Министерство высшего образования и науки РФ

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники
Кафедра экономической математики, информатики и статистики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ
по дисциплине «Математические модели управления проектами» и руководство по выполнению

Зав.кафедрой ЭМИС,

д.ф.-м.н., профессор

И.Г.Боровской

Составил: проф каф. ЭМИС В.И. Смагин

Томск -2016

Аннотация

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы студентов по дисциплине "Математические модели управления проектами" для студентов экономических направлений.

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация……………………………………………………………………..2

1. Применение производственной функции для построения модели фирмы….3

2. Межотраслевой баланс. Модель Леонтьева………………………………..10

3. Равновесие на рынке………………………………………………………14

4. Взаимодействие двух фирм на рынке одного товара………………………18

5. Модели экономического равновесия………………………………………..23

Литература……………………………………………………………………31

1. Тема самостоятельной работы:
«Применение производственной функции для построения модели фирмы»

Задание:

В работе необходимо дать определение понятию производственной функции. Рассмотреть свойства производственной функции. Рассмотреть применение производственных функций к задаче построения модели фирмы.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Основные определения. Свойства производственных функций.
2. Конструирование производственных функций.
3. Динамическая модель односекторной экономики.
4. Примеры производственных функций.

Форма отчета:

Опрос. Реферат.

Цель работы:

Самостоятельное изучение теории производственных функций и их применения.

Указания к выполнению. Рассмотрим основные определения и теоремы для производственных функций.

Определение 1. Пусть: $Y \geq 0 -$ валовый продукт (ВП), $K \geq 0 -$ основные фонды (ОФ), $L \geq 0 -$ трудовые ресурсы (ТР). Тогда функция $F(K,L) \geq 0$, определяющая зависимость ВП от ОФ и ТР, т.е.

$$Y = F(K,L),$$

называется производственной функцией (ПФ), а аргументы K и $L -$ факторами производства (ФП).

Определение 2. Если для $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место свойство

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K,L),$$

то ПФ $F(K,L)$ называется однородной ПФ (ОПФ) со степенью однородности γ. Если $\gamma = 1$, то ОПФ $F(K,L)$ называется линейно-однородной ПФ (Л-О ПФ).

Теорема 1. (Теорема Эйлера). Если $F(K,L)$ является ОПФ со степенью однородности γ, то имеет место свойство

$$\gamma F(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} K + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} L. \qquad (1)$$

Определение 3. ПФ $F(K,L)$ называется неоклассической ПФ (НКПФ), если для $K \geq 0$ и $L \geq 0$ она удовлетворяет условиям:

$$
\begin{aligned}
&1^0)\ \ \frac{\partial F}{\partial K}>0,\ \ \frac{\partial F}{\partial L}>0;\\
&2^0)\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0;\\
&3^0)\ \ \lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K}=\infty,\ \ \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L}=\infty;\\
&4^0)\ \ \lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial K}=0,\ \ \lim_{L\to \infty}\frac{\partial F}{\partial L}=0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Определение 4. Пусть $A>0,\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \alpha+\beta=1$.

Тогда ПФ вида

$$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

называется ПФ Кобба–Дугласа (ПФ К.–Д.).

Пример 1. Показать, что ПФ К.–Д. является Л–О НКПФ.

Теорема 2. Пусть $F_i(K,L),\ i=\overline{1,N},$ являются ОПФ со степенями однородности γ_i. Тогда ПФ

$$F(K,L)=\prod_{i=1}^{N}F_i(K,L)$$

являются ОПФ со степенью однородности

$$\gamma=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\ .$$

Основные экономико–математические параметры

Определение 5. Средней производительностью труда (СПТ) называется величина

$$y=F(K,L)/L\ ,$$

т.е. y – это количество валового продукта, приходящегося на единицу ТР.

Определение 6. Средней фондоотдачей (СФ) называется величина

$$z=F(K,L)/K\ ,$$

т.е. z – это количество валового продукта, приходящегося на единицу ОФ.

Определение 7. Фондовооруженностью труда (ФТ) называется величина

$$k=K/L,$$

т.е. k – это количество ОФ, приходящееся на единицу ТР.

Определение 8. Предельной производительностью труда (ППТ) или нормой прибыли с ТР (НПТР) называется величина

$$\upsilon=\partial F(K,L)/\partial L\ ,$$

т.е. υ – это прирост ВП, приходящийся на единицу прироста ТР.

Определение 9. Предельной фондоотдачей (ПФО) или нормой прибыли с ОФ (НПОФ) называется величина

$$r=\partial F(K,L)/\partial K\ , \tag{3}$$

т.е. r – это прирост ВП, приходящийся на единицу ОФ.

Пусть при заданном K прирост ТР, равный ΔL, вызывает прирост ВП, равный ΔF. Тогда, согласно (2), $\upsilon = \Delta F / \Delta L$. Пусть при заданном L прирост ОФ, равный ΔK, вызывает прирост ВП, равный ΔF. Тогда, согласно (12), $r \cong \Delta F / \Delta K$. Таким образом, экономический смысл параметров υ и r очевиден.

Пример 2. Для ПФ К.–Д. найти y, z, υ, r. Показать, что для нее имеют место свойства

$$\upsilon < y, \ \ r < z, \tag{4}$$

т.е. предельная производительность труда и предельная фондоотдача для ПФ К.–Д. меньше соответственно для средней производительности труда и средней фондоотдачи.

Очевидно, что

$$Y_K = \frac{\partial F}{\partial K} K, \ \ Y_L = \frac{\partial F}{\partial L} L, \tag{5}$$

являются соответственно доходами, полученными с ОФ и ТР. Тогда для Л–О ПФ, согласно (3), (5), следует, что

$$F(K,L) = Y_K + Y_L .$$

Таким образом, теорема Эйлера для Л–О ПФ дает представление ВП в виде суммы Y_K и Y_L.

Определение 10. Коэффициентом эластичности по фондам (КЭФ) называется величина

$$\alpha = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \frac{K}{F(K,L)} \quad ,$$

т.е. α – это процентный прирост ВП, приходящийся на один процент прироста ОФ.

Определение 11. Коэффициентом эластичности по трудовым ресурсам (КЭТР) называется величина

$$\beta = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \frac{L}{F(k,L)} \quad .$$

т.е. β – это процентный прирост ВП, приходящийся на один процент прироста ТР.

Справедливость следующих двух формул очевидна

$$\alpha = r / z, \ \ \beta = \upsilon / y .$$

Пример 3. Показать, что параметры α и β ПФ К.–Д. являются коэффициентами эластичности соответственно по фондам и трудовым ресурсам.

