

А.Г. Карпов

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное методическое пособие по самостоятельной работе, выполнению контрольных и лабораторных работ

Томск – 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра компьютерные системы в управлении
и проектировании (КСУП)**

А.Г. Карпов

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Учебное методическое пособие по самостоятельной работе, выполне-
нию контрольных и лабораторных работ**

2016

Карпов А.Г.

Цифровые системы автоматического управления: Учебное методическое пособие по самостоятельной работе, выполнению контрольных и лабораторных работ. – Томск: 2016. – 38 с.

Приводится рабочая программа курса, рекомендации по выполнению контрольных и лабораторных работ. Приведены варианты исходных данных к лабораторным работам.

Учебное методическое пособие предназначено для магистров направления подготовки «Управление в технических системах» 27.04.04 любых форм обучения, в том числе и с применением дистанционных образовательных технологий.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	5
2 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПО КУРСУ «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»	6
2.1 Введение	6
2.2 Общая функциональная схема и состав цифровых систем регулирования	6
2.3 Математическое описание процессов квантования и фильтрации	6
2.4 Метод z-преобразования	6
2.5 Метод пространства состояний	7
2.5 Моделирование систем управления с применением цифровых методов	7
2.6 Анализ цифровых систем управления	7
2.7 Синтез цифровых систем	7
2.8 Особенности использования микропроцессоров в системах управления	8
3 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»	9
3.1 Контрольная работа №1	9
3.2 Контрольная работа №2	11
3.3 Контрольная работа №3	16
3.4 Контрольная работа №4	19
4 ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»	24
4.1 Лабораторная работа №1	24
4.2 Лабораторная работа №2	26
4.3 Лабораторная работа №3	29
4.4 Лабораторная работа №4	33
5 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	37
ПРИЛОЖЕНИЕ А	38

1 ВВЕДЕНИЕ

Цель курса «Цифровые системы автоматического управления» – дать понятия о цифровых системах автоматики, их современной технической реализации и методах их анализа и проектирования. Основными задачами курса являются:

- ознакомление студентов с цифровыми системами регулирования, их структурными схемами и элементами;
- привитие студентам навыков анализа и синтеза цифровых систем управления, в том числе с мини- и микроЭВМ в контуре регулирования;
- привитие студентам навыков экспериментального исследования цифровых систем автоматического управления.

Фундаментом для изучения разделов курса являются следующие дисциплины, с которыми студенты знакомятся ранее:

- математические основы теории систем,
- теория автоматического управления,
- электрические цепи и сигналы,
- элементы и устройства систем управления,
- метрология и измерения.

Для успешного усвоения курса необходимо выполнить ряд контрольных и лабораторных работ.

Курс «Цифровые системы автоматического управления» изучается в течение двух семестров. В первом семестре необходимо выполнить лабораторные работы 1 и 2 и контрольные работы 1 и 2. Во втором семестре выполняются лабораторные работы 3 и 4 и контрольные работы 3 и 4.

Для выполнения контрольных и лабораторных работ необходимо изучить и проработать учебное пособие «Цифровые системы автоматического управления» [1] и (при желании и при возможности) предлагаемые литературные источники [2–5].

2 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПО КУРСУ «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

2.1 Введение

Общие сведения о цифровых системах автоматики. Примеры цифровых систем управления техническими объектами. Особенности применения цифровых систем управления.

2.2 Общая функциональная схема и состав цифровых систем регулирования

Типовые структурные и функциональные схемы цифровых систем автоматики. Объекты цифровых систем управления. Характеристики объектов, их математическое описание. Микропроцессорная система как управляющее устройство. Элементы цифровых систем: устройство связи с объектом, аналого-цифровой преобразователь, цифроаналоговый преобразователь, устройство выборки и хранения, мультиплексор и демультимплексор.

2.3 Математическое описание процессов квантования и фильтрации

Преобразование и обработка сигналов в цифровых системах управления. Квантование непрерывных сигналов. Виды квантования. Ошибки квантования по уровню. Математическое описание процесса квантования. Понятие идеального квантователя. Реальный квантователь. Импульсная теорема Шеннона–Котельникова. Восстановление сигнала по дискретным выборкам. Устройства восстановления (фильтрации) сигнала.

2.4 Метод z-преобразования

Основы метода. Понятие z-преобразования. Импульсная (дискретная) передаточная функция. Структурный анализ цифровых систем. Исследование процессов между моментами кванто-

вания: метод дробного квантования и модифицированное z-преобразование. Ограничения метода z-преобразования.

2.5 Метод пространства состояний

Особенности метода пространства состояний в применении к цифровым системам. Уравнения состояния. Прямое и обратное время в уравнениях состояния. Решение дискретных уравнений состояния. Переходная (фундаментальная) матрица. Связь уравнений состояния с передаточной функцией. Понятие диаграммы состояния. Методы декомпозиции передаточной функции.

Управляемость и наблюдаемость в цифровых системах. Теоремы о наблюдаемости и управляемости. Связь между управляемостью, наблюдаемостью и передаточными функциями. Теоремы об инвариантности управляемости и наблюдаемости.

2.5 Моделирование систем управления с применением цифровых методов

Применения устройств выборки и хранения. Методы численного интегрирования. Метод z-форм. Метод пространства состояний с применением УВХ.

2.6 Анализ цифровых систем управления

Устойчивость, необходимое и достаточное условие устойчивости. Дискретные аналоги критериев устойчивости: алгебраические критерии, критерий устойчивости Михайлова и Найквиста. Переходные процессы, ошибки в типовых режимах.

2.7 Синтез цифровых систем

Методы синтеза цифровых систем. Синтез аналоговых регуляторов: последовательных, в обратной связи. Реализация и синтез цифровых регуляторов. Цифровой ПИД-регулятор. Синтез систем с минимальным временем переходного процесса. Синтез систем в пространстве состояний.

2.8 Особенности использования микропроцессоров в системах управления

Ограничения микропроцессорных систем управления. Влияние конечной длины слова на управляемость и расположение полюсов замкнутой системы. Запаздывание в микропроцессорных системах управления. Нелинейные эффекты, обусловленные квантованием по уровню, и методы их исследования.

