
2) средних прямоугольников;
3) правых прямоугольников;
4) трапеций;
5) Симпсона.

Процесс вычисления интеграла организовать без пересчета значений подынтегральной функции в узлах и при использовании метода Рунге. Вывести значение интеграла и количество узлов, которое потребовалось для вычисления значения интеграла с заданной точностью. Варианты исходных данных приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки численного интегрирования функций.

Указания к выполнению. Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное интегрирование с помощью простейших формул Ньютона-Котеса.

1. *Формула левых прямоугольников*

В качестве узла квадратурного правила выбирается левый конец интервала $[a,b]$, т.е. точка a. Тогда квадратурная формула называется формулой левых прямоугольников и записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + R_{0,лев.}(f), \qquad (14)$$

где

$$R_{0,лев.}(f) = \int_a^b (x-a)f'(\xi)dx$$

и ξ − некоторая точка интервала $[a,b]$.

Формула (14) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(a)$.

В силу теоремы о среднем, так как множитель $(x-a)$ не меняет знак на $[a,b]$ и $f'(x)$ предполагается непрерывной на $[a,b]$, существует точка $\eta \in [a,b]$, такая, что

$$R_{0,лев.}(f) = f'(\eta)\int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta).$$

Разделим отрезок $[a,b]$ на m отрезков длиной $h = \dfrac{b-a}{m}$ и к каждому отрезку применим формулу левых прямоугольников. Тогда

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx hf(a+kh),$$

$$R_{0,лев.}^{(k)}(f) = \frac{h^2}{2} f'(\eta_k), \; \eta_k \in [a+kh, a+(k+1)h],$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

Просуммировав результаты по всем отрезкам, получим обобщенную формулу левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}\left(f_0 + f_1 + \ldots + f_{m-1}\right), \qquad (15)$$

где $f_k = f(a+kh)$, $k = \overline{0, m-1}$. При этом погрешности также суммируются, то есть

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} R_{0,лев.}^{(k)}(f) = \frac{(b-a)^2}{2m^2}\sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k).$$

В силу предположения о непрерывности $f'(x)$ на $[a,b]$ и согласно теореме о среднем, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k) = f'(\xi).$$

Тогда погрешность обобщенной формулы левых прямоугольников примет вид

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = \frac{(b-a)^2}{2m} f'(\xi)\,.$$

2. *Формула правых прямоугольников*

В качестве узла квадратурного правила выбирается правый конец интервала $[a,b]$, т.е. точка b. Тогда квадратурная формула называется формулой правых прямоугольников и записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) + R_{0,пр.}(f), \qquad (16)$$

где

$$R_{0,пр.}(f) = \int_a^b (x-b)f'(\xi)dx = -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta).$$

Формула (16) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(b)$.

Разделив отрезок $[a,b]$ на m отрезков длиной $h = \dfrac{b-a}{m}$, применив к каждому отрезку формулу правых прямоугольников и просуммировав результаты, получим обобщенную формулу правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}\left(f_1 + f_2 + \ldots + f_m\right). \qquad (17)$$

Погрешность формулы (17) запишется в виде

$$R_{0,лев.}^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^2}{2m} f'(\xi)\,.$$

3. *Формула средних прямоугольников*

В качестве узла квадратурного правила выбирается средняя точка интервала $[a,b]$, то есть точка $\dfrac{a+b}{2}$. Тогда квадратурная формула называется формулой средних прямоугольников и имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_{0,ср.}(f)\,. \qquad (18)$$

Формула (18) означает, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ заменяется площадью прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Так как середина интервала $[a,b]$ является узлом квадратурной формулы, то эта формула будет точной для всех многочленов первой степени. Тогда функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = P_1(x) + r(x),$$

где $P_1(x)$ − многочлен Тейлора первой степени, удовлетворяющий условиям

$$P_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ \ P_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Остаточный член при кратном интерполировании в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывные производные второго порядка, имеет вид

$$r(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

где ξ − некоторая точка интервала $[a,b]$. Тогда

$$R_{0,ср.}(f) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx\,.$$

Так как множитель $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0$ и $f''(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\eta \in [a,b]$, что

$$R_{0,ср.}(f)=\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta).$$

Разделим отрезок $[a,b]$ на m частей длиной $h=\frac{b-a}{m}$ и к каждому отрезку применим формулу средних прямоугольников (18). Тогда

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx \approx hf\left(a+\tfrac{2k+1}{2}h\right)$$

$$R_{0,ср.}^{(k)}(f)=\frac{h^3}{24}f''(\eta_k),\ \ \eta_k \in [a+kh, a+(k+1)h],$$

$$k=\overline{0,m-1}.$$

Просуммировав результаты по всем отрезкам, получим обобщенную формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{m}\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+...+f\left(a+\frac{(2m-1)h}{2}\right)\right]. \quad (19)$$

Погрешность формулы (19) можно записать, просуммировав $R_{0,ср.}^{(k)}(f)$ по всем отрезкам, то есть

$$R_{0,ср.}^{(об.)}(f)=\sum_{k=0}^{m-1}R_{0,ср.}^{(k)}(f)=\frac{(b-a)^3}{24m^3}\sum_{k=0}^{m-1}f''(\eta_k).$$

Согласно теореме о среднем и в предположении о непрерывности $f''(x)$ на $[a,b]$, погрешность обобщенной формулы средних прямоугольников запишется в виде

$$R_{0,cp.}^{(об.)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi). \qquad (20)$$

4. *Квадратурная формула трапеций*

Для формулы трапеций $B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2}$. Два равноотстоящих узла на $[a,b]$ образуют точки a и b. Формула трапеций и выражение для погрешности имеют вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)], \qquad (21)$$

$$R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta).$$

Последнее выражение для $R_1(f)$ получается в предположении, что $f''(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и произведение $(x-a)(x-b)$ не меняет знак на $[a,b]$.

Геометрически формула (21) означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$, заменяется площадью трапеции с основанием $(b-a)$ и высотой $\frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Разделив отрезок $[a,b]$ на m частей, применив к каждой части формулу трапеций и просуммировав результаты, получим обобщенную формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2m}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1}) + f_m]. \qquad (22)$$

Погрешность обобщенной формулы трапеций имеет вид

$$R_1^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi).$$

5. *Квадратурная формула Симпсона (парабол)*

В этом случае $B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}$, $B_1^2 = \frac{4}{6}$. Три равноотстоящих узла на $[a,b]$ образуют точки $a, \frac{a+b}{2}, b$. Квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \quad (23)$$

Геометрически формула (23) означает, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$, заменяется площадью, ограниченной параболой, построенной на $[a,b]$ по трем точкам $a, \frac{a+b}{2}, b$.