Теорема 3. Пусть $F(K,L)$ являются Л–О ПФ со степенью однородности γ. Тогда имеет место свойство

$$\alpha + \beta = \gamma .$$

Определение 12. Пусть $F(K,L)$ – ОПФ со степенью однородности γ. Тогда соотношению $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K,L)$ эквивалентно соотношение

$$y = L^{\gamma - 1} f(k),$$

где $y = Y / L, \ k = K / L$ – соответственно средняя производительность труда и фондовооруженность труда (см. (3), (4)), а $f(k) \geq 0$ для $k \geq 0$ имеет вид

$$f(k) = F(k,1).$$

Очевидно, что неоклассические условия (см. (4)) для $f(k)$ имеют вид (здесь и далее штрихи, как правые верхние индексы, означают производные соответствующего порядка по k)

$$1^0)\ f'(k) > 0;$$

$$2^0)\ f''(k) < 0;$$

$$3^0)\ \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty;$$

$$4^0)\ \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0.$$

Теорема 4. Если $F(K,L)$ – ОПФ со степенью однородности γ, то $F(K,L)$ и $f(k)$ связаны соотношениями

$$F(K,L) = L^{\gamma} f(k).$$

Теорема 5. Экономико–математические параметры $z, \upsilon, r, \alpha, \beta$ для ОПФ определяются формулами

$$z = (1/k)L^{\gamma-1} f(k),$$

$$\upsilon = L^{\gamma-1}[\gamma\, f(k) - kf'(k)],$$

$$r = L^{\gamma-1} f'(k),$$

$$\alpha = k[f'(k)/f(k)],$$

$$\beta = \gamma - k[f'(k)/f(k)].$$

Теорема 6. Если $F(K,L)$ – Л–О ПФ, то r является убывающей, а υ – возрастающей функцией фондовооруженности k.

Теорема 7. Если хотя бы один из коэффициентов эластичности α либо β не зависит от фондовооруженности k, то Л–О ПФ является ПФ Кобба–Дугласа.

Эластичность замены факторов

Пусть фактор K получил приращение ΔK. Ставится вопрос: на какую величину ΔL должен уменьшиться фактор L, чтобы величина валового продукта не изменилась. Справедлив и обратный вопрос. Таким образом, основное соотношение для решения поставленного вопроса замены одного фактора производства другим имеет вид

$$\Delta Y = \Delta F(K,L) = \frac{\Delta F}{\Delta K}\Delta K + \frac{\Delta F}{\Delta L}\Delta L = 0.$$

В пределе получаем

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} dL = 0.$$

Определение 13. Предельные нормы замены трудовых ресурсов основными фондами S_K и основных фондов трудовыми ресурсами S_L определяются как

$$S_K = -\frac{dK}{dL}, \quad S_L = -\frac{dL}{dK},$$

и выражаются формулами

$$S_K = \frac{\partial F(K,L)/\partial L}{\partial F(K,L)/\partial K} = \frac{\upsilon}{r}, \quad S_L = \frac{\partial F(K,L)/\partial K}{\partial F(K,L)/\partial L} = \frac{r}{\upsilon}.$$

Пример 4. Показать, что для ПФ К.–Д. предельные нормы замены имеют вид

$$S_K = \frac{\beta}{\alpha}k, \quad S_L = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{k}.$$

Теорема 8. Произведение предельных норм замены равно единице, т.е.

$$S_K S_L = 1.$$

Теорема 9. Если ПФ является ОПФ со степенью однородности γ, то имеют место формулы

$$S_K = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k, \quad S_L = \frac{f'(k)}{\gamma f(k) - kf'(k)}.$$

Определение 14. Эластичностью замены σ_K фактора L фактором K называется процентное изменение фактора K, вызывающее изменение предельной нормы замены S_K на один процент. Эластичностью замены σ_L фактора K фактором L называется процентное изменение фактора L, вызывающее изменение предельной нормы замены S_L на один процент.

Согласно определению

$$\sigma_K = \left(\frac{dS_K}{dk}\frac{k}{S_K}\right)^{-1},$$

$$\sigma_L = \left(-\frac{dS_L}{dk}\frac{k}{S_L}\right)^{-1} = \left(\frac{dS_L}{dk^{-1}}\frac{k^{-1}}{S_L}\right)^{-1}.$$

Теорема 10. Для ОПФ со степенью однородности γ имеет место свойство $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$, которая определяется формулой

$$\sigma = \frac{f'(k)[\gamma\, f(k) - kf'(k)]}{k[(\gamma-1)(f'(k))^2 - \gamma\, f(k) f''(k)]}.$$

Пример 5. Показать, что для ПФ К.–Д. $\sigma = 1$.

Теорема 11. Для того, чтобы норма замены S_K либо S_L Л–О ПФ не зависела от фондовооруженности k, необходимо и достаточно, чтобы она была линейной, т.е.

$$F(K,L) = AK + BL, \quad f(k) = Ak + B.$$

Случай произвольного числа факторов производства

Если $x_i \ge 0,\ i = \overline{1;n}$, являются факторами производства, то функция $F(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$, определяющая валовый продукт Y через факторы производства, т.е.

$$Y = F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

называется производственной функцией (ПФ).

Определение 15. Если для $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место свойство

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^\gamma F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

то ПФ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется однородной ПФ (ОПФ) со степенью однородности γ. Если $\gamma = 1$, то ОПФ называется линейно–однородной ПФ (Л–О ПФ).

Теорема 12. (Теорема Эйлера). Если $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является ОПФ со степенью однородности γ, то имеет место свойство

$$\gamma F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i \,. \qquad (6)$$

Определение 16. ПФ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется неоклассической ПФ (НКПФ), если для $x_i \geq 0,\ i = \overline{1; n}$, она удовлетворяет условиям

$$1^0)\ \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} > 0;$$

$$2^0)\ \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i^{\,2}} < 0;$$

$$3^0)\ \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \infty;$$

$$4^0)\ \lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = 0.$$

Определение 17. Пусть константы $A,\ \alpha_i,\ i = \overline{1; n}$, такие, что

$$A > 0;\ \ 0 < \alpha_i < 1;\ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,.$$

Тогда ПФ вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = A x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}$$

называется ПФ Кобба–Дугласа (ПФ К.–Д.).

Определение 18. Средней производительностью фактора x_i называется величина

$$y_i = \frac{F(x_1, x_2, ..., x_n)}{x_i},\ \ i = \overline{1; n}\,,$$

т.е. y_i – это количество валового продукта, приходящегося на единицу фактора x_i.

Определение 19. Фондовооруженностью фактора x_j относительно фактора x_i называется величина

$$r_{ij} = \frac{x_i}{x_j}\,,$$

т.е. r_{ij} – это количество фактора x_i, приходящегося на единицу фактора x_j.

Определение 20. Предельной производительностью фактора x_i или нормой прибыли с фактора x_i называется величина

$$\upsilon_i = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}\,,$$

т.е. υ_i – это прирост ВП, приходящийся на единицу прироста фактора x_i.

Очевидно, что

$$Y_i = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} x_i$$

является доходом, полученным за счет фактора x_i. Тогда для Л–О ПФ, согласно (6),

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} Y_i ,$$

т.е. для Л–О ПФ теорема Эйлера дает представление ВП в виде суммы Y_i.

Определение 21. Коэффициентом эластичности по фактору x_i называется величина

$$\alpha_i = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{F(x_1, x_2, ..., x_n)},$$

т.е. α_i – это процентный прирост ВП, приходящийся на один процент прироста фактора x_i.

