МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
Факультет систем управления
Кафедра автоматизированных систем (АСУ)

А.А. Мицель

Методы оптимизации

Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направления подготовки
09.04.01 – Информатика и вычислительная техника (магистратура)

2016

А.А. Мицель

Методы оптимизации

Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направления *подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника (магистратура)*. – Томск: ТУСУР, 2016 (электр. ресурс). – 33 с.

В пособии приводится описание 3 лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации», приводятся варианты и порядок выполнения работ. Дан пример выполнения лабораторной работы. Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению *Информатика и вычислительная техника (магистратура)*

Содержание

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ И ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Дисциплина "Методы оптимизации" читается в 1 семестре магистратуры и предусматривает чтение лекций, проведение лабораторных и практических работ, выполнение контрольных работ, получение различного рода консультаций.

1. Цели освоения дисциплины Целью курса является освоение основных идей методов, особенностей областей применения и методики использования их как готового инструмента практической работы при проектировании и разработке систем, математической обработке данных технических, организационных и экономических задач, построении алгоритмов и организации вычислительных процессов на ПК. Целью преподавания данной дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний, практических навыков по вопросам, касающимся принятия управленческих решений; освоение студентами современных математических методов анализа, научного прогнозирования поведения технических и экономических объектов, обучение студентов применению моделей и алгоритмов решения специальных задач оптимизации.

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Курс «Методы оптимизации» относится к числу дисциплин общенаучного цикла (базовая часть). Эта дисциплина нацелена на углубленное изучение специальных разделов оптимизационных задач, поэтому успешное овладение дисциплиной предполагает предварительные знания основных разделов дисциплины «Методы оптимизации», изучаемых в рамках бакалавриата. Практические и лабораторные работы выполняются с помощью пакета прикладных программ Mathcad. Освоение этой дисциплины необходимо для изучения таких дисциплин, как «Обработка и анализ данных с помощью нейронных сетей», «Методы решения некорректных», а также для подготовки магистрантов к научным исследованиям и магистерской диссертации.

Основными задачами дисциплины являются:

- Изучение моделей квадратичного программирования.
- Изучение моделей динамического программирования.
- Изучение вариационного исчисления.
- Формирование у студентов знаний и умений, необходимых для эффективного управления техническими, организационными и экономическими системами.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать

- модели квадратичного программирования;
- двойственность задач нелинейного программирования;
- модели динамического программирования;
- основы вариационного исчисления;

Уметь

- создавать модели нелинейного программирования и проводить анализ моделей;
- решать задачи квадратичного программирования;
- создавать оптимизационные модели;
- создавать модели динамического программирования;
- творчески использовать теоретические знания на практике;
- использовать полученные знания для планирования функционирования и развития предприятия и в научных исследованиях.

<u>Владеть</u>

- методами решения задач квадратичного программирования;
- методами решения задач динамического программирования;
- методами решения задач вариационного исчисления;

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение
Понятие операции, классификация моделей исследования

Тема 1. Квадратичное программирование
Задача квадратичного программирования (ЗКП). Условие Куна-Таккера для ЗКП. Метод решения ЗКП с помощью искусственного базиса. Метод решения ЗКП с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений. Задача о дополнительности. Метод решения задач о дополнительности (Д). Алгоритм решения задачи КП Мицеля-Хващевского.

Тема 2. Теория двойственности
Формулировка двойственной задачи. Геометрическая интерпретация двойственной по Лагранжу задачи. Разрыв двойственности. Решение двойственной по Лагранжу задачи. Задачи линейного и квадратичного программирования

Тема 3. Модели динамического программирования

Детерминированные управляемые процессы. Общая постановка задачи динамического программирования, принцип оптимальности и уравнения Беллмана. Задача о распределении средств между предприятиями. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет. Управляемые марковские процессы с доходами.

Тема 4. Вариационное исчисление
Функционалы. Основные понятия. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функционалов. Вариационные задачи с закрепленными концами. Многомерный случай. Уравнения Эйлера-Пуассона

3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторная работа №1. Квадратичное программирование. Оптимальный портфель ценных бумаг

Рассмотрим финансовую операцию, заключающуюся в покупке рискованных ценных бумаг по известной цене и в продаже их в будущем по цене, заранее не известной. Предполагается, что инвестор в настоящий момент времени инвестирует некоторую сумму денег в ценные бумаги. Эти деньги будут инвестированы на определённый промежуток времени, который называют ***периодом владения***. В конце этого периода инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода. Таким образом, в момент $t=0$ инвестор должен принять решение о покупке ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до момента $t=1$. Такую задачу называют ***задачей выбора инвестиционного портфеля***.

Эффективность рискованной ценной бумаги зависит от трех факторов: цены покупки, которая точно известна; промежуточных выплат за период владения (дивидендов), которые точно не известны; цены продажи, которая неизвестна. Таким образом, финансовая операция, заключающаяся в покупке ценной бумаги с целью получения определенного дохода в будущем, является рискованной. Основная гипотеза, которая позволяет анализировать такую операцию, состоит в следующем: предполагаем, что каждое конкретное значение эффективности такой финансовой операции является реализацией случайной величины

$$R=\frac{C_1-C_0+D}{C_0},$$

где C_0 – цена покупки, C_1 – цена продажи, D – дивиденды, выплаченные за период владения.

Формируя портфель ценных бумаг, инвестор хотел бы максимизировать ожидаемую доходность портфеля при минимальном риске. Как правило, эти две цели противоречат друг другу. Принимая решение, инвестор стремится сделать так, чтобы эти две цели были сбалансированы.

