МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС

_________________ И. Г. Боровской

«___» ____________________ 2016 г.

М.Г. Носова

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы студентов направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

2016

Носова М. Г. Теория принятия решения: учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы студентов направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» ‐ Томск: Изд-во ТУСУР, 2016. ‐ 38 с.

Учебно-методическое пособие посвящено основам практического применения методов теории принятия решений при различных условиях поставленной задачи. В пособии рассматриваются методы решения задач принятия решений в условиях определенности, неопределенности, риска и конфликта. Данное пособие содержит также необходимые материалы для самостоятельной работы студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблемы принятия решений и выбора являются сферой, интенсивно разрабатываемой во многих областях знания. Под принятием решений обычно понимают некоторый выбор, принимаемый в ответ на возникшие потребности. При этом выделяют решения, принимаемые индивидуумом, группой или организацией.

В теории принятия решений выделяют четыре класса задач, сформулированных на основе идентифицированной проблемы: задачи принятия решений в условиях определенности (однокритериальные и многокритериальные), задачи принятия решений в условиях неопределенности, задачи принятия решений в условиях риска, задачи принятия решений в условиях конфликта.

Под определенностью при этом понимается ситуация, когда одной альтернативе соответствует только один набор последствий (возникает задача поиска оптимального решения, например транспортная задача или задача распределения запасов). В случае принятия решений в условиях неопределенности лицо, принимающее решение, знает о наличии нескольких состояний системы и их возможных последствий, но не может оценить достоверность их наступления (задачи управления запасами и системы массового обслуживания).

Принятие решений в условиях риска предполагает, что имеется несколько состояний системы, которые могут наступить с разной вероятностью (при этом вероятность может быть оценена) и каждому состоянию соответствует свой набор последствий (перегон машин из одного города в другой, инвестиции в проект, покупка акций). Принятие решений в условиях конфликта предполагает, что существует противодействие внешней среды, которое с той или иной вероятностью может повлиять на последствия (теория игр).

Все это обусловливает необходимость и значимость детального изучения и приобретения практики применения методов решения задач в различных условиях. Поэтому курс «Теория принятия решений» направлен на формирование у студентов сущностного понимания природы принимаемого решения, его места в системе управления, типов, форм, структуры решения, основных методов принятия решений на практике.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»:

– Способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7),

– Способность обосновывать принимаемые проектные решения, осуществлять постановку и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности (ПК-3).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

– Знать: основные понятия теории принятия решений, этапы процесса принятия решений, модели и методы линейного программирования, типовые задачи линейного программирования, методы принятия решений в условиях определенности, неопределенности, в условиях риска или конфликта, аксиомы теории полезности;

– Уметь: решать задачи принятия решений с помощью математических методов, проводить анализ альтернатив при решении многокритериальных задач оптимизации, решать задачи принятия решений с помощью математических методов;

– Владеть: навыками построения математических моделей задач принятия решений, навыками выбора метода решения задачи принятия решений, навыками построения функции полезности, навыками применения методов теории принятия решений для практических задач, навыками применения методов оценки устойчивости решения задач линейного программирования.

ОДНОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Методы выбора решений в условиях определенности обычно используются в замкнутых моделях, где все альтернативы и их последствия считаются известными. Среди методов решения задач данного класса наиболее распространенным и разработанным является линейное программирование, предусматривающее решение как одноиндексных, так и двухиндексных задач, в которых критерий оптимальности является единственным.

Модели линейного программирования применяются для определения оптимального способа распределения дефицитных ресурсов при наличии конкурирующих потребностей (одноиндексные задачи распределительного типа). В зависимости от числа неизвестных в задаче, решение может быть выполнено двумя методами: графическим или симплексным.

Графический метод.

Графический метод решения задачи линейного программирования основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства.

Рассмотрим применение графического метода для решения распределительных задач линейного программирования с двумя неизвестными x_j, где $j = 1,2$. Все условия задачи выражаются в виде линейных ограничений и записывается целевая функция Z.

Шаг 1. Построение математической модели для распределительной задачи линейного программирования: записывается целевая функция Z, а ограничения задачи записываются в виде линейных неравенств.

Шаг 2. Построение области допустимых значений, в которой одновременно удовлетворяются все ограничения задачи. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом системы координат. Другие границы области допустимых значений изображены на плоскости прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака неравенства ($\leq$, $\geq$) на знак = в остальных ограничениях задачи.

Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам многоугольника решений, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются *допустимыми*.

Шаг 3. Нанесение на график ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях Z, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение (уменьшение).

Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую Z в направлении возрастания (убывания) целевой функции до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых решении. Найденная крайняя точка (или множество точек) будет являться решением задачи линейного программирования.

Шаг 4. Определение координат найденной точки (множества точек).

Рассмотрим применение графического метода решения распределительной задачи линейного программирования на следующем примере.

Задача 1.

Фирма изготавливает и реализует два вида продукции – Р1 и Р2. Для производства продукции используются два вида ресурсов – сырье и труд. Максимальные запасы этих ресурсов в сутки составляют 400 и 450 единиц соответственно. Расход ресурсов на изготовление каждого вида продукции, запасы и оптовые цены продукции приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Ресурсы	Расходы ресурсов на единицу продукции		Запас ресурсов, ед.
	Р1	Р2	
сырье	5	20	400
труд	10	15	450
Оптовая цена, д.е.	45	80	-

Как спланировать выпуск продукции предприятия, чтобы доход от ее реализации был максимальным?

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид. Максимизировать целевую функцию $Z = 45x_1 + 80x_2$ при следующих ограничениях:

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400,$$

$$10x_1 + 15x_2 \leq 450,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \text{ где}$$

x_1 – суточный объем производства продукции Р1 (в делимых ед.),

x_2 – суточный объем производства продукции Р2 (в делимых ед.).

Так как модель содержит только две переменные, задача может быть решена графически.

Графический метод. Искомая область (пространство) решений показана на рис. 1. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом системы координат. Другие границы пространства решений изображены на плоскости x_1, x_2 прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака $\leq$ на знак $=$ в остальных ограничениях задачи. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Полученное таким образом пространство решений – многоугольник $ABCD$ показан на рис. 1.

В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам многоугольника решений *ABCD*, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются **допустимыми**.

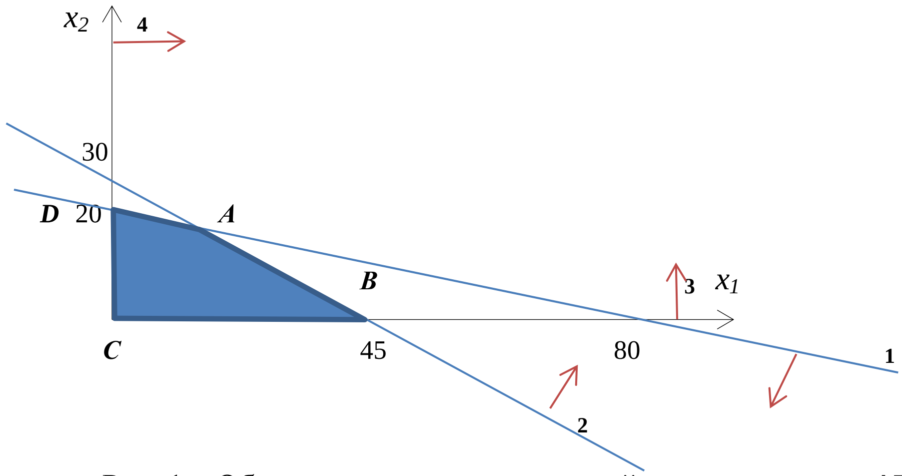


Рис. 1 – Область допустимых значений – многогранник *ABCD*, образованный ограничениями: $5x_1 + 20x_2 \leq 400$ (1), $10x_1 + 15x_2 \leq 450$ (2), $x_1 \geq 0$ (3), $x_2 \geq 0$ (4).