Так как средняя точка интервала $[a,b]$ является узлом квадратурного правила, то формула (23) является точной для многочленов третьей степени. Для нахождения погрешности квадратурной формулы Симпсона построим многочлен Эрмита третьей степени $P_3(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$P_3(a) = f(a),$$
$$P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \; P_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
$$P_3(b) = f(b).$$

Остаточный член многочлена Эрмита $P_3(x)$ имеет вид:

$$r_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b).$$

Тогда остаточный член квадратурного правила Симпсона можно вычислить следующим образом:

$$R_2(f)=\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx\,.$$

Так как множитель $(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$ не меняет знак на $[a,b]$ и, в предположении о непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[a,b]$, существует точка $\eta\in[a,b]$ такая, что

$$R_2(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Разделим отрезок $[a,b]$ на четное число m частей длиной $h=\dfrac{b-a}{m}$ и к сдвоенному отрезку $[a+(k-1)h, a+(k+1)h]$ применим формулу (23). Тогда

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left[f_{k-1}+4f_k+f_{k+1}\right].$$

Просуммировав результаты по всем сдвоенным отрезкам на $[a,b]$, получим обобщенную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{3m}[f_0+f_m+$$

$$+2(f_2+f_4+\ldots+f_{m-2})+4(f_1+f_3+\ldots+f_{m-1})],$$

погрешность которой можно представить в виде

$$R_2^{(об.)}(f)=-\frac{1}{90}h^5\left[f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_3)+\ldots+f^{(4)}(\eta_{m-1})\right],$$

где $\eta_k\in[a+(k-1)h, a+(k+1)h],\ k=\overline{1,m-1}$.

Ввиду предположения о непрерывности $f^{(4)}(x)$ на $[a,b]$, и, согласно теореме о среднем, существует такая точка $\xi\in[a,b]$, что

$$\frac{2}{m}\left[f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_3)+\ldots+f^{(4)}(\eta_{m-1})\right]=f^{(4)}(\xi)\,.$$

Тогда выражение для погрешности квадратурной формулы Симпсона примет вид

$$R_2^{(об.)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{(4)}(\xi).$$

Практическое занятие № 6.

Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения

Задание. Отделить корни уравнения $f(x)=0$ графически и уточнить. Проверить достаточное условие сходимости. Один из корней уравнения вычислить с помощью метода Ньютона с точность до $\varepsilon = 0{,}00005$. Варианты исходных данных приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки численного решения нелинейного уравнения.

Указания к выполнению. Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное решение уравнений с помощью метода Ньютона. Начальное приближение x_0 можно определить графически как точку пересечения функцией $y = f(x)$ оси абсцисс. Идея этого метода заключается в том, что он позволяет решение нелинейного уравнения свести к решению последовательности линейных задач.

Пусть требуется найти точное решение x^* уравнения $f(x)=0$ при заданном начальном приближении x_0. Итерационное правило Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,1,\ldots \; . \qquad (24)$$

Геометрически метод Ньютона означает следующее (см. рис. 3): точное решение x^* является точкой пересечения кривой $y = f(x)$ с осью абсцисс. За очередное приближение x_{n+1} принимается точка пересечения касательной к кривой в точке $(x_n, f(x_n))$ с осью абсцисс.

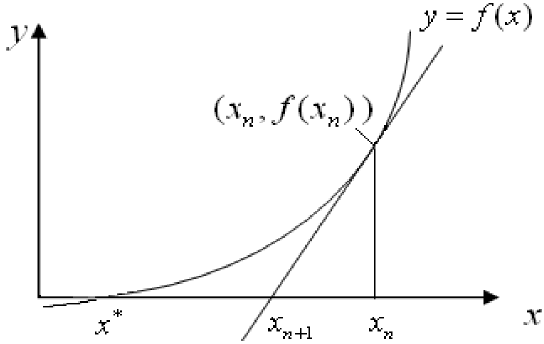

Рис. 3. Графическая иллюстрация к методу Ньютона

Итерационный процесс следует продолжать до тех, пор пока не будет выполнено неравенство

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon, \qquad (25)$$

где ε - заданная точность решения уравнения.

Для проверки сходимости метода Ньютона используются следующая теорема.

Теорема. Если $f(x)$ определена, дважды дифференцируема в $[\alpha, \beta]$ и принимает значения разных знаков на концах интервала $[\alpha, \beta]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки на $[\alpha, \beta]$, то, используя начальное приближение $x_0 \in [\alpha, \beta]$, удовлетворяющего неравенству

$$f(x_0) f''(x_0) > 0,$$

получим сходящийся итерационный процесс (24) для определения единственного корня x^* уравнения $f(x) = 0$ с любой степенью точности.

Эта теорема дает достаточные условия сходимости метода Ньютона.

Сходимость метода Ньютона является квадратичной.

Пример. Найти корень уравнения $f(x)=0$ для функции $f(x)$ вида:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-7x-\sqrt{x}+12.$$

Выполнив отделение корней (это можно сделать построив график функции $y=f(x)$) найдем интервал, которому принадлежит только один корень уравнения. В качестве этого интервала можно взять следующий:

$$[1.5,\ 1.75].$$

За начальное приближение примем значение $x_0=1.7$, которое принадлежит выбранному интервалу. Проверим достаточные условия сходимости метода Ньютона (см. теорему).

a. Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на [1.5,1.75]:

$$f'(x)=x-7-\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ и } f''(x)=1+\frac{1}{4\sqrt[3]{x}}.$$

b. На интервале [1.5,1.75] производные $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют постоянные знаки.

c. Произведение положительно $f(x_0)f''(x_0)=0.26836>0$.

Для нахождения решения уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon=0.5\cdot10^{-4}$, используем формулы метода Ньютона (24) в результате за 4 итерации получим корень с заданной точностью $x^*=1{,}7426$.

Практическое занятие № 7.

Метод Гаусса для решения
систем линейных уравнений

Задание. С помощью метода Гаусса найти решение системы линейных уравнений $Ax = b$. Варианты значений матриц A и вектора b приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам практические навыки численного решения системы линейных уравнений.

Указания к выполнению. Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное решение системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса (метод исключения неизвестных). Этот метод осуществляет приведение исходной системы к эквивалентной системе с правой треугольной матрицей (схема единственного деления) или с диагональной матрицей (схема оптимального исключения). При этом не требуется заранее определять, имеет или нет решение данная система.

Рассмотрим схему единственного деления. Систему $Ax = b$ представим в виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{26}$$

Будем считать выбор порядка преобразования, в котором исключаются неизвестные, произвольным. Выберем какое-либо уравнение и неизвестное в этом уравнении. Единственное условие, которое должно быть выполнено при этом выборе, состоит в том, что коэффициент при выбранном неизвестном должен быть отличным от нуля. Переставляя, если необходимо, уравнения и меняя местами неизвестные, можно считать, что выбрано первое уравнение, неизвестное x_1, и при этом $a_{11} \neq 0$. Разделив выбранное уравнение на a_{11}, приведем его к виду:

$$x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = q_1, \tag{27}$$

где

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \; j = \overline{2, n}, \; q_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Исключим x_1 из остальных уравнений системы. Для этого умножим (27) последовательно на $a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}$ и вычтем из второго, третьего и т.д. последнего уравнения системы. Преобразованные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{gathered} a_{22.1}x_2 + a_{23.1}x_3 + ... + a_{2n.1}x_n = b_{2.1}, \\ ... \\ a_{n2.1}x_2 + a_{n3.1}x_3 + ... + a_{nn.1}x_n = b_{n.1}, \end{gathered} \quad (28)$$

где $a_{ij.1} = a_{ij} - b_{1j}a_{i1}, \; i, j = \overline{2, n}, \; b_{i.1} = b_i - a_{i1}q_1$.

К полученной системе применим такое же преобразование, т.е. выберем уравнение и неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, приведем этот коэффициент к единице, исключим неизвестное из прочих уравнений и так до тех пор, пока такие преобразования возможны.

В результате придем к одной из двух ситуаций.