Доходность портфеля также является случайной величиной:

$$R_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0},$$

где W_0 – совокупная цена покупки ценных бумаг, входящих в портфель в момент $t = 0$, W_1 – совокупная рыночная цена ценных бумаг в момент $t = 1$ и совокупный денежный доход от этих ценных бумаг (дивиденды), который владелец получит за период владения от момента $t = 0$ до $t = 1$.

Любая случайная величина может характеризоваться двумя параметрами: ожидаемое или среднее значение (математическое ожидание) и стандартное отклонение (среднеквадратичное отклонение).

Согласно рассматриваемой модели, предполагается, что инвестор основывает свое решение по выбору портфеля только на этих двух параметрах. Следовательно, инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого возможного портфеля. Затем он должен выбрать лучший из портфелей, основываясь на соотношении этих двух параметров. При этом ожидаемая доходность рассматривается как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение – как мера риска, связанная с данным портфелем.

Итак, рассмотрим финансовую операцию, которая заключается в покупке ценных бумаг в момент $t = 0$ по известной цене и в продаже их в момент $t = 1$ по цене, заранее не известной. При этом инвестор может рассчитывать на получение промежуточных выплат. Обозначим $m = M(R)$ – ожидаемое значение эффективности ценной бумаги – математическое ожидание случайной величины R (это среднее по всем реализациям (значениям) случайной величины, вычисленное с учетом частоты их возможного появления), $V = M\{(R - m)^2)\}$ – дисперсия или вариация случайной величины – мера отклонения в среднем случайной величины R от ее ожидаемого значения. Часто вместо дисперсии используют среднеквадратичное или стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{V}$.

Ковариация $V_{12} = M\{(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)\}$ характеризует статистическую взаимосвязь двух случайных величин R_1 и R_2.

Риск вложений в конкретные ценные бумаги связан с неопределённостью будущих доходов и, следовательно, с неопределенностью эффективности данной операции. Чем больше стандартное отклонение, тем больше в среднем случайная величина может отклониться от своего ожидаемого значения, тем больше неопределенность и выше риск. С другой стороны, если $\sigma = 0$, то эффективность не отклоняется от своего ожидаемого значения, она принимает определённые не случайные значения, и риск отсутствует. Таким образом, стандартное отклонение характеризует уровень риска, связанный с конкретной ценной бумагой, и принимается в качестве ***меры риска***.

Предположим, что инвестор вкладывает деньги не в один вид ценных бумаг, а

несколько. В этом случае говорят, что инвестор диверсифицирует свой портфель. Рассмотрим эффект такой диверсификации.

Пусть $x_j\,(j = 1, 2, ..., n)$ – доля общего вложения, приходящаяся на j-й вид ценных бумаг; n – количество видов ценных бумаг, которые инвестор включает в портфель. Очевидно, должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Пусть R_p – эффективность портфеля, R_j – эффективность j-й ценной бумаги. Тогда

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j .$$

Ожидаемая эффективность портфеля:

$$m_p = M\{R_p\} = \sum_{j=1}^{n} x_j M\{R_j\} = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j ,$$

где $m_j = M\{R_j\}$ – ожидаемая эффективность j-й ценной бумаги. Отклонение от ожидаемой эффективности

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j (R_j - m_j).$$

Дисперсия эффективности портфеля:

$$V_p = M\{(R_p - m_p)^2\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \text{ ,}$$

где $V_{ij} = M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\}$ – ковариация случайных эффективностей R_i и R_j i-го и j-го видов ценных бумаг. Нетрудно заметить, что

$$V_{jj} = M\{(R_j - m_j)^2\} = \sigma_j^2 .$$

Предположим сначала, что случайные эффективности различных видов ценных бумаг взаимно некоррелированы. Это означает, что $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда вариация портфеля и стандартное отклонение равны:

$$V_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2 \text{ , } \sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2} \text{ .}$$

Величина V_p (или σ_p) характеризует неопределенность портфеля в целом и

называется ***риском портфеля***.

Основные предположения, принимаемые при построении модели оптимизации портфеля.

1. Инвесторы производят оценку инвестиционных портфелей, основываясь на ожидаемых доходностях и их стандартных отклонениях за период владения.
2. При выборе между двумя портфелями инвесторы предпочтут тот, который при прочих равных условиях даёт наибольшую ожидаемую доходность.
3. При выборе между двумя портфелями инвестор предпочтет тот, который при прочих равных условиях имеет наименьшее стандартное отклонение.
4. Частные активы бесконечно делимы. Это значит, что инвестор при желании может купить часть акции.
5. Налоги и операционные издержки несущественны.

При этих предположениях можно сформулировать следующую оптимизационную задачу: определить доли вложений x_j ($j = 1, 2, ..., n$) минимизирующие вариацию (риск) портфеля

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j ,$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля

$$m_p = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j .$$

Кроме того, должны быть выполнены дополнительные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0$$

при всех $j = 1, 2, ..., n$.

Данная задача с учетом последнего ограничения называется задачей квадратичного программирования.

Задание

1. Выберите 5 акций различных компаний. Найдите в интернете котировки этих акций за последние 24 месяца (котировки можно найти на сайте www.finam.ru в разделе «Экспорт»). Рассчитайте ежемесячные доходности, Построить график доходностей. Рассчитать средние значения и матрицу ковариации.

   Рекомендации: Взять цену открытия в начале месяца и цену закрытия в конце месяца. После этого рассчитайте доходность R за каждый месяц для каждого вида акции, а затем – среднее значение доходности для каждого вида акций m_j, дисперсию σ_j^2 и матрицу ковариации V_{ij}.
2. Сформируйте оптимальный портфель на один месяц, считая, что продажа будет выполнена в следующем месяце, используя средние значения котировок за каждый месяц (дивиденды не выплачиваются, и поэтому их величина не учитывается).
3. Предполагая, что вы решили купить 100 акций, напишите, какое количество акций каждой компании вы приобретете (согласно полученному оптимальному портфелю) и за какую цену вы купите

ваш портфель.