На рис. 2 показано, в каком направлении возрастает целевая функция задачи: $Z = 45x_1 + 80x_2$. На график наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях *Z*, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение. Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую, характеризующую доход, в направлении возрастания целевой функции до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых решений.

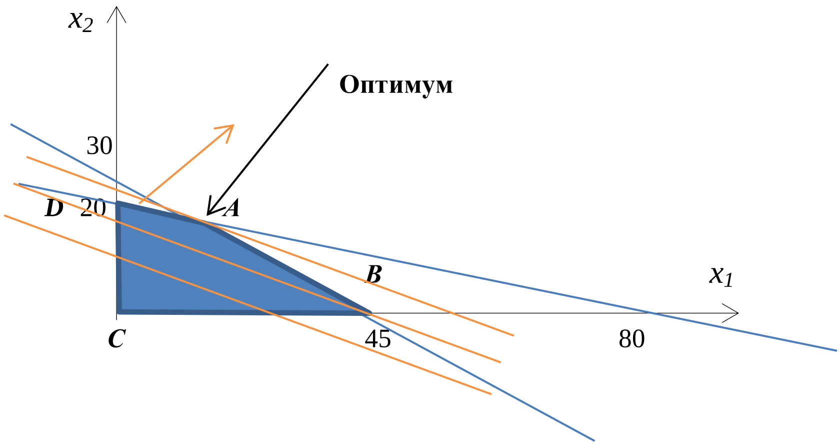


Рис. 2 – Целевая функция: максимизировать $Z = 45x_1+80x_2$.

На рис. 2 видно, что оптимальному решению соответствует точка *A*. Так как точка *A* является точкой пересечения прямых (1) и (2) (рис. 1), значения x_1 и x_2 в точке определяются решением следующей системы двух уравнений:

$$5x_1 + 20x_2 = 400,$$

$$10x_1 + 15x_2 = 450.$$

Решение указанной системы уравнений дает следующий результат: x_1 = 24, x_2 = 14. Поученное решение означает, что суточный объем производства продукции Р1 должен быть равен 24 ед., а продукции Р2 – 14 ед. Доход, получаемый в этом случае, составит Z = 2200 д.е. Задача решена.

Для решения задач с двумя и более неизвестными применяется симплексный метод.

Симплексный метод.

Алгоритм решения включает следующие шаги:

Шаг 1. Все неравенства распределительной задачи приводятся к равенствам. Для этого в левую часть ограничений типа «≤» вводятся дополнительные переменные с коэффициентами «+1», а типа «≥» - с коэффициентами «-1». В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с нулевой оценкой. Получаем расширенную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \\ Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0. \end{cases}$$

Шаг 2. Полученная расширенная система заносится в первую симплексную таблицу. Последняя строка таблицы, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется **оценочной.** В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположным знаком: $b_i = -c_i$. В левом столбце таблицы записываем основные переменные (базис), в первой строке таблицы – все переменные (отмечая при этом основные), во втором столбце – свободные члены расширенной системы $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимых при расчете наибольшего возможного значения переменной. В рабочую часть таблицы (начиная с третьего столбца и второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных из расширенной системы. Далее таблица преобразуется по определенным правилам.

Шаг 3. Проверяем выполнение критерия оптимальности при решении задачи на максимум – наличие в последней строке отрицательных коэффициентов $b_i < 0$ ($c_i > 0$). Если таких нет, то решение оптимально, достигнут max $Z = c_0$ целевой функции (в левом нижнем углу таблицы), основные переменные принимают значения a_{i0} (второй столбец), дополнительные переменные равны нулю, т.е. получаем оптимальное решение. Иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент в последней строке определяет разрешающий столбец s.

Составляются оценочные отношения каждой строки по следующим правилам:

1. ∞, если b_i *и* a_{is} имеют разные знаки,
2. ∞, если $b_i = 0$ *и* $a_{is} < 0$,
3. ∞, если $a_{is} = 0$,
4. 0, если $b_i = 0$ *и* $a_{is} > 0$,
5. $\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$, если b_i *и* a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяем минимальную оценку $\min_i\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума (max Z = ∞). Если минимум конечен, то выбираем строку q, на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее разрешающей строкой. На пересечении разрешающих строки и столбца находится *разрешающий элемент* a_{qs}.

Шаг 5. Переходим к следующей таблице по правилам:

1) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q – переменную x_s;

2) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: 1 – против «одноименной» основной переменной, 0 – против «разноименной» основной переменной, 0 – в последней строке для всех основных переменных;

3) новую строку с номером q получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs};

4) все остальные элементы $\dot{a_{qs}}$ вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\dot{b_i} = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}$$

$$\dot{a_{ij}} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}$$

Далее переходим к шагу 3 алгоритма.

Решим задачу 1 о выпуске продукции Р1 и Р2 симплексным методом.

Приводим систему к расширенному виду:

$$\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 + y_1 = 400, \\ 10x_1 + 15x_2 + y_2 = 450, \\ Z - 45x_1 - 80x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, находим начальное допустимое базисное решение: $y_1 = 400$, $y_2 = 450$.

Переносим коэффициенты ограничений и целевой функции в первую симплексную таблицу:

Таблица 2. Первая симплексная таблица.

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	y_1	y_2	Оценки
y_1	**400**	**5**	**20**	**1**	**0**	**20**
y_2	450	10	**15**	0	1	30
Z	0	-45	**-80**	0	0	-

Разрешающий столбец – x_2 , разрешающая строка – y_1 , значит переменная y_1 выводится из базиса, переменная x_2 вводится в базис. На пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент – 20. Все элементы ведущей строки делим на ведущий элемент, остальные элементы таблицы определяем по «правилу прямоугольника»:

$$\dot{b_2} = 450 - \frac{400 \cdot 15}{20} = 150,$$

$$\dot{a_{21}} = 10 - \frac{5 \cdot 15}{20} = \frac{25}{4},$$

$$\dot{a_{23}} = 0 - \frac{15}{20} = -\frac{3}{4},$$

$$\dot{c_1} = -45 - \frac{80 \cdot 5}{20} = -25,$$

$$\dot{c_3} = \frac{80}{20} = 4,$$

$$\dot{Z} = 0 + \frac{80 \cdot 400}{20} = 1600.$$

Таблица 3. Вторая симплексная таблица.

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	y_1	y_2	Оценки
x_2	20	1/4	1	1/20	0	80
y_2	150	25/4	0	-3/4	1	24
Z	1600	-25	0	4	0	-

Аналогично составляется следующая симплексная таблица.

