

Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
Томский государственный университет систем  
управления и радиоэлектроники

**А.Г. Карпов**

**ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ**

Учебное пособие

Томск  
Издательство ТУСУРа  
2015

УДК 681.515(075.8)

ББК 32.965я73

K265

### **Рецензенты:**

профессор каф. оптимизации систем управления  
Томск. политехн. ун-та, д-р техн. наук **В.А. Силич**;  
доцент каф. прикладной математики Томск. гос. ун-та,  
канд. техн. наук **Г.Н. Решетникова**

### **Карпов, Александр Георгиевич**

K265 Цифровые системы автоматического регулирования : учеб.  
пособие / А.Г. Карпов. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та сис-  
тем упр. и радиоэлектроники, 2015. – 216 с.

ISBN 978-5-86889-716-0

Изложены методы исследования дискретных (цифровых) систем автоматического регулирования, предназначенных для контрольно-испытательной аппаратуры автономных объектов наземного, космического и подводного базирования. Приведено математическое описание и рассмотрены методы анализа и синтеза цифровых систем как в рамках классической (частотной) теории, так и в терминах пространства состояний. Обсуждаются вопросы влияния квантования сигналов по времени и по уровню на работоспособность и показатели качества цифровых систем автоматического регулирования.

Для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки магистров «Управление в технических системах» и профилю подготовки «Управление и автоматизация технологических процессов и производств», а также для студентов других направлений и специальностей, аспирантов и инженеров.

УДК 681.515(075.8)

ББК 32.965я73

ISBN 978-5-86889-716-0

© А.Г.Карпов, 2015

© Томск. гос. ун-т систем

упр. и радиоэлектроники, 2015

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие является переработанным, исправленным и дополненным в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта и основной профессиональной образовательной программы магистратуры по направлению подготовки «Управление в технических системах» учебным пособием «Цифровые системы автоматического управления» [1].

На современном уровне развития технологии системы автоматического управления (регулирования), как правило, представляют собой микропроцессорные системы. Наличие в контуре регулирования элементов цифровой техники вносит определенные особенности в методы исследования таких систем. Инженер-разработчик цифровых систем может с удивлением обнаружить, что обычные методы исследования непрерывных линейных систем не только не приведут к ожидаемому результату, но и дадут прямо противоположный эффект. Упомянутые особенности не обсуждаются в курсе «Теория автоматического управления» [2, 3] и изложены в настоящем учебном пособии.

Первый раздел учебного пособия посвящен общим вопросам функционирования и структуры цифровых систем автоматического регулирования. Основы представления и преобразования сигналов в цифровых системах рассмотрены во втором разделе. Метод  $z$ -преобразования и метод пространства состояний в дискретном варианте изложены в третьем и четвертом разделах соответственно. Цифровое моделирование непрерывных систем управления и их переоборудование на базе цифровой техники являются весьма актуальными проблемами и рассмотрены в пятом разделе. Некоторые вопросы анализа и синтеза цифровых систем приведены соответственно в шестом и седьмом разделах. Влияние ограничений, связанных с относительно низкой скоростью вычислений и небольшой разрядной сеткой микропроцессоров, на качество работы цифровой системы рассмотрено в последнем, восьмом разделе.

Для более подробного ознакомления с отдельными разделами цифровой теории рекомендуется [4]. Четкое и ясное изложение матричной теории в применении к системам управления и отдельные вопросы пространства состояний (в том числе и для дискретных систем) можно найти в [5].

При изучении данного учебного пособия читатель должен быть знаком с основами теории управления и математическими основами теории систем, особенно с разделами, в которых изложены дискретное преобразование Лапласа, теория  $z$ -преобразования, теория линейных разностных уравнений и теория векторно-матричных линейных дифференциальных уравнений [6].

Чтобы не возникало путаницы в терминологии, под цифровой системой будем в дальнейшем понимать систему автоматического регулирования, в контуре управления которой имеются любые цифровые элементы, в том числе это может быть микропроцессор, микро- или мини-ЭВМ и т.п.

# 1. ТИПОВЫЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

## 1.1. Функциональные схемы

В наиболее общем виде простейшая цифровая система автоматического регулирования выглядит так, как это представлено на рис. 1.1.

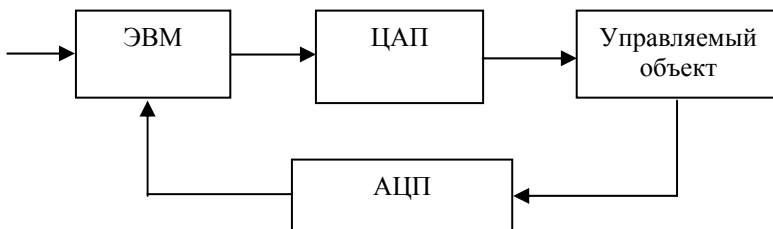


Рис. 1.1. Функциональная схема цифровой системы регулирования

Под ЭВМ здесь понимается любая цифровая система, реализованная либо в виде управляющей мини-ЭВМ, либо на базе микропроцессора, либо даже на универсальной ЭВМ. Интерфейсом между ЭВМ и управляемым объектом, который, как правило, является аналоговым устройством, служат аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи (АЦП и ЦАП).

Делая акцент на связи с объектом, дадим эту схему более подробно, конкретизируя представление ЭВМ в виде микропроцессорной системы (МПС) с микропроцессором (МП) в основе (рис. 1.2).

Поскольку входной и выходной сигнал объекта может быть вектором, то на рис. 1.2 выделена совокупность исполнительных механизмов (ИМ), непосредственно воздействующих на объект, и датчиков (Д), измеряющих значения выходных переменных объекта. Для разнесения параллельно поступающей с датчиков информации во времени служит мультиплексор (М), а для обратной операции, т.е. распределения последовательно поступающей с ЦАП информации на соответствующие

исполнительные механизмы, предназначен демультимплексор (ДМ).

Таким образом, для цифровой системы управления необходимы: сама МПС; ЦАП, осуществляющий операцию декодирования над цифровыми данными; АЦП, преобразующий аналоговый сигнал в цифровой код; устройство выборки и хранения (УВХ) как часть ЦАП и АЦП; объект управления, а также, если необходимо, мультиплексор и демультимплексор.

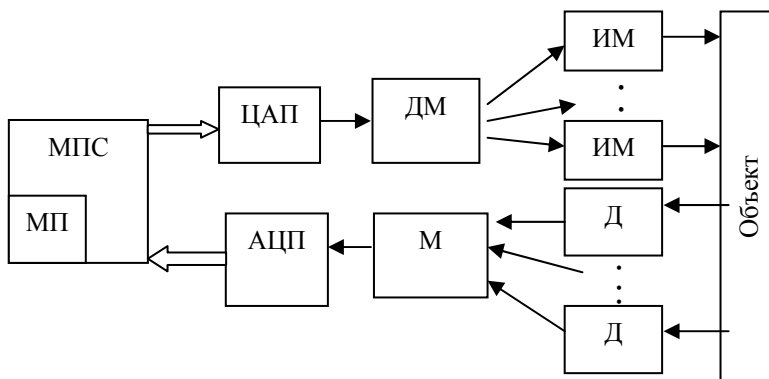


Рис. 1.2. Связь микропроцессорной системы с объектом

Для дальнейшего исследования цифровых систем понадобится соответствующее описание различных элементов и устройств, входящих в состав цифровой системы автоматического управления.

## 1.2. Структурные схемы

### 1.2.1. Устройство выборки и хранения

Под квантованием в дискретных и, в частности, в цифровых системах понимают преобразование аналоговых сигналов в последовательность амплитудно-модулированных (чаще всего, хотя возможны и другие виды модуляции) импульсов или кодов. Устройство фиксации в простейшем случае сохраняет, или «замораживает», значение импульсного или цифро-

вого сигнала в течение определенного времени. Часто квантователь и фиксатор объединяют конструктивно в одно устройство и называют его УВХ.

Одной из главных задач УВХ является фиксация быстро меняющегося сигнала при различных его дальнейших преобразованиях. Другим назначением УВХ является запоминание выходного сигнала мультиплексора. УВХ часто объединяют с АЦП и ЦАП. В первом случае УВХ нужно для фиксации входного сигнала на время его оцифровки. Во втором случае УВХ предназначено для фильтрации (сглаживания) сигнала на выходе ЦАП.

Работу УВХ можно описать простой принципиальной схемой (рис. 1.3).

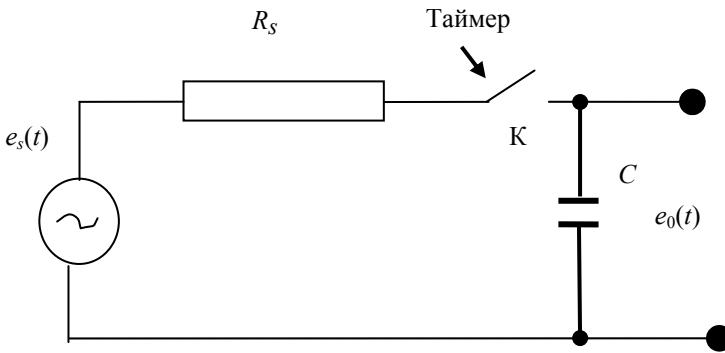


Рис. 1.3. Принципиальная схема устройства выборки и хранения

Меняющийся во времени сигнал  $e_s(t)$  поступает с источника тока с внутренним сопротивлением  $R_s$ . Квантователь на рис. 1.3 условно изображен в виде ключа К. После замыкания ключа емкость  $C$  заряжается до напряжения  $e_s(t)$ , а после размыкания это напряжение сохраняется до следующего замыкания ключа. Работа УВХ поясняется эпюрами сигналов (рис. 1.4).

Операции выборки и хранения инициируются таймером. Различают следующие параметры УВХ:

$p$  — время выборки — время, в течение которого ключ замкнут;

$T_a$  — апертурное время — время от момента поступления командного сигнала таймера до срабатывания (замыкания) ключа;

$T_\phi$  — время установления при фиксации — время переходных процессов после размыкания ключа;

$T$  — период квантования — время между командными сигналами.

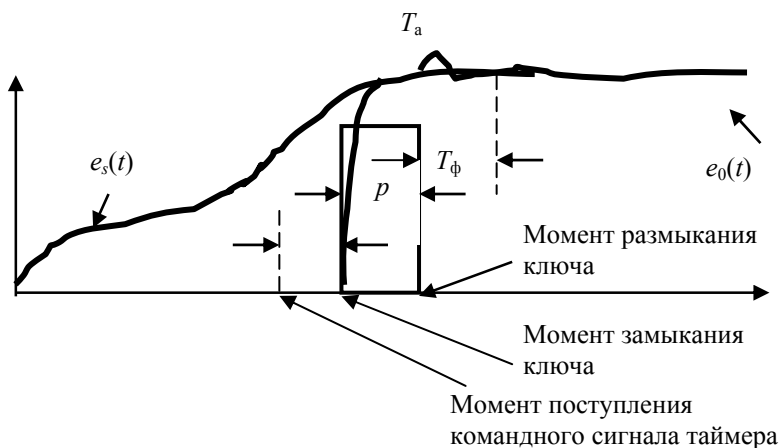


Рис. 1.4. Эпюры сигналов при работе устройства выборки и хранения

Хотя УВХ представляет собой единый блок, для анализа на структурной схеме (рис. 1.5) удобнее рассматривать процессы квантования и хранения отдельно.

Квантователь можно рассматривать как амплитудно-импульсный модулятор, обеспечивающий время выборки  $p$ .

Фиксатор сохраняет квантованный по времени сигнал постоянным в течение времени хранения. Предполагается, что в течение этого времени разрядом конденсатора  $C$  можно пренебречь. Время задержки  $T_d$  объединяет время выборки и апертурное время.



Фильтр отражает динамику переходных процессов в буферных усилителях следующих за УВХ каскадов.

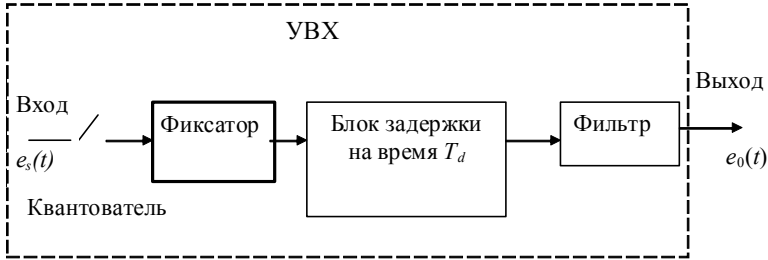


Рис. 1.5. Структурная схема устройства выборки и хранения

Импульсный элемент на этой схеме называется квантователем с конечной длительностью импульса. Если время импульса мало по сравнению с периодом квантования ( $p \ll T$ ) и изменением аналогового сигнала, а также мало апертурное время ( $T_a \ll T$ ), то ими можно пренебречь. Обычно можно пренебречь и переходными процессами, обусловленными следующими за УВХ устройствами. Структурная схема УВХ получается при этом весьма простой (рис. 1.6).

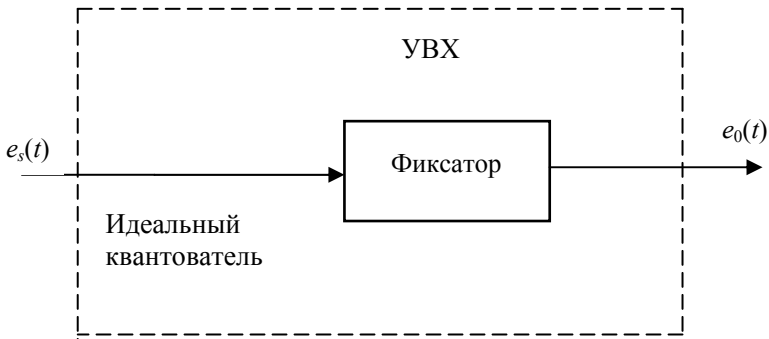


Рис. 1.6. Упрощенная схема устройства выборки и хранения

На этой схеме показан идеальный квантователь, длительность замыкания ключа которого стремится к нулю,

и фиксатор, выходной сигнал которого постоянен в течение периода квантования  $T$  и равен входному сигналу в момент срабатывания квантователя.

### 1.2.2. Цифроаналоговый преобразователь

Цифроаналоговое преобразование, или декодирование, заключается в преобразовании числа, представленного в виде машинного слова, в эквивалентный аналоговый сигнал.

Принцип действия устройств, осуществляющих такое преобразование, может быть различным, так же как и конструктивное исполнение (эти вопросы, касающиеся, впрочем, и АЦП, рассматриваются в курсе «Микропроцессорные устройства»).

Так как при цифроаналоговом преобразовании машинное слово преобразуется в аналоговый сигнал соответствующей амплитуды, то ЦАП на структурной схеме можно представить в виде декодера и УВХ (рис. 1.7,а). В декодере цифровое слово преобразуется в число или в амплитудно-модулированный импульсный сигнал. Для хранения значения этого сигнала до начала следующего цикла цифроаналогового преобразования служит УВХ. Из принципа действия ЦАП следует, что квантователь, входящий в состав УВХ, совершенно не нужен. Квантователь присутствует в структурной схеме лишь постольку, поскольку УВХ является единым блоком.

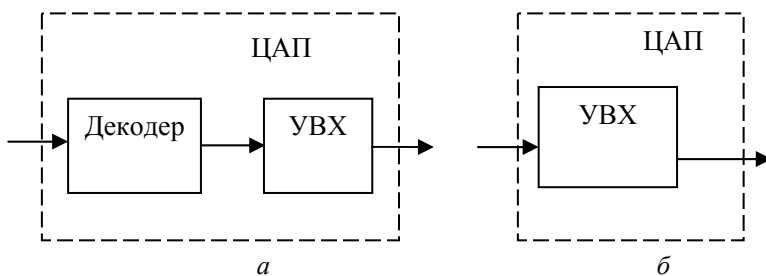


Рис. 1.7. Структурная схема цифроаналогового преобразователя

С информационной точки зрения сигнал на выходе декодера равен (эквивалентен) сигналу на его входе, только представлен в другой форме, поэтому передаточная функция декодера принимается равной единице и упрощенная структурная схема ЦАП принимает вид, представленный на рис. 1.7,б. Упрощения здесь связаны также с пренебрежением нелинейностями декодера.

### **1.2.3. Аналого-цифровой преобразователь**

Аналого-цифровое преобразование, или кодирование, заключается в преобразовании аналогового сигнала в цифровой вид.

Если рассматривать преобразование числа, то АЦП совершает две операции: квантование по уровню и кодирование.

Когда речь идет о преобразовании непрерывно изменяющегося сигнала (тока или напряжения), то АЦП выполняет следующие операции: выборку (квантование по времени) и хранение, квантование по уровню, кодирование. Квантование по времени требуется для выборки меняющегося аналогового сигнала в периодически повторяющиеся моменты времени. Хранение необходимо потому, что процесс преобразования аналог–код занимает определенное время, и хотелось бы, чтобы за это время оцифровывающийся сигнал сохранял свое значение. Необходимость квантования по уровню будет показана в подразд. 2.1. Шифратор преобразует дискретные значения сигнала в машинные слова соответствующей разрядности.

Так же, как в случае ЦАП, принципиальные схемы и конструктивное исполнение АЦП рассматривать не будем, дабы не дублировать соответствующие разделы курса «Микропроцессорные устройства систем управления».

В соответствии с вышесказанным представим структурную схему АЦП (рис. 1.8).

Обычно на вход АЦП подается сигнал в виде тока или напряжения, который квантуется по уровню. Статическая характеристика квантователя по уровню имеет вид ступенчатой ломаной линии, то есть является нелинейной. Максимальная погрешность квантования, равная половине значения

младшего разряда, умноженной на максимальное значение числа (МЗЧ), будет всегда добавляться к реальным аппаратурным ошибкам АЦП.

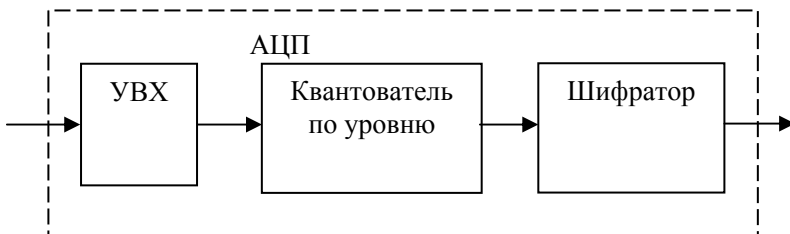


Рис. 1.8. Структурная схема аналого-цифрового преобразователя

Конечное время преобразования аналог–код приводит к появлению запаздывания, которое неблагоприятно влияет (как будет видно в дальнейшем) на устойчивость всей цифровой системы регулирования. Кроме того, время преобразования накладывает ограничение на частоту входного сигнала. В современных АЦП это время лежит в пределах от 100 нс до 200 мс. Если сигнал за это время значительно изменится, то неизбежно появится неопределенность при его оцифровке. Оценить допустимую изменчивость сигнала на входе можно следующим образом.

Пусть за время оцифровки  $T_c$  входной сигнал  $e_s(t)$  изменился на величину (рис. 1.9)

$$\Delta V \approx \left. \frac{de_s(t)}{dt} \right|_{t=t_c} T_c.$$

Чтобы к ошибкам АЦП не добавлялась еще и ошибка, обусловленная изменениями входного сигнала, величина  $\Delta V$  не должна превышать разрешение АЦП, которое составляет  $2^{-n}$  МЗЧ. Отсюда получаем условие

$$\Delta V \leq 2^{-n} \text{МЗЧ}, \text{ или } \frac{de_s}{dt} \leq 2^{-n} \frac{\text{МЗЧ}}{T_c}.$$

Частота входного сигнала при этом не должна превышать  $\frac{1}{2^{n-1}} T_c$ .

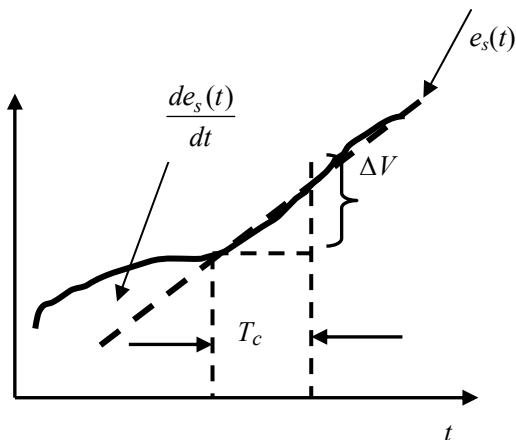


Рис. 1.9. Ошибки при оцифровке

Время квантования может быть уменьшено применением более быстродействующих АЦП, а ограничение на частоту входного сигнала снижено использованием соответствующих УВХ на входе.

Если разрешение АЦП велико, то нелинейными эффектами от квантования по уровню можно пренебречь, то есть принять характеристику квантователя линейной, представляющей прямую линию, являющуюся биссектрисой первого и третьего координатных углов.

В этом случае квантователь по уровню и шифратор на рис. 1.8 предстанут линейными безынерционными блоками с коэффициентом усиления, равным единице, и упрощенная структурная схема АЦП будет выглядеть так, как это изображено на рис. 1.10.

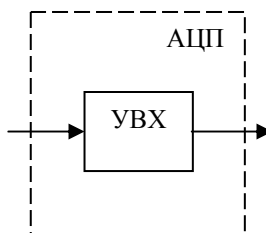


Рис. 1.10. Упрощенная схема аналого-цифрового преобразователя

## **2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ**

### **2.1. Квантование по времени**

#### **2.1.1. Виды импульсной модуляции сигнала**

Операции выборки и хранения весьма важны, поэтому необходимо разработать достаточно простую и в то же время адекватную реальным процессам математическую модель операций выборки и хранения.

УВХ является единым устройством, но с математической точки зрения удобнее рассматривать операции выборки (квантования) и хранения отдельно.

Операция квантования — это преобразование непрерывного (аналогового) сигнала в модулированный импульсный или цифровой сигнал. По тому, какой из информационных параметров импульса подлежит модуляции входным непрерывным сигналом, различают следующие виды импульсной модуляции: амплитудно-импульсную (меняется амплитуда импульса), широтно-импульсную (меняется длительность или ширина импульса), время-импульсную (меняется временное положение импульса), которая в свою очередь делится на частотно-импульсную и фазоимпульсную. Самый простой и в то же время самый распространенный вид модуляции — амплитудно-импульсная, которую далее и будем рассматривать.

#### **2.1.2. Некоторые аспекты выбора периода квантования**

Проектирование цифровых систем всегда сталкивается с проблемой выбора периода квантования. Этот выбор зависит от многих факторов, связанных с сигналом и с характеристиками системы управления.

С одной стороны, минимальный период квантования ограничен временем аналого-цифрового преобразования и задержками сигнала в УВХ. Но кроме этих устройств, есть еще и другие компоненты системы. Если в состав цифровой системы

входит мультиплексор, то есть осуществляется передача параллельно представленной информации в последовательные моменты времени, или если сигнал обрабатывается микропроцессором, который является относительно медленным цифровым устройством, то это также накладывает значительные ограничения на максимальную скорость обработки сигнала. Таким образом, в цифровых системах максимальная частота квантования редко ограничивается лишь характеристиками УВХ и АЦП.

С другой стороны, существуют ограничения снизу на частоту квантования. УВХ и АЦП должны работать достаточно быстро, чтобы информация, содержащаяся в сигнале, не была потеряна в течение операции оцифровки или выборки и хранения. Ограничения с этой стороны задаются условиями теоремы отчетов (другие названия — теорема Котельникова, теорема Котельникова – Шеннона, импульсная теорема). Согласно данной теореме, для того чтобы информация, содержащаяся в непрерывном сигнале, не была потеряна, его нужно квантовать с частотой, большей, чем удвоенная максимальная частота сигнала.

Кроме того, квантование с малой частотой чревато ухудшением качества управления и даже потерей устойчивости системы в целом.

### 2.1.3. Реальный квантователь

Пусть время выборки  $p$  конечно. Тогда, обозначая непрерывный сигнал через  $f(t)$ , на выходе квантователя будем иметь  $f_p^*(t)$  — последовательность импульсов длительностью  $p$  и амплитудой  $f(t)$  (рис. 2.1,а).

Можно представить квантователь в виде модулятора (рис. 2.1,б), где входной сигнал  $f(t)$  умножается на сигнал  $p(t)$  — несущую последовательность импульсов единичной амплитуды  $f_p^*(t) = f(t)p(t)$ .

Амплитудно-импульсный модулятор является линейным устройством, так как связь между информационным

параметром выходных импульсов — амплитудой — и входным сигналом линейна.

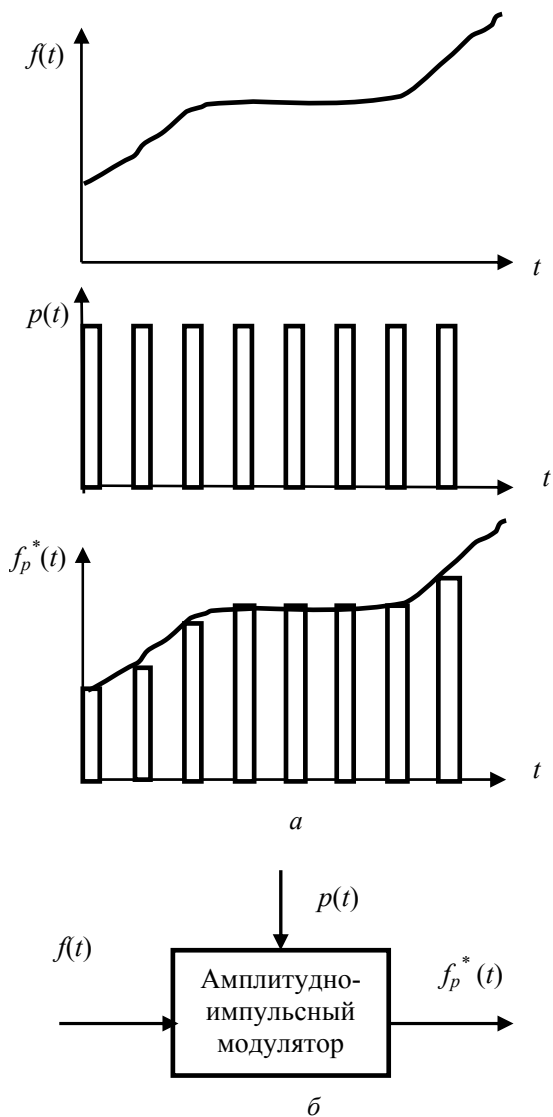


Рис. 2.1. Принцип действия квантователя



Запишем соотношение вход–выход амплитудно-импульсного модулятора во временной области. Несущий сигнал представим в виде разности единичных ступенчатых функций, смещенных по оси времени на величину  $p$ :

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1(t-kt) - 1(t-kt-p)], \quad p < T.$$

Тогда выход квантователя можно записать как

$$f_p^*(t) = f(t)p(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1(t-kt) - 1(t-kt-p)]. \quad (2.1)$$

Переходя в частотную область, получим

$$\begin{aligned} F_p^*(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega - jn\omega_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p \sin n\omega_s p / 2}{T n\omega_s p / 2} e^{(jn\omega_s p / 2)} F(j\omega + jn\omega_s). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Исследуем полученное выражение. Прежде всего посмотрим, что будет при  $n = 0$ :

$$C_0 = \lim_{n \rightarrow 0} C_n = \frac{P}{T}.$$

В соотношении (2.2) возьмем только член с  $n = 0$ :

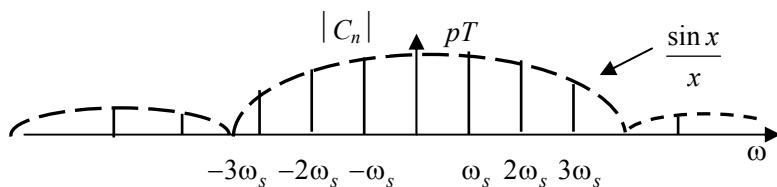
$$F_p^*(j\omega)_{n=0} = C_0 F(j\omega) = \frac{P}{T} F(j\omega).$$

Отсюда следует вывод первый: гармоники, содержащиеся во входном сигнале, содержатся и в выходном, но их амплитуды отличаются в  $p/T$  раз.

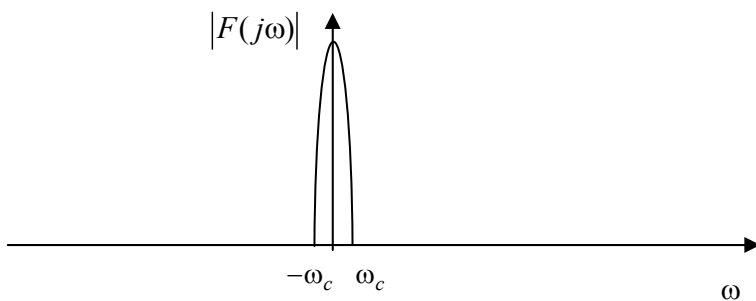
Для  $n \neq 0$  коэффициенты  $C_n$ , вообще говоря, комплексные величины, но их модуль, представляющий частотный спектр  $p(t)$ , имеет вид

$$|C_n| = \frac{p}{T} \left| \frac{\sin n\omega_s p/2}{n\omega_s p/2} \right|. \quad (2.3)$$

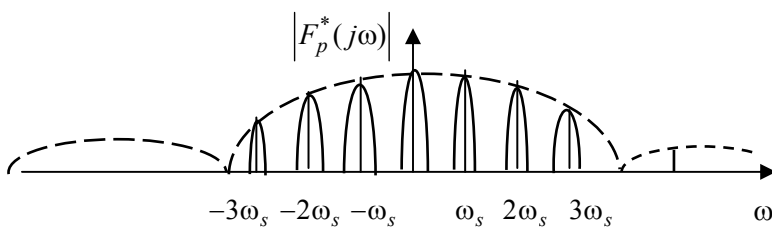
Этот спектр линейчатый (рис. 2.2,а). Пунктиром на рисунке показана огибающая этого спектра (функция  $\sin x/x$ ).



а



б



в

Рис. 2.2. Спектры частот после реального квантователя

Используя известное соотношение (модуль суммы не превышает суммы модулей) для спектра выходного сигнала, получим

$$\left|F_p^*(j\omega)\right| \leq \sum |C_n| |F(j\omega + jn\omega_s)|. \quad (2.4)$$

Если входной сигнал имеет ограниченный в полосе частот  $\omega_c$  спектр и  $\omega_c < \omega_s/2$  (рис. 2.2,б), из выражений (2.4) и (2.3) и иллюстрирующего этот случай рис. 2.2,в получаем вывод второй: спектр выходного сигнала содержит не только неизменной формы (по сравнению с входным непрерывным сигналом) основную ( $n=0$ ) составляющую, но и такой же формы (правда, с другой амплитудой, зависящей от  $|C_n|$ ) транспонированные составляющие ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Ясно, что в случае  $\omega_c > \omega_s/2$  спектр выходного сигнала  $\left|F_p^*(j\omega)\right|$  в основной полосе частот ( $n=0$ ) будет искажен по сравнению со спектром исходного сигнала. Такое явление перекрытия высокочастотных «хвостов» спектра непрерывного сигнала при его квантовании носит название эффекта наложения частот.

Получим теперь описание квантованного сигнала в терминах преобразования Лапласа. Возьмем преобразование Лапласа от функции (2.1) и после несложных преобразований получим

$$F_p^*(s) = \sum_n \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1 - e^{-p(s-\xi_n)}}{(s-\xi_n)(1 - e^{-T(s-\xi_n)})}, \quad (2.5)$$

где  $\xi_n$  — простые полюса функции  $F(\xi)$ , которая представляет дробно-рациональное выражение  $F(\xi) = N(\xi)/D(\xi)$ .

В случае кратных корней выражение получится немного сложнее:

$$F_p^*(s) = \sum_n \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k_n-i}}{(k_n-i)!} \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \xi^{i-1}} \left( (\xi - \xi_n)^{k_n} F(\xi) \right) \Bigg|_{\xi=\xi_n} \times \\ \times \frac{\partial^{k_n-i}}{\partial \xi^{k_n-i}} \left( \frac{1 - e^{-p\xi}}{\xi(1 - e^{-T\xi})} \right) \Bigg|_{\xi=s-\xi_n}, \quad (2.6)$$

где  $k_n$  — кратность полюса  $\xi_n$ , а внешняя сумма берется по всем различным полюсам.

Альтернативная выражениям (2.5), (2.6) формула имеет вид

$$F_p^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p \sin(n\omega_s p / 2)}{T n\omega_s p / 2} e^{jn\omega_s p / 2} F(s + jn\omega_s). \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что выражение (2.2) совпадает с выражением (2.7) после замены в последнем  $s = j\omega$ , что неудивительно, так как при данной замене преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье (для функций, определенных при  $t > 0$ ).

Таким образом, получены следующие соотношения для выходного сигнала реального квантователя.

1. Во временной области:

$$f_p^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)(1(t - kT) - 1(t - kt - p)).$$

2. В частотной области:

$$F_p^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p \sin(n\omega_s p / 2)}{T n\omega_s p / 2} e^{\frac{jn\omega_s p}{2}} F(j\omega + jn\omega_s).$$

3. В области комплексной переменной  $s$  в случае  $k$  простых полюсов:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1 - e^{p(s - \xi_n)}}{(s - \xi_n)(1 - e^{-T(s - \xi_n)})}.$$

4. В случае, когда  $n$ -й полюс имеет кратность  $k_n$ :

$$F_p^*(s) = \sum_n \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k_n-i}}{(k_n - i)!} \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \xi^{i-1}} \left( (\xi - \xi_n)^{k_n} F(\xi) \right) \Bigg|_{\xi=\xi_n} \times \\ \times \frac{\partial^{k_n-i}}{\partial \xi^{k_n-i}} \frac{1 - e^{-p\xi}}{\xi(1 - e^{-T\xi})} \Bigg|_{\xi=s-\xi_n}.$$

5. В области комплексной переменной  $s$  в виде бесконечно-го ряда:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p \sin(n\omega_s p / 2)}{T \cdot n\omega_s p / 2} e^{jn p \omega_s / 2} F(s + jn\omega_s).$$

#### 2.1.4. Идеальный квантователь

Если время выборки  $p$  меньше периода квантования  $T$  и наименьшей постоянной времени входного сигнала  $f(t)$ , то изменением сигнала за время выборки можно пренебречь и принять значение сигнала постоянным в течение времени  $p$  (на  $k$ -м интервале дискретности).

Тогда выход квантователя с конечной шириной импульсов может быть представлен последовательностью импульсов:

$$f_p^*(t) = \begin{cases} f(kT) & \text{при } kT \leq t < kT + p, \\ 0 & \text{при } kT + p \leq t < (k+1)T, \end{cases}$$

$$f_p^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)[1(t - kT) - 1(t - kT - p)]. \quad (2.8)$$

Взяв от выражения (2.8) преобразование Лапласа, получим

$$F_p^*(s) = \int_0^{\infty} f_p^*(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \frac{1 - e^{-ps}}{s} e^{-ksT}. \quad (2.9)$$

Если время выборки достаточно мало, можно в разложении экспоненты в ряд Тейлора около точки  $p = 0$  ограничиться линейным приближением. Тогда

$$1 - e^{-ps} = 1 - \left( 1 - ps + \frac{(ps)^2}{2!} + \dots \right) \approx ps,$$

и выражение (2.9) превратится в следующую формулу:

$$F_p^*(s) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) p e^{-kTs}.$$

Последнее выражение соответствует оригиналу:

$$f_p^*(t) \approx p \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT),$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция.

Таким образом, квантователь с конечной шириной импульса заменяется на импульсный модулятор с несущим сигналом:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT),$$

или на идеальный квантователь, выход которого соединен с аттенуатором с коэффициентом передачи  $p$  (рис. 2.3).

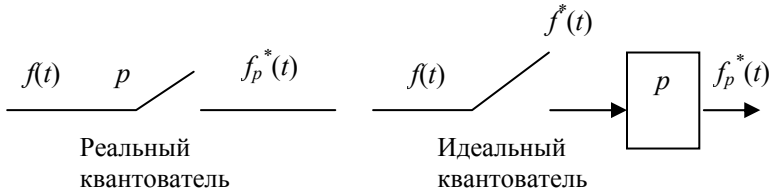


Рис. 2.3. Структурные схемы реального и идеального квантователя

Другими словами, идеальный квантователь — это квантователь с нулевым временем выборки, который замыкается и размыкается мгновенно с периодом  $T$ , с.

Аттенуатор необходим, только если мы рассматриваем «чистую» операцию квантования без дальнейшего применения устройства фиксации.

Идеальный квантователь имеет на своем выходе

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \delta_T(t). \quad (2.10)$$

Преобразование Лапласа от выражения (2.10) будет

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) для дискретного преобразования Лапласа можно получить и в другой форме, учитывая, что

$$\delta_T(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} p(t).$$

Тогда

$$F^*(s) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} F_p^*(s). \quad (2.12)$$

В последнюю формулу подставим выражение (2.7):

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p \sin n\omega_s p / 2}{T n\omega_s p / 2} e^{\frac{jn\omega_s p}{2}} F(s + jn\omega_s) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

В выражении (2.13) использован замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Чтобы формула (2.13) была справедлива, необходимо убедиться в сходимости интеграла вдоль полуокружности бесконечного радиуса. Можно показать, что выражение (2.13) справедливо только в том случае, если у функции  $F(s)$  число полюсов на два или более превышает число нулей, т.е. соответствующий оригинал  $f(t)$  не имеет разрывов первого рода в нуле. Если же такой разрыв у функции  $f(t)$  имеется, то более общее выражение для  $F^*(s)$  будет следующим:

$$F^*(s) = \frac{f(+0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s). \quad (2.14)$$

Как видно, формула (2.14) отличается от (2.13) только первым слагаемым и если разрывов у функции  $f(t)$  в нуле нет, т.е.  $f(-0) = f(+0) = 0$ , то обе формулы совпадают.

Подставив в формулу (2.12) выражение (2.5) или (2.6) в зависимости от характера полюсов  $F(s)$  и раскрыв неопределенность типа «ноль, деленный на ноль» по правилу Лопиталья, в пределе при  $p \rightarrow 0$  получим для простых полюсов

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi_n)}} \quad (2.15)$$

или соответственно для кратных полюсов

$$F^*(s) = \sum_n \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k_n-i}}{(k_n-i)!} \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \xi^{i-1}} \left( (\xi - \xi_n)^{k_n} F(\xi) \right) \Bigg|_{\xi=\xi_n} \times \\ \times \frac{\partial^{k_n-i}}{\partial \xi^{k_n-i}} \frac{1}{(1 - e^{-T\xi})} \Bigg|_{\xi=s-\xi_n} \quad (2.16)$$

Все формулы, полученные для  $F^*(s)$ , верны, однако применение той или иной формулы зависит от удобства и целей, для которых они используются.

Соотношение (2.11) удобно для нахождения преобразования Лапласа сигнала, прошедшего через идеальный квантователь. Формулу (2.14) или при определенных условиях (2.13) применяют при построении частотных характеристик и частотном анализе. Выражение (2.15) или (2.16) можно применять, если известно соответствующее непрерывное преобразование Лапласа и его полюсы.

Исследуем теперь частотные свойства сигнала, прошедшего через идеальный квантователь. Для этого воспользуемся соотношением (2.13), в которое вместо  $s$  подставим мнимое значение  $j\omega$ . Получим преобразование Фурье выходного сигнала идеального квантователя, или его комплексный частотный спектр:



$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s). \quad (2.17)$$

Компоненты-слагаемые  $F(j\omega + jn\omega_s)$  частотного комплексного спектра  $F^*(j\omega)$  импульсного сигнала образуются смещением по частоте комплексного частотного спектра исходного непрерывного сигнала  $F(j\omega)$  на величины, кратные частоте квантования  $\omega_s$ . То есть идеальный квантователь является генератором гармоник. На выходе идеального квантователя воспроизводится как спектр самого сигнала, так и дополнительные составляющие на частотах, кратных частоте квантования, причем амплитуда гармоник изменяется в  $1/T$  раз.

Если максимальная частота спектра исходного сигнала  $\omega_c$  не превышает половины частоты квантования (рис. 2.4,а):

$$\omega_c \leq \frac{\omega_s}{2}, \quad (2.18)$$

то перекрытия соседних компонентов спектра  $F^*(j\omega)$  не будет (рис. 2.4,б). В этом случае форма спектра непрерывного сигнала в основной полосе частот  $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$  полностью сохранится и в спектре импульсного сигнала (только произойдет масштабирование по оси ординат на величину  $1/T$  в соответствии с формулой (2.17)).

При невыполнении условия (2.18) суммирование транспонированных компонентов в (2.17) должно производиться с учетом фазовой составляющей спектра (рис. 2.4,в). На рис. 2.4,в пунктиром изображена функция

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s),$$

а жирной линией —  $F^*(j\omega)$ . При этом отличие пунктирной и жирной линий объясняется не только множителем  $1/T$ , но и векторным характером сложения в формуле (2.17). Видно,

что форма спектра  $F^*(j\omega)$  в основной полосе частот  $|\omega| < \omega_s/2$  существенно отличается от формы спектра непрерывного сигнала.