Теорема 13. Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является ОПФ со степенью однородности γ. Тогда имеет место свойство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \gamma .$$

Теорема 14. Пусть

$$\begin{aligned} &F(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}) = \\ &= f(k_{1,i}, k_{2,i}, ..., k_{i-1,i}, 1, k_{i+1,i}, ..., k_{n,i}) = f_i(\cdot) \end{aligned}.$$

Тогда

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i^{\gamma} f_i(\cdot),$$

$$y_i = x_i^{\gamma - 1} f_i(\cdot),$$

$$\upsilon_i = x_i^{\gamma - 1} [\gamma\, f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} k_{j,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{j,i}}],$$

$$\upsilon_j = x_i^{\gamma - 1} \frac{\partial f_i}{\partial k_{j,i}},$$

$$\alpha_i = \gamma - \sum_{j \neq i} k_{j,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{j,i}} \cdot \frac{1}{f_i(\cdot)},$$

$$\alpha_j = k_{j,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{j,i}} \cdot \frac{1}{f_i(\cdot)}.$$

Определение 22. Предельной нормой замены $S_{i,j}$ фактора x_j фактором x_i называется величина

$$S_{i,j} = -\frac{dx_i}{dx_j},$$

которая определяется формулой

$$S_{i,j} = \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n) / \partial x_j}{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n) / \partial x_i} = \frac{\upsilon_j}{\upsilon_i}.$$

Теорема 15. Предельная норма замены имеет представление

$$S_{i,j} = \frac{\partial f_i(\cdot)/\partial k_{j,i}}{\gamma f_i(\cdot) - \sum_{m \neq i} k_{m,i} \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial k_{m,i}}}.$$

Теорема 23. Произведение предельных норм замены $S_{i,j}$ и $S_{j,i}$ равно единице, т.е.

$$S_{i,j} S_{j,i} = 1.$$

Дополнительные справочные сведения по теме:
Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

2. Тема самостоятельной работы:
«Межотраслевой баланс. Модель Леонтьева»

Задание:
В работе необходимо изложить сущность метода межотраслевого баланса в зада чах планирования экономики.

Рекомендуемый план выполнения работы:
1. Статическая модель Леонтьева.
2. Анализ продуктивности модели Леонтьева.
3. Учет ограничений на трудовые ресурсы.
4. Модель международной торговли.

Форма отчета:
Опрос. Реферат.

Цель работы:
Самостоятельное изучение метода межотраслевого баланса.

Указания к выполнению. В модели Леонтьева принимается следующая идеализация. Вся экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой вид продукции. Продукция считается достаточно однородной (например, электроэнергия, уголь, черная металлургия и т.д.), чтобы её выпуск можно было оценить в натуральной форме (количество киловатт-часов электроэнергии, тонн угля, тонн чугуна и стали и т.д.) или в денежной форме. В первом случае говорят о натуральном балансе, во втором – о стоимостном.

Пусть мы подводим итоги работы, скажем, за год. Пусть v_i это общий объём продукции (валовый выпуск) i-й отрасли. Куда он девался?

Часть этой продукции, равная c_i, пошла на потребление в непроизводственной сфере. Кроме того, продукция i-й отрасли потреблялась и другими отраслями. Обозначим через a_{ij} объём продукции i-й отрасли потреблённой j-й отраслью. Тогда эти данные можно свести в следующую таблицу:

от- расль	валовый выпуск	потреб- ление	потребление в других отраслях				
1	v_1	c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
2	v_2	c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
n	v_n	c_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	…	a_{nn}

Очевидно, что имеет место следующее соотношение:

$$v_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

которое называется уравнением баланса.

Величины $a_{ij} = a_{ij} / v_j$ представляют собой объём продукции i-й отрасли, необходимый для производства единицы продукции j-й отрасли. Они называются коэффициентами прямых затрат и играют в дальнейшем изложении ключевую роль.

Очевидно, что все $c_i \geq 0$ и все $a_{ij} \geq 0$.

Представим себе, что мы планируем производство продукции на следующий год и хотим запланировать i-й отрасли выпуск продукции в объёме x_i. Сделаем два важных предположения для составления такого плана.

1. Технология производства в следующем году не потерпит существенных изменений. Это проявится в том, что в следующем году коэффициенты прямых затрат a_{ij} останутся теми же самыми, что и в этом году.

2. Технология производства обладает свойством линейности. Это означает, что если j-й отрасли запланировать выпуск продукции в объёме x_j, то для этого потребуется израсходовать $a_{ij} \cdot x_j$ продукции i-й отрасли.

Пусть x_i – планируемый выпуск продукции i-й отрасли и c_i – планируемый объём потребления этой отрасли в непроизводственной сфере. Тогда, по аналогии с (5.1), можно записать следующее условие баланса

$$x_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j. \tag{2}$$

Перейдём к векторно-матричным обозначениям. Пусть

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,$$

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T,$$

$$\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Тогда уравнение баланса (2) примет вид

$$\bar{x} = \bar{c} + \mathbf{A}\bar{x} \tag{3}$$

Эта модель экономики и называется моделью Леонтьева.

Продуктивность модели Леонтьева. Пусть основным в нашем планировании является будущий объём потребления в непроизводственной сфере $\vec{c}$ и нам необходимо знать, какое производство продукции по отраслям необходимо запланировать для обеспечения этого потребления. Перепишем (3) в виде

$$\vec{x} - \mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}, \tag{4}$$

откуда получаем, что

$$\vec{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\vec{c}, \tag{5}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерности $n \times n$.

Но тут возникает одна чисто математическая трудность. Очевидно, что $\vec{c} \geq 0$ (то есть $\forall i = \overline{1,n} \quad c_i \geq 0$). Очевидно, что вектор $\vec{x}$ также должен удовлетворять этому же ограничению, то есть должно быть $\vec{x} \geq 0$, так как выпуск отрицательного объёма продукции отраслью невозможен. Но будет ли решение (5) удовлетворять этому условию?

Определение. Если **для любого** вектора $\vec{c} \geq 0$ вектор $\vec{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\vec{c}$ также удовлетворяет условию $\vec{x} \geq 0$, то говорят, что модель Леонтьева **продуктивна** (матрица прямых затрат $\mathbf{A}$ продуктивна).

Условия продуктивности модели Леонтьева сформулируем следующим образом:

Модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$. Здесь λ_A максимальное положительное собственное число матрицы **A.**

Замечание. Отметим одну важную для дальнейшего особенность матрицы $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{R}$. Она состоит в том, что, в случае неразложимости матрицы $\mathbf{A}$, матрица $\mathbf{R}$ **строго положительна**, то есть все её элементы $r_{ij} > 0$. Действительно, если $a_{ij} > 0$, то, согласно (8), и $r_{ij} > 0$. Если же $a_{ij} = 0$, то, как уже указывалось ранее, найдётся такая цепочка символов $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r$, в которой $i_1 = i,\ i_r = j$, что $\forall l = \overline{1, r-1} \quad a_{i_l i_{l+1}} > 0$. Но это означает, что элемент $a_{ij}^{(r)}$ матрицы $\mathbf{A}^r$ строго больше нуля, а, значит, и $r_{ij} > 0$.

Это приводит к тому, что вектор $\vec{x} > 0$ если $\vec{c} \geq 0, \quad \vec{c} \neq 0$.

Это утверждение и даёт необходимое и достаточное условие продуктивности модели Леонтьева, пользоваться ей достаточно сложно, так как нахождение числа Фробениуса матрицы большой размерности – сложная вычислительная задача. Поэтому рассмотрим достаточные условия продуктивности модели Леонтьева.

Изложенная выше модель Леонтьева неудовлетворительна в том смысле, что она не учитывает ограничений, которые неизбежно имеют место в реальной жизни. Одним из таких ограничений являются ограничения на трудовые ресурсы.

Пусть l_i есть затраты трудовых ресурсов (измеряемые, например, в человеко-часах) в i-й отрасли при производстве единицы продукции. Вектор $\vec{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)^T$ мы будем называть вектором трудовых затрат. Тогда, если плановый выпуск в i-й отрасли равен x_i, то суммарный объём трудовых затрат будет равен

$$\sum_{i=1}^{n} l_i x_i = \bar{l}^T \bar{x} .$$

В качестве ограничения на все планы должно выполняться ограничение на трудовые ресурсы вида

$$\bar{l}^T \bar{x} \le L$$

где L – имеющийся в нашем распоряжении объём трудовых ресурсов.

