Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

А. Г. Карпов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

Томск
2016

УДК 519.876(075.8)
ББК 32.817в641.я73
К 265

Рецензенты:

В. М. Зюзьков, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., профессор кафедры компьютерных систем в управлении и проектировании ТУСУР, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации;
Г. Н. Решетникова, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Национального исследовательского Томского государственного университета.

Карпов А. Г.
К 265 Математические основы теории систем : учебное пособие / А. Г. Карпов. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2016. – 230 с.

В учебном пособии даны общие понятия, термины и определения теории систем и системного анализа. Рассмотрены математическое описание и методы исследования различных классов систем: дискретных, непрерывных и дискретно-непрерывных. Приведено описание систем как в виде уравнений высокого порядка, так и в форме уравнений состояния в матричной форме.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов, бакалавров и магистров «Управление в технических системах» и «Информатика и вычислительная техника», а также может быть использовано студентами других направлений и специальностей, аспирантами и инженерами.

Содержание

Предисловие

Данное учебное пособие составлено на основе существенно переработанных, дополненных и исправленных учебных пособий [1] и [2]. Также при написании пособия был учтен многолетний опыт автора по преподаванию одноименного курса в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники.

Курс «Математические основы теории систем» предваряет изучение таких дисциплин, как «Теория управления», «Цифровые системы автоматического управления», «Технические средства автоматизации и управления», «Моделирование систем управления», и некоторых других. В этом курсе продолжается углубленное изучение тех разделов математики, которые непосредственно связаны с описанием и исследованием динамических систем.

Ввиду ограниченности объема учебного пособия неизбежно и сознательно были исключены некоторые чрезвычайно важные темы, такие как стохастика (этот недостаток частично ликвидирован в книге [3] при изучении теории автоматического управления) и описание цифровых систем дискретными уравнениями состояния (соответствующие разделы можно изучить по [4]).

Введение

В главе 1 даются общие определения, термины и понятия теории систем и системного анализа. Подробное исследование этой темы проведено в [5]. Также в главе 1 приведена классификация моделей и систем и дается общая математическая модель динамической системы. Важным моментом этой модели является описание входных, выходных и внутренних переменных системы. Если упомянутые переменные берутся из *конечных* множеств возможных значений, описание соответствующих систем осуществляется в рамках *теории конечных автоматов*. Описание систем в рамках этой теории приведено в главе 2.

Если переменные в системе зависят от моментов времени, принадлежащих континуальному (непрерывному) множеству, система может быть описана дифференциальными уравнениями. Общие свойства, виды и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в главе 3. Здесь изложены как классические методы, так и методы интегральных преобразований.

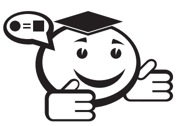
Если переменные в системе зависят от дискретных моментов времени, то получаем описание систем в виде *разностных* уравнений (импульсные или дискретные системы). В главе 4 приведены общие свойства и методы решения таких уравнений (как классические, так и методы преобразования).

Альтернативной формой представления информации о системах является матричная форма. При такой форме представления информации исследование свойств систем сводится к выяснению свойств матриц. Основные виды, свойства и методы преобразования векторов и матриц приведены в главе 5.

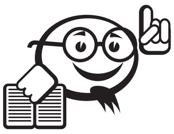
Описание систем в пространстве состояний векторно-матричными дифференциальными уравнениями изложено в главе 6. Здесь приведены методы и формы решения как стационарных, так и нестационарных обыкновенных дифференциальных векторно-матричных уравнений состояния.

Соглашения, принятые в учебном пособии

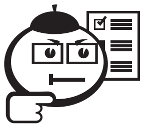
Для улучшения восприятия материала в данном пособии используются следующие пиктограммы и специальное выделение важной информации.



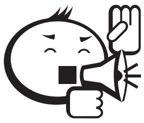
Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



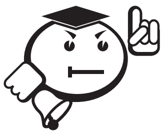
Эта пиктограмма означает теорему.



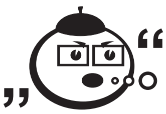
Этот блок означает задание.



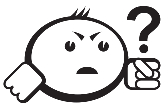
Этот блок означает «Внимание!». Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.



Эта пиктограмма означает цитату.



Контрольные вопросы по главе

1 Общие понятия о системах и их моделях

1.1 Предварительные замечания

Прежде чем обсуждать непосредственно математические основы теории систем, следует определить понятия системы и системности.

