МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
Факультет систем управления
Кафедра автоматизированных систем (АСУ)

А.А. Мицель

Методы оптимизации

Методические указания по выполнению практических работ для студентов направления подготовки
09.04.01 – Информатика и вычислительная техника (магистратура)

2016

А.А. Мицель

Методы оптимизации

Методические указания по выполнению практических работ для студентов направления *подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника (магистратура)*. – Томск: ТУСУР, 2016 (электр. ресурс). – 28 с.

В пособии приводится описание практических работ по дисциплине «Методы оптимизации» и даны варианты домашних заданий. Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению *Информатика и вычислительная техника (магистратура).*

Содержание

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ И ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Дисциплина "Методы оптимизации" читается в 1 семестре магистратуры и предусматривает чтение лекций, проведение лабораторных и практических работ, выполнение контрольных работ, получение различного рода консультаций.

1. Цели освоения дисциплины Целью курса является освоение основных идей методов, особенностей областей применения и методики использования их как готового инструмента практической работы при проектировании и разработке систем, математической обработке данных технических, организационных и экономических задач, построении алгоритмов и организации вычислительных процессов на ПК. Целью преподавания данной дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний, практических навыков по вопросам, касающимся принятия управленческих решений; освоение студентами современных математических методов анализа, научного прогнозирования поведения технических и экономических объектов, обучение студентов применению моделей и алгоритмов решения специальных задач оптимизации.

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Курс «Методы оптимизации» относится к числу дисциплин общенаучного цикла (базовая часть). Эта дисциплина нацелена на углубленное изучение специальных разделов оптимизационных задач, поэтому успешное овладение дисциплиной предполагает предварительные знания основных разделов дисциплины «Методы оптимизации», изучаемых в рамках бакалавриата. Практические и лабораторные работы выполняются с помощью пакета прикладных программ Mathcad. Освоение этой дисциплины необходимо для изучения таких дисциплин, как «Обработка и анализ данных с помощью нейронных сетей», «Методы решения некорректных», а также для подготовки магистрантов к научным исследованиям и магистерской диссертации.

Основными задачами дисциплины являются:

- Изучение моделей квадратичного программирования.
- Изучение моделей динамического программирования.
- Изучение вариационного исчисления.
- Формирование у студентов знаний и умений, необходимых для эффективного управления техническими, организационными и экономическими системами.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать

- модели квадратичного программирования;
- двойственность задач нелинейного программирования;
- модели динамического программирования;
- основы вариационного исчисления;

Уметь

- создавать модели нелинейного программирования и проводить анализ моделей;
- решать задачи квадратичного программирования;
- создавать оптимизационные модели;
- создавать модели динамического программирования;
- творчески использовать теоретические знания на практике;
- использовать полученные знания для планирования функционирования и развития предприятия и в научных исследованиях.

Владеть

- методами решения задач квадратичного программирования;
- методами решения задач динамического программирования;
- методами решения задач вариационного исчисления;

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение
Понятие операции, классификация моделей исследования

Тема 1. Квадратичное программирование
Задача квадратичного программирования (ЗКП). Условие Куна-Таккера для ЗКП. Метод решения ЗКП с помощью искусственного базиса. Метод решения ЗКП с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений. Задача о дополнительности. Метод решения задач о дополнительности (Д). Алгоритм решения задачи КП Мицеля-Хващевского.

Тема 2. Теория двойственности
Формулировка двойственной задачи. Геометрическая интерпретация двойственной по Лагранжу задачи. Разрыв двойственности. Решение двойственной по Лагранжу задачи. Задачи линейного и квадратичного программирования

Тема 3. Модели динамического программирования
Детерминированные управляемые процессы. Общая постановка задачи динамического программирования, принцип оптимальности и уравнения Беллмана. Задача о распределении средств между предприятиями. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет. Управляемые марковские процессы с доходами.

Тема 4. Вариационное исчисление
Функционалы. Основные понятия. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функционалов. Вариационные задачи с закрепленными концами. Многомерный случай. Уравнения Эйлера-Пуассона

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Тема №1. Динамическое программирование. Детерминированные управляемые процессы

Модель динамического программирования записывается следующим образом:

$$J(x,u)=\sum_{k=1}^{N}J_k=\sum_{k=1}^{N}J_k(x^{(k-1)},u^{(k)})\to \underset{u}{extr}, \tag{3.1}$$

$$x^{(k)}=f^{(k)}(x^{(k-1)},u^{(k)}),\ k=1,...,N, \tag{3.2}$$

$$u^{(k)}\in U_k(x^{(k-1)}),\ k=1,...,N, \tag{3.3}$$

$$x^{(0)}\in X_0,\ x^{(N)}\in X_N\ .$$

Здесь $x^{(k)}$ – состояние системы в конце k-го шага; $u^{(k)}$ – управления на k-м шаге; J_k – показатель эффективности k-го шага; $J(x,u)$ – показатель эффективности управляемого процесса; X_0, X_N и $U_k(x^{(k-1)})$ - заданные множества в пространствах R^n и R^m соответственно, причем множество $U_k(x^{(k-1)})$ зависит от предыдущего состояния $x^{(k-1)}$ k-го шага.

Выделим особенности модели ДП:

1. *Задача оптимизации интерпретируется как N-шаговый процесс управления,*
2. *Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага.*
3. Выбор управления на k-м *шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).*
4. *Состояние $x^{(k)}$ после k-го шага управления зависит только от предшествующего состояния $x^{(k-1)}$ и управления $u^{(k)}$ (отсутствие последействия).*
5. *На каждом шаге управление $u^{(k)}$ зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние $x^{(k)}$ — от конечного числа параметров.*

Пример 1. Задача об оптимальном графике закупок

Предприятие планирует на период продолжительностью N дней выпуск

фруктовых консервов. Стоимость закупаемой партии фруктов есть $P(x)$ (табл. 1.1) условных единиц и зависит от ее размера x, который всегда есть число, кратное Δ. Сырье в виде фруктов может поставляться на предприятие раз в день в течение всего периода работы. Если фрукты не используются в тот же день, когда они доставлены, их следуют хранить в холодильнике, емкость которого ограничена величиной E . Арендная плата за хранение зависит от количества хранимых фруктов x и составляет $Q(x)$ условных единиц в сутки.