В этом случае, очевидно, нельзя требовать достижимости любого вектора потребления $\bar{c}$. Пусть вектор потребления $\bar{c}_0$ задаёт не конечный спрос, а лишь его структуру. Можно считать, например, что $\|\bar{c}_0\| = 1$, а само потребление равно $\alpha\bar{c}_0$. Тогда естественно задачу планирования экономики записать в виде

$$\begin{cases} \alpha \Rightarrow \max\limits_{\bar{x},\alpha}, \\ \bar{x} - \mathbf{A}\bar{x} \ge \alpha\bar{c}_0, \\ \bar{l}^T \bar{x} \le L, \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \tag{8}$$

которая является типовой задачей линейного программирования. Смысл первого ограничения очевиден – на потребление должно остаться не меньше, чем требуется структурой потребления, определяемой вектором $\bar{c}_0$. Второе ограничение учитывает ограниченность трудовых ресурсов. Написанная выше задача и называется моделью Леонтьева при ограничениях на трудовые ресурсы и её смысл, в частности, состоит а рациональном распределении этих самых трудовых ресурсов. Эластичность выпуска продукции в модели Леонтьева. В этом случае мы рассматривается следующая ситуация. Пусть в модели Леонтьева имеются два вектора потребления $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ и $\bar{c}' = (c_1', c_2, \ldots, c_n)^T$, различающихся только компонентой c_1 и c_1', причем для определённости будем полагать, что $c_1' > c_1$.Насколько сильно различаются векторы $\bar{x}(\bar{c})$ и $\bar{x}(\bar{c}')$?

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

3. Тема самостоятельной работы:

«Равновесие на рынке»

Задание:

Изложить сущность рынка рабочей силы, рынка денег и рынка товаров. Законы Вальраса.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Основные понятия аксиомы.
2. Равновесие на рынке.
3. Объединенная модель рынков.

4. Схемы экономики по Вальрасу.

Форма отчета:

Опрос. Реферат.

Цель работы:

Самостоятельное изучение метода межотраслевого баланса.

Указания к выполнению. На рынке действуют очень много фирм и очень много потребителей, причем фирма, как правило, выступает и как производитель товаров и как потребитель товаров, созданных другими фирмами. Общую схему товарных потоков можно пояснить следующим образом. От фирм потребителям идут товары и услуги, от потребителей, часть из которых также является фирмами, также идут товары, в том числе первичные товары, такие, как труд, земля и т.д.

Чтобы написать модель такого взаимодействия фирм и потребителей, нам необходимо в абстрактной форме изложить некоторые понятия, о которых рассказывалось выше.

Пусть $u(\bar{x})$ есть функция полезности какого-то потребителя. В общем случае, максимум этой функции может быть не единственным. В этом случае вводится так называемая функция спроса.

Пусть фиксирован вектор цен $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)^T$ и капитал потребителя равен I. Значения количеств товара $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ могут принимать значения из некоторого множества X (x_i не обязательно любые).

Обозначим через $\hat{X}(\bar{p})$ множество

$$\hat{X}(\bar{p}) = \left\{ \bar{x}\colon \bar{x} \in X,\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I \right\},$$

то есть $\hat{X}(\bar{p})$ есть множество тех товаров, которые потребитель может купить на свой капитал I.

Функцией спроса называется множество

$$\Phi(\bar{p}) = \begin{cases} \bar{x}\colon \bar{x} \in \hat{X}(\bar{p}), \quad u(\bar{x}) = \max\limits_{\bar{x}' \in \hat{X}(\bar{p})} u(\bar{x}'), & \text{если max достигается,} \\ \varnothing & \text{в противном слу ае.} \end{cases}$$

Другими словами, функция спроса $\Phi(\bar{p})$ есть множество тех комбинаций товаров, которые потребитель может приобрести за свой капитал I при заданном векторе цен $\bar{p}$, максимизируя свою полезность $u(\bar{x})$.

В общем случае фирма потребляет товары $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и на их основе производит другие товары $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. К товарам относятся и первичные товары, такие, как труд, земля, полезные ископаемые и т.д. Только не следует думать, что фирма потребляет и производит **все** товары. Просто в тех компонентах векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, которые фирма не потребляет или не производит, стоят нули.

Таким образом, технологический процесс фирмы есть отображение $\bar{x} \to \bar{y}$ (потреблённых товаров в произведённые). Такое технологическое отображение и называется фирмой, и технология фирмы есть

$$\bar{y} \in F(\bar{x})$$

(отображение не обязательно однозначное). $F(\bar{x})$ называется производственной функцией.

Рассмотрим множество

$$Y = \{\bar{y} - \bar{x}: \ \bar{x} \in X, \bar{y} \in F(\bar{x})\}.$$

Разность $\bar{y} - \bar{x}$ означает, что товары $\bar{y}$ произведены (прибыли), а товары $\bar{x}$ использованы (убыли). Это множество называется технологическим отображением. Элементы множества Y называются планами.

Прибыль фирмы равна

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - x_i)$$

и мы стремимся её максимизировать. Тогда

$$\Psi(\bar{p}) = \left\{ \bar{z} \in Y: \ \bar{p}^T \bar{z} = \max_{\bar{z}' \in Y} (\bar{p}^T \bar{z}') \right\}$$

есть множество оптимальных планов. Это множество называется функцией предложения фирмы.

В модели экономики Вальраса рассматривается экономика с

– l потребителями с функциями спроса $\Phi_i(\bar{p}), \ i = \overline{1,l}$;

– m производителями с функциями предложения $\Psi_j(\bar{p}), \ j = \overline{1,m}$;

– n типами товаров.

Кроме того, каждый потребитель характеризуется функцией дохода в виде

$$I_i(\bar{p}) = \bar{p}^T \vec{b}_i + K_i(p).$$

Первое слагаемое в этом выражении есть тот доход, который потребитель получает от продажи каких-то товаров (своего труда, сдачи земли в аренду и т.д.), а второе слагаемое есть доход, возникающий в результате участия в доходах производственного сектора (дивиденды по акциям и т.п.).

Назовём совокупным технологическим множеством сумму

$$Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$$

(под выражением $\sum_{k=1}^{m} Y_k$ понимается множество векторов вида

$$\sum_{k=1}^{m} Y_k = \left\{ \bar{y}: \ \bar{y} = \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k, \ \bar{y}_k \in Y_k \right\}),$$

и функцией совокупного предложения производственного сектора – сумму

$$\Psi_0(\bar{p}) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(\bar{p}).$$

Пусть

$$\Psi_0(\bar{p}) = \left\{ \bar{y}:\ \bar{y} \in Y,\ \bar{p}^T \bar{y} = \max_{\bar{y}' \in Y} (\bar{p}^T \bar{y}') \right\},$$

то есть $\bar{\Psi}_0(\bar{p})$ была бы функцией предложения, если бы все фирмы работали как некоторое единое целое и весь производственный сектор был бы единой фирмой.

Теорема. $\Psi_0(\bar{p}) = \Psi_0(\bar{p})$.

Смысл этого утверждения заключается в том, что каждый производитель, максимизируя свой доход независимо от всех остальных производителей и стремясь только к своей собственной выгоде максимизирует и доход общества в целом.

Однако не следует придавать этому утверждение какой-то глубокий философский смысл. Это утверждение, во-первых, привязано к критерию оптимальности – доходу, а всё-таки деньги – не единственное, что определяет нашу жизнь. Во-вторых, это утверждение верно лишь при фиксированных ценах.