1. После n шагов преобразований получим систему вида:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + ... + b_{1n}x_n &= q_1, \\ x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{1n}x_n &= q_2, \\ &... \\ x_n &= q_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение полученной системы осуществляется снизу вверх следующим образом:

$$\begin{aligned} & x_n = q_n, \\ & x_i = q_i - \sum_{j=n}^{i-1} b_{ij}x_j, \; i = \overline{n-1, 1}. \end{aligned} \quad (30)$$

2. После шага преобразований $m < n$ система приняла вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n &= q_1, \\
x_m + b_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{m\,n}x_n &= q_m, \\
0 &= b_{m+1.n}, \\
&\ldots \\
0 &= b_{m.n}.
\end{aligned} \qquad (31)
$$

Тогда, если среди элементов $b_{m+1.n},\ldots,b_{m.n}$ есть отличные от нуля, то система (26) не имеет решения, если все, $b_{j.m}=0$, $j=\overline{m+1,n}$, то система имеет бесчисленное множество решений (неизвестные $x_{m+1},\ldots,x_n$ могут принимать любые значения, а $x_1,\ldots,x_m$ выражаются через них).

Приведение системы к виду (29) называется прямым ходом метода Гаусса, а нахождение ее решения (30) – обратным. Заметим, что на каждом шаге прямого хода метода Гаусса выбирается уравнение и неизвестное, подлежащие исключению из прочих уравнений. Это равносильно выбору коэффициента для очередного шага преобразований. Этот коэффициент называется ведущим и он должен быть отличным от нуля. Во избежание большой потери точности рекомендуется осуществлять такую перестановку уравнений, чтобы ведущий коэффициент являлся либо максимальным по модулю коэффициентом во всей системе, либо максимальным по модулю коэффициентом в выбранном уравнении. Такая процедура называется методом Гаусса с выбором главного элемента.

Практическое занятие № 8.

Численное решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта

Задание. Найти решение задачи Коши для уравнения первого порядка вида

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, на интервале $[x_0 = 0, X = 0{,}4]$

с помощью метода Рунге-Кутта для двух значений шага интегрирования $h1 = 0{,}05$ и $h2 = 0{,}025$. По правилу Рунге оценить погрешность метода. В приложении приведены варианты заданий.

Цель работы. Дать студентам навыки численного решения дифференциальных уравнений типа Коши.

Указания к выполнению. Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное интегрирование уравнения первого порядка с помощью метода Рунге-Кутта.

Существует несколько формул Рунге-Кутта для решения дифференциального уравнения первого порядка. Наиболее распространенной является формула Рунге-Кутта 4-го порядка, которая имеет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \qquad (32)$$

где

$$K_1^{(i)} = h \quad f(x_i, y_i),$$
$$K_2^{(i)} = h \quad f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}),$$
$$K_3^{(i)} = h \quad f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}),$$
$$K_4^{(i)} = h \quad f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)})$$

и $K_j^{(i)} = K_j(x_i, y_i)$, $j = \overline{1,4}$.

Оценка погрешности полученного решения для данного дифференциального уравнения согласно правилу Рунге для данного метода определяется по формуле

$$\Delta_{\text{M}} \approx \max_{i} \left| \frac{y_i^h - y_i^{2h}}{15} \right|, \qquad (33)$$

где y_i^h и y_i^{2h} - решения, полученные с помощью метода Рунге-Кутта с половинным и основным шагом.

Пример. Требуется решить задачу Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, X]$. Решение найти с шагом $h = 0{,}1$ методом Рунге-Кутта и оценить погрешность решения, применяя правило Рунге.

Исходные данные:

$$f(x, y) = \frac{x-1}{x+2y^2}, \ y(0) = 1, \ X = 3.$$

Воспользовавшись формулами (32) найдем решение задачи Коши с шагом $h = 0{,}1$. Полученные значения $y_i, i = \overline{0{,}31}$ приведены в таблице.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1,000000	0,951378	0,906036	0,864765	0,828295	0,797218	0,771926	0,752585
i	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	0,739137	0,731346	0,728845	0,731190	0,737903	0,748507	0,762543	0,779586
i	16	17	18	19	20	21	22	23
y_i	0,799246	0,821178	0,845071	0,870655	0,897689	0,925966	0,955302	0,985541
i	24	25	26	27	28	29	30	31
y_i	1,016543	1,048189	1,080376	1,113012	1,146019	1,179329	1,212883	1,246629

Для оценки погрешности с помощью правила Рунге, найдем решение задачи на интервале $[x_0, X]$ с шагом $h = 0.2$. Полученные значения y_i, $i = \overline{0,15}$ приведены в таблице.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1,000000	0,906035	0,828292	0,771922	0,739132	0,728840	0,737899	0,762539
i	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	0,799242	0,845068	0,897686	0,955299	1,016540	1,080373	1,146016	1,212880

Оценка погрешности полученного решения для данного дифференциального уравнения согласно правилу Рунге для данного метода определяется по формуле (33). Для рассмотренного примера: $\Delta_M \approx 3 \cdot 10^{-7}$.

Практическое занятие № 9.

Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

Задание. Найти решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

$$y(0) = \alpha, \ y(1) = \beta,$$

на интервале $[0, 1]$ методом сеток с шагом $h = 0,1$. Варианты заданий приведены в приложении.

Цель работы. Дать студентам навыки численного решения краевой задачи.

Указания к выполнению. Рассмотрим основные формулы, позволяющие реализовать численное интегрирование решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка методом сеток.

Пусть линейная краевая задача задана в виде:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{34}$$

$$y(a)=\alpha, \ \ y(b)=\beta. \qquad (35)$$

На интервале $[a,b]$ зададим равномерную сетку узлов $x_i = a + ih$, $i=\overline{0,n}$ и обозначим y_i, $i=\overline{0,n}$ значения приближенного решения в точках x_i. В дифференциальном уравнении (34) производные заменим разностными отношениями:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \qquad (36)$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \qquad (37)$$

Тогда, записав уравнение (34) для точки x_i и заменив производные в этой точке согласно (36), (37), получим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned} &y_0 = \alpha, \\ &a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = g_i, \quad i=\overline{1,i-1}, \\ &y_n = \beta, \end{aligned} \qquad (38)$$

где a_i, b_i, c_i, g_i получены приведением подобных членов после замены производных. Система (38) является системой с трехдиагональной матрицей. Для решения таких систем используется метод прогонки. Согласно этому методу решение системы записывается в виде:

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i, \qquad (39)$$

где L_i и K_i – неизвестные коэффициенты, которые называются прогоночными.