Таблица 4. Третья симплексная таблица.

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	y_1	y_2	Оценки
x_2	14	0	1	2/25	-1/25	
x_1	24	1	0	-3/25	4/25	
Z	2200	0	0	1	4	-

В симплексной таблице получено оптимальное решение, т.к. в строке Z отсутствуют отрицательные элементы. Значения переменных соответствуют значениям, полученным графическим методом. Задача решена.

Транспортная задача.

Транспортная модель (двухиндексная задача) используется при разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При построении модели используются:

– величины, характеризующие предложение в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;

– стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.

Поскольку рассматривается только один вид продукции, потребности пункта назначения могут удовлетворяться за счет нескольких исходных пунктов. Цель построения модели состоит в определении количества продукции, которое следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения, с тем, чтобы общие транспортные расходы были минимальными.

Решается транспортная задача с помощью **метода потенциалов**. При решении транспортных задач, прежде всего, проверяется условие равенства ресурсов поставщиков потребностям потребителей. Если это условие не выполняется, вводится *фиктивный поставщик или потребитель*. Фиктивные объемы ресурсов или потребностей при этом включается в задачу с нулевыми оценками. Затем заполняется расчетная таблица и составляется первый опорный план, который можно получить несколькими способами: методом «наилучшего» элемента в таблице или методом северо-западного угла.

Более близкий к оптимальному опорный план может быть получен с использованием «наилучшего» элемента в таблице.

Составление первого опорного плана методом «наилучшего» элемента. При этом способе составление плана начинается с клетки с минимальной оценкой при решении задачи на минимум или с максимальной оценкой при решении на максимум. Если в таблице имеется несколько клеток с одинаковыми «лучшими» оценками, то заполняется прежде клетка, в которую можно записать наибольшую поставку. После составления первого опорного плана с помощью алгоритма метода потенциалов производится проверка его на оптимальность и, если план не оптимальный, то осуществляется его улучшение.

Алгоритм метода потенциалов (решение задачи на минимум):

Шаг 1. Для всех заполненных клеток рассчитываются потенциалы по формуле

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

где u_i – потенциалы строк, v_j – потенциалы столбцов, c_{ij} – оценки.

Для расчета потенциалов одному из них вначале придают любое значение. Обычно u_i = 0.

Шаг 2. Для всех свободных клеток рассчитываются характеристики по формуле

$$d_{ij} = c_{ij} – (u_i + v_j),$$

Если в таблице нет ни одной свободной клетки с отрицательной характеристикой, то план считается оптимальным (при решении задачи на максимум план – оптимальный, если нет положительных характеристик). Иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Среди отрицательных характеристик (при решении на максимум среди положительных) выбирается максимальная по абсолютной величине и для клетки с этой характеристикой строится **цепь**. Для этого из выбранной свободной клетки проводится по строке или столбцу прямая линия до занятой клетки, затем под углом 90° линия проводится до следующей занятой клетки и так до тех пор, пока цепь не замкнется в исходной клетке.

Шаг 4. В вершинах цепи, чередуя, проставляются знаки «+» и «–», начиная со свободной клетки. В клетках со знаком «–» выбирается минимальная поставка, которая перераспределяется по цепи: там, где стоит знак «+», она прибавляется, а где «–» – отнимается. Исходная свободная клетка становится занятой, а клетка, в которой выбрана минимальная поставка, свободной. Составляется новый план и рассчитывается значение целевой функции.

Шаг 5. Переходим к шагу 1.

Рассмотрим следующую транспортную задачу.

Задача 2.

Фирма, обслуживающая туристов, прибывающих на отдых, должна разместить их в 4 отелях: «Морской», «Солнечный», «Слава» и «Уютный», в которых забронировано соответственно 5, 15, 15 и 10 мест. Пятнадцать туристов прибывают по железной дороге, двадцать пять прилетают очередным рейсом в аэропорт, а пять человек прибудут на теплоходе на морской вокзал. Транспортные расходы при перевозке из пунктов прибытия в отели приведены в таблице 5.

Таблица 5.

Исходный пункт	Пункт назначения			
	1 - «Морской»	2 - «Солнечный»	3 - «Слава»	4 - «Уютный»
1 - Железнодорожный вокзал	10	0	20	11
2 - Аэропорт	12	7	9	20
3 - Морской вокзал	0	14	16	18

В условиях жесткой конкуренции фирма должна минимизировать свои расходы, значительную часть которых составляют именно транспортные расходы. Требуется определить такой план перевозки туристов из пунктов прибытия в отели, при котором суммарные транспортные расходы будут минимальны и все туристы будут размещены в отелях.

Решим задачу *методом потенциалов*. Заполним расчетную таблицу и составим первый опорный план *методом «наилучшего» элемента* в таблице. Заполнение таблицы начинается с клетки (1,2) с наименьшим транспортным расходом, в которую записывается поставка 15. Затем последовательно заполняются клетки (3,1); (2,3); (2,4).

Таблица 6. Первая таблица транспортной задачи.

Исходный пункт	Пункт назначения				Число туристов в исходном пункте	u_i
	1	2	3	4		
1	– 10 **0**	+ 0 **15**	20	11	15	0
2	12 +	7 – **0**	9 **15**	20 **10**	25	7
3	0 **5**	14	16	18	5	– 10
Число мест в отеле	5	15	15	10	**45**	
v_j	10	0	2	13		

Транспортная задача, для которой суммы чисел в последнем столбце и нижней строке равны, называется *сбалансированной*: 15 + 25 + 5 = 45, 5 + 15 + 15 + 10 = 45. Если транспортная задача не сбалансирована, то в таблицу добавляется еще одна строка или столбец (*фиктивный поставщик или потребитель*). Причем стоимости перевозки в добавленных ячейках принимаются равными нулю.

Условие, что заполненных клеток в таблице должно быть равно m + n – 1 = 3 + 4 – 1= 6, не выполняется. Добавим в свободные клетки (1,1) и (2,2) с наименьшими транспортными расходами нулевые поставки. Количество заполненных ячеек шесть, значит условие выполняется.

Переходим к анализу первого опорного плана. Рассчитываем значение целевой функции: $Z = 0·10 + 15·0 + 0·7 + 15·9 + 10·20 + 5·0 = 335$.

Проверим, является ли план оптимальным, если нет, то «улучшаем» его.

Шаг 1. Рассчитываем значения потенциалов:

$$u_1 = 0; \quad v_1 = 10 – 0 = 10; \quad v_2 = 0 – 0 = 0;$$

$$u_2 = 7 – 0 = 7; v_3 = 9 – 7 = 2; v_4 = 20 – 7 = 13.$$

Шаг 2. Рассчитываем характеристики для свободных клеток:

$d_{13} = 20 – 2 = 18$; $d_{14} = 11 – 13 = – 2$; $d_{21} = 12 – (10 + 7) = – 5$;

$d_{32} = 14 + 10 = 24$; $d_{33} = 16 – (– 10 + 2) = 24$; $d_{34} = 18 – (– 10 + 13) = 15$.

Шаг 3. Максимальная по абсолютной величине отрицательная характеристика в клетке (2,1), для которой строим цепь.