Законы Вальраса. Будем считать, что весь доход производственного сектора делится между отдельными производителями. Это значит, что

$$\forall \bar{y} \in \Psi_0(\bar{p}) \quad \bar{p}^T \bar{y} = \sum_{i=1}^{l} K_i(\bar{p}).$$

Назовём функцией совокупного спроса многозначное отображение

$$\Phi(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(\bar{p}).$$

Включим в товары также и товары потребителей $\bar{b}_i$. Тогда функция совокупного предложения имеет вид

$$\Psi(\bar{p}) = \bar{b} + \sum_{i=1}^{l} \Psi_i(\bar{p}), \quad \bar{b} = \sum_{i=1}^{l} \bar{b}_i.$$

Утверждение. Для функций $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ имеет место соотношение

$$\forall \bar{x} \in \Phi(\bar{p}) \quad \forall \bar{y} \in \Psi(\bar{p}) \quad \bar{p}^T \bar{x} \le \bar{p}^T \bar{y}.$$

Примечание: это соотношение называется законом Вальраса в широком смысле.

Оптимальное свойство конкурентного равновесия. Пусть имеется l потребителей и X_i, $i = \overline{1,l}$ обозначают множества, на которых определены функции полезности $u_i(\bar{x})$ соответствующих потребителей и $X = \prod_{i=1}^{l} X_i$ есть декартово произведение множеств X_i. Кроме того, пусть на множестве X выделено некоторое подмножество $X_0 \subset X$, которое называется множеством допустимости. Набор векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} = \mathbf{x}$, где $\bar{x}_i \in X_i$, $i = \overline{1,l}$ назовается допустимым или распределением, если $\mathbf{x} \in X_0$.

Заметим, что в модели Вальраса множество допустимости имеет вид

$$X_0 = \left\{ \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l\}:\ \exists \bar{y} \in Y,\ \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \le \bar{b} + \bar{y} \right\},$$

так как нельзя приобрести больше того, что произведено и что имеется у потребителей в качестве первичных товаров.

Будем предполагать также, что потребители ненасыщаемы; это означает, что при отсутствии ограничений на капитал функция полезности каждого потребителя не имеет максимума, и запросы потребителей в этой гипотетической ситуации неограничены.

Определение. Распределение $\left\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\right\} = \mathbf{x}$ называется оптимальным по Парето, если не существует такого распределения $\left\{\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \ldots, \bar{x}'_n\right\} = \mathbf{x}'$ для которого

1. $\forall i = \overline{1,l} \quad u_i(\bar{x}'_i) \geq u_i(\bar{x}_i)$,
2. $\exists j = \overline{1,l} \quad u_j(\bar{x}'_j) > u_j(\bar{x}_j)$.

Смысл этого определения заключается в том, что нельзя сделать так, чтобы
1. хотя бы одному стало лучше (п. 2),
2. всем остальным не стало хуже (п. 1).

Рассмотрим это свойство для частного случая модели Вальраса, которая носит название модели Эрроу-Дебре. В этой модели предполагается, что

$$I_i(\bar{p}) = \bar{p}^T \bar{b}_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot (\bar{p}^T \bar{y}_j),$$

где $\bar{b}_i$ – начальный запас товаров i-го потребителя, α_{ij} – доля доходов j-го производителя, которую получает i-й потребитель $\left(\alpha_{ij} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1\right)$, $\bar{y}_j$ – план j-го производителя. Таким образом, капитал потребителя складывается из продажи начального запаса своих товаров (своего труда, сдачи земли в аренду и т.д.) и участия в прибыли производственного сектора.

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

4. Тема самостоятельной работы:

«Взаимодействие двух фирм на рынке одного товара»

Задание:

Необходимо изложить теорию взаимодействия 2-х фирм на рынке одного товара для линейной модели ценообразования.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Постановка задачи.
2. Стратегия Курно. Динамика стратегии Курно.
3. Стратегия Стакельберга.
4. Метод Парето.
5. Арбитраж по Нэшу.

Форма отчета:

Опрос. Реферат.

Цель работы:

Самостоятельное изучение теории взаимодействия двух фирм на рынке одного товара

Указания к выполнению. Случай, когда существует несколько производителей (продавцов), называется олигополией, а когда несколько потребителей (покупателей) – олигопсонией. Случай, когда имеются две фирмы, выпускающие однотипную продукцию, называется дуополией. Рассмотрим этот случай подробно. В этом случае каждая фирма производит продукцию, используя свою производственную функцию

$$q_1 = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),$$
$$q_2 = f_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}),$$

где q_i есть выпуск продукции i-й фирмой, $x_j^{(i)}$ – величина потребления затрат j-го вида i-й фирмой.

Цены на продукцию определяются q_1 и q_2 и в общем случае имеют вид $p = p(q_1, q_2)$. Если выпуски продукции растут, то цены понижаются:

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} < 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial q_2} < 0.$$

Цена любого вида затрат определяется покупками этого вида затрат обеими фирмами, то есть $w_j = w_j(x_j^{(1)}, x_j^{(2)})$. При этом

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j^{(1)}} > 0, \qquad \frac{\partial w_j}{\partial x_j^{(2)}} > 0, \quad j = \overline{1,n}\ ,$$

так как увеличение спроса ведёт к увеличению цены.

Сформулируем задачи одной фирмы, скажем, первой, в случае конкуренции между ними. Прибыль первой фирмы равна

$$\Pi_1 = p(q_1, q_2) \cdot q_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \cdot x_j^{(1)},$$
$$q_1 = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),$$

и фирма, естественно, стремится максимизировать свою прибыль $\Pi \Rightarrow \max$.

Решим эту задачу, используя метод неопределённых множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = p(q_1, q_2) q_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) x_j^{(1)} + \lambda\left(f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) - q_1 \right).$$

Но теперь следует иметь в виду, что всякое действие со стороны первой фирмы может вызвать ответную реакцию второй фирмы. Поэтому необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = p(q_1, q_2) + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j^{(1)}} = -w_j(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) - x_j^{(1)} \frac{\partial w_j}{\partial x_j^{(1)}} - x_j^{(1)} \frac{\partial w_j}{x_j^{(2)}} \cdot \frac{\partial x_j^{(2)}}{\partial x_j^{(1)}} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_j^{(1)}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) - q_1 = 0.$$

Выразив из первого уравнения множитель Лагранжа λ, сведём эту систему к виду:

$$\left[p + q_1 \left(\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \right] \frac{\partial f_1}{\partial x_j^{(1)}} = w_j(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) + x_j^{(1)} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_j^{(1)}} + \frac{\partial w_j}{\partial x_j^{(2)}} \cdot \frac{\partial x_j^{(2)}}{\partial x_j^{(1)}} \right), \quad (1)$$

$$f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = q_1 .$$

Выражения

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial x_j^{(2)}}{\partial x_j^{(1)}}, \quad j = \overline{1,n},$$

называются предположительными вариациями и выражают предполагаемую реакцию второй фирмы на действия первой.

Далее мы рассмотрим только дуополию.

Стратегия Курно

Анализ дуополии Курно основан на предположении, что предположительные вариации равны нулю, то есть

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0,$$

то есть фирма никак не реагирует на изменение выпуска продукции другой фирмой. Тогда система (1) принимает вид:

$$\left[p + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1} \right] \frac{\partial f_1}{\partial x_j^{(1)}} = w_j, \quad j = \overline{1,n},$$

$$f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) = q_1 \;,$$

для первой фирмы и аналогичное уравнение для второй фирмы.