Так как, при $i=0$ $y_0=\alpha$ и

$$y_0 = L_0 y_1 + K_0,$$

то

$$K_0 = \alpha, \quad L_0 = 0.$$

При $i=1$ имеем

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1,$$

а из уравнения системы (38)

$$a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = g_1$$

или

$$y_1 = \frac{-c_1}{b_1} y_2 + \frac{g_1 - a_1 K_0}{b_1}.$$

Тогда для определения прогоночных коэффициентов получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$L_i = -\frac{c_i}{a_i \cdot L_{i-1} + b_i}, \; K_i = \frac{g_i - a_i \cdot K_{i-1}}{a_i \cdot L_{i-1} + b_i}, \; i = \overline{1, n-1}. \quad (40)$$

Решение системы (38) находится в обратном порядке следующим образом:

$$\begin{aligned} & y_n = \beta, \\ & y_{i-1} = L_{i-1} y_i + K_{i-1}, \quad i = n, n-1, \ldots, 2 \;, \\ & y_0 = \alpha. \end{aligned} \quad (41)$$

Итак, найденные значения y_i и будут представлять собой решение краевой задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты к работе № 1

1. а) x=1,2571, $\Delta x = 0{,}1\ 10^{-2}$,

б) x=0,007751, $\Delta x = 0{,}62\ 10^{-5}$,

в) x=17,392, n=4,

г) $z = e^{-x} / e^{y}$,

2. а) x=21,757, $\Delta x = 0{,}44\ 10^{-2}$,

б) x=0,2887, $\Delta x = 0{,}6\ 10^{-3}$,

в) x=-3,7879, n=2,

г) $z = \sin(x)\ \ln(y)$;

3. а) x=0,2567, $\Delta x = 0{,}1\ 10^{-1}$,

б) x=0,0027, $\Delta x = 0{,}62\ 10^{-2}$,

в) x=18715,32, n=5,

г) $z = \sin(x) + e^{x}\cos(y)$,

4. а) x=0,00058, $\Delta x = 0{,}47\ 10^{-3}$,

б) x=27,2546, $\Delta x = 0{,}61\ 10^{-2}$,

в) x=571,27, n=4,

г) $z = x^{3}\ln(y)$;

5. а) x=2,70508, $\Delta x = 0{,}3\ 10^{-3}$,

б) x=0,008701, $\Delta x = 0{,}57\ 10^{-5}$,

в) x=2,0104, n=3,

г) $z = y\cos(x^{3})$,

6. а) x=7,00768, $\Delta x = 0{,}65\ 10^{-3}$,

б) x=67,26457, $\Delta x = 0{,}11\ 10^{-4}$,

в) x=2,1587, n=4,

г) $z = ye^{-\sin(x)}$;

7. а) x=0,00968, $\Delta x = 0{,}41\ 10^{-2}$,

б) x=2,1471, $\Delta x = 0{,}72\ 10^{-3}$,

в) x=622,338, n=5,

г) $z = e^{-x}\cos(2y)$,

8. а) x=0,00515, $\Delta x = 0{,}12\ 10^{-3}$,

б) x=0,5871, $\Delta x = 0{,}74\ 10^{-4}$,

в) x=237,881, n=5,

г) $z = \cos(x)\ \ln(y)$;

9. а) x=0,98344, $\Delta x = 0{,}45\ 10^{-4}$,

10. а) x=6,0087, $\Delta x = 0{,}2\ 10^{-2}$,

б) x=68,7711, $\Delta x = 0{,}59\ 10^{-3}$, б) x=-3,1122, $\Delta x = 0{,}47\ 10^{-3}$,
в) x=21,72001, n=4, в) x=2,2271, n=3,
г) $z = \sin^2(y) / \cos(x)$, г) $z = x^3(y + \cos(y))$;

11. а) x=7,1034, $\Delta x = 0{,}62\ 10^{-3}$, ***12.*** а) x=4,2011, $\Delta x = 0{,}66\ 10^{-3}$,
б) x=0,00771, $\Delta x = 0{,}35\ 10^{-2}$, б) x=0,0722, $\Delta x = 0{,}12\ 10^{-2}$,
в) x=-0,00178651, n=3, в) x=0,0000527, n=2,
г) $z = (x+1) / \cos(y^2)$, г) $z = (x-3) / (y^2+1)$;

13. а) x=1,2571, $\Delta_x = 0{,}1\ 10^{-2}$, ***14.*** а) x=21,757, $\Delta_x = 0{,}44\ 10^{-2}$,
б) x=0,007751, $\Delta_x = 0{,}62\ 10^{-5}$, б) x=0,2887, $\Delta_x = 0{,}6\ 10^{-3}$,
в) x=17,392, n=4, в) x=-3,7879, n=5,
г) $z = \ln(x) / \sin^2(y)$ г) $z = e^{(x)} + \cos^2(y)$,

15. а) x=0,3457, $\Delta_x = 0{,}12\ 10^{-3}$, ***16.*** а) x=0,000712, $\Delta_x = 0{,}24\ 10^{-3}$,
б) x=0,5327, $\Delta_x = 0{,}87\ 10^{-3}$, б) x=0,78378, $\Delta_x = 0{,}1\ 10^{-4}$,
в) x=7568,2, n=4, в) x=107,9871, n=6,
г) $z = \cos(y) / (x^2+1)$, г) $z = \cos^2(x) + \sin(y)$,

17. а) x=2,74, $\Delta_x = 0{,}49\ 10^{-3}$, ***18.*** а) x=0,1757, $\Delta_x = 0{,}68\ 10^{-3}$,
б) x=0,007128, $\Delta_x = 0{,}42\ 10^{-4}$, б) x=81,5819, $\Delta_x = 0{,}15\ 10^{-4}$,

в) x=127,512, n=5, в) x=0,12719, n=4,

г) $z=\cos(y^2)+x^3$, г) $z=y\,e^{-\cos(x)}$,

Варианты к работе № 2

1. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}=y_i+f(x_i)$, $i=0,1,2...8$

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin x+5x, & \text{если } 0\le x<1 \\ \dfrac{2\sqrt{x}}{1+0.124x^2}, & \text{если } 1\le x<2 \end{cases}$$

$x_0=0\quad h=0.2\quad y_0=f(x_0)$.

2. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}=y_i^{\,3}+0.3f(x_{i+1})$, $i=0,1,2...10$

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}+0.5x, & \text{если } 0\le x\le 1 \\ \ln|x+3|, & \text{если } 1<x<6 \end{cases}$$

$$x_0=0\quad h=0.5\quad y_0=f(x_0).$$

3. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}=y_i^{\,2}+f(x_{i+1})^3$, $i=0,1,2...15$

$$f(x)=\begin{cases} \ln(10+x^2), & \text{если } 0\le x\le 0.5 \\ 0.25\sqrt{x}+\sin^2 x, & \text{если } 0.5<x<10 \end{cases}$$

$$x_0=0\quad h=0.15\quad y_0=f(x_0).$$

4. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}=3y_i+1.5f(x_{i+1})^2$, $i=0,1,2...14$

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+1.5x^2, & \text{если } 0\le x\le 0.25 \\ \ln x+9.5, & \text{если } 0.25<x<2 \end{cases}$$

$$x_0=0\quad h=0.05\quad y_0=f(x_0).$$

5. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = \dfrac{y_i}{1+y_i} - f(x_i)$, $i = 0,1,2\ldots10$

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2(2+x), & \text{если } 0 \le x \le 0.9 \\ 0.5x^2 + \ln x, & \text{если } 0.9 < x < 2\pi \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.5 \quad y_0 = f(x_0).$$

6. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = \sqrt[3]{2 + 0.3 f(x_{i+1})} - y_i$, $i = 0,1,2\ldots8$

$$f(x) = \begin{cases} 0.25\cos(x+3) + x^3, & \text{если } 0 \le x \le \pi \\ 9\sqrt{x} + 10\ln x, & \text{если } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.4 \quad y_0 = f(x_0).$$

7. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = y_i \sin y_i - 0.24 f(x_{i+1})$, $i = 0,1,2\ldots8$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+2} + \sqrt{x}, & \text{если } 0 \le x \le 0.5 \\ 0.5x^2 + \ln x, & \text{если } 0.5 < x < 4 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.5 \quad y_0 = f(x_0).$$

8. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = 2.1 y_i^2 - 0.5 f(x_{i+1})$, $i = 0,1,2\ldots10$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2.7\cos(x+1`)}{x+3}, & \text{если } 0 \le x \le 0.35 \\ 0.5x^2 + \ln x, & \text{если } 0.35 < x < 2 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.2 \quad y_0 = f(x_0).$$

9. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = y_i + \sqrt[3]{f(x_{i+1})}$, $i = 0,1,2\ldots20$

$$f(x)=\begin{cases}2\sin x+5x, & \text{если } 0\le x<1\\ \dfrac{2\sqrt{x+2}}{1+x^2}, & \text{если } 1\le x<2\end{cases}$$

$$x_0=0 \quad h=0.1 \quad y_0=f(x_0).$$

10. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}={y_i}^3+0.3f(x_{i+1})$, $i=0,1,2...10$

$$f(x)=\begin{cases}0.3x^2+0.5x, & \text{если } 0\le x\le 1\\ 0.95\ln|x+1|, & \text{если } 1<x<3\end{cases}$$

$$x_0=0 \quad h=0.25 \quad y_0=f(x_0).$$

11. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}={y_i}^2+f(x_{i+1})^3$, $i=0,1,2...15$

$$f(x)=\begin{cases}(10+x^2), & \text{если } 0\le x\le 0.5\\ 0.25\sqrt{x}+x^3, & \text{если } 0.5<x<10\end{cases}$$

$$x_0=0 \quad h=0.15 \quad y_0=f(x_0).$$

12. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}=3y_i+1.5f(x_{i+1})^2$, $i=0,1,2...14$

$$f(x)=\begin{cases}x+1.5x^2, & \text{если } 0\le x\le 0.25\\ \sin x+9.5, & \text{если } 0.25<x<2\end{cases}$$

$$x_0=0 \quad h=0.05 \quad y_0=f(x_0).$$

13. Для значений аргумента $x_{i+1}=x_i+h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1}=\dfrac{y_i}{1+y_i}-f(x_i)$,

$i=0,1,2...10$

$$f(x)=\begin{cases}\ln^2(2+x), & \text{если } 0\le x\le 0.9\\ 0.5x^2+\ln x, & \text{если } 0.9<x<2\pi\end{cases}$$

$$x_0=0 \quad h=0.5 \quad y_0=f(x_0).$$

14. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = \sqrt[3]{2 + 0.3 f(x_{i+1})} - y_i$, $i = 0,1,2\ldots8$

$$f(x) = \begin{cases} 0.25\cos(x+3) + x^3, & \text{если } 0 \le x \le \pi \\ 9\sqrt{x} + 10\ln x, & \text{если } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.4 \quad y_0 = f(x_0).$$

15. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = 3{y_i}^2 + f(x_{i+1})^2$, $i = 0,1,2\ldots14$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1.5x^2, & \text{если } 0 \le x \le 0.25 \\ x + 19.5, & \text{если } 0.25 < x < 1.8 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.05 \quad y_0 = f(x_0).$$

16. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = 2.1y_i^2 - 0.5 f(x_{i+1})$, $i = 0,1,2\ldots10$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \cos(x^2+1)}{\ln x + 3}, & \text{если } 0 \le x \le 0.35 \\ x^2 + \sin x, & \text{если } 0.35 < x < 4 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.4 \quad y_0 = f(x_0).$$

17. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = 2y_i^2 - 1.2 f(x_{i+1})$, $i = 0,1,2\ldots10$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1.5\cos(x+1)}{x+4}, & \text{если } 0 \le x \le 0.4 \\ x^3 + x, & \text{если } 0.4 < x < 2 \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad h = 0.2 \quad y_0 = f(x_0).$$

18. Для значений аргумента $x_{i+1} = x_i + h$ вычислить y_i Построить график функции $y(x)$. $y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1})^2$, $i = 0,1,2\ldots20$

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+x, & \text{если } 0\le x<1.5\\ \dfrac{\sqrt{x+3}}{1+x^3}, & \text{если } 1.5\le x<2\end{cases}$$

$$x_0=0 \quad h=0.1 \quad y_0=f(x_0).$$

Варианты к работе № 3

1. $x_0 = 0,35$ $y_0 = 1,419$
$x_1 = 0,48$ $y_1 = 1,616$
$x_2 = 0,97$ $y_2 = 2,737$
$x_3 = 1,08$ $y_3 = 2,944$
$x_4 = 1,18$ $y_4 = 3,754$
$x_5 = 1,35$ $y_5 = 4,119$
$x = 0,58$;

2. $x_0 = 0,32$ $y_0 = 1,377$
$x_1 = 0,73$ $y_1 = 2,075$
$x_2 = 0,97$ $y_2 = 2,637$
$x_3 = 1,13$ $y_3 = 3,295$
$x_4 = 1,52$ $y_4 = 4,672$
$x_5 = 1,59$ $y_5 = 4,872$
$x_6 = 2,02$ $y_6 = 7,538$
$x = 0,92$;

3. $x_0 = 0,32$ $y_0 = 1,377$
$x_1 = 0,49$ $y_1 = 1,619$
$x_2 = 0,98$ $y_2 = 2,638$
$x_3 = 1,11$ $y_3 = 3,334$
$x_4 = 1,25$ $y_4 = 3,590$
$x_5 = 1,53$ $y_5 = 4,618$
$x = 1,04$;

4. $x_0 = 0,09$ $y_0 = 1,094$
$x_1 = 0,41$ $y_1 = 1,506$
$x_2 = 0,83$ $y_2 = 2,293$
$x_3 = 1,06$ $y_3 = 2,886$
$x_4 = 1,22$ $y_4 = 3,587$
$x_5 = 1,61$ $y_5 = 5,002$
$x_6 = 1,69$ $y_6 = 5,228$
$x = 0,75$;

5. $x_0 = 0,17$ $y_0 = 1,185$
$x_1 = 0,64$ $y_1 = 1,896$
$x_2 = 0,78$ $y_2 = 2,181$
$x_3 = 0,89$ $y_3 = 2,435$
$x_4 = 1,14$ $y_4 = 3,326$
$x_5 = 1,50$ $y_5 = 4,481$
$x = 0,85$;

6. $x_0 = 0,38$ $y_0 = 1,462$
$x_1 = 0,49$ $y_1 = 1,632$
$x_2 = 0,99$ $y_2 = 2,691$
$x_3 = 1,09$ $y_3 = 2,974$
$x_4 = 1,19$ $y_4 = 3,588$
$x_5 = 1,39$ $y_5 = 4,072$
$x = 0,89$;

7. $x_0 = 0,14$ $y_0 = 1,150$
$x_1 = 0,28$ $y_1 = 1,323$
$x_2 = 0,57$ $y_2 = 1,768$
$x_3 = 1,00$ $y_3 = 2,918$
$x_4 = 1,22$ $y_4 = 3,387$
$x_5 = 1,35$ $y_5 = 4,109$
$x = 0,80$;

8. $x_0 = 0,38$ $y_0 = 1,462$
$x_1 = 0,40$ $y_1 = 1,491$
$x_2 = 0,81$ $y_2 = 2,224$
$x_3 = 1,25$ $y_3 = 3,790$
$x_4 = 1,59$ $y_4 = 4,903$
$x_5 = 1,86$ $y_5 = 6,423$
$x = 1,12$;