Шаг 4. Проставляем по углам цепи, начиная с выбранной клетки (2,1), знаки «+», «–». В клетках со знаком «–» стоимость поставки 0. Ее перераспределяем по цепи. Там, где стоит знак «+», прибавляем, а где «–», вычитаем. Заполняем следующую расчетную таблицу 7.

Таблица 7. Вторая таблица транспортной задачи.

Исходный пункт	Пункт назначения				Число туристов в исходном пункте	u_i
	1	2	3	4		
1	10	– 0 **15**	20	+ 11	15	0
2	12 **0**	7 + **0**	9 **15**	20 **– 10**	25	7
3	0 **5**	14	16	18	5	– 5
Число мест в отеле	5	15	15	10	**45**	
v_j	5	0	2	13		

Шаг 5. Переходим к шагу 1. Расчеты ведем аналогично. Получена отрицательная характеристика: $d_{14} = 11 - 13 = -2$.

Для клетки (1,4) строим цепь. Перераспределяем по цепи поставку 10. Заполняем таблицу 8 и пересчитываем характеристики.

Таблица 8. Третья таблица транспортной задачи.

Исходный пункт	Пункт назначения				Число туристов в исходном пункте	u_i
	1	2	3	4		
1	10	0 **5**	20	11 **10**	15	0
2	12 **0**	7 **10**	9 **15**	20	25	7
3	0 **5**	14	16	18	5	– 5
Число мест в отеле	5	15	15	10	**45**	
v_j	5	0	2	11		

В расчетной таблице 8 нет отрицательных характеристик, следовательно, план оптимальный. Таким образом, необходимо с железнодорожного вокзала увезти 5 туристов в отель «Солнечный», 10 туристов в отель «Уютный», из аэропорта 10 туристов в отель «Солнечный», 15 туристов в отель «Слава», а с морского вокзала в отель «Морской». Минимальные расходы на перевозку туристов составят $Z = 315$.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В жизни целенаправленная деятельность человека устроена так, что приходится учитывать не одну, а сразу несколько целей. Так, при транспортировке грузов возникают желания организовать перевозку быстро, дешево, надежно. Три сформулированные целевые установки приводят по отдельности к различным трем решениям, а так как цели сами по себе противоречивы, то возникают определенные трудности сравнения этих решений, выбора наилучшего в определенном смысле или какого-то компромиссного. В данном разделе рассмотрим подходы количественного обоснования решения многокритериальных задач оптимизации.

Свертка критериев.

Идея метода состоит в том, чтобы два и более критерия представить в виде единого суперкритерия, т.е. скалярной функции, зависящей от локальных критериев

$$y_0 = y_0(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Наибольшее распространение получил подход определения глобального критерия (суперкритерия) в виде взвешенной суммы критериев:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{y}_i,$$

где $\tilde{y}_i$ – отнормированное значение i–го критерия, α_i – коэффициент относительной важности i –го критерия (весовой коэффициент).

При этом

$$0 \le \alpha_i \le 1;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Весовой коэффициент определяется экспертными методами.

Отнормированные значения $\tilde{y}_i$ требуются, если локальные критерии неоднородны (имеют разную размерность), то есть значения критериев предварительно приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. Наиболее простым способом нормализации является получение оценок по формуле

$$\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\hat{y}_i},$$

где $\hat{y}_i$ – идеальное (возможно максимальное) значение i–го критерия.

Выделение главного критерия.

Среди критериев выбирается основной. А остальные критерии становятся дополнительными ограничениями, по каждому из них лицо, принимающее решение, устанавливает пороговое значение.

Метод последовательных уступок.

Предположим, что частные критерии упорядочены в порядке убывания их важности

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n.$$

Решается задача по самому важному критерию. Получив решение, лицо, принимающее решение, делает некоторую уступку по первому критерию и добавляет ее в качестве дополнительного ограничения. Решается задача по второму критерию с новым ограничением. И так далее для других критериев. На последнем шаге решается задача поиска решения по n-му критерию с учетом уступок по $n-1$ наиболее важным критериям, и решение этой задачи принимается в качестве решения первоначальной.

Рассмотрим использование методов на примере решения задачи определения плана выпуска продукции.

Задача 3.

Пусть мебельная фабрика изготавливает два вида продуктов: столы и шкафы. Для их производства используется три вида ресурсов (пиломатериал, шурупы, краска). Будем считать, что месячные запасы ресурсов ограничены: пиломатериал − величиной 50 м^3, шурупы – 20 кг., краска – величиной 24 кг.

Расходы соответствующих ресурсов на изготовление одной единицы соответствующих продуктов известны и задаются таблицей 9. Прибыль (доход) от выпуска единицы соответствующей продукции задана.

Таблица 9.

Ресурсы	Расходы ресурсов на единицу продукции		Запас ресурсов
	столы	шкафы	
пиломатериал	5	10	50
шурупы	2	8	20
краска	4	6	24
Оптовая цена, д.е.	10	20	

Требуется определить план выпуска продукции каждого вида, максимизирующий доход фабрики. Кроме этой цели, добавим еще одну. Допустим, что нам нужно максимизировать выпуск продукта первого типа — столов, которые идут не на продажу, а для своих нужд.

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид. Максимизировать целевую функцию $Z_1 = 10x_1 + 20x_2$ (первый критерий) и максимизировать выпуск столов $Z_2 = x_1$ (второй критерий) при следующих ограничениях:

$$5x_1 + 10x_2 \le 50,$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 20,$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24,$$

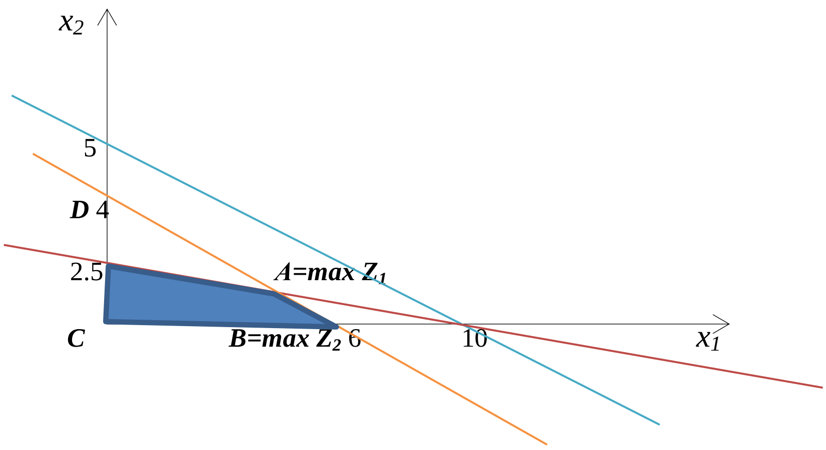
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \text{ где}$$

x_1 – количество производимых столов (в делимых ед.),

x_2 – количество производимых шкафов (в делимых ед.).

Вернемся к графическому способу решения задачи в отдельности по каждому из критериев.

Искомая область (пространство) решений показана на рис. 3. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом системы координат. Другие границы пространства решений изображены на плоскости x_1, x_2 прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака ≤ на знак = в остальных ограничениях задачи. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Полученное таким образом пространство решений – многоугольник *ABCD* показан на рис. 3.