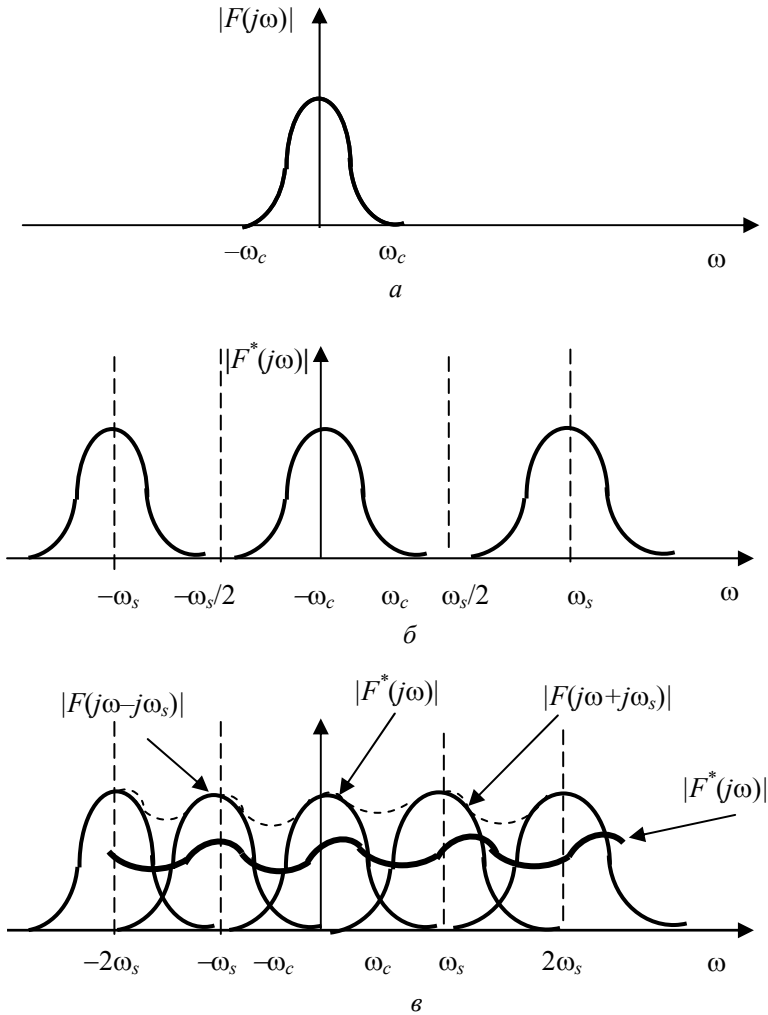


Рис. 2.4. Спектры частот после идеального квантователя

Этот эффект «переноса» высокочастотных «хвостов» спектра непрерывного сигнала в низкочастотную область при квантовании сигнала носит название **наложения частот**. Еще один эффект, связанный с квантованием сигнала, обусловлен периодичностью функции  $F^*(s)$  с периодом  $j\omega_s$ . Формально это обусловлено периодичностью экспоненты в комплексной степени. Действительно, воспользуемся формулой (2.13) и изменим аргумент  $F^*(s)$  на произвольное целое число периодов  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} F^*(s + jm\omega_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kT(s+jm\omega_s)} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}e^{-jkm\omega_s T} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}e^{-jkm2\pi} = F^*(s), \end{aligned}$$

поскольку  $e^{-jkm2\pi} = 1$  для целых  $k$  и  $m$ . Для частотного спектра  $F^*(j\omega)$  это означает, что  $F^*(j\omega)$  принимает одинаковые значения для всех частот, кратных  $\omega_s$ . Другими словами, наблюдая (измеряя) значения  $F^*(j\omega)$ , мы не можем различить частоты, кратные частоте квантования. Этот эффект называется эффектом **поглощения частот**, то есть частота  $\omega$  как бы поглощает все частоты  $\omega + k\omega_s$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Из периодичности функции  $F^*(s)$  непосредственно вытекают два свойства.

1. Поскольку для любой точки  $s = s_1$  на комплексной плоскости  $F^*(s)$  имеются одинаковые значения для всех периодических точек  $s = s_1 + jm\omega_s$ , то вся  $s$ -плоскость делится на бесконечное число полос: основная полоса частот  $|\operatorname{Im}s| < \omega_s/2$  и дополнительные полосы  $\omega_s/2 < \operatorname{Im}s < 3/2\omega_s$ ;  $-3/2\omega_s < \operatorname{Im}s < -1/2\omega_s$ ;  $3/2\omega_s < \operatorname{Im}s < 5/2\omega_s$  и т.д. (рис. 2.5).

2. Если функция  $F(s)$  имеет полюс  $s = s_1$ , то  $F^*(s)$  имеет бесконечное число полюсов  $s = s_1 + jm\omega_s$  для любого целого  $m$ .

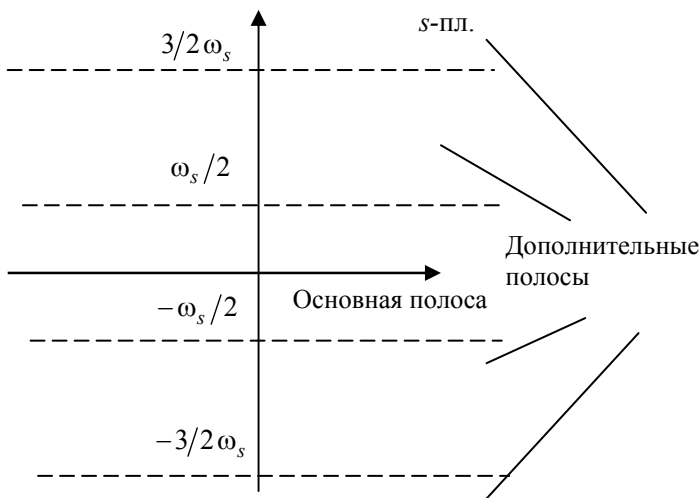


Рис. 2.5. Комплексная плоскость при квантовании

## 2.2. Восстановление сигналов

### 2.2.1. Импульсная теорема

Восстановление — это инверсная операция по отношению к операции квантования. В большинстве дискретных или цифровых систем сигнал должен быть отфильтрован от высших гармоник, которые возникают в процессе квантования. В цифровых системах необходимо преобразование управляющего воздействия, вырабатываемого микропроцессором в виде последовательности чисел, в непрерывный сигнал для подачи его на объект. Для сопряжения цифровых и аналоговых элементов используются устройства восстановления данных или, проще говоря, фильтры. Задачи восстановления возникают и при цифровой фильтрации.

Задача восстановления заключается в том, чтобы по изменяющемуся ряду чисел  $f(0)$ ,  $f(T)$ ,  $f(2T)$ , ... или последовательности импульсов с амплитудой  $f(kT)$  в дискретные моменты времени  $t = kT$  восстановить непрерывный сигнал

$f(t)$ . Теоретически восстановление сигнала возможно благодаря импульсной теореме.

Эта теорема известна также под следующими названиями: теорема прерывания, теорема отсчетов, теорема Котельникова, теорема Котельникова – Шеннона, в иностранной литературе — теорема Шеннона. Импульсную теорему можно сформулировать в следующем виде.

**Теорема 2.1.** Если сигнал не содержит частот выше частоты  $\omega_c$ , то он полностью описывается своими значениями, измеренными с частотой не меньше чем  $2\omega_c$ .

Шеннон дополнил эту теорему: непрерывный сигнал может быть получен из дискретного сигнала по интерполяционной формуле

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin(n\omega_s(t - kT)/2)}{\omega_s(t - kT)/2}, \quad (2.19)$$

где  $\omega_s$ , как и раньше, — частота квантования.

Частота  $\omega_N = \omega_s/2$  играет важную роль и часто называется **частотой Найквиста**.

### 2.2.2. Восстановитель Шеннона

Идеальное восстановление в случае периодического квантования можно осуществить в соответствии с импульсной теоремой по формуле (2.19). Устройство, осуществляющее восстановление по этой формуле, носит название восстановителя Шеннона. Уравнение (2.19) определяет операцию, которая может рассматриваться как линейный оператор. Однако формула (2.19) не является причинно-следственной, так как значения сигнала в момент времени  $t$  выражаются как через предшествующие, так и через последующие дискретные моменты времени.

В связи с этим восстановитель Шеннона неприемлем в случае систем управления, но может быть использован, например,

в системах связи, конечно, при соответствующем ограничении количества членов в сумме (2.19).

Недостатками восстановителя Шеннона являются относительная сложность, возможность использования только при периодическом квантовании и, как уже было отмечено, временное запаздывание.

Идеальный восстановитель, таким образом, представляет собой фильтр, имеющий амплитудно-частотную характеристику, изображенную на рис. 2.6, и нулевую фазочастотную характеристику. Фильтр с такими идеальными характеристиками физически нереализуем, но, тем не менее, представляет большой теоретический интерес.

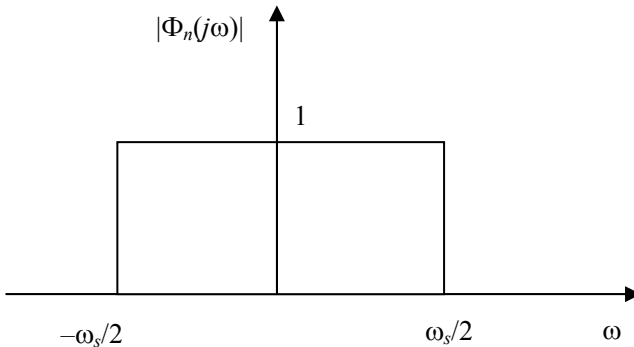


Рис. 2.6. Идеальный фильтр нижних частот

Краткий вывод: сигнал может быть восстановлен при периодическом квантовании, если выполняются два условия:

а) сигнал имеет ограниченный спектр, т.е. при  $|\omega| > \omega_c$  его преобразование Фурье равно нулю;

б) выполняется условие (2.18), а именно максимальная частота сигнала не превышает частоту Найквиста:  $\omega_c < \omega_N$ . Чем сильнее нарушается условие (2.18), тем возможность даже приблизительно восстановить непрерывный сигнал по его дискретным значениям становится все меньше. Поэтому так важно выбирать частоту квантования достаточно большой по

сравнению с частотными составляющими непрерывного сигнала.

### 2.2.3. Экстраполяторы

Задача восстановления сигнала — как можно точнее аппроксимировать исходную функцию времени  $f(t)$ . Но лучшая аппроксимация требует и большего времени задержки, что по соображениям устойчивости системы может быть недопустимым.

Рассмотрим один из наиболее простых, а потому и наиболее распространенных методов экстраполяции — разложение в ряд Тейлора. Разложим функцию  $f(t)$  на интервале времени  $kT \leq t \leq (k+1)T$ :

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t - kT)^2 + \dots, \quad (2.20)$$

где  $f_k(t) = f(t)$  при  $kT \leq t < (k+1)T$ ;  $f'(kT) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT}$  ;

$$f''(kT) = \left. \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \text{ и т.д.}$$

Производные можно аппроксимировать соответствующими разностями:

$$\begin{aligned} f'(kT) &\approx \frac{1}{T} [f(kT) - f((k-1)T)]; \\ f''(kT) &\approx \frac{1}{T} [f'(kT) - f'((k-1)T)] = \\ &= \frac{1}{T^2} [f(kT) - 2f((k-1)T) + f((k-2)T)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

и т.д.

Из выражений (2.21) видно, что чем выше порядок производной (т.е. чем больше берется членов в (2.20)) и чем точнее производится экстраполяция функции  $f(t)$ , тем больше

требуется выборка предшествующих значений функции  $f(kT)$ . Таким образом, основой экстраполирующего устройства является набор временных задержек, а их число зависит от точности оценки  $f(t)$ .

Если в уравнении (2.20) берется только первое слагаемое, то получаем экстраполятор нулевого порядка (ЭНП) или, как его еще называют, фиксатор нулевого порядка, поскольку он фиксирует значение сигнала до следующего момента квантования. Вследствие простоты это наиболее широко используемое устройство. Ранее рассмотренное устройство выборки и хранения как раз и является экстраполятором нулевого порядка.

Из свойств ЭНП полезно отметить два.

1. ЭНП пригоден для восстановления также и непериодических сигналов.

2. Восстановление с помощью ЭНП — это точная инверсия операции квантования только для сигналов, непрерывных справа и кусочно-постоянных.

Наибольшее значение ошибки, вносимой ЭНП, будет составлять

$$e_0 = \max_k |f((k+1)T) - f(kT)| \leq T \max |f'(t)|. \quad (2.22)$$

Получим передаточную функцию ЭНП. Пусть на его вход поступает последовательность импульсов

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT),$$

для которой преобразование Лапласа имеет вид

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}.$$

На выходе ЭНП будет ступенчатый сигнал

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(1(t - kT) - 1(t - kT - T)).$$



Преобразование Лапласа от выходного сигнала  $y(t)$  можно записать в виде

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left( \frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-k(T+1)s}}{s} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = X^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Отсюда передаточная функция ЭНП будет

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (2.23)$$

Экстраполятор первого порядка получим, если в выражении (2.20), помимо постоянной составляющей, возьмем линейное приближение:

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) \quad \text{при } kT \leq t < (k+1)T. \quad (2.24)$$

Передаточная функция экстраполятора первого порядка (или линейного экстраполятора, как его еще называют) имеет вид

$$W_1(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2}. \quad (2.25)$$

Наибольшее значение ошибки экстраполятора первого порядка составляет

$$e_1 = \max_k \cdot \max_t \left\{ f_k(t) - f(kT) - \frac{t - kT}{T} (f(kT) - f(k-1)T) \right\}.$$

Если функция  $f(t)$  имеет гладкую вторую производную, то

$$e_1 \leq T^2 \max_t f''(t).$$

Экстраполяторы первого порядка находят значительно меньшее применение в цифровых системах по причине большей сложности, чем ЭНП. И уже совсем экзотическими

являются экстраполяторы более высоких порядков, которые используются разве лишь в теоретических исследованиях.

Теперь можно дополнить п. 2.1.2 по выбору правильного периода квантования. Период квантования зависит, помимо всего прочего, от метода восстановления сигнала и от назначения системы.

При решении чистой задачи цифровой обработки сигнала все сводится к его записи в цифровой форме с последующим восстановлением. Естественным критерием выбора периода квантования будет при этом величина рассогласований между исходным сигналом и восстановленным.

Если спектр сигнала ограничен частотой  $\omega_c$  и задержка (накопление данных) допустима, то логично было бы воспользоваться восстановителем Шеннона с периодическим квантованием с частотой  $2\omega_c$ . Если запаздывание ограничено, то требуется применять более высокие частоты квантования или экстраполяторы нулевого или первого порядка.

После того как частота квантования определена, необходимо пропустить непрерывный сигнал, который подлежит квантованию, через фильтр, обрезающий частоты сигнала, превышающие частоту Найквиста, чтобы эти частотные составляющие не искажали низкочастотные компоненты вследствие эффекта наложения частот.

## 3. МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### 3.1. Основы метода

#### 3.1.1. Определение z-преобразования

Одним из математических методов, разработанных для анализа и синтеза дискретных (в том числе и цифровых) систем, является метод z-преобразования. Z-преобразование играет ту же роль для дискретных систем, что и преобразование Лапласа для непрерывных систем. Хотя в последние годы при исследовании дискретных систем широкое распространение получил другой метод — метод пространства состояний, важность z-преобразования нельзя недооценивать ввиду его компактности и наглядной физической интерпретации.

Z-преобразование получается из дискретного преобразования Лапласа заменой переменной  $e^{Ts} = z$ . Смысл такой замены ясен — при этом периодические функции комплексной переменной  $s$ , например формулы (2.11) и (2.15), с «неудобной» экспонентой в комплексной степени превращаются в дробно-рациональные выражения от переменной  $z$ .

Таким образом, из формул (2.11), (2.15) и (2.13) получаются соответственно следующие выражения для z-преобразования:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}; \quad (3.1)$$

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{\xi_n T}}; \quad (3.2)$$

$$F(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}, \quad (3.3)$$

где  $F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)}$ , а  $\xi_n$  — простые полюса функции  $F(\xi)$ .

Поскольку ограничений на временные ряды нет, то формулой (3.1) можно пользоваться для произвольных функций

времени. Если ряд (3.1) сходится, то  $z$ -преобразование можно записать в виде отношения полиномов по  $z$ .

Ограничения на применение формул (3.2) и (3.3) те же, что и ограничения, сделанные при выводе выражений (2.15) и (2.13).

Пользуясь формулами (3.1)–(3.3), а также теоремами  $z$ -преобразования, вытекающими из соответствующих теорем преобразования Лапласа, можно получать  $z$ -преобразование самых разных функций времени (см. приложение).

Символическая запись  $z$ -преобразования, которая будет использоваться в дальнейшем, — это либо выражение  $F(z) = Z\{f(t)\}$ , либо выражение  $F(z) = Z\{F(s)\}$ .

Последнее выражение означает, что берется  $z$ -преобразование от функции времени, преобразование Лапласа которой есть  $F(s)$ .

### 3.1.2. Ограничения метода $z$ -преобразования

$Z$ -преобразование является удобным средством для описания дискретных, в том числе и цифровых, сигналов и систем, но в некоторых случаях необходимо проявлять осторожность при его применении и интерпретации результатов.

$Z$ -преобразование базируется на предположении, что квантованный сигнал — это последовательность импульсов, площадь которых равна амплитуде входного сигнала системы. Это справедливо, только если время квантования намного меньше определяющей постоянной времени системы.

$Z$ -преобразование выходного сигнала  $Y(z)$  линейной системы определяется значениями временной функции  $y(t)$  только в моменты квантования. Следовательно,  $Y(z)$  не содержит информации о значениях  $y(t)$  между моментами квантования. Характер процессов между моментами квантования можно определить, воспользовавшись методом дробного квантования или методом модифицированного  $z$ -преобразования.

При анализе линейных систем методом  $z$ -преобразования передаточная функция непрерывной системы должна иметь полюсов, по крайней мере, на один больше, чем нулей. Экви-

валентное требование во временной области — отсутствие разрыва весовой (импульсной переходной) функции при  $t = 0$ . В противном случае процессы, представляемые  $z$ -преобразованием, могут быть ошибочными. Последнее ограничение, впрочем, для физически реализуемой системы выполняется всегда.

## 3.2. Импульсная передаточная функция

### 3.2.1. Определение импульсной передаточной функции

Рассмотрим прохождение дискретного импульсного сигнала через линейные цепи и получим описание линейной системы в терминах  $z$ -преобразования.

Пусть имеется линейная система с непрерывным сигналом  $r(t)$  на входе (рис. 3.1). Соотношение «вход–выход» такой системы, как известно, описывается передаточной функцией  $W(s) = Y(s)/R(s)$ .

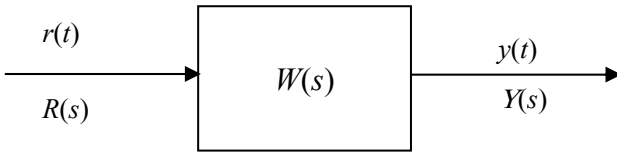


Рис. 3.1. Структурная схема линейной системы

Подадим теперь на вход такой системы дискретный сигнал

$$r^*(t) = r(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT).$$

На выходе будем иметь  $Y(s) = R^*(s)W(s)$ , где  $R^*(s)$  — преобразование Лапласа дискретного сигнала.

Проще всего представить описание такой системы в терминах  $z$ -преобразования, используя известное соотношение (2.13):

$$\begin{aligned}
 Y^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega_s) W(s + jn\omega_s). \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание свойство периодичности функции  $R^*(s + jn\omega_s) = R^*(s)$ , перепишем выражение (3.4) в виде

$$Y^*(s) = R^*(s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s). \quad (3.5)$$

Вводя обозначение

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s), \quad (3.6)$$

формулу (3.5) получим в виде

$$Y^*(s) = R^*(s) W^*(s), \quad (3.7)$$

или, переходя к переменной  $z = e^{Ts}$ , имеем

$$Y(z) = R(z) W(z). \quad (3.8)$$

Функция комплексной переменной  $W(z)$  есть импульсная передаточная функция. Согласно выражению (3.8) она представляет собой отношение  $z$ -преобразования сигнала на выходе системы к  $z$ -преобразованию сигнала на входе (при нулевых начальных условиях) и может вычисляться согласно выражению (3.3) по известной передаточной функции по формуле

$$W(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}. \quad (3.9)$$

Выходной сигнал  $y(t)$  может быть и непрерывным, но соотношение (3.8) определяет выходной сигнал только в моменты квантования. В некоторых случаях потеря информации между моментами квантования не играет существенной роли. В дру-

гих же случаях, если в сигнале  $y(t)$  между моментами квантования имеются колебания большой амплитуды, метод  $z$ -преобразования может дать неправильные результаты.

### 3.2.2. Соединения звеньев в дискретной системе

Необходимо внимательно относиться к нахождению импульсной передаточной функции всей системы по передаточным функциям звеньев. Возьмем, например, два последовательно соединенных звена, разделенных квантователем  $S_2$ , идентичным квантователю  $S_1$ , стоящему на входе первого звена (рис. 3.2).

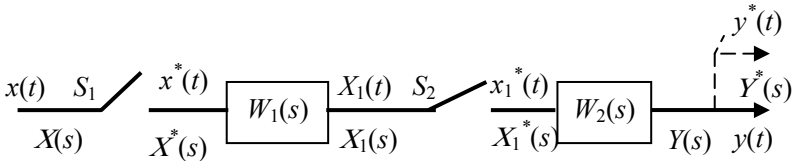


Рис. 3.2. Последовательное соединение звеньев

Учитывая обозначения, приведенные на рис. 3.2, составим уравнения, связывающие дискретные преобразования Лапласа соответствующих переменных:

$$X_1^*(s) = W_1^*(s) X^*(s); \quad (3.10)$$

$$Y^*(s) = W_2^*(s) X_1^*(s). \quad (3.11)$$

Подставляя уравнение (3.10) в (3.11) и переходя к переменной  $z$ , получим

$$Y(z) = W_1(z) W_2(z) X(z). \quad (3.12)$$

Из выражения (3.12) ясно, что импульсная передаточная функция такого соединения звеньев, как показано на рис. 3.2, равна произведению импульсных передаточных функций звеньев:

$$W(z) = W_1(z) W_2(z). \quad (3.13)$$

Если же два звена соединены последовательно, но не разделены квантователем (рис. 3.3), то импульсная передаточная функция такой схемы может быть записана как

$$W(z) = Z\{(W_1(s)W_2(s))\} = W_1W_2(z) = W_2W_1(z). \quad (3.14)$$

В выражении (3.14) стоящие рядом в правой части буквы  $W_1$  и  $W_2$  — это символическая запись того, что  $z$ -преобразование берется от временной функции, изображение Лапласа которой есть произведение  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Явной формулой для вычисления этого  $z$ -преобразования может служить, например, выражение (3.3) после подстановки в него соответствующих преобразований Лапласа:

$$W_1W_2(z) = Z\{W_1(s)W_2(s)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_1(s + jn\omega_s)W_2(s + jn\omega_s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}.$$

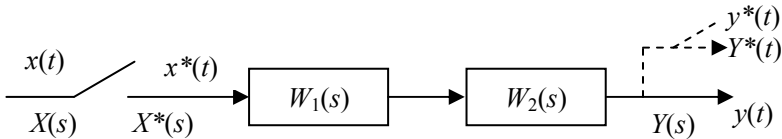


Рис. 3.3. Последовательное соединение не разделенных квантователем звеньев

В общем случае передаточные функции, определяемые выражениями (3.13) и (3.14), не совпадают, т.е.  $W_1W_2(z) \neq W_1(z)W_2(z)$ .

Выход системы, представленной на рис. 3.3, может быть определен как

$$Y(z) = W_1W_2(z)X(z).$$

Рассмотрим теперь параллельное соединение звеньев с одним общим квантователем на входе либо с двумя идентичны-



ми квантователями на входе каждого звена так, как это изображено на рис. 3.4, *a* и *б* соответственно.

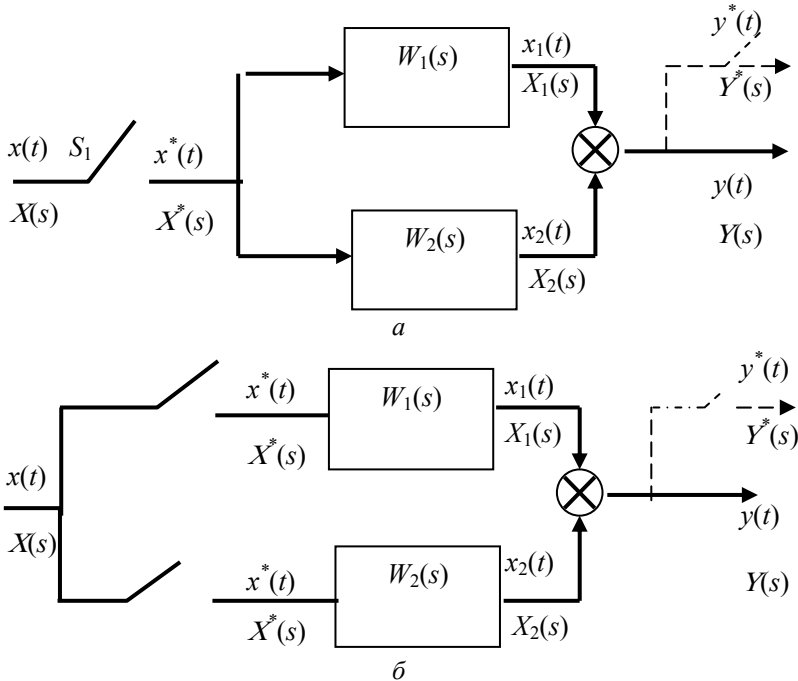


Рис. 3.4. Параллельное соединение звеньев

Нетрудно заметить, что импульсная передаточная функция параллельно соединенных звеньев получится в виде

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z).$$

Аналогичным образом можно получить импульсные передаточные функции соединения звеньев обратной связью. Например, для схемы, приведенной на рис. 3.5, импульсная передаточная функция будет

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1 W_2(z)}.$$

Для схемы, представленной на рис. 3.6, импульсная передаточная функция вычисляется так:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z)W_2(z)}.$$

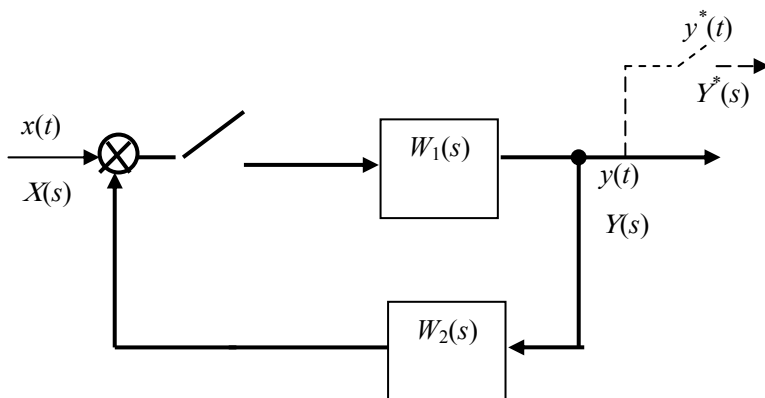


Рис. 3.5. Соединение звеньев обратной связью с квантователем на входе

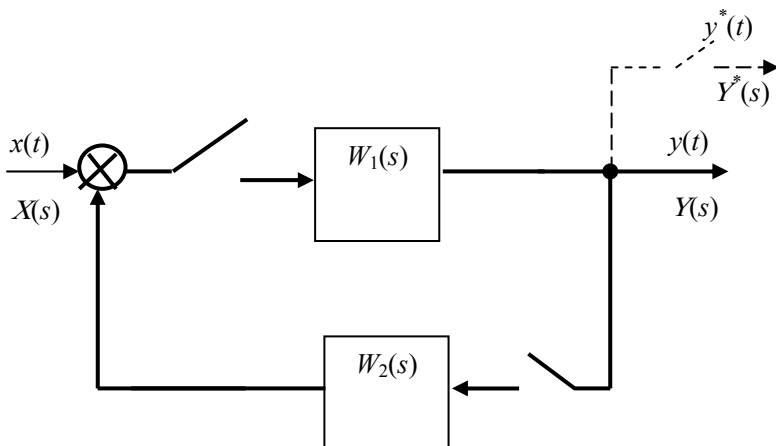


Рис. 3.6. Соединение звеньев обратной связью с двумя квантователями

На обеих схемах обратная связь отрицательна.

Импульсные передаточные функции систем с более сложными соединениями и (или) с большим числом синхронных квантователей могут быть получены алгебраическими преобразованиями или методом сигнальных графов.

### 3.2.3. Импульсная передаточная функция экстраполятора нулевого порядка

Передаточная функция экстраполятора нулевого порядка, как уже было показано, имеет вид

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (3.15)$$

А  $z$ -преобразование от  $W_0(s)$  есть

$$W_0(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1.$$

Этот результат очевиден, так как экстраполятор нулевого порядка в течение периода квантования удерживает выбранный (квантованный) сигнал постоянным и вычисление  $z$ -преобразования выходного сигнала экстраполятора должно определять исходный входной сигнал. Однако в большинстве случаев за фиксатором нулевого порядка следует непрерывная часть системы. Обозначая передаточную функцию непрерывной части системы через  $W(s)$ , в соответствии с рис. 3.7 получим  $z$ -преобразование выходного сигнала в виде

$$Y(z) = W_1(z) X(z), \quad (3.16)$$

где

$$W_1(z) = Z \{ W_0(s) W(s) \}. \quad (3.17)$$

Подставляя выражение (3.15) в формулу (3.17), получим

$$W_1(z) = Z \left\{ (1 - e^{-Ts}) \frac{W(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}.$$

В последнем выражении применена теорема о сдвиге во временной области, согласно которой умножение изображения на экспоненту равносильно временному сдвигу оригинала, а запаздывание на один такт функции времени приводит к появлению множителя  $z^{-1}$  в соответствующем  $z$ -преобразовании. Этим и объясняется появление скобки  $(1 - z^{-1})$ . Однако  $z$ -преобразование  $\frac{W(s)}{s}$  должно определяться как для единого целого.

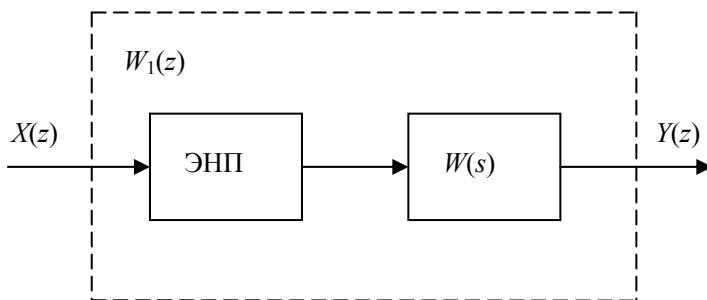


Рис. 3.7. Экстраполятор нулевого порядка с непрерывным звеном

Ранее уже говорилось о том, что при увеличении частоты квантования дискретная система приближается к непрерывной. Однако это не означает, что если  $Z\{W(s)\}S(z)$ , то

$$\lim_{T \rightarrow 0} W(z) = W(s).$$

Действительно, если сигнал  $x(t)$  прошел через идеальный квантователь, замыкающийся с периодом  $T$ , и образовал сигнал  $x^*(t)$ , то стремление  $T$  к нулю совсем не означает, что  $\lim_{T \rightarrow 0} x^*(t) = x(t)$ . Упомянутый предел будет представлять собой бесконечно частую «гребенку» идеальных импульсов, а не исходный непрерывный сигнал. Другое дело, если дискретный

сигнал  $x^*(t)$  поступает на вход фиксатора нулевого порядка. В этом случае, если обозначить выход фиксатора через  $y(t)$ , как это сделано на рис. 3.8, будет выполняться равенство  $\lim_{T \rightarrow 0} y(t) = x(t)$ , или в другой записи

$$\lim_{T \rightarrow 0} Y(s) = X(s).$$

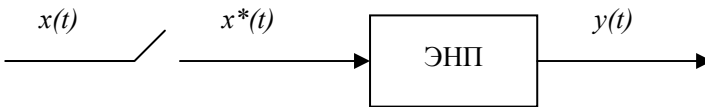


Рис. 3.8. Экстраполятор с квантователем на входе

Таким образом, если непрерывный сигнал подан на устройство выборки и хранения, то выходной сигнал последнего совпадает с этим непрерывным сигналом при периоде квантования, стремящемся к нулю.

Еще одно важное и полезное свойство экстраполятора нулевого порядка заключается в том, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} Z \{W_0(s)W(s)\} = W(s). \quad (3.18)$$

### 3.3. Процессы между моментами квантования

#### 3.3.1. Методы исследования процессов между моментами квантования

Непрерывный сигнал достаточно точно может быть описан своими дискретными выборками только при выполнении условий импульсной теоремы. Если эти условия не соблюдены, то метод  $z$ -преобразования не позволяет даже приблизительно судить о процессах между моментами квантования. Информация же об этом порой бывает крайне необходимой. Помочь в таком случае могут разработанные на основе

$z$ -преобразования метод дробного квантования и метод модифицированного  $z$ -преобразования. Они применяются как основные математические методы при исследовании цифровых систем с многократным квантованием и (или) с переменным периодом квантования.

### 3.3.2. Метод дробного квантования

Суть метода дробного квантования можно пояснить с помощью рис. 3.9. Система, исследуемая методом  $z$ -преобразования, показана на рис. 3.9,*а*. Два квантователя (как основной на входе, так и фиктивный на выходе, изображенный пунктиром) работают синхронно с периодом  $T$  и обозначены  $S_1$ .

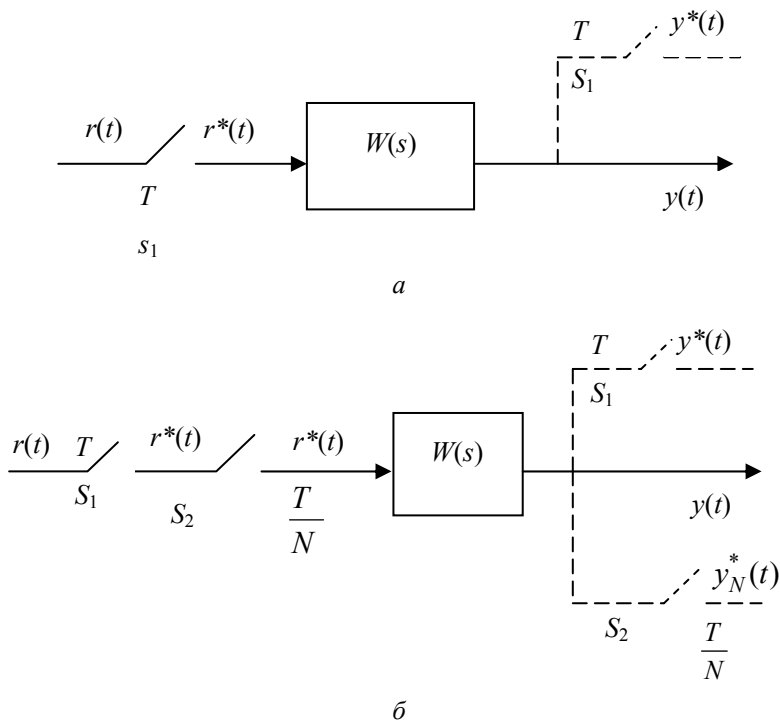


Рис. 3.9. Дробное квантование

Для того чтобы исследовать процессы между моментами квантования, введем в систему дополнительно два фиктивных квантователя  $S_2$  — один на входе и один на выходе системы (рис. 3.9,б), и заставим эти квантователи работать чаще квантователей  $S_1$  в  $N$  раз. Таким образом, период замыкания квантователей  $S_2$  будет  $\frac{T}{N}$ , где  $N$  — целое положительное число, большее единицы. Ясно, что замыкание квантователя  $S_2$  на входе между моментами квантования основного ключа  $S_1$  ничего в поведении системы не изменит.

Сигнал на выходе может быть представлен как

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) w(t - kT), \quad (3.19)$$

где  $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$  — весовая функция системы.

Выражение (3.19) справедливо для произвольного момента времени, в том числе и для  $t = \frac{nT}{N}$ , поэтому, полагая в формуле (3.19)  $t = \frac{nT}{N}$ , имеем

$$y\left(\frac{nT}{N}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) w\left(\frac{nT}{N} - kT\right). \quad (3.20)$$

Запишем теперь выход системы после фиктивного квантователя  $S_2$ :

$$y_N^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y\left(\frac{nT}{N}\right) \delta\left(t - \frac{nT}{N}\right).$$

Применяя  $z$ -преобразование к последнему соотношению, получим

$$Y_N(z) = Z\left\{y_N^*(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} y\left(\frac{nT}{N}\right) z^{-\frac{n}{N}}. \quad (3.21)$$

Подставляя в соотношение (3.21) выражение (3.20), имеем

$$Y_N(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) w\left(\frac{nT}{N} - kT\right) z^{-\frac{n}{N}}. \quad (3.22)$$

Для разделения индексов суммирования в формуле (3.22) положим  $\frac{n}{N} - k = \frac{m}{N}$ , где  $m$  — целое число. Учитывая, что весовая функция физически реализуемой системы тождественно равна нулю при отрицательном аргументе, выражение (3.22) преобразуем к виду

$$Y_N(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w\left(\frac{mT}{N}\right) z^{-\frac{m}{N}} \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) z^{-kT} = W_N(z) R(z), \quad (3.23)$$

где введено очевидное обозначение

$$W_N(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w\left(\frac{mT}{N}\right) z^{-\frac{m}{N}}. \quad (3.24)$$

Легко можно заметить, что формула (3.24) получается из обычного  $z$ -преобразования после замены  $z = z^{\frac{1}{N}}$  и  $T = \frac{T}{N}$ . Таким образом, реакция системы между моментами квантования может быть найдена из выражения (3.23), где

$$W_N(z) = W(z) \left| \begin{array}{l} \\ z = z^{\frac{1}{N}}, T = \frac{T}{N} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Анализируя систему с фиксатором нулевого порядка, можно понять, что на член  $1 - z^{-1}$  замена  $z = z^{\frac{1}{N}}$  и  $T = \frac{T}{N}$  влияния не оказывает.



Недостатком метода дробного квантования является то, что он позволяет получать выход системы только в конкретных дискретных точках, и чем больше нам необходимо иметь таких точек, тем большее значение  $N$  мы должны задавать в формулах (3.21)–(3.25). С ростом же  $N$  вычисления усложняются, поскольку для избавления от  $z$  в дробной степени неизбежно приходится вводить новую переменную  $z_N = z^{\frac{1}{N}}$ , что затрудняет нахождение  $W_N(z)$  в выражении (3.23).

**Пример 3.1.** Пусть структурная схема системы имеет вид, представленный на рис. 3.10.

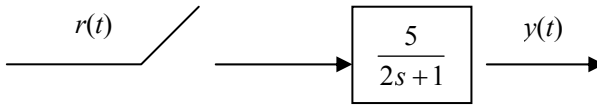


Рис. 3.10. К примеру 3.1

Период квантования  $T = 1$  с. Требуется найти значения выхода системы  $y(t)$  в моменты времени  $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$  с, если на входе действует единичный ступенчатый сигнал  $r(t) = 1(t)$ .

В соответствии с формулой (3.23) получим

$$Y_3(z) = W_3(z)R(z),$$

где  $W_3(z) = Z \left\{ \frac{5}{2s+1} \right\} \Big|_{\substack{z=z^{\frac{1}{3}}, \\ T=\frac{T}{3}}} = \frac{5}{2} \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{2}}} \Big|_{\substack{z=z^{\frac{1}{3}}, \\ T=\frac{T}{3}}} = \frac{5z^{\frac{1}{3}}}{2 \left( z^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{T}{6}} \right)}.$

$Z$ -преобразование единичной ступенчатой функции будет  $R(z) = Z \{1(t)\} = \frac{z}{z-1}$ . Чтобы не оперировать с дробными

степенями  $z$ , переобозначим  $z^{\frac{1}{3}} = z$ . Учитывая, что  $e^{-\frac{1}{6}} = 0,847$ , получим

$$Y(z) = \frac{5z}{2(z-0,847)} \frac{z^3}{z^3-1} = \frac{5z^4}{2z^4-1,69z^3-2z+1,69}.$$

Осуществляя деление числителя на знаменатель (при этом, конечно, полиномы числителя и знаменателя должны располагаться по убывающим степеням  $z$ ), получим разложение  $Y(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ :

$$Y(z) = 2,5 + 2,12z^{-1} + 1,79z^{-2} + 4,01z^{-3} + \\ + 3,39z^{-4} + 2,88z^{-5} + 4,94z^{-6} + \dots$$

Коэффициенты этого разложения есть значения функции  $y(kT)$  в дискретных точках  $k=0, \dots, 6$ , следующих через интервалы времени  $1/3$  с.

### 3.3.3. Метод модифицированного $z$ -преобразования

Идея этого метода также достаточно прозрачна и заключается во введении на выходе системы фиктивного блока задержки на время  $\Delta T$ , где  $0 \leq \Delta < 1$ , и фиктивного квантователя, синхронно работающего с основным квантователем на входе (рис. 3.11).

Передаточная функция звена постоянного запаздывания равна  $e^{-\Delta T s}$ . Обозначив  $z$ -преобразование выходного сигнала фиктивного квантователя с временной задержкой через  $Y(z, \Delta)$ , получим

$$Y(z, \Delta) = Z\{y(t - \Delta T)\}.$$

Так как  $z$ -преобразование есть преобразование Лапласа импульсной функции после замены  $z = e^{Ts}$ , последнее выражение можно продолжить:

$$\begin{aligned}
Y(z, \Delta) &= L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} y(kT - \Delta T) \delta(t - kT) \right\}_{z=e^{Ts}} = \\
&= L \left\{ y(t - \Delta T) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \right\}_{z=e^{Ts}} = \\
&= L \{ y(t - \Delta T) \} * L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \right\}_{z=e^{Ts}},
\end{aligned}$$

где через \* обозначена свертка изображений (согласно теореме о свертке в области изображений).

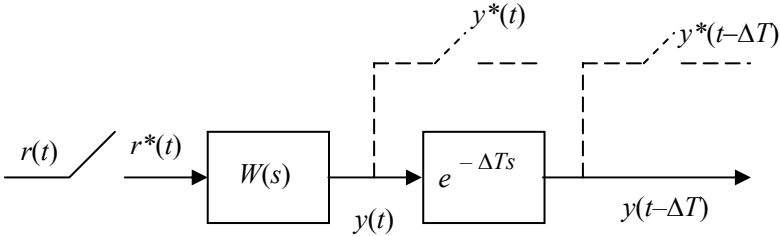


Рис. 3.11. Модифицированное  $z$ -преобразование

Используя теорему о сдвиге во временной области, изображение гребенки дельта-функций и запись свертки в явном виде, получим

$$Y(z, \Delta) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(\xi) e^{-\Delta T \xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \Big|_{z=e^{Ts}}. \quad (3.26)$$

Введем параметр  $m = 1 - \Delta$ . Так же как и  $\Delta$ , параметр  $m$  может меняться от нуля до единицы. С учетом обозначения

$$Y(z, m) = Y(z, \Delta) \Big|_{\Delta=1-m}$$

выражение (3.26) примет вид

$$\begin{aligned}
 Y(z, m) &= \frac{1}{2\pi j} \oint Y(\xi) e^{-T\xi} e^{mT\xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \Big|_{z=e^{Ts}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint L\{y(t-T)\} e^{mT\xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi.
 \end{aligned}$$

Применив к последнему интегралу теорему о вычетах, получим следующие две формулы для вычисления модифицированного  $z$ -преобразования:

$$Y(z, m) = z^{-1} \sum \operatorname{Res} \left\{ Y(\xi) \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \right\} \Big|_{\text{в полюсах } Y(\xi)} \quad (3.27)$$

и

$$Y(z, m) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s+jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}}. \quad (3.28)$$

Еще одна формула может быть получена, если непосредственно применить  $z$ -преобразование к  $y^*(t - \Delta T)$ . В этом случае

$$Y(z, m) = Z\{y^*(t - \Delta T)\} \Big|_{\Delta=1-m} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT + mT - T) z^{-k},$$

или с учетом теоремы о запаздывании

$$Y(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} y((k+m)T) z^{-k}. \quad (3.29)$$

Таким образом, получены три выражения для модифицированного  $z$ -преобразования: (3.27), (3.28) и (3.29). Формула (3.27) справедлива для любого сигнала  $y(t)$ , имеющего преобразование Лапласа  $Y(s)$ , и этой формулой удобно пользоваться, если задано (или его легко найти) изображение сигнала  $Y(s)$ . Формула (3.28) справедлива, только если  $y(0) = 0$ . И наконец, формула (3.29) является наиболее общей, поскольку никаких ограничений на временные ряды при ее выводе не накладывалось.