9. $x_0 = 0{,}18$ $y_0 = 1{,}197$
$x_1 = 0{,}65$ $y_1 = 1{,}915$
$x_2 = 0{,}80$ $y_2 = 2{,}525$
$x_3 = 0{,}92$ $y_3 = 2{,}509$
$x_4 = 1{,}20$ $y_4 = 3{,}320$
$x_5 = 1{,}59$ $y_5 = 4{,}903$

$x = 1{,}04$;

10. $x_0 = 0{,}40$ $y_0 = 1{,}491$
$x_1 = 0{,}66$ $y_1 = 1{,}934$
$x_2 = 0{,}83$ $y_2 = 2{,}593$
$x_3 = 1{,}27$ $y_3 = 3{,}560$
$x_4 = 1{,}37$ $y_4 = 3{,}935$
$x_5 = 1{,}46$ $y_5 = 4{,}172$
$x_6 = 1{,}54$ $y_6 = 4{,}664$

$x = 1{,}01$;

11. $x_0 = 0{,}05$ $y_0 = 1{,}051$
$x_1 = 0{,}38$ $y_1 = 1{,}462$
$x_2 = 0{,}77$ $y_2 = 2{,}159$
$x_3 = 0{,}98$ $y_3 = 2{,}864$
$x_4 = 1{,}08$ $y_4 = 2{,}944$
$x_5 = 1{,}18$ $y_5 = 3{,}619$

$x = 0{,}83$;

12. $x_0 = 0{,}41$ $y_0 = 1{,}506$
$x_1 = 0{,}71$ $y_1 = 2{,}033$
$x_2 = 0{,}93$ $y_2 = 2{,}534$
$x_3 = 0{,}96$ $y_3 = 2{,}611$
$x_4 = 1{,}21$ $y_4 = 3{,}653$
$x_5 = 1{,}48$ $y_5 = 4{,}392$

$x = 1{,}03$;

13. $x_0 = 0{,}48$ $y_0 = 1{,}616$
$x_1 = 0{,}55$ $y_1 = 1{,}733$
$x_2 = 0{,}60$ $y_2 = 1{,}822$
$x_3 = 0{,}72$ $y_3 = 2{,}354$
$x_4 = 0{,}90$ $y_4 = 2{,}459$
$x_5 = 1{,}20$ $y_5 = 3{,}320$
$x_6 = 1{,}67$ $y_6 = 5{,}312$

$x = 0{,}59$;

14. $x_0 = 0{,}07$ $y_0 = 1{,}072$
$x_1 = 0{,}44$ $y_1 = 1{,}552$
$x_2 = 0{,}89$ $y_2 = 2{,}435$
$x_3 = 1{,}20$ $y_3 = 3{,}620$
$x_4 = 1{,}47$ $y_4 = 4{,}349$
$x_5 = 1{,}59$ $y_5 = 4{,}852$

$x = 0{,}99$;

15. $x_0 = 0{,}08$ $y_0 = 1{,}083$
$x_1 = 0{,}31$ $y_1 = 1{,}363$
$x_2 = 0{,}62$ $y_2 = 1{,}858$
$x_3 = 0{,}69$ $y_3 = 2{,}249$
$x_4 = 1{,}00$ $y_4 = 2{,}718$
$x_5 = 1{,}39$ $y_5 = 4{,}014$

$x = 0{,}46$;

16. $x_0 = 0{,}11$ $y_0 = 1{,}116$
$x_1 = 0{,}52$ $y_1 = 1{,}682$
$x_2 = 0{,}59$ $y_2 = 7{,}789$
$x_3 = 0{,}98$ $y_3 = 2{,}964$
$x_4 = 1{,}44$ $y_4 = 4{,}220$
$x_5 = 1{,}84$ $y_5 = 6{,}296$
$x_6 = 2{,}19$ $y_6 = 8{,}935$

$x = 0{,}91$;

17. $x_0 = 0{,}29$ $y_0 = 1{,}336$
$x_1 = 0{,}40$ $y_1 = 1{,}494$
$x_2 = 0{,}81$ $y_2 = 2{,}247$
$x_3 = 0{,}83$ $y_3 = 2{,}293$
$x_4 = 1{,}27$ $y_4 = 3{,}760$
$x_5 = 1{,}72$ $y_5 = 5{,}584$

18. $x_0 = 0{,}16$ $y_0 = 1{,}173$
$x_1 = 0{,}20$ $y_1 = 1{,}221$
$x_2 = 0{,}41$ $y_2 = 1{,}506$
$x_3 = 0{,}65$ $y_3 = 1{,}915$
$x_4 = 1{,}09$ $y_4 = 2{,}974$
$x_5 = 1{,}19$ $y_5 = 3{,}172$

$x_6 = 2,11$ $y_6 = 8,248$

$x = 0,34;$ $x = 0,23.$

Варианты к работе № 4

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
$y_0 = 0,322$	$y_0 = 6,850$	$y_0 = -0,417$	$y_0 = 24,901$	$y_0 = 0,070$
$y_1 = 0,284$	$y_1 = 5,539$	$y_1 = -0,751$	$y_1 = 26,244$	$y_1 = -0,134$
$y_2 = 0,241$	$y_2 = 4,601$	$y_2 = -0,966$	$y_2 = 27,541$	$y_2 = -0,443$
$y_3 = 0,193$	$y_3 = 3,902$	$y_3 = -0,972$	$y_3 = 28,790$	$y_3 = -0,544$
$y_4 = 0,135$	$y_4 = 3,363$	$y_4 = -0,713$	$y_4 = 29,992$	$y_4 = -0,724$
$y_5 = 0,063$	$y_5 = 2,937$	$y_5 = -0,211$	$y_5 = 31,144$	$y_5 = -0,870$
$y_6 = -0,031$	$y_6 = 2,594$	$y_6 = 0,396$	$y_6 = 32,251$	$y_6 = -0,966$
$y_7 = -0,184$	$y_7 = 2,373$	$y_7 = 0,896$	$y_7 = 33,813$	$y_7 = -1,000$
$y_8 = -0,369$	$y_8 = 2,079$	$y_8 = 0,980$	$y_8 = 34,334$	$y_8 = -0,962$
$y_9 = -0,741$	$y_9 = 1,882$	$y_9 = 0,592$	$y_9 = 35,320$	$y_9 = -0,846$
$y_{10} = -1,664$	$y_{10} = 1,715$	$y_{10} = -0,146$	$y_{10} = 36,275$	$y_{10} = -0,664$

6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
$y_0 = 0,614$	$y_0 = -2,186$	$y_0 = 5,430$	$y_0 = 0,794$	$y_0 = 21,779$
$y_1 = 0,614$	$y_1 = -1,710$	$y_1 = 5,815$	$y_1 = 0,773$	$y_1 = 25,505$
$y_2 = 0,640$	$y_2 = -1,734$	$y_2 = 6,311$	$y_2 = 0,723$	$y_2 = 29,577$
$y_3 = 0,685$	$y_3 = -1,120$	$y_3 = 6,620$	$y_3 = 0,662$	$y_3 = 34,717$
$y_4 = 0,741$	$y_4 = -0,917$	$y_4 = 7,051$	$y_4 = 0,620$	$y_4 = 38,852$
$y_5 = 0,801$	$y_5 = -0,748$	$y_5 = 7,509$	$y_5 = 0,543$	$y_5 = 44,109$
$y_6 = 0,866$	$y_6 = -0,602$	$y_6 = 8,001$	$y_6 = 0,494$	$y_6 = 49,822$
$y_7 = 0,912$	$y_7 = -0,483$	$y_7 = 8,535$	$y_7 = 0,450$	$y_7 = 56,027$
$y_8 = 0,936$	$y_8 = -0,356$	$y_8 = 9,119$	$y_8 = 0,412$	$y_8 = 62,768$
$y_9 = 0,956$	$y_9 = -0,247$	$y_9 = 9,762$	$y_9 = 0,380$	$y_9 = 70,091$
$y_{10} = 0,970$	$y_{10} = -0,143$	$y_{10} = 10,475$	$y_{10} = 0,351$	$y_{10} = 78,052$