Лабораторная работа №2. Динамическое программирование

Задание (для вариантов 1-8)

Общая сумма в 4 млн. руб. распределяются между тремя предприятиями в количествах, кратных 1 млн. руб. В результате выделения средств k- му предприятию в размере u оно дает доход $J_k(u)$, $k = 1,2,3$, величина которого может быть найдена из таблицы 1.

Используя метод динамического программирования, определить такой план распределения средств между предприятиями, при котором суммарный доход максимален.

1) Решить задачу «вручную». Описать действия, производимые на каждом этапе. Промежуточные результаты свести в общую таблицу.
2) В среде MathCAD напишите программу расчета средств, которые необходимо выделить каждому предприятию. Исходные данные для программы: число предприятий k, количество вариантов вложений в проект, матрица полученного дохода при заданном вложении.

Вариант 1

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	5	9	11	12
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	7	9	10	11

Пусть общая сумма увеличилась на 1 млн. руб. Добавьте еще один вариант вложения (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	5	9	11	12	14

$J_2(u)$	0	4	8	12	14	15
$J_3(u)$	0	7	9	10	11	12

Вариант 2

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	6	10	12	13
$J_2(u)$	0	4	9	11	14
$J_3(u)$	0	7	10	11	12

Пусть общая сумма увеличилась на 1 млн. руб. Добавьте еще один вариант вложения (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	6	10	12	13	15
$J_2(u)$	0	4	9	11	14	16
$J_3(u)$	0	7	10	11	12	13

Вариант 3

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	7	9	11	12
$J_2(u)$	0	5	8	14	16
$J_3(u)$	0	8	9	10	11

Пусть общая сумма увеличилась на 1 млн. руб. Добавьте еще один вариант вложения (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5

$J_1(u)$	0	7	9	11	12	14
$J_2(u)$	0	5	8	14	16	17
$J_3(u)$	0	8	9	10	11	12

Вариант 4

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	6	11	12	14
$J_2(u)$	0	4	9	13	16
$J_3(u)$	0	8	10	11	12

Пусть общая сумма увеличилась на 1 млн. руб. Добавьте еще один вариант вложения (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	6	11	12	14	15
$J_2(u)$	0	4	9	13	16	18
$J_3(u)$	0	8	10	11	12	13

Вариант 5

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	6	10	12	13
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	8	10	11	12

Пусть общая сумма увеличилась на 1 млн. руб. Добавьте еще один вариант вложения (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	6	10	12	13	15
$J_2(u)$	0	4	8	12	14	17
$J_3(u)$	0	8	10	11	12	14

Вариант 6

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	6	10	12	13
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	8	10	11	12

Пусть дополнительно имеется еще одно предприятие с функцией дохода $J_4(u)$ (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	6	10	12	13
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	8	10	11	12
$J_4(u)$	0	5	9	13	15

Вариант 7

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	6	9	11	12
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	7	9	10	11

Пусть дополнительно имеется еще одно предприятие с функцией дохода $J_4(u)$ (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	6	9	11	12	14
$J_2(u)$	0	4	8	12	14	16
$J_3(u)$	0	7	9	10	11	12
$J_4(u)$	0	5	7	9	13	15

Вариант 8

Таблица 1.

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	5	9	12	13
$J_2(u)$	0	4	9	11	14
$J_3(u)$	0	7	10	11	12

Пусть дополнительно имеется еще одно предприятие с функцией дохода $J_4(u)$ (Таблица 2).

Таблица 2

u	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	5	9	12	13	15
$J_2(u)$	0	4	9	11	14	16
$J_3(u)$	0	7	10	11	12	13
$J_4(u)$	0	6	8	10	11	14

Задание (для вариантов 9-12)

Планируется производство на двух предприятиях в течение N лет. Начальные средства, предназначенные для выделения предприятиям, составляют S руб. Средства в размере u руб., вложенные в производство на 1-

ом предприятии в начале каждого года, приносят к концу этого года доход $J_1(u)$ руб и возвращаются в размере $f_1(u) < u$; аналогично, средства u, вложенные в предприятие 2, дают доход $J_2(u)$ руб и возвращаются в размере $f_2(u) < u$. По истечении каждого года все оставшиеся средства заново перераспределяются между предприятиями, новых средств не поступает и доход в производство не вкладывается..

Используя метод динамического программирования, найти такой способ распределения средств предприятиям, при котором суммарный доход двух предприятий за N лет будет максимальным.

1) Решить задачу «вручную». Описать действия, производимые на каждом этапе.
2) В среде MathCAD напишите программу расчета средств, которые необходимо выделить каждому предприятию.

Решить задачу при исходных данных, соответствующих вашему варианту.

Вариант	S	n	$J_1(u)$	$f_1(u)$	$J_2(u)$	$f_2(u)$
9	10000	4	$0,4u$	$0,5u$	$0,3u$	$0,8u$
10	12000	4	$0,4u$	$0,6u$	$0,3u$	$0,7u$
11	15000	4	$0,4u$	$0,5u$	$0,2u$	$0,6u$
12	20000	4	$0,5u$	$0,6u$	$0,3u$	$0,9u$

Задание (для вариантов 13-15)

Составить оптимальный план ежегодного распределения средств между двумя предприятиями в течение трехлетнего планового периода при следующих условиях: 1) начальная сумма составляет $S = 400$; 2) вложенные средства в размере u приносят на предприятии 1 доход $J_1(u)$ и возвращаются в размере 60% от u, а на предприятии 2 – соответственно $J_2(u)$ и 20%; 3) ежегодно распределяются все наличные средства, получаемые из возвращенных средств; 4) функции $J_1(u)$ и $J_2(u)$ заданы в табл. 1.