3 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Учебная программа по курсу «Цифровые системы автоматического управления» предусматривает выполнение студентом в процессе обучения четырех контрольных работ и четырех лабораторных работ и рассчитана на два семестра.

3.1 Контрольная работа №1

Контрольная работа содержит четыре задачи по квантованию сигнала во времени.

1. Сигнал $f(t)$ поступает на идеальный квантователь с периодом квантования T . Определить период квантования, при котором ошибка восстановленного с помощью фиксатора нулевого порядка сигнала не превысит $\Delta\%$ от максимального значения сигнала.

№ варианта	$f(t)$	Δ
1	e^{-5t}	2
2	e^{-2t}	5
3	e^{-6t}	3
4	e^{-3t}	6
5	e^{-4t}	1
6	e^{-5t}	4
7	e^{-2t}	3
8	e^{-t}	1
9	e^{-4t}	5
10	e^{-6t}	4
11	e^{-2t}	2
12	e^{-3t}	6
13	e^{-t}	4
14	e^{-6t}	3
15	e^{-3t}	5
16	e^{-2t}	1
17	e^{-7t}	6
18	e^{-3t}	4
19	e^{-2t}	2
20	e^{-t}	3

2. Сигнал $f(t)$, пропущенный через идеальный квантователь с периодом квантования T , поступает на линейный экстраполятор. Определить максимальную ошибку восстановления сигнала.

№ варианта	$f(t)$	T, c
1	e^{-2t}	0,1
2	e^{-3t}	0,05
3	e^{-5t}	0,08
4	e^{-t}	0,07
5	e^{-2t}	0,05
6	e^{-4t}	0,1
7	e^{-6t}	0,09
8	e^{-5t}	0,06
9	e^{-3t}	0,07
10	e^{-t}	0,08
11	e^{-2t}	0,09
12	e^{-4t}	0,07
13	e^{-3t}	0,1
14	e^{-5t}	0,06
15	e^{-6t}	0,051
16	e^{-t}	0,08
17	e^{-3t}	0,07
18	e^{-4t}	0,05
19	e^{-6t}	0,1
20	e^{-5t}	0,08

3. Амплитудный спектр сигнала на входе идеального квантователя представлен на рис. 3.1. Изобразить спектр сигнала на выходе квантователя, если период квантования T равен

- $T=62,8$ мс;
- $T=125,6$ мс.

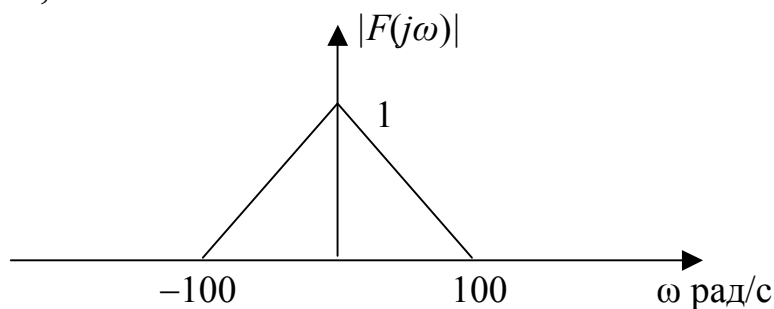


Рисунок 3.1

4. Амплитудный спектр сигнала на входе идеального квантователя представлен на рис. 3.2. Изобразить спектр сигнала на выходе квантователя, если частота квантования ω_s равна

- а) $\omega_s=100$ рад/сек;
- б) $\omega_s=200$ рад/сек.

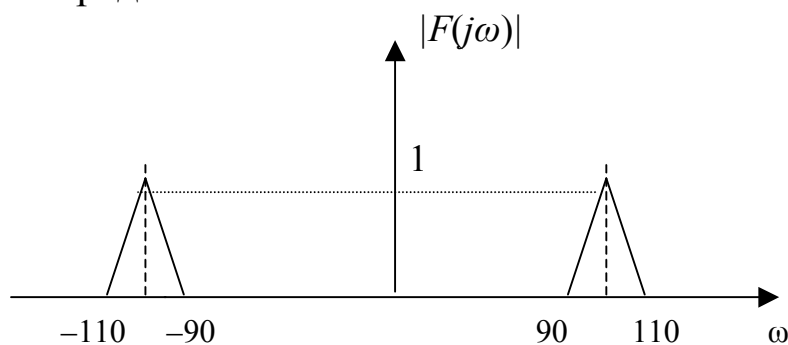


Рисунок 3.2

3.2 Контрольная работа №2

Для выполнения этой контрольной работы необходимо решить четыре задачи, посвященные прохождению сигнала через линейную дискретную систему.

1. На вход системы, изображенной на рис. 3.3, поступает сигнал $r(t)=1(t)$. Период квантования T равен 1 с. Передаточная функция задана в виде

$$W(s) = \frac{K}{As + 1}.$$

Найти выход системы $y(t)$ при $t=0$ с; $1/3$ с; $2/3$ с; 1 с; $4/3$ с с помощью метода дробного квантования.

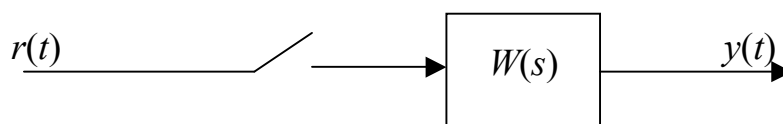


Рисунок 3.3

№ варианта	K	A
1	2	5
2	3	2
3	1	2
4	1	4
5	4	1
6	1	3
7	2	3
8	2	2
9	3	1
10	4	2
11	4	5
12	3	5
13	2	5
14	3	1
15	1	3
16	4	1
17	3	4
18	3	3
19	1	4
20	1	5

2. Сигнал $r(t)$ поступает на вход системы, структурная схема которой изображена на рис. 3.4. Определить z-преобразование сигнала на выходе системы $Z\{y(t)\}$. Период квантования принять равным единице.