Требуется определить количество фруктов, которое следует закупать в каждый из дней, чтобы минимизировать суммарные затраты на покупку и хранение при условии, что суточная потребность составляет α условных единиц.

Таблица 1.1

Стоимость закупаемых фруктов $P(x)$ и арендная плата $Q(x)$.

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$P(x)$	150	280	410	540	660	780	890	1000	1100
$Q(x)$	10	20	30	50	70	100	-	-	-

Решить задачу, приняв, что N = 3, Δ = 100, E = 600 и α = 300. При решении считать, что запасы фруктов в начале и в конце рабочего периода отсутствуют.

Для решения данной задачи представим ее в форме задачи динамического программирования. Обозначим через u_k количество фруктового сырья, закупаемое предприятием в k -ый день. За состояние x_k разумно выбрать количество фруктов, оставшееся в k -ый день невостребованным. Тогда закон изменения состояния системы имеет вид: $x_k = x_{k-1} + u_k - \alpha$, где $k = 1,...,N$, а, поскольку по условию задачи начальные и конечные запасы сырья отсутствуют, то $x_0 = x_N = 0$. При этом функция, описывающая затраты в k -ый день, может быть записана как $J_k(x_{k-1}, u_k) = P(x_k) + Q(x_k)$.

Составим уравнения Беллмана. Пусть предприятию осталось отработать последний третий день, тогда система находится в состоянии x_2 и минимальные затраты за последний день зависят от u_3 и составляют

$$J_3(x_2) = \min_{0 \le u_3 \le 300 - x_2} \left(P(u_3) + Q(x_2) \right) = P(300 - x_2) + Q(x_2).$$

Областью определения функции $J_3(x_2)$ является отрезок $0 \le x_2 \le 300$. Поскольку x_2, в силу кратности Δ, принимает лишь конечное число значений, удобно представить функцию $J_3(x_2)$ в табличной форме (см. табл. 1.2).

Таблица 1.2. Значения функций $J_3(x_2)$ и $J_2(x_1)$

x_2	$J_3(x_2)$	$u_3^*(x_2)$	x_1	$J_2(x_1)$	$u_2^*(x_1)$
0	410	300	0	810	600
100	290	200	100	700	200, 500
200	170	100	200	580	100

300	30	0	300	440	0
			400	340	0
			500	240	0
			600	130	0
			700	0	0
			800	0	0
			900	0	0

Теперь предположим, что предприятию осталось отработать два дня (второй и третий). Минимальные затраты в оставшемся двухшаговом процессе определяются
значением функции $J_2(x_1)$, выражаемой через значения функции $J_3(x_2)$:
$$J_2(x_1) = \min_{\max\{300-x_1,0\} \le u_2 \le 600-x_1} \left(P(u_2) + Q(x_1) + J_3(x_1 + u_2 - 300) \right).$$
Здесь множество $U_2(x_1) = \left\{ u_2 : \max\{300 - x_1, 0\} \le u_2 \le 600 - x_1 \right\}$. Его вид получается следующим образом: т. к. область определения функции $J_3(x_2)$ есть $0 \le x_2 \le 300$ и $x_2 = x_1 + u_2 - 300$, то объединяя соотношения, получаем верхнюю границу множества изменений u_2. Нижняя граница получается аналогично, для этого достаточно принять во внимание, что количество «лишних» фруктов не может быть меньше нуля. Результаты вычисления функции $J_2(x_1)$ представлены правой части табл. 1.2.
Приведем пример вычисления значения $J_2(100)$
$$J_2(100) = \left\{ \begin{array}{ll} 280 + 10 + J_3(0) = 700, & u_2 = 200 \\ 410 + 10 + J_3(100) = 710, & u_2 = 300 \\ 540 + 10 + J_3(200) = 710, & u_2 = 400 \\ 660 + 10 + J_3(300) = 710, & u_2 = 500 \end{array} \right\} = 700.$$

На последнем шаге вычислений, т.е. когда предприятию осталось отработать три дня, функция Беллмана имеет вид
$$J_1(x_0) = \min_{u_1 \in U_1(x_0)} \left(P(u_1) + Q(x_0) + J_2(x_0 + u_1 - 300) \right).$$
При этом, поскольку $x_0 = 0$, то достаточно вычислить эту функцию лишь в этой точке, поэтому
$$J_1(0) = \min_{300 \le u_1 \le 900} \left(P(u_1) + Q(0) + J_2(u_1 - 300) \right) = 1220$$

и указанное значение достигается как при $u_1 = 300$, так и при $u_1 = 600$, являющихся возможными значениями оптимального управления $u_1^*(x_0 = 0)$.

Чтобы по вычисленным функциям $J_3(x_2)$, $J_2(x_1)$ и $J_1(x_0)$ построить оптимальный план закупки фруктового сырья, нужно взять одно из найденных на последнем шаге значений $u_1^* = u_1^*(x_0)$, например, $u_1^* = 300$ и найти оптимальное $x_1^* = x_0 + u_1^* - 300 = 0 + 300 - 300 = 0$. Далее, в таблице для функции $J_2(x_1^*)$, найти величину $u_2^*(x_1)$, соответствующую $x_1 = x_1^* = 0$ и затем вычислить $x_2^* = x_1^* + u_2^* - 300 = 0 + 600 - 300 = 300$. Наконец, по последней таблице $J_3(x_2)$ для x_2^* вычислить значение $u_3^* = u_3^*(x_2)$. Повторяя аналогичные вычисления для $u_1^* = 600$, находим, что в задаче имеется два оптимальных плана закупок фруктов по дням: (300, 600, 0) и (600, 0, 300).