Необходимо сделать еще одно замечание, касающееся модифицированного  $z$ -преобразования. Хотя при  $\Delta = 0$  ( $m = 1$ )

модифицированное  $z$ -преобразование переходит в обычное  $z$ -преобразование, это не означает, что непременно должно выполняться равенство

$$Y(z, m) \Big|_{m=1} = Y(z). \quad (3.30)$$

Действительно, положив в выражении (3.29)  $m = 1$ , получим

$$Y(z, m) \Big|_{m=1} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} y((k+m)T) z^{-k} = Y(z) - y(0),$$

то есть равенство (3.30) справедливо, только если  $y(0) = 0$ .

Значения сигнала между моментами квантования можно определить из  $Y(z, m)$  при варьировании величины  $m$  от единицы до нуля.

С помощью модифицированного  $z$ -преобразования можно найти передаточную функцию системы, изображенной на рис. 3.11. Преобразование Лапласа от выходного сигнала  $y(t)$  имеет вид

$$Y(s) = W(s) R^*(s).$$

Подставляя это выражение в формулу (3.28), получим

$$\begin{aligned} Y(z, m) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s) R^*(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} = \\ &= R(z) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} = R(z) W(z, m), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $W(z, m)$  является модифицированным  $z$ -преобразованием от  $W(s)$  и вычисляется по формуле, аналогичной (3.28).

Точно таким же образом, как и для разомкнутой системы, может быть определена реакция замкнутой системы между моментами квантования. Рассмотрим пример замкнутой системы, структурная схема которой приведена на рис. 3.12.

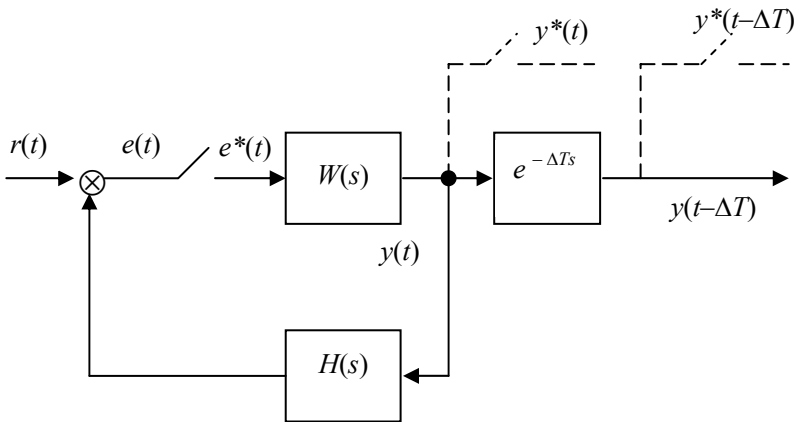


Рис. 3.12. Система с обратной связью

Составляем уравнения системы:

$$\begin{aligned}
 Y(z, m) &= W(z, m)E(z); \\
 E(z) &= R(z) - WH(z)E(z),
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

где  $WH(z)$  —  $z$ -преобразование от произведения  $W(s)H(s)$ .

Из уравнений (3.32) получаем

$$Y(z, m) = \frac{W(z, m)}{1 + WH(z)} R(z).
 \tag{3.33}$$

### 3.4. Структурный анализ дискретных систем

С помощью аппарата  $z$ -преобразований и импульсных передаточных функций удобно проводить структурный анализ цифровых систем. Определение передаточных функций в простых случаях параллельного, последовательного соединения или соединения звеньев обратной связью, а также в простых одноконтурных системах уже проводилось с помощью алгебраических преобразований. Однако метод эквивалентных

структурных преобразований может оказаться достаточно сложным в применении к дискретным системам со сложной структурой и несколькими квантователями. Известная формула Мейсона, являющаяся основой метода графов, также не может быть непосредственно применима к дискретным (цифровым) системам, потому что в большинстве цифровых систем управления присутствуют как цифровые, так и непрерывные сигналы.

Один из подходов, расширяющих аппарат метода графов для цифровых систем, основан на формировании так называемого дискретного графа, в котором все узловые переменные являются дискретными. Тогда формула Мейсона справедлива и может использоваться. Метод дискретного графа можно разбить на ряд шагов.

1. По структурной схеме (рис. 3.13,*а*) составляется эквивалентный граф системы (рис. 3.13,*б*).

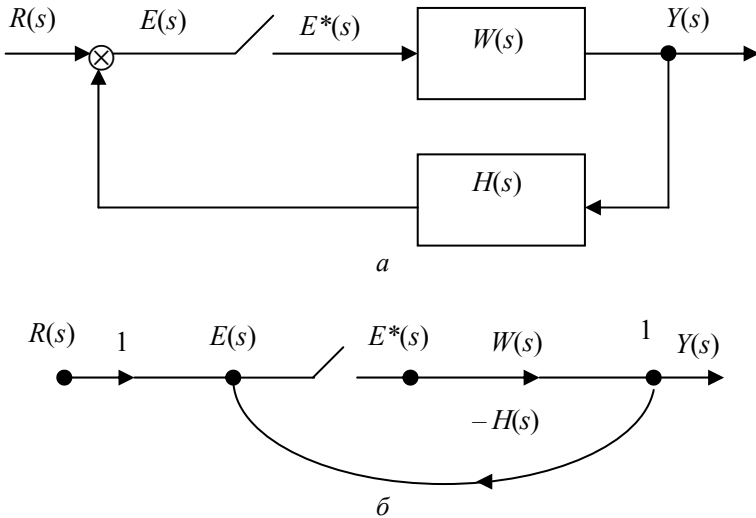


Рис. 3.13. Составление дискретного графа цифровой системы

2. На основе полученного эквивалентного графа производят построение дискретного графа. Для этого запишем

систему уравнений для всех вершин графа, показанного на рис. 3.13,б:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - W(s)H(s)E^*(s); \\ Y(s) &= W(s)E^*(s). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Если рассматривать выходной сигнал квантователя как входную переменную, то сам квантователь может быть удален из графа системы.

В уравнениях (3.34) перейдем в правых и левых частях к дискретному преобразованию:

$$\begin{aligned} E^*(s) &= R^*(s) - WH^*(s)E^*(s); \\ Y^*(s) &= W^*(s)E^*(s), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $WH^*(s)$ ,  $Y^*(s)$ ,  $E^*(s)$  и  $W^*(s)$  вычисляются, например, по формулам, аналогичным выражениям (2.13) или (3.6).

Уравнения (3.35) содержат только дискретные переменные, поэтому граф, соответствующий этим уравнениям, можно назвать дискретным графом (рис. 3.14).

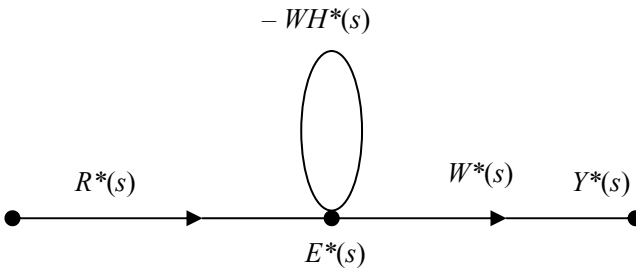


Рис. 3.14. Дискретный граф системы

3. В дискретном графе связь между любым входным и выходным сигналом может быть определена по формуле Мейсона. Например, для дискретного графа, приведенного на рис. 3.14, применение формулы Мейсона к входу системы  $Y^*(s)$  и к ошибке  $E^*(s)$  дает



$$Y^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + WH^*(s)} R^*(s),$$

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + WH^*(s)} R^*(s).$$

4. Если необходимо связать непрерывные выходные сигналы с входными, то это можно сделать с помощью составного графа, который является комбинацией эквивалентного непрерывного и дискретного графов. Для его получения необходимо соединить дугой с единичным весом выходной узел квантователя эквивалентного графа с аналогичным узлом дискретного графа (рис. 3.15).

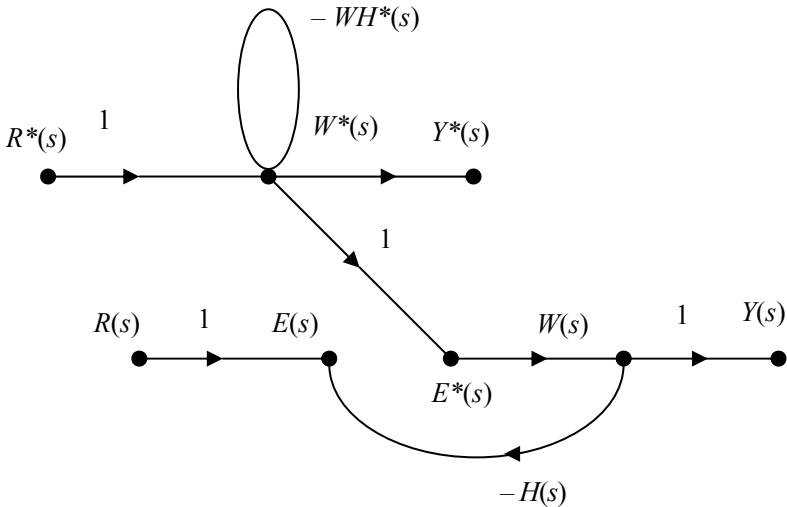


Рис. 3.15. Составной граф системы

Формула Мейсона, примененная к выходным вершинам составного графа, позволяет определить передаточные функции для всех цифровых и непрерывных выходных сигналов. Таким образом, из рис. 3.15 имеем

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + WH^*(s)} R^*(s),$$

$$E(s) = R(s) - \frac{W(s)H(s)}{1 + WH^*(s)} R^*(s).$$
(3.36)

Вышеизложенная процедура применима также к линейным многоконтурным системам с несколькими синхронно работающими квантователями.

Модифицированное  $z$ -преобразование может быть получено непосредственно из выражений (3.36).

Существуют и другие методы вычисления передаточной функции сложной многоконтурной системы с дискретными и непрерывными сигналами, например метод прямого графа, разработанный Седлером и Бэки (Sedlar M. and Bekey G.).

Подведем итог применению метода  $z$ -преобразования для исследования цифровых систем. После ведения  $z$ -преобразования и модифицированного  $z$ -преобразования можно построить формальную алгебру для работы с цифровыми системами. Вначале составляется структурная схема исследуемой системы. Каждый аналого-цифровой преобразователь представляется как идеальный квантователь, а цифро-аналоговый преобразователь — как устройство выборки и хранения. Линейные стационарные элементы описывают их передаточными функциями, а линейные вычисления в ЦВМ — импульсными передаточными функциями. Участки между квантователями свертывают по обычным правилам эквивалентных преобразований линейных стационарных систем. Если имеются сложные перекрещивающиеся связи, для вычисления передаточных функций применяют, например, метод дискретных графов. После этого можно записать уравнение системы, которое преобразуют, используя теоремы  $z$ -преобразования.

Рассмотрим в качестве примера стандартную конфигурацию простейшей цифровой системы управления (рис. 3.16).

Объект управления характеризуется передаточной функцией  $W(s)$ , а вычисления, выполняемые ЦВМ, — импульсной передаточной функцией  $H(z)$ .

Как обычно, аналоговая и цифровая части соединены посредством аналого-цифрового и цифроаналогового преобразователей. Чтобы применить формализм, аналого-цифровой преобразователь представляем в виде идеального квантователя, ЦВМ — как устройство, преобразующее один импульсно-модулированный сигнал в другой, в виде блока с импульсной передаточной функцией  $H(z)$ , цифроаналоговый преобразователь — как идеальный квантователь, последовательно соединенный с фиксатором нулевого порядка.

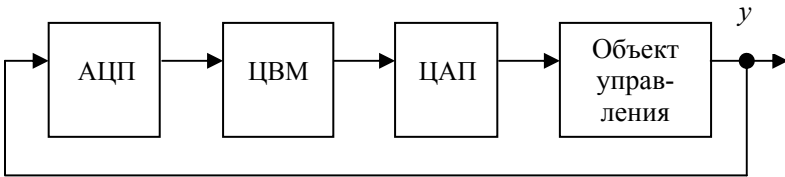


Рис. 3.16. Функциональная схема простейшей цифровой системы

Выделяя еще элемент сравнения (датчик), получим схему, изображенную на рис. 3.17.

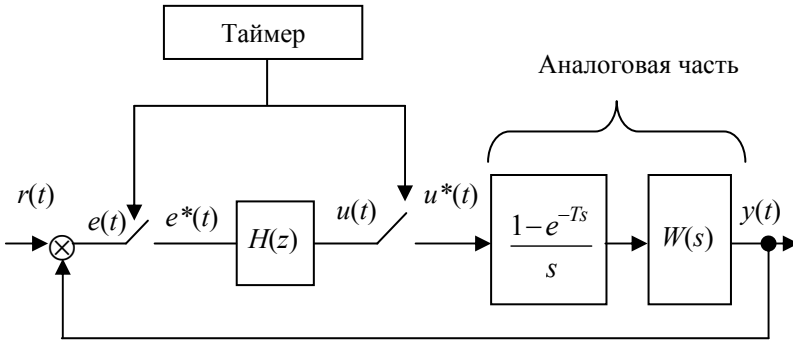


Рис. 3.21. Структурная схема цифровой системы

Аналоговая часть имеет передаточную функцию

$$F(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} W(s).$$

Преобразование Лапласа выхода  $y(t)$  можно записать как

$$Y(s) = F(s)U^*(s). \quad (3.37)$$

Переходя к дискретному преобразованию Лапласа, из формулы (3.37) получим

$$Y^*(s) = F^*(s)U^*(s),$$

или в форме  $z$ -преобразования после замены переменной  $z = e^{Ts}$

$$Y(z) = F(z)U(z).$$

Окончательно структурная схема системы предстанет таковой, как она изображена на рис. 3.18.

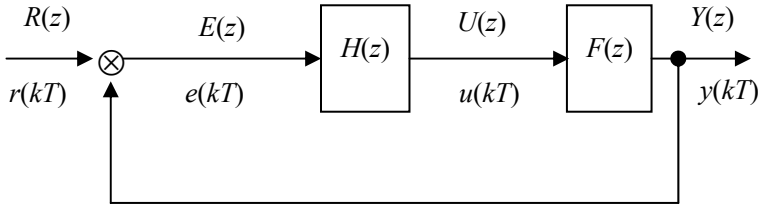


Рис. 3.18. Структурная схема системы при  $z$ -преобразовании переменных

Таким образом, введение импульсной передаточной функции и рассмотрение сигналов в дискретные моменты времени позволяют представить систему аналогично обычной структурной схеме непрерывной системы.

## 4. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

### 4.1. Уравнения состояния

#### 4.1.1. Основные понятия

Метод пространства состояний, применяемый для исследования непрерывных систем, с успехом может быть использован и для цифровых систем. Если непрерывная система описывается в пространстве состояний системой дифференциальных уравнений первого порядка (нормальная форма Коши), то цифровая система только с дискретными элементами — системой разностных уравнений первого порядка. В общем случае цифровая система может содержать как цифровые, так и аналоговые элементы, поэтому уравнения состояния включают одновременно дифференциальные и разностные уравнения первого порядка.

Метод пространства состояний имеет определенные преимущества перед классическим частотным методом:

- удобство решения задач на ЦВМ;
- унификация описания цифровых систем с различными типами квантования;
- единообразие описания одномерных и многомерных систем;
- возможность применения к некоторым типам нелинейных и нестационарных систем.

В общем случае состояние системы можно представить как минимальную информацию о ней, необходимую для определения (при известной входной функции) ее выхода, а также ее состояния в будущем.

Для систем только с дискретными переменными совокупность переменных  $\mathbf{x}$  образует вектор состояния системы, если можно найти такие две однозначные функции  $f$  и  $g$ , что

$$\mathbf{x}(kT + T) = f(\mathbf{x}(kT), \mathbf{r}(kT)); \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(kT) = g(\mathbf{x}(kT), \mathbf{r}(kT)), \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{y}(kT)$  — выходной вектор в момент времени  $kT$ ;  $\mathbf{r}(kT)$  — вектор входных воздействий в момент времени  $kT$ .

Соотношение (4.1) называется уравнением состояния, а выражение (4.2) — уравнением выхода.

#### 4.1.2. Уравнения динамики систем, содержащих только цифровые элементы

В случае линейной многомерной системы, содержащей только цифровые элементы, уравнения (4.1), (4.2) записываются в виде линейных векторно-матричных разностных уравнений:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}(kT) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT) \cdot \mathbf{r}(kT); \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT) \cdot \mathbf{r}(kT), \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{x}(kT)$  — вектор-столбец состояний системы размерностью  $n$ ;  $\mathbf{r}(kT)$  — вектор-столбец входных воздействий размерностью  $p$ ;  $\mathbf{y}(kT)$  — вектор-столбец выходных сигналов размерностью  $m$ ;  $\mathbf{A}(kT)$ ,  $\mathbf{B}(kT)$ ,  $\mathbf{C}(kT)$ ,  $\mathbf{D}(kT)$  — матрицы соответствующей размерности с изменяющимися в общем случае во времени элементами. Значения этих элементов могут меняться только в дискретные моменты времени  $kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Если уравнения (4.3), (4.4) описывают стационарную систему, элементы матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  не зависят от времени.

Уравнения (4.3), (4.4) могут быть записаны и в другой форме, если дискретное время нормировать, то есть положить  $T = 1$ :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{r}(k); \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \cdot \mathbf{r}(k). \quad (4.6)$$

На практике уравнения динамики (4.5) и (4.6) могут описывать систему, в которой  $k$  обозначает шаги или последовательность действий, при этом шаги могут следовать необязательно через равные промежутки времени. Тогда уравнения состояния (4.5) и выхода (4.6) можно представить в таком виде:

$$\mathbf{x}(k_{j+1}) = \mathbf{A}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{B}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j); \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}(k_j) = \mathbf{C}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{D}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j). \quad (4.8)$$

Общая структурная схема системы, соответствующая, например, уравнениям (4.5), (4.6), представлена на рис. 4.1.

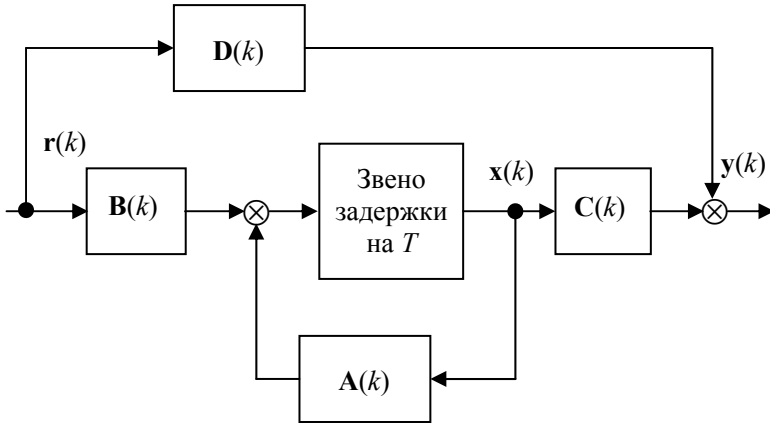


Рис. 4.1. Структурная схема системы в пространстве состояний

### 4.1.3. Уравнения динамики систем с квантователем и фиксатором

Пусть на каждом из входов непрерывной линейной системы имеется устройство выборки и хранения, то есть присутствует идеальный квантователь и экстраполятор нулевого порядка — фиксатор (рис. 4.2).

Так как  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , являются выходными сигналами устройств выборки и хранения, они постоянны на каждом интервале квантования:

$$u_i(t) = u_i(kT) = r_i(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T. \quad (4.9)$$

Пусть динамика непрерывной системы описывается уравнениями состояния:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t); \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t). \quad (4.11)$$

Как известно [1], решение уравнения состояния (4.10) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau; \quad (4.12)$$

где  $\Phi(t, t_0)$  — переходная (фундаментальная) матрица, соответствующая матрице  $\mathbf{A}(t)$ .

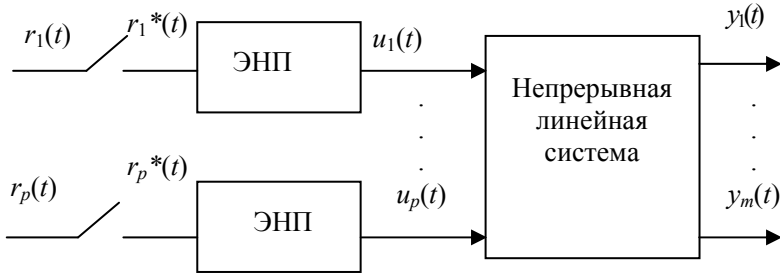


Рис. 4.2. Система с квантователями и экстраполяторами нулевого порядка

Соотношение (4.12) справедливо для любых  $t$  и  $t_0$ , поэтому положим в его решении  $t_0 = kT$  и  $t = (k+1)T$ . С учетом равенства (4.9) входное воздействие  $\mathbf{u}(\tau)$  можно вынести за знак интеграла, и окончательно из выражения (4.12) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \Phi[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \\ &+ \Theta[(k+1)T, kT]\mathbf{r}(kT), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\Theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)dt. \quad (4.14)$$



Выражение (4.13) является, по сути, дискретным уравнением состояния цифровой системы, представленной на рис. 4.2. Оно описывает динамику состояния системы только в дискретные моменты времени. Естественным будет переход к дискретному времени и в уравнении выхода (4.11), которое при замене  $t = kT$  имеет вид

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT)\mathbf{r}(kT). \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13) и (4.15) в совокупности являются уравнениями динамики цифровой системы с квантованием и фиксацией.

Уравнения (4.13) и (4.15) можно записать в более простом виде для нормированного времени, положив  $T = 1$ :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}[(k+1), k]\mathbf{x}(k) + \mathbf{\theta}[(k+1), k]\mathbf{r}(k); \quad (4.16)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{r}(k), \quad (4.17)$$

где

$$\mathbf{\theta}(k+1, k) = \int_k^{k+1} \mathbf{\Phi}(k+1, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau. \quad (4.18)$$

Наконец, эти же уравнения динамики можно записать, если в соотношениях (4.11) и (4.12) положить  $t_0 = t_k$ , а  $t = t_k + 1$ , где  $t_k$  и  $t_k + 1$  — соседние моменты замыкания квантователя (в этом случае моменты замыкания квантователя не обязаны следовать через равные промежутки времени):

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{\theta}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{r}(t_k); \quad (4.19)$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D}(t_k)\mathbf{r}(t_k), \quad (4.20)$$

где

$$\mathbf{\theta}(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau. \quad (4.21)$$

#### 4.1.4. Прямое и обратное время в уравнениях состояния

Прежде чем приступить к решению уравнений состояния, подчеркнем еще раз общее и различие в уравнениях состояния систем только с цифровыми сигналами (4.5) и систем с непрерывной частью, квантователем и фиксатором (4.13). Прежде всего обратим внимание, что решение непрерывного уравнения состояния (4.12) справедливо для любых  $t$  и  $t_0$ , поскольку переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$  является невырожденной для конечной непрерывной по времени матрицы  $\mathbf{A}(t)$ . Следовательно, решение уравнения (4.12) справедливо как для  $t > t_0$  (для «прямого» времени), так и для  $t < t_0$  (для «обратного» времени). Поскольку уравнения состояния цифровой системы (4.13), (4.16) и (4.19) были получены из уравнения (4.12), то они также двунаправлены по дискретному времени.

Перейти к обратному времени, например, в уравнении (4.16) можно следующим образом. Решим уравнение (4.16) относительно  $\mathbf{x}(k)$ :

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^{-1}(k+1, k) \mathbf{x}(k+1) - \Phi^{-1}(k+1, k) \boldsymbol{\theta}(k+1, k) \mathbf{r}(k).$$

Воспользовавшись свойствами переходной матрицы, из последнего соотношения получим

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k+1) \cdot \mathbf{x}(k+1) + \boldsymbol{\theta}(k, k+1) \cdot \mathbf{r}(k),$$

где

$$\boldsymbol{\theta}(k, k+1) = \int_{k+1}^k \Phi(k, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau. \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) описывает изменение состояния системы от «будущего» времени  $k+1$  к «прошлому» времени  $k$ . Это же уравнение можно получить, если в соотношение (4.12) подставить  $t_0 = k+1$  и  $t = k$ .

В отличие от уравнения (4.13), в уравнении (4.5) никаких физических ограничений на элементы матриц  $\mathbf{A}(k)$  и  $\mathbf{B}(k)$  не

существует. Это означает, что матрица  $\mathbf{A}(k)$  для некоторых значений  $k$  может быть вырожденной. Если матрица  $\mathbf{A}(k)$  является невырожденной для  $k \leq N$ , то уравнение (4.5) можно записать как в прямом, так и в обратном времени для всех  $k$ , не превышающих  $N$ . В этом случае будет справедливо соотношение

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{-1}(k)\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A}^{-1}(k)\mathbf{B}(k)\mathbf{r}(k), \quad k \leq N.$$

Сравнение уравнений (4.3)–(4.8) и (4.13)–(4.20) позволяет сделать вывод о том, что все эти уравнения совпадают по форме, т.е., например, если в уравнениях (4.5), (4.6) заменить матрицу  $\mathbf{A}(k)$  матрицей  $\Phi(k+1, k)$ , а матрицу  $\mathbf{B}(k)$  матрицей  $\Theta(k+1, k)$ , то они совпадут с уравнениями (4.16) и (4.17) соответственно. Следовательно, за основу для дальнейшего исследования можно взять любое из уравнений (4.3), (4.5), (4.7), (4.13), (4.16) или (4.19).

В дальнейшем будем пользоваться уравнениями в форме (4.5) и (4.6) из-за более простых обозначений. Нужно только помнить, что искомое решение будет удовлетворять любой форме дискретных уравнений состояния при соответствующем переобозначении матриц и аргументов.

## 4.2. Решение уравнений состояния

### 4.2.1. Переходная матрица состояния

Рассмотрим разностное однородное уравнение, соответствующее уравнению состояния (4.5):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k). \quad (4.23)$$

Если заданы начальные условия  $\mathbf{x}(k_0)$ , то из уравнения (4.23) находим

$$\mathbf{x}(k_0+1) = \mathbf{A}(k_0)\mathbf{x}(k_0).$$

Подобным же образом получаем

$$\mathbf{x}(k_0 + 2) = \mathbf{A}(k_0 + 1) \cdot \mathbf{A}(k_0) \mathbf{x}(k_0).$$

Итерационная процедура дает

$$\mathbf{x}(k) = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(n) \cdot \mathbf{x}(k_0), \quad k > k_0. \quad (4.24)$$

Переходная матрица  $\Phi(k, k_0)$  по определению удовлетворяет однородному уравнению (4.23), следовательно, на основании выражения (4.24) можно записать

$$\Phi(k, k_0) = \begin{cases} \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(n) & \text{при } k > k_0, \\ \mathbf{E} & \text{при } k = k_0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Если матрица  $\mathbf{A}(k)$  не зависит от времени, то есть  $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_0$  (случай стационарной цифровой системы), то переходная матрица состояния имеет вид

$$\Phi_0(k, k_0) = \Phi_0(k - k_0) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)} \quad (4.26)$$

и соответствует стационарному разностному уравнению состояния

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(k). \quad (4.27)$$

Матрица (4.26), как и в непрерывном случае, зависит лишь от разности моментов времени действия причины и наблюдения следствия.

Свойства переходной матрицы  $\Phi(k, k_0)$  непосредственно вытекают из аналогичных свойств непрерывной переходной матрицы.

1. Переходная матрица от одинаковых аргументов равна единичной матрице:

$$\Phi(k_0, k_0) = \mathbf{E}. \quad (4.28)$$

$$2. \quad \Phi(k_2, k_1) \cdot \Phi(k_1, k_0) = \Phi(k_2, k_0), \quad (4.29)$$

если матрица  $\mathbf{A}(k)$  не вырождена для всех  $k$ , удовлетворяющих неравенству

$$\min(k_0, k_1, k_2) < k < \max(k_0, k_1, k_2).$$

Если матрица  $\mathbf{A}(k)$  является вырожденной для  $k \geq N$ , то равенство (4.29) справедливо только при  $\max(k_0, k_1, k_2) < N$ .

$$3. \quad \Phi(k_1, k_2) = \Phi^{-1}(k_2, k_1), \quad (4.30)$$

если матрица  $\mathbf{A}(k)$  не вырождена для

$$k = k_2 - 1, k_2 - 2, \dots, k_1 \quad (k_2 > k_1),$$

$$k = k_1 - 1, k_1 - 2, \dots, k_2 \quad (k_1 > k_2).$$

4. Для стационарных систем из свойства (4.29) следует

$$\Phi(k+n) = \Phi(k) \cdot \Phi(n). \quad (4.31)$$

5. Для стационарных систем из свойства (4.30) получаем

$$\Phi(k) = \Phi^{-1}(-k). \quad (4.32)$$

Вычисление переходной матрицы нестационарной системы в общем случае задача чрезвычайно трудоемкая. Уравнение (4.25) при больших значениях  $n$  становится очень громоздким. Как правило, приходится пользоваться при решении вычислительными средствами.

Получение переходной матрицы в аналитическом виде возможно (за редким исключением) только для стационарных систем. Применяемые при этом методы аналогичны соответствующим методам для нахождения непрерывной переходной матрицы. Перечислим эти методы.

**Применение модальной матрицы.** Очень просто находить переходную матрицу, если уравнение состояния (4.27) задано в канонической (нормальной) форме, то есть матрица  $\mathbf{A}_0$  является диагональной:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда переходную матрицу  $\Phi(k - k_0)$  можно записать как

$$\Phi(k - k_0) = \mathbf{A}^{(k - k_0)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k - k_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(k - k_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(k - k_0)} \end{bmatrix}.$$

Для произвольной матрицы  $\mathbf{A}$  с различными собственными значениями либо когда дефект характеристической матрицы  $[\lambda_i \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  равен кратности корня  $\lambda_i$  переход к диагональной матрице  $\mathbf{\Lambda}$  осуществляется преобразованием подобия с использованием модальной матрицы  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}.$$

Воспользовавшись последним соотношением, для переходной матрицы  $\Phi(k - k_0)$  можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(k - k_0) &= \mathbf{A}^{(k - k_0)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Lambda}^{(k - k_0)} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \\ &= \mathbf{M} \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k - k_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(k - k_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(k - k_0)} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}. \end{aligned}$$

**Пример 4.1.** Задана матрица  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ . Требуется вычислить переходную матрицу, соответствующую данной матрице. Для этого составим модальную матрицу, предвари-

тельно определив собственные значения и собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ . Составляем характеристическое уравнение:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения (собственные числа)  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ . Собственные векторы найдем как любой ненулевой столбец присоединенной матрицы  $Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  при  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = -2$ :

$$Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]|_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}|_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, модальная матрица будет иметь следующий вид:  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ . Обратная к модальной матрица будет

$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ . Теперь запишем переходную матрицу:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \mathbf{M} \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Метод Кэли–Гамильтона.** Применение этого метода аналогично соответствующей процедуре для вычисления непрерывной переходной матрицы. Как следствие теоремы Кэли–

Гамильтона, произвольную степенную матричную функцию можно представить полиномом  $(n - 1)$ -й степени, где  $n$  — размерность матрицы, участвующей в образовании указанного многочлена. Таким образом, для переходной матрицы  $\Phi(k - k_0)$  получим

$$\Phi(k - k_0) = \mathbf{A}^{(k - k_0)} = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{(n-1)}.$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_i$  определяются из системы уравнений

$$\lambda_i^{(k - k_0)} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \alpha_2 \lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

если все  $\lambda_i$  различны.

В случае наличия кратного корня (например, корень  $\lambda_j$  имеет кратность  $m$ ) соответствующие уравнения для определения  $\alpha_i$  будут иметь вид

$$s! \lambda_j^{k - k_0 - s} = \frac{d^s}{d\lambda^s} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \Big|_{\lambda = \lambda_j}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

**Пример 4.2.** Рассмотрим ту же задачу, что и в примере

4.1. Найдем переходную матрицу для матрицы  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

методом Кэли – Гамильтона. Поскольку матрица  $\mathbf{A}$  имеет размерность  $2 \times 2$ , переходную матрицу можно представить как матричный полином первого порядка  $\Phi(k) = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A}$ , где коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1$  определяются из системы уравнений

$$\lambda_1^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1,$$

$$\lambda_2^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2.$$

Подставляя в эту систему уравнений численные данные, получим



$$(-1)^k = \alpha_0 - \alpha_1,$$

$$(-2)^k = \alpha_0 - 2\alpha_1.$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем  $\alpha_1$ , а вычитая из удвоенного первого уравнения второе, определим  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = 2(-1)^k - (-2)^k; \quad \alpha_1 = (-1)^k - (-2)^k.$$

Осталось подставить найденные коэффициенты в выражение для переходной матрицы:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= (2(-1)^k - (-2)^k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + ((-1)^k - (-2)^k) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & 0 \\ 0 & 2(-1)^k - (-2)^k \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -3(-1)^k + 3(-2)^k \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Естественно, результат совпал с результатом примера 4.1.

**Применение  $z$ -преобразования.** Возьмем  $z$ -преобразование от правой и левой частей уравнения (4.27), применив теорему о сдвиге во времени:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z).$$

Разрешив это уравнение относительно  $\mathbf{X}(z)$ , получим

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z\mathbf{x}(0),$$

или, переходя во временную область:

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1} \left\{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \right\} \cdot \mathbf{x}(0).$$

Таким образом, переходная матрица состояния

$$\Phi(k) = Z^{-1} \left\{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \right\}. \quad (4.33)$$

**Пример 4.3.** Теперь найдем переходную матрицу для матрицы  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$  методом  $z$ -преобразования. Для этого воспользуемся формулой (4.33).

Вначале запишем матрицу  $[z\mathbf{E} - \mathbf{A}]$ :

$$[z\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}.$$

Далее найдем обратную матрицу:

$$[z\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z(z+3)+2} \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}.$$

Умножая последнее выражение на  $z$  и проводя небольшие преобразования, получаем

$$\begin{aligned} [z\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot z &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)} & \frac{z}{(z+1)(z+2)} \\ -\frac{2z}{(z+1)(z+2)} & \frac{z^2}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Осталось взять обратное  $z$ -преобразование от каждого элемента последней матрицы, предварительно представив эти элементы в виде суммы простых дробей. Имеем

$$\begin{aligned}
Z^{-1} \left\{ \frac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)} \right\} &= Z^{-1} \left\{ z \left( \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2} \right) \right\} = \\
&= Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z+1} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+2} \right\} = 2(-1)^k - (-1)^k; \\
Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z+1)(z+2)} \right\} &= Z^{-1} \left\{ z \left( \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} \right) \right\} = \\
&= Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+1} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+2} \right\} = (-1)^k - (-2)^k; \\
Z^{-1} \left\{ -\frac{2z}{(z+1)(z+2)} \right\} &= (-2)(-1)^k + 2(-2)^k; \\
Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z+1)(z+2)} \right\} &= Z^{-1} \left\{ z \left( \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1} \right) \right\} = \\
&= Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z+2} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+1} \right\} = -(-1)^k + 2(-2)^k.
\end{aligned}$$

Как видим, элементы переходной матрицы и в этом случае совпадают с результатами примеров 4.1 и 4.2.

Наиболее трудоемкая операция в формуле (4.33) — обращение матрицы, что для систем высокого порядка достаточно сложно.

#### 4.2.2. Общее решение

Вернемся к уравнениям (4.5) и (4.6). Решение этой системы уравнений нетрудно получить последовательными итерациями аналогично тому, как была найдена переходная матрица. В результате получим

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k, k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, m+1) \cdot \mathbf{B}(m) \cdot \mathbf{r}(m). \quad (4.34)$$

Соотношение (4.34) есть решение неоднородного нестационарного уравнения состояния (4.5). Первое слагаемое в этом решении характеризует реакцию системы, обусловленную начальными условиями, а все остальное представляет со-  
вмещение реакций, вызванных входными воздействиями.

В случае стационарной системы матрицы **A**, **B**, **C** и **D** в уравнениях (4.5) и (4.6) не зависят от времени, и решение для  $\mathbf{x}(k)$  будет представлять собой сумму реакций от начальных условий и сумму свертывания (аналог интеграла свертки для непрерывных систем):

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k - k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi(k - m - 1)\mathbf{B}\mathbf{r}(m). \quad (4.35)$$

Решение для выхода системы  $\mathbf{y}(k)$  получается подстановкой уравнения (4.34) или (4.35) в случае стационарной системы в уравнение выхода (4.6):

– для нестационарных систем

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\Phi(k, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \\ &+ \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{C}(k)\Phi(k, m+1)\mathbf{B}(m)\mathbf{r}(m) + \mathbf{D}(k)\mathbf{r}(k); \end{aligned} \quad (4.36)$$

– для стационарных систем

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\Phi(k - k_0)\mathbf{x}(k_0) + \\ &+ \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{C}\Phi(k - m - 1)\mathbf{B}\mathbf{r}(m) + \mathbf{D}\mathbf{r}(k). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Подчеркнем, что для систем с постоянными параметрами часто удобнее пользоваться для решения уравнений (4.5) и (4.6) методом  $z$ -преобразования. Применим  $z$ -преобразование к правым и левым частям уравнений (4.5) и (4.6) и разрешим их относительно  $\mathbf{X}(z)$  и  $\mathbf{Y}(z)$ :

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z \cdot \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}(z); \quad (4.38)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z \cdot \mathbf{x}(0) + \left[ \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{R}(z). \quad (4.39)$$

Вычислив обратное  $z$ -преобразование от выражений (4.38) и (4.39), определим  $\mathbf{x}(k)$  и  $y(k)$ .

**Пример 4.4.** Пусть цифровая система описывается уравнениями

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k),$$

$$y(k) = [1 \quad 1] \mathbf{x}(k).$$

Входное воздействие — единичная ступенька

$$r(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Начальные значения нулевые:  $y(0) = 0, y(1) = 0$ . Требуется найти выходной сигнал в моменты времени  $k = 2, 3, \dots$

Для записи решения применим формулу (4.37). При этом для переходной матрицы воспользуемся результатами примера 4.1. Остальные матрицы в формуле (4.37) имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0], \mathbf{D} = [0].$$

Таким образом, получаем

$$y(k) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{k-1} [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2(-1)^{k-m-1} - (-2)^{k-m-1} & (-1)^{k-m-1} - (-2)^{k-m-1} \\ -2(-1)^{k-m-1} + 2(-2)^{k-m-1} & -(-1)^{k-m-1} + 2(-2)^{k-m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в последнюю формулу  $k = 0$ , имеем

$$y(0) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = x_1(0).$$

Полагая  $k=1$ , получим

$$\begin{aligned}y(1) &= [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + 1 = \\ &= [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_2(0) \\ -2x_1(0) - 3x_2(0) \end{bmatrix} + 1 = x_2(0) + 1.\end{aligned}$$

Учитывая начальные условия для выхода  $y(k)$ , найдем начальные условия для вектора состояния  $\mathbf{x}(k)$ :  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -1$ . Для того чтобы определить значения выхода в произвольный момент времени, необходимо подставить конкретное значение  $k$  и найденное значение  $\mathbf{x}(0)$  в выражение для выходного сигнала. Для  $k = 2, 3$  получим

$$y(2) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 + 1 = 4,$$

$$\begin{aligned}y(3) &= [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ &+ [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -7 - 3 + 1 = -9.\end{aligned}$$

Даже по первым трем значениям выходного сигнала видно, что процесс расходится, что неудивительно, так как собственные значения системы по модулю больше 1.

## 4.3. Передаточные функции и уравнения состояния

### 4.3.1. Матричная импульсная передаточная функция

Для линейных стационарных многомерных систем интересно проследить взаимосвязь  $z$ -преобразования и метода пространства состояния.

Пусть многомерная система описывается с помощью импульсной передаточной функции

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{R}(z), \quad (4.40)$$

где  $\mathbf{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \dots \\ Y_m(z) \end{bmatrix}$  —  $z$ -преобразование  $m$ -мерного вектора-

столбца выходных сигналов  $\mathbf{y}(k)$ ;

$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_1(z) \\ R_2(z) \\ \dots \\ R_p(z) \end{bmatrix}$  —  $z$ -преобразование  $p$ -мерного вектора-

столбца входных сигналов  $\mathbf{r}(k)$ ;

$$\mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) & \dots & W_{1p}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) & \dots & W_{2p}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}(z) & W_{m2}(z) & \dots & W_{mp}(z) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

есть матрица, элементами которой являются  $W_{ij}(z)$  — импульсные передаточные функции от  $j$ -го входа к  $i$ -му выходу. Матрица (4.41) называется матричной импульсной передаточной функцией.