1) Решить задачу «вручную». Описать действия, производимые на каждом этапе.

2) В среде MathCAD напишите программу расчета средств, которые необходимо выделить каждому предприятию.

Вариант 13

Таблица 1

u	50	100	150	200	250	300	350	400
$J_1(u)$	6	10	15	26	28	38	45	49
$J_2(u)$	8	12	20	28	35	40	46	48

Вариант 14

Таблица 1

u	50	100	150	200	250	300	350	400
$J_1(u)$	7	11	14	27	28	38	45	50
$J_2(u)$	8	13	20	28	35	42	46	47

Вариант 15

Таблица 1

u	50	100	150	200	250	300	350	400
$J_1(u)$	5	9	15	25	30	38	46	52
$J_2(u)$	7	13	22	29	36	40	47	49

Задание (для вариантов 16-18)

Планируемый период разделен на N промежутков времени, в которых задан расход d_k $(k = 1, 2, ..., N)$, производимый в конце каждого из промежутков. Известны начальный уровень запасов X_0 и зависимость суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от уровня хранимых запасов и их пополнения. Известен также конечный уровень запасов X_N.

Требуется определить размеры пополнения запасов в каждом промежутке времени для удовлетворения заданного расхода из условия минимизации суммарных затрат за весь планируемый период времени.

Затраты не зависят от промежутка времени состоят из двух слагаемых:

$$J(x^{(k-1)}, u^{(k)}) = \varphi_k + \psi_k\,,$$

где $\varphi(x^{(k-1)})$ – затраты на хранение; ψ_k – затраты на пополнение

$$\varphi_k = 0.1x^{(k-1)} + 0.05u^{(k)},$$

$$\psi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } u^{(k)} = 0, \\ 6 + 0.04u^{(k)} & \text{при } 0 < u^{(k)} < 150 \\ 12 + 0.16u^{(k)} & \text{при } 150 \le u^{(k)} \end{cases}$$

1) Решить задачу «вручную». Описать действия, производимые на каждом этапе.
2) В среде MathCAD напишите программу расчета размера пополнения запаса в каждом промежутке времени.

Решить задачу при исходных данных, соответствующих вашему варианту.

Вариант	N	X_0	X_N	d_1	d_2	d_3
16	3	100	30	150	50	100
17	3	150	80	200	100	150
18	3	120	50	170	70	130

Задание (для вариантов 19-20)

Планируемый период разделен на N промежутков времени, в которых задан расход d_k $(k = 1, 2, ..., N)$, производимый в конце каждого из промежутков. Известны начальный уровень запасов X_0 и зависимость суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от уровня хранимых запасов и их пополнения. Известен также конечный уровень запасов X_N.

Определить оптимальное пополнение запасов в течение четырех периодов при следующих условиях.

Пополнение запасов может производиться партиями, кратными 50; функции затрат на хранение $\varphi(x^{(k-1)} + 0.5u^{(k)})$ и на пополнение $\psi(u^{(k)})$ не зависят от промежутка времени и заданы в табл. 1.

1) Решить задачу «вручную». Описать действия, производимые на каждом этапе.

2) В среде MathCAD напишите программу расчета размера пополнения запаса в каждом промежутке времени.

Вариант 19

Таблица 1

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$\varphi(t)$	0	3	8	15	30	40	49	55	58	60	62	64	65
$\psi(t)$	0	–	22	–	32	–	35	–	50	–	70	–	90

$N = 4;\ X_0 = 100;\ X_N = 0;\ d_1 = 150,\ d_2 = 50,\ d_3 = d_4 = 100.$

Вариант 20

Таблица 1

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$\varphi(t)$	0	2	7	15	32	40	50	55	58	61	62	65	67
$\psi(t)$	0	–	22	–	33	–	35	–	45	–	60	–	80

$N = 4;\ X_0 = 150;\ X_N = 50;\ d_1 = 200,\ d_2 = 100,\ d_3 = d_4 = 150.$

Лабораторная работа №3. Вариационное исчисление

1. Задача о брахистохроне (линии наибыстрейшего ската). В вертикальной плоскости даны точки *A* и *B*. Определить путь, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки *A*, достигнет точку *B* в кратчайшее время.

2. Задача о минимальной поверхности вращения. Найти плоскую кривую, соединяющую две заданные точки плоскости и лежащую выше оси *x*, которая при вращении вокруг этой оси образует поверхность наименьшей площади.

3. Задача о цепной линии. Найти форму тяжелой однородной нерастяжимой нити, подвешенной за концы.

4. Найти форму мыльной пленки, натянутой на каркас, состоящий из двух параллельных дисков радиусов *r* и *R*, центры которых соединены осью длины L, ортогональной дискам.

5. Задача Дидоны. Найти кривую заданной длины L, проходящую через точки *A* и *B* оси *x* (*AB* < L), ограничивающую вместе с осью *x* наибольшую площадь.

6. Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой *y* = *y*(*x*), соединяющей точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, со скоростью $v = k \cdot y'$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки M_0 в точку M_1 будет минимальным.