11.	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
$y_0 = 10,824$	$y_0 = 4,860$	$y_0 = 1,257$	$y_0 = 3,981$	$y_0 = 6,492$
$y_1 = 10,431$	$y_1 = 4,462$	$y_1 = 1,524$	$y_1 = 3,837$	$y_1 = 6,879$
$y_2 = 9,918$	$y_2 = 3,906$	$y_2 = 1,728$	$y_2 = 3,648$	$y_2 = 7,350$
$y_3 = 9,320$	$y_3 = 3,169$	$y_3 = 1,849$	$y_3 = 3,424$	$y_3 = 7,889$
$y_4 = 8,631$	$y_4 = 2,222$	$y_4 = 1,867$	$y_4 = 3,175$	$y_4 = 8,547$
$y_5 = 7,911$	$y_5 = 1,027$	$y_5 = 1,788$	$y_5 = 2,910$	$y_5 = 9,339$
$y_6 = 7,173$	$y_6 = -0,475$	$y_6 = 1,547$	$y_6 = 2,658$	$y_6 = 10,320$
$y_7 = 6,242$	$y_7 = -2,363$	$y_7 = 1,215$	$y_7 = 2,369$	$y_7 = 11,479$
$y_8 = 5,735$	$y_8 = -4,955$	$y_8 = 0,798$	$y_8 = 2,109$	$y_8 = 12,939$

$y_9 = 5,068$	$y_9 = -7,829$	$y_9 = 0,339$	$y_9 = 1,864$	$y_9 = 14,787$
$y_{10} = 4,451$	$y_{10} = -11,87$	$y_{10} = -0,104$	$y_{10} = 1,637$	$y_{10} = 17,127$

16.	***17.***	***18.***	***19.***	***20.***
$y_0 = 0,649$	$y_0 = 1,449$	$y_0 = 1,000$	$y_0 = 7,237$	$y_0 = 5,215$
$y_1 = 0,767$	$y_1 = 1,171$	$y_1 = 1,215$	$y_1 = 7,436$	$y_1 = 5,658$
$y_2 = 0,881$	$y_2 = 0,805$	$y_2 = 1,465$	$y_2 = 7,735$	$y_2 = 6,105$
$y_3 = 1,027$	$y_3 = 0,396$	$y_3 = 1,754$	$y_3 = 8,123$	$y_3 = 6,560$
$y_4 = 1,197$	$y_4 = -0,045$	$y_4 = 2,088$	$y_4 = 8,654$	$y_4 = 7,025$
$y_5 = 1,401$	$y_5 = -0,488$	$y_5 = 2,473$	$y_5 = 9,361$	$y_5 = 7,514$
$y_6 = 1,648$	$y_6 = -0,894$	$y_6 = 2,915$	$y_6 = 10,315$	$y_6 = 8,012$
$y_7 = 1,959$	$y_7 = -1,235$	$y_7 = 3,433$	$y_7 = 11,589$	$y_7 = 8,517$
$y_8 = 2,329$	$y_8 = -1,438$	$y_8 = 4,015$	$y_8 = 13,393$	$y_8 = 9,059$
$y_9 = 2,807$	$y_9 = -1,505$	$y_9 = 4,673$	$y_9 = 16,051$	$y_9 = 9,637$
$y_{10} = 3,425$	$y_{10} = -1,411$	$y_{10} = 5,436$	$y_{10} = 20,277$	$y_{10} = 10,237$

Варианты к работе № 5

N	a	b	$f(x)$
1	2	3	$\sqrt{x^2 + 2x + \lg x}$
2	2	4	$\sin(x + e^x)$
3	1	3	$\cos(x + \ln x)$
4	1	3	$\lg(x + \ln x)$
5	$\frac{\pi}{2}$	π	$x(x^2 + e^x)$
6	0	$\frac{\pi}{2}$	$\sin(x + \sqrt{x})$
7	1	3	$\sqrt{\ln x + x^2}$
8	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$

9	$\frac{\pi}{2}$	π	$e^{x+\cos(x)}$
10	0	$\frac{\pi}{2}$	$\lg(x+\cos(x))$
11	-1	$\frac{\pi}{2}$	$\sin(x+x^2)$
12	$\frac{\pi}{2}$	π	$\sqrt{e^x+2}$
13	-1	1	$x^2\ln(x+2)$
14	1	3	$\ln(\sqrt{x}+x^2)$
15	$\frac{\pi}{2}$	π	$\cos(x+x^2+\sqrt{x})$
16	0	$\frac{\pi}{2}$	$\ln(x+\cos(x))$
17	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\cos(x)}{\lg(x)+x}$
18	0	$\frac{\pi}{2}$	$(x+\cos(x)+\sqrt{x})^2$

Варианты к работе № 6

1) $x^{20}-20\sin x=0$.	2) $\cos(x+0{,}3)=x^2$.	3) $3x+\cos x+1=0$.
4) $x^2\cos 2x=-1$.	5) $4\sin x=x-0{,}4$.	6) $2\ln x-0{,}5x=-1$.
7) $0{,}5^x+1=(x-2)^2$.	8) $2^x-1+0{,}5x=0$.	9). $2x+\cos 2x=0$.
10) $x^2 2^x=1$.	11) $x(x+1)^2=1$.	12) $x^3=\sin x$.
13) $e^x+x+1=0$.	14) $x^3=0{,}5\sin x$	15) $x\ln(x+1)=1$.
16) $2x+\cos x=0{,}5$.	17) $3^x+2+x=0$.	18) $\cos(x+0{,}5)=x^3$.

Варианты к работе № 7

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1{,}2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0{,}1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1{,}1 & 3{,}3 \end{pmatrix}$, $b=(1{,}5 \quad 1 \quad 2 \quad 2{,}3)^{\mathrm{T}}$.	2) $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & -1{,}2 & 1 & 1{,}1 \\ 1{,}4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0{,}1 & -1 & -3 \\ 1{,}1 & -1 & 1{,}1 & 3{,}1 \end{pmatrix}$, $b=(2{,}1 \quad 2 \quad 3 \quad 3)^{\mathrm{T}}$.
3) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1{,}5 & 1 & 2 \\ 3 & 2{,}2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3{,}4 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $b=(1 \quad 2{,}5 \quad 2 \quad 4)^{\mathrm{T}}$.	4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2{,}6 & -1 & 2 \\ 3 & 0{,}1 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $b=(3 \quad 1{,}6 \quad 2 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.
5) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1{,}2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1{,}7 & 2{,}1 & 7 \end{pmatrix}$, $b=(-1 \quad 1 \quad 2 \quad 5)^{\mathrm{T}}$.	6) $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b=(6 \quad 2 \quad 2 \quad 3)^{\mathrm{T}}$.
7) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3{,}1 & -1 & 1 \\ 0 & 0{,}6 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, $b=(1 \quad 2 \quad 3 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.	8) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 & -3{,}8 \end{pmatrix}$, $b=(1 \quad -1 \quad 2 \quad -2{,}7)^{\mathrm{T}}$.
9) $A=\begin{pmatrix} -8 & -1 & 1{,}6 & 2 \\ 0 & 2 & -1{,}1 & 1 \\ 3 & 0 & -1{,}5 & -3 \\ -9 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,	10) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1{,}2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0{,}1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1{,}1 & 3{,}3 \end{pmatrix}$,