Применение  $z$ -преобразования к уравнению состояния выхода стационарной системы дает уравнения (4.38) и (4.39):

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z \cdot \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}(z);$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z \cdot \mathbf{x}(0) + \left[ \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{R}(z).$$

Сравнивая последнее из приведенных уравнений с уравнением (4.40) и учитывая, что импульсная передаточная функция определена для нулевых начальных условий  $\mathbf{x}(0) = 0$ , получим матричную импульсную передаточную функцию

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{C} \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (4.42)$$

Переход от частотной области во временную в уравнении (4.42) с учетом соотношения (4.33) дает

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{C} \cdot \Phi(k-1) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \delta(0), \quad (4.43)$$

где  $\mathbf{w}(k)$  — матричная импульсная переходная (весовая) функция, а

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

С учетом равенства нулю матричной весовой функции при отрицательном аргументе из (4.43) получаем

$$\mathbf{w}(k) = \begin{cases} \mathbf{C} \cdot \Phi(k-1) \cdot \mathbf{B} & \text{при } k \geq 1, \\ \mathbf{D} & \text{при } k = 0, \\ [0] & \text{при } k < 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

В более общем случае, если начальный момент времени не нулевой, а равен  $k_0$ , соотношение (4.44) будет иметь вид

$$\mathbf{w}(k - k_0) = \begin{cases} \mathbf{C} \cdot \Phi(k - k_0 - 1) \cdot \mathbf{B} & \text{при } k \geq k_0 + 1, \\ \mathbf{D} & \text{при } k = k_0, \\ [0] & \text{при } k < k_0. \end{cases} \quad (4.45)$$

Можно показать, что в случае нестационарной системы, описываемой уравнениями (4.5) и (4.6), матричная весовая функция будет записываться как



$$w(k, k_0) = \begin{cases} C \cdot \Phi(k, k_0 + 1) \cdot B & \text{при } k \geq k_0 + 1, \\ D & \text{при } k = k_0, \\ [0] & \text{при } k < k_0. \end{cases}$$

### 4.3.2. Диаграмма состояний

Традиционный метод графов, который использовался в подразд. 3.4 для структурного анализа цифровых систем, может быть применен только для описания соотношений входных и выходных сигналов в области изображений, то есть для алгебраических уравнений. Распространим этот метод на разностные уравнения состояния.

Переходный граф состояния системы (в дальнейшем для краткости диаграмма состояния) для непрерывных систем по структуре совпадает со схемой моделирования системы на аналоговой вычислительной машине. Аналогичная диаграмма состояния для цифровой системы будет отражать линейные операции, производимые цифровой вычислительной машиной. К таким операциям относятся умножение на константу, суммирование, временная задержка или запоминание.

Запишем уравнения, связывающие переменные во всех этих операциях. Структурные схемы и диаграммы состояния, соответствующие этим операциям, приведены на рис. 4.3.

1. Умножение на константу (рис. 4.3,а):

$$x_2(k) = ax_1(k),$$

$$X_2(z) = aX_1(z).$$

2. Суммирование (рис. 4.3,б):

$$x_3(k) = x_1(k) + x_2(k),$$

$$X_3(z) = X_1(z) + X_2(z).$$

3. Временная задержка или запоминание (рис. 4.3, в):

$$x_2(k) = x_1(k+1),$$

$$X_2(z) = zX_1(z) + x_1(0),$$

или, решая последнее уравнение относительно  $X_1(z)$ :

$$X_1(z) = z^{-1}X_2(z) + x_1(0).$$

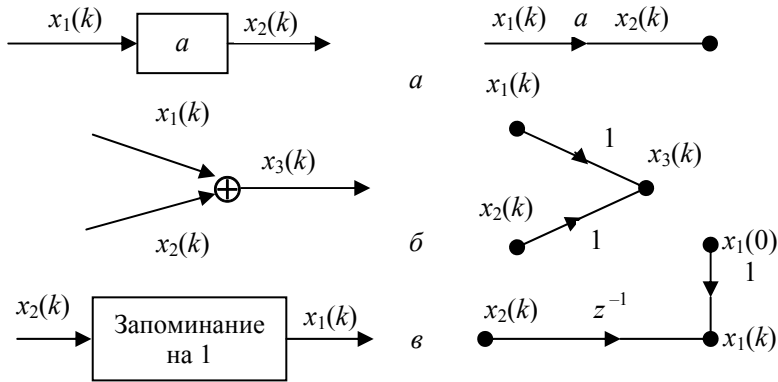


Рис. 4.3. Структурные схемы основных операций, производимых на ЦВМ

По диаграмме состояния цифровой системы (как и в непрерывном случае) можно получить:

- а) переменные состояния;
- б) уравнения состояния и выхода;
- в) решение уравнения состояния;
- г) импульсную передаточную функцию.

**Пример 4.5.** Пусть цифровая система описывается разностным уравнением

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = r(k). \quad (4.46)$$

Решаем уравнение (4.46) относительно  $y(k+2)$ :

$$y(k+2) = r(k) - 5y(k+1) - 6y(k). \quad (4.47)$$

Дважды применяя временную задержку к последнему выражению, находим  $y(k)$ . Используя элементы диаграмм состояния, представленные на рис. 4.3, получаем диаграмму состояния, соответствующую уравнению (4.46). Она представлена на рис. 4.4.

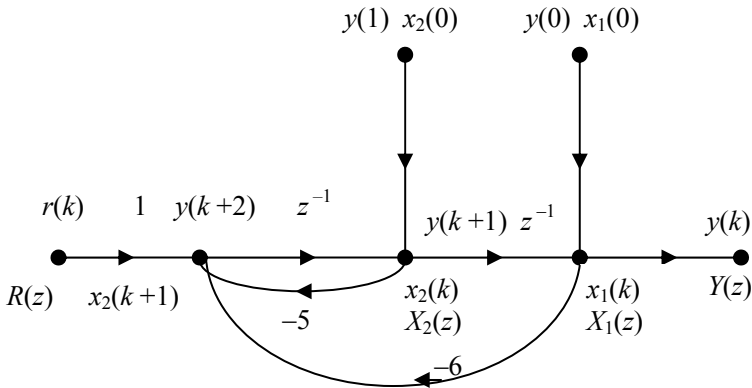


Рис. 4.4. Диаграмма состояний системы к примеру 4.5

Переменные состояния определяются как выходные сигналы каждого блока задержки.

Уравнения состояния и выхода получают из диаграммы состояния, не учитывая ребер с весом  $z^{-1}$  и начальных условий:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k); \quad (4.48)$$

$$y(k) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Решение уравнения состояния (4.48) получаем из диаграммы состояния на основе формулы Мейсона, при этом выходными величинами берем  $X_1(z)$  и  $X_2(z)$ , а входными —  $R(z)$ ,  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ :

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1+5z^{-1} & z^{-1} \\ -6z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z^{-2} \\ z^{-1} \end{bmatrix} R(z), \quad (4.50)$$

где  $\Delta = 1 + 6z^{-2} + 5z^{-1}$ .

Из выражения (4.50) видно, что переходная матрица состояния получается из диаграммы состояния без утомительной операции обращения матрицы, как это требуется делать при использовании формулы (4.33).

Применение обратного  $z$ -преобразования к выражению (4.50) дает решение уравнения состояния во временной области. Найдем это решение, например, для компонента  $x_1(k)$  при единичном ступенчатом воздействии на входе. Положим нулевые начальные условия  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Из уравнения (4.50) получим

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{z^{-2}}{1+5z^{-1}+6z^{-2}} R(z) = \frac{1}{z^2+5z+6} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{z}{4(z+3)} - \frac{z}{3(z+2)} + \frac{z}{12(z-1)}. \end{aligned}$$

Осталось перейти к функции дискретного времени:

$$x_1(k) = \frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{12}.$$

Импульсная передаточная функция системы может быть получена применением формулы Мейсона к выходу системы с учетом нулевых начальных условий:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-2}}{\Delta} = \frac{z^{-2}}{1+6z^{-2}+5z^{-1}} = \frac{1}{z^2+5z+6}.$$

Впрочем, последнее выражение можно получить и непосредственно по уравнению (4.46).

### 4.3.3. Переход к уравнениям состояния от передаточной функции

Если цифровая система или отдельные ее элементы описаны своей импульсной передаточной функцией, то переход к уравнениям состояния имеет цель либо дальнейшее исследование методом пространства состояний, либо реализацию на ЦВМ, либо моделирование системы с применением цифровой вычислительной техники.

Переход от импульсной передаточной функции к уравнениям состояния может быть в общем случае осуществлен одним из трех методов декомпозиции: непосредственным, параллельным или последовательным.

При *непосредственной декомпозиции* удобнее передаточную функцию представить в виде отношения полиномов по степеням  $z^{-1}$ :

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{R(z)}, \quad (4.51)$$

где  $n$  и  $m$  — положительные целые числа, а условие физической реализуемости — неравенство нулю коэффициента  $a_0$ .

Умножим числитель и знаменатель формулы (4.51) на вновь введенную переменную  $X(z)$ :

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})X(z)}{(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})X(z)}.$$

Приравняв отдельно числители и знаменатели правой и левой частей последнего соотношения, получим два уравнения:

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z); \quad (4.52)$$

$$R(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \dots + a_n z^{-n} X(z). \quad (4.53)$$

Решив уравнение (4.53) относительно  $X(z)$  с учетом причинно-следственных связей между  $R(z)$  и  $X(z)$ , получим

$$X(z) = \frac{1}{a_0} R(z) - \frac{a_1}{a_0} z^{-1} X(z) - \dots - \frac{a_n}{a_0} z^{-n} X(z). \quad (4.54)$$

По уравнениям (4.52) и (4.54) строим диаграмму состояния, из которой обычным путем получаем уравнения состояния и выхода.

Пример этой диаграммы состояния для  $m = n = 3$  приведен на рис. 4.5.

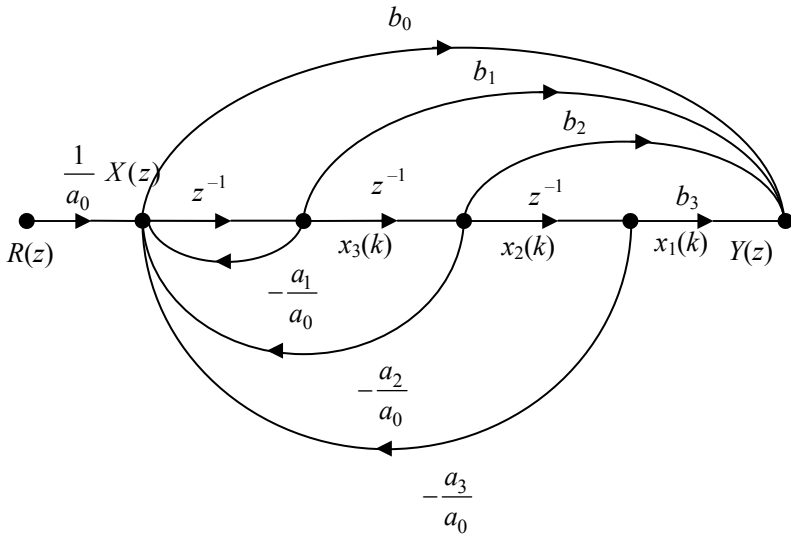


Рис. 4.5. Диаграмма состояний при непосредственной декомпозиции

Уравнения состояния, полученные по диаграмме, изображенной на рис. 4.5, будут иметь следующий вид:

$$x_1(k+1) = x_2(k);$$

$$x_2(k+1) = x_3(k);$$

$$x_3(k+1) = -\frac{a_3}{a_0} x_1(k) - \frac{a_2}{a_0} x_2(k) - \frac{a_1}{a_0} x_3(k) + \frac{1}{a_0} r(k).$$

Из этих уравнений состояния видно, что матрица  $\mathbf{A}$  имеет форму матрицы Фробениуса:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}.$$

Обобщая полученный результат, приходим к выводу, что непосредственная декомпозиция всегда приводит к уравнениям состояния системы в стандартной форме, или, как ее еще называют, к канонической форме фазовой переменной.

**Пример 4.6.** Передаточная функция системы

$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z + 0,05} = \frac{Y(z)}{R(z)},$$

где  $Y(z)$  и  $R(z)$  —  $z$ -изображения выходного и входного сигнала соответственно.

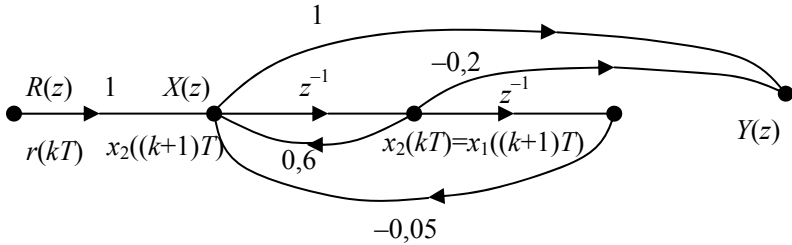
Преобразуем передаточную функцию к виду отношения полиномов по степеням  $z^{-1}$ , разделив числитель и знаменатель на  $z^2$ :

$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z + 0,05} = \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}}.$$

Умножив числитель и знаменатель передаточной функции на вспомогательную переменную  $X(z)$ , получим уравнения, аналогичные уравнениям (4.52) и (4.53):

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)(1 - 0,2z^{-1}); \\ R(z) &= X(z)(1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}). \end{aligned}$$

По последним уравнениям рисуем диаграмму состояния системы.



Переменные состояния вводим после каждого ребра с весом  $z^{-1}$ . По диаграмме записываем уравнения состояния и уравнение выхода, не учитывая ребер с весом  $z^{-1}$ :

$$x_1((k+1)T) = x_2(kT);$$

$$x_2((k+1)T) = -0,05x_1(kT) + 0,6x_2(kT) + r(kT);$$

$$y(kT) = -0,05x_1(kT) + (0,6 - 0,2)x_2(kT) + r(kT).$$

Из уравнений состояния и уравнения выхода видно, что соответствующие матрицы будут иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,05 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-0,05 \quad 0,4], \quad \mathbf{D} = [1].$$

**Параллельная декомпозиция** предполагает разложение импульсной передаточной функции на простые дроби. Особенно удобно это при действительных полюсах передаточной функции.

При различных характеристических числах (полюсах)  $z_k$  передаточной функции такое разложение имеет вид

$$W(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{z^{-1}}{A_k^{-1} - A_k^{-1} z_k z^{-1}}, \quad (4.55)$$

где  $A_k$  — вычет функции  $W(z)$  в полюсе  $z_k$ .

Диаграмма состояния системы, описываемой импульсной передаточной функцией (4.55), будет представлять собой па-



параллельно соединенные цепочки, каждая из которых имеет вид, представленный на рис. 4.6.

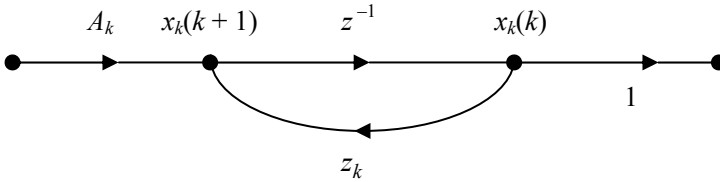


Рис. 4.6. Параллельная декомпозиция при отсутствии нулей передаточной функции

При наличии нулевого корня числителя разложение передаточной функции на простые дроби имеет несколько другой вид:

$$W(z) = \sum_k \frac{A_k z}{z - z_k} = \sum_k \frac{1}{A_k^{-1} - A_k^{-1} z_k z^{-1}}.$$

Диаграмма состояния для каждой из параллельных цепочек этого случая приведена на рис. 4.7.

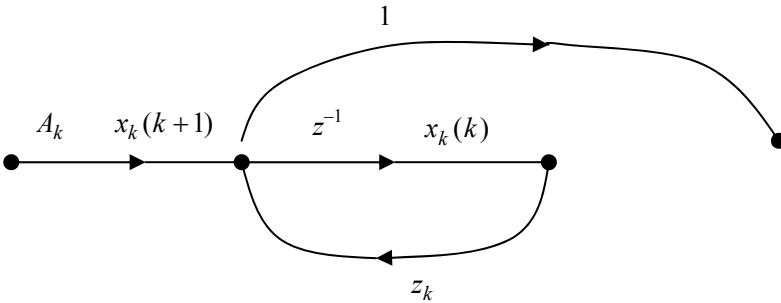


Рис. 4.7. Параллельная декомпозиция при нулевом корне числителя

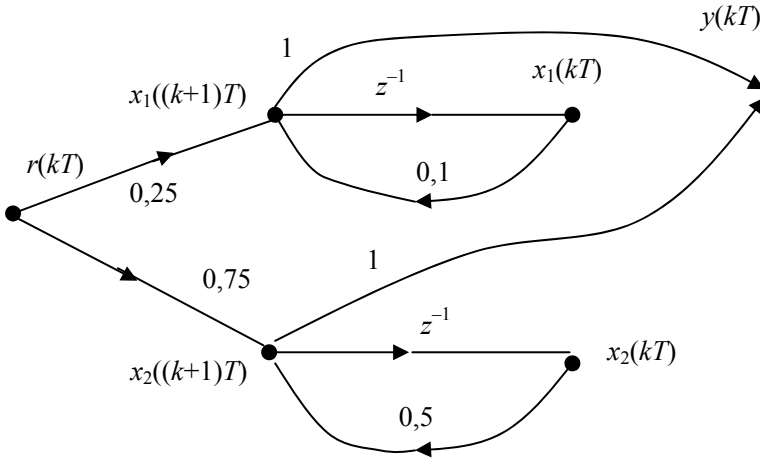
При параллельной декомпозиции каждый компонент вектора состояния  $x_k$  зависит только от самого себя в предшествующий момент времени и матрица  $A$  будет иметь диагональный вид со своими характеристическими числами на главной

диагонали. Таким образом, уравнения состояния будут представлены в нормальной (канонической) форме.

**Пример 4.7.** Рассмотрим ту же систему, что и в примере 4.6. Передаточную функцию представим в виде суммы простых дробей, используя обычные правила разложения на простые дроби:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z + 0,05} = \frac{z(z - 0,2)}{(z - 0,1)(z - 0,5)} = \\ &= \frac{0,25z}{z - 0,1} + \frac{0,75z}{z - 0,5} = \frac{1}{4 - 0,4z^{-1}} + \frac{1}{1,3 - 0,6z^{-1}}. \end{aligned}$$

Строим диаграмму состояния, соответствующую этой передаточной функции:



Вводя переменные состояния после каждого ребра с весом  $z^{-1}$ , запишем уравнения состояния и уравнение выхода:

$$x_1((k+1)T) = 0,1x_1(kT) + 0,25r(kT);$$

$$x_2((k+1)T) = 0,5x_2(kT) + 0,75r(kT);$$

$$y(kT) = 0,1x_1(kT) + 0,5x_2(kT) + r(kT).$$

Соответствующие матрицы в привычных обозначениях будут иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0,1 \quad 0,5], \quad \mathbf{D} = [1].$$

Если у передаточной функции присутствуют кратные полюсы, например полюс  $z_i$  имеет кратность  $p$ , то в разложении  $W(z)$  на простые дроби будут слагаемые

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_{p-j}}{(z - z_i)^{p-j}},$$

которые представлены на диаграмме состояний (рис. 4.8).

В этом более общем случае матрица  $\mathbf{A}$  представляет собой матрицу Жордана, а уравнения состояния имеют жорданову каноническую форму.

**Последовательную декомпозицию** лучше всего использовать для действительных полюсов и нулей импульсной передаточной функции. В этом случае представим  $W(z)$  в виде

$$W(z) = \frac{K(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}, \quad (4.56)$$

где  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — нули  $W(z)$ ;  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) — полюсы  $W(z)$ , а для физической реализуемости требуется, чтобы выполнялось условие  $m \leq n$ .

Выражение (4.56) представим в виде

$$W(z) = KW_1(z)W_2(z) \dots W_n(z),$$

где

$$W_k(z) = \frac{z - c_k}{z - z_k} = \frac{1 - c_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} \quad \text{при } k \leq m; \quad (4.57)$$

$$W_k(z) = \frac{1}{z - z_k} = \frac{z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} \quad \text{при } m + 1 \leq k \leq n. \quad (4.58)$$

Диаграммы состояний для выражений (4.57) и (4.58) приведены на рис. 4.9,а и б соответственно.

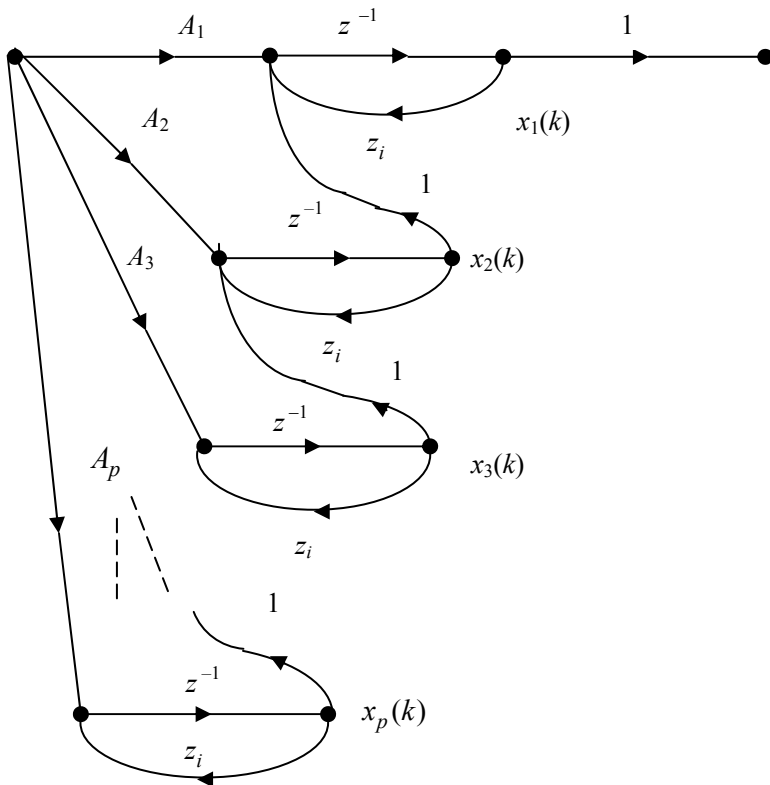


Рис. 4.8. Параллельная декомпозиция при кратных полюсах

Диаграмма состояния всей системы, описываемой передаточной функцией (4.56), будет являться последовательным соединением диаграмм, представленных на рис. 4.9.

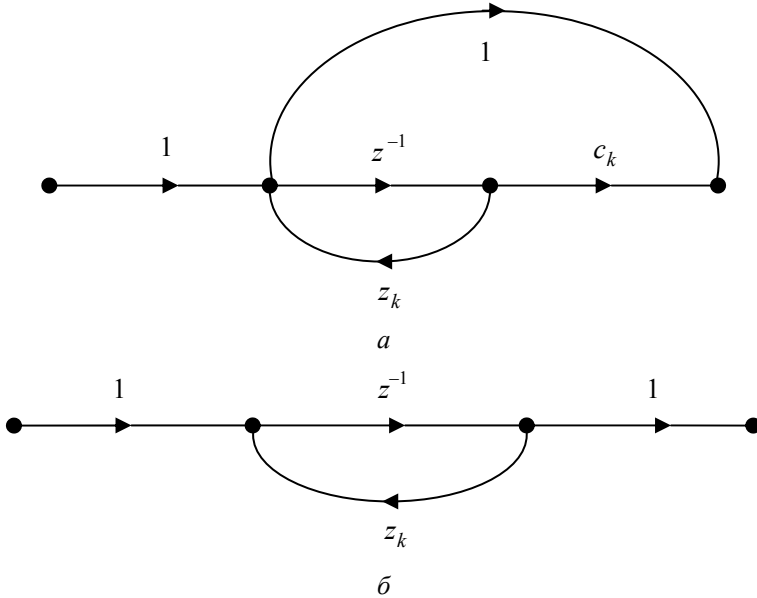


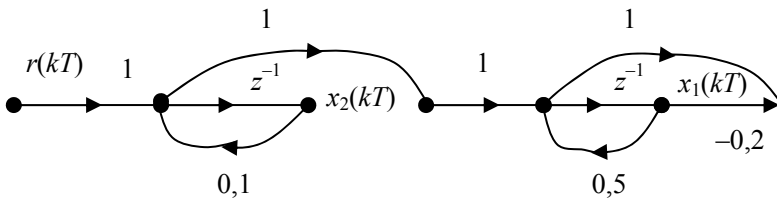
Рис. 4.9. Последовательная декомпозиция

**Пример 4.8.** Опять возьмем систему из примера 4.6. Передаточную функцию системы представим в форме (4.56):

$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z + 0,05} = \frac{z(z - 0,2)}{(z - 0,1)(z - 0,5)} = W_1(z)W_2(z),$$

где  $W_1(z) = \frac{z}{z - 0,1} = \frac{1}{1 - 0,1z^{-1}}$ ;  $W_2(z) = \frac{z - 0,2}{z - 0,5} = \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}$ .

Строим диаграмму состояния в виде последовательно соединенных цепочек:



По диаграмме состояния записываем уравнения состояния и уравнение выхода:

$$x_1((k+1)T) = 0,5x_1(kT) + 0,1x_2(kT) + r(kT);$$

$$x_2((k+1)T) = 0,1x_2(kT) + r(kT);$$

$$y(kT) = (0,5 - 0,2)x_1(kT) + 0,1x_2(kT) + r(kT).$$

Окончательно матрицы в уравнениях системы будут иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0,3 \quad 0,1], \quad \mathbf{D} = [1].$$

#### 4.3.4. Диаграмма состояний цифровых систем с непрерывной частью

В общем случае цифровые системы могут содержать как цифровые, так и аналоговые элементы. Интерфейсом между ними является устройство выборки и хранения.

Прежде чем получать диаграмму состояния всей системы, представим диаграмму состояния экстраполятора нулевого порядка. Обозначая входной и выходной сигналы экстраполятора через  $u^*(t)$  и  $h(t)$  соответственно, для интервала времени  $kT \leq t < (k+1)T$  имеем

$$h(t) = u(kT).$$

Применяя преобразование Лапласа к последнему выражению, получаем следующее соотношение:

$$H(s) = \frac{u(kT)}{s}. \quad (4.59)$$

Диаграмма состояния для уравнения (4.59) состоит из единственного ребра с весом  $s^{-1}$ , соединяющего вершины  $H(s)$  и  $u(kT)$  (рис. 4.10).

Далее получаем диаграмму состояния всей системы, которая будет являться соединением диаграммы состояния цифровой части с диаграммой состояния непрерывной части. Это соединение осуществляется через диаграмму состояния экстраполятора нулевого порядка. Момент времени  $t_0$  для задания начальных условий в диаграмме состояния непрерывной части полагаем равным  $kT$ , как и при выводе уравнения (4.13) на основе выражения (4.12).

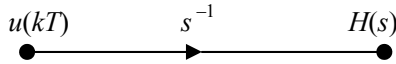


Рис. 4.10. Диаграмма состояний экстраполятора нулевого порядка

**Пример 4.9.** Рассмотрим получение диаграммы состояния и уравнений состояния для системы, содержащей как непрерывные, так и дискретные элементы (рис. 4.11).

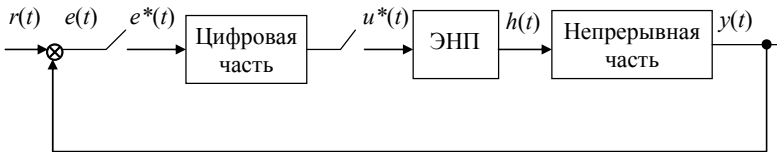


Рис. 4.11. Структурная схема системы для примера 4.9

Цифровая часть описывается импульсной передаточной функцией

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{z^2 + 5z + 6}, \quad (4.60)$$

а непрерывная часть — передаточной функцией

$$W(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{5}{s + 2}. \quad (4.61)$$

Диаграмма состояния для выражения (4.60) ранее уже составлялась (см. рис. 4.4), а диаграмма состояния для непрерывной части приведена на рис. 4.12.

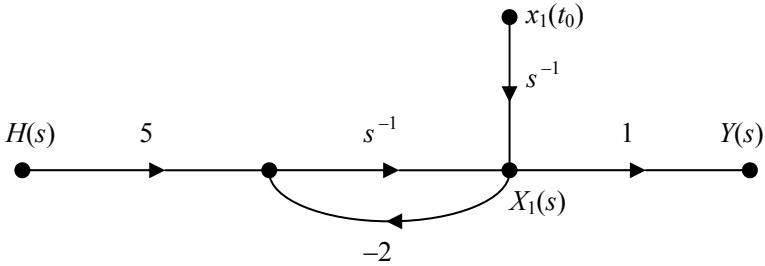


Рис. 4.12. Диаграмма состояний непрерывной части системы к примеру 4.9

Соединяя диаграммы состояния, представленные на рис. 4.4, 4.10 и 4.12, получим диаграмму состояния всей системы (рис. 4.13).

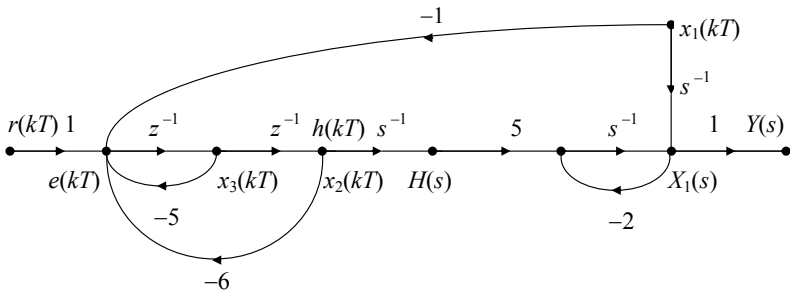


Рис. 4.13. Диаграмма состояний системы к примеру 4.9

На полученной диаграмме состояний учтено, что  $t_0 = kT$  и  $x_1(kT) = y(kT)$ .

Применяя формулу Мейсона для выходных вершин  $X_1(s)$ ,  $x_2(kT)$ ,  $x_3(kT)$ , получим



$$\begin{aligned}
 X_1(s) &= \frac{1}{s}x_1(kT) + \frac{5}{s(s+2)}x_2(kT), \\
 x_2[(k+1)T] &= x_3(kT), \\
 x_3[(k+1)T] &= -x_1(kT) - 6x_2(kT) - 5x_3(kT) + r(kT).
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

Переходя в первом из уравнений (4.62) к функции времени, запишем

$$x_1(t) = x_1(kT) + \frac{5}{2} \left[ 1 - e^{-2(t-t_0)} \right] x_2(kT).$$

Полагая в последнем уравнении  $t_0 = kT$ , а  $t = (k+1)T$  и учитывая оставшиеся уравнения (4.62), получим уравнения состояния системы:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2}(1 - e^{-2T}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(kT).$$

Уравнение выхода будет иметь вид

$$y(kT) = x_1(kT).$$

## **4.4. Управляемость и наблюдаемость цифровых систем**

### **4.4.1. Понятия управляемости и наблюдаемости**

При исследовании систем методом пространства состояния большое значение имеют понятия управляемости и наблюдаемости системы, которые, по сути, не отличаются для дискретных и непрерывных систем. Под управляемостью системы понимают возможность целенаправленного воздействия на

переменные состояния системы и на ее выход. Дуальным является понятие наблюдаемости, под которой понимают возможность восстановления некоторого начального состояния по наблюдениям (измерениям) выхода системы при известном входном сигнале.

Формализуем понятия наблюдаемости и управляемости для цифровой системы, описываемой, например, уравнениями (4.7), (4.8):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k_{j+1}) &= \mathbf{A}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{B}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j); \\ \mathbf{y}(k_j) &= \mathbf{C}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{D}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j).\end{aligned}$$

Система называется **полностью управляемой по состоянию**, если для произвольного начального момента времени  $k_0$  существует последовательность неограниченных входных воздействий  $\mathbf{r}(k_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N-1$ , переводящая каждое начальное состояние  $\mathbf{x}(k_0)$  в некоторое конечное состояние  $\mathbf{x}(k_N)$  за ограниченное время  $k_N \geq k_0$ .

Система называется **полностью управляемой по выходу**, если для произвольного начального момента времени  $k_0$  существует последовательность неограниченных входных воздействий  $\mathbf{r}(k_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N-1$ , с помощью которой может быть достигнуто некоторое конечное значение выхода  $\mathbf{y}(k_N)$  из произвольного начального значения  $\mathbf{y}(k_0)$  за ограниченное время  $k_N \geq k_0$ .

Система называется **абсолютно управляемой** (по состоянию или по выходу), если она полностью управляема (по состоянию или по выходу) для всех  $k_0$  и всех  $k_N \geq k_0$ .

Полная управляемость, как видно из определений, требует управляемости для всех начальных условий (но необязательно для всех конечных состояний). Абсолютная же управляемость подразумевает также и все конечные состояния, то есть является более сильным понятием. Если элементы матриц  $\mathbf{A}(k)$ ,  $\mathbf{B}(k)$ ,  $\mathbf{C}(k)$ ,  $\mathbf{D}(k)$  являются аналитическими функциями дис-

кретного времени  $k$ , то понятия полной и абсолютной управляемости совпадают. Тем более они совпадают для стационарных систем.

Система называется *полностью наблюдаемой*, если для некоторого момента времени  $k_0$  состояние  $\mathbf{x}(k_0)$  может быть определено по известным выходным  $\mathbf{y}(k)$  и входным  $\mathbf{r}(k)$  сигналам для  $k_0 \leq k < k_N$ , где  $k_N$  — ограниченное время.

Система называется *глобально (абсолютно) наблюдаемой*, если она полностью наблюдаема для всех  $k_0$  и всех  $k_N \geq k_0$ .

Для стационарных систем понятия полной и глобальной наблюдаемости совпадают.

#### 4.4.2. Определение управляемости по уравнениям динамики

Анализ уравнений состояния позволяет ответить на вопрос об управляемости системы, о чем утверждает следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Для того чтобы система, описываемая уравнениями состояния (4.7), была полностью управляемой по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости  $\mathbf{Q}$  был равен  $n$ . Матрица управляемости  $\mathbf{Q}$  в блочной записи имеет вид

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_0 \quad \mathbf{Q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_{N-1}], \quad (n \times N \cdot p), \quad (4.63)$$

где  $\mathbf{Q}_i = \Phi(k_N, k_{i+1})\mathbf{B}(k_i)$ ,  $(n \times p)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Иногда установление ранга матрицы довольно утомительное занятие, поэтому равенство ранга матрицы  $\mathbf{Q}$  величине  $n$  можно определить по невырожденности соответствующей матрицы Грама:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{Q}_i^T = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \Phi(k_N, k_{i+1})\mathbf{B}(k_i)\mathbf{B}^T(k_i)\Phi^T(k_N, k_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.64)$$

**Теорема 4.2.** Для полной управляемости по выходу системы, описываемой уравнением (4.7), необходимо и достаточно, чтобы матрица  $\mathbf{T}$  управляемости по выходу имела ранг, равный  $m$ . Матрица  $\mathbf{T}$  задается выражением

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_0 \quad \mathbf{T}_1 \quad \dots \quad \mathbf{T}_N], \quad (m \times (N+1)p), \quad (4.65)$$

$$\text{где } \mathbf{T}_i = \begin{cases} \mathbf{C}(k_N)\Phi(k_N, k_{i+1})\mathbf{B}(k_i), & 0 \leq i \leq N-1, \\ \mathbf{D}(k_N), & i = N. \end{cases}$$

Управляемость по выходу можно установить и по невырожденности соответствующей матрицы Грама:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{T}_i \mathbf{T}_i^T.$$

Для стационарных систем определение управляемости по состоянию и по выходу облегчается. Кроме того, для стационарного случая существует ряд теорем, которые часто более удобны в практическом применении.

**Теорема 4.3.** Линейная стационарная система

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k_{i+1}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{B}\mathbf{r}(k_i); \\ \mathbf{y}(k_i) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{D}\mathbf{r}(k_i), \end{aligned} \quad (4.66)$$

полностью управляема по состоянию, если и только если  $(n \times N \cdot p)$ -мерная матрица

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]$$

имеет ранг  $n$  или матрица Грама  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  является невырожденной.

**Теорема 4.4.** Линейная стационарная цифровая система (4.66) полностью управляема по состоянию, если и только если строки матрицы

$$(\mathbf{z}\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

линейно независимы.

**Теорема 4.5.** Пусть уравнения состояния представлены в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k_{i+1}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{B}_n\mathbf{r}(k_i); \\ \mathbf{y}(k_i) &= \mathbf{C}_n\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{D}_n\mathbf{r}(k_i), \end{aligned} \quad (4.67)$$

где  $\mathbf{A}$  — диагональная матрица.

Тогда для полной управляемости системы по состоянию необходимо и достаточно, чтобы в матрице  $\mathbf{B}_n$  отсутствовали строки, полностью состоящие из нулей.

Действительно, в случае диагональной матрицы  $\mathbf{A}$  система уравнений состояния (4.67) является несвязанной. Поэтому при наличии нулевой строки в матрице  $\mathbf{B}_n$  соответствующий компонент вектора  $\mathbf{x}$  не будет зависеть от входного воздействия  $\mathbf{r}$  и, следовательно, будет неуправляемым.

Если уравнения состояния записаны в нормальной форме Жордана (при кратных собственных числах), то нулевыми не должны быть строки матрицы  $\mathbf{B}_n$ , соответствующие последним строкам каждой клетки Жордана для кратных собственных чисел.

**Теорема 4.6.** Для полной управляемости системы (4.66) по выходу необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

имела ранг  $m$  или матрица Грама  $\mathbf{T}\mathbf{T}^T$  была невырожденной.

### 4.4.3. Определение наблюдаемости по уравнениям динамики

Наблюдаемость системы можно определить путем анализа уравнений состояния и уравнения выхода. Об этом говорит следующая теорема.

**Теорема 4.7.** Для полной наблюдаемости системы, описываемой уравнениями динамики (4.7), (4.8), необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости  $\mathbf{L}$  имела ранг  $n$ . Матрица наблюдаемости в блочной записи имеет вид

$$\mathbf{L} = \left[ \mathbf{C}^T(k_0) \Phi^T(k_1, k_0) \mathbf{C}^T(k_1) \dots \Phi^T(k_{N-1}, k_0) \mathbf{C}^T(k_{N-1}) \right]. \quad (4.68)$$

Для стационарных систем также можно сформулировать ряд теорем о наблюдаемости.

**Теорема 4.8.** Линейная стационарная система (4.66) является полностью наблюдаемой, только если матрица

$$\mathbf{L} = \left[ \mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{N-1} \mathbf{C}^T \right]$$

имеет ранг  $n$ . Эквивалентное требование — невырожденность соответствующей матрицы Грама  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ .

**Теорема 4.9.** Линейная стационарная цифровая система (4.66) полностью наблюдаема, если и только если столбцы матрицы  $\mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  линейно независимы.

**Теорема 4.10.** Линейная стационарная цифровая система, заданная уравнениями состояния в нормальной форме (4.67), полностью наблюдаема, если при различных собственных числах системы матрица  $\mathbf{C}_n$  не имеет столбцов, целиком состоящих из нулей.

Если имеются кратные собственные значения, то нулю не должны равняться столбцы, соответствующие первым столбцам каждой клетки Жордана.

#### 4.4.4. Блочное разбиение системы

Исследование управляемости и наблюдаемости системы облегчается существованием ряда теорем, которые здесь приводятся без доказательств.

**Теорема 4.11 (Калмана).** Произвольная линейная система всегда может быть разбита на четыре подсистемы  $S_1, S_2, S_3, S_4$  (рис. 4.14):

- $S_1$  — полностью управляемая и наблюдаемая подсистема;
- $S_2$  — полностью управляемая и ненаблюдаемая подсистема;

$S_3$  — неуправляемая, но полностью наблюдаемая подсистема;  
 $S_4$  — неуправляемая и ненаблюдаемая подсистема.

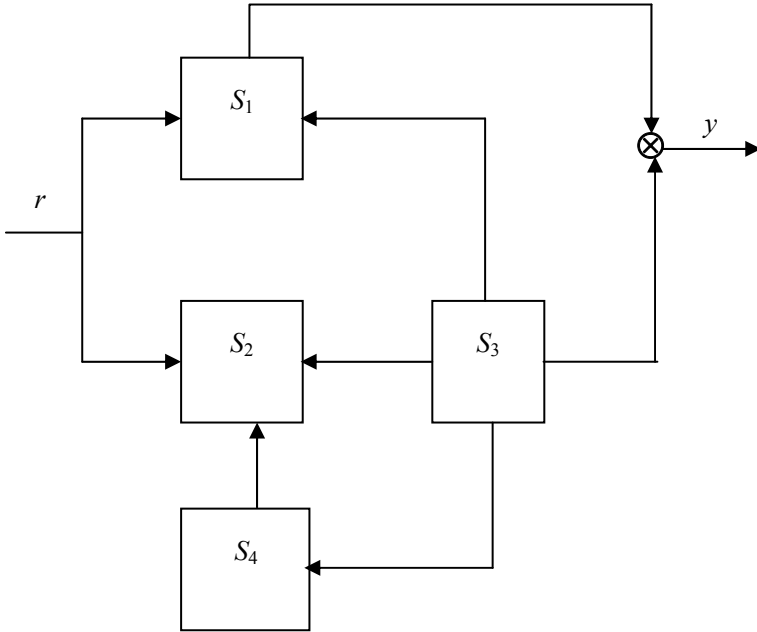


Рис. 4.14. Блочное разбиение системы

Управляемость и наблюдаемость всей системы в целом предполагает существование только подсистемы  $S_1$ . Необходимо подчеркнуть, что неучет составляющих  $S_2, S_3, S_4$  может привести исследователя к неверному выводу, например, о работоспособности всей системы на основании устойчивости подсистемы  $S_1$ , в то время как в действительности система в целом будет неустойчивой благодаря неустойчивости любой из подсистем  $S_2, S_3$  или  $S_4$ .

Если система содержит составляющие  $S_2, S_3, S_4$  (все или некоторые из них), то в зависимости от связей между подсистемами вся система в целом может обладать или не обладать свойствами этих подсистем.

Управляемость и наблюдаемость систем с обратной связью устанавливает следующая теорема.

**Теорема 4.12 (Гильберта).** Если систему можно представить соединением подсистем с обратной связью (рис. 4.15), то будут верны следующие утверждения:

– порядок системы  $n$  равен сумме порядков подсистем  $S_a$  и  $S_b$ , то есть  $n = n_a + n_b$ ;

– необходимым и достаточным условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость)  $S_{ab}$  ( $S_{ba}$ ), где  $S_{ab}$  ( $S_{ba}$ ) — подсистема, образованная последовательным соединением  $S_a$  ( $S_b$ ) и  $S_b$  ( $S_a$ );

– необходимым (но не достаточным) условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость)  $S_a$  и  $S_b$ ;

– если  $S_a$  и  $S_b$  управляемы (наблюдаемы), то любые из неуправляемых (ненаблюдаемых) координат системы с обратной связью являются неуправляемыми (ненаблюдаемыми) координатами  $S_{ab}$  ( $S_{ba}$ ) и порождаются подсистемой обратной связи  $S_b$ .