О системах, системности, системном подходе, системном анализе, теории систем и т. п. пишут и говорят часто. Многое из того, что вчера называли единым, комплексным, целостным и т. п., сегодня называют модным теперь словечком «системный». Но за этой модой, и это подчеркивают не только ученые, но и инженеры, педагоги, организаторы производства, деятели культуры и другие, стоит широкое осознание системности как одной из важных характеристик окружающего нас мира и осмысления ее как особого измерения этого мира.

Понимание системности мира пришло не сразу и с трудом. Системные представления возникли по объективным причинам и развиваются под действием объективных факторов.

1.1.1 Системность человеческой практики, познавательных процессов и природы

Практическая деятельность человека, то есть его активное и целенаправленное воздействие на окружающую среду, является системным. Позже рассмотрим все признаки системности, а сейчас отметим только самое необходимое и очевидное:

- структурированность системы;
- взаимосвязанность составляющих ее частей;
- подчиненность организации всей системы определенной цели.

По отношению к человеческой деятельности эти признаки очевидны:

- всякое осознанное действие преследует определенную цель;
- во всяком действии можно выделить составные части;
- эти составные части выполняются не произвольно, а в определенном порядке.

Следует учитывать, что роль системных представлений в практике постоянно растет.

Системным является также процесс познания. Природа бесконечна в своем многообразии. Неограниченно и желание человека в познании окружающего мира. Однако ресурсы человека, как временные, так и материальные, ограничены. Одна из особенностей познания, которая позволяет постепенно, шаг за шагом разрешать это противоречие, – это наличие аналитического и синтетического образа мышления. Суть анализа – разделение целого на части, представление сложного в виде совокупности простых компонент. Обратный процесс – синтез.

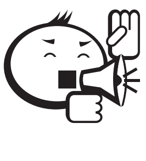
С одной стороны, знания, добытые человечеством, тоже являются аналитическими, и это отражается в существовании различных узких наук, а с другой – имеется необходимость в синтетических пограничных науках, типа физикохимии, биохимии и т. п. Другая форма синтетических знаний – это существование наук, изучающих общие закономерности, таких как философия, метаматематика, а также системных наук – кибернетики, теории систем и других.

В настоящее время системность понимается не только как свойство человеческой практики, но и как свойство всей материи. Системность мышления вытекает из системности окружающего нас мира. Можно говорить о мире как о бесконечной иерархической системе систем, находящихся на разных стадиях развития, на разных уровнях иерархии, взаимодействующих друг с другом. Таким образом, системность природы не только логически выводится в рамках теоретических построений, но и практически выявляется в реально наблюдаемых явлениях, как с участием человека, так и без него.

1.1.2 Общие свойства систем

Независимо от того, как понимается системность (системность мышления, познания либо как свойство природы), все исследователи признают, что имеются определенные признаки, свойства, черты, присущие любой системе независимо от ее происхождения.

Приводимый ниже список таких свойств не является, конечно, полным, но наиболее важные моменты в этом списке отражены [5].



1. Всякая система обладает целостностью, обособленностью от окружающей среды, выступает как нечто отдельное, целое.
2. Обособленность системы не означает ее изолированности: имеется связь с внешней средой, взаимодействие, обмен энергией, ма-

терией, информацией. В этом смысле любая система является открытой, незамкнутой.

3. Целостность системы не есть однородность и неделимость: в системе можно выделить определенные составные части.
4. Наличие составных частей не означает, что эти части изолированы друг от друга. Части как раз и образуют систему благодаря связям между ними. Открытость системы (п. 2) означает, что ее части связаны и с внешней средой. Целостность же системы (п. 1) означает, что внутренние связи между частями, образующими систему, в каком-то смысле важнее, сильнее, чем внешние связи.
5. Целостность системы обусловлена тем, что система обладает такими свойствами, которые отсутствуют у составляющих ее частей. То есть свойства системы не сводятся к свойствам ее частей, не являются простой суммой этих свойств. При объединении частей в систему возникают качественно новые свойства, которые и позволяют выделять и описывать объект именно как систему.
6. Еще один аспект целостности системы: изъятие какой-либо части из системы приводит к потере некоторых существенных свойств системы – получается уже другая система. Изъятая часть также теряет определенные свойства, которые могли реализовываться лишь до тех пор, пока эта часть находилась в системе.
7. Свойство под номером 2, то есть взаимосвязанность системы с окружающей средой, означает, что эта система входит как составная часть в некоторую большую систему. В результате мир можно представить как иерархическую систему вложенных друг в друга, перекрывающихся полностью или частично либо вообще разделенных, но взаимосвязанных и взаимодействующих систем.
8. При характеристике систем важным моментом является понятие *цели*, которая, в общем, определяет и структуру, и функции системы. Функцию системы можно интерпретировать как проявление целеустремленности системы, т. е. функция – это способ достижения системой цели, а структура обеспечивает реализа-

цию этого способа. Рассмотрение целей системы становится одной из важнейших проблем системологии.