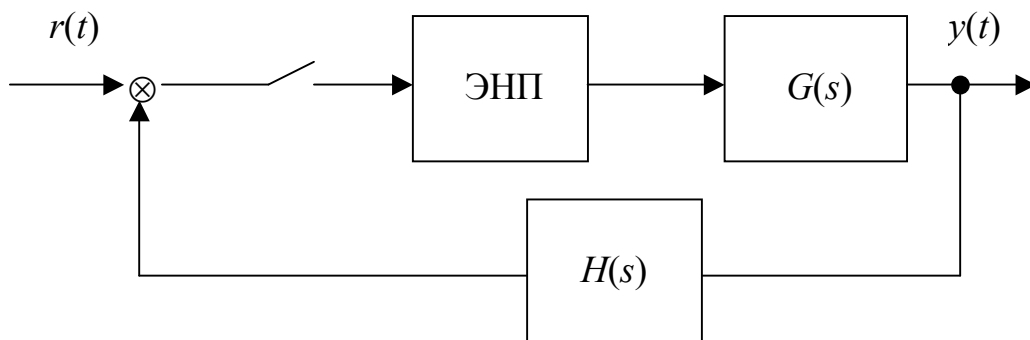


Рисунок 3.4

№ варианта	$r(t)$	$G(s)$	$H(s)$
1	$1(t)$	$\frac{5}{3s+1}$	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s}$	$\frac{2}{s+1}$
3	$1(t)$	$\frac{3}{2s+1}$	$\frac{1}{s+1}$
4	t	$\frac{5}{s+1}$	$\frac{1}{s}$
5	$1(t)$	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{1}{s+1}$
6	t	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s+1}$
7	$1(t)$	$\frac{2}{s+1}$	$\frac{1}{s+2}$
8	t	$\frac{4}{3s+1}$	$\frac{1}{s}$
9	$1(t)$	$\frac{1}{3s+1}$	$\frac{1}{s+1}$
10	t	$\frac{2}{s}$	$\frac{1}{s+2}$
11	$1(t)$	$\frac{3}{s+1}$	$\frac{1}{s+3}$
12	t	$\frac{5}{s+2}$	$\frac{1}{s}$
13	$1(t)$	$\frac{1}{s+0,5}$	$\frac{1}{s+1}$
14	t	$\frac{4}{s+1}$	$\frac{1}{s}$
15	$1(t)$	$\frac{5}{s+2}$	$\frac{1}{s+1}$
16	t	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s+1}$
17	$1(t)$	$\frac{3}{s+4}$	$\frac{1}{3s+1}$
18	t	$\frac{2}{s+5}$	$\frac{1}{s}$

№ варианта	$r(t)$	$G(s)$	$H(s)$
19	$1(t)$	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{s+3}$
20	t	$\frac{1}{s}$	$\frac{5}{3s+1}$

3. Найти установившееся значение сигнала $y(\infty)$ на выходе системы из задачи 2.

Указание. Воспользоваться теоремой о конечном значении [2, с. 59].

4. Структурная схема системы приведена на рис. 3.5. Оба квантователя работают синхронно с одинаковым периодом. Определить импульсную передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(z)=Y(z)/R(z)$.

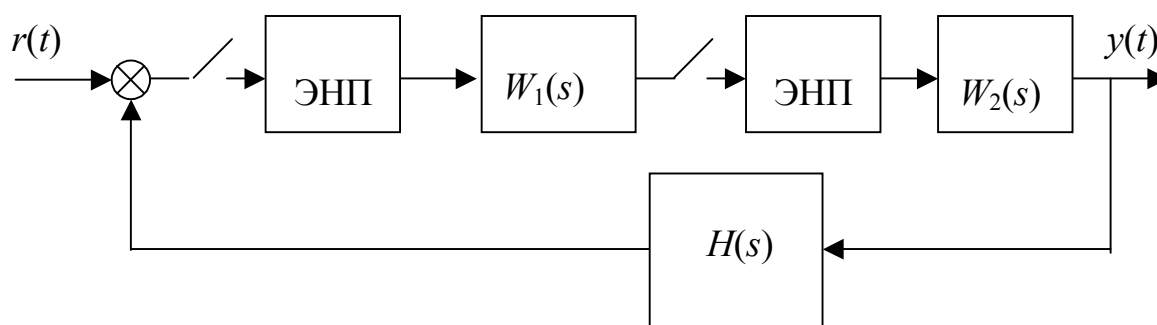


Рисунок 3.5

№ варианта	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$H(s)$
1	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{s}$
2	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{5}{s+3}$	1
3	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{s+1}{s+3}$
4	$\frac{2}{s+3}$	$\frac{1}{s^2+4s+4}$	1
5	$\frac{1}{s}$	$\frac{s+1}{s^2+2s+2}$	1

№ варианта	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$H(s)$
6	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{4}{s}$	$\frac{1}{s+1}$
7	$\frac{s+1}{s^2+s+1}$	$\frac{1}{s+1}$	1
8	$\frac{1}{s^2+4s+3}$	3	$\frac{1}{s+1}$
9	$\frac{5}{s^2}$	2	$\frac{1}{s+1}$
10	$\frac{1}{s^2+2s+1}$	$\frac{4}{s+1}$	1
11	$\frac{3}{s+1}$	$\frac{s+2}{s^2+6s+8}$	$\frac{1}{s}$
12	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{s+1}$	1
13	$\frac{1}{s}$	$\frac{6}{s+1}$	$\frac{1}{s+2}$
14	$\frac{2s+4}{s^2+s+1}$	2	$\frac{1}{s+1}$
15	$\frac{2s+3}{s+2}$	$\frac{5}{s+1}$	$\frac{1}{s}$
16	$\frac{2s}{s+1}$	$\frac{1}{s^2+4s+3}$	$\frac{1}{s}$
17	$\frac{3}{s+2}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s+1}$
18	$\frac{4}{s^2+s+1}$	$\frac{1}{s+1}$	1
19	$\frac{2}{s^2}$	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{1}{s+1}$
20	$\frac{3}{s+1}$	$\frac{1}{s^2+2s+1}$	1

3.3 Контрольная работа №3

В данной контрольной работе собраны задачи, касающиеся устойчивости дискретных систем управления.

1. Задана импульсная передаточная функция разомкнутой системы $W(z)$. Определить устойчивость замкнутой системы (с единичной отрицательной обратной связью), используя необходимое и достаточное условие устойчивости (по расположению корней характеристического уравнения) [1, с. 151].