Домашние задания

1. Задача о путешественнике

На местности имеется сеть дорог, связывающих несколько населенных пунктов. Путешественник находится в пункте a_0, из которого, двигаясь по одной из трех дорог, можно попасть в пункты $a_1,\ a_2,\ a_3$. Из каждого пункта опять выходят ровно три дороги, ведущие в $a_4,\ a_5,\ a_6$. Из них – в $a_7,\ a_8,\ a_9$ и так далее, вплоть до конечных пунктов $b_1 = a_{3\cdot N-2},\ b_2 = a_{3\cdot N-1},\ b_3 = a_{3\cdot N}$. Длины всех дорог заданы. Найти наиболее короткий путь из $a0$ в один из конечных пунктов. Решить задачу при $N = 5$. Оцените количество операций сложения и сравнения при ее решении по методу Беллмана, а также при полном переборе всех путей.

2. Задача о распределении инвестиций

Нужно распределить между N предприятиями сумму a , выделенную для их инвестирования. Известно, что вложение средств в размере u в k -ое предприятие обеспечивает прибыль в размере $J_k(u)$. Целью распределения является получение максимального суммарного дохода. Решить задачу при $N = 4$, $a = 300$ при условии, что суммы инвестиций всегда кратны 50, а функции $J_k(u)$ для $u = 50 \cdot j$ ($j = 0, 1, \dots, 6$) принимают значения, заданные в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Значения функции $J_k(u)$ для задачи 2.

u	0	50	100	150	200	250	300
$J_1(u)$	0	50	120	140	150	200	250
$J_2(u)$	0	60	130	140	130	160	200
$J_3(u)$	0	30	60	100	130	200	250
$J_4(u)$	0	40	100	110	120	160	220

3. Задача о распределении механизмов

Имеется m видов земляных работ и $N > m$ однотипных механизмов, способных выполнять эти работы. Если назначить на i -й вид работы k механизмов, то их суммарная производительность определяется значением G_{ik} . Считая, что матрица G, составленная из таких значений, известна, найти оптимальное по суммарной производительности размещение механизмов по всем видам работ. Решить задачу, приняв $N = 4$, $m = 3$,

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 14 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \\ 6 & 10 & 13 & 15 \end{pmatrix}.$$

4. Задача о распределении ресурса

Пусть требуется распределить ограниченный ресурс a на доли $x_1, x_2, ..., x_N$ $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_N \geq 0,\ x_1 + x_2 + ... + x_N \leq a)$ между N предприятиями, каждое из которых приносит доход $f_i(x_i) = c_i \cdot x_i^2$ $(c_i > 0)$. Найти оптимальное распределение ресурсов.

5. Решить предыдущую задачу при $f_i(x_i) = c_i \cdot \sqrt{x_i}$.

6. Задача о загрузке судна

Судно, имеющее грузоподъемность a , загружается предметами N типов. Один предмет i -го типа имеет стоимость u_i и вес z_i. Требуется найти вариант загрузки судна, при котором стоимость взятых на борт предметов максимальна.

Решить задачу для $N = 3$, $a = 200$, $u_1 = 25$, $u_2 = 40$, $u_3 = 80$; $z_1 = 40$, $z_2 = 50$, $z_3 = 70$.

7. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что хотя бы один предмет каждого типа должен быть погружен на борт судна.

8. Задача о надежности

Технологическая цепочка изготовления изделия включает N операций, выполняемых на автоматизированных участках конвейерной обработки. Устройство, выполняющее операции на i -ом участке, имеет вероятность работы без отказа p_i и стоимость c_i. Для повышения надежности на участке можно установить m_i дублеров, повысив надежность участка до значения $P_i(m_i) = 1 - (1 - p_i)^{1+m_i}$. Средства, выделенные на установку устройствдублеров, ограничены значением C . Решить задачу о выборе оптимального количества дублеров, приводящем к максимизации надежности всей технологической цепочки.

При решении принять $N = 3$, $C = 17$, $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}3$; $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$. Для упрощения расчетов принять приближенные значения функций $P_i(m)$ из табл. 1.4.

Таблица 1.4. Значения функции $P_i(m)$

m	0	1	2	3	4
$P_1(m)$	0,5	0,8	0,9	0,9	1
$P_2(m)$	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8
$P_3(m)$	0,4	0,6	0,9	0,9	1

9. Задача о замене оборудования

Частное предприятие планирует в течение N лет заниматься выпуском изделий, используя некоторое оборудование. В начале можно либо купить новое оборудование возраста $x_0 = 0$ лет и стоимостью p , либо подержанное оборудование возраста $x_0 > 0$ лет по его ликвидной стоимости $\varphi(x_0)$.

Показатели эксплуатации оборудования включают: $f(t)$ – стоимость произведенных за год изделий на оборудовании возраста t лет; $r(t)$ – затраты на эксплуатацию в течение года оборудования возраста t лет.

В процессе эксплуатации оборудование можно менять, продавая старое по ликвидной стоимости $\varphi(t)$ и покупая новое стоимостью p. В конце N –го года оборудование продается по ликвидной стоимости. Определить оптимальный возраст оборудования x_0 при начальной покупке и оптимальный график его замены. Выполнить расчеты при $N = 8$, $x_0 \in \{0,1,2\}$,

$$f(t) = 30 - t/2 \; r(t) = 13 + t/2, \; p = 17, \; \varphi(t) = \begin{cases} 6, & 0 \le t \le 6, \\ 2, & 7 \le t \le 10 \end{cases}.$$

10. Задача о выпуске товаров

Предприятие, выпускает товары, изготавливая их отдельными партиями. Чем больше размер этих партий, тем относительно дешевле обходится выпуск. Поэтому в отдельные месяцы выгодно выпускать больше изделий, чем это нужно для удовлетворения спроса, а излишки хранить на складе для их реализации в последующие месяцы. За хранение в течение месяца каждой тысячи штук изделий нужно платить $\alpha = 1$ усл.ед. Емкость склада ограничена величиной $C = 4000$ штук.