9. Важным свойством систем является их *динамика*, то есть изменение во времени в результате внутренних и внешних воздействий. Многие явления в системах невозможно понять без учета их динамики.

. . . .

1.2 Модели и моделирование

1.2.1 Понятие модели и его развитие

Понятия модели, моделирования, т. е. построения, использования и совершенствования моделей, чрезвычайно важны в теории систем.

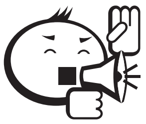
Сначала моделью называли некоторое вспомогательное средство, объект, который в определенный степени заменяет другой объект. Не сразу была понята и всеобщность моделирования: именно не просто *возможность*, но и *необходимость* представления наших знаний в виде моделей. Таким образом, довольно долго понятие «модель» относилось к материальным объектам специального вида: манекен, модели судов, самолетов, чучела.

Осмысление особенностей таких моделей привело к разработке многочисленных определений понятия модели, например: моделью называется объект-заменитель, который в определенных условиях может заменить объект-оригинал, воспроизводя интересующие нас свойства и характеристики оригинала, причем имеет существенные преимущества в виде наглядности, обозримости, доступности испытаний или другие.

Очередной этап понимания модели – это признание того, что моделями могут быть не только реальные объекты, но и идеальные абстрактные построения. Классический и наиболее широко применяемый пример таких моделей – *математические модели*. В результате развития метаматематики была создана содержательная *теория моделей*.

Можно сказать, что сначала в сфере научных дисциплин, таких как информатика, математика, кибернетика, а затем и в других областях понятие модели стало осознаваться как нечто универсальное, хотя и реализуемое различными способами. Можно также сказать, что модель есть способ существования знаний.

Важно подчеркнуть целевой характер модели. Всякий процесс труда (и отдыха, кстати) есть деятельность, направленная на достижение определенной цели. Цель – это образ желаемого будущего, то есть модель состояния, на реализацию которого направлена деятельность. Более того, системность деятельности проявляется помимо прочего и в том, что осуществляется по определенному плану, шаг за шагом. Следовательно, этот план – образ будущей деятельности, ее модель.



Модель, таким образом, не просто объект-заменитель, не вообще какое-то отображение оригинала, а отображение *целевое*.

Модель отображает не сам по себе объект, а то, что в нем нас интересует в соответствии с поставленной целью. Например, лежит камень на дороге. Для проходящего или проезжающего путешественника могут представлять интерес разные модели этого камня, отражающие разные его свойства, в зависимости от целей, которые путешественник перед собой ставит:

- камень как орудие для забивания гвоздя в подметку;
- камень как носитель руды для геолога;
- камень как место для отдыха;
- камень как помеха автомобилю;
- камень как орудие преступления для бандита с большой дороги;
- и т. д.

1.2.2 Типы моделей

Поскольку модель является целевым отображением, то и различных моделей одного и того же объекта может быть множество.

Целевая предназначенность моделей позволяет все множество моделей разделить на основные типы – по типам целей.

Один из примеров такого деления целей – это цели теоретические и практические. В соответствии с этим можно говорить о моделях *познавательных и прагматических* соответственно. В известной степени это деление условно, но и различия достаточно очевидны. Основное отличие между этими типами моделей – в отношении к оригиналу.

Познавательные модели являются формой организации и представления знаний, средством для соединения новых знаний с уже имеющимися. Поэтому в случае расхождения между моделью и реальностью эти расхождения устраняются путем изменения модели.

Прагматические модели – это средство управления, средство организации практического действия, образцово-правильные действия или их результаты. Поэтому использование прагматических целей предполагает изменение реальности с тем, чтобы приблизить реальность к модели.

Например, карта или план местности может выступать как познавательная модель для картографа, составляющего или уточняющего эту карту, и может являться прагматической моделью для строителя, осуществляющего возведение каких-либо объектов по данному плану.