Если решать задачу только с учетом критерия первого вида Z_1, то решение получим в точке A = (36/10, 8/5), а значение критерия Z_1 = 68 рублей.

Если решать задачу без учета критерия первого вида, а только с учетом критерия второго вида, то получим решение в точке B = (6, 0), а значение критерия Z_2 = 6 столов.

Одновременный учет двух критериев приведет к решению, которое лежит на отрезке между точками (решениями) *A* и *B*.

Множество решений на отрезке между *A* и *B* называют **множеством решений, оптимальных по Парето** (оно же компромиссное множество, недоминируемое, эффективное).

Множество компромиссных решений обладает свойством противоречивости: улучшение качества решений по одним критериям вызывает ухудшение качества других.

Рассмотрим решение задачи 3 наиболее часто употребляемыми методами решения многокритериальных задач.

Выделение главного критерия.

В задаче среди двух критериев выбирается основной Z_1. А критерий Z_2 становятся дополнительным ограничением. Установим по критерию пороговое значение $Z_2 \geq 4$.

Тогда математическая модель этой задачи примет следующий вид. Максимизировать целевую функцию $Z_1 = 10x_1 + 20x_2$ (основной критерий) при следующих ограничениях:

$$5x_1 + 10x_2 \leq 50,$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 20,$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24,$$

$$x_1 \geq 4,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \text{ где}$$

x_1 – количество производимых столов (в делимых ед.),

x_2 – количество производимых шкафов (в делимых ед.).

Решение задачи графическим методом аналогично.

Метод последовательных уступок.

Упорядочим критерии согласно их важности, то есть будем в начале работать с критерием Z_1, а затем с критерием Z_2.

Если решать задачу только с учетом критерия первого вида Z_1, то решение получим в точке A =(36/10, 8/5), а значение критерия Z_1 = 68 рублей.

Получив решение по первому критерию, делаем некоторую уступку Δ по первому критерию и добавляем новое ограничение в задачу.

Таким образом получаем задачу, которую решаем по второму критерию с новым ограничением.

Максимизировать целевую функцию $Z_2 = x_1$ при следующих ограничениях:

$$5x_1 + 10x_2 \leq 50,$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 20,$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24,$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 68 - \Delta,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \text{ где}$$

x_1 – количество производимых столов (в делимых ед.),

x_2 – количество производимых шкафов (в делимых ед.),

Δ – размер уступки по критерию, определяет лицо, принимающее решение.

Решение задачи графическим методом аналогично.

Свертка критериев.

Поскольку локальные критерии Z_1 и Z_2 неоднородны (имеют разную размерность), необходимо предварительно привести критерии к единому, безразмерному масштабу измерения.

Отнормированные критерии примут вид

$$\widetilde{Z_1} = \frac{10}{100}x_1 + \frac{20}{100}x_2,$$

$$\widetilde{Z_2} = \frac{1}{10}x_2,$$

Задав коэффициент относительной важности для каждого критерия, запишем целевую функция

$$Z = 0.5\left(\frac{10}{100}x_1 + \frac{20}{100}x_2\right) + 0.5\left(\frac{1}{10}x_2\right) = 0{,}05x_1 + 0{,}15x_2,$$

Тогда математическая модель этой задачи примет следующий вид. Максимизировать целевую функцию $Z = 0{,}05x_1 + 0{,}15x_2$ при следующих ограничениях:

$$5x_1 + 10x_2 \le 50,$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 20,$$

$$4x_1 + 6x_2 \le 24,$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, где

x_1 – количество производимых столов (в делимых ед.),

x_2 – количество производимых шкафов (в делимых ед.).

Решение задачи графическим методом аналогично.

Вообще говоря, в многокритериальных задачах принятия решений понятие оптимальности плана теряется, так как не существует такого плана, который доставлял бы одновременно экстремальное значение отдельным критериям.

ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Необходимость учета неопределенностей, оценки и управления рисками является одной из основных проблем в теории принятия решений. Поэтому для выработки наиболее рациональных решений применяются методы формализованного описания составляющих элементов процесса принятия решений: проблемной ситуации, целей, альтернатив, критериев, исходов.

Неопределенность или недостаток информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления, является характеристикой внешней среды – природы, в которой принимается решение о развитии или функционировании объекта. Для описания неопределенностей чаще всего используется вероятностно-статистический подход, основанный, в первую очередь, на измерении различных величин, используемых в процессе принятия решения.

В случае принятия решений в условиях неопределенности базой является вероятностная модель реального явления или процесса, т.е. математическая модель, в которой объективные соотношения выражены в терминах теории вероятностей. Вероятности используются прежде всего для описания неопределенностей, которые необходимо учитывать при принятии решений.

Наиболее распространенными критериями, использующимися при принятии решений в условиях неопределенности являются: критерий Лапласа, Вальда, Гурвица, Ходжа-Лемана, Гермейера, критерий произведений. Все критерии основаны на следующем допущении: считают, что множество состояний природы S_j конечно, $j = 1,..n$ или, по крайней мере, количество состояний можно пронумеровать. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого решения. Считают также, что множество решений R_i также конечно и равно m. Каждому действию R_i и каждому возможному состоянию природы S_j соответствует исход V_{ij}, определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе i-го действия и реализации j-го состояния.

Критерий Лапласа опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния природы S_j полагаются равновероятными $q_j = 1/n$. Выбор оптимального решения R_i осуществляют по следующему правилу: если исходная матрица – матрица выигрышей, то выбирается

$$\max_{R_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij},$$

если исходная матрица – матрица потерь, то выбирается

$$\min_{R_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij}.$$

Критерий Вальда (минимаксный или максиминный) опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_i. Если в исходной матрице результат V_{ij} представляет выигрыш ЛПР, то при выборе оптимального решения используется максиминный критерий – выбирается

$$\max_i \min_j V_{ij},$$

если исходная матрица – матрица потерь, то используется минимаксный критерий – выбирается

$$\min_i \max_j V_{ij}.$$

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью (1 – α) и в самом выгодном состоянии с вероятностью α, где α – коэффициент доверия. Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами (1 – α) и α, где $0 \leq \alpha \leq 1$. Если в исходной задаче матрица возможных результатов представляет выигрыш, прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица записывается как

$$Z = \max_i \left[\alpha \max_j V_{ij} + (1-\alpha) \min_j V_{ij} \right].$$

Если матрица возможных результатов представляет затраты (потери), то критерий Гурвица записывается как

$$Z = \min_i \left[\alpha \min_j V_{ij} + (1-\alpha) \max_j V_{ij} \right].$$

Поскольку неопределенность порождает риск, матрица рисков может быть построена на основе матрицы исходов V_{ij}. Элементы матрицы рисков связаны с элементами матрицы исходов следующим соотношением:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_i V_{ij} - V_{ij}, \text{если } V \text{ – выигрыш,} \\ V_{ij} - \min\limits_i V_{ij}, \text{если } V \text{ – проигрыш.} \end{cases}$$

Для решения задач в условиях риска могут быть применены вышеизложенные критерии, а также критерий Сэвиджа, в соответствии с которым рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.

$$\min_i \max_j r_{ij}.$$

Рассмотрим применение обозначенных выше критериев на следующем примере.