4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации: Учеб. пособие – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2005. – 256 с. (6 экз +50 экз на каф. АСУ)
2) Методы оптимизации. Лабораторный практикум: Учеб. пособие / Мицель А.А., Шелестов А.А., Романенко В.В., Клыков В.В. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2004. – 80 с. (6 экз +50 экз на каф. АСУ)
3) Черепанов О.И. Учебное пособие / О. И. Черепанов ; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. - Томск : ТУСУР, 2007. - 203с. (15 экз)
4) Есипов Б.А. Методы исследования операций: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 256с. (электр. ресурс). – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/144/
5) Методы оптимизации в примерах и задачах/ Авторы: Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 101 с.
6) Гладких Б. А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики Ч. 1.: учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – 198 с. /http://sun.tsu.ru/mminfo/books/2010/000374996/000374996.djvu (электронное издание djvu 1,0 Mb)
7) Гладких Б. А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики Ч. 2.: учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2011. – 263 с./ http://sun.tsu.ru/mminfo/books/2012/000416882/000416882.pdf (электронное издание Adobe PDF 7,6 M)
8) Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. -М.: Финансы и статистика, 2005.-144 с : ил.
9) Карпенко А.П. Методы оптимизации (базовый курс) [Электронный ресурс]. – режим доступа: http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=MO/base.cou – свободный.

Приложение
Пример отчета по лабораторной работе

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет систем управления (ФСУ)
Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

Квадратичное программирование. Оптимальный портфель ценных бумаг

Отчет по лабораторной работе № 1 по дисциплине
«Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент гр.XXXX
Иванов И.И. ____________________

Проверил:
профессор Мицель А.А. __________
« »__________2015г.

Томск 2015

1. Основы теории формирования портфеля ценных бумаг

Рассмотрим финансовую операцию, заключающуюся в покупке рискованных ценных бумаг по известной цене и в продаже их в будущем по цене, заранее не известной. Предполагается, что инвестор в настоящий момент времени инвестирует некоторую сумму денег в ценные бумаги. Эти деньги будут инвестированы на определённый промежуток времени, который называют ***периодом владения***. В конце этого периода инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода. Таким образом, в момент $t = 0$ инвестор должен принять решение о покупке ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до момента $t = 1$. Такую задачу называют ***задачей выбора инвестиционного портфеля***.

Эффективность рискованной ценной бумаги зависит от трех факторов: цены покупки, которая точно известна; промежуточных выплат за период владения (дивидендов), которые точно не известны; цены продажи, которая неизвестна. Таким образом, финансовая операция, заключающаяся в покупке ценной бумаги с целью получения определенного дохода в будущем, является рискованной. Основная гипотеза, которая позволяет анализировать такую операцию, состоит в следующем: предполагаем, что каждое конкретное значение эффективности такой финансовой операции является реализацией случайной величины

$$R = \frac{C_1 - C_0 + D}{C_0},$$

где C_0 – цена покупки, C_1 – цена продажи, D – дивиденды, выплаченные за период владения.

Формируя портфель ценных бумаг, инвестор хотел бы максимизировать ожидаемую доходность портфеля при минимальном риске. Как правило, эти две цели противоречат друг другу. Принимая решение, инвестор стремится сделать так, чтобы эти две цели были сбалансированы.

Доходность портфеля также является случайной величиной:

$$R_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0},$$

где W_0 – совокупная цена покупки ценных бумаг, входящих в портфель в момент $t = 0$, W_1 – совокупная рыночная цена ценных бумаг в момент $t = 1$ и совокупный денежный доход от этих ценных бумаг (дивиденды), который владелец получит за период владения от момента $t = 0$ до $t = 1$.

Любая случайная величина может характеризоваться двумя параметрами: ожидаемое или среднее значение (математическое ожидание) и стандартное отклонение (среднеквадратичное отклонение).

Согласно рассматриваемой модели, предполагается, что инвестор основывает свое решение по выбору портфеля только на этих двух параметрах. Следовательно, инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого возможного портфеля. Затем он должен выбрать лучший из портфелей, основываясь на соотношении этих двух параметров. При этом ожидаемая доходность рассматривается как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение – как мера риска, связанная с данным портфелем.

Итак, рассмотрим финансовую операцию, которая заключается в покупке ценных бумаг в момент $t = 0$ по известной цене и в продаже их в момент $t = 1$ по цене, заранее не известной. При этом инвестор может рассчитывать на получение промежуточных выплат. Обозначим $m = M(R)$ – ожидаемое значение эффективности ценной бумаги – математическое ожидание случайной величины R (это среднее по всем реализациям (значениям) случайной величины, вычисленное с учетом частоты их возможного появления), $V = M\{(R - m)^2)\}$ – дисперсия или вариация случайной величины – мера отклонения в среднем случайной величины R от ее ожидаемого значения. Часто вместо дисперсии используют среднеквадратичное или стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{V}$.

Ковариация $V_{12} = M\{(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)\}$ характеризует статистическую взаимосвязь двух случайных величин R_1 и R_2.

Риск вложений в конкретные ценные бумаги связан с неопределённостью будущих доходов и, следовательно, с неопределенностью эффективности данной операции. Чем больше стандартное отклонение, тем больше в среднем случайная величина может отклониться от своего ожидаемого значения, тем больше неопределенность и выше риск. С другой стороны, если $\sigma = 0$, то эффективность не отклоняется от своего ожидаемого значения, она принимает определённые не случайные значения, и риск отсутствует. Таким образом, стандартное отклонение характеризует уровень риска, связанный с конкретной ценной бумагой, и принимается в качестве ***меры риска***.

Предположим, что инвестор вкладывает деньги не в один вид ценных бумаг, а

несколько. В этом случае говорят, что инвестор диверсифицирует свой портфель. Рассмотрим эффект такой диверсификации.