Еще один достаточно важный вид классификации моделей – модели статические и динамические. Когда нас в конкретном объекте интересует не изменение его состояния во времени, а некоторое фиксированное состояние, мы имеем дело со *статическими* моделями. Структурная модель системы – яркий пример статической модели. Если же наши цели связаны с различием между состояниями, с их изменениями, с их динамикой, то возникает необходимость в отображении процесса изменения состояний. Такие модели называют *динамическими.*

Следующее основание классификации моделей – по способам их реализации. Нас в первую очередь интересуют модели, создаваемые человеком, а в его распоряжении есть два типа материала для построения моделей – средства самого сознания и средства окружающего материального мира. А раз так, то и модели можно поделить на *абстрактные* (идеальные) и *материальные* (реальные или вещественные). Нас в дальнейшем будут интересовать абстрактные модели, поэтому рассмотрим более подробно именно этот класс моделей.

Абстрактные модели – это идеальные конструкции, построенные средствами сознания. Особый интерес представляют модели, предназначенные для общения между людьми, а среди этих моделей – модели, создаваемые средствами языка, т. е. языковые модели.

Естественный язык (русский, английский, немецкий и др.) является универсальным средством построения любых абстрактных моделей. Эта универсальность обеспечивается не только возможностью введения новых слов в язык, но и возможностью иерархического построения все более развитых языковых моделей (слово – предложение – текст). Универсальности языковых моделей способствует и неоднозначность естественного языка (начиная уже на уровне слов). На практике эта неоднозначность ликвидируется с помощью «понимания» и «интерпретации». Но рано или поздно эта размытость начинает мешать, и тогда на помощь приходят профессиональные языки, вырабатываемые людьми одной профессии.

Наиболее ярко это проявляется в конкретных науках. Дифференциация наук потребовала создания специализированных языков, более точных, емких и конкретных, чем естественный язык. Языковые модели специальных наук более точны, более компактны, содержат больше информации.

Для представления новых знаний требуются новые модели, и если существующих языковых средств не хватает для построения этих моделей, то возникают еще более специализированные языки. В результате приходим к иерархии языков и соответствующей иерархии моделей (см. рис. 1.1). На нижнем уровне каждой ветви этого иерархического дерева расположены модели, имеющие максимально достижимую точность и определенность для сегодняшнего состояния области знаний. В идеале на нижнем уровне находятся математические модели, созданные на языке математических символов и обладающие абсолютной точностью.

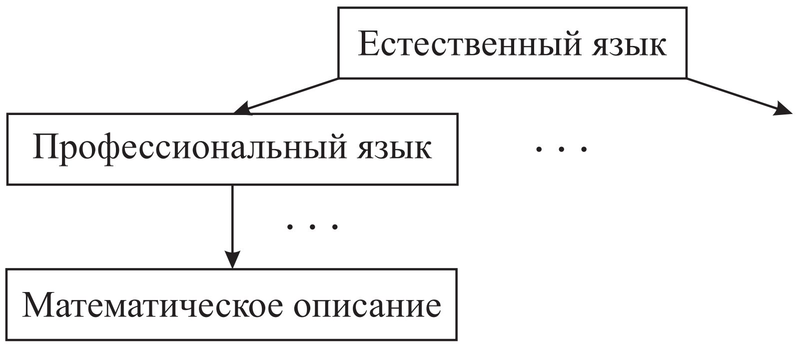


Рис. 1.1 – Иерархия языковых моделей

1.2.3 Свойства моделей

Чтобы модель отвечала своему назначению, недостаточно иметь модель саму по себе: необходимы и определенные условия, обеспечивающие ее функционирование. Отсутствие или недостаточность таких условий лишает модель ее модельных свойств, не позволяет раскрыть ее потенциальные возможности. Необходимо, чтобы модель была согласована с окружающей средой, в которой ей предстоит функционировать. В частности, очень важным моментом является обеспечение ресурсами (в том числе и материальными). Кроме того, не только в модели должны быть интерфейсы со средой, но и в самой среде должны быть реализованы подсистемы, потребляющие результаты ее функционирования, управляющие и контролирующие ход процесса моделирования.

Рассмотрим свойства модели, которые определяют ценность самого моделирования, т. е. отношение моделей с отображаемым ими объектами: чем отличаются модели от оригинала и что у них общего. Главные отличия модели от оригинала – это *конечность*, *упрощенность* и *приближенность*.