Задача 4. Телефонная компания должна определить уровень своих возможностей по предоставлению телефонных услуг так, чтобы удовлетворить спрос своих клиентов на планируемый период. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень возможностей телефонной компании (например, с точки зрения возможных затрат на ввод нового тарифа). Отклонения от этих уровней могут приводить к дополнительным затратам. Ниже приводится таблица 10, определяющая возможные прогнозируемые затраты на развитие телефонных возможностей.

Таблица 10.

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	5	10	18	25
R_2	8	7	8	23
R_3	21	18	12	21
R_4	30	22	19	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Критерий Лапласа. Этот критерий предполагает, что S_j равновероятны, т.е. $p = 1/n =$ $= 0{,}25$. Тогда ожидаемые затраты при различных действиях R_1, R_2, R_3, R_4 составляют:

$W(R_1) = 0{,}25 \cdot (5 + 10 + 18 + 25) = 14{,}5$

$W(R_2) = 0{,}25 \cdot (8 + 7 + 8 + 23) = 11{,}5$

$W(R_3) = 0{,}25 \cdot (21 + 18 + 12 + 21) = 18$

$W(R_4) = 0{,}25 \cdot (30 + 22 + 19 + 15) = 21{,}5$

Таким образом, наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2.

Критерий Вальда. Так как V_{ij} представляет потери (затраты), то применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в таблице 11.

Таблица 11.

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги				$\max_j V_{ij}$	$\min_i \max_j V_{ij}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	5	10	18	25	25	
R_2	8	7	8	23	23	
R_3	21	18	12	21	21	21
R_4	30	22	19	15	30	

Наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с минимаксным критерием будет третья R_3.

Критерий Сэвиджа. Заданная матрица определяет потери (затраты). Вычисляем элементы матрицы рисков (таблица 12):

Таблица 12.

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги				$\max\limits_j r_{ij}$	$\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	3	10	10	10	
R_2	3	0	0	8	8	8
R_3	16	11	4	6	16	
R_4	25	15	11	0	25	

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа привели к выбору второй стратегии, обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Критерий Гурвица. Положим $\alpha = 0{,}5$. Результаты необходимых вычислений приведены в таблице 13.

Таблица 13.

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги				$\max\limits_j V_{ij}$	$\min\limits_j V_{ij}$	$\alpha \min V_{ij} + (1-\alpha) \max V_{ij}$	$\min (\alpha \min V_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max V_{ij})$
	S_1	S_2	S_3	S_4				
R_1	5	10	18	25	25	5	15	15
R_2	8	7	8	23	23	7	15	15
R_3	21	18	12	21	21	12	16,5	
R_4	30	22	19	15	30	15	22,5	

Оптимальное решение заключается в выборе первой и второй стратегии.

Таким образом, далее лицу, принимающему решение (ЛПР), в примере предстоит сделать выбор, какое из возможных решений предпочтительнее:

по критерию Лапласа – выбор стратегии R_2,

по критерию Вальда – выбор стратегии R_3,

по критерию Сэвиджа – выбор стратегии R_2,

по критерию Гурвица при $\alpha = 0{,}5$ – выбор стратегии R_1 и R_2.

ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

В настоящее время большинство принимаемых решений, сопряженных с риском, не может быть принято интуитивно, исходя только из предшествующего опыта и здравого смысла. Теория риска представляет собой раздел теории вероятностей, посвященный принятию решений в условиях вероятностной неопределенности. В основе ее лежат понятия риска, меры и цены риска, отношения индивидуума к риску.

Ситуация риска характеризуется следующими признаками:

– наличием неопределенности;

– необходимостью выбора альтернатив действий (при этом нужно иметь в виду, что отказ от выбора также является разновидностью выбора);

– возможностью оценить вероятность осуществления выбранной альтернативы.

На основе вероятностей рассчитываются стандартные характеристики риска: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Описанные выше критерии применяются к нормальному распределению вероятностей, т.к. его важнейшие свойства позволяет существенно упростить анализ.

Критерий среднего значения (математическое ожидание) «выигрыша»:

В критерии ожидаемого значения в качестве оценки эффективности стратегии x принимается математическое ожидание случайной величины выигрыша. Критерий имеет вид

$$W(x) = \int_Z f(x,z)d\omega(z),$$

в случае непрерывной случайной величины z , и

$$W(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x,z_j)q_j,$$

для дискретной случайной величины z. Здесь q_j – вероятность того, что случайная величина z примет значение z_j, $Z = \{z_1,...,z_m\}$, $w(z)$ – функция распределения вероятностей случайной величины z.

Критерий минимума дисперсии.

Выбор стратегии по математическому ожиданию, оказывается, связан с большим риском. Одним из способов оценки риска служит математическое ожидание отклонения случайной величины выигрыша от своего математического ожидания, т. е. дисперсия случайной величины выигрыша.

Действительно,

$$\sigma^2(x) = \int_Z (f(x,z) - W(x))^2 d\omega(z),$$

$$\sigma^2(x) = \sum_i^m (f(x,z_i) - W(x))^2 q_i,$$

дисперсия выигрыша при его стратегии x в случае непрерывной и дискретной случайной величине z соответственно, где q_i – вероятность того, что случайная величина z примет значение z_i, $Z = \{z_1,\dots,z_m\}$, $w(z)$ – функция распределения вероятностей случайной величины z. Таким образом, дисперсия оценивает вероятность отклонения от математического ожидания выигрыша при той же стратегии.

Задача 5. Перед лицом, принимающим решение, стоит цель: перевозка грузов от поставщиков к потребителям автомобильным транспортом (либо по асфальтовой дороге – альтернатива x_1, либо по грунтовой – x_2, либо по гравийной – x_3). При этом в день отправки автомобилей возможно изменение погодных условий, а вместе с ними ожидаемых транспортных расходов (ремонт, бензин и др.) и доходов от доставки грузов. Возможные погодные условия: e_1 – сухая ясная погода, e_2 – кратковременные дожди, e_3 – сильные продолжительные дожди, e_4 – заморозки. Необходимо выбрать маршрут движения автомобилей с учетом погодных условий и ожидаемых доходов от доставки грузов (таблица 14).

Таблица 14

Стратегии	Погодные условия			
	e_1	e_2	e_3	e_4
x_1	100	25	80	64
x_2	70	80	20	120
x_3	60	90	50	30
вероятности	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем оптимальную стратегию по **критерию среднего значения**:

$W(x_1) = 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 25 + 0{,}1 \cdot 80 + 0{,}2 \cdot 64 = 68{,}3$

$W(x_2) = 0{,}4 \cdot 70 + 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}1 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 120 = 78$

$W(x_3) = 0{,}4 \cdot 60 + 0{,}3 \cdot 90 + 0{,}1 \cdot 50 + 0{,}2 \cdot 30 = 62$

Оптимальная стратегия – стратегия x_2, поскольку обеспечивает максимальный средний доход.