Составить оптимальный план производства на $N = 4$ месяцев, при котором общая сумма затрат на производство и хранение была минимальной, а спрос на изделия – всегда удовлетворен. Объемы спроса по месяцам составляют m_i ($i = 1,.., N$) изделий (при решении принять: 2000, 3000, 3000 и 2000). Начальные запасы готовых изделий составляют $C_0 = 2000$. Размер производимых партий не может превышать $p = 4000$ изделий. Затраты, связанные с выпуском парий изделий объемом v_i ($i = 1,.., N$) штук (принять: 1000, 2000, 3000 и 4000), определяются величинами z_i ($i = 1,..,N$) (соответственно 13, 15, 17 и 19 усл.ед.).

Тема №2. Динамическое программирование. Управляемые марковские процессы с доходами

Метод динамического программирования может быть применен и для выбора оптимальной стратегии при управлении вероятностными Марковскими процессами. Будем рассматривать случай, когда значения, принимаемые марковским процессом, могут быть пронумерованы. Такой процесс будем называть *дискретным*. Вместо значений, которые принимает процесс, в дальнейшем будем использовать их номера.

Случайный процесс с дискретными значениями x_n называют *марковским*, если он обладает свойством: для любого $n \geq 1$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ и любых возможных значений $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ должно выполняться следующее требование для условных вероятностей:

$$p(x_n = i_n / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}) = p(x_n = i_n / x_{n-1} = i_{n-1}).$$

Значения i_k, которые принимает марковский процесс, можно назвать его внутренними состояниями. Они ни в коем случае не являются его «состояниями» в терминологии динамических систем. Однако далее для краткости изложения вместо термина «внутреннее состояние» в некоторых случаях будем говорить просто о состоянии, опуская слово «внутреннее».

Если вероятность $p(x_n = i_n / x_{n-1} = i_{n-1})$ перехода из состояния i_{n-1} в состояние i_n не зависит от момента времени n, *марковский процесс* называется *стационарным*. В последнем случае случайный процесс перехода из одного состояния в другое на каждом шаге описывается одной и той же стохастической матрицей $P = \left(p_{ij}\right)$, элементы которой p_{ij} являются условными вероятностями того, что следующим состоянием будет состояние j, если текущим состоянием является состояние i. Эти вероятности удовлетворяют двум условиям: $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, (если число возможных состояний равно m). Марковский процесс с конечным числом внутренних состояний называют *конечной марковской цепью*.

Рассмотрим марковскую цепь с m внутренними состояниями, вероятности нахождения в которых в момент времени n заданы вектором-строкой $p(n) = \left(p_1(n), p_2(n), \ldots, p_m(n)\right)$. Вектор $p(n)$ описывает текущее вероятностное распределение марковской цепи по ее внутренним состояниям. В силу однозначности определения $p(n+1)$ по $p(n)$ вектор вероятностного распределения будет являться состоянием марковской цепи как динамической системы. Оператор изменения этих вероятностей задается стохастической матрицей P: $p(n+1) = p(n)P$.

Сделаем теперь цепь управляемой за счет того, что матрица вероятностей переходов P будет зависеть от некоторой стратегии-управления k ($P^{(k)}$). Предположим, что при каждом внутреннем состоянии цепи мы имеем возможность выбирать одну из K стратегий, задаваемых стохастическими матрицами $P^{(k)}$, $k=1,...,K$. Каждой матрице $P^{(k)}$ сопоставим матрицу доходов $D^{(k)}$ так, что при выборе стратегии k математическое ожидание дохода $q_i^{(k)}$, связанного с попаданием во внутреннее состояние i за один шаг, будет равно

$q_i^{(k)} = p_{i1}^{(k)} d_{i1}^{(k)} + p_{i2}^{(k)} d_{i2}^{(k)} + ... + p_{im}^{(k)} d_{im}^{(k)}$.

Обозначим через $V_n(i)$ максимально возможное математическое ожидание дохода за n шагов, если начальное внутреннее состояние системы было i. Тогда в соответствии с принципом оптимальности мы получим рекуррентное соотношение, являющееся аналогом уравнения Р.Беллмана

$$V_n(i) = \max\left\{ q_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(k)} V_{n-1}(j) :\ k \in \{1,...,K\} \right\}. \qquad (3.4)$$

Функция $V_n(i)$ играет роль функции Беллмана.

Пример 2.1. Задача об игрушечных дел мастере [7]

Игрушечных дел мастер в течение недели изготавливает игрушки, а в воскресенье выходит на рынок, чтобы их продать. Вероятности успешной или неуспешной продажи, а также величины доходов в зависимости от результата предыдущего раунда заданы матрицами

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},\ P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix},\ D^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix},\ D^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Первая стратегия соответствует отсутствию рекламы, вторая стратегия соответствует рекламе по радио, третья стратегия соответствует рекламе по телевидению. Требуется определить оптимальную стратегию в смысле максимума математического ожидания дохода на несколько шагов вперед. Пусть $V_0(1) = V_0(2) = 0$. Тогда рекуррентное соотношение (3.4) позволяет нам найти оптимальную стратегию поведения $\left(k_1(1), k_2(1)\right)$ в расчете на один шаг:

$$V_1(1) = \max\begin{Bmatrix} 0,5\cdot 9 + 0,5\cdot 3 = 6 \\ 0,6\cdot 8 + 0,4\cdot 2 = 5,6 \\ 0,7\cdot 6 + 0,3\cdot 1 = 4,5 \end{Bmatrix},\ V_1(2) = \max\begin{Bmatrix} 0,4\cdot 3 + 0,6\cdot(-7) = -3 \\ 0,5\cdot 1 + 0,5\cdot(-8) = -3,5 \\ 0,6\cdot 0 + 0,4\cdot(-10) = -4 \end{Bmatrix}.$$