Пусть $x_j \; (j = 1, 2, ..., n)$ – доля общего вложения, приходящаяся на j-й вид ценных бумаг; n – количество видов ценных бумаг, которые инвестор включает в портфель. Очевидно, должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Пусть R_p – эффективность портфеля, R_j – эффективность j-й ценной бумаги. Тогда

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j .$$

Ожидаемая эффективность портфеля:

$$m_p = M\{R_p\} = \sum_{j=1}^{n} x_j M\{R_j\} = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j ,$$

где $m_j = M\{R_j\}$ – ожидаемая эффективность j-й ценной бумаги. Отклонение от ожидаемой эффективности

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j (R_j - m_j).$$

Дисперсия эффективности портфеля:

$$V_p = M\{(R_p - m_p)^2\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j ,$$

где $V_{ij} = M\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\}$ – ковариация случайных эффективностей R_i и R_j i-го и j-го видов ценных бумаг. Нетрудно заметить, что

$$V_{jj} = M\{(R_j - m_j)^2\} = \sigma_j^2 .$$

Предположим сначала, что случайные эффективности различных видов ценных бумаг взаимно некоррелированы. Это означает, что $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда вариация портфеля и стандартное отклонение равны:

$$V_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2 , \; \sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2} .$$

Величина V_p (или σ_p) характеризует неопределенность портфеля в целом и называется ***риском портфеля***.

Основные предположения, принимаемые при построении модели оптимизации портфеля.

6. Инвесторы производят оценку инвестиционных портфелей, основываясь на ожидаемых доходностях и их стандартных отклонениях за период владения.
7. При выборе между двумя портфелями инвесторы предпочтут тот, который при прочих равных условиях даёт наибольшую ожидаемую доходность.
8. При выборе между двумя портфелями инвестор предпочтет тот, который при прочих равных условиях имеет наименьшее стандартное отклонение.
9. Частные активы бесконечно делимы. Это значит, что инвестор при желании может купить часть акции.
10. Налоги и операционные издержки несущественны.

При этих предположениях можно сформулировать следующую оптимизационную задачу: определить доли вложений x_j ($j = 1,2,...,n$) минимизирующие вариацию (риск) портфеля

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j ,$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля

$$m_p = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j .$$

Кроме того, должны быть выполнены дополнительные ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \; x_j \ge 0$$

при всех $j = 1, 2, ..., n$.

Данная задача с учетом последнего ограничения называется задачей квадратичного программирования.

2. Задание

1. Выберите 5 акций различных компаний. Найдите в интернете котировки этих акций за последние 24 месяца (котировки можно найти на сайте www.finam.ru в разделе «Экспорт»). Рассчитайте ежемесячные доходности, Построить график доходностей. Рассчитать средние значения и матрицу ковариации.

   Рекомендации: Взять цену открытия в начале месяца и цену закрытия в конце месяца. После этого рассчитайте доходность R за каждый месяц для каждого вида акции, а затем – среднее значение доходности для каждого вида акций m_j, дисперсию σ_j^2 и матрицу ковариации V_{ij}.

2. Сформируйте оптимальный портфель на один месяц, считая, что продажа будет выполнена в следующем месяце, используя средние значения котировок за каждый месяц (дивиденды не выплачиваются, и поэтому их величина не учитывается).

1. Предполагая, что вы решили купить 100 акций, напишите, какое количество акций каждой компании вы приобретете (согласно полученному оптимальному портфелю) и за какую цену вы купите ваш портфель.

3.Практическая реализация

a. Задание 1. Выбор ценных бумаг и расчет статистических характеристик

Ниже приведены цены открытия и закрытия 5 акций различных компаний и ежемесячные доходности (iМедиахолд, РБК ао, Телеграф, Ростелеком, СТС Медиа).

iМедиахолд		
<OPEN>	<CLOSE>	Rp
0,7391000	0,6970000	-0,056961169
0,6900000	0,6576000	-0,046956522
0,6501000	0,6343000	-0,024303953
0,6341000	0,5198000	-0,18025548
0,5189000	0,4734000	-0,087685489
0,4700000	0,3959000	-0,157659574
0,3897000	0,4594000	0,17885553
0,4558000	0,4400000	-0,034664326
0,4499000	0,4600000	0,022449433
0,4506000	0,4298000	-0,046160675
0,4150000	0,3393000	-0,182409639
0,3119000	0,3069000	-0,016030779
0,3009000	0,2245000	-0,253904952
0,2211000	0,2030000	-0,08186341
0,2022000	0,1228000	-0,392680514
0,1208000	0,1167000	-0,033940397
0,1160000	0,1194000	0,029310345
0,1199000	0,1870000	0,559633028
0,1850000	0,1690000	-0,086486486
0,1680000	0,1265000	-0,24702381
0,1245000	0,1030000	-0,172690763
0,1010000	0,1275000	0,262376238
0,1290000	0,1850000	0,434108527
0,1850000	0,1710000	-0,075675676
0,1710000	0,1835000	0,073099415

РБК ао		
<OPEN>	<CLOSE>	Rp
10,9210000	8,1700000	-0,2519000
8,2020000	7,9990000	-0,0247501
7,9000000	8,3670000	0,0591139
8,3200000	8,0940000	-0,0271635
8,0300000	7,4640000	-0,0704857
7,6600000	6,9800000	-0,0887728
6,9640000	6,2990000	-0,0954911
6,2980000	6,1250000	-0,0274690
6,1020000	5,6400000	-0,0757129
5,5700000	5,8000000	0,0412926
5,8000000	5,0000000	-0,1379310
4,8960000	4,5700000	-0,0665850
4,5900000	3,9400000	-0,1416122
3,9900000	4,2790000	0,0724311
4,3290000	4,5210000	0,0443520
4,5030000	4,0600000	-0,0983789
4,0510000	4,1880000	0,0338188
4,2000000	3,9200000	-0,0666667
3,9300000	4,4050000	0,1208651
4,3900000	4,2150000	-0,0398633
4,2600000	3,6050000	-0,1537559
3,6200000	4,0150000	0,1091160
4,0650000	7,0000000	0,7220172
6,9950000	5,6050000	-0,1987134
5,5550000	6,3800000	0,1485149