№ варианта	$W(z)$
1	$\frac{3z}{z^2 + z - 0,5}$
2	$\frac{(z - 0,5) \cdot z}{z^2 + 1,5z - 0,5}$
3	$\frac{z + 1}{2z^2 + z - 2}$
4	$\frac{2z - 2}{z^2 - z - 0,5}$
5	$\frac{z}{3z^2 + 2z + 0,5}$
6	$\frac{3(z - 0,7)}{2z^2 + 0,5z - 0,5}$
7	$\frac{z}{z^2 + 3z - 4}$
8	$\frac{3z - 4}{z^2 + z - 0,5}$
9	$\frac{z - 1,5}{2z^2 + 3z - 0,5}$
10	$\frac{z + 2}{z^2 - z - 1}$
11	$\frac{3z + 2}{z^2 - z - 3}$

№ варианта	$W(z)$
12	$\frac{z - 0,4}{2z^2 + 3z - 0,5}$
13	$\frac{2(z - 0,3)}{z^2 - z - 0,5}$
14	$\frac{3z - 1}{z^2 - z + 2}$
15	$\frac{4z + 1,5}{z^2 - 2z - 0,5}$
16	$\frac{z^2 - 2z}{2z^2 + z - 0,5}$
17	$\frac{3(z - 0,2) \cdot z}{z^2 + z - 0,5}$
18	$\frac{z \cdot (z - 1)}{z^2 + 5z + 2}$
19	$\frac{z + 0,5}{z^2 + 2z + 1,5}$
20	$\frac{z - 1,5}{z^2 + 2z + 2,5}$

2. По заданному характеристическому уравнению

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

определить устойчивость системы, воспользовавшись алгебраическим критерием устойчивости [1, с. 153].

№ варианта	a	b	c
1	3	1	2
2	2	-3	-1
3	1	2	3
4	-2	1	-1
5	3	3	2
6	-3	4	-1
7	2	-1	-3
8	1	3	3

№ варианта	a	b	c
9	2	-4	-2
10	2	2	-3
11	1	1	1
12	-2	-2	-1
13	3	-4	-4
14	2	1	-2
15	0,5	2	1
16	-1	0,5	2
17	4	-1	1
18	3	2	1
19	-1	-2	-3
20	2	-4	-2

3. С помощью критерия Михайлова определить критический коэффициент усиления K , при котором замкнутая система (см. рис. 3.6) будет находиться на границе устойчивости.

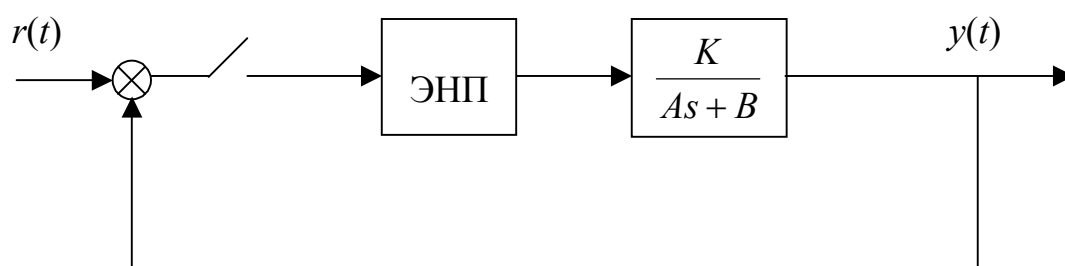


Рисунок 3.6

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2	4	1	5	6	3	2	1	6	3
B	3	2	6	1	4	5	4	2	3	2

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	5	4	2	3	6	5	1	4	3	2
B	2	3	5	4	2	3	4	1	5	1

Указание. Критерий Михайлова требует построения годографа $D(z)$ – характеристического полинома замкнутой системы при изменении переменной z по окружности единичного радиуса (обычно по верхней половине окружности) либо после подстановки $z = e^{j\omega}$ при изменении ω от 0 до π . Условие нахождения системы на границе устойчивости – прохождение кривой Михайлова, т.е. вектора $D(e^{j\omega})$, через начало координат. Последнее условие означает, что $D(e^{j\omega})=0$. Из этого уравнения и определяется критический коэффициент усиления.

3.4 Контрольная работа №4

В данной контрольной работе проверяются знания и умения оперировать с уравнениями состояния.

1. Найти переходную матрицу дискретной системы с квантователем и фиксатором (см. рис. 3.7).

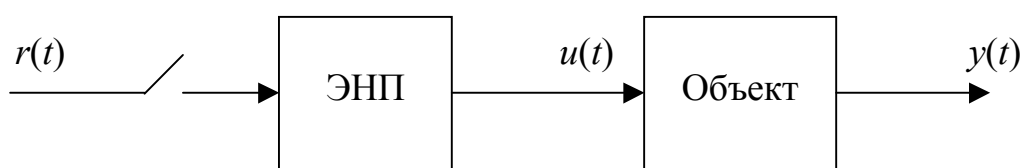


Рисунок 3.7

Объект задан уравнениями состояния

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

Период квантования принять равным 1 сек.

Указание. Для нахождения переходной матрицы вначале составляют уравнения состояния системы с квантователем и фиксатором [1, с. 86–87 формула (4.13)]. Матрицу $\Phi[(k+1)T, kT]$, которая в данном случае (стационарная система) будет зависеть от разности аргументов, т.е. будет представлять собой матрицу $\Phi[T]$, находят с помощью преобразования Лапласа [2, с. 117] с

последующей подстановкой $t=T$. Окончательно переходную матрицу $(\Phi[T])^N$ получают подстановкой в матрицу $\Phi[T]$ в качестве аргумента NT , т.е. $(\Phi[T])^N = \Phi[NT]$.

№ варианта	A	B	C
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
3	$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
4	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
5	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
6	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 1]$
7	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
8	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[1 \ 1]$
9	$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
10	$\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
11	$\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
12	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
13	$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
14	$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$

№ варианта	A	B	C
15	$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
16	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$
17	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
18	$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 1]$
19	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$
20	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0]$

2. Цифровая система задана уравнениями состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot r(k). \quad (3.1)$$

Необходимо собственные числа системы сделать равными заданным значениям λ_1, λ_2 с помощью обратной связи по состоянию **G**.

Указание. Структурная схема системы с обратной связью по состоянию имеет вид, представленный на рис. 3.8.