Итак, оптимальная стратегия поведения $(k_1(1), k_2(1))$ = $(1;1)$ в расчете на один шаг, при этом $V_1(1)=6,\ V_1(2)=-3$. Теперь подсчитаем оптимальную стратегию поведения $(k_1(2), k_2(2))$ в расчете на два шага:

$$V_2(1)=\max\begin{Bmatrix} 6+0,5\cdot 6+0,5\cdot(-3)=7,5 \\ 5,6+0,6\cdot 6+0,4\cdot(-3)=8 \\ 4,5+0,7\cdot 6+0,3\cdot(-3)=7,8 \end{Bmatrix},$$

$$V_2(2)=\max\begin{Bmatrix} -3+0,4\cdot 6+0,6\cdot(-3)=-2,4 \\ -3,5+0,5\cdot 6+0,5\cdot(-3)=-2 \\ -4+0,6\cdot 6+0,4\cdot(-3)=-1,6 \end{Bmatrix}.$$

Итак, в расчете на два шага оптимальная стратегия поведения $(k_1(2), k_2(2))$ = $(2;3)$, при этом $V_2(1)=8,\ V_2(2)=-1,6$. Теперь подсчитаем оптимальную стратегию поведения $(k_1(3), k_2(3))$ в расчете на три шага:

$$V_3(1)=\max\begin{Bmatrix} 6+0,5\cdot 8+0,5\cdot(-1,6)=9,2 \\ 5,6+0,6\cdot 8+0,4\cdot(-1,6)=9,76 \\ 4,5+0,7\cdot 8+0,3\cdot(-1,6)=9,62 \end{Bmatrix},$$

$$V_3(2)=\max\begin{Bmatrix} -3+0,4\cdot 8+0,6\cdot(-1,6)=-0,76 \\ -3,5+0,5\cdot 8+0,5\cdot(-1,6)=-0,3 \\ -4+0,6\cdot 8+0,4\cdot(-1,6)=0,16 \end{Bmatrix}.$$

Итак, в расчете на три шага оптимальная стратегия поведения $(k_1(3), k_2(3))$ = $(2;3)$, при этом $V_3(1)=9,76,\ V_3(2)=0,16$. Можно сделать предположение, что стратегия $(2;3)$ останется оптимальной и на большее число шагов. Рассмотрим марковский процесс, соответствующий этой стратегии:

$$p(n+1)=p(n)\cdot\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Известно, что если все элементы матрицы вероятностей переходов строго положительны, то вне зависимости от начального распределения $p(0)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)=p^*$. В этом случае марковскую цепь называют *эргодической* [4, 5]. Переходя к пределу в записанном соотношении, получим систему двух зависимых уравнений относительно вектора p^*. Дополняя ее условием нормировки $p_1^*+p_2^*=1$, находим соответствующий нашей задаче вектор предельных вероятностей p^* = $(0.6;0.4)$. Таким образом, предполагая процесс достаточно длительным, мы можем подсчитать средний доход M за один шаг при соблюдении стратегии $(2;3)$:

$$M = 0.6\cdot(0.6\cdot 8 + 0.4\cdot 2) + 0.4\cdot(0.6\cdot 0 + 0.4\cdot(-10)) = 1.76.$$

Домашние задания

1. Задача об экзаменационной сессии

Студент уже сдал один экзамен на 4, но ему предстоит сдать еще три экзамена. При подготовке к экзаменам он из-за недостатка времени может выбрать одну из следующих двух стратегий: либо выучить часть материала довольно хорошо, либо пройтись быстро по всему материалу. Определить оптимальную в смысле набранных баллов стратегию поведения студента на оставшиеся три экзамена, если матрицы вероятностей получения оценок 5, 4, 3, 2 в зависимости от предыдущей оценки для двух стратегий имеют вид:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Задача об экзаменационной сессии

Решить предыдущую задачу №1 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

3. Задача об экзаменационной сессии

Решить предыдущую задачу №1 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

4. Задача об экзаменационной сессии

Решить предыдущую задачу №1 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

5. Задача о погоне

Догоняющий находится в i -той клетке из 5 клеток, образующих круг. За один такт он с вероятностью $p = 1/2$ перемещается по часовой стрелке в соседнюю клетку, с вероятностью $q = 1/3$ перемещается против часовой стрелки в соседнюю клетку, с вероятностью $r = 1/6$ остается на месте. Убегающий находится в j -той клетке и на каждом такте может выбрать одну из трех стратегий поведения: (a) переместиться по часовой стрелке в соседнюю клетку; (b) остаться на месте; (c) переместиться против часовой стрелки в соседнюю клетку. Расстояние между догоняющим и убегающим определяется по формуле $d = |i - j|$. Определить стратегию убегающего на три такта вперед, максимизирующую сумму расстояний между догоняющим и убегающим.

6. Задача о погоне

Решить задачу №5 при следующих исходных данных

$p = 1/3$, $q = 1/3$, $r = 1/3$.

7. Задача о погоне

Решить задачу №5 при следующих исходных данных

$p = 1/6$, $q = 1/3$, $r = 1/2$.