$b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.	$b=\begin{pmatrix}1{,}5 & 1 & 2 & 2{,}3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
11) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1, & 1{,}7 & 2\\ -7 & 2 & -1{,}1 & 1\\ 5 & 0{,}8 & -1 & -3\\ 1{,}9 & 6 & 1 & -7\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 6{,}1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.	12) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1{,}8 & 2{,}5\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 1{,}9 & 7{,}3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
13) $A=\begin{pmatrix}-4 & -1{,}2 & 1 & 2{,}7\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 0{,}1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 6 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.	14) $A=\begin{pmatrix}2{,}8 & -1{,}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ -3 & 0{,}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1{,}1 & 9\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1{,}5 & 1 & 2 & 2{,}3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
15) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1{,}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 7 & 1\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 8 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.	16) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3{,}1\\ 1{,}4 & 3 & -1 & 2{,}7\\ 2 & 0{,}1 & -1 & -3\\ 1{,}1 & -1 & 1{,}1 & 3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2{,}3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
17) $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 5{,}4\\ 4 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.	18) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1 & 2\\ 3 & 0{,}1 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Варианты к работе № 8

1. $y'(x) = e^{-x} \cdot tg(x - y^2)$, $y(0) = 0{,}3$.
2. $y'(x) = e^{-0{,}1x} \cdot tg(x + y)$, $y(0) = -0{,}1$.
3. $y'(x) = tg(x^2 - y^2)$, $y(0) = 0{,}8$.
4. $y'(x) = 2\cos(x - y)$, $y(0) = -0{,}3$.
5. $y'(x) = e^{-x} \cdot \cos(x - y^2)$, $y(0) = 0{,}5$.
6. $y'(x) = 2^{-x} \cdot \sin(x^2 + y^2)$, $y(0) = -0{,}8$.
7. $y'(x) = \cos(x + x^2 - y^2)$, $y(0) = 0{,}1$.
8. $y'(x) = e^{-x} \cdot \sqrt[3]{(x + y^2)}$, $y(0) = -0{,}9$.
9. $y'(x) = e^{-0{,}5x} \cdot \sqrt[2]{(x^2 + y^2)}$, $y(0) = -0{,}1$.
10. $y'(x) = \cos(\sqrt[3]{(x^3 + y^2)})$, $y(0) = -0{,}2$.
11. $y'(x) = \sin(\sqrt[2]{(3x^2 + 0.2y^2)})$, $y(0) = -0{,}2$.
12. $y'(x) = \ln(\sqrt[2]{(x^2 + 0{,}8y^2)})$, $y(0) = 1$.
13. $y'(x) = \ln(\sqrt[3]{(x^2 + 0.5y^2)})$, $y(0) = 1{,}2$.
14. $y'(x) = \cos(\sqrt[2]{(x^2 + 2y^2)})$, $y(0) = -0{,}2$.
15. $y'(x) = e^{-0{,}5x} \cdot \sqrt[2]{(x^2 + y^2)}$, $y(0) = -0{,}1$.
16. $y'(x) = \sin(\sqrt[2]{(3x^2 + 0.2y^2)})$, $y(0) = 0{,}2$.
17. $y'(x) = e^{-x} \cdot \dfrac{1 + x}{\sqrt[2]{(x^2 + y^2)}}$, $y(0) = 0{,}1$.
18. $y'(x) = \cos(e^{-0{,}2x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - y^2)}})$, $y(0) = 1{,}2$.

Варианты к работе № 9

1. $p(x)=x^2,\ q(x)=2-0{,}85x,\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+4{,}5},\ \alpha=1,\ \beta=1.$

2. $p(x)=x,\ q(x)=2{,}2-x,\ f(x)=\dfrac{x^2}{3+x^2},\ \alpha=0{,}5,\ \beta=1.$

3. $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}},\ q(x)=1{,}4,\ f(x)=x,\ \alpha=2,\ \beta=1.$

4. $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2{,}5}},\ q(x)=2{,}2,\ f(x)=\sqrt[3]{x+2},\ \alpha=0,\ \beta=1.$

5. $p(x)=\cos(x),\ q(x)=\sin(1-x),\ f(x)=\dfrac{1}{x^3+1},\ \alpha=1,\ \beta=3.$

6. $p(x)=\sin(2x),\ q(x)=3-x^2,\ f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ \alpha=3,\ \beta=1.$

7. $p(x)=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ q(x)=1,\ f(x)=x^3,\ \alpha=-1,\ \beta=2.$

8. $p(x)=\cos(x^2),\ q(x)=\sin(x^3-1),\ f(x)=\dfrac{x^3}{x+1},\ \alpha=-1,\ \beta=-3.$

9. $p(x)=\ln x,\ q(x)=x+1,\ f(x)=\dfrac{x^2}{2},\ \alpha=3,\ \beta=2.$

10. $p(x)=x,\ q(x)=0{,}5x^3,\ f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ \alpha=-1,\ \beta=-1.$

11. $p(x)=\cos(x),\ q(x)=\sin(x+1),\ f(x)=\dfrac{x^2}{3+\sin(x)},\ \alpha=-5,\ \beta=1.$

12. $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6}},\ q(x)=x,\ f(x)=-x,\ \alpha=-2,\ \beta=-1.$

13. $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ q(x)=\ln(x),\ f(x)=-x^2,\ \alpha=0,\ \beta=-1.$

14. $p(x)=x-2,\ q(x)=\cos(1-x),\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+2},\ \alpha=-1,\ \beta=-3.$

15. $p(x)=\sin(4x),\ q(x)=x+1,\ f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2},\ \alpha=-2,\ \beta=1.$

16. $p(x)=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}},\ q(x)=x^2,\ f(x)=3,\ \alpha=1,\ \beta=-2.$

17. $p(x)=\cos(x),\ q(x)=\sin(x^2-3),\ f(x)=\dfrac{x^3}{x-4},\ \alpha=1,\ \beta=-3.$

18. $p(x)=\sin(x),\ q(x)=x^4+1,\ f(x)=1+x,\ \alpha=-2,\ \beta=2.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смагин В.И. Matlab и система Simulink. Изд-во ТУСУР, 2006. 123 с.

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.Численные методы в задачах и упражнениях. Под ред. Садовничего В.А. Изд-во: "Лаборатория знаний". 2015. 243 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=70743

2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / 3-е издание, стереотипное. М.: Высшая школа, 2009. 840 с

3. Денисова Э.В., Кучер А.В. Краткий курс вычислительной математики. Изд-во: НИУ ИТМО. 2013. 90 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=43415

3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Лань, 2009. 368 с.

4. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. М.: Высшая школа, 1998.

5. Смагин В.И., Решетникова Г.Н. Численные методы (аппроксимация, дифференцирование и интегрирование). Изд-во Том. ун-та, Томск, 2008. 184 с.