Телеграф		
<OPEN>	<CLOSE>	Rp
19,5000000	15,6000000	-0,2000000
14,1000000	15,6880000	0,1126241
15,5000000	15,0000000	-0,0322581
15,6000000	15,4090000	-0,0122436
16,0000000	14,3610000	-0,1024375
14,5000000	13,8550000	-0,0444828
13,8550000	13,9000000	0,0032479
13,6500000	14,2000000	0,0402930
14,0000000	15,9900000	0,1421429
14,7010000	10,9000000	-0,2585538
10,5000000	10,1020000	-0,0379048
10,2000000	12,0000000	0,1764706
11,6010000	11,0060000	-0,0512887
10,8100000	11,0010000	0,0176688
12,2500000	10,6500000	-0,1306122
10,8020000	11,4000000	0,0553601
11,2000000	11,0200000	-0,0160714
11,0200000	11,3000000	0,0254083
11,0000000	11,1000000	0,0090909
11,0000000	10,5500000	-0,0409091
10,5500000	12,6000000	0,1943128
12,9000000	14,2500000	0,1046512
12,8000000	13,5500000	0,0585938
12,6000000	14,4000000	0,1428571
14,9500000	14,0000000	-0,0635452

Ростелеком		
<OPEN>	<CLOSE>	Rp
23,3000000	22,4000000	-0,0386266
22,6000000	19,0000000	-0,1592920
18,4800000	16,0400000	-0,1320346
16,2000000	20,3600000	0,2567901
20,2900000	18,5300000	-0,0867422
18,3900000	18,9000000	0,0277325
19,0100000	21,7800000	0,1457128
21,8000000	19,2800000	-0,1155963
19,4600000	20,6100000	0,0590956
20,2300000	18,7700000	-0,0721700
18,8500000	16,5100000	-0,1241379
16,4900000	14,3400000	-0,1303820
18,0000000	12,7000000	-0,2944444
12,7000000	14,2400000	0,1212598
14,5900000	15,1000000	0,0349554
14,9300000	14,7500000	-0,0120563
14,7100000	15,9500000	0,0842964
15,8300000	16,4400000	0,0385344
15,9300000	14,8800000	-0,0659134
14,8900000	12,8500000	-0,1370047
12,1000000	9,0500000	-0,2520661
8,7200000	7,2900000	-0,1639908
7,3600000	8,8200000	0,1983696
8,8200000	8,0400000	-0,0884354
8,0500000	8,6000000	0,0683230

СТС Медиа		
<OPEN>	<CLOSE>	Rp
11,7400000	12,4900000	0,0638842
12,3700000	11,9400000	-0,0347615
12,0600000	11,1200000	-0,0779436
11,4200000	11,0950000	-0,0284588
11,1000000	10,7200000	-0,0342342
11,2200000	10,5000000	-0,0641711
10,3600000	12,6400000	0,2200772
12,6500000	12,6350000	-0,0011858
12,6900000	13,8950000	0,0949567
13,7100000	11,4400000	-0,1655726
11,5100000	10,5200000	-0,0860122
10,0100000	9,2000000	-0,0809191
9,2800000	8,6950000	-0,0630388
8,6100000	10,1650000	0,1806039
10,2500000	11,0100000	0,0741463
11,0050000	9,7000000	-0,1185825
9,7000000	9,0600000	-0,0659794
9,0700000	6,6500000	-0,2668137
6,6000000	6,3500000	-0,0378788
6,3600000	5,9700000	-0,0613208
5,9200000	4,8750000	-0,1765203
4,8800000	3,7500000	-0,2315574
3,7800000	4,2400000	0,1216931
4,2500000	3,9700000	-0,0658824
3,9600000	3,9700000	0,0025253