8. Стохастическая задача о фермере

Состояние продуктивности земли, используемой фермером, может быть (a) хорошим, (b) удовлетворительным, (c) плохим. Вероятности перехода продуктивности земли из одного состояния в другое без проведения агротехнических мероприятий за один сезон заданы матрицей $P^{(1)}$. Однако фермер может провести комплекс агротехнических мероприятий, и тогда вероятности перехода продуктивности земли из одного состояния в другое за один сезон будут заданы матрицей $P^{(2)}$. Матрицы доходов для двух стратегий поведения: $D^{(1)}$, $D^{(2)}$. Найти оптимальную стратегию фермера на 4 сезона.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}, \; P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Стохастическая задача о фермере

Решить задачу №8 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Стохастическая задача о фермере

Решить задачу №8 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тема №3. Вариационное исчисление

Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами

Уравнения Эйлера представляют собой необходимые условия существования экстремума для функционалов вида:

$$J(y, y') = \int_a^b \varphi(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{3.1}$$

где $y(x)$ - скалярная непрерывная функция с непрерывной первой производной $y'(x)$; φ - известная непрерывная дифференцируемая функция своих аргументов

$$y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b, \tag{3.2}$$

где y_a, y_b - заданные числа.

Выражения (3.2) есть граничные условия (ГУ) вариационной задачи.

Считаем, что экстремум функционала (4.7) достигается в точке $\left[y^*, (y^*)'\right]$. Тогда, приравнивая нулю первую вариацию, получаем:

$$\delta J(y, y') = \int_a^b \left\{ \varphi_y(y, y') \cdot v(x) + \varphi_{y'}(y, y') \cdot v'(x) \right\} dx = 0, \tag{3.3}$$

где
$$\varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \varphi_{y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'}. \tag{3.4}$$

$v(x)$ - непрерывная с непрерывной производной $v'(x)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$v(a) = v(b) = 0, \quad \text{так как} \quad (y + \varepsilon v)\Big|_{x=a}^{x=b} = \begin{cases} y_b, \\ y_a. \end{cases} \tag{3.5}$$

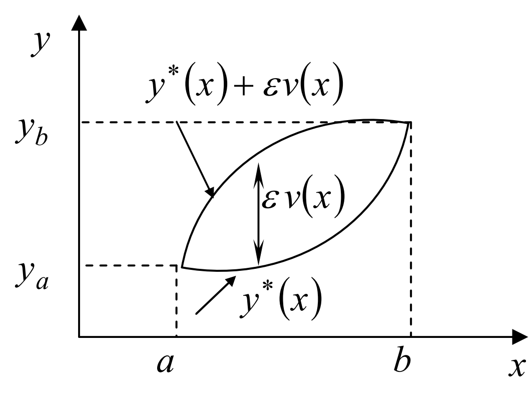

Рис. 3.1 Функция $y(x)$ и ее вариация $\varepsilon v(x)$ для задачи с закрепленными концами

Преобразуем выражение (3.3). Интегрируем второе слагаемое в (3.3) по частям:

$$\int_a^b \varphi_{y'} v' \, dx = \varphi_{y'} \, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \frac{d}{dx} \varphi_{y'} \, dx \quad \text{где} \quad \varphi_{y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'}.$$

Учитывая выражение (3.5), первое слагаемое равно нулю, и тогда уравнение (3.3) преобразуется в уравнение

$$\int_a^b \left\{ \varphi_y - \frac{d}{dx} \varphi_{y'} \right\} \cdot v(x) \, dx = 0. \tag{3.6}$$

Так как $v(x)$ - произвольная функция, то из выражения (4.12) следует

$$\varphi_y - \frac{d}{dx} \varphi_{y'} = 0, \quad \text{где} \quad \varphi_y = \frac{\partial \varphi(x, y, y')}{\partial y}. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) называется *уравнением Эйлера*. В развернутом виде это уравнение записывается следующим образом:

$$y''(x) \varphi_{y'y'} + y'(x) \varphi_{yy'} + \varphi_{xy'} - \varphi_y = 0, \tag{3.8}$$

где $\varphi_{y'y'}$, $\varphi_{yy'}$, $\varphi_{xy'}$ - смешанные частные производные 2-го порядка.

Пусть найдены кривые, удовлетворяющие уравнению Эйлера и граничным условиям $y(a) = y_a$; $y(b) = y_b$. Решена ли задача? Нет, поскольку выполнение уравнения Эйлера является лишь необходимым условием экстремума: «каждый понимает разницу между арестом подозреваемого и фактическим доказательством его виновности». Если не решен вопрос о существовании решения, то нет смысла и говорить о необходимых условиях. Если же существование решения экстремальной задачи именно в этом классе допустимых кривых доказано, то экстремум может достигаться лишь там, где выполнены необходимые условия (в случае простейшей вариационной задачи – только на гладких экстремалях, удовлетворяющих заданным граничным условиям).

Если $y(x)$ – вектор-функция $y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x))$, то при аналогичных условиях для $\varphi(x, y(x), y'(x))$ и фиксированных граничных условиях необходимое условие экстремума состоит в выполнении системы n уравнений:

$$\varphi_{y_i} - \frac{d}{dx} \varphi_{y_i'} = 0, \; i = 1, ..., n. \tag{3.9}$$

Если $\varphi=\varphi\left(x, y, y', ..., y^{(m)}\right)$то при аналогичных условиях для φ и фиксированных граничных условиях
$y\left(a\right)=y_a,\ y\left(b\right)=y_b;\ y'(a)=y'_a,\ y'(b)=y'_b;\ y^{(m-1)}(a)=y_a^{(m-1)},\ y^{(m-1)}(b)=y_b^{(m-1)}$
необходимое условие экстремума первого порядка состоит в выполнении уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\varphi_y-\frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y''}+...+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial\varphi}{\partial y^m}=0. \qquad (3.10)$$

Пример 3.1. Задача Лопиталя о форме световых лучей

Какова траектория световых лучей в атмосфере, где скорость распространения пропорциональна высоте?