Пример. Пусть $p = a - b(q_1 + q_2)$, где $a > 0$ и $b > 0$. Пусть издержки ыирм на производство продукции имеют вид

$$C_1 = c \cdot q_1 + d, \qquad C_2 = c \cdot q_2 + d,$$

то есть фирмы совершенно идентичны. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left[a - b(q_1 + q_2) \right] q_1 - c q_1 - d, \\ \Pi_2 &= \left[a - b(q_1 + q_2) \right] q_2 - c q_2 - d. \end{aligned} \qquad (2)$$

Считая предположительные вариации равными нулю, запишем необходимые условия экстремума в виде

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \left[a - b(q_1 + q_2)\right] - bq_1 - c = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \left[a - b(q_1 + q_2)\right] - bq_2 - c = 0. \qquad (3)$$

В силу симметричности ситуации очевидно, что $q_1 = q_2$. Легко получить, что

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}.$$

При этом

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} + d.$$

Эта ситуация называется равновесием Курно

Динамика Курно основана на том предположении, что каждая фирма строит свою деятельность, считая, что другая фирма сохранит свой выпуск за предыдущий цикл. Считая, что всё время разбито на циклы (месяц, год), и обозначая через t номер цикла, запишем систему (3) в виде

$$a - b(q_1(t+1) + q_2(t)) - bq_1(t+1) - c = 0,$$
$$a - b(q_1(t) + q_2(t+1)) - bq_2(t+1) - c = 0,$$

откуда получается система уравнений для динамики продукции обеих фирм:

$$q_1(t+1) + \frac{1}{2} q_2(t) = \frac{a-c}{2b},$$
$$q_2(t+1) + \frac{1}{2} q_1(t) = \frac{a-c}{2b}. \qquad (4)$$

Решим эту систему. Пусть

$$q_1(t) = \frac{a-c}{3b} + \Delta q_1(t),$$

$$q_2(t) = \frac{a-c}{3b} + \Delta q_2(t).$$

Подставляя эти выражения в (4), получим

$$\Delta q_1(t+1) + \frac{1}{2} \Delta q_2(t) = 0,$$

$$\Delta q_2(t+1) + \frac{1}{2} \Delta q_1(t) = 0.$$

Отсюда

$$\Delta q_1(t+2) = -\frac{1}{2} \Delta q_2(t+1) = \frac{1}{4} \Delta q_1(t),$$

то есть уравнение для $\Delta q_1(t)$ имеет вид

$$\Delta q_1(t+2) - \frac{1}{4} \Delta q_1(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ и поэтому

$$\Delta q_1(t) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. Таким образом

$$q_1(t) = \frac{a-c}{3b} + C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^t.$$

Далее,

$$\Delta q_2(t) = -2\Delta q_1(t+1) = -2 \cdot C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - 2 \cdot C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} = -C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t,$$

так что

$$q_2(t) = \frac{a-c}{3b} - C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^t.$$

Константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий, то есть из $q_1(0)$ и $q_2(0)$.

Главным здесь является то, что при $t \to \infty$ $(1/2)^t \to 0$ и $(-1/2)^t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} q_1(t) = \frac{a-c}{3b}, \quad \lim_{t\to\infty} q_2(t) = \frac{a-c}{3b},$$

то есть динамика Курно сходится к равновесию Курно.

Равновесие Стэкельберга

Пусть теперь по происшествии некоторого времени первая фирма убедилась в том, что вторая фирма работает согласно рекомендациям Курно. Может ли она использовать этот факт для улучшения своего положения?

Итак, вторая фирма работает по рекомендациям Курно. Тогда, из второго уравнения системы (3), следует, что

$$q_2 = \frac{a-c-bq_1}{2b}$$

и предположительная вариация будет равна

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}.$$

Но тогда

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \left[a - b(q_1+q_2)\right] - b\left(1 - \frac{1}{2}\right)q_1 - c = 0,$$

то есть условие максимума Π_1 имеет вид

$$a - b(q_1+q_2) - \frac{1}{2}q_1 - c = 0.$$

Вторая фирма работает по рекомендациям Курно и поэтому для неё по-прежнему

$$a - b(q_1+q_2) - q_2 - c = 0.$$

Решая эти два уравнения легко получить, что

$$q_1 = \frac{a-c}{2b}, \quad q_2 = \frac{a-c}{4b},$$

и прибыли фирм равны

$$\Pi_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d, \qquad \Pi_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d.$$

Эта ситуация носит название равновесия Стэкельберга.

Конечно, от такого поведения прибыль первой фирмы возрастёт, но зато прибыль второй фирмы уменьшится. И это может подвигнуть вторую фирму на то, чтобы тоже работать по рекомендациям Стэкельберга. Тогда уравнения для q_1 и q_2 будут одинаковы

$$a - b(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}bq_1 - c = 0,$$

$$a - b(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}bq_2 - c = 0,$$

и отсюда

$$q_1 = q_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{a - c}{b},$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{2}{25} \cdot \frac{(a - c)^2}{b} - d,$$

и обе фирмы попали в ловушку – желание увеличить прибыль за счёт другой фирмы привело к тому, что их прибыли уменьшились.

Арбитраж по Нэшу

Для вынесения арбитражного решения надо сначала найти так называемую точку «status quo», определяемую из условия

$$\Pi_1^* = \max_{q_1 \in Q} \min_{q_2 \in Q} \Pi_1(q_1, q_2), \quad \Pi_2^* = \max_{q_2 \in Q} \min_{q_1 \in Q} \Pi_2(q_1, q_2)\ .$$

По смыслу, это – доход каждой из фирм, дающий максимум их прибыли в наихудшей для них ситуации.

Тогда решение справедливого арбитра по Нэшу должно иметь следующий вид: на переговорном множестве надо найти точку Π_1, Π_2, которая даёт максимальное значение произведению

$$\left(\Pi_1 - \Pi_1^*\right)\left(\Pi_2 - \Pi_2^*\right).$$

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

5. Тема самостоятельной работы:

«Модели экономического равновесия»

Задание:

Изложить основную модель экономического равновесия на основе отношений предпочтения и функции полезности.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Основные определения.
2. Функция спроса.
3. Влияние цены на спрос и ее компенсация.

4. Изменение спроса при изменении капитала

Форма отчета:

Опрос. Реферат.

Цель работы:

Самостоятельное изучение метода модели экономического равновесия, влияние цены на спромс и ее компенсация.

Указания к выполнению. Потребитель, идя на рынок (магазин, мастерскую и т.д.), приобретает там некоторые товары (услуги тоже можно считать товаром). Пусть на рынке имеется в наличии всего n видов товаров – товар №1, товар №2, ... , товар № n. Пусть потребителю предлагается набор товаров, в котором первый товар будет в количестве x_1, второй – в количестве x_2, ..., n-ый товар будет в количестве x_n. Тогда этот набор можно представить в виде вектора-столбца

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T.$$

Очевидно, что $\forall i \quad x_i \geq 0$ (в дальнейшем это будет обозначаться так: $\vec{x} \geq 0$).

Конечно, многие товары можно приобрести только целиком – нельзя купить 1.5 телевизора или сделать 0.73 стрижки волос. Однако, для нижеследующей теории будем считать, что все товары безгранично делимы, то есть x_i могут принимать любые неотрицательные значения. Это позволит в дальнейшем использовать аппарат дифференциального исчисления.