Конечность абстрактных моделей сомнений не вызывает, так как они сразу наделяются конечным набором свойств. Но модели материальные – это некоторые вещественные объекты и, как всякие объекты, они бесконечны, в том числе и в своих связях с другими объектами. Здесь-то и проявляется различие между самим объектом и тем же объектом, используемым в качестве модели другого объекта. Из необозримого множества свойств объекта-модели выбираются, рассматриваются и используются только некоторые свойства, подобные интересующим нас свойствам объекта-оригинала. Таким образом, модель подобна оригиналу в конечном числе отношений – это главный аспект конечности реальных моделей.

Следующие факторы позволяют с помощью конечных моделей отображать бесконечную действительность (и не просто отображать, а отображать эффективно, то есть достаточно правильно): упрощенность и приближенность модели.

Можно, прежде всего, отметить, что сама конечность моделей делает их упрощенность неизбежной, но это ограничение не настолько сильно, как кажется на первый взгляд. Гораздо важнее то, что в человеческой практике упрощенность является вполне допустимой, а для некоторых целей не только достаточной, но и необходимой.

Какие из свойств объекта включать в модель, а какие нет, зависит от целей моделирования, и выбор цели определит, что можно и нужно отбросить и в каком направлении упрощать модель. Упрощение – сильное средство в выявлении главных эффектов: идеальный газ, абсолютно черное тело и т. д.

Следующая причина упрощенности модели – необходимость оперировать с ней и связанное с этим ресурсное ограничение. Мы вынужденно упрощаем модель, так как не знаем, как работать со сложной моделью, или у нас нет требуемых ресурсов для создания сложной модели.

Под *приближенностью* (приблизительностью) отображения действительности с помощью модели будем иметь в виду различия, описываемые отношением порядка: количественные (больше – меньше) или хотя бы ранговые (лучше – хуже).

Приближенность модели может быть очень высокой (удачные подделки, например, денег), а может быть видна сразу или варьироваться (географическая карта в разных масштабах), но во всех случаях модель – это другой объект и различия неизбежны. Меру различий мы можем ввести, только соотнеся эти различия с целью моделирования (опять цель!).

Общность модели и моделируемого объекта можно пояснить понятием *адекватности*.

*Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, назовем **адекватной** этой цели.*

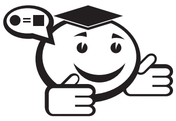
Такое определение адекватности, вообще говоря, не полностью совпадает с полнотой, точностью и истинностью модели, а лишь в той мере, которая необходима для достижения цели моделирования. В некоторых случаях удается ввести меру адекватности модели, т. е. указать способ сравнения двух моделей по степени успешности достижения цели. Если такой способ приводит еще и к количественной оценке адекватности, то задача улучшения модели существенно облегчается.

Обсудим теперь истинность модели. Поскольку различия между моделью и реальностью неизбежны и неустранимы, возникает вопрос: существует ли предел истинности, правильности наших знаний, представленных в моделях? Наша задача – обратить внимание на сочетание истинного и предполагаемого (могущего быть как истинным, так и ложным) во всех моделях.

Об истинности и ложности модели самой по себе говорить бессмысленно: только практическое соотнесение модели с отображаемым оригиналом выявляет степень истинности. При этом изменение условий, в которых ведется сравнение, весьма существенно влияет на результат. Каждая модель явно или неявно содержит условие своей истинности, и одна из опасностей практики моделирования состоит в применении модели без проверки выполнения этих условий.

Важным свойством любой модели является динамика. Как и все в мире, модели проходят свой жизненный цикл: они возникают, развиваются, сотрудничают или соперничают с другими моделями, прекращают свое существование. Изучать динамику модели невозможно без моделирования самого процесса моделирования, отдельных его этапов, шагов, последовательностей действий. Многие исследователи искали последовательность наиболее эффективных этапов при работе с моделью, пытались алгоритмизировать этот процесс. Но выяснилось, что не существует единого, пригодного для всех случаев алгоритма работы с моделью. Этому можно привести много причин, но с методологической точки зрения это одна из алгоритмически неразрешимых проблем в рамках теории алгоритмов.

Резюмируя вышесказанное, можно дать одно из многочисленных определений модели [5].



***Модель есть отображение**: целевое, абстрактное или реальное, статическое или динамическое, согласованное со средой, конечное, упрощенное, приближенное, имеющее наряду с безусловно-истинным