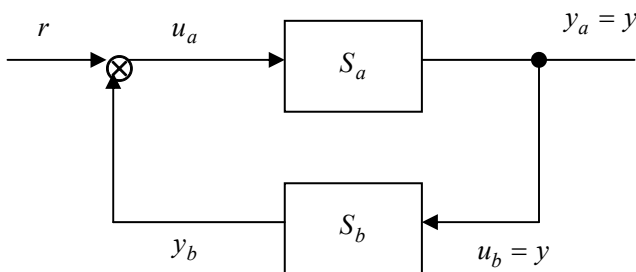


Рис. 4.15. К теореме Гильберта

Непосредственным следствием теоремы Гильберта являются две теоремы об управляемости и наблюдаемости замкнутых систем с обратной связью по состоянию.



**Теорема 4.13.** Если цифровая линейная система

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.69)$$

является полностью управляемой по состоянию, то замкнутая система, получаемая с помощью обратной связи по состоянию (рис. 4.16) и описываемая уравнением состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{G})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{r}(k),$$

также полностью управляема по состоянию.

Если же разомкнутая система неуправляема, то сделать ее управляемой не сможет никакая обратная связь  $\mathbf{G}$ .

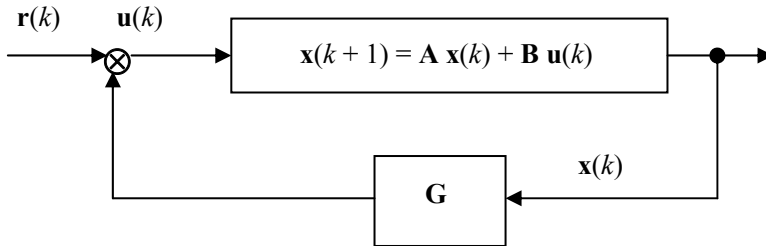


Рис. 4.16. Система с обратной связью

**Теорема 4.14.** Если линейная цифровая система (4.69) полностью управляема по состоянию и наблюдаема, то обратная связь по состоянию

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

может сделать систему ненаблюдаемой (см. рис. 4.16).

Большое значение при исследовании систем методом пространства состояния имеют различные преобразования координат (например, переход к нормальным координатам или к канонической форме фазовых переменных). Поэтому практически значимой является теорема об инвариантности управляемости и наблюдаемости.

**Теорема 4.15.** Если система является полностью управляемой (наблюдаемой), то невырожденное преобразование не меняет управляемость (наблюдаемость) системы.

Как известно, передаточная функция (матричная передаточная функция в случае многомерных систем) является конечным итогом математического описания систем классическим частотным методом. Получается она путем описания звеньев системы и дальнейшего структурного анализа. При этом могут происходить сокращения одинаковых нулей и полюсов передаточной функции в результате преобразований передаточных функций звеньев. О том, как это связано с управляемостью и наблюдаемостью системы, говорит следующая теорема.

**Теорема 4.16.** Если в передаточной функции, связывающей входной и выходной сигналы стационарной цифровой системы, имеется компенсация нулей и полюсов, то в зависимости от выбора системы координат (переменных состояния) цифровая система может быть либо неуправляемой по состоянию, либо ненаблюдаемой, либо и то и другое одновременно.

Если в передаточной функции отсутствует компенсация нулей и полюсов, то всегда можно выбрать систему координат, в которой цифровая система будет описываться как полностью управляемая и наблюдаемая.

Для цифровых систем с квантованием и фиксацией существует дополнительное требование, определяющее управляемость и наблюдаемость. Если в передаточной функции непрерывной части есть комплексные полюса, то в ее разложении на

простые дроби будет слагаемое  $\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ . Если период

квантования выбрать равным  $T = k\pi/\omega$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $z$ -преобразование от такого слагаемого будет

$$Z \left\{ \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \right\} = \frac{z^{-1} e^{-\alpha T} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} e^{-\alpha T} \cos \omega T + z^{-2} e^{-2\alpha T}} = 0.$$

Таким образом, даже неустойчивость системы (при  $\alpha < 0$ ) нельзя определить по наблюдаемости ее выхода. Нетрудно показать, что в таком случае  $\Phi(i T) = \Phi(j T)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , и согласно теоремам 4.3 и 4.8 система будет и неуправляемой, и ненаблюдаемой.

Дополнительное требование для полной управляемости и наблюдаемости цифровых систем с квантованием и фиксацией состоит, таким образом, в том, чтобы при комплексных полюсах  $-\alpha \pm j\omega$  непрерывной передаточной функции период квантования  $T \neq k\pi/\omega$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

## **5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

### **5.1. Аспекты моделирования непрерывных систем**

При любом исследовании систем автоматики, будь то анализ или синтез, возникает необходимость моделирования процессов, происходящих в системе. Моделирование систем с цифровыми элементами рассмотрено в разд. 3 и 4. Теперь рассмотрим моделирование непрерывных систем. Это моделирование может осуществляться либо с применением аналоговых вычислительных машин, либо цифровыми методами. В последнем случае необходимо описание динамики непрерывной системы с помощью дискретной передаточной функции или дискретных уравнений состояния.

Еще один важный аспект необходимости описания непрерывной системы дискретными уравнениями состоит в следующем. К настоящему времени разработано и эксплуатируется большое число аналоговых систем управления промышленного назначения. Характеристики этих систем вполне удовлетворительны, но развитие и совершенствование технологии микропроцессоров и вообще цифровой техники вызывает желание реализовать эти системы управления на новой, цифровой элементной базе. Вместо совершенно нового проектирования таких систем с применением теории цифровых систем управления проще и дешевле воспользоваться методикой преобразования уже готовой системы на базе ЭВМ для создания эквивалентной цифровой системы.

Из множества методов замены непрерывной системы на эквивалентную цифровую рассмотрим наиболее часто применяемые методы:

- введение в непрерывную систему устройств выборки и хранения;
- методы численного интегрирования;
- метод  $z$ -форм;
- метод пространства состояний с использованием УВХ.

## 5.2. Применение устройств выборки и хранения

Этот метод наиболее простой и состоит в том, что в соответствующих точках структурной схемы непрерывной системы вводятся фиктивные устройства выборки и хранения. В этом случае систему можно описать импульсными передаточными функциями, используя алгебраические преобразования или метод дискретного графа, либо разностными уравнениями состояния.

При этом совсем не обязательно применять экстраполятор именно нулевого порядка, может быть использован и линейный экстраполятор.

**Пример 5.1.** Пусть дана непрерывная система (рис. 5.1).

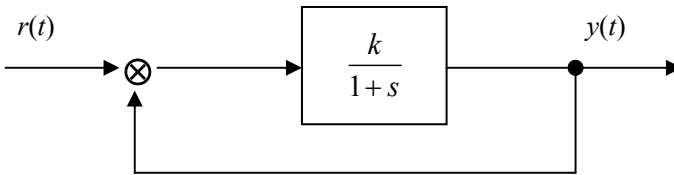


Рис. 5.1. К примеру 5.1

Устройство выборки и хранения, состоящее из квантователя и фиксатора нулевого порядка с передаточной функцией  $W(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$ , можно ввести либо в канал ошибки (рис. 5.2,а), либо в отрицательную обратную связь (рис. 5.2,б).

Рассмотрим оба эти случая.

Для схемы, представленной на рис. 5.2,а, запишем уравнения, связывающие переменные в  $s$ -плоскости:

$$E(s) = R(s) - Y(s) ;$$

$$Y(s) = W_0(s) \frac{k}{1+s} E^*(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} E^*(s).$$

Переходя в этих уравнениях к дискретным переменным, составим дискретный граф системы (рис. 5.3). На рис. 5.3 введено следующее обозначение:

$$W_1^*(s) = \left[ \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} \right]^*$$

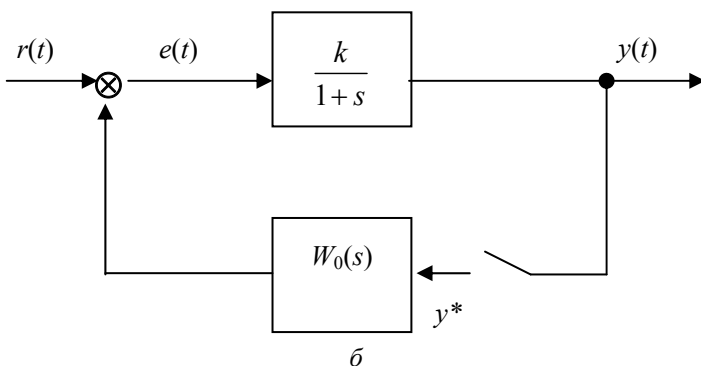
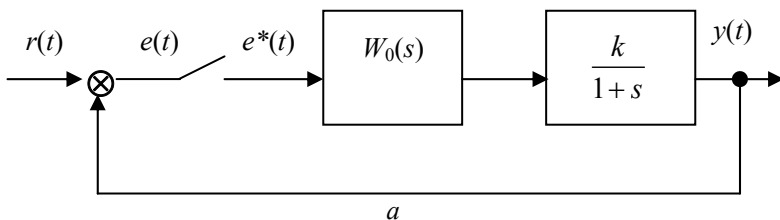


Рис. 5.2. Структурные схемы системы с квантователем и фиксатором

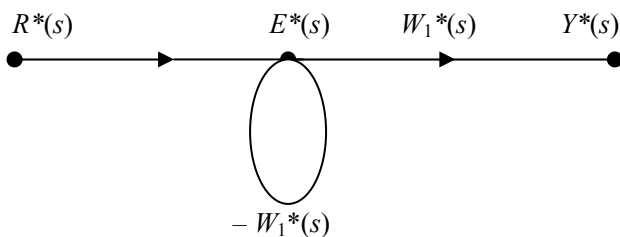


Рис. 5.3. Дискретный граф системы

Из дискретного графа системы определяем выходной сигнал, переходя к переменной  $z$ :

$$Y(z) = \frac{Z \left\{ \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} \right\}}{1 + Z \left\{ \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} \right\}};$$

$$R(z) = \frac{k(1 - e^{-T})}{z - e^{-T} + k(1 - e^{-T})} R(z). \quad (5.1)$$

Конкретизируем в последней формуле  $R(z)$ , задав входное воздействие в виде линейной функции

$$r(t) = Vt.$$

Тогда из выражения (5.1) получим

$$Y(z) = \frac{V kz T (1 - e^{-T})}{\left[ z - e^{-T} + k(1 - e^{-T}) \right] (z - 1)^2}. \quad (5.2)$$

Продельвая аналогичные операции с системой, представленной на рис. 5.2,б, можно получить следующее выражение для выхода системы:

$$Y(z) = \frac{Z \left\{ R(s) \frac{k}{1+s} \right\}}{1 + Z \left\{ W_0(s) \frac{k}{1+s} \right\}} =$$

$$= \frac{V kz \left[ T(z - e^{-T}) + (z - 1)(e^{-T} - 1) \right]}{\left[ z - e^{-T} + k(1 - e^{-T}) \right] (z - 1)^2}. \quad (5.3)$$

Сравнивая выражения (5.2) и (5.3) из приведенного примера, замечаем, что они отличаются, следовательно, результат

моделирования зависит от точек структурной схемы, в которые вводятся устройства выборки и хранения.

Важным моментом при использовании этого метода моделирования является также выбор величины периода квантования  $T$ , который непосредственно влияет на точность и устойчивость получаемой при этом цифровой системы.

## **5.3. Численное интегрирование**

### **5.3.1. Методы численного интегрирования**

Самой сложной и трудоемкой операцией при решении дифференциальных уравнений, описывающих непрерывные системы, является интегрирование. Цифровую систему можно получить, заменив непрерывную операцию интегрирования дискретными численными методами нахождения интеграла. Операцию интегрирования в явном виде нетрудно заметить, воспользовавшись диаграммой состояния непрерывной системы. Ребра с весом  $s^{-1}$  как раз и означают интегрирование соответствующей переменной. Поэтому поставленную задачу можно также сформулировать как замену интеграторов  $s^{-1}$  на диаграмме состояния непрерывной системы на соответствующую выбранному методу численного интегрирования импульсную передаточную функцию.

Моделирование по рассматриваемому методу состоит, таким образом, из двух этапов: на первом составляется диаграмма состояния непрерывной системы, а на втором заменяются все ребра с весом  $s^{-1}$  на импульсную передаточную функцию выбранного метода численного интегрирования.

Наиболее простыми, а следовательно, и наиболее часто применяемыми являются метод прямоугольников и метод трапеций.

### **5.3.2. Метод прямоугольников**

Метод прямоугольников заключается в приближенной замене интеграла, то есть площади под кривой, описывающей



интегрируемую функцию, на сумму площадей прямоугольников с основанием, равным периоду квантования, и высотой, равной значению функции в начале периода квантования (обычный метод прямоугольников) или в конце периода квантования (метод прямоугольников с упреждением).

Метод прямоугольников эквивалентен введению квантователя и экстраполятора нулевого порядка перед каждым интегратором  $s^{-1}$ .

Структурная схема этого метода интегрирования представлена на рис. 5.4,а (метод прямоугольников) и на рис. 5.4,б (метод прямоугольников с упреждением).

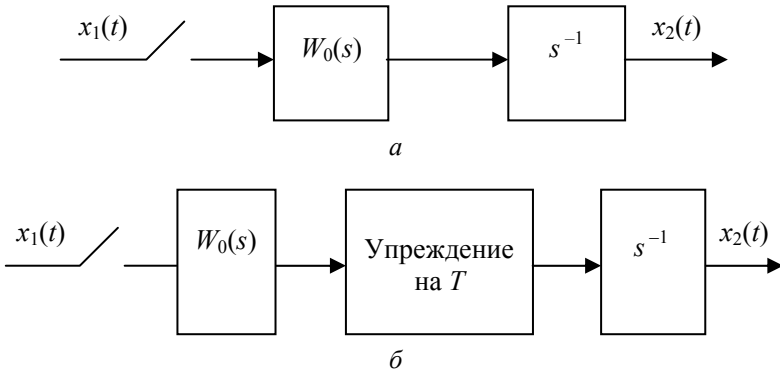


Рис. 5.4. Численное интегрирование по методу прямоугольников

Согласно рис. 5.4,а импульсная передаточная функция интегрирования по методу прямоугольников имеет вид

$$\frac{X_2(z)}{X_1(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{T}{z - 1}. \quad (5.4)$$

На основании передаточной функции (5.4) запишем уравнение состояния:

$$x_2 \left[ (k + 1)T \right] = x_2(kT) + T x_1(kT).$$

Импульсная передаточная функция интегрирования в соответствии с рис. 5.4,б будет

$$\frac{X_2(z)}{X_1(z)} = z(1-z^{-1})Z_1\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{Tz}{z-1}. \quad (5.5)$$

При получении последней формулы учтено, что умножение на  $T$  равносильно умножению изображения на  $z$ .

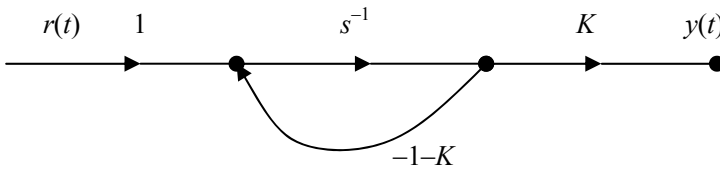
Уравнение состояния по выражению (5.5) имеет вид

$$x_2[(k+1)T] = x_2(kT) + Tx_1[(k+1)T].$$

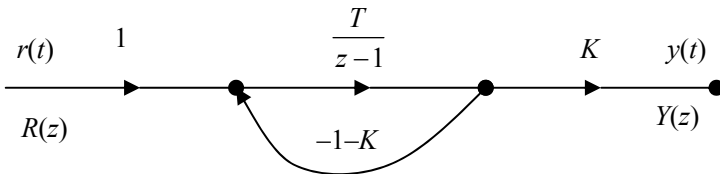
**Пример 5.2.** Рассмотрим систему из примера 5.1 (см. рис. 5.1).

Заменим непрерывную систему на цифровую модель, применив численное интегрирование по методу прямоугольников.

Для применения метода численного интегрирования по структурной схеме составляем диаграмму состояния:



В соответствии с методом прямоугольников заменяем ребро с весом  $s^{-1}$  на ребро с передаточной функцией  $\frac{T}{z-1}$ :



Применяя формулу Мейсона, записываем передаточную функцию дискретной модели:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{T}{z-1}K}{1 + \frac{T}{z-1}(1+K)} = \frac{TK}{z-1+T+TK}.$$

Конкретизируя входное воздействие, например, в виде единичной ступеньки, получаем  $z$ -изображение выходного сигнала:

$$\begin{aligned} Y(z) = W(z)R(z) &= \frac{TK}{z-1+T+TK} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{TKz}{z^2 + (T+TK-2)z + (1-T-TK)}. \end{aligned}$$

### 5.3.3. Метод трапеций

Этот метод основан на кусочно-линейной аппроксимации, то есть на замене интеграла суммой площадей трапеций с основанием, равным  $T$ . Это эквивалентно введению перед каждым интегратором на диаграмме состояний квантователя и экстраполятора первого порядка (линейного экстраполятора). Соответствующая схема приведена на рис. 5.5.

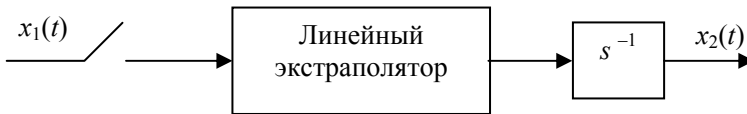


Рис. 5.5. Метод трапеций

Передаточная функция экстраполятора первого порядка согласно формуле (2.44) записывается как

$$W_1(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2},$$

поэтому импульсная передаточная функция численного интегрирования по методу трапеций на основании рис. 5.5 будет иметь вид

$$\frac{X_2(z)}{X_1(z)} = \frac{z + z^{-1} - 2}{T} Z \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} = \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}. \quad (5.6)$$

Относительная точность различных численных методов зависит от конкретной передаточной функции, но все же при прочих равных условиях метод трапеций в этом смысле предпочтительнее.

С точки зрения влияния на устойчивость получаемой цифровой системы наилучшим, как правило, является метод прямоугольников.

Недостатком методов численного интегрирования является необходимость предварительного выделения в передаточной функции непрерывной системы интеграторов в чистом виде (этап получения диаграммы состояния). От этого недостатка свободен метод  $z$ -форм.

## 5.4. Метод $z$ -форм

Для пояснения этого метода запишем связь непрерывной функции  $f(t)$  с ее преобразованием Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt; \quad (5.7)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s) e^{st} ds. \quad (5.8)$$

Путь интегрирования в формуле (5.8) разобьем на три части и представим правую часть в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s) e^{st} ds + \\ & + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s) e^{st} ds. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Если период квантования достаточно мал (частота квантования  $\omega_s$  достаточно большая), то первым и последним слагаемым в формуле (5.9) можно пренебречь вследствие ограниченности частотного спектра реального сигнала, описываемого функцией  $f(t)$ . Тогда можно приближенно записать

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s)e^{st} ds.$$

Рассматривая последнее выражение в дискретных точках  $t = kT$  и обозначая правую часть через  $f_A(kT)$ , получим

$$f(kT) \approx f_A(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s)e^{skT} ds.$$

Перейдем в последней формуле к переменной  $z$ , сделав замену переменной  $s = \frac{1}{T} \ln z$ :

$$\begin{aligned} f_A(kT) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F\left(\frac{1}{T} \ln z\right) e^{k \ln z} d\left(\frac{1}{T} \ln z\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi j T} \oint_{\Gamma} F\left(\frac{1}{T} \ln z\right) z^{k-1} dz, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где контур интегрирования  $\Gamma$  — это окружность с центром в начале координат и радиусом  $e^{cT}$ .

Сравнивая выражение (5.10) с формулой обращения (формулой обратного  $z$ -преобразования)

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz, \quad (5.11)$$

нетрудно заметить, что они совпадают с точностью до множителя  $\frac{1}{T}$ . Но в  $z$ -преобразовании  $f(kT)$  — коэффициенты

разложения  $F(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ . Поэтому значение  $f_A(kT)$  по выражению (5.10), то есть приближенное значение  $f(kT)$ , может быть получено разложением в ряд по степеням  $z^{-1}$  функции  $F\left(\frac{1}{T} \ln z\right)/T$ .

Таким образом, метод  $z$ -форм состоит в замене  $s^{-1}$  в изображении Лапласа выхода системы на  $T/\ln z$  и разложении полученного выражения (с учетом множителя  $1/T$ ) в ряд по степеням  $z^{-1}$  для получения выхода в дискретных точках.

Предварительно требуется представить выражение  $F\left(\frac{1}{T} \ln z\right)$

в виде рациональной функции от  $z$ , для чего можно воспользоваться разложением  $\ln z$  в степенной ряд. Воспользуемся таким разложением. Тогда при  $|z| > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \ln z &= 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right] = \\ &= 2 \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^5 + \dots \right] = \\ &= 2 \left( u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + \dots \right), \end{aligned}$$

где  $u = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ .

Запишем выражение для  $s^{-1}$ :

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \frac{T/2}{u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + \dots}.$$

Осуществляя деление числителя на знаменатель, из последнего выражения получим

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{3}u - \frac{4}{45}u^3 - \frac{44}{945}u^5 - \dots \right). \quad (5.12)$$

Правая часть выражения (5.12) есть разложение функции  $T/\ln z$  в ряд Лорана по степеням переменной  $u$ .

Для произвольной целой положительной степени  $n$  из выражения (5.12) будем иметь

$$\frac{1}{s^n} = \left( \frac{T}{2} \right)^n \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{3}u - \frac{4}{45}u^3 - \frac{44}{945}u^5 - \dots \right)^n. \quad (5.13)$$

При возведении в степень правой части выражения (5.13) также получим ряд Лорана.

Ограничиваясь постоянным членом и основной частью\* ряда Лорана (5.13), получаем

$$\frac{1}{s^n} \approx \frac{N_n(z^{-1})}{(1-z^{-1})^n} = G_n(z^{-1}), \quad (5.14)$$

где  $N_n(z-1)$  — полином от  $(z-1)$ -й степени не выше  $n$ ;  $G_n(z-1)$  —  $z$ -форма от  $s^{-n}$ .

При  $n = 1$  для получения  $G_n(z-1)$  в формуле (5.12) ограничиваемся первым слагаемым:

$$s^{-1} \approx G_1(z^{-1}) = \frac{T}{2} \frac{1}{u} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

---

\* Основная, или главная, часть ряда Лорана – это слагаемые с отрицательными степенями переменной, то есть нисходящая часть ряда. Отбрасывание остальных членов ряда обусловлено следующим соображением. При  $s = 0$  будет  $z = 1$ , то есть полюса правой и левой частей выражения (5.14) соответствуют друг другу. Поэтому учет дополнительных членов ряда приведет к появлению дополнительных полюсов в  $z$ -плоскости и к увеличению, а не уменьшению ошибки.

При  $n = 2$  из выражения (5.13) получим

$$s^{-2} \approx G_2(z^{-1}) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left[ \left(\frac{1}{u}\right)^2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{T^2}{12} \frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

Аналогичным образом получаем  $z$ -формы для более высоких порядков. Эти выражения для  $n \leq 4$  приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Выражения для некоторых  $z$ -форм

$s^{-n}$	$G_n(z^{-1})$
$s^{-1}$	$\frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
$s^{-2}$	$\frac{T^2}{12} \frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}$
$s^{-3}$	$\frac{T^3}{2} \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3}$
$s^{-4}$	$\frac{T^4}{6} \frac{z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})^4} - \frac{T^4}{720}$

Резюмируя вышеизложенное, применение метода  $z$ -форм можно сформулировать следующим образом:

– определяем преобразование Лапласа выхода системы  $Y(s)$  по известному входному воздействию  $R(s)$  и заданной передаточной функции замкнутой системы  $W(s)$ :

$$Y(s) = R(s)W(s);$$

– преобразуем  $Y(s)$  к виду дробно-рациональной функции по отрицательным степеням  $s^{-1}$ ;



- заменяем  $s^{-n}$  соответствующими  $z$ -формами\*;
- учитываем множитель  $1/T$  для получения  $Y_A(z)$ ;
- применяя обратное  $z$ -преобразование, определяем  $u_A(kT)$ .

---

\* Замена на  $z$ -формы степеней  $s^{-1}$ , а не  $s$  имеет следующее обоснование. С физической точки зрения  $s^{-1}$  представляет собой интегратор, значительно менее подверженный влиянию помех в виде усечения ряда (5.13), чем дифференциатор  $s$ .

## 6. АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 6.1. Устойчивость дискретных систем

#### 6.1.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости

Методы исследования устойчивости цифровых систем в известном смысле аналогичны соответствующим методам в теории непрерывных систем.

Рассмотрим, например, систему, заданную уравнением общего вида

$$\begin{aligned} a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = \\ = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_m r(k). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Решение уравнения (6.1) состоит, как известно [1], из общего решения однородного разностного уравнения  $y_0(k)$  и частного решения неоднородного уравнения (6.1)  $y_n(k)$ :

$$y(k) = y_0(k) + y_n(k).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения  $y_0(k)$  интерпретируется как переходная составляющая, а частное решение  $y_n(k)$  — как вынужденная (установившаяся) составляющая.

Переходная составляющая представляется в форме

$$y_0(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + \dots + c_n z_n^k, \quad (6.2)$$

где  $c_i$  — постоянные, определяемые начальными (граничными) условиями;  $z_i$  — различные корни характеристического уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z = 0. \quad (6.3)$$

При наличии кратного корня (например,  $z_1$ ) соответствующая составляющая общего решения имеет вид

$$y_0(k) = c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k + c_3 k^2 z_1^k + \dots + c_r k^{r-1} z_1^k, \quad (6.4)$$

где  $r$  — кратность корня  $z_1$ .

Из выражений (6.2), (6.4) ясно, что переходной процесс будет асимптотически затухать (то есть система будет устойчива), если все  $z_i$  располагаются внутри окружности единичного радиуса. Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости линейной цифровой системы, описываемой уравнением (6.1), является

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $z_i$  — корни характеристического уравнения (6.3).

К тому же выводу относительно устойчивости системы можно прийти, воспользовавшись  $z$ -преобразованием. Импульсная передаточная функция системы (6.1)

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m z}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z} \quad (6.5)$$

и представляет отношение дискретных преобразований Лапласа выхода ко входу после замены переменной

$$z = e^{Ts}. \quad (6.6)$$

Область устойчивости в плоскости  $s$  — это левая полуплоскость, которая преобразованием (6.6) переводится в круг единичного радиуса, следовательно, устойчивой будет та и только та система, корни знаменателя передаточной функции которой (6.5) лежат внутри окружности единичного радиуса.

Если система описывается своими уравнениями состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{r}(k),$$

то переходная матрица состояния  $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$  стремится к нулю при стремлении  $k$  к бесконечности, если характеристические числа матрицы  $\mathbf{A}$  расположены внутри единичной окружности. В случае наличия характеристического числа, лежащего на единичной окружности и являющегося простым, при

стремлении  $k$  к бесконечности матрица  $\Phi(k)$  ограничена. Если же имеется характеристическое число вне окружности единичного радиуса или есть кратные характеристические числа, лежащие на единичной окружности, то при стремлении  $k$  к бесконечности матрица  $\Phi(k)$  неограниченно возрастает. Действительно, согласно теореме Кэли – Гамильтона матрица  $\mathbf{A}^k$  определяется выражением

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i,$$

где  $n$  — размерность матрицы  $\mathbf{A}$ , а коэффициенты  $\alpha_i$  находятся из уравнений

$$\lambda_j^k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda_j^i$$

в случае различных собственных чисел  $\lambda_j$  или из уравнений

$$\left. \frac{d^p(\lambda^k)}{d\lambda^p} \right|_{\lambda=\lambda_j} = \left. \frac{d^p}{d\lambda^p} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \right) \right|_{\lambda=\lambda_j}$$

для кратного собственного числа  $\lambda_j$ .

При различных собственных числах элементы переходной матрицы  $\mathbf{A}^k$  состоят из линейных комбинаций элементов  $(\lambda_j)^k$ . Эти элементы стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , если  $|\lambda_j| < 1$ , ограничены, если  $|\lambda_j| = 1$ , и неограниченно возрастают, если  $|\lambda_j| > 1$ .

При кратных собственных числах элементы переходной матрицы  $\mathbf{A}^k$  состоят из линейных комбинаций  $k\lambda_j^{k-1}$ . Понятно, что при  $k \rightarrow \infty$  эти элементы неограниченно возрастают, если  $|\lambda_j| \geq 1$ , и стремятся к нулю, если  $|\lambda_j| < 1$ .

Таким образом, для устойчивости системы опять-таки необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0 \quad (6.7)$$

находились внутри окружности единичного радиуса.

Непосредственное вычисление корней путем решения уравнений (6.3) или (6.7) нерационально, поэтому, как и в непрерывных системах, для определения устойчивости разработаны соответствующие критерии.

### 6.1.2. Алгебраические критерии устойчивости

Применять алгебраические критерии непосредственно к характеристическому уравнению (6.3) нельзя, поскольку эти критерии устанавливают условия нахождения корней полинома в левой полуплоскости. Однако если воспользоваться преобразованием, отображающим круг единичного радиуса в левую полуплоскость, то все алгебраические критерии применимы в неизменном виде. Таким преобразованием является *билинейное преобразование*

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (6.8)$$

Из соотношения (6.8) следует

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (6.9)$$

При движении изображающей точки в  $z$ -плоскости по единичной окружности

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T, \quad n\omega_s \leq \omega \leq (n+1)\omega_s, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

выражение (6.9) принимает вид

$$w = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1} = j \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (6.10)$$

Таким образом, окружность единичного радиуса в плоскости переменной  $z$  отображается на мнимую ось переменной  $w$ , а внутренность окружности (область устойчивости) соответствует левой полуплоскости.

**Пример 6.1.** Рассмотрим уравнение первого порядка

$$a_0 z + a_1 = 0. \quad (6.11)$$

Сделаем в уравнении (6.11) замену переменной (6.8), получим

$$a_0 \frac{1+w}{1-w} + a_1 = 0,$$

или

$$a_0(1+w) + (1-w)a_1 = (a_0 - a_1)w + (a_0 + a_1) = 0. \quad (6.12)$$

Для устойчивости системы согласно достаточному критерию устойчивости (положительность коэффициентов при переменной) требуется, чтобы было

$$a_0 + a_1 > 0,$$

$$a_0 - a_1 > 0.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости линейной непрерывной системы для уравнений первого и второго порядка — положительность коэффициентов — уже не является не только достаточным, но и необходимым для уравнения (6.11) цифровой системы.

### 6.1.3. Критерий Михайлова

Условием устойчивости дискретной системы, описываемой импульсной передаточной функцией

$$W(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{Q(z)}{D(z)}, \quad (6.13)$$

является расположение корней знаменателя (6.13) внутри единичной окружности или, что то же самое, корни уравнения

$$D(z)|_{z=e^{Ts}} = a_0 (e^{Ts})^n + a_1 (e^{Ts})^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (6.14)$$

должны иметь отрицательные вещественные части. Поскольку корни уравнения (6.14) повторяются (вследствие периодичности функции  $e^{Ts}$ ), достаточно исследовать только корни в основной полосе частот  $\pm \omega_s/2$ .

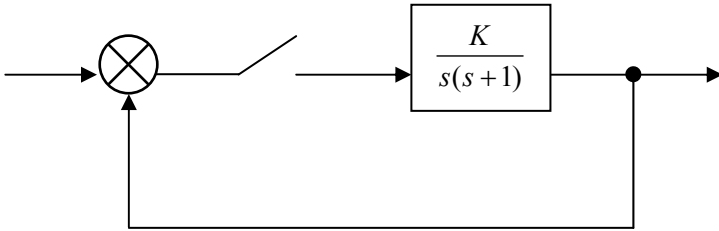
При подстановке в выражение (6.14)  $s = j\omega$  ( $-\frac{\omega_s}{2} < \omega \leq +\frac{\omega_s}{2}$ ) или, что то же самое,  $s = j\frac{\omega}{T}$  ( $-\pi < \omega \leq +\pi$ ) (при этом переменная  $z$  перемещается по окружности единичного радиуса) получаем годограф Михайлова. Можно показать, что если при этом угол поворота годографа Михайлова равен  $2\pi n$ , то система устойчива, если угол поворота кривой Михайлова меньше, чем  $2\pi n$ , то система является неустойчивой.

Вообще, достаточно исследовать годограф Михайлова только для положительных частот  $0 < \omega < \pi$ , что соответствует  $0 < s < j\frac{\omega_s}{2}$ , поскольку при отрицательных частотах картина будет симметрична. Суммарный угол поворота при этом должен быть в два раза меньше.

Таким образом, критерий устойчивости Михайлова для дискретных систем требует, чтобы годограф  $D(e^{j\omega})$ , определяющийся знаменателем импульсной передаточной функции  $W(e^{j\omega})$ , начинаясь на положительной действительной полуоси комплексной плоскости, при изменении частоты  $\omega$  от нуля до  $\omega = \pi$  охватывал начало координат, последовательно проходя  $2n$  квадрантов, где  $n$  — порядок системы.

В отличие от непрерывных систем, годограф Михайлова не уходит в бесконечность, а кончается на действительной оси, проходя при этом в два раза больше квадрантов.

**Пример 6.2.** Проведем исследование устойчивости системы, представленной ниже, с помощью критерия Михайлова.



Составим характеристическое уравнение замкнутой системы. Для этого подсчитаем передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)},$$

где  $W(z) = Z \left\{ \frac{K}{s(s+1)} \right\}$ .

Передаточную функцию вычислим, как обычно, разложив выражение под знаком  $z$ -преобразования на простые дроби:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z \left\{ \frac{K}{s(s+1)} \right\} = Z \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1} \right\} = \\ &= \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-e^{-T}} = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Phi(z) = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})}.$$

Характеристический полином — это знаменатель последнего выражения:

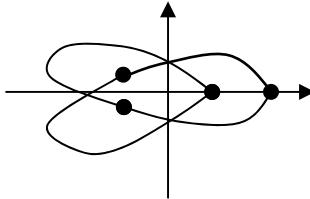
$$D(z) = (z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T}).$$



Зададим численное значение  $T = 1,57$  с, тогда  $e^{-T} \approx 0,2$  и

$$D(z) = 0,8z + (z-1)(z-0,2).$$

Пусть  $K = 1$ , тогда  $D(z) = 0,8z + (z-1)(z-0,2)$ . Придавая переменной  $z$  значения на окружности единичного радиуса против часовой стрелки, получаем кривую Михайлова:



В таблице приведены значения кривой Михайлова для четырех значений  $z$ :

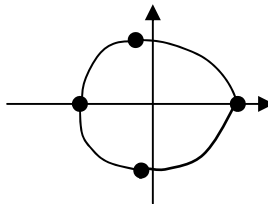
$z$	1	$j$	-1	$-j$
$D(z)$	0,8	$-0,8-j0,4$	1,6	$-0,8+j0,4$

Видно, что кривая Михайлова совершает два оборота вокруг начала координат против часовой стрелки, а поскольку порядок характеристического полинома равен двум, то и система согласно критерию Михайлова будет устойчивой.

Теперь пусть  $K = 10$ . В этом случае  $D(z) = 8z + (z-1)(z-0,2)$ . Расчет дает следующую таблицу:

$z$	1	$j$	-1	$-j$
$D(z)$	8	$-0,8+j6,8$	-5,6	$-0,8-j6,8$

В данном случае кривая Михайлова совершает только один оборот вокруг начала координат:



Это свидетельствует о неустойчивости системы.

### 6.1.4. Критерий Найквиста

Рассмотрим замкнутую систему (рис. 6.2).

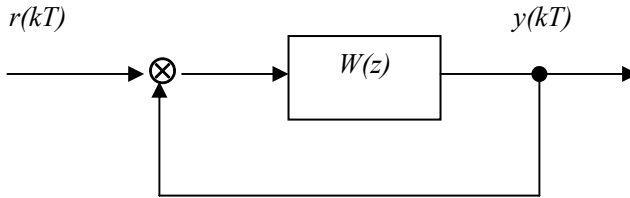


Рис. 6.2. Система с единичной обратной связью

Как и в случае непрерывной системы, судить об устойчивости замкнутой дискретной системы можно по передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$ .

При исследовании непрерывной системы переменная  $s$  меняется в общем случае по кривой Найквиста  $\Gamma_1$  (рис. 6.3,а). В зависимости от числа полюсов передаточной функции разомкнутой системы внутри кривой Найквиста (то есть в правой полуплоскости) и от поведения годографа амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) относительно точки  $(-1, j 0)$  делается вывод об устойчивости замкнутой системы.

Для дискретной системы изменение  $s$  в импульсной передаточной функции  $W^*(s)$  по тому же контуру не дает ничего конструктивного, поскольку в случае неустойчивой в разомкнутом состоянии системы в правой полуплоскости будет бесконечное число полюсов из-за периодичности функции  $W^*(s)$ . Однако в основной полосе частот в правой полуплоскости число полюсов по-прежнему будет ограниченным, поэтому, изменяя  $s$  по контуру  $\Gamma_2$  и анализируя поведение кривой  $W^*(s)$ , можно сделать вывод об устойчивости замкнутой дискретной системы.

Отображение контура Найквиста  $\Gamma_2$  на  $z$ -плоскость представлено на рис. 6.3,б. Изменение  $s$  вдоль мнимой оси соответствует движению изображающей точки по единичной окружности в плоскости  $z$ , а изменение  $s$  по дуге бесконечного радиуса соответствует окружности бесконечного радиуса

в  $z$ -плоскости. Поэтому устойчивость замкнутой системы можно определить по импульсной передаточной функции  $W(z)$  разомкнутой системы при изменении  $z$  по контуру Найквиста (см. рис. 6.3,б).

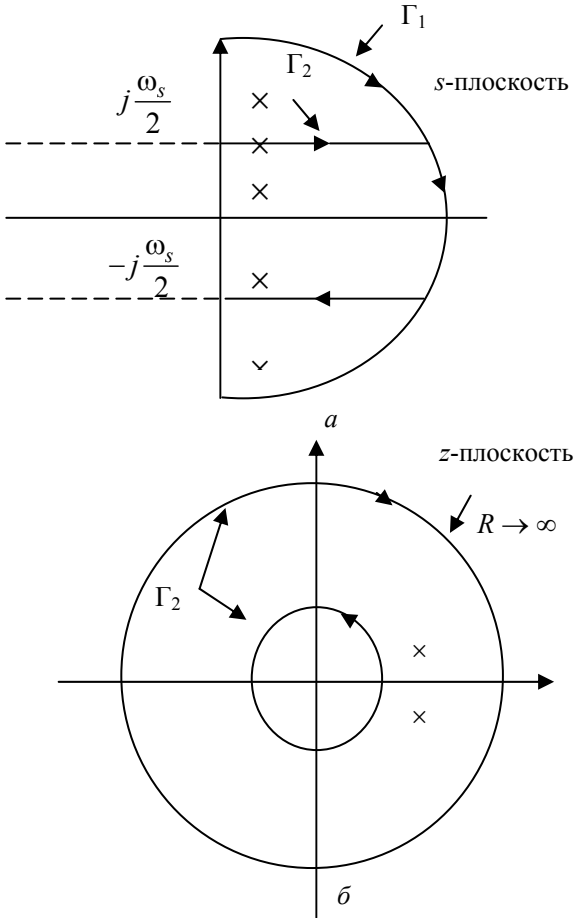


Рис. 6.3. Контурь интегрирования в критерии Найквиста

В этом случае формулировки критерия Найквиста для цифровых и непрерывных систем совпадают.

В частности, если разомкнутая система устойчива (то есть  $r = 0$ ), то для устойчивости замкнутой системы годограф  $W(z)$  (или  $W^*(s)$ ) вообще не должен охватывать точку  $(-1, j 0)$ , а изменение  $z$  достаточно производить только вдоль окружности единичного радиуса (соответственно  $s$  при этом можно менять от  $-j\frac{\omega_s}{2}$  до  $+j\frac{\omega_s}{2}$ ).

Основная трудность применения критерия Найквиста состоит в построении годографа  $W(z)$  (или  $W^*(s)$ ). Это построение может быть сделано одним из трех методов.

**Метод  $z$ -преобразования** заключается в замене переменной  $z$  на  $e^{j\omega T}$  в передаточной функции  $W(z)$  и изменении  $\omega$  от  $-\omega_s/2$  до  $+\omega_s/2$ .

**Метод бесконечного ряда** основан на формуле (3.6):

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s). \quad (6.15)$$

Для построения годографа АФЧХ производится замена  $s = j\omega_s (-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2)$ . Для физически реализуемых систем полоса пропускания ограничена и  $|W(s + jn\omega_s)|$  с ростом  $n$  уменьшается, поэтому при практическом построении годографа  $W^*(s)$  ряд (6.15) ограничивается конечным числом членов.

**Метод билинейного преобразования** использует переход к переменной  $w$  по формуле (6.8):

$$z = \frac{1+w}{1-w}.$$

При движении изображающей точки по единичной окружности плоскости  $z$  переменная  $w$  принимает мнимые значения  $w = j\omega_w$ , а связь между псевдочастотой  $\omega_w$  и действительной частотой  $\omega$  устанавливается, учитывая формулу (6.10), соотношением

$$\omega_w = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (6.16)$$

Таким образом, производя в передаточной функции  $W(z)$  замену переменной

$$z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w} \quad (6.17)$$

и меняя псевдочастоту  $\omega_w$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  (или от 0 до  $\infty$  ввиду симметричности картины), получают годограф частотной передаточной функции.

При подобном построении в комплексной плоскости билинейное преобразование преимуществ не дает, но значительно облегчает построение логарифмических характеристик, которые как функции псевдочастоты могут быть построены в виде асимптотических прямых.

Из логарифмических псевдочастотных характеристик можно получить, в частности, такие показатели качества, как запас устойчивости по амплитуде (по модулю) и по фазе.

## 6.2. Переходной процесс

Как известно, дискретные преобразования Лапласа входа  $R^*(s)$  и выхода  $Y^*(s)$  цифровой системы связаны соотношением

$$Y^*(s) = W^*(s) \cdot R^*(s),$$

где  $W^*(s)$  — импульсная передаточная функция системы.