Пусть потребителю предлагается два набора товаров $\vec{x}$ и $\vec{y}$. В качестве аксиомы предполагается, что потребитель, сравнивая эти наборы, всегда может сказать одно из следующих утверждений:

1. Набор $\vec{x}$ не хуже набора $\vec{y}$ (это обозначается так: $\vec{x} \succ \vec{y}$);
2. Набор $\vec{x}$ лучше (предпочтительнее) набора $\vec{y}$ ($\vec{x} \succ \vec{y}$);
3. Наборы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ для потребителя эквивалентны ($\vec{x} \sim \vec{y}$);
4. Набор $\vec{y}$ лучше набора $\vec{x}$ ($\vec{y} \succ \vec{x}$);
5. Набор $\vec{y}$ не хуже набора $\vec{x}$ ($\vec{y} \succ \vec{x}$).

В качестве аксиом принимаются следующие свойства этого отношения:

1. $\vec{x} \succ \vec{x}$;
2. $\vec{x} \succ \vec{y} \wedge \vec{y} \succ \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \succ \vec{z}$.

Определение. Отношение предпочтения называется **непрерывным** на некотором множестве X, если множество $\{(\vec{x}, \vec{y}): \vec{x} \in X,\ \vec{y} \in X,\ \vec{x} \succ \vec{y}\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \otimes X$.

Содержательно это определение означает следующее: если для некоторого набора товаров $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$ верно $\vec{x}_0 \succ \vec{y}_0$, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение $\succ$ сохраняется, то есть если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ близки к $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$ соответственно, то $\vec{x} \succ \vec{y}$.

Определение. Функция $u(\vec{x})$ называется **функцией полезности** для отношения $\succ$, если.

1. $\bar{x} \succ \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) \geq u(\bar{y})$;
2. $\bar{x} \succ \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) > u(\bar{y})$;
3. $\bar{x} \sim \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) = u(\bar{y})$.

Основной теоремой является так называемая **теорема Дебре.**

Теорема Дебре. Если множество X связно, а отношение предпочтения удовлетворяет свойствам

1. $\bar{x} \succ \bar{x}$;
2. $\bar{x} \succ \bar{y} \wedge \bar{y} \succ \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \succ \bar{z}$.
3. отношение $\succ$ непрерывно на X,

то для этого отношения существует функция полезности $u(\bar{x})$.

Теорема.

1. Пусть $f(t)$ есть строго монотонно возрастающая функция и $u(\bar{x})$ есть функция полезности. Тогда $v(\bar{x}) = f(u(\bar{x}))$ есть также функция полезности.

2. Если $u(\bar{x})$ и $v(\bar{x})$ есть две функции полезности для одного и того же отношения предпочтения, то существует такая строго монотонно возрастающая функция $f(t)$, что $v(\bar{x}) = f(u(\bar{x}))$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что функция $u(\bar{x})$ является дважды дифференцируемой функцией. В экономике на функцию полезности накладывают некоторые дополнительные требования, характерные именно для экономики. Рассмотрим их.

1. $\forall i, \bar{x}_i \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0.$

Условие очевидно – чем больше каждого товара, тем лучше.

2. $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = +\infty.$

3. $\forall i = \overline{1,n} \quad \lim\limits_{x_i \to +\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$

Это требование носит название закона убывающей полезности.

4. Пусть $\bar{y} \succ \bar{x}$. Тогда $\forall\alpha \quad 0 < \alpha < 1$ естественно требовать, чтобы

$$\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x} \succ \bar{x}$$

Это приводит к следующему ограничению на $u(\bar{x})$:

$$u(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \geq \min(u(\bar{x}), u(\bar{y})).$$

Функция, удовлетворяющая этому требованию, называется квазивогнутой.

В дальнейшем мы, для упрощения теории, будем требовать, чтобы $u(\bar{x})$ была вогнутой, то есть

$$\forall\alpha \;\; 0 < \alpha < 1 \;\; u(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \geq \alpha u(\bar{y}) + (1-\alpha)u(\bar{x}),$$

или даже строго вогнутой, то есть

$$\forall\alpha \;\; 0 < \alpha < 1 \;\; u(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) > \alpha u(\bar{y}) + (1-\alpha)u(\bar{x}).$$

Заметим, что всякая вогнутая функция одновременно и квазивогнута. Обратное, вообще говоря, неверно.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{U}(\bar{x}) = \left\| u_{ij} \right\|$ с элементами

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

В экономике эта матрица называется матрицей Гессе. Для строго вогнутой функции эта матрица отрицательно определена. Отсюда, в частности, следует, что

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0.$$

Приведем примеры функций полезности.

1. Функция Стоуна

$$u(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_i)^{a_i}, \qquad x_i > x_i \geq 0, \quad a_i > 0.$$

Это выражение часто логарифмируют и берут в виде

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \ln(x_i - x_i).$$

2. Функция постоянной эластичности

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i} (x_i - x_i)^{1-b_i},$$

$$x_i > x_i \geq 0, \quad a_i > 0, \quad 0 < b_i < 1.$$

3. $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)^{-b}, \quad b > a.$

Введём теперь цены на товары. Пусть p_i есть цена единицы *I*- го товара, так что

$$\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)^T$$

есть вектор-столбец цен.

Пусть покупатель идёт на рынок имея капитал *I*. Приобретая набор товаров $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ он, естественно, желает за свои деньги иметь максимум полезности для себя. Поэтому поведение разумного потребителя выглядит как решение задачи

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow \max\limits_{\bar{x}}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Это – типичная задача нелинейного программирования. Заметим, что область допустимых значений $\bar{x}$ выпукла и замкнута.

Теорема.

1. Для вогнутой функции, определённой на выпуклом замкнутом множестве, любой локальный максимум является глобальным.

2. Для строго вогнутой функции глобальный максимум достигается в единственной точке.

Выведем уравнение для точки максимума $u(\bar{x})$, обозначая её через $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \bar{x}_3^*, \ldots, \bar{x}_n^*)^T$. Для этого составим функцию Лагранжа

$$L(\bar{x},\lambda) = u(\bar{x}) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I\right),$$

и запишем необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Получаем, что в точке максимума имеют место соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i & = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^* - I & = 0, \end{cases}$$

где через λ^* обозначено значение множителя Лагранжа, соответствующее точке максимума $\bar{x}^*$.

Заметим, что

1. В точке максимума выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = I,$$

то есть потребитель тратит на рынке весь свой капитал.

2. Так как

$$\lambda^* = \frac{1}{p_i} \cdot \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i},$$

то при оптимальном выборе потребителя имеют место соотношения

$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2} \cdot \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{1}{p_n} \cdot \frac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_n}.$$

Величину $\partial u / \partial x_i$ называют предельной полезностью i-го товара. Таким образом, в точке оптимального выбора предельные полезности пропорциональны ценам на товар.

Заметим ещё, что из этого же соотношения следует, что $\lambda^* > 0$, так как цены отрицательными быть не могут.

Понятие компенсирующего дохода или просто компенсации проще всего понять из рассмотрения примера.