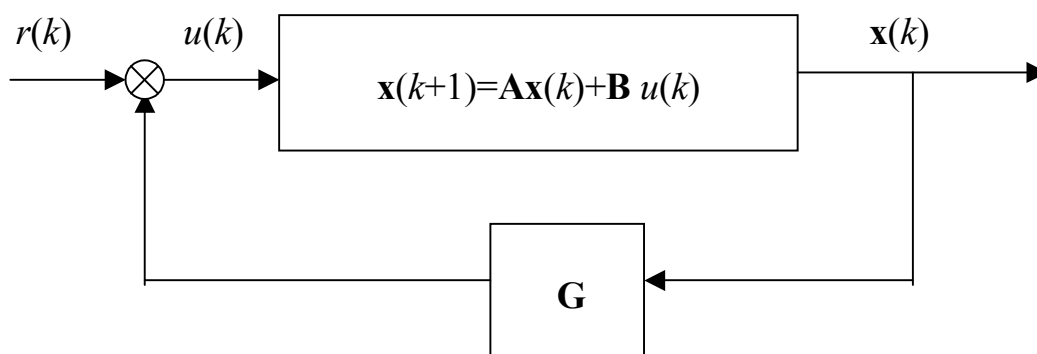


Рисунок 3.8

На этом рисунке $\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2]$ – матрица-строка коэффициентов обратной связи.

Для удобства вычисления коэффициентов g_1, g_2 вначале нужно преобразовать уравнение состояния (3.1) к канонической форме фазовой переменной [1, с. 219–220]. Затем составляют требуемое характеристическое уравнение и согласно известной процедуре [1, с. 218–219] определяют коэффициенты обратной связи преобразованной системы. В заключение вычисляют коэффициенты обратной связи исходной системы [1, с. 223].

№ варианта	A	B	λ_1	λ_2
1	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,4	0,6
2	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,2	0,3
3	$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,4	0,7
4	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,2	0,5
5	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,8	0,4
6	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,5	0,6
7	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,7	0,9
8	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,3	0,4
9	$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,6	0,2
10	$\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,7	0,3
11	$\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,2	0,3

№ варианта	A	B	λ_1	λ_2
12	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,5	0,7
13	$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,3	0,1
14	$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,2	0,6
15	$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,7	0,5
16	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,2	0,7
17	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,3	0,6
18	$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,4	0,5
19	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,7	0,6
20	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,8	0,3

4 ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

4.1 Лабораторная работа №1

Цель лабораторной работы – освоить на практике методы получения и анализа уравнений состояния цифровой системы автоматического управления.

Исходные данные – импульсная передаточная функция замкнутой системы $W(z)$.

Задание по лабораторной работе можно разбить на несколько этапов.

1. Получение диаграмм состояния с помощью трех методов декомпозиции:

- а) непосредственной,
- б) последовательной,
- в) параллельной.

Диаграммы состояния получают по методике, изложенной в учебном пособии [1, с. 108–116], и представляют в графической форме.

2. На основе диаграмм состояния составляют уравнения состояния и уравнения выхода

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot r(k), \quad (4.1)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k). \quad (4.2)$$

Для каждого из методов п.1 результат представляют в виде квадратной матрицы \mathbf{A} , вектор-столбца \mathbf{B} и вектор-строки \mathbf{C} .

3. Находят решение уравнений состояния (4.1) и уравнений выхода (4.2). Для этого:

- а) вычисляют переходную матрицу $\Phi(k)$,
- б) записывают решение уравнения (4.1) так же, как это сделано в учебном пособии [1, с. 102] в форме

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k) \cdot \mathbf{x}(0) + \sum_{m=0}^{k-1} \Phi(k-m-1) \cdot \mathbf{B} \cdot r(m). \quad (4.3)$$

Переходная матрица $\Phi(k)$ вычисляется для уравнений состояния, полученных

- непосредственной декомпозицией – с помощью метода z-преобразования [1, с. 95–96];
- последовательной декомпозицией – с применением теоремы Кэли–Гамильтона [1, с. 94];
- параллельной декомпозицией – как диагональная матрица [1, с. 93].

Подстановка решения (4.3) в уравнение (4.2) дает решение для выходного сигнала системы

$$y(k) = \mathbf{C} \cdot \Phi(k) \cdot \mathbf{x}(0) + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{C} \cdot \Phi(k-m-1) \cdot \mathbf{B} \cdot r(m). \quad (4.4)$$

Решение необходимо записать для $k=3$ для заданных $r(k)$ и нулевых начальных условий ($y(0)=y(1)=0$). Для записи решения в виде (4.4) потребуется пересчитать начальные условия для $y(k)$ в начальные условия для $\mathbf{x}(k)$.

№ варианта	$W(z)$
1	$\frac{z + 0,7}{z^2 + 0,3z + 0,02}$
2	$\frac{z + 1}{z^2 + 0,1z - 0,2}$
3	$\frac{z + 0,5}{z^2 - 0,8z + 0,12}$
4	$\frac{z + 0,4}{z^2 - 0,8z + 0,07}$
5	$\frac{z - 0,8}{z^2 + 0,5z - 0,06}$
6	$\frac{z + 0,6}{z^2 + 0,2z - 0,35}$
7	$\frac{z - 0,3}{z^2 - 1,2z + 0,32}$
8	$\frac{z + 0,5}{z^2 - 0,3z - 0,18}$
9	$\frac{z + 1}{z^2 - 0,2z - 0,48}$

№ варианта	$W(z)$
10	$\frac{z + 0,3}{z^2 - z + 0,16}$
11	$\frac{z - 0,3}{z^2 - 0,6z + 0,05}$
12	$\frac{z + 0,4}{z^2 + 0,3z - 0,54}$
13	$\frac{z - 0,2}{z^2 - 1,2z + 0,3}$
14	$\frac{z + 0,5}{z^2 - 0,3z + 0,02}$
15	$\frac{z - 0,5}{z^2 - 0,3z - 0,28}$
16	$\frac{z - 1}{z^2 - 1,2z + 0,35}$
17	$\frac{z + 0,7}{z^2 + 0,3z - 0,1}$
18	$\frac{z + 0,3}{z^2 - 1,4z + 0,48}$
19	$\frac{z - 0,5}{z^2 + 0,4z - 0,21}$
20	$\frac{z + 0,9}{z^2 + 1,4z + 0,45}$

4.2 Лабораторная работа №2

Лабораторная работа выполняется с помощью пакета программ, находящихся в папке «Лаб.2».