Воспользуемся **критерием минимума дисперсии** и оценим риски:

$\sigma^2(x_1) = 0{,}4 \cdot (100 - 68{,}3)^2 + 0{,}3 \cdot (25 - 68{,}3)^2 + 0{,}1 \cdot (80 - 68{,}3)^2 + 0{,}2 \cdot (64 - 68{,}3)^2 = 981{,}81$

$\sigma^2(x_2) = 0{,}4 \cdot (70 - 78)^2 + 0{,}3 \cdot (80 - 78)^2 + 0{,}1 \cdot (20 - 78)^2 + 0{,}2 \cdot (120 - 78)^2 = 714$

$\sigma^2(x_3) = 0{,}4 \cdot (60 - 62)^2 + 0{,}3 \cdot (90 - 62)^2 + 0{,}1 \cdot (50 - 62)^2 + 0{,}2 \cdot (30 - 62)^2 = 456$

Лучший результат дает стратегия x_3.

Данный критерий используется дополнительно при одинаковых средних доходах, найденных по критерию среднего значения.

ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

Принятием решений в условиях конфликтных ситуаций двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других, **занимается теория игр**.

Анализ игровой ситуации начинается с построения формализованной модели. Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его математическую модель, которую называют **игрой**. Математическая модель должна отражать присущие ему черты конфликта, т.е. описывать:

а) множество заинтересованных сторон (игроков),

б) возможные действия каждой из сторон, именуемые также стратегиями или ходами,

в) интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков.

Для каждой игры, как правило, определен набор возможных конечных ее состояний (выигрыш, ничья, проигрыш) и предполагается, что функции выигрыша и множество стратегий, доступных каждому из игроков, общеизвестны, т.е. каждый игрок знает свою функцию выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, а также функции выигрыша и стратегии всех остальных игроков, и в соответствии с этой информацией организует свое поведение.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре.

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе: по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам функций выигрыша, по возможности предварительных переговоров и взаимодействия между игроками в ходе игры. В зависимости *от числа игроков* различают игры с двумя, тремя и более участниками. Согласно другому принципу классификации – *по количеству стратегий* - различают конечные и бесконечные игры. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий. Соответственно, в бесконечных играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий.

Третий способ классификации игр – по *свойствам функций выигрыша* (платежных функций). Важным случаем в теории игр является ситуация, когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. налицо прямой конфликт между игроками. Подобные игры называются **играми с нулевой суммой**, или антагонистическими играми. Игры с ненулевой суммой, где имеются и конфликты, и согласованные действия игроков.

В зависимости от *возможности предварительных переговоров* между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется кооперативной, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется некооперативной.

Для того чтобы решить игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получать максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию устойчивости, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях.

На практике наиболее распространена классификация игр по свойствам функций выигрыша, в которой интересы игроков противоположны и если первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, то второй – минимизировать свой проигрыш. Для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется **критерий минимакса-максимина**.

Если первый игрок применяет стратегию A_i, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, i =1,…,m.

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i, обращается в максимум: $\alpha = \max_i \alpha_i = \min_j a_{ij}$. Величина α называется нижней **ценой игры**. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α, т.е. являющийся гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично определим столбцы матрицы: $\beta_j = \max_i a_{ij}$, j =1,…,n. Найдем минимальное значение β_j: $\beta = \min_j \beta_j = \max_i a_{ij}$.

Величина β называется **верхней ценой игры**. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока, придерживаясь которой он при любых стратегиях противника обеспечит себе проигрыш, не больший β, т.е. это гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Если верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет **седловую точку**. Величина $V = \alpha = \beta$ называется **ценой игры**. Она определяет средний выигрыш игрока A и средний проигрыш игрока B при использовании ими оптимальных стратегий.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя (выбирая) чистые стратегии, т.е. используют смешанную стратегию.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий A_1, A_2,...,A_m с вероятностями p_1,..., p_m причем:

$$p_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{bmatrix}$$

или в виде строки $S_A = (p_1, \dots, p_m)$.

Аналогично смешанные стратегии S_B игрока B обозначаются:

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}$$

или в виде строки $S_B = (q_1, \dots, q_n)$, где

$$q_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Игрок A выбирает стратегию p_i так, чтобы максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш по столбцам платежной матрицы, тогда как игрок B выбирает стратегию q_j с целью минимизации наибольшего ожидаемого проигрыша по строкам.

Справедлива следующая основная теорема теории игр – **теорема Неймана**:

Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется **активной.**

Справедлива теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры V, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

При решении произвольной конечной игры рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока A (игрока B) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 6. Найти решение и цену игры, заданной следующей платежной матрицей:

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \end{vmatrix}.$$

Попробуем найти седловую точку данной платежной матрицы. Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим α_i. Получаем: $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 2$. Выберем максимальное из этих значений $\alpha = 12$ – нижняя цена игры, стратегия A_1.

Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам: $\beta_1 = 32$, $\beta_2 = 22$ и минимальное из этих чисел $\beta = 22$ – верхняя цена игры, стратегия B_1.

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях (седловой точки нет), цена игры находится в промежутке от 12 до 22 (между нижней и верхней ценой игры).

Решим данную игру аналитическим методом. Средний выигрыш первого игрока, если он использует оптимальную смешанную стратегию $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, а второй игрок – чистую стратегию, соответствующую первому столбцу платежной матрицы, равен цене игры V:

$$12\, x_1^* + 32\, x_2^* = V.$$

Тот же средний выигрыш получает первый игрок, если второй игрок применяет стратегию, соответствующую второму столбцу платежной матрицы, то есть

$$22\, x_1^* + 2\, x_2^* = V.$$

Учитывая, что $x_1^* + x_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases} 12\, x_1^* + 32\, x_2^* = V, \\ 22\, x_1^* + 2\, x_2^* = V, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим:

$$\begin{cases} x_1^* = 3/4, \\ x_2^* = 1/4, \\ V = 17. \end{cases}$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании смешанной стратегии второго игрока, получаем, что при любой чистой стратегии первого игрока средний проигрыш второго игрока равен цене игры, то есть:

$$\begin{cases} 12\,y_1^* + 22\,y_2^* = V, \\ 32\,y_1^* + 2\,y_2^* = V, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} y_1^* = 1/2, \\ y_2^* = 1/2, \\ V = 17. \end{cases}$$

Игра решена. Оптимальные смешанные стратегии $X^* = (3/4, 1/4)$, $Y^* = (1/2, 1/2)$, $V = 17$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Один из цехов машиностроительного предприятия выпускает изделия двух видов: корпуса и задвижки. Для производства этих изделий требуются три вида сырья: алюминий, сталь и пластмасса. На выпуск одного корпуса расходуется 20 кг. алюминия, 10 кг. стали и 5 кг. пластмассы. На выпуск одной задвижки расходуется 5 кг. алюминия, 5 кг. стали и 20 кг. пластмассы. Запасы ресурсов ограничены: за рабочую смену цех может израсходовать не более 200 кг. алюминия, 250 кг. стали и 500 кг. пластмассы.

Выпуск одного корпуса приносит предприятию прибыль в размере 100 денежных единиц (д.е.), одной задвижки – 300 д.е. Требуется составить оптимальный план работы цеха, т.е. найти, сколько корпусов и задвижек требуется выпускать, чтобы получить максимальную прибыль (при соблюдении ограничений на ресурсы).