Пример. Пусть имеется всего лишь два вида товаров – товар номер 1 и товар номер 2 с ценами за единицу товара p_1 и p_2 соответственно. Пусть количества приобретаемых товаров равны x_1 и x_2 и функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Тогда, имея капитал I, покупатель должен решить следующую задачу:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение стандартно. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 \cdot x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

и систему уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 & x_2 - \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 & x_1 - \lambda p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0, \end{cases}$$

относительно переменных x_1, x_2 и λ. Решение этой системы имеет вид

$$x_1^* = \frac{I}{2p_1}; \quad x_2^* = \frac{I}{2p_2}. \tag{1}$$

При этом

$$\max u(x_1, x_2) = u(x_1^*, x_2^*) = \frac{I^2}{4p_1 p_2}.$$

Если, например, I=120, p_1=10, p_2=20, то x_1^*=6, x_2^*=3. При этом $u(x_1^*, x_2^*)$=18.

Отметим, что при изменении цен на товары происходит изменение структуры потребления. В этом изменении структуры потребления одновременно сказываются два эффекта:

а) изменение соотношения цен между различными товарами;

б) изменение финансовой ситуации для покупателя.

Понятие компенсации позволяет исключить второй эффект и выделить эффект влияния изменения соотношения цен между товарами на их приобретение в чистом виде. Влияние изменения цен на потребление. При изменении цены какого-то товара номер j меняется потребление и других товаров, скажем, товара номер i. В экономике это влияние принято измерять так называемой перекрестной эластичностью, которая определяется как

$$e_{ij} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^*}.$$

Главным сомножителем здесь является производная $\partial x_i^* \big/ \partial p_j$, которую мы сейчас и вычислим.

Напомним сначала векторные обозначения. Итак, $\bar{p}$ есть вектор-столбец цен

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T,$$

x^* – вектор-столбец покупок

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T.$$

Величины $\partial x_i^* \big/ \partial p_j$ мы будем объединять в векторы-столбцы

$$\frac{\partial \bar{x}^*}{\partial p_l} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_l}, \frac{\partial x_2^*}{\partial p_l}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p_l} \right)^T,$$

либо в матрицу

$$\frac{\partial \bar{x}^*}{\partial \bar{p}} = \left\| \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} \right\|,$$

в которой i соответствует строке, а l – столбцу. Напомним, что через $\mathbf{U}$ обозначена матрица Гессе

$$\mathbf{U} = \left\| \frac{\partial^2 u(\bar{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|.$$

Приступим к выводу. Оптимальная покупка определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* - I & = 0, \\ \dfrac{\partial u(\bar{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i & = 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что $\bar{x}^* = \bar{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)$.

Продифференцируем все эти уравнения по цене n-го товара p_n. Тогда получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_n} + x_n^* & = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial p_n} - \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} p_i - \lambda^* \delta_{in} & = 0, \end{cases}$$

где δ_{in} – символ Кронекера, Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \qquad\qquad - \sum_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_n} & = x_n^*, \\ - p_i \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} + \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_n} & = \lambda^* \delta_{in}, \end{cases} \tag{3}$$

и будем рассматривать её как систему линейных уравнений относительно величин $\partial \lambda^* / \partial p_n, \partial x_1^* / \partial p_n, \partial x_2^* / \partial p_n, \ldots, \partial x_n^* / \partial p_n$. Переходя к векторно-матричным обозначениям, запишем систему (3) в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & -\bar{p}^T \\ -\bar{p} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial \lambda^* / \partial p_n \\ \partial \bar{x}^* / \partial p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n^* \\ \bar{0} \\ \lambda^* \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $\bar{0}$ есть вектор-столбец, состоящий из $n-1$ нулей.

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} \partial \lambda^* / \partial p_n \\ \partial \bar{x}^* / \partial p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{p}^T \\ -\bar{p} & \mathbf{U} \end{bmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{bmatrix} x_n^* \\ \bar{0} \\ \lambda^* \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Главным является то, что в силу блочной структуры матриц, обратную матрицу из соотношения (5) можно записать в явном виде. Имеем

$$\begin{bmatrix} 0 & -\vec{p}^T \\ -\vec{p} & \mathbf{U} \end{bmatrix}^{(-1)} = \begin{bmatrix} \mu & \mu\vec{p}^T\mathbf{U}^{(-1)} \\ \mu\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p} & \mu\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p}\vec{p}^T\mathbf{U}^{(-1)} + \mathbf{U}^{(-1)} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\mu = -\frac{1}{\vec{p}^T\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p}}, \tag{7}$$

а $\mathbf{U}^{(-1)}$ – матрица, обратная матрице Гессе. Для краткости, в дальнейшем будет использоваться обозначение

$$\mu\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p}\vec{p}^T\mathbf{U}^{(-1)} + \mathbf{U}^{(-1)} = \mathbf{H}$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\lambda^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial\vec{x}^*}{\partial p_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \mu\vec{p}^T\mathbf{U}^{(-1)} \\ \mu\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n^* \\ \vec{0} \\ \lambda^* \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\vec{x}^*}{\partial p_n} = \mu\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p} \cdot x_n^* + \lambda^*\mathbf{H}^{(n)}, \tag{9}$$

где $\mathbf{H}^{(n)}$ означает n-й столбец матрицы $\mathbf{H}$.

В общем случае, если бы дифференцирование шло по цене p_l какого-то l-го товара, получилось бы

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_i^*}{\partial p_l} = \mu \cdot \left(\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p}\right)_i \cdot x_l^* + \lambda^*\mathbf{H}_{il}, \\ \frac{\partial\vec{x}^*}{\partial p_l} = \mu \cdot \left(\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p}\right) \cdot x_l^* + \lambda^*\mathbf{H}^{(l)}, \\ \frac{\partial\vec{x}^*}{\partial\vec{p}} = \mu \cdot \left(\mathbf{U}^{(-1)}\vec{p}\right) \cdot \vec{x}^{*T} + \lambda^*\mathbf{H}, \end{gathered} \tag{10}$$

где одно и то же соотношение записано в трёх разных формах: по-элементно, в векторной форме и в матричной форме.

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-15], самостоятельный Интернет-поиск.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренко М.Г. Математические модели в экономике. Томск: Изд-во ТУСУР, 2000.
2. Шапкин А.С., Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник для вузов. – М.: Дашков и К°, 2007.
3. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование: учебник для вузов. – М.: Дашков и К°, 2008.
4. Смагин В.И. Оптимальное и адаптивное управление экономическими системами. Учебно-методическое пособие. Томск: – Изд-во ТГУ, 2010.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Учебное пособие. М.: ЮНИТИ, 2000.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебное пособие. М.: Дело, 2006.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. Учебное пособие. СПб.: Питер, 2005.
8. Федосеев и др. Экономико-математические методы и прикладные модели. М.: ЮНИТИ, 1999.
9. Перепелкин Е.А. Математические модели экономических систем. Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2003.
10. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. СПб.: Питер, 2000.
11. Терпугов А.Ф. Экономико-математические модели. Томск: Изд-во ТГПУ, 1999.
12. Параев Ю.И., Смагин В.И. Оптимальное управление производством и финансовыми инструментами. Учебно-методическое пособие. Томск: Изд-во ТГУ, 2002.
13. Математическая экономика на персональном компьютере / Под ред. Кубонива. М.: Наука, 1991.

14. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М.: Мир, 1975.
15. Аллен Р. Математическая экономия. М.: Изд-во ИЛ, 1963.
16. Корячко В.П. , Таганов А.И. Процессы и задачи управления проектами информационных систем. Учебное пособие. Горячая линия-Телеком, 2014. 376 с.
17. Данилов Н.Н. Курс математической экономики. Лань, 2016. 400 с.
18. Математические модели управления проектами: Учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки - 38.03.02 «Менеджмент». / Смагин В. И. — 2015. 57 с.