Расчет статистических характеристик ценных бумаг

$$R_0 := \begin{array}{c}\text{iМедиахолд}\\ \begin{pmatrix} -0.0569611689893114 \\ -0.0469565217391304 \\ -0.0243039532379634 \\ -0.180255480208169 \\ -0.0876854885334362 \\ -0.157659574468085 \\ 0.178855529894791 \\ -0.0346643264589732 \\ 0.0224494332073794 \\ -0.0461606746560142 \\ -0.182409638554217 \\ -0.0160307790958641 \\ -0.253904951811233 \\ -0.0818634102216191 \\ -0.392680514342235 \\ -0.0339403973509934 \\ 0.0293103448275862 \\ 0.559633027522936 \\ -0.0864864864864864 \\ -0.24702380952381 \\ -0.172690763052209 \\ 0.262376237623762 \\ 0.434108527131783 \\ -0.0756756756756756 \\ 0.0730994152046783 \end{pmatrix}\end{array}
\quad R_1 := \begin{array}{c}\text{РБК ао}\\ \begin{pmatrix} -0.251900009156671 \\ -0.0247500609607413 \\ 0.059113924050633 \\ -0.0271634615384616 \\ -0.0704856787048567 \\ -0.0887728459530026 \\ -0.0954910970706491 \\ -0.0274690377897745 \\ -0.0757128810226156 \\ 0.0412926391382405 \\ -0.137931034482759 \\ -0.0665849673202614 \\ -0.14161220043573 \\ 0.0724310776942355 \\ 0.0443520443520444 \\ -0.0983788585387521 \\ 0.0338188101703282 \\ -0.0666666666666667 \\ 0.120865139949109 \\ -0.0398633257403189 \\ -0.153755868544601 \\ 0.109116022099447 \\ 0.722017220172202 \\ -0.198713366690493 \\ 0.148514851485149 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$R_2 := \begin{array}{c}\text{Телеграф}\\ \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.112624113475177 \\ -0.032258064516129 \\ -0.0122435897435897 \\ -0.1024375 \\ -0.0444827586206896 \\ 0.0032479249368459 \\ 0.0402930402930402 \\ 0.142142857142857 \\ -0.258553839874838 \\ -0.0379047619047619 \\ 0.176470588235294 \\ -0.0512886820101716 \\ 0.017668825161887 \\ -0.130612244897959 \\ 0.0553601184965748 \\ -0.0160714285714285 \\ 0.0254083484573504 \\ 0.00909090909090906 \\ -0.0409090909090908 \\ 0.194312796208531 \\ 0.104651162790698 \\ 0.05859375 \\ 0.142857142857143 \\ -0.0635451505016722 \end{pmatrix}\end{array}
\quad R_3 := \begin{array}{c}\text{Ростелеком}\\ \begin{pmatrix} -0.0386266094420602 \\ -0.15929203539823 \\ -0.132034632034632 \\ 0.25679012345679 \\ -0.0867422375554459 \\ 0.0277324632952691 \\ 0.145712782745923 \\ -0.115596330275229 \\ 0.0590955806783144 \\ -0.0721700444883836 \\ -0.124137931034483 \\ -0.130382049727107 \\ -0.294444444444445 \\ 0.121259842519685 \\ 0.0349554489376285 \\ -0.0120562625586068 \\ 0.0842963970088374 \\ 0.038534428300695 \\ -0.0659133709981167 \\ -0.137004701141706 \\ -0.252066115702479 \\ -0.163990825688073 \\ 0.198369565217391 \\ -0.08843537414966 \\ 0.0683229813664595 \end{pmatrix}\end{array}
\quad R_4 := \begin{array}{c}\text{СТС Медиа}\\ \begin{pmatrix} 0.0638841567291312 \\ -0.0347615198059822 \\ -0.0779436152570482 \\ -0.0284588441330998 \\ -0.0342342342342341 \\ -0.0641711229946525 \\ 0.22007722007722 \\ -0.00118577075098819 \\ 0.094956658786446 \\ -0.165572574762947 \\ -0.0860121633362294 \\ -0.080919080919081 \\ -0.0630387931034482 \\ 0.180603948896632 \\ 0.0741463414634146 \\ -0.118582462517038 \\ -0.0659793814432988 \\ -0.266813671444322 \\ -0.0378787878787879 \\ -0.0613207547169812 \\ -0.17652027027027 \\ -0.23155737704918 \\ 0.121693121693122 \\ -0.0658823529411764 \\ 0.00252525252525258 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$M(R) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..4 \\ \quad m_i \leftarrow \dfrac{\sum_{t=0}^{23} (R_i)_t}{24} \\ m \end{array} \right.$$

$$m := M(R)$$

$$m = \begin{pmatrix} -0.02877585476 \\ -0.01509352012 \\ 0.00649831734 \\ -0.03775609719 \\ -0.03772797208 \end{pmatrix}$$

$$Vij(m, R) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..4 \\ \quad \text{for } j \in 0..4 \\ \qquad v_{i,j} \leftarrow \dfrac{\sum_{t=0}^{11} \left[\left[(R_i)_t - m_i\right] \cdot \left[(R_j)_t - m_j\right]\right]}{23} \\ v \end{array} \right.$$

$$v := Vij(m, R)$$

$$v = \begin{pmatrix} 0.00495695157 & 0.00083823733 & 0.00170500169 & 0.00034098118 & 0.00295220412 \\ 0.00083823733 & 0.00441440775 & 0.00123449392 & -0.00076093884 & -0.00233514911 \\ 0.00170500169 & 0.00123449392 & 0.00829959044 & -0.00023753916 & 0.00125076335 \\ 0.00034098118 & -0.00076093884 & -0.00023753916 & 0.00797530179 & 0.00321941053 \\ 0.00295220412 & -0.00233514911 & 0.00125076335 & 0.00321941053 & 0.00516059235 \end{pmatrix}$$

b. Задание 2. Формирование оптимального портфеля

$x_4 := 0 \qquad n := 4$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \left(v_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j\right) \qquad mp := 0.006$$

Given

$$mp = \sum_{j=0}^{n} \left(m_j \cdot x_j\right)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$$

$x \geq 0$

$a := \text{Minimize}(f, x)$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.02307922277 \\ 0.97691964494 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(a) = 0.00797891515$

$\sqrt{f(a)} = 0.08932477346$

c. Задание 3. Расчет количества акций каждой компании

$z := a \cdot 100$

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.30792227667 \\ 97.69196449356 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$rbk := z_1 \cdot 6.38 = 14.72454412513$

$tel := z_2 \cdot 14 = 1367.68750290987$

Общая стоимость портфеля:

$sum := rbk + tel = 1382.412047035$ руб

Вывод: Согласно полученному оптимальному портфелю, мы приобретем в компании Телеграф 97.7 акций, а в компании РБК 2.3 акций. Отсюда следует что, используя цены закрытия предыдущего периода, мы купим наш портфель акций за 1382,4 руб.