Постановка этой задачи использует вариационный принцип Ферма в оптике: свет распространяется из одной фиксированной точки в другую по такому пути, время распространения по которому минимально. На основе этого принципа можно построить всю геометрическую оптику.

Рассмотрим плоскую задачу. Пусть источник расположен в точке $M_0(x_0, y_0)$, а наблюдатель – в точке $M_1(x_1, y_1)$, $y_0, y_1>0$.

Запишем математическую модель этой задачи. Время распространения света из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M_1(x_1, y_1)$ описывается функционалом $\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx$, где v – скорость распространения света, т.к. $dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx$. Таким образом,

$$J(y,y')=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx.$$

Здесь $v=ky,\ k>0$. Так как при всех k функционал достигает минимума на одной и той же кривой, то примем $k=1$.

Функция $\varphi=\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$ не зависит от x, т.е. $\varphi=\varphi\left(y, y'\right)$.

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид:

$$\varphi_y-\varphi_{yy'}y'-\varphi_{y'y'}y''=0.$$

Умножим обе части этого равенства на y', получим $\dfrac{d}{dx}\left(\varphi-y'\varphi_{y'}\right)=0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера: $\varphi-y'\varphi_{y'}=c$ или

$\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\dfrac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=c$. После преобразования получим $1+y'^2=c_1^2/y^2$. Здесь $c_1=1/c$. Отсюда имеем $y'=\pm\dfrac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y}$. Тогда $dx=\dfrac{\pm ydy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}$, $\sqrt{c_1^2-y^2}=x+c_2$, $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$, т.е. экстремалями являются окружности, центры которых лежат на оси Ox. Через точки M_0 и M_1 можно провести единственную окружность данного семейства.

Итак, мы нашли единственную допустимую кривую, на которой может достигаться минимум функционала. Можно показать, что экстремум существует. А так как он может достигаться лишь на экстремали, проходящей через точки M_0 и M_1, то эта экстремаль и является решением поставленной задачи.

Задачи со скользящими концами

В этих задачах концы допустимых кривых могут перемещаться по заданным кривым. В этом случае к необходимым условиям экстремума добавляются условия трансверсальности на подвижном конце — условия, связывающие угловые коэффициенты экстремали и граничной кривой, показывающие, с каким угловым коэффициентом экстремаль должна подходить к граничной кривой.

Для плоского случая условия трансверсальности имеют вид

$$\left[\left(\varphi-y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{\psi(x,y)=0}=0,$$

где $\psi(x,y)=0$ – неявное задание кривой, по которой перемещается конец допустимой кривой.

В частности, если значения допустимых функций $y(x)$ на границе не подчинены никаким условиям (т.е. конец может перемещаться по прямой $x=x_0$ или $x=x_1$), то будем говорить, что это *задача со свободным концом*. На свободном конце выполняется естественное граничное условие $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}=0$.

Если конец движется по прямой $y=const$, то на нем $\varphi-y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}=0$.

Если граничная кривая задана в явном виде $y=f(x)$, то условия трансверсальности имеет форму

$$\left(\varphi+(f'-y')\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_{y=f(x)}=0.$$

В случае $\varphi(x,y,y') = A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}$ условия трансверсальности задают условия ортогональности экстремали с граничной кривой: $y' \cdot f' = -1$.

Пример 3.2.

Найти экстремали функционала

$$J = \int_0^{\pi/4} \left(y'^2 - y^2 \right) dx$$

в классе кусочно-гладких кривых, удовлетворяющих условию $y(0)=1$.

Функция $\varphi(x,y,y') = y'^2 - y^2$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, поэтому по теореме Дюбуа-Реймона экстремали изломов не имеют, являются дважды гладкими. Так как $\varphi_{y'y'} = 2 > 0$, то если в данном классе допустимых кривых достигается экстремум функционала, то он является минимумом.

Необходимым условием минимума является выполнение уравнения Эйлера при $0 \le x \le \pi/4$, условие закрепленного конца $y(0)=1$ и условие свободного конца при $x = \pi/4$: $\varphi_{y'}$, вычисленная вдоль экстремали, обращается в 0.

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$; $y(0) = c_1 = 1$; $y = \cos x + c_2 \sin x$; $\varphi_{y'} = 2y'$.

для экстремали

$\varphi_{y'} = -2\sin x + 2c_2 \cos x$; $\varphi_{y'}\Big|_{x=\pi/4} = -2\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2c_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$, откуда $c_2 = 1$.

Итак, экстремалью является кривая $y = \cos x + \sin x$.

Пример 3.3.

Найти гладкую кривую OA длины L, проходящую через начало координат, кончающуюся на прямой $y = h$ и образующую вместе с ординатой точки A и осью Ox наибольшую площадь.

В этой задаче требуется найти максимум функционала $J = \int_0^{x_1} y(x)dx$ в классе гладких кривых, левый конец которых закреплен: $y(0)=0$, правый конец лежит на прямой $y = h$, а функционал $J_0 = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ принимает заданное значение L.

Решаем эту изопериметрическую задачу методом множителей Лагранжа.

Вводим вспомогательный функционал $J_1 = \int_0^{x_1} \left(y + \lambda\sqrt{1+y'^2} \right) dx$ и решаем для него задачу на безусловный экстремум. Запишем необходимые условия. Так как $\varphi_1 = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$ явно не зависит от x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $\varphi_1 - y'\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'} = c$. Мы будем искать такое его решение, которое на левом конце удовлетворяет условию $y(0)=0$, а на правом конце – условию трансверсальности, которое для горизонтальной прямой $y=h$ имеет вид $\varphi_1 - y'\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'} = 0$. Таким образом, нам известно значение первого интеграла в одной точке (на правом конце). Тогда по определению первого интеграла во всех точках экстремали $\varphi_1 - y'\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'} = 0$.