Переходя от изображения  $Y^*(s)$  к оригиналу, можно найти процесс  $y(nT)$ . Оценка реального переходного процесса  $y(t)$  по дискретным значениям  $y(nT)$  может быть, а может и не быть точной — это определяется периодом квантования и соотношением периода квантования с постоянными времени системы\*. Способ непосредственного нахождения переходного процесса  $y(nT)$  имеет те же недостатки, что и в непрерывных системах. Поэтому для исследования переходного процесса

---

\* Здесь уместно вспомнить еще раз условия импульсной теоремы и эффекты смещения и наложения частот вследствие квантования непрерывного сигнала.

могут быть применены те же косвенные методы и показатели качества, что и в непрерывных системах: величина перерегулирования, время установления, время нарастания, степень устойчивости, колебательность и так далее. И так же, как и в непрерывных системах, качество переходного процесса может быть исследовано частотными методами, методом корневых годографов, с использованием интегральных оценок.

Возьмем, например, степень устойчивости  $\eta$ , которая определяется удаленностью ближайшего от мнимой оси корня знаменателя передаточной функции. В отличие от непрерывных систем, в цифровых системах имеется принципиальная возможность получения бесконечной степени устойчивости  $\eta \rightarrow \infty$ . Формально это связано с тем, что при  $s_i \rightarrow -\infty$  корни  $z_i = e^{s_i T}$  стремятся к нулю. Таким образом, характеристическое уравнение (6.3) принимает вид

$$a_0 z^n = 0, a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Числитель передаточной функции может быть и не равен нулю, то есть передаточная функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n} = \\ &= \frac{1}{a_0} (b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-n-1} + \dots + b_m z^{-n}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Но импульсная передаточная функция  $W(z)$  есть  $z$ -изображение импульсной переходной (весовой) функции:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) z^{-k}. \quad (6.19)$$

При сравнении правых частей выражений (6.18) и (6.19) видно, что весовая функция может иметь не более чем  $n$  первых дискретных отсчетов, не равных нулю. Таким образом, переходной процесс заканчивается спустя конечное время, равное  $nT$ . Уменьшая период квантования  $T$ , теоретически можно сделать время переходного процесса как угодно ма-

лым. И что самое интересное, система может оставаться в этом случае устойчивой (полюса передаточной функции по-прежнему располагаются внутри окружности единичного радиуса). Однако практическим ограничением здесь выступает невозможность бесконечного увеличения общего коэффициента усиления.

Каким образом добиться конечного времени переходного процесса, будет рассмотрено в разделе, посвященном синтезу цифровых систем.

### 6.3. Установившийся процесс

Качество установившегося процесса оценивается, как и в непрерывных системах, ошибками в типовых режимах. Последние могут быть определены по теореме о конечном значении.

Рассмотрим, например, систему с квантователем и фиксатором (рис. 6.4).

Ошибка  $e(t)$  в данном случае определяется как разность входного сигнала и сигнала обратной связи:

$$e(t) = r(t) - z(t).$$

При описании системы с помощью  $z$ -преобразования установившаяся ошибка в моменты квантования определяется как

$$e_{уст}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z). \quad (6.20)$$

Согласно структурной схеме на рис. 6.4  $z$ -преобразование  $E(z)$  вычисляется по формуле

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)}, \quad (6.21)$$

где  $R(z) = Z\{r(t)\}$ , а передаточная функция разомкнутой системы

$$GH(z) = Z\{W_0(s)G(s)H(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}. \quad (6.22)$$

Подставляя выражение (6.21) в формулу (6.20), получим соотношение

$$e_{\text{уст}}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + GH(z)}, \quad (6.23)$$

которое показывает, что установившаяся ошибка зависит как от свойств системы, так и от задающего входного воздействия.

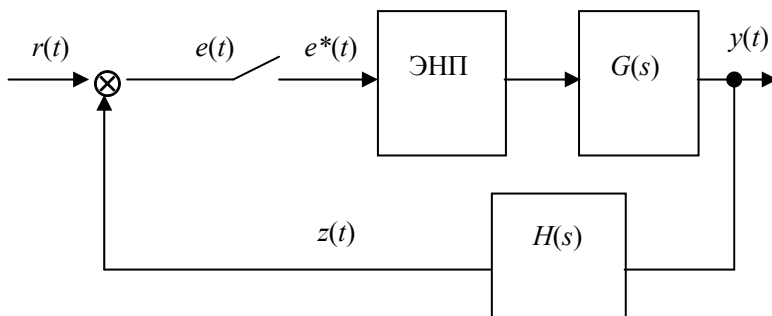


Рис. 6.4. Структурная схема дискретной системы

Известно, что в непрерывных системах ошибка в типовых режимах может быть оценена добротностями (для систем с соответствующей степенью астатизма):

а) добротностью по положению  $K_p$  для статических систем и постоянного входного воздействия  $r(t) = R \cdot 1(t)$ ;

б) добротностью по скорости  $K_V$  для системы с астатизмом первого порядка и входного воздействия, меняющегося с постоянной скоростью  $r(t) = Vt \cdot 1(t)$ ;

в) добротностью по ускорению  $K_a$  для системы с астатизмом второго порядка и входного воздействия, меняющегося с постоянным ускорением  $r(t) = \frac{At^2}{2} 1(t)$ , и так далее.

Например, для системы, представленной на рис. 6.4, при условии, что устройство выборки и хранения в ней отсутствует, эти добротности могут быть вычислены по формулам



$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s); \quad (6.24)$$

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)H(s)]; \quad (6.25)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2G(s)H(s)], \quad (6.26)$$

а соответствующие установившиеся ошибки — по формулам

$$e_{\text{уст}} = \frac{R}{1 + K_p}; \quad (6.27)$$

$$e_{\text{уст}} = \frac{V}{K_V}; \quad (6.28)$$

$$e_{\text{уст}} = \frac{A}{K_a}. \quad (6.29)$$

Аналогичным образом дело обстоит и в цифровых системах.

Для постоянного входного воздействия  $r(t) = R \cdot 1(t)$  его  $z$ -преобразование будет

$$R(z) = \frac{Rz}{z-1}. \quad (6.30)$$

Подставляя выражение (6.30) в формулу (6.23), получим

$$e_{\text{уст}}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Rz}{(z-1)(1 + GH(z))} = \frac{R}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)}.$$

Для того чтобы записать полученное выражение в форме (6.27), определим добротность по положению как

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z). \quad (6.31)$$

Тогда

$$e_{\text{уст}}^* = \frac{R}{1 + K_p}. \quad (6.32)$$

Для линейно меняющегося воздействия  $r(t) = Vt \cdot 1(t)$  его  $z$ -изображение имеет вид

$$R(z) = \frac{VTz}{(z-1)^2}. \quad (6.33)$$

После подстановки формулы (6.33) в выражение (6.23) имеем

$$e_{уст}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{VTz}{(z-1)^2 (1 + GH(z))} = \frac{V}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} GH(z)}.$$

Определив добротность по скорости как

$$K_V = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) GH(z), \quad (6.34)$$

получим выражение, совпадающее по форме с соотношением (6.28):

$$e_{уст}^* = \frac{V}{K_V}. \quad (6.35)$$

Параболическое входное воздействие  $r(t) = \frac{At^2}{2} 1(t)$  имеет  $z$ -преобразование

$$R(z) = \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}. \quad (6.36)$$

Подставив выражение (6.36) в соотношение (6.23), найдем установившуюся ошибку:

$$e_{уст}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3 (1 + GH(z))} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} GH(z)}.$$

Последнее выражение после введения добротности по ускорению согласно равенству

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z) \quad (6.37)$$

примет вид формулы (6.29):

$$e_{уст}^* = \frac{A}{K_a}. \quad (6.38)$$

Интересно проследить, влияет ли величина периода квантования  $T$  на установившуюся ошибку и каким именно образом? На первый взгляд, такое влияние должно быть, так как в выражениях для соответствующих добротностей (см., например, формулы (6.34) и (6.37)) присутствует параметр  $T$ . Проверим, так ли это.

Пусть передаточная функция разомкнутой непрерывной системы имеет в общем случае вид

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-d_1^{-1}s)(1-d_2^{-1}s)\dots(1-d_m^{-1}s)}{s^r(1-c_1^{-1}s)(1-c_2^{-1}s)\dots(1-c_n^{-1}s)}, \quad (6.39)$$

где  $r$  — порядок астатизма системы;  $d_i$  и  $c_j$  — соответственно нули и полюса передаточной функции (действительные или комплексно-сопряженные, но не равные нулю).

Из выражений (6.24)–(6.26) и (6.39) легко сделать следующие выводы:

а) при постоянном входном воздействии и астатизме нулевого порядка  $r = 0$  (статическая система)

$$K_p = K;$$

б) при линейном входном воздействии и астатизме первого порядка  $r = 1$

$$K_V = K;$$

в) при параболическом входном воздействии и астатизме второго порядка  $r = 2$

$$K_a = K.$$

Рассмотрим теперь цифровую систему с квантователем и экстраполятором нулевого порядка.

Подставляя выражение (6.39) в формулу (6.22) для статической системы ( $r = 0$ ), имеем

$$GH(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K(1 - d_1^{-1}s)(1 - d_2^{-1}s) \cdots (1 - d_m^{-1}s)}{s(1 - c_1^{-1}s)(1 - c_2^{-1}s) \cdots (1 - c_n^{-1}s)} \right\}.$$

Разлагая выражение под символом z-преобразования на простые дроби, получим

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K}{s} + \text{слагаемые с ненулевыми полюсами} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) \left( \frac{Kz}{z-1} + \text{слагаемые с неединичными полюсами} \right). \end{aligned}$$

Для постоянного входного воздействия добротность по положению такой системы будет

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Kz}{z-1} = K.$$

Для системы с астатизмом первого порядка выражение (6.22) будет следующим:

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K(1 - d_1^{-1}s)(1 - d_2^{-1}s) \cdots (1 - d_m^{-1}s)}{s(1 - c_1^{-1}s)(1 - c_2^{-1}s) \cdots (1 - c_n^{-1}s)} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K}{s^2} + \frac{K^1}{s} + \text{слагаемые с ненулевыми полюсами} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) \left[ \frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K^1z}{z-1} + \text{слагаемые с неединичными полюсами} \right]. \end{aligned}$$

При линейно меняющемся воздействии получаем согласно формуле (6.34) добротность по скорости:

$$\begin{aligned} K_V &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) = \\ &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left(1 - z^{-1}\right) \left[ \frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K^1 z}{z-1} \right] = K. \end{aligned}$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что добротность по ускорению в системе с астатизмом второго порядка при параболическом входном воздействии будет

$$K_a = K.$$

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что, поскольку соответствующие добротности в непрерывной и дискретной системах равны, установившаяся ошибка цифровой системы с квантователем и фиксатором не зависит от периода квантования и определяется только параметрами и структурой непрерывной части и входным воздействием.

## 7. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

### 7.1. Общие схемы синтеза

Решаемые при синтезе цифровых систем задачи, по сути, идентичны таким же задачам, возникающим при синтезе непрерывных систем.

Под синтезом системы управления в широком смысле понимают такое ее исследование, в результате которого для данных условий работы\* находят необходимую структуру системы, параметры ее элементов и способы реализации найденной структурной схемы. Задача синтеза — всегда задача на оптимум, но подобрать сложный критерий, как правило, невозможно. Поэтому решать общую задачу синтеза как строгую математическую задачу поиска экстремума некоторого критерия практически невозможно. Существуют более простые постановки задачи синтеза.

Синтез можно трактовать как инженерную задачу, сводящуюся к такому построению системы, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Иногда в понятие инженерного синтеза вкладывают еще более узкий смысл и рассматривают синтез, имеющий целью определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к некоторой неизменяемой части системы\*\*, чтобы обеспечить требуемые динамические качества и заданную точность. Именно это и будем в дальнейшем вкладывать в понятие синтеза.

В отличие от непрерывных систем, синтез цифровых систем является гораздо более гибким и многовариантным. На-

---

\* Сюда входят заданный объект управления, возможный класс задающих и возмущающих воздействий, ограничения на время работы, требуемая точность, необходимое качество переходных процессов и так далее, включая стоимость эксплуатации и проектирования.

\*\* К неизменяемой части системы относят прежде всего сам объект управления, а также связанные с объектом и поэтому определяемые им исполнительные устройства, датчики, возможно, некоторые промежуточные элементы — усилители, преобразователи и т.п.

пример, система будет описываться как цифровая, если в ней применен цифровой или импульсный датчик либо сам объект имеет дискретную природу. Возможен случай, когда в системе специально применен цифровой регулятор. Если цифровой сигнал сгладить экстраполятором, то возможно применение и аналогового регулятора.

Из великого множества различных вариантов структурных схем цифровых систем рассмотрим наиболее часто встречающиеся схемы (рис. 7.1–7.4). Представим цифровую систему с аналоговым регулятором в канале ошибки (рис. 7.1). Квантователь, как и ранее, символизирует дискретный характер сигнала в цифровой системе, а экстраполятор нулевого порядка с передаточной функцией  $W_0(s)$  необходим для фильтрации дискретного сигнала перед поступлением последнего на аналоговый регулятор.

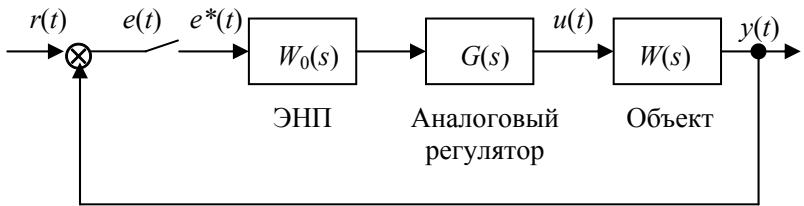


Рис. 7.1. Цифровая система с аналоговым регулятором в канале ошибки

На рис. 7.2 представлена структурная схема системы с цифровым регулятором в канале ошибки.

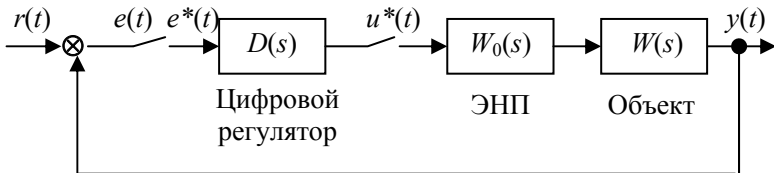


Рис. 7.2. Цифровая система с цифровым последовательным регулятором

Еще один пример использования аналогового регулятора приведен на рис. 7.3. Здесь аналоговый регулятор включен в цепь местной обратной связи.

Если на структурной схеме рис. 7.3 заменить аналоговый регулятор цифровым, получим схему, изображенную на рис. 7.4.

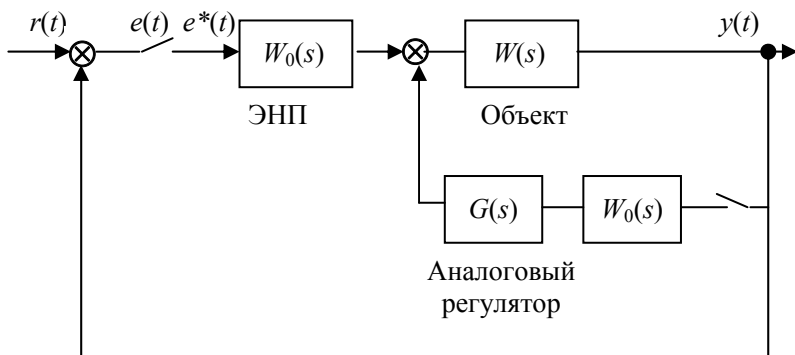


Рис. 7.3. Цифровая система с аналоговым регулятором в цепи обратной связи

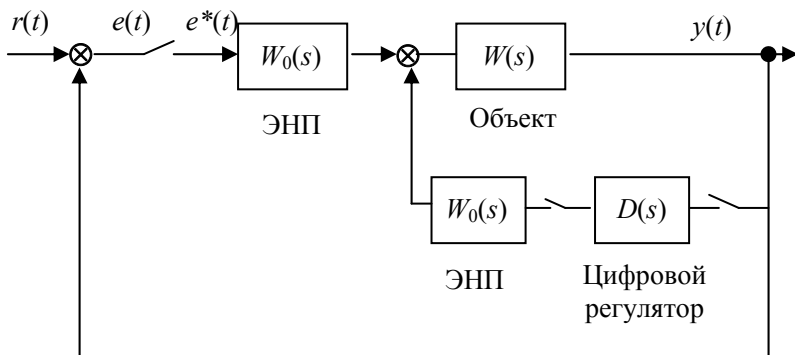


Рис. 7.4. Цифровая система с цифровым регулятором в цепи обратной связи

Описание цифровой системы уравнениями состояния позволяет применить такое мощное средство синтеза, как обрат-



ная связь по состоянию. Если все переменные состояния  $x(k)$  измеримы, структурная схема цифровой системы будет иметь вид, изображенный на рис. 7.5. Управление по состоянию осуществляется с помощью матрицы  $G$  в обратной связи.

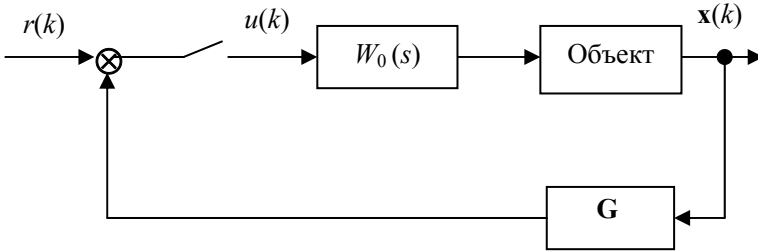


Рис. 7.5. Цифровая система с регулятором по состоянию в канале обратной связи

Не всегда переменные состояния могут быть непосредственно измерены. В этом случае приходится восстанавливать переменные состояния по измерениям выхода, т.е. в структуре системы необходимо использовать наблюдатель (рис.7.6) либо обратную связь по выходу (рис.7.7).

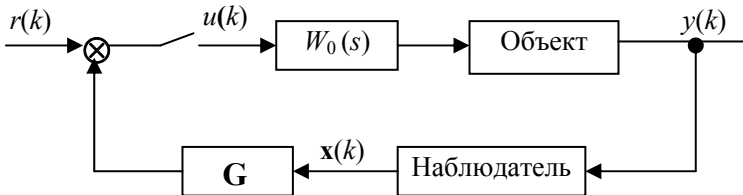


Рис. 7.6. Цифровая система с регулятором по состоянию в канале обратной связи и неполной информацией о векторе состояния

Обычно число входных переменных меньше, чем переменных состояния, поэтому с точки зрения эффективности управления синтез с использованием схем, представленных на рис. 7.5 и 7.6, предпочтительнее, чем с помощью схемы, изображенной на рис. 7.7.

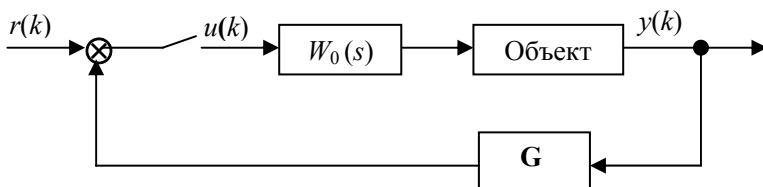


Рис. 7.7. Цифровая система с регулятором по выходу

Разумеется, успешность синтеза системы в пространстве состояний предполагает, что система является полностью управляемой и наблюдаемой.

## 7.2. Синтез последовательного аналогового регулятора

Структурная схема системы управления для данного случая представлена на рис. 7.1. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$\frac{Y(z)}{E(z)} Z \{W_0(s)G(s)W(s)\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)W(s)}{s} \right\}. \quad (7.1)$$

В результате синтеза требуется определить физически реализуемую передаточную функцию регулятора  $G(s)$ , обеспечивающего заданные показатели качества цифровой системы. Как видно из выражения (7.1),  $z$ -преобразование необходимо брать от произведения передаточной функции регулятора и объекта управления, поэтому нельзя независимо исследовать влияние только регулятора. В этом и состоит основная трудность.

Для синтеза аналогового регулятора в цифровой системе управления (см. рис. 7.1) может быть применен хорошо разработанный для непрерывных систем метод, основанный на логарифмических характеристиках. Необходимо только от переменной  $z$  перейти в псевдочастотную область с помощью билинейного преобразования (6.17):

$$z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w}.$$

Этот метод является точным, т.е. не связан с аппроксимацией УВХ, и имеет все преимущества частотных методов исследования систем.

Можно выделить следующие основные этапы синтеза.

1. Нахождение передаточной функции разомкнутой системы без регулятора:

$$W_0W(w) = W_0W(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}}. \quad (7.2)$$

2. Построение логарифмических псевдочастотных характеристик после подстановки в выражение (7.2)  $w = j\omega_w$ . На основании полученных характеристик можно оценить запасы устойчивости по модулю и по фазе, степень колебательности, полосу пропускания и прочее, то есть оценить динамические качества нескорректированной системы.

3. При необходимости коррекции системы передаточную функцию  $W_0W(w)$  умножают на передаточную функцию регулятора  $G'(w)$  с целью изменения формы логарифмических характеристик в соответствии с требуемыми показателями качества. Так же как и в непрерывных системах, регулятор с передаточной функцией  $G'(w)$  может различным образом влиять на частотные характеристики системы: либо вносить отрицательный фазовый сдвиг в некоторой полосе псевдочастот (аналог пассивного интегрирующего звена в  $s$ -области), либо вносить положительный фазовый сдвиг (аналог пассивного дифференцирующего звена), либо и то и другое (аналог пассивного интегриродифференцирующего звена).

4. После того как определена передаточная функция разомкнутой скорректированной системы  $G'(w)W_0W(w)$ , необходимо перейти к переменной  $s$ , то есть найти  $G(s)W_0(s)W(s)$ .

Имеем

$$\begin{aligned}
 G'(w)W_0W(w) &= GW_0W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \\
 &= (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{G(s)W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}}. \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

Выражение (7.3) можно переписать в следующем виде:

$$Z \left\{ \frac{G(s)W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{w+1}{2w} G'(w)W_0W(w). \quad (7.4)$$

Для определения  $G(s)W(s)/s$  правую часть соотношения (7.4) разлагают на простые дроби и по существующим таблицам, устанавливающим связь преобразования Лапласа,  $z$ -преобразования и  $w$ -преобразования, находят соответствующие слагаемые в  $s$ -области.

5. Из полученного выражения  $G(s)W(s)/s$  легко можно определить передаточную функцию аналогового регулятора  $G(s)$ . Единственная трудность, которая при этом может встретиться, — это несоответствие между количеством нулей в  $s$ - и  $w$ -плоскостях, вследствие чего передаточная функция регулятора  $G(s)$  часто бывает физически нереализуемой, так как содержит нулей больше, чем полюсов. Для исправления ситуации в передаточную функцию  $G(s)$  добавляют необходимое количество удаленных от мнимой оси действительных отрицательных полюсов, которые особого влияния на показатели качества системы не оказывают.

6. По передаточной функции регулятора подбирается соответствующая структурная схема и определяются ее параметры.

7. На последнем этапе, как и при любом другом методе синтеза, осуществляется анализ полученной системы в целом с целью проверки соответствия показателей ее качества техническому заданию.

**Пример 7.1.** Рассмотрим систему, изображенную на рис. 7.1. Пусть объект управления задан передаточной функцией  $W(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ . Для простоты вычислений положим

$K = 1,57$ ;  $T = 1,57$  с. Запишем дискретную передаточную функцию разомкнутой системы без коррекции:

$$\begin{aligned} Z\{W_0(s)W(s)\} &= Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(s+1)}\right\} = \\ &= (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1,57}{s^2(s+1)}\right\} = \frac{1,22(z+0,598)}{(z-1)(z-0,208)}. \end{aligned}$$

Применяя билинейное преобразование, переходим к переменной  $w$ :

$$W_0W(w) = W_0W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{1,2(1+0,25w)(1-w)}{w(1+1,5w)}.$$

Логарифмические псевдочастотные характеристики для полученной передаточной функции приведены на рис. 7.8. По этим характеристикам видно, что псевдочастота среза близка к 1 и запас устойчивости системы очень мал.

Для получения запаса устойчивости по фазе в  $45^\circ$  изменим псевдочастоту среза с 1 до 0,4. Для этого нужно опустить ЛАЧХ в окрестности точки  $\omega_w = 1$  на 8 дБ. Применим пассивное интегрирующее звено (звено, подавляющее высокие частоты) в области переменной  $w$  с передаточной функцией

$$G'(w) = \frac{1+aw}{1+\tau w},$$

где  $a < 1$ .

Для подавления сигнала на частоте среза на 8 дБ должно выполняться условие  $20 \lg a = -8$  дБ.

Из этого условия находим  $a = 10^{-8}/20 = 10^{-0,4} = 0,4$ . Это значение фиксирует расстояние между точками излома (сопрягающими частотами) ЛАЧХ пассивного корректирующего звена.

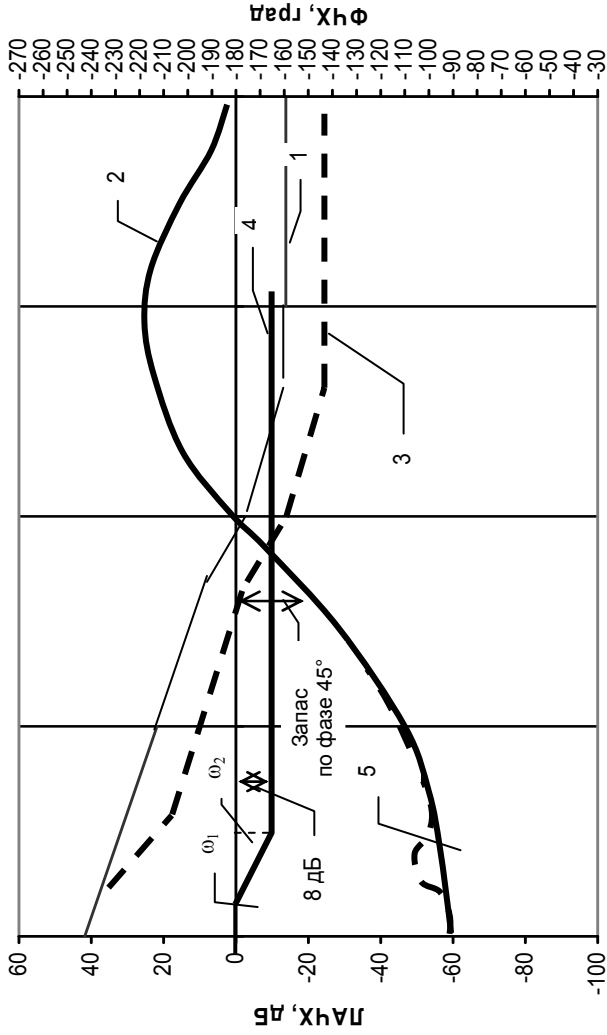


Рис. 7.8. К синтезу системы с применением билинейного преобразования:

- 1 – ЛАЧХ некорректированной системы; 2 – ФЧХ некорректированной системы;
- 3 – ЛАЧХ системы с коррекцией; 4– ЛАЧХ корректирующего звена
- (аналог пассивного интегрирующего звена); 5– ФЧХ системы с коррекцией

Чтобы фазовая характеристика корректирующего звена не вносила значительные искажения в результирующую фазовую характеристику всей системы, правый излом ЛАЧХ корректирующего звена целесообразно взять примерно в десять раз меньше новой частоты среза ЛАЧХ скорректированной системы, т.е.

$$\omega_2 = \frac{1}{a\tau} = \frac{0,4}{10} = 0,04 \text{ рад/с.}$$

Из этого условия сразу же определится и частота левого излома ЛАЧХ регулятора:

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 0,04a = 0,016 \text{ рад/с.}$$

Из полученных соотношений определяем  $a$  и  $\tau$  и подставляем найденные значения в передаточную функцию регулятора:

$$G'(w) = \frac{1 + 25w}{1 + 62,5w}.$$

Разомкнутая система с коррекцией будет иметь передаточную функцию в области переменной  $w$ :

$$G'(w)W_0W(w) = \frac{1,2(1 + 0,25w)(1 - w)(1 + 25w)}{w(1 + 1,5w)(1 + 62,5w)}.$$

К переменной  $z$  перейдем с помощью замены  $w = \frac{z-1}{z+1}$ :

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0GW(z) = G'(w)W_0W(w) \Big|_{w=\frac{z-1}{z+1}} = \\ &= \frac{0,5(z - 0,92)(z + 0,6)}{(z - 0,97)(z - 1)(z - 0,208)}. \end{aligned}$$

Передаточная функция замкнутой системы будет

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{0,5z^2 - 0,16z - 0,276}{z^3 - 1,68z^2 + 1,22z - 0,477}.$$

Осталось определить передаточную функцию аналогового регулятора  $G(s)$ . Для этого воспользуемся соотношением (7.4):

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{G(s)W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} &= \frac{w+1}{2w} G'(w)W_0W(w) = \\ &= \frac{w+1}{2w} \left[ \frac{1,2(1+0,25w)(1-w)(1+25w)}{(z-0,97)(z-1)(z-0,208)} \right]. \end{aligned}$$

При разложении на простые дроби выражения, стоящего в квадратных скобках последнего соотношения, необходимо учитывать, что функция  $\frac{W(s)}{s} = \frac{K}{s^2(s+1)}$  имеет два нулевых

полюса, а члену  $\frac{1}{s^2}$  в таблице  $w$ -преобразований соответствует выражение, имеющее в числителе член  $(1+w)(1-w)$ . Чтобы не потерять этот множитель, на простые дроби нужно раскладывать выражение  $\frac{G'(w)W_0W(w)}{1-w}$ . В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{G'(w)W_0W(w)}{1-w} &= \frac{1,2(1+0,25w)(1+25w)}{w(1+1,5w)(1+62,5w)} = \\ &= \frac{0,08(w+4)(w+0,04)}{w(w+0,666)(w+0,016)} = \frac{1,2}{w} - \frac{0,4}{w+0,666} - \frac{0,73}{w+0,016}. \end{aligned}$$

Учитывая полученный результат, выражение  $Z \left\{ \frac{G(s)W(s)}{s} \right\}$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{G(s)W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} &= \frac{1,2(1+w)(1-w)}{2w^2} - \\ &- \frac{0,6(1+w)(1-w)}{2w(1+1,5w)} - \frac{45,6(1+w)(1-w)}{2w(1+62,5w)}. \end{aligned}$$



Теперь подбираем каждому слагаемому соответствующую пару согласно таблице w-преобразований и записываем результат:

$$\frac{G(s)W(s)}{s} = \frac{1,53}{s^2} - \frac{0,6}{s(s+1)} - \frac{2235}{s(s+0,0204)} = \frac{0,031 - 2234s - 2235s^2}{s^2(s+1)(s+0,0204)}.$$

С учетом передаточной функции объекта управления получаем

$$G(s) = \frac{0,2 - 1423s - 1424s^2}{s + 0,0204}.$$

Как и было обещано, передаточная функция регулятора получилась физически нереализуемой (степень числителя превышает степень знаменателя). Чтобы все-таки получить физически реализуемый регулятор, добавим в передаточную функцию два удаленных от мнимой оси полюса, например  $s = -10$ . При этом, чтобы не изменить общий коэффициент передачи системы, передаточную функцию регулятора надо умножить на  $100/(s+10)^2$ . Окончательно передаточная функция регулятора будет иметь вид

$$G(s) = \frac{20 - 142300s - 142400s^2}{(s + 0,0204)(s + 10)^2}.$$

### 7.3. Синтез аналогового регулятора в цепи обратной связи

Рассмотрим коррекцию цифровой системы с аналоговым регулятором в цепи обратной связи на примере системы, приведенной на рис. 7.9.

Вернемся к системе с последовательным цифровым регулятором (рис. 7.10).

Предполагая, что передаточная функция последовательного цифрового регулятора  $G(z)$  найдена (этот вопрос будет рассмотрен в подразд. 7.4), получим соотношение, позволяющее определить передаточную функцию  $H(s)$  аналогового регулятора в цепи обратной связи (см. рис. 7.9), из условия эквивалентности систем, представленных на рис. 7.9 и 7.10. Передаточные функции этих систем соответственно

$$\Phi_1(z) = \frac{GW_0W(z)}{1 + W_0H(z) + W_0W(z)}, \quad (7.5)$$

и

$$\Phi_2(z) = \frac{G(z)W_0W(z)}{1 + G(z)W_0W(z)}. \quad (7.6)$$

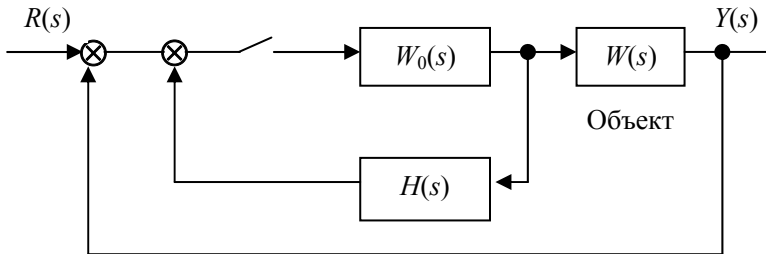


Рис. 7.9. Цифровая система с аналоговым регулятором в цепи обратной связи

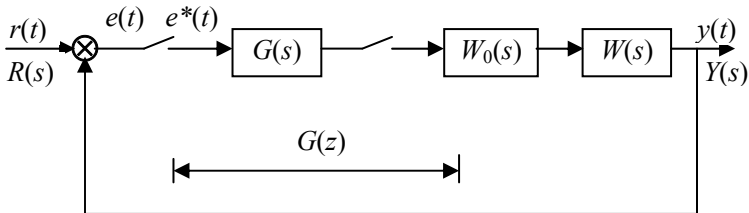


Рис. 7.10. Система с цифровым последовательным регулятором

Приравнявая передаточные функции (7.5) и (7.6) и решая полученное уравнение относительно  $W_0H(z)$ , имеем

$$W_0 H(z) = \frac{1 - G(z)}{G(z)}$$

или с учетом передаточной функции экстраполятора нулевого порядка  $W_0(s)$

$$Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{1 - G(z)}{G(z)}. \quad (7.7)$$

Формула (7.7) позволяет по известной передаточной функции цифрового регулятора  $G(z)$  найти передаточную функцию  $H(s)$  для эквивалентной системы.

Осталось обсудить условия физической реализуемости полученной передаточной функции  $H(s)$ , другими словами, какими свойствами должна обладать передаточная функция  $G(z)$ , чтобы передаточная функция  $H(s)$ , полученная по формуле (7.7), описывала физически реализуемое устройство (звено). Если физически реализуема функция  $H(s)$ , то реализуема и функция  $H(s)/s$ , а следовательно, разложение  $Z \{H(s)/s\}$  в ряд по степеням  $z$  не содержит положительных степеней  $z$ . Представим  $Z \{H(s)/s\}$  в виде

$$Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}, \quad (7.8)$$

где  $m$  и  $n$  — целые положительные числа, а условие физической реализуемости — это  $a_0 \neq 0$  при  $b_0 \neq 0$ .

Приравняв правые части выражений (7.7) и (7.8) и решая полученное уравнение относительно  $G(z)$ , имеем

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k} + (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}. \quad (7.9)$$

Таким образом, для физической реализуемости регулятора в обратной связи  $H(s)$  необходимо, чтобы свободный член числителя  $G(z)$  не был равен нулю:  $a_0 \neq 0$  (при  $b_0 \neq 0$ ).

При реализации  $H(s)$  в виде конкретного звена желательно обеспечить еще и возможно более простое схемное решение, например в виде  $RC$ -схемы. В этом случае на полюсы передаточной функции  $H(s)$  накладывается дополнительное условие — они должны быть простыми и отрицательными (не комплексными). Представим  $H(s)/s$  в виде суммы простых дробей:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{s - s_k},$$

где  $A_0$  и  $A_k$  — вычеты раскладываемой функции в соответствующих полюсах;  $s_k$  — простые отрицательные полюсы.

Применив  $z$ -преобразование к последнему выражению, получим

$$Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = \frac{A_0 z}{z - 1} + \sum_{k=0}^n \frac{A_k z}{z - e^{s_k T}}. \quad (7.10)$$

Видно, что  $Z\{H(s)/s\}$  имеет один полюс  $z=1$ , а все остальные полюсы являются простыми, положительными и меньше единицы.

Анализируя выражение (7.9), замечаем, что  $G(z)$  имеет одинаковое количество нулей и полюсов, а сравнивая формулы (7.9) и (7.8), видим, что полюсы  $H(s)$  обусловлены нулями  $G(z)$ .

Резюмируя вышеизложенное, делаем вывод, что для реализации  $H(s)$  в виде  $RC$ -схемы необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

- а) передаточная функция  $G(z)$  имела одинаковое число нулей и полюсов;
- б) нули  $G(z)$  были простыми, действительными, положительными и меньше единицы;
- в) полюсы  $G(z)$  были произвольными.

**Пример 7.2.** Рассмотрим систему, изображенную на рис. 7.10. Пусть каким-то образом (пока нам не важно, каким именно) получена передаточная функция цифрового регулятора в виде

$$G(z) = \frac{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})}.$$

Поскольку все нули и полюсы этой передаточной функции удовлетворяют необходимым условиям, можно реализовать данный цифровой регулятор в виде аналогового регулятора в цепи обратной связи. Подставляя передаточную функцию цифрового регулятора в формулу (7.7), получим

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} &= \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1-G(z)}{G(z)} = \frac{-z^{-1} + 0,38z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0,2z^{-1})(1-0,1z^{-1})} = \\ &= \frac{-0,86z}{z-1} - \frac{2,25z}{z-0,2} + \frac{3,11z}{z-0,1}. \end{aligned}$$

По таблицам  $z$ -преобразований находим преобразования Лапласа, соответствующие каждой простой дроби в последнем выражении. Предварительно, конечно, надо задать период квантования  $T$ . Пусть  $T = 1$ , тогда получаем

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{-0,86}{s} - \frac{2,25}{s+1,61} + \frac{3,11}{s+2,3} = \frac{-3,35s - 3,18}{s(s+1,61)(s+2,3)},$$

или  $H(s) = \frac{-3,35s - 3,18}{(s+1,61)(s+2,3)}.$

## 7.4. Последовательный цифровой регулятор

### 7.4.1. Варианты исполнения цифрового регулятора

В цифровых системах естественным и универсальным является использование цифрового регулятора. Преимуществами цифрового регулятора по сравнению с аналоговыми вариантами являются: возможность обеспечения лучшего качества управления; легкость изменения алгоритма управления (по крайней мере, при реализации цифрового регулятора на базе микропроцессора); более простые приемы и методы синтеза, поскольку передаточная функция цифрового регулятора  $G(z)$  отделена от передаточной функции объекта управления  $W_0W(w)$  квантователем.

Вначале обсудим варианты физического исполнения цифрового регулятора. Основными из них являются реализация передаточной функции  $G(z)$  в виде импульсного фильтра и в виде программы для микропроцессора (микро- или мини-ЭВМ).

### 7.4.2. Импульсные фильтры

Импульсный фильтр представляет собой пассивный электрический четырехполюсник, расположенный между двумя устройствами выборки и хранения. Как правило, реализуется четырехполюсник в виде  $RC$ -схемы. Различные варианты исполнения могут относиться к одному из трех типов: последовательный импульсный фильтр, импульсный фильтр в цепи обратной связи и комбинированные фильтры.

**Последовательный импульсный фильтр** представлен на рис. 7.11. Здесь же показана передаточная функция цифрового регулятора  $G(z)$ .

Согласно рис. 7.11 имеем

$$G(z) = W_0 G_d(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_d(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\}.$$

Из последнего соотношения следует

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} G(z). \quad (7.11)$$

Выражение (7.11) позволяет найти передаточную функцию  $RC$ -цепи последовательного импульсного фильтра по известной (заданной) передаточной функции цифрового регулятора  $G(z)$ .

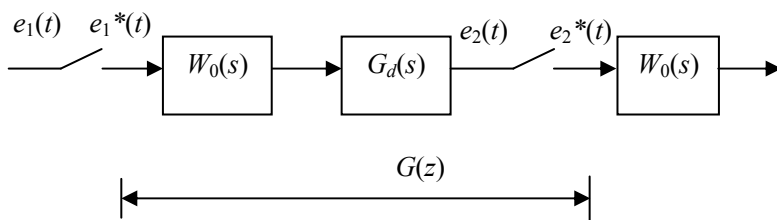


Рис. 7.11. Последовательный импульсный фильтр

Теперь обсудим условия физической реализуемости функции  $G(z)$ . Поскольку  $G_d(s)$  есть передаточная функция  $RC$ -цепи, все ее полюсы должны быть действительными и отрицательными (нули, вообще говоря, могут быть произвольными). Представим разложение на простые дроби (предполагая для простоты отсутствие кратных полюсов):

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i},$$

где  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) — константы (вычеты в соответствующих полюсах);  $s_i$  — отрицательные действительные полюсы.

Переходя в последнем соотношении к  $z$ -переменной, получим

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1 - e^{-s_i T} z^{-1}}. \quad (7.12)$$

Сравнение выражений (7.11) и (7.12) позволяет сделать вывод о том, что для реализации передаточной функции  $G(z)$  в виде последовательного импульсного фильтра она должна удовлетворять следующим требованиям:

- число нулей  $G(z)$  не должно превышать число ее полюсов;
- полюсы  $G(z)$  должны быть действительными (положительными) и меньше единицы;
- нули  $G(z)$  могут быть произвольными.

**Пример 7.3.** Пусть задана передаточная функция последовательного цифрового регулятора

$$G(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}}.$$

Зададим период квантования  $T = 1$  с. Передаточная функция регулятора удовлетворяет необходимым требованиям, т.е. число нулей не превышает число полюсов и единственный полюс  $z = 0,2$  положительный и меньше единицы, поэтому возможна реализация этого регулятора в виде последовательного импульсного фильтра. Воспользовавшись формулой (7.11), получим

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})}.$$

Для перехода в  $s$ -область разложим последнее выражение на простые дроби:

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{0,625}{1 - z^{-1}} + \frac{0,375}{1 - 0,2z^{-1}}.$$

Пользуясь таблицами  $z$ -преобразования, окончательно получаем

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{0,625}{s} + \frac{0,375}{s + 1,61} = \frac{s + 1}{s(s + 1,61)}$$

и



$$G_d(s) = \frac{s+1}{s+1,61}.$$

Звено с такой передаточной функцией представляет собой пассивное интегрирующее звено, которое может быть легко реализовано в виде  $RC$ -цепочки. Дополняя это звено устройствами выборки и хранения согласно рис. 7.11, получаем искомый импульсный фильтр.