Цель лабораторной работы – исследование цифровых моделей, полученных из непрерывной системы. Цифровые системы получаются из непрерывной с помощью методов:

- введение в непрерывную систему устройства выборки и хранения [1, с. 132];

- применение методов численного интегрирования [1, с. 135], а именно:

- а) интегрирование по методу прямоугольников,
 - б) интегрирование по методу прямоугольников с упреждением,
 - в) интегрирование по методу трапеций;
- метод z-форм [1, с. 139].

Исходные данные – заданные структурный состав и передаточные функции составных звеньев разомкнутой системы. Структурная схема непрерывной системы представлена на рис. 4.1.

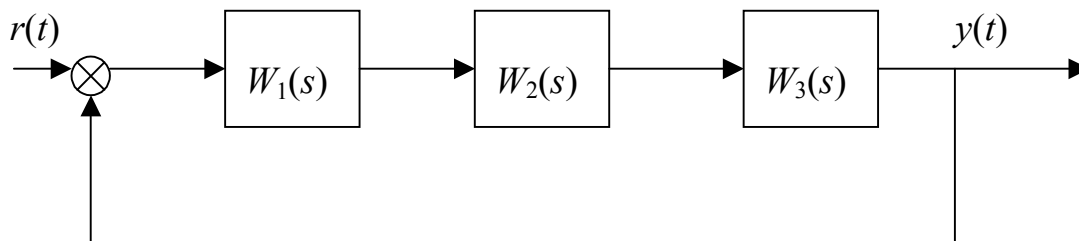


Рисунок 4.1

Задание и порядок выполнения работы

1. Запустите файл pks.exe.
2. Ознакомьтесь с программой, порядком работы с ней и управляющими кнопками.
3. Введите период квантования, количество итераций и передаточные функции звеньев системы.
4. Пронаблюдайте переходные процессы.
5. Сравните все пять методов преобразования непрерывной системы в цифровую по степени приближения переходного процесса к переходному процессу исходной непрерывной системы (непрерывную систему можно получить, положив период квантования достаточно малым, например, $T=0,01$). Для этого измерьте время переходного процесса для каждого из методов. Время переходного процесса измеряется от момента его начала до момента, когда разница между текущим значением выхода системы и установившимся его значением становится и остается меньше 5%.

6. Для каждого из методов постройте области устойчивости в координатах: T (горизонтальная ось) и K (вертикальная ось). Для этого, зафиксировав значение T , меняйте величину K до достижения системой границы устойчивости (наличие незатухающих колебаний). Изменив значение T , повторяете процедуру и т.д. до получения достаточного для построения области устойчивости количества точек.

7. Сравните методы преобразования непрерывной системы в цифровую по степени устойчивости и сделайте выводы.

Внимательно следуйте указаниям программы!

Требования к отчету. Отчет должен быть оформлен в соответствии со стандартом и содержать:

- цель выполнения лабораторной работы;
- графики переходных функций цифровых моделей и непрерывной системы;
- области устойчивости для цифровых моделей в параметрах T, K ;
- выводы о проделанной работе.

№ варианта	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$	K	T
1	$\frac{K}{1+0,1s}$	$\frac{1}{1+0,5s}$	$\frac{1}{s}$	5	0,5
2	$\frac{K}{1+0,2s}$	$\frac{1}{1+0,9s}$	$\frac{1}{s}$	3	0,4
3	$\frac{K}{1+0,3s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,7s}$	4	0,2
4	$\frac{K}{1+0,8s}$	$\frac{1}{1+0,4s}$	$\frac{1}{s}$	3	0,1
5	$\frac{K}{1+0,6s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,1s}$	9	0,2
6	$\frac{K}{1+0,2s}$	$\frac{1}{1+0,7s}$	$\frac{1}{s}$	5	0,4
7	$\frac{K}{1+0,5s}$	$\frac{1}{1+0,2s}$	$\frac{1}{s}$	6	0,3
8	$\frac{K}{1+0,3s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,5s}$	4	0,7

№ варианта	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$	K	T
9	$\frac{K}{1+0,1s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,3s}$	9	0,4
10	$\frac{K}{1+0,9s}$	$\frac{1}{1+0,1s}$	$\frac{1}{s}$	10	0,2
11	$\frac{K}{1+0,4s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,2s}$	5	0,1
12	$\frac{K}{1+0,3s}$	$\frac{1}{1+0,3s}$	$\frac{1}{s}$	4	0,5
13	$\frac{K}{1+0,3s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,2s}$	6	0,6
14	$\frac{K}{1+0,4s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,5s}$	3	0,3
15	$\frac{K}{1+0,6s}$	$\frac{1}{1+0,1s}$	$\frac{1}{s}$	8	0,6
16	$\frac{K}{1+0,5s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,4s}$	4	0,5
17	$\frac{K}{1+0,7s}$	$\frac{1}{1+0,3s}$	$\frac{1}{s}$	3	0,3
18	$\frac{K}{1+0,6s}$	$\frac{1}{1+0,6s}$	$\frac{1}{s}$	2	0,6
19	$\frac{K}{1+0,1s}$	$\frac{1}{1+0,7s}$	$\frac{1}{s}$	8	0,4
20	$\frac{K}{1+0,2s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+0,9s}$	3	0,2

4.3 Лабораторная работа №3

Лабораторная работа выполняется с помощью пакета программ, находящихся в папке «Лаб.3».

Цель работы – синтез последовательного цифрового регулятора в цифровой системе регулирования методом билинейного преобразования.

Исходные данные

Структурная схема цифровой системы приведена на рис. 4.2.