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0; \qquad y\sqrt{1+y'^2}+\lambda = 0; \qquad y' = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2-y^2}}{y};$$

$$\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{\lambda^2-y^2}} = dx; \ (x+c)^2+y^2=\lambda^2.$$

Это – семейство экстремалей. Неизвестные c,λ,x_1 определяются из условий на концах: $y(0)=0,\ y(x_1)=h$, и условия $\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx = L$. Эти условия дают

$c^2=\lambda^2,\ (x_1+c)^2+h^2=c^2,\quad x_1=-c\pm\sqrt{c^2-h^2}$. Если искомую кривую рассматривать при $x>0$ (при $x<0$ будет симметричное решение), то, так как окружность пересекает прямую $y=h$ в двух точках, то конец кривой – правая из двух возможных точек пересечения: $x_1=-c+\sqrt{c^2-h^2}$. Константу c, а вместе с ней и λ, находим из условия

$\int_0^{-c+\sqrt{c^2-h^2}}\sqrt{1+y'^2}dx = L$, где y' вычисляется вдоль экстремали и

$\sqrt{1+y'^2} = -\lambda/y$ (из дифференциального уравнения экстремали). Так как $y>0$ при $h>0$ (при $h<0$ имеется симметричное решение), то

$y=\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}$. Тогда $\lambda<0,\ c<0,\ \lambda=c$ и

$$\int_0^{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-h^2}}\frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2-(x+\lambda)^2}}dx = L; \ -\lambda\arcsin\frac{x+\lambda}{|\lambda|}\Bigg|_0^{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-h^2}} = L;$$

$$-\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{\lambda^2-h^2}}{\lambda} = \frac{L}{\lambda},$$

т.е. λ – отрицательный корень этого трансцендентного уравнения. Величина λ определяет положение центра искомой окружности и ее радиус.

Домашние задания

Решить следующие задачи вариационного исчисления (1-6).

1. Задача о брахистохроне (линии наибыстрейшего ската). В вертикальной плоскости даны точки A и B. Определить путь, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки A, достигнет точку B в кратчайшее время.

2. Задача о минимальной поверхности вращения. Найти плоскую кривую, соединяющую две заданные точки плоскости и лежащую выше оси x , которая при вращении вокруг этой оси образует поверхность наименьшей площади.

3. Задача о цепной линии. Найти форму тяжелой однородной нерастяжимой нити, подвешенной за концы.

4. Найти форму мыльной пленки, натянутой на каркас, состоящий из двух параллельных дисков радиусов r и R, центры которых соединены осью длины L, ортогональной дискам.

5. Задача Дидоны. Найти кривую заданной длины L, проходящую через точки A и B оси x ($AB < L$), ограничивающую вместе с осью x наибольшую площадь.

6. Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой $y = y(x)$, соединяющей точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, со скоростью $v = k \cdot y'$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки M_0 в точку M_1 будет минимальным.

Найти экстремали следующих функционалов (7-20).

7. $J = \int\limits_{-1}^{0} \left(12xy - y'^2\right) dx,\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0$.

8. $J = \int\limits_{0}^{\pi/4} \left(4y^2 - y'^2\right) dx,\ y(0) = 1,\ y(\pi/4) = 0$.

9. $J = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(6y \cdot \sin 2x + y^2 - y'^2\right) dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0$.

10. $J = \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 y'^2 + 12x^2\right) dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = 1$.

11. $J=\int\limits_0^1\left(x^2y-y'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=0$.

12. $J=\int\limits_0^L\left(y-xy'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(L)=2$.

13. $J=\int\limits_0^1\left(y'^2+yy'+12xy\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0$.

14. $J=\int\limits_0^1\left(4y\cdot\sin x-y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=0$.

15. $J=\int\limits_0^1\left(y'^2+y^2+4y\cdot ch(x)\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=0$.

16. $J=\int\limits_{-1}^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx,\ y(-1)=1,\ y(2)=1$.

17. $J=\int\limits_1^L\left(xy'^2+yy'\right)dx,\ y(0)=0,\ y(L)=1$.

18. $J=\int\limits_a^b\left(2xy+(x^2+e^y)y'\right)dx,\ y(a)=A,\ y(b)=B$.

19. $J=\int\limits_0^1\left(e^y+xy'\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=a$.

20. Найти расстояние между: (a) точкой $(0,0)$ и кривой $y=1/x^2$; (b) параболой $y=x^2$ и прямой $y=x-5$; (c) окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$.

4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации: Учеб. пособие – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2005. – 256 с. (6 экз +50 экз на каф. АСУ)
2) Методы оптимизации. Лабораторный практикум: Учеб. пособие / Мицель А.А., Шелестов А.А., Романенко В.В., Клыков В.В. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2004. – 80 с. (6 экз +50 экз на каф. АСУ)
3) Методы оптимизации в примерах и задачах/ Авторы: Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 101 с.
4) Чжун К. Однородные цепи Маркова . – М.: «Мир», 1964.
5) Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978.
6) Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. –М.: Советское радио, 1964.
7) Черепанов О.И. Методы оптимизации: учебное пособие / О. И. Черепанов ; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. - Томск : ТУСУР, 2007. - 203с. (15 экз)
8) Гладких Б. А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики Ч. 1.: учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – 198 с. /http://sun.tsu.ru/mminfo/books/2010/000374996/000374996.djvu (электронное издание djvu 1,0 Mb)
9) Гладких Б. А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики Ч. 2.: учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2011. – 263 с./ http://sun.tsu.ru/mminfo/books/2012/000416882/000416882.pdf (электронное издание Adobe PDF 7,6 M)
10) Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. -М.: Финансы и статистика, 2005.-144 с : ил.
11) Карпенко А.П. Методы оптимизации (базовый курс) [Электронный ресурс]. – режим доступа: http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=MO/base.cou – свободный.
12) Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.