**Импульсный фильтр в цепи обратной связи** приведен на рис. 7.12.

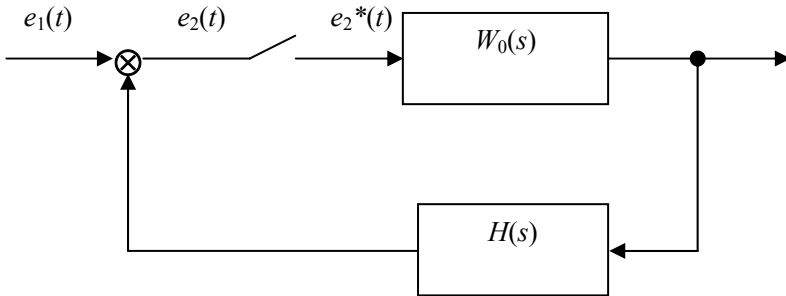


Рис. 7.12. Импульсный фильтр в цепи обратной связи

Передаточную функцию  $H(s)$  можно определить из соотношения

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1}{1 + W_0 H(z)},$$

откуда следует

$$Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1 - G(z)}{G(z)}.$$

Последняя формула совпадает с выражением (7.7), следовательно, и все результаты, полученные из анализа соотношения (7.7), справедливы в рассматриваемом случае, а именно для реализации цифрового регулятора  $G(z)$  в виде импульсного

фильтра в цепи обратной связи передаточная функция  $G(z)$  должна иметь:

- одинаковое число нулей и полюсов;
- нули действительные (положительные) и меньше единицы;
- полюсы произвольные.

**Пример 7.4.** Реализуем в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи передаточную функцию цифрового регулятора из примера 7.3:

$$G(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}}.$$

Необходимым требованиям передаточная функция удовлетворяет: число нулей равно числу полюсов и единственный нуль положительный и меньше единицы, поэтому пользуемся формулой (7.7):

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1-G(z)}{G(z)} = \frac{0,3z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0,5z^{-1})}.$$

Далее разлагаем полученное выражение на простые дроби:

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{0,6}{1-z^{-1}} - \frac{0,6}{1-0,5z^{-1}}$$

и переходим к переменной  $s$ :

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{0,6}{s} - \frac{0,6}{s+0,693} = \frac{0,416}{s(s+0,693)}.$$

Окончательно получаем передаточную функцию  $RC$ -цепи в виде  $H(s) = \frac{0,416}{s+0,693}$ . Это обычное аperiodическое звено первого порядка, дополняя которое устройством выборки и хранения согласно рис. 7.12, получаем импульсный фильтр.

Как видим, в случае последовательного фильтра ограничения накладываются на полюсы  $G(z)$ , а в случае фильтра в цепи

обратной связи — на нули  $G(z)$ . Поэтому если в передаточной функции  $G(z)$  имеются и нули, и полюсы, не удовлетворяющие вышеизложенным ограничениям (например, комплексно-сопряженные), то такую передаточную функцию нельзя реализовать ни отдельно последовательным импульсным фильтром, ни фильтром в цепи обратной связи. В таком случае можно попытаться применить различные их сочетания, то есть комбинированный импульсный фильтр.

**Комбинированный импульсный фильтр** в простейшем варианте приведен на рис. 7.13.

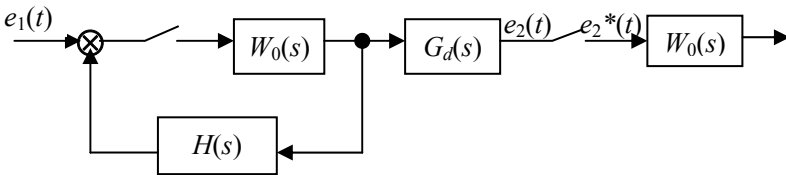


Рис. 7.13. Комбинированный импульсный фильтр

Согласно рис. 7.13 передаточная функция такого фильтра будет

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{W_0 G_d(z)}{1 + W_0 H(z)}. \quad (7.13)$$

Представим передаточную функцию  $G(z)$  в виде произведения двух передаточных функций:

$$G(z) = G_s(z) G_f(z),$$

где

$$G_s(z) = W_0 G_d(z)$$

есть передаточная функция последовательного импульсного фильтра, а

$$G_f(z) = \frac{1}{1 + W_0 H(z)}$$

является передаточной функцией импульсного фильтра в цепи обратной связи.

Перераспределив теперь нули и полюсы  $G(z)$  таким образом, чтобы передаточная функция  $G_s(z)$  имела положительные, действительные и меньшие единицы полюсы (нули могут быть произвольными), а передаточная функция  $G_f(z)$  — положительные, действительные и меньшие единицы нули\* (полюсы произвольные), мы тем самым сможем реализовать цифровой регулятор  $G(z)$  в виде комбинированного импульсного фильтра.

**Пример 7.5.** Пусть передаточная функция цифрового регулятора имеет вид

$$G(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 + 0,2z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1} + z^{-2})} =$$

$$= \frac{(z - 0,5)(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{(z - 0,2)(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)}.$$

Выделим в этой передаточной функции часть, которую можно реализовать в виде последовательного импульсного фильтра  $G_s(z)$  (с простыми, действительными, меньшими единицы полюсами), и часть, которую можно реализовать в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи  $G_f(z)$  (с простыми, действительными, меньшими единицы нулями). Тогда

---

\* Дополнительное требование для функции  $G_f(z)$  — равное количество нулей и полюсов. Если это требование невозможно выполнить, в передаточную функцию  $G_f(z)$  дополнительно вводят необходимое число положительных, меньших единицы несокращаемых с имеющимися полюсами нулей, а в передаточную функцию  $G_s(z)$  — таких же полюсов.

$$G_s(z) = \frac{(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{z - 0,2},$$

$$G_f(z) = \frac{z - 0,5}{(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)}.$$

Полученные передаточные функции являются физически нереализуемыми, поскольку имеют разное количество нулей и полюсов, поэтому в передаточную функцию  $G_s(z)$  необходимо добавить два действительных, отрицательных, меньших единицы полюса, а в передаточную функцию  $G_f(z)$  — два таких же нуля. В результате получаем

$$G_s(z) = \frac{(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{(z - 0,2)(z - a)(z - b)},$$

$$G_f(z) = \frac{(z - 0,5)(z - a)(z - b)}{(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)},$$

где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $0 < a < 1$ ;  $0 < b < 1$ ;  $a \neq b$  и  $a$  и  $b$  не равны другим полюсам и нулям функции  $G(z)$ . Например, можно положить  $a = 0,4$ ;  $b = 0,1$ .

### 7.4.3. Реализация цифровых регуляторов на ЦВМ

Естественным и наиболее универсальным исполнением цифровых регуляторов является применение цифровых устройств. В этом случае передаточная функция цифрового регулятора может быть реализована программным или аппаратным путем с помощью одной из трех основных схем: непосредственной, последовательной или параллельной.

Эти три метода весьма напоминают соответствующие методы декомпозиции (см. п. 4.3.3).

**Непосредственное программирование** существует в двух вариантах. В обоих передаточная функция регулятора приводится предварительно к виду

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (7.14)$$

где  $E_2(z)$  и  $E_1(z)$  —  $z$ -преобразования выходного и входного сигналов регулятора соответственно;  $m$  и  $n$  — любые положительные целые числа, а условие физической реализуемости  $a_0 \neq 0$  при  $b_0 \neq 0$ .

Выполним в выражении (7.14) перекрестное умножение и перейдем во временную область:

$$a_0 e_2^*(t) + \sum_{i=1}^n a_i e_2^*(t - iT) = \sum_{i=0}^m b_i e_1^*(t - iT).$$

Решим полученное уравнение относительно  $e_2^*(t)$ :

$$e_2^*(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^m b_i e_1^*(t - iT) - \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n a_i e_2^*(t - iT). \quad (7.15)$$

Определение выходного сигнала регулятора в текущий момент времени  $e_2^*(t)$  по формуле (7.15) предполагает накопление  $m + n$  значений входного и выходного сигналов. Структурная схема этого варианта программирования приведена на рис. 7.14.

Второй вариант непосредственного программирования аналогичен методу непосредственной декомпозиции (рис. 7.15). Применяя этот метод к выражению (7.14), получим два уравнения:

$$E_2(z) = \frac{1}{a_0} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) X(z); \quad (7.16)$$

$$X(z) = \frac{1}{a_0} E_1(z) - \frac{1}{a_0} (a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) X(z),$$

где  $X(z)$  — вспомогательная переменная.

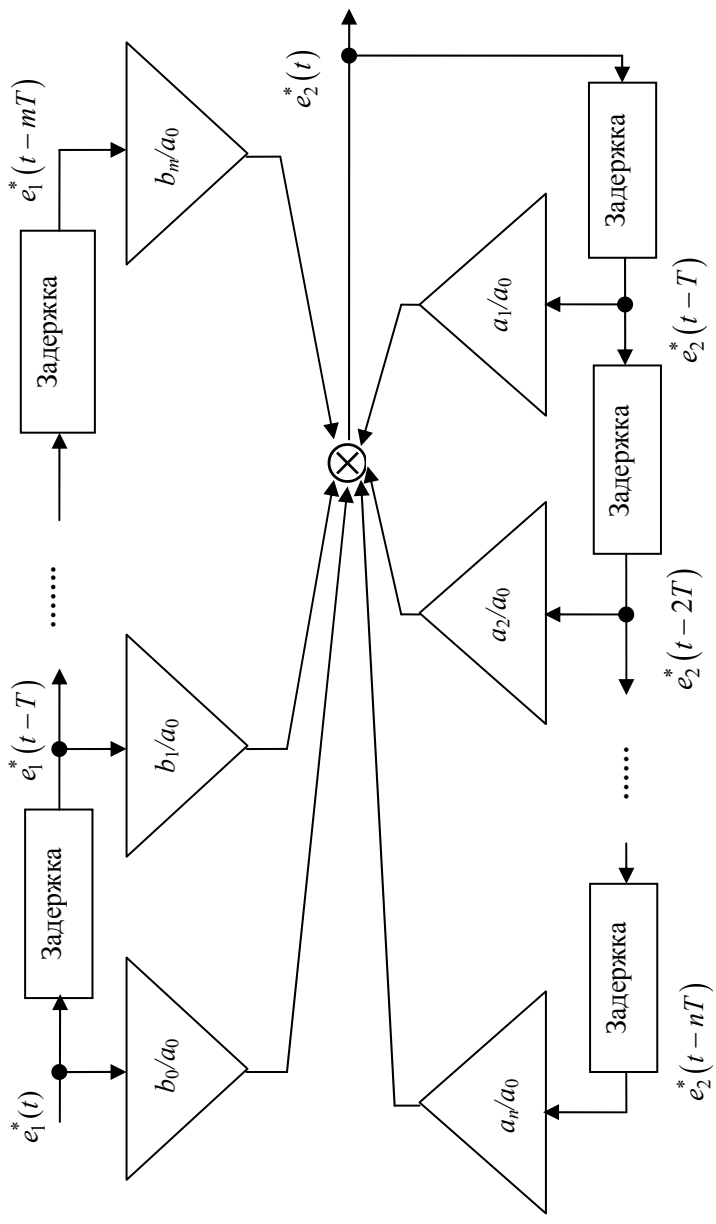


Рис. 7.14. Непосредственное программирование (1-й вариант)

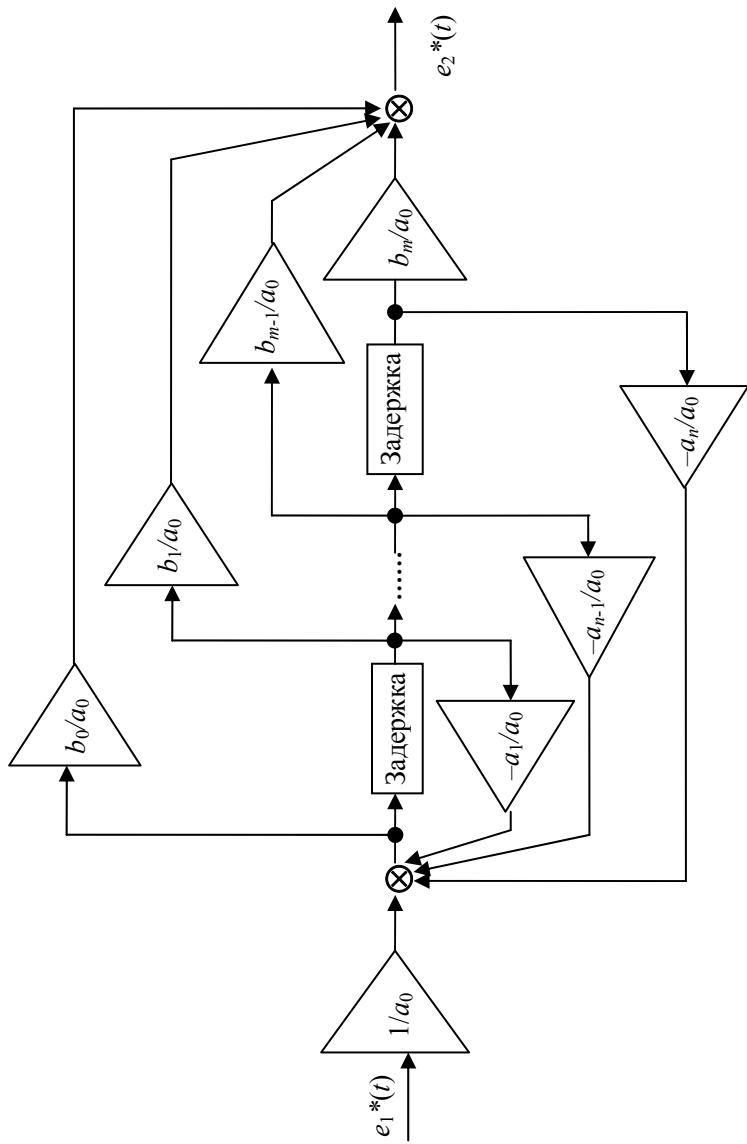


Рис. 7.15. Непосредственное программирование (2-й вариант)



Переход в уравнениях (7.16) от изображений к оригиналам дает

$$e_2^*(t) = \frac{1}{a_0} \left( b_0 x^*(t) + b_1 x^*(t-T) + \dots + b_m x^*(t-mT) \right),$$

$$x^*(t) = \frac{1}{a_0} e_1^*(t) - \frac{a_1}{a_0} x^*(t-T) - \dots - \frac{a_n}{a_0} x^*(t-nT).$$

Структурная схема программирования последних уравнений приведена на рис. 7.15 для  $n = m$ .

В общем случае для реализации передаточной функции  $G(z)$  этим методом потребуется число элементов задержки, равное наибольшему из чисел  $n$  и  $m$ .

При **последовательном программировании** передаточная функция  $G(z)$  представляется в виде произведения простейших передаточных функций, каждая из которых реализуется рассмотренным выше методом непосредственного программирования. Тогда эта схема программирования будет рядом последовательно применяемых программ, реализующих простейшие передаточные функции. Этот метод удобно применять тогда, когда числитель и знаменатель передаточной функции представлен в виде сомножителей. Запишем передаточную функцию  $G(z)$  в виде произведения:

$$G(z) = \prod_{i=1}^p G_i(z),$$

где  $G_i(z)$  — элементарная передаточная функция первого порядка для действительных нулей и полюсов и второго порядка для комплексно-сопряженных нулей или полюсов.

Соответствующая структурная схема приведена на рис. 7.16.

**Параллельное программирование** основано на представлении передаточной функции  $G(z)$  суммой простых дробей:

$$G(z) = \sum_{k=1}^p G_k(z).$$

Каждая из функций  $G_k(z)$  является передаточной функцией не выше второго порядка и реализуется методом непосредственного программирования (рис. 7.17).

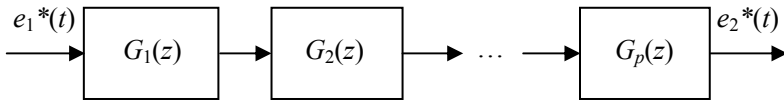


Рис. 7.16. Схема последовательного программирования

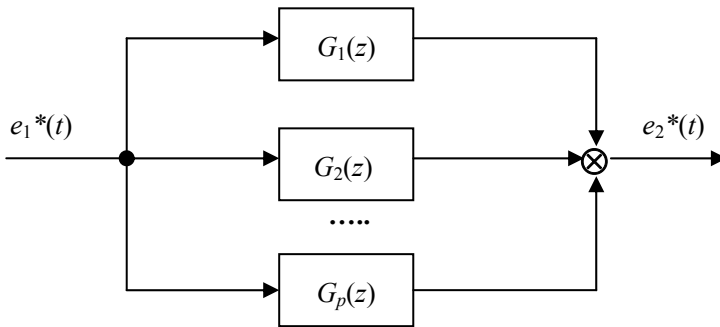


Рис. 7.17. Схема параллельного программирования

**Пример 7.6.** Пусть передаточная функция цифрового регулятора задана в виде

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5(1 + 0,25z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})}.$$

Рассмотрим реализацию этой передаточной функции различными методами программирования.

1. Непосредственное программирование (первый вариант). Выполняя перекрестное перемножение в передаточной функции, получаем

$$(1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-1})E_2(z) = 5(1 + 0,25z^{-1})E_1(z).$$

Переходя в последнем выражении во временную область и решая полученное уравнение относительно выходного сигнала цифрового регулятора, имеем

$$e_2^*(t) = 5e_1^*(t) + 1,25e_1^*(t - T) + 0,6e_2^*(t - T) - 0,05e_2^*(t - 2T).$$

По последней формуле составляем структурную схему непосредственного программирования (рис. 7.18).

В полученной схеме используются 3 блока задержки.

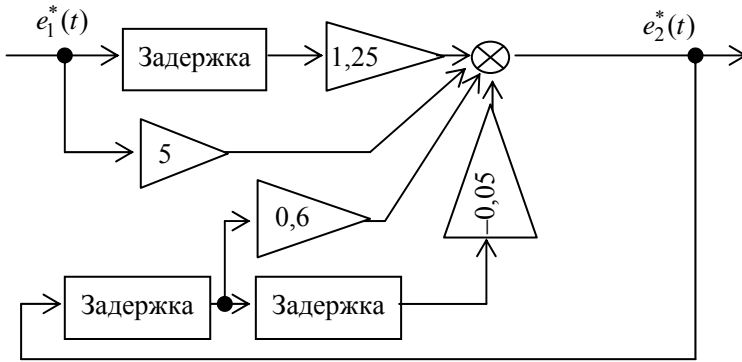


Рис. 7.18. К примеру 7.6 (непосредственное программирование по 1-му варианту)

2. Второй вариант непосредственного программирования. Применяя к передаточной функции метод непосредственной декомпозиции, получаем

$$E_2(z) = 5(1 + 0,25z^{-1})X(z) = 5X(z) + 1,25z^{-1}X(z),$$

$$X(z) = E_1(z) + 0,6z^{-1} - 0,05z^{-2}X(z),$$

где  $X(z)$  — фиктивная переменная.

Структурная схема, реализующая эти два уравнения, приведена на рис. 7.19.

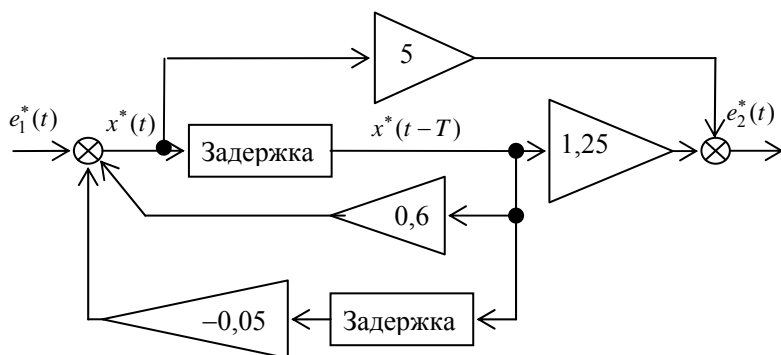


Рис. 7.19. Пример непосредственного программирования по 2-му варианту

3. Последовательное программирование. Передаточную функцию представим в виде произведения более простых (первого порядка) функций:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5}{1 - 0,5z^{-1}} \frac{1 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,1z^{-1}}.$$

Последовательное соединение программ, составленных для каждой из этих элементарных передаточных функций, дает структурную схему последовательного программирования (рис. 7.20).

4. Параллельное программирование. Для применения этого метода необходимо передаточную функцию представить в виде простых дробей:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{9,375}{1 - 0,5z^{-1}} - \frac{4,375}{1 - 0,1z^{-1}}.$$

Каждая из дробей реализуется методом непосредственного программирования. Результирующая схема представляет собой параллельное их соединение (рис. 7.21).

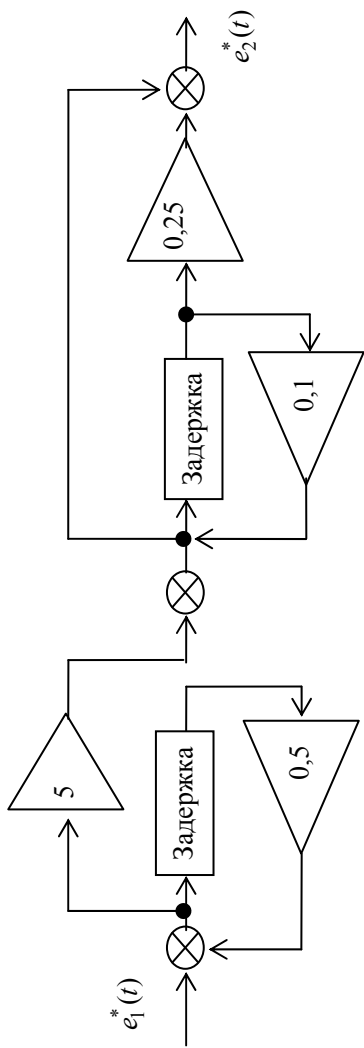


Рис. 7.20. Пример последовательного программирования

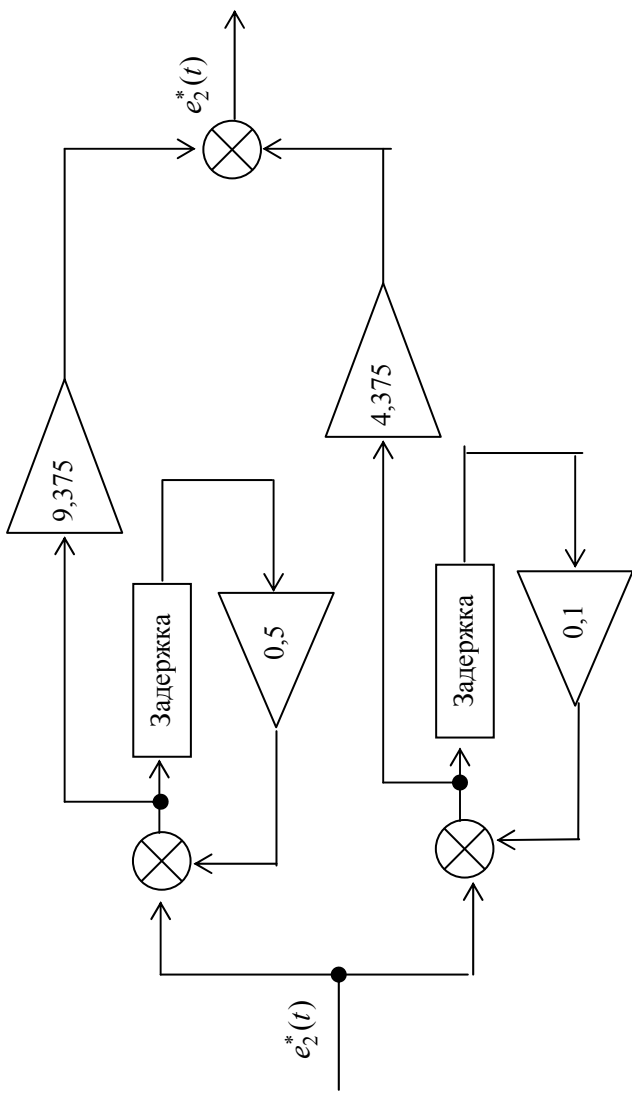


Рис. 7.21. Пример параллельного программирования

Из схемы на рис. 7.21 видно, что данный метод программирования требует двух блоков задержки и трех сумматоров, т.е. столько же, как и в методе последовательного программирования.

#### 7.4.4. Синтез цифрового регулятора с применением билинейного преобразования

Структурная схема системы с цифровым регулятором приведена на рис. 7.22.

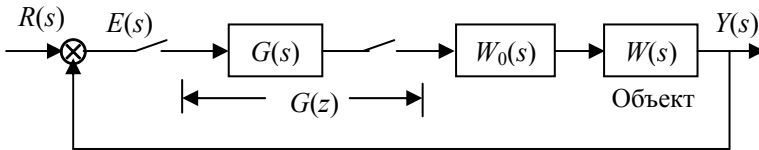


Рис. 7.22. Цифровая система с цифровым последовательным регулятором

Поскольку передаточные функции регулятора и управляемого объекта разделены квантователем, влияние регулятора на параметры всей системы исследовать весьма просто с помощью логарифмических характеристик. Синтез передаточной функции цифрового регулятора в этом случае осуществляется значительно легче, чем синтез аналогового регулятора в цифровой системе. Основные его этапы следующие.

1. Вычисление передаточной функции разомкнутой системы без коррекции:

$$W_0 W(w) = W_0 W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} W(s) \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}}. \quad (7.17)$$

2. Построение логарифмических псевдочастотных характеристик разомкнутой нескорректированной системы. Переход в частотную область осуществляется подстановкой  $w = j\omega_w$  в выражение (7.17). По логарифмическим кривым, как в случае

непрерывной системы, определяются показатели качества системы.

3. Если полученные на предыдущем этапе показатели качества не удовлетворяют разработчика, необходимо изменить вид логарифмических кривых в соответствии с предъявляемыми требованиями к системе. Так как передаточная функция разомкнутой системы с учетом цифрового регулятора будет  $G(z) W_0 W(z)$ , или в  $w$ -области  $G(w) W_0 W(w)$ , то передаточная функция  $G(w)$  определится по разнице между логарифмическими характеристиками исходной (нескорректированной) системы и требуемыми логарифмическими характеристиками.

Необходимо учитывать, что полученная в результате синтеза передаточная функция цифрового регулятора  $G(z)$  должна быть физически реализуемой, поэтому выясним, какой должна быть соответствующая функция в области переменной  $w$ . Пусть передаточная функция  $G(w)$  представлена в виде

$$G(w) = \frac{c_m w^m + c_{m-1} w^{m-1} + \dots + c_1 w + c_0}{d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + \dots + d_1 w + d_0}, \quad (7.18)$$

где  $m$  и  $n$  — целые положительные числа.

Переход в  $z$ -плоскость осуществляется подстановкой  $w = (z-1)/(z+1)$  в выражение (7.18):

$$\begin{aligned} G(z) &= \\ &= \frac{c_m (z-1)^m + c_{m-1} (z-1)^{m-1} (z+1) + \dots + c_1 (z-1)(z+1)^{m-1} + c_0 (z+1)^m}{d_n (z-1)^n + d_{n-1} (z-1)^{n-1} (z+1) + \dots + d_1 (z-1)(z+1)^{n-1} + d_0 (z+1)^n} \times \\ &\quad \times (z+1)^{n-m}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Из последней формулы видно, что независимо от соотношения  $m$  и  $n$  передаточная функция  $G(z)$  имеет одинаковое число нулей и полюсов, т.е. является физически реализуемой. Если еще дополнительно потребовать устойчивость цифрового регулятора (что желательно), то необходимо, чтобы полюсы  $G(z)$  располагались внутри окружности единичного радиуса



$|z_i| < 1$ , а соответственно полюсы  $G(w)$  — в левой полуплоскости переменной  $w$ . Из выражения (7.19) видно также, что при  $m > n$  передаточная функция  $G(z)$  будет иметь полюсы  $z = -1$ , поэтому для устойчивости цифрового регулятора необходимо еще и выполнение условия  $m \leq n$ . Таким образом, для устойчивости цифрового регулятора число нулей передаточной функции  $G(w)$  не должно превышать числа ее полюсов ( $m \leq n$ ), а полюсы должны располагаться левее мнимой оси переменной  $w$ .

4. После того как определена передаточная функция  $G(w)$ , находят  $G(z)$  подстановкой  $w = (z - 1)/(z + 1)$ . По полученной передаточной функции цифрового регулятора  $G(z)$  подбирают вариант его реализации.

5. На заключительном этапе производится комплексный анализ полученной системы вместе с цифровым регулятором для проверки соответствия показателей качества требуемым значениям.

**Пример 7.7.** Пусть непрерывный объект управления в системе, представленной на рис. 7.22, задан той же передаточной функцией, что и в примере 7.1, т.е.  $W(s) = \frac{K}{s(1+s)}$ . Коэф-

фициент  $K = 1,57$ . Период квантования  $T = 1,57$  с. Проведем синтез цифрового регулятора с помощью билинейного преобразования. Критерий качества по синтезу системы зададим тот же, что и в примере 7.1: запас устойчивости по фазе должен быть не меньше  $45^\circ$ . Псевдочастотные логарифмические характеристики системы без коррекции уже были построены в примере 7.1. Получена передаточная функция последовательного корректирующего звена в области переменной  $w$ :

$$G(w) = \frac{1 + 25w}{1 + 62,5w}.$$

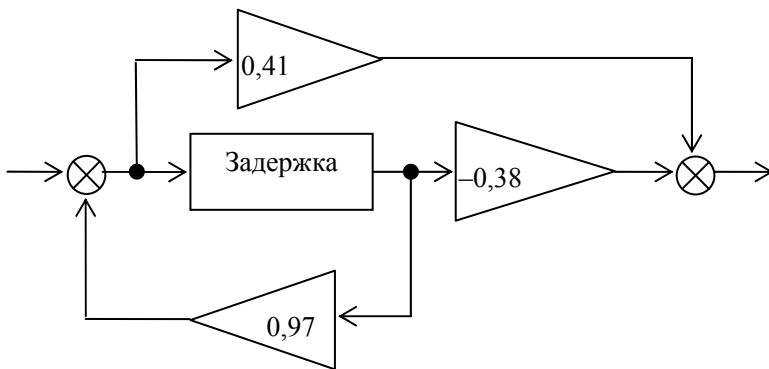
Согласно структурной схеме на рис. 7.22 передаточная функция корректирующего звена (регулятора) в  $z$ -области

получается непосредственно подстановкой  $w = \frac{z-1}{z+1}$  в последнее выражение. Таким образом, имеем

$$G(z) = \frac{1 + 25 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 62,5 \frac{z-1}{z+1}} = 0,41 \frac{z-0,92}{z-0,97}.$$

Можно убедиться, что скорректированная система обладает приемлемым качеством переходного процесса.

На заключительном этапе синтеза реализуют полученную передаточную функцию регулятора с помощью любого из рассмотренных методов. Например, непосредственная цифровая программа для данного регулятора примет вид, представленный ниже:



Если передаточная функция регулятора реализуется с помощью последовательного импульсного фильтра, то, подставив  $G(z)$  в формулу (7.11), получим

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{0,41(1 - 0,92z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,97z^{-1})} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{0,59}{1 - 0,97z^{-1}}.$$

Взяв обратное  $z$ -преобразование от обеих частей последнего выражения, имеем

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{0,59}{s+0,02} = \frac{0,41s+0,02}{s(s+0,02)} = \frac{1+20,5s}{s(1+50s)}.$$

Окончательно передаточная функция пассивного четырех-полюсника в последовательном импульсном фильтре запишется как

$$G_d(s) = \frac{1+20,5s}{1+50s}.$$

Полученная передаточная функция соответствует пассивному интегрирующему звену и может быть реализована в виде  $RC$ -цепочки.

Если необходимо реализовать импульсный фильтр в цепи обратной связи, то пользуемся формулой (7.7):

$$Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1-G(z)}{G(z)} = \frac{1,44z}{z-0,97}.$$

Применив обратное  $z$ -преобразование к правой и левой частям последнего выражения, получим передаточную функцию

$$H(s) = \frac{1,44s}{s+0,02}.$$

Эта передаточная функция соответствует реальному дифференцирующему звену (дифференцирующее звено с замедлением) и может быть легко реализована в виде  $RC$ -цепи.

#### 7.4.5. Цифровой ПИД-регулятор

Из теории управления известна эффективность ПИД-регуляторов, которые реализуют пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления. Структурная схема непрерывного ПИД-регулятора приведена на рис. 7.23. Пропорциональная составляющая образуется умножением сигнала ошибки на коэффициент  $K_p$ , приводит к увеличению общего

коэффициента усиления разомкнутой системы и тем самым благоприятно сказывается на уменьшении ошибки во всех режимах.

Интегральная составляющая представляет собой интеграл от ошибки с коэффициентом  $K_I$ : эта составляющая приводит к уменьшению установившейся ошибки. Дифференциальная составляющая пропорциональна скорости изменения ошибки с коэффициентом  $K_d$  и позволяет уменьшить ошибку в переходных режимах.

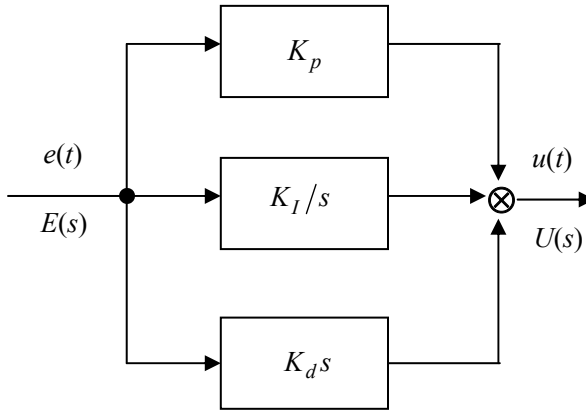


Рис. 7.23. Структура ПИД-регулятора

Этот же принцип ПИД-управления может быть с успехом применен и в цифровых системах. Пропорциональное управление в цифровом ПИД-регуляторе по-прежнему реализуется умножением сигнала ошибки на постоянный коэффициент  $K_p$ , а интегрирование и дифференцирование осуществляется численными методами. Например, интегрирование по методу трапеций дает передаточную функцию соответствующей составляющей:

$$\frac{K_I T(z+1)}{2(z-1)}.$$

Производную  $\frac{de}{dt}$  в момент времени  $t = T$  можно приближенно заменить первой разностью:

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{t=T} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}.$$

Применение  $z$ -преобразования к правой части последнего уравнения дает (с учетом постоянного коэффициента  $K_d$ )

$$K_d \frac{z-1}{Tz}.$$

С учетом вышеизложенного структурная схема цифрового ПИД-регулятора принимает вид, приведенный на рис. 7.24.

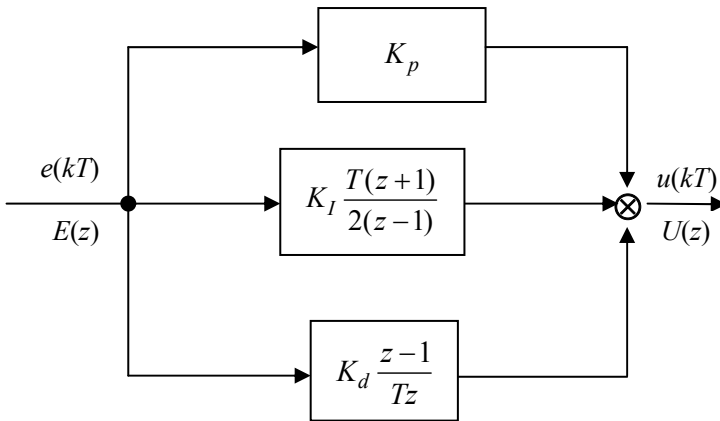


Рис. 7.24. Структура цифрового ПИД-регулятора

Собственно синтез ПИД-регулятора заключается в определении коэффициентов  $K_p$ ,  $K_I$  и  $K_d$  по заданным критериям качества.

## 7.5. Синтез цифровых систем управления с конечным временем переходного процесса

### 7.5.1. Основы метода

Рассмотренные методы синтеза основаны на соответствующих методах, разработанных для непрерывных систем. Однако в цифровых системах имеется принципиальная возможность добиться значительно лучших показателей качества. В частности, время переходного процесса можно сделать конечным\* (см. подразд. 6.2). Выясним, каким образом можно этого добиться. Пусть структурная схема цифровой системы имеет вид, изображенный на рис. 7.25, где  $G(z)$  — передаточная функция цифрового регулятора,  $W(z)$  — передаточная функция объекта управления (возможно, вместе с экстраполятором нулевого порядка).

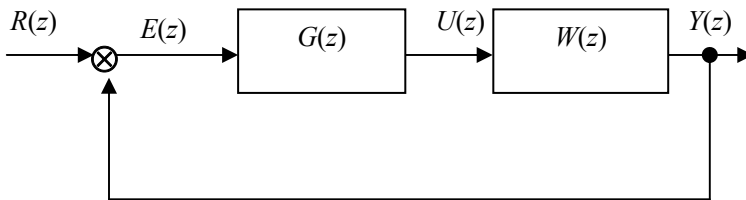


Рис. 7.25. Структурная схема цифровой системы

Сформулируем условия синтеза:

- нулевая установившаяся ошибка при определенном входном воздействии;
- длительность переходного процесса (количество тактов дискретности) до достижения установившегося состояния должна быть конечной и минимальной;
- передаточная функция цифрового регулятора  $G(z)$  должна быть физически реализуемой.

---

\* В непрерывных системах, как известно, переходные процессы теоретически затухают при бесконечном времени.

Передаточная функция замкнутой системы в соответствии с рис. 7.25 будет

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = M(z) = \frac{G(z)W(z)}{1 + G(z)W(z)}. \quad (7.20)$$

Из структурной схемы найдем  $z$ -преобразование ошибки:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z)[1 - M(z)] = \frac{R(z)}{1 + G(z)W(z)}. \quad (7.21)$$

Зададим входное воздействие в виде типовой полиномиальной функции. Тогда  $z$ -преобразование входного сигнала можно представить в виде

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^N}, \quad (7.22)$$

где  $A(z)$  — полином от  $z - 1$ , не имеющий нулей  $z = 1$ ;  $N$  — положительное целое число (порядок воздействия).

Для единичной ступенчатой функции  $r(t) = 1(t)$ ,  $A(z) = 1$ ,  $N = 1$ ; для линейно меняющейся функции  $r(t) = t$ ,  $A(z) = Tz^{-1}$ ,  $N = 2$  и т.д.

Подставляя выражение (7.22) в (7.21) и применяя теорему о конечном значении, найдем установившуюся ошибку:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)[1 - M(z)]}{(1 - z^{-1})^N}.$$

Из последнего соотношения видно, что для равенства установившейся ошибки нулю достаточно, чтобы в выражении  $1 - M(z)$  присутствовал множитель  $(1 - z^{-1})^N$ , так как  $A(z)$  не имеет нулей  $z = 1$ . Следовательно:

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^N F(z), \quad (7.23)$$

где  $F(z)$  — некоторый полином от  $z^{-1}$ .

Из выражения (7.23) найдем

$$M(z) = \frac{z^N - (z-1)^N F(z)}{z^N}. \quad (7.24)$$

Поскольку функция  $F(z)$  есть полином от  $z^{-1}$ , она имеет только полюсы  $z=0$ , следовательно, характеристический полином замкнутой системы на основании выражения (7.24) равен  $z^p$ , где  $p \geq N$ .

Подставив соотношение (7.23) в (7.21), получим

$$E(z) = A(z)F(z). \quad (7.25)$$

Здесь  $A(z)$  и  $F(z)$  являются конечными полиномами от  $z^{-1}$ , следовательно, функция  $E(z)$ , определяемая формулой (7.25), имеет конечное число членов в разложении в ряд по отрицательным степеням  $z$ . Последнее означает, что сигнал ошибки будет равен нулю через конечное число периодов квантования.

Для того чтобы число шагов до достижения нулевой ошибки было минимальным, требуется, чтобы порядок полинома  $F(z)$  был как можно меньше. В идеале  $F(z)$  вообще нужно положить равным единице, однако это не всегда возможно.

## 7.5.2. Физическая реализуемость регулятора

Из соотношения (7.24) ясно, что синтез цифровой системы с конечным временем переходного процесса связан в первую очередь с выбором полинома  $F(z)$ . Если этот выбор определен, то по формуле (7.24) находят  $M(z)$  и из выражения (7.20) определяют передаточную функцию регулятора по формуле

$$G(z) = \frac{1}{W(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)}. \quad (7.26)$$

Передаточная функция  $W(z)$  описывает реальный физический объект (процесс),  $G(z)$  также должна быть физически реализуемой, следовательно, и на передаточную функцию



замкнутой системы  $M(z)$ , определяемую формулой (7.20), должны быть наложены определенные ограничения. Выясним, какие же именно должны быть эти ограничения. Представим  $W(z)$  и  $M(z)$  разложением в ряд по степеням  $z^{-1}$  (такой ряд называется основной или нисходящей частью ряда Лорана):

$$W(z) = w_n z^{-n} + w_{n+1} z^{-n-1} + \dots; \quad (7.27)$$

$$M(z) = m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-k-1} + \dots, \quad (7.28)$$

где  $n \geq 0$  и  $k \geq 0$ . Подставляя соотношения (7.27) и (7.28) в формулу (7.26), получим

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots}{\left(w_n z^{-n} + w_{n+1} z^{-(n+1)} + \dots\right) \left(1 - m_k z^{-k} - m_{k+1} z^{-(k+1)} - \dots\right)} = \\ &= d_{k-n} z^{-(k-n)} + d_{k-n+1} z^{-(k-n+1)} + \dots \end{aligned} \quad (7.29)$$

Чтобы передаточная функция  $G(z)$  была физически реализуемой, в ее разложении в ряд Лорана (7.29) не должно быть членов с положительной степенью  $z$ , то есть должно выполняться условие  $k \geq n$ . Это означает, что низшая степень разложения  $M(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$  должна быть не меньше низшей степени разложения  $W(z)$ .