2. Предприятие производит мелкие детали для промышленных изделий и продает их через 5 посреднических фирм по цене 2,50 д.е. за штуку. Коммерческие прогнозы указывают, что объем месячных поставок составит: посреднику 1 – 3000 штук, посреднику 2 – 3000 штук, посреднику 3 – 10 000 штук, посреднику 4 – 5000 штук, посреднику 5 – 4000 штук.

Фирма располагает следующими производственными мощностями: завод 1 производит 5000 деталей в месяц, завод 2 – 10 000 деталей в месяц, завод 3 – 12 500 деталей в месяц.

Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равняется 1 д.е., на заводе 2 – 0,90 д.е., на заводе 3 – 0,80 д.е. Транспортные расходы, связанные с доставкой одной детали в точки оптовой продажи, приведены в таблице 15.

Построить модель линейного программирования с целью определения оптимальных объемов продукции, подлежащих выпуску на каждом заводе данной фирмы, и количества деталей, поставляемых фирмой своим посредникам-оптовикам.

Таблица 15.

Завод	Посредник				
	1	2	3	4	5
1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

3. Для строительства 3-х участков дорожной магистрали необходимо завозить песок. Песок может быть поставлен из 4-х карьеров. Перевозка песка из карьеров до участков осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от карьеров до участков, наличие песка в карьерах и потребность песка на участках дороги приведены в таблице 16.

Таблица 16.

Песчаные карьеры	Участки дороги				Наличие песка, тыс. т.
	1	2	3	4	
1	1	8	2	3	30
2	4	7	5	1	50
3	5	3	4	4	20
Потребность в песке, тыс. т.	15	15	40	30	-

Составить план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

4. Четыре растворных узла потребляют в сутки 170, 190, 230 и 150 т. песка, который отгружается с трех песчаных карьеров. Суточная производительность карьеров равна соответственно 280, 240 и 270 т. песка. Карьеры взимают плату за погрузку песка каждые сутки не с количества отгруженного материала, а с «факта» его отгрузки, куда входит стоимость погрузки, цена песка и транспортные расходы доставки потребителю при закреплении его за карьером. Стоимость перевозки 1 т. песка от карьеров до растворных узлов приведена в таблице 17.

Таблица 17.

Растворные узлы	Карьеры		
	1	2	3
1	9	15	6
2	10	8	9
3	7	4	12
4	5	10	13
Цена 1 т. песка, д.е.	3	29	22
Суточная стоимость погрузки, д.е.	190	250	150

Найти оптимальный вариант закрепления растворных узлов за карьерами.

5. Предприниматель купил на свои сбережения акции четырех компаний. Эффективные процентные ставки доходности акций каждой компании: 16, 20, 24, 12%. Сравнить выгодность покупки для трех вариантов:

a. 1-й компании куплено акций на 50% сбережений, 2-й – на 15, 3-й - на 15, 4-й - на 20%.

b. 1-й - на 30%, 2-й - на 20, 3-й - на 20, 4-й - на 30%.

c. 1-й - на 20%, 2-й - на 30, 3-й - на 15, 4-й - на 35%..

6. При вложении капитала а мероприятие *A* из 100 случаев была получена прибыль: 400 тыс. руб. – в 30 случаях; 200 тыс. руб. – в 40; 250 тыс. руб. – в 30 случаях. При вложении капитала в мероприятие *B* из 120 случаев была получена прибыль: 50 тыс. руб. – в 40 случаях; 100 тыс. руб. – в 15; 150 тыс. руб. – в 20; 220 тыс. руб. – в 25; 300 тыс. руб. – в 20 случаях. Выбрать вариант вложения капитала исходя из средней ожидаемой прибыли.

7. Имеются четыре варианта (проекта) оснащения предприятия современным техническим оборудованием. Определена экономическая эффективность каждого варианта (как

некоторое состояние природы) в зависимости от рентабельности производства в четырех кварталах. Требуется выбрать лучший проект по оснащению предприятия, используя различные критерии (таблица 18).

Таблица 18.

Варианты оснащения	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	8	15	12	11
R_2	10	12	14	15
R_3	6	8	13	14
R_4	5	10	15	12

8. Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия *A*, *B* и *C*, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в таблице 19.

Таблица 19.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг.) на одно изделие			Общее количество сырья (кг.)
	A	*B*	*C*	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	-

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

9. В мэрии рассматриваются три проекта строительства теплопунктов в новом микрорайоне. Затраты по строительству, обслуживанию и развитию в соответствии с четырьмя возможными вариантами развития микрорайона заданы в виде таблицы 20:

10	15	17	9
14	12	10	16
12	13	14	15

Найти проект, минимизирующий затраты.

10. Открывающийся магазин может иметь одну из четырех специализаций. Доходы магазина в зависимости от пяти возможных вариантов рыночной конъюнктуры заданы в таблице 21:

10	14	13	15	20
12	11	14	13	15
7	15	16	17	15
21	19	8	7	9

Определить специализацию, при которой магазин будет иметь наибольшие доходы (в критерии Гурвица положить $\alpha = 3/5$).

11. Спрос на изделие принимает одно из следующих значений: 20; 30; 40; 50. Расходы по изготовлению одного изделия составляют 5 ден. ед. Штраф за нехватку каждого изделия составляет 6 д.е. Составить математическую модель и найти количество выпускаемых изделий, при котором расходы будут минимальны по четырем критериям в условиях неопределенности (α =3/5).

12. При производстве изделий *A* и *B* используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Исходные данные приведены в таблице 22:

Таблица 22.

Тип оборудования	Затраты времени (ч.) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования, ч.
	A	*B*	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Цена изделия, д.е.	14	18	

Найти графическим и симплексным методом план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную выручку от реализации продукции.

13. При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в таблице 23.

Таблица 23.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг.	
	корма 1	корма 2
белки	3	1
углеводы	1	2
протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е. Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость, используя графический и симплексный метод.

14. Построить множество Парето для следующей двухкритериальной задачи:

$$Z_1(x) = 3x_1 + 2x_2,$$

$$Z_2(x) = -x_1 + 3x_2,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15. Швейное предприятие реализуется свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует 900 костюмов и 2000 платьев, а при прохладной погоде – 1300 костюмов и 800 платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны 40 ден. ед., а платья – 15 ден. ед., цена реализации соответственно равна 45 дн. ед. и 15 ден. ед. Составить платежную матрицу игры и решите её.

16. Ателье по пошиву одежды рассчитано на выполнение не более 8 тыс. заявок в год. Будем считать, что поток заявок выражается цифрами 6, 8 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от выполнения одной заявки составляет 8 ден. ед., а потери, вызванные отказом из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 ден. ед., а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходятся в 6 ден. ед. в расчете на каждую заявку. Составить платежную матрицу (матрицу затрат).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Саркисов В.Г. Теория принятия решений. Теория игр. - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2015. – 100с.

2. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений: учебник / А.И. Орлов. — М.: КНОРУС, 2013. — 576 с.

Дополнительная литература

1. Доррер Г.А. Теория принятия решений: Учебное пособие. – Красноярск: ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный технологический университет, 2013. – 180 с.

2. Теория принятия решений: Учебно-методические указания для выполнения практических и самостоятельных работ / Турунтаев Л. П. – 2012. – 42 с.