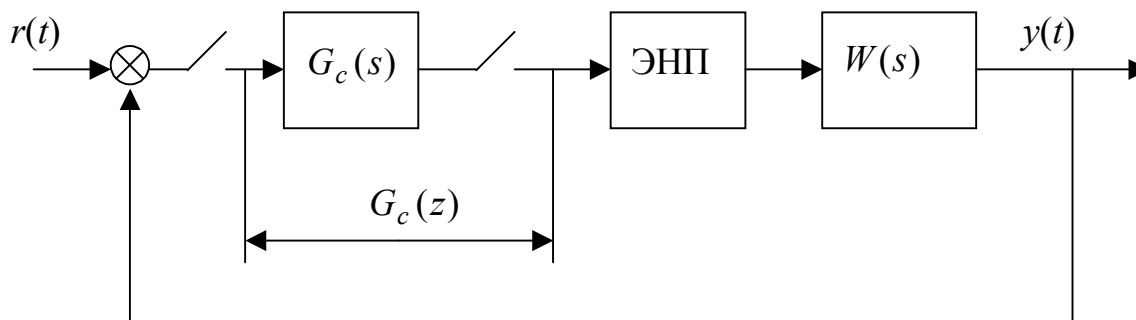


Рисунок 4.2

Передаточная функция объекта задана равной передаточной функции разомкнутой системы из лабораторной работы №2. В качестве цифрового регулятора выбран регулятор с отставанием по фазе, передаточная функция которого в w -области имеет вид

$$G_c(w) = \frac{1 + Aw}{1 + Bw}, \quad (4.5)$$

где A и B – подлежащие определению коэффициенты, причем $A \leq B$.

Заданы также запас устойчивости по модулю (амплитуде) ΔL и запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$, которыми должна обладать синтезированная система.

№ варианта	Запас устойч. по модулю ΔL , дБ.	Запас устойч. по фазе $\Delta\varphi$, град.
1	11	30
2	20	25
3	8	25
4	15	20
5	9	20
6	17	30
7	20	25
8	12	25
9	9	30
10	14	20
11	18	20
12	10	25

№ варианта	Запас устойч. по модулю ΔL , дб.	Запас устойч. по фазе $\Delta\varphi$, град.
13	13	25
14	19	30
15	16	30
16	20	20
17	17	30
18	15	35
19	10	35
20	8	35

Задание и порядок выполнения работы

1. Запустите файл Lchx.exe.
2. Ознакомьтесь с программой, порядком работы с ней и управляющими кнопками.
3. Введите период квантования, количество итераций и передаточные функции звеньев системы. Метод построения кривой переходного процесса – метод прямоугольников (синий цвет).
4. Изменением общего коэффициента усиления K добейтесь, чтобы нескорректированная система находилась на границе устойчивости (наличие незатухающих колебаний).
5. По логарифмическим характеристикам нескорректированной системы и заданным запасам устойчивости рассчитайте параметры A и B в выражении (4.1). Идея коррекции системы с помощью последовательного цифрового регулятора с передаточной функцией (4.1) заключается в подавлении псевдочастот вблизи частоты среза, т.е. в параллельном смещении логарифмической амплитудной псевдочастотной характеристики таким образом, чтобы запасы устойчивости скорректированной системы были *не хуже* заданных. Это осуществляется с помощью логарифмической характеристики регулятора. Логарифмическая амплитудная характеристика регулятора (4.1) имеет излом вниз на псевдочастоте $\omega_w = 1/B$ и излом вверх на псевдочастоте $\omega_w = 1/A$ (см. рис. 4.3).

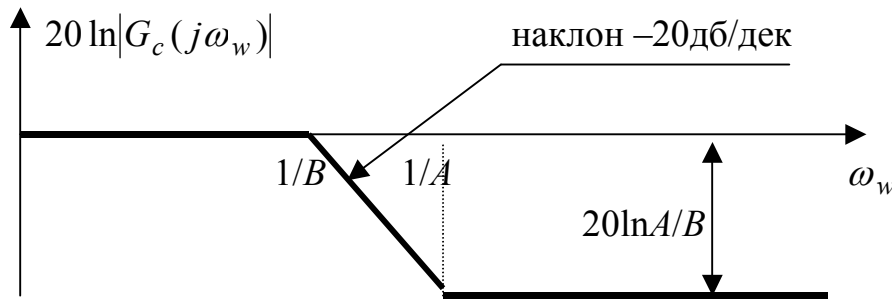


Рисунок 4.3

Чтобы на характеристики скорректированной системы не влияла фазочастотная характеристика регулятора, псевдочастоту правого излома следует выбрать по крайней мере на порядок меньше частоты среза исходной системы. Из этого условия определится значение A . Зная, на сколько нужно сместить логарифмическую амплитудную характеристику системы (исходя из заданного запаса устойчивости), определяем отношение A/B и, таким образом, определяем величину B .

6. Введите параметры регулятора в программу и по построенным характеристикам системы с регулятором сделайте вывод о соответствии полученных характеристик требуемым.

7. Определив передаточную функцию регулятора в w -области, найдите z -передаточную функцию. Переход в z -область осуществляется подстановкой в выражение (4.1) $w = (z - 1)/(z + 1)$.

Внимательно следуйте указаниям программы!

Требования к отчету. Отчет должен быть оформлен в соответствии со стандартом и содержать:

- цель выполнения лабораторной работы;
- графики переходных функций и логарифмических характеристик системы без коррекции и скорректированной системы;
- передаточные функции регулятора в w -области и в z -области;
- выводы о проделанной работе.

4.4 Лабораторная работа №4

Лабораторная работа выполняется с помощью пакета программ, находящихся в папке «Лаб.4».

Цель работы – изучение устройства, свойств и методов синтеза пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов (ПИД-регуляторов).

Исходные данные

Структурная схема системы с цифровым регулятором приведена на рис. 4.4.

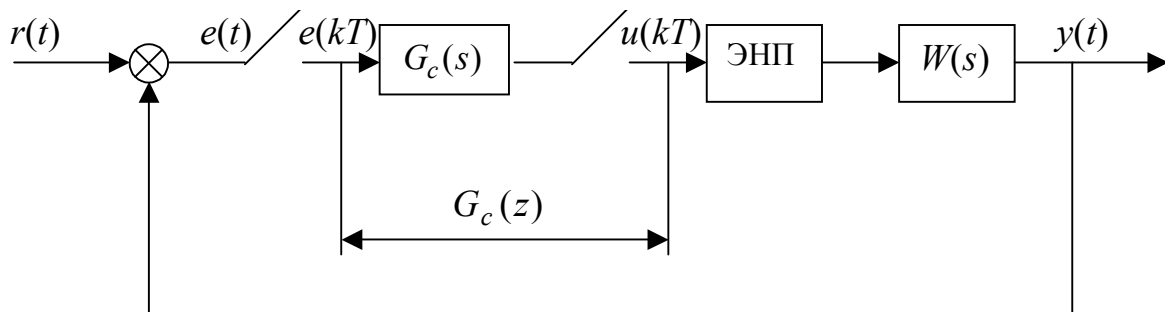


Рисунок 4.4

В качестве цифрового регулятора в лабораторной работе предлагается использовать цифровой ПИД-регулятор, структурная схема которого приведена на рис. 4.5.

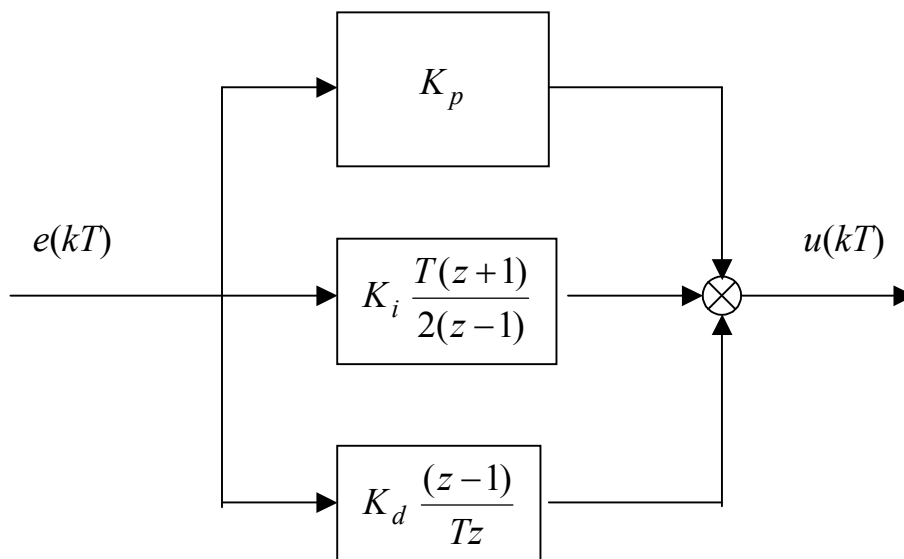


Рисунок 4.5

Синтез цифрового ПИД-регулятора заключается в определении значений K_p , K_i и K_d по заданным показателям качества и передаточной функции объекта $W(s)$. Синтез может быть выполнен с помощью любого метода, но в данной лабораторной работе предлагается применить метод компенсации полюсов управляемого процесса нулями ПИД-регулятора. Передаточная функция объекта имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{(s+a) \cdot (s+b)}.$$

№ варианта	K	a	b	T	Добротность по скорости K_V
1	16	4	2	0,3	5
2	4	2	6	0,8	3
3	9	4	8	0,5	7
4	20	3	1	0,2	10
5	13	9	4	0,6	4
6	11	4	4	0,7	7
7	7	7	2	0,4	5
8	26	9	6	0,3	8
9	2	3	5	0,5	6
10	5	5	7	0,8	9
11	9	6	1	0,3	6
12	8	9	13	0,2	4
13	4	1	2	0,7	9
14	17	2	7	0,4	8
15	6	8	3	0,6	5
16	19	4	2	0,7	3
17	14	7	4	0,2	7
18	6	2	5	0,5	10
19	3	3	1	0,3	4
20	8	4	7	0,2	6

Задание и порядок выполнения работы

1. Запустите файл pid.exe.
2. Ознакомьтесь с программой, порядком работы с ней и управляющими кнопками.

3. Рассчитайте коэффициенты K_p , K_i и K_d . Это делается следующим образом. Вначале рассчитывается z -передаточная функция разомкнутой системы без регулятора

$$W(z) = Z\{W_0(s) \cdot W(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot W(s)\right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}. \quad (4.6)$$

Передаточная функция регулятора в соответствии с рис. 4.5 равна

$$G_c(z) = K_p + K_i \cdot \frac{T(z+1)}{2(z-1)} + K_d \cdot \frac{(z-1)}{Tz}. \quad (4.7)$$

Поскольку синтез осуществляется путем компенсации полюсов управляемого процесса нулями регулятора, приравниваем нули функции (4.7) полюсам функции (4.6). Передаточная функция управляемого процесса имеет два полюса, следовательно, и выражение (4.6) будет иметь также два полюса в z -плоскости. Таким образом получают два уравнения относительно трех переменных K_p , K_i и K_d . Третье уравнение составляют по заданной добротности по скорости K_V

$$K_V = \frac{1}{T} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot G_c(z) \cdot W(z)]. \quad (4.8)$$

Решая систему из трех полученных уравнений, определяют три неизвестных параметра K_p , K_i и K_d .

4. Введите в программу период квантования, число итераций, передаточные функции объекта и ПИД-регулятора.

5. Измерьте показатели качества системы без коррекции и с ПИД-регулятором: величину перерегулирования, время переходного процесса (до величины ошибки 5%), запас устойчивости по фазе и (или) по амплитуде (по модулю).

6. Изменяя коэффициенты K_p , K_i и K_d , наблюдайте за изменениями переходного процесса, оцените влияние этих коэффициентов на свойства системы, сделайте выводы.

Требования к отчету. Отчет должен быть оформлен в соответствии со стандартом и содержать:

- цель выполнения лабораторной работы;
- графики переходных функций и логарифмических характеристик системы без коррекции и скорректированной системы;
- передаточную функцию ПИД-регулятора;
- показатели качества системы без регулятора и с ПИД-регулятором;
- выводы о проделанной работе.

5 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпов А.Г. Цифровые системы автоматического регулирования: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2015. – 216 с.
2. Карпов А.Г. Математические основы теории систем: Учебное пособие – Томск: ТМЛ-Пресс, 2013. – 318 с.
3. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы: Учебное пособие / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Высшая школа, 1991. – 255 с.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 447 с.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник: В 3-х томах. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Изображения по Лапласу и z-преобразования функций времени

Функция времени $f(t)$	Изображение по Лапласу $F(s)$	z-преобразование $F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1) \cdot (z - e^{-aT})}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cdot e^{-aT} \cdot \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$