Для синтеза цифрового регулятора необходимо определиться с выбором полинома  $F(z)$ . Самым простым и естественным было бы положить  $F(z) = 1$ . Тогда по формуле (7.26) передаточная функция замкнутой системы  $M(z)$  для основных типовых входных воздействий будет иметь вид, представленный в таблице:

Входной сигнал	$N$	$M(z)$
Ступенчатый $1(t)$	1	$z^{-1}$
Линейный $t \cdot 1(t)$	2	$2z^{-1} - z^{-2}$
Параболический $\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$	3	$3z^{-1} - 3z^{-2} - 3z^{-3}$

Из таблицы видно, что член наивысшей степени в разложении  $M(z)$  равен  $z^{-1}$ , поэтому отношение  $M(z)/(1-M(z))$  (входящее в формулу (7.26)) всегда имеет полюсов на единицу больше, чем нулей. В случае если передаточная функция объекта управления  $W(z)$  имеет число полюсов, более чем на единицу превышающее число ее нулей, из формулы (7.26) видно, что число нулей  $G(z)$  будет больше числа ее полюсов, а это говорит о физической нереализуемости цифрового регулятора. В этом случае нельзя просто брать  $F(z) = 1$ , а необходимо дополнять  $F(z)$  еще и другими слагаемыми с  $z$  в отрицательной степени\*.

**Пример 7.8.** Пусть объект управления в системе, представленной на рис. 7.25, задан передаточной функцией

$$W(z) = \frac{1}{z^2 - z - 1}.$$

Ставится задача синтезировать регулятор, обеспечивающий конечный переходной процесс с минимальным временем установления для единичной ступенчатой функции на входе.

Поскольку данная передаточная функция имеет полюсов на два больше, чем нулей, мы не можем задать  $M(z) = z^{-1}$ , так как это приведет к физически нереализуемой функции регулятора. Попробуем взять  $M(z) = z^{-2}$ . Тогда передаточная функция регулятора согласно формуле (7.26) будет иметь вид

$$G(z) = (z^2 - z - 1) \frac{1}{z^2 - 1}.$$

---

\* В общем случае при заданном входном воздействии порядка  $N$  минимальное число периодов квантования, необходимое для установления нулевой ошибки, равно  $N+M-1$ , где  $M$  есть разница между числом полюсов и числом нулей передаточной функции управляемого объекта  $W(z)$ . Данное замечание касается таких передаточных функций  $W(z)$ , которые не имеют нулей и полюсов, расположенных на единичной окружности или вне ее.

Эта передаточная функция уже является физически реализуемой. Функция  $F(z)$  задается выражением (7.23) и в данном случае

$$F(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1}.$$

Из формулы (7.26) видно, что синтез цифровой системы с конечным временем переходного процесса основан на компенсации нулей и полюсов передаточной функции управляемого объекта  $W(z)$ . Поэтому если такая передаточная функция имеет нули, расположенные на единичной окружности или вне ее, то для их компенсации потребуется неустойчивый регулятор, что в принципе возможно, но нежелательно. В этом случае функция  $F(z)$  также не может быть равна единице, а должна быть дополнена слагаемыми с  $z$  в отрицательной степени. При этом минимальное время установления нулевой ошибки увеличивается в соответствии с тем, какова максимальная отрицательная степень  $z$  имеется в составе  $F(z)$ .

Резюмируя вышеизложенное, делаем вывод, что если передаточная функция объекта  $W(z)$  имеет нули на единичной окружности или вне ее либо число ее полюсов более чем на единицу превышает число нулей, то полином  $F(z)$ , кроме единицы, должен содержать и другие члены по степеням  $z^{-1}$ .

### 7.5.3. Синтез цифрового регулятора

При синтезе системы с конечным временем переходного процесса осуществляется компенсация полюсов и нулей передаточной функции объекта нулями и полюсами передаточной функции регулятора. Однако если управляемый объект таков, что передаточная функция имеет полюсы и нули на единичной окружности или вне ее, то неидеальная их компенсация (практически это часто бывает) может привести к неустойчивости всей системы в целом. Чтобы избавиться от этой неприятности, такую компенсацию просто не проводят, а накладывают дополнительные ограничения на передаточную функцию замкнутой системы  $M(z)$ .

Если в общем случае передаточная функция  $W(z)$  содержит нули и полюсы на единичной окружности или вне ее (обозначим их  $z_i$  и  $p_i$  соответственно), то такую передаточную функцию можно представить в виде

$$W(z) = \frac{\prod_i (1 - z_i z^{-1})}{\prod_i (1 - p_i z^{-1})} A_g(z),$$

где  $A_g(z)$  имеет полюсы и нули, находящиеся только внутри единичной окружности.

Тогда из формулы (7.26) следует

$$G(z) = \frac{\prod_i (1 - p_i z^{-1})}{\prod_i (1 - z_i z^{-1})} \frac{M(z)}{A_g(z)(1 - M(z))}. \quad (7.30)$$

Чтобы передаточная функция регулятора  $G(z)$  не имела полюсов  $z_i$  и нулей  $p_i$ , требуется сокращение соответствующих множителей с множителями, входящими в  $M(z)$  и  $1 - M(z)$ , то есть структура  $M(z)$  и  $1 - M(z)$  должна быть следующей (с учетом формулы (7.23)):

$$M(z) = \prod_i (1 - z_i z^{-1}) (M_m z^{-m} + M_{m+1} z^{-(m+1)} + \dots); \quad (7.31)$$

$$1 - M(z) = \prod_i (1 - p_i z^{-1}) (1 - z^{-1})^N (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots), \quad (7.32)$$

где  $m$  должно быть не меньше низшей степени  $z^{-1}$  в разложении  $W(z)$  в ряд Лорана (условие физической реализуемости  $G(z)$ ), а  $N$  определяется порядком входного воздействия. Попутно заметим, что при наличии в  $W(z)$  единичных полюсов сомножитель  $1 - z^{-1}$  в выражении (7.32) возводится в степень, равную либо кратности полюсов входного сигнала, либо кратности единичных полюсов  $W(z)$ , в зависимости от того, какая из них больше.

С учетом дополнительных требований (7.31) и (7.32) дальнейший синтез производится по уже изложенной методике по соотношениям (7.24) и (7.26).

**Пример 7.9.** Зададим передаточную функцию объекта в системе (см. рис.7.25) в следующем виде:

$$W(z) = \frac{0,000392z^{-1}(1 + 2,78z^{-1})(1 + 0,2z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0,286z^{-1})}.$$

Необходимо синтезировать регулятор, обеспечивающий минимальное время установления нулевой ошибки при линейном входном воздействии.

Передаточная функция управляемого объекта имеет нуль  $z = -2,78$  вне единичной окружности и полюс  $z = 1$  кратности два, расположенный на единичной окружности. Поэтому функции  $M(z)$  и  $1 - M(z)$  должны быть заданы в соответствии с выражениями (7.31) и (7.32) соответственно. Таким образом,

$$M(z) = (1 + 2,78z^{-1})(M_1z^{-1} + \dots).$$

Первый член разложения  $M(z)$  в ряд Лорана должен быть степени не меньше единицы и поэтому иметь вид  $M_1z^{-1}$ , поскольку первый член разложения  $G(z)$  в ряд равен  $0,000392z^{-1}$ . Коэффициент  $M_1$  требуется определить.

Входное воздействие — это линейная функция, т.е. порядок воздействия равен 2, поэтому выражение  $1 - M(z)$  должно содержать в качестве множителя  $(1 - z^{-1})^2$ . Второе требование — это наличие множителя, соответствующего всем полюсам  $W(z)$ , расположенным на единичной окружности или вне ее. Так как  $W(z)$  имеет два полюса  $z = 1$ , то наличие члена  $(1 - z^{-1})^2$  в функции  $1 - M(z)$  удовлетворяет обоим требованиям. Следовательно,

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 F(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1}),$$

где  $a_1$  не может равняться нулю из-за наличия в передаточной функции нуля вне единичной окружности  $z = -2,78$  и, следовательно,  $F(z)$  не может быть просто единицей.

Теперь видно, что минимальный порядок  $M(z)$  равен 3 (т.е. переходной процесс будет заканчиваться за три периода), следовательно, в разложении  $M(z)$  помимо слагаемого  $M_1 z^{-1}$  должно быть и слагаемое  $M_2 z^{-2}$ .

Осталось составить три уравнения, из которых найдутся три неизвестных —  $M_1$ ,  $M_2$  и  $a_1$ . Подставляя  $M(z)$  в выражение для  $1 - M(z)$ , получим

$$\begin{aligned} M_1 z^{-1} + (2,78M_1 + M_2)z^{-2} + 2,78M_2 z^{-3} = \\ = (2 - a_1)z^{-1} + (2a_1 - 1)z^{-2} - a_1 z^{-3}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получаем три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} M_1 &= 2 - a_1; \\ 2,78M_1 + M_2 &= 2a_1 - 1; \\ 2,78M_2 &= -a_1. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем  $M_1 = 0,723$ ;  $M_2 = -0,46$ ;  $a_1 = 1,277$ .

Таким образом, передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$M(z) = 0,723z^{-1} + 1,554z^{-2} - 1,277z^{-3} = \frac{0,723z^2 + 1,554z - 1,277}{z^3}.$$

Если на вход системы поступает линейно нарастающий сигнал с единичным наклоном, то  $z$ -преобразование ошибки будет

$$E(z) = R(z)(1 - M(z)) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \times \\ \times (1 - 0,723z^{-1} - 1,554z^{-2} + 1,277z^{-3}) = z^{-1} + 1,277z^{-2}.$$

В последнем выражении положено  $T = 1$ . Видно, что ошибка становится равной нулю за три периода квантования. По формуле (7.26) можно определить передаточную функцию регулятора:

$$G(z) = \frac{1}{W(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)} = 1844 \frac{(1 - 0,286z^{-1})(1 - 0,636z^{-1})}{(1 + 0,2z^{-1})(1 + 1,277z^{-1})}.$$

Синтезированная изложенным способом система обладает двумя недостатками.

Первый состоит в том, что хотя такая система имеет идеальную реакцию на определенное входное воздействие, по отношению к другим типам воздействий она может иметь гораздо худшее или неприемлемое качество. Например, можно показать, что переходной процесс при подаче на вход единичной ступеньки для системы из примера 7.9 будет иметь очень большое перерегулирование (127,7 %).

Второй недостаток заключается в наличии кратного полюса у передаточной функции замкнутой системы (ее характеристический полином, как уже упоминалось, равен  $z^N$ ). Из теории чувствительности известно, что наличие кратного корня у характеристического уравнения обуславливает большую чувствительность (теоретически бесконечную чувствительность) системы к изменению ее параметров.

Сглаживание или, быть может, ликвидация этих недостатков возможны, если желаемую передаточную функцию замкнутой системы  $M(z)$  искусственно «заглубить». При этом полученная система не будет идеальной ни для одного типа входного воздействия, но будет обладать приемлемой реакцией на целый класс воздействий. Чувствительность системы к изменению параметров также удастся снизить.

Модифицируем передаточную функцию по ошибке  $1 - M(z)$ , разделив ее на  $1 - cz^{-1}$ :

$$1 - M_*(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - cz^{-1}},$$

где  $c$  — некоторый весовой коэффициент, лежащий в пределах  $-1 < c < 1$  из соображений устойчивости  $M_*(z)$ .

Появление таким образом дополнительного полюса у передаточной функции  $M_*(z)$  приводит к тому, что характеристическое уравнение замкнутой системы уже не имеет вида  $z^N = 0$  и ошибка не сводится к нулю за минимальное число периодов квантования. Но тем не менее, при удачном выборе величины  $c$  реакция системы на целый класс входных воздействий получается приемлемой. Конкретная величина  $c$  зависит от многих факторов: типов входных воздействий, передаточной функции объекта, критериев приемлемости переходных процессов и пр., и определяется, как правило, опытным путем.

## **7.6. Синтез цифровой системы в пространстве состояний**

Из всех многочисленных методов синтеза, использующих понятие переменных состояния, рассмотрим синтез по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию (случай единственного входного воздействия).

Синтез данным методом предполагает предварительное определение требуемых (заданных) значений собственных чисел (корней характеристического уравнения) системы. Они могут быть найдены из связи переходных процессов и расположения собственных чисел на комплексной плоскости.

Следующая теорема дает основания для проведения такого синтеза.



**Теорема 7.1.** Пусть уравнения состояния цифровой системы представлены в канонической форме фазовой переменной:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \quad (7.33)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  имеет форму матрицы Фробениуса:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix},$$

а  $\mathbf{B}$  есть матрица-столбец:

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T.$$

Тогда собственные значения системы могут быть произвольно заданы с помощью обратной связи по состоянию:

$$u(t) = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(t), \quad (7.34)$$

где  $\mathbf{G} = [g_1, g_2, \dots, g_n]$ .

На рис. 7.26 приведена структурная схема системы с такой обратной связью.

Предполагается, что все компоненты вектора состояния доступны измерению.

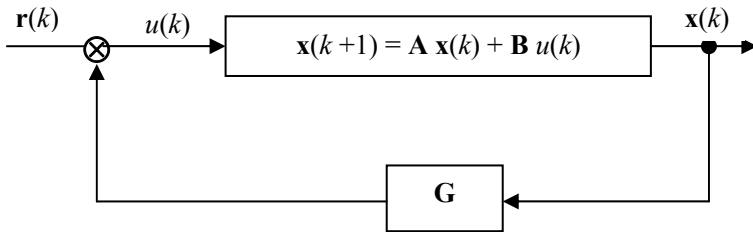


Рис. 7.26. Структурная схема системы в пространстве состояний

*Доказательство.* Уравнения состояния замкнутой системы с учетом равенства (7.34) можно записать так:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{x}(k). \quad (7.35)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет следующим:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}| = 0,$$

или в явном виде:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 + g_1 & a_2 + g_2 & a_3 + g_3 & \dots & \lambda + a_n + g_n \end{bmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по формуле Лапласа по последней строке, получим

$$\lambda^n + (a_n + g_n)\lambda^{n-1} + (a_{n-1} + g_{n-1})\lambda^{n-2} + \dots + (a_1 + g_1) = 0. \quad (7.36)$$

Характеристические числа однозначно связаны с коэффициентами характеристического уравнения (7.36) (например, формулами Виетта). Выяснив, какими должны быть значения этих коэффициентов, и зная  $a_i$ , всегда можно однозначно вычислить значения коэффициентов передачи обратной связи  $g_i$ , поскольку каждый элемент  $g_i$  матрицы-строки  $\mathbf{G}$  входит только в один коэффициент характеристического уравнения (7.36). Что и требовалось доказать.

**Пример 7.10.** Пусть уравнения состояния системы, представленной на рис.7.26, заданы в канонической форме фазовой переменной:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot u(k),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение системы:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем собственные значения системы.

Собственные значения получились кратными,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Наличие кратных корней, расположенных на окружности единичного радиуса, говорит о неустойчивости разомкнутой системы. Попробуем задать собственные значения  $\lambda_1 = 0,4$ ;  $\lambda_2 = 0,6$  с помощью обратной связи по состоянию. Характеристическое уравнение замкнутой системы получаем согласно рис. 7.26:  $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}| = 0$ . Матрица обратной связи  $\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2]$ . Раскрывая характеристическое уравнение, запишем

$$\lambda^2 + (g_2 - 2)\lambda + (g_1 + 1) = 0.$$

Если мы задаем собственные значения  $\lambda_1 = 0,4$ ;  $\lambda_2 = 0,6$ , то характеристическое уравнение должно иметь вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , находим  $\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2] = [-0,76 \quad 1]$ .

Простота и удобство вычисления матрицы обратной связи  $\mathbf{G}$  для системы, заданной уравнениями состояния в канонической форме фазовой переменной, наводят на мысль о приведении произвольных уравнений состояния к такой форме. О подобной возможности говорит следующая теорема.

**Теорема 7.2.** Пусть цифровая система описывается уравнениями состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot u(k), \quad (7.37)$$

где  $\mathbf{A}$  — произвольная матрица  $n \times n$ ;  $u(k)$  — скалярное внешнее воздействие;  $\mathbf{B}$  — произвольная матрица-столбец  $n \times 1$ .

Если система (7.37) полностью управляема по состоянию, то существует невырожденное преобразование координат состояния:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(k); \quad (7.38)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{y}(k),$$

переводящее уравнение (7.37) в каноническую форму фазовой переменной:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1 \cdot u(k), \quad (7.39)$$

где  $\mathbf{A}_1$  — матрица Фробениуса:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad (7.40)$$

которая связана с матрицей  $\mathbf{A}$  преобразованием подобия

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{PAP}^{-1},$$

а

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{PB} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T. \quad (7.41)$$

Матрица  $\mathbf{P}$  имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (7.42)$$

где

$$\mathbf{P}_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}. \quad (7.43)$$

Из теории матриц известно, что преобразование подобия не меняет собственных чисел матрицы, следовательно, системы (7.37) и (7.39) имеют одинаковые собственные числа. Но для системы (7.39) в канонической форме фазовой переменной собственные числа всегда можно произвольным образом изменить с помощью обратной связи по состоянию  $\mathbf{G}_1$  (согласно теореме 7.1). Коэффициенты усиления обратной связи исходной системы (7.37) определяются из соотношения

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \mathbf{P}.$$

Проведенные рассуждения, по сути, являются доказательством (правда, для случая скалярного управления  $u(k)$ ) следующей теоремы.

**Теорема 7.3.** Пусть линейная цифровая система представлена уравнениями состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(k),$$

где  $\mathbf{A}$  — произвольная матрица  $n \times n$ ;  $\mathbf{u}(k)$  — вектор управлений размерностью  $m \times 1$ ;  $\mathbf{B}$  — матрица  $n \times m$  связи входных воздействий с переменными состояния.

Если система является полностью управляемой по состоянию, то ее собственные числа могут быть произвольным образом заданы с помощью обратной связи по состоянию:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(k),$$

где  $\mathbf{G}$  — матрица коэффициентов обратной связи размерностью  $n \times m$ .

**Пример 7.11.** Пусть уравнения состояния разомкнутой системы, изображенной на рис. 7.26, заданы в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot u(k),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем уравнения состояния к канонической форме фазовой переменной. Для этого составим матрицу управляемости

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости является невырожденной, т.е. система полностью управляема по состоянию.

Согласно соотношению (7.43) получим

$$\mathbf{P}_1 = [0 \quad 1] \mathbf{Q}^{-1} = [-1 \quad 1].$$

По формуле (7.42) имеем

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения состояния в новой системе координат будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1 \cdot u(k),$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, кстати, что полученные уравнения совпадают с уравнениями состояния из примера 7.10.

Теперь мы хотим сделать систему устойчивой, т.е. расположить собственные значения системы внутри окружности единичного радиуса. Пусть эти собственные значения будут  $\lambda_1 = 0,4$ ;  $\lambda_2 = 0,6$  (см. пример 7.10). Матрица обратной связи для этого случая уже была получена в примере 7.10:  $\mathbf{G}_1 = [g_1 \quad g_2] = [-0,76 \quad 1]$  (обратите внимание, что в примере

7.10 матрица обратной связи обозначалась как  $\mathbf{G}$ , а в данном примере она обозначена как  $\mathbf{G}_1$ ). Тогда матрица обратной связи исходной системы будет

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0,76 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,24 & 1,24 \end{bmatrix}.$$

## 8. МИКРОПРОЦЕССОР КАК УПРАВЛЯЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 8.1. Ошибки квантования по уровню

При исследовании цифровых систем немаловажное значение имеет выбор периода квантования (по времени). На этот выбор влияют как условия импульсной теоремы, так и показатели качества (в частности, устойчивость) цифровой системы управления. Кроме того, на выбор периода квантования оказывают влияние параметры аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей. В качестве управляющего компонента в цифровых системах регулирования часто используются микропроцессоры, являющиеся относительно медленными устройствами. Поэтому период квантования, задаваемый в цифровых системах таймером, зависит также от скорости выполнения процессором арифметических операций и инструкций.

Еще одно ограничение, связанное с микропроцессором, — это конечное число разрядов для представления чисел. Большинство дешевых микропроцессоров оперирует с 8-битовыми словами, что обеспечивает только 256 уровней разрешения. Это приводит к тому, что не все числа могут быть реализованы в микропроцессоре.

Конкретных вопросов программирования микропроцессора, которое осуществляется обычно на языке ассемблера, мы касаться не будем — это прерогатива других курсов (например, курса «Микропроцессорные устройства систем управления»).

Относительно небольшое количество машинных разрядов, отведенных для представления чисел в микропроцессоре, приводит к необходимости учета эффектов, связанных с квантованием сигналов по уровню в цифровых системах.

Статическая характеристика квантователя по уровню и его структурная схема приведены на рис. 8.1.

Входной сигнал квантователя  $x(t)$  может принимать любые значения (непрерывный по амплитуде сигнал), а выходной сигнал  $y(t)$  — только дискретные значения, ближайшие к  $x(t)$



и кратные величине  $q$  — шагу квантования. Шаг квантования зависит от максимального значения числа (МЗЧ) и длины представляемого цифровым кодом слова:  $q = 2^{-N} \text{МЗЧ}$ , где  $N$  — число двоичных разрядов (битов).

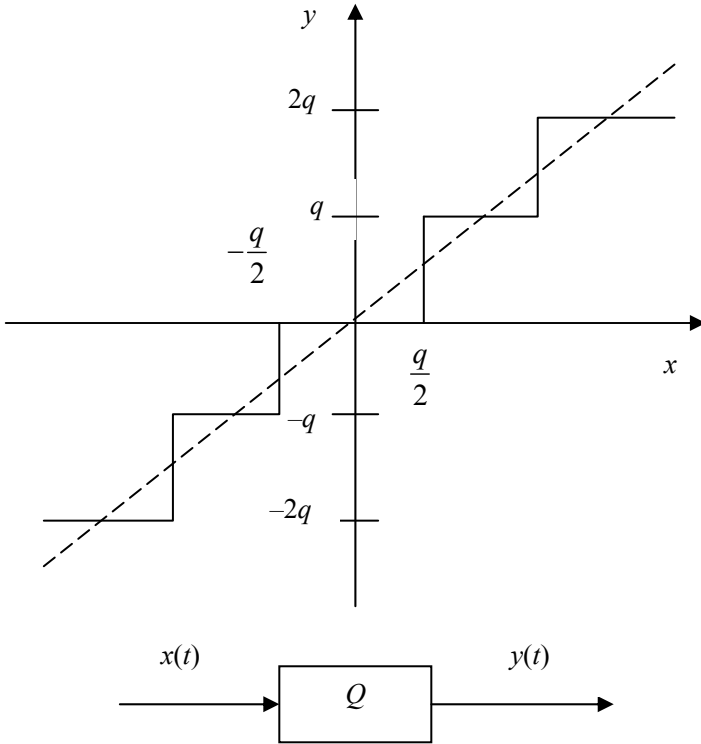


Рис. 8.1. Квантование по уровню

Ясно, что ошибка квантования (то есть разница  $x(t) - y(t)$ ) будет лежать в интервале от  $-\frac{q}{2}$  до  $\frac{q}{2}$ .

Строго говоря, нелинейных устройств, изображенных на рис. 8.1, даже в простейшей одноструктурной схеме с микропроцессором, как минимум, три [7] (рис. 8.2): это нелинейности АЦП, микропроцессора и ЦАП.

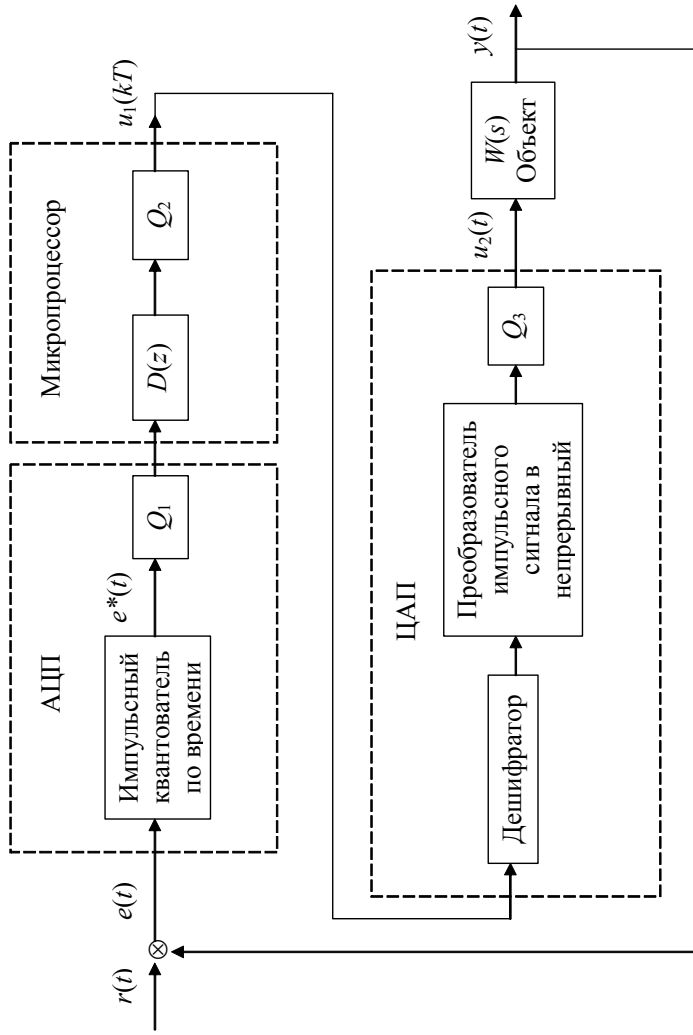


Рис. 8.2. Структурная схема системы с микропроцессором

Исследование такой системы чрезвычайно сложно, поэтому обычно задачу упрощают, пренебрегая нелинейностями АЦП и ЦАП. Структурная схема при этом принимает вид, представленный на рис. 8.3. Здесь в качестве фильтра дискретного сигнала использован, как обычно, ЭНП с передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Ограничения в представлении чисел в МП приводят к неточности в реализации закона управления. Причиной этого является неполная компенсация нулей и полюсов передаточной функции управляемого процесса (при синтезе системы с конечным временем переходного процесса) или неточное задание матрицы обратной связи (при синтезе системы с обратной связью по состоянию). Неточно могут задаваться и отдельные коэффициенты передаточной функции регулятора. Все это вызывает дополнительные ошибки, которые требуют анализа и учета.

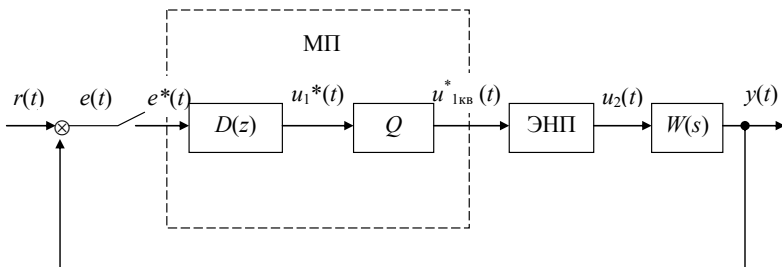


Рис. 8.3. Упрощенная структурная схема цифровой системы

Кроме того, нелинейность квантователя  $Q$  приводит к дополнительному возрастанию общей ошибки (за счет ошибок квантования), а также к возникновению в системе незатухающих колебаний (предельного цикла).

## 8.2. Статистический учет ошибок квантования по уровню

Наибольшее значение ошибки квантования, как мы уже выяснили, равно  $\pm q/2$ . Поэтому «наихудшая» ошибка в цифровой системе, представленной на рис. 8.3, вследствие квантования по уровню может быть определена при замене квантователя  $Q$  на внешний источник шума амплитудой  $\pm q/2$ . Эквивалентная схема при такой замене представлена на рис. 8.4.

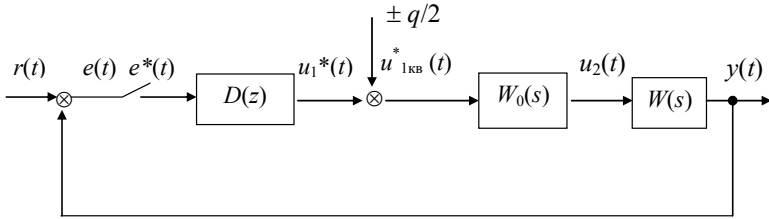


Рис. 8.4. Статистический учет ошибки квантования

На основании этой схемы  $z$ -изображение максимальной ошибки вследствие квантования по уровню будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \frac{W_0 W(z)}{1 + D(z)W_0 W(z)} (\pm q/2) \frac{z}{z-1} = \\
 &= \frac{Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}}{1 + (1 - z^{-1})D(z)Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}} (\pm q/2). \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

Само значение ошибки может быть определено из обратного  $z$ -преобразования правой части выражения (8.1).

Иногда оценки ошибки «сверху» бывает недостаточно и приходится прибегать к статистическим оценкам. Ошибка

квантования при произвольном сигнале на входе является случайной величиной с нулевым математическим ожиданием.

Можно показать, что если выполняются два условия:

1)  $q \leq MЗЧ/8$  ;

2) плотность распределения сигнала  $u_1^*(t)$  — гладкая функция (например, гауссова),

то все значения ошибки квантования  $\varepsilon = u_1^* - u_{1кв}^*$ , расположенные в интервале от  $-q/2$  до  $q/2$ , равновероятны, то есть плотность распределения ошибки  $p(\varepsilon)$  постоянна в диапазоне от  $-q/2$  до  $q/2$  [7] :

$$p(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{при } |\varepsilon| \leq q/2, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| > q/2. \end{cases} \quad (8.2)$$

Первое условие выполняется всегда, так как оно означает, что количество разрядов для представления числа в МП не меньше 3. Второе условие также справедливо, поскольку, как правило, нет никаких оснований предполагать противное.

Дисперсия ошибки при распределении (8.2), как известно из теории вероятности, определяется выражением

$$D_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = q^2/12. \quad (8.3)$$

Если при этом еще предположить некоррелированность ошибок квантования на каждом шаге, то эффекту от квантования по уровню эквивалентно дополнительное воздействие на систему идеального белого шума с интенсивностью  $N = 2\pi q^2 / (12\omega_s)$ . Такая замена основана на том, что удобный с аналитической точки зрения идеальный белый шум с бесконечным частотным спектром  $S_u(\omega) = N$  воспринимается цифровой системой так же (вследствие квантования по времени с частотой  $\omega_s$ ), как и реальный белый шум с шириной спектра  $\omega_s/2$  и интенсивностью  $N$ .

Спектральная плотность такого реального белого шума

$$S_p(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2}, \end{cases}$$

а его дисперсия  $D_p$  равна дисперсии ошибки квантования  $D_\varepsilon$ :

$$D_p = \frac{1}{2\pi} N \cdot 2 \frac{\omega_s}{2} = \frac{q^2}{12} = D_\varepsilon.$$

Таким образом, схему, изображенную на рис. 8.3, можно заменить эквивалентной (в статистическом смысле) схемой, приведенной на рис. 8.5.

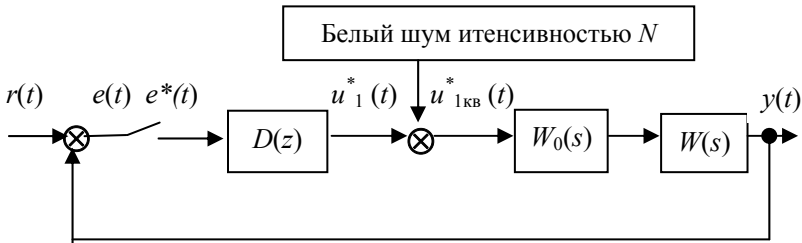


Рис. 8.5. Учет ошибки квантования в виде белого шума

Система, представленная на рис. 8.5, является линейной и может быть исследована в рамках линейной теории. Например, дисперсию ошибки, вызванной квантованием по уровню, можно найти по формуле

$$D_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left| \frac{W_0 W(z)}{1 + W(z)} \right|^2 \Bigg|_{z=e^{j\omega T}} Nd\omega =$$

$$= \frac{q^2}{12\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \left| \frac{W_0 W(z)}{1+W(z)} \right|^2 \Big|_{z=e^{j\omega T}} d\omega, \quad (8.4)$$

где  $W_0 W(z) = Z \{W_0(s)W(s)\} = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$ ;  $W(z) = D(z) \times$   
 $\times W_0 W(z)$ .

Для вычисления интеграла в правой части формулы (8.4) удобнее перейти к псевдочастоте  $\omega_w$  согласно соотношениям

$$e^{j\omega T} = z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w}. \quad (8.5)$$

Продифференцировав правую и левую части выражения (8.5), найдем

$$d\omega = \frac{2}{T} \frac{d\omega_w}{|1 + j\omega_w|^2}. \quad (8.6)$$

Подставив выражение (8.6) в формулу (8.4) и перейдя к переменной  $\omega_w$ , получим

$$D_e = \frac{q^2}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{W_0 W(j\omega_w)}{1+W(j\omega_w)} \right|^2 \frac{1}{|1 + j\omega_w|^2} d\omega_w. \quad (8.7)$$

Интеграл в последнем выражении легко находить, пользуясь существующими таблицами для интегрирования спектральных плотностей, так как подынтегральное выражение в (8.7) приводится к требуемому для этого виду.

### 8.3. Анализ предельного цикла

Рассмотренные выше методы учета ошибок квантования не учитывают ошибку, вызванную возможным существованием в цифровой системе предельного цикла. Чаще всего предельный цикл исследуется методом гармонического баланса,

основанного на гармонической линеаризации нелинейности (обычно одной). Суть метода гармонической линеаризации состоит в замене нелинейного звена эквивалентным с точки зрения прохождения чисто гармонического сигнала линейным звеном с комплексным (в общем случае) коэффициентом передачи  $K(A)$  (этот коэффициент называется коэффициентом гармонической линеаризации), зависящим от амплитуды сигнала.

Применение метода гармонического баланса основано на предположении, что линейная часть системы пропускает только основную частоту (первую гармонику) возможных автоколебаний (гипотеза фильтра).

Одно из необходимых условий наличия в нелинейной системе автоколебаний состоит в том, что период колебаний в произвольной точке замкнутого контура не должен измениться при возвращении сигнала в эту точку после прохождения по контуру (отсюда название — метод баланса). Ясно, что выполнение этого условия в системе с периодическим квантованием по времени возможно только в случае, если период автоколебаний в предельном цикле содержит целое число периодов квантования  $T$ , причем не менее двух. Поэтому период автоколебаний  $T_r$  при решении данной задачи измеряется в относительных единицах — в периодах квантования  $T$ :

$$\overline{T_r} = T_r / T,$$

где  $\overline{T_r}$  — относительный период.

Относительная частота автоколебаний  $\overline{\omega_r}$  будет выражаться формулой

$$\overline{\omega_r} = \frac{2\pi}{\overline{T_r}} = 2\pi T / T_r = \omega_r T = \frac{\pi}{N},$$

где  $N = T_r / (2T)$  — относительный полупериод колебаний,  $N = 1, 2, \dots$

Наличие квантования по времени в цифровых системах вносит особенности в поведение коэффициента гармонической линеаризации: он оказывается зависимым не только от



амплитуды автоколебаний  $A_r$ , но и от относительной частоты  $\overline{\omega_r}$  (или от  $N$ ). Коэффициент гармонической линеаризации оказывается зависимым также от фазы  $\varphi_r$ , характеризующей сдвиг начальной фазы автоколебаний относительно момента квантования сигнала по времени (момента замыкания ключа).

Исследование предельного цикла сопряжено с большим объемом вычислительных и графических операций, причем положительный результат (то есть наличие в системе автоколебаний) разработчика, как правило, не устраивает.

При исследовании предельного цикла в цифровой системе нужно помнить, что даже если предельный цикл наблюдается, он может иметь незначительную амплитуду и слабо влиять на качество управления в такой системе.

## Литература

1. Карпов А.Г. Цифровые системы автоматического управления (Основы теории) : учеб. пособие / А.Г. Карпов. – Томск: НТЛ, 2007. – 288 с.
2. Карпов А.Г. Теория автоматического управления. Ч. 1 : учеб. пособие / А.Г. Карпов. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2011. – 212 с.
3. Карпов А.Г. Теория автоматического управления. Ч. 2 : учеб. пособие / А.Г. Карпов. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2012. – 264 с.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1984. – 447 с.
5. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970. – 620 с.
6. Карпов А.Г. Математические основы теории систем : учеб. пособие / А.Г. Карпов. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2013. – 312 с.
7. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы : учеб. пособие / В.В. Солодовников, В.Г. Коньков, В.А. Суканов, О.В. Шевяков. – М.: Высшая школа, 1991. – 255 с.

## Приложение

Таблица преобразований функций времени

Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование	w-преобразование
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{w+1}{2w}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T(1+w)(1-w)}{4w^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2(1+w)(1-w)}{8w^3}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1+w}{(1-e^{-aT})\left(1+\frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}}w\right)}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-a})}$	$\frac{(1+w)(1-w)}{2w\left(1+\frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}}w\right)}$

Окончание таблицы

Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование	w-преобразование
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{(1+w)(1-w)Te^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2 \left(1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}}w\right)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{(1-w)(1+w) \sin \omega T}{2((1+w^2) - (1-w^2) \cos \omega T)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{(1+w)^2 - (1-w^2) \cos \omega T}{2[(1+w^2) - (1-w^2) \cos \omega T]}$
$e^{-at} \sin \omega T$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{(1+w)(1-w)e^{-aT} \sin \omega T (1+w)^2 - 2(1-w^2) e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)^2 e^{-2aT}}{e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)^2 e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega T$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{(1+w)^2 - (1-w^2)e^{-aT} \cos \omega T (1+w)^2 - 2(1-w^2) e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)^2 e^{-2aT}}{e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)^2 e^{-2aT}}$

## Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
1. ТИПОВЫЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ	
1.1. Функциональные схемы.....	5
1.2. Структурные схемы.....	6
1.2.1. Устройство выборки и хранения.....	6
1.2.2. Цифроаналоговый преобразователь.....	10
1.2.3. Аналого-цифровой преобразователь.....	11
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ	
2.1. Квантование по времени.....	14
2.1.1. Виды импульсной модуляции сигнала.....	14
2.1.2. Некоторые аспекты выбора периода квантования.....	14
2.1.3. Реальный квантователь.....	15
2.1.4. Идеальный квантователь.....	21
2.2. Восстановление сигналов.....	28
2.2.1. Импульсная теорема.....	28
2.2.2. Восстановитель Шеннона.....	29
2.2.3. Экстраполяторы.....	31
3. МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	
3.1. Основы метода.....	35
3.1.1. Определение $z$ -преобразования.....	35
3.1.2. Ограничения метода $z$ -преобразования.....	36
3.2. Импульсная передаточная функция.....	37
3.2.1. Определение импульсной передаточной функции.....	37
3.2.2. Соединения звеньев в дискретной системе.....	39
3.2.3. Импульсная передаточная функция экстраполятора нулевого порядка.....	43
3.3. Процессы между моментами квантования.....	45
3.3.1. Методы исследования процессов между моментами квантования.....	45
3.3.2. Метод дробного квантования.....	46
3.3.3. Метод модифицированного $z$ -преобразования.....	50
3.4. Структурный анализ дискретных систем.....	54

4. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ.....	61
4.1. Уравнения состояния.....	61
4.1.1. Основные понятия .....	61
4.1.2. Уравнения динамики систем, содержащих только цифровые элементы .....	62
4.1.3. Уравнения динамики систем с квантователем и фиксатором.....	63
4.1.4. Прямое и обратное время в уравнениях состояния ..	66
4.2. Решение уравнений состояния .....	67
4.2.1. Переходная матрица состояния .....	67
4.2.2. Общее решение .....	75
4.3. Передаточные функции и уравнения состояния.....	78
4.3.1. Матричная импульсная передаточная функция.....	78
4.3.2. Диаграмма состояний .....	81
4.3.3. Переход к уравнениям состояния от передаточной функции .....	85
4.3.4. Диаграмма состояний цифровых систем с непрерывной частью.....	94
4.4. Управляемость и наблюдаемость цифровых систем.....	97
4.4.1. Понятия управляемости и наблюдаемости.....	97
4.4.2. Определение управляемости по уравнениям динамики .....	99
4.4.3. Определение наблюдаемости по уравнениям динамики.....	101
4.4.4. Блочное разбиение системы.....	102
5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ .....	108
5.1. Аспекты моделирования непрерывных систем .....	108
5.2. Применение устройств выборки и хранения.....	109
5.3. Численное интегрирование.....	112
5.3.1. Методы численного интегрирования.....	112
5.3.2. Метод прямоугольников .....	112
5.3.3. Метод трапеций .....	115
5.4. Метод z-форм .....	116
6. АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	122
6.1. Устойчивость дискретных систем.....	122

6.1.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости .....	122
6.1.2. Алгебраические критерии устойчивости .....	125
6.1.3. Критерий Михайлова .....	126
6.1.4. Критерий Найквиста .....	130
6.2. Переходной процесс .....	133
6.3. Установившийся процесс .....	135
<b>7. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ</b>	
7.1. Общие схемы синтеза .....	142
7.2. Синтез последовательного аналогового регулятора .....	146
7.3. Синтез аналогового регулятора в цепи обратной связи .....	153
7.4. Последовательный цифровой регулятор .....	158
7.4.1. Варианты исполнения цифрового регулятора .....	158
7.4.2. Импульсные фильтры .....	158
7.4.3. Реализация цифровых регуляторов на ЦВМ .....	165
7.4.4. Синтез цифрового регулятора с применением билинейного преобразования .....	175
7.4.5. Цифровой ПИД-регулятор .....	179
7.5. Синтез цифровых систем управления с конечным временем переходного процесса .....	182
7.5.1. Основы метода .....	182
7.5.2. Физическая реализуемость регулятора .....	184
7.5.3. Синтез цифрового регулятора .....	187
7.6. Синтез цифровой системы в пространстве состояний ..	192
<b>8. МИКРОПРОЦЕССОР КАК УПРАВЛЯЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ</b>	
8.1. Ошибки квантования по уровню .....	200
8.2. Статистический учет ошибок квантования по уровню .....	204
8.3. Анализ предельного цикла .....	207
Литература .....	210
Приложение. Таблица преобразований функций времени ..	211

Учебное издание  
**Карпов** Александр Георгиевич  
ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ  
Учебное пособие

Подписано в печать 22.12.15. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 12,56. Тираж 100 экз. Заказ 865.

Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники.  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.  
Тел. (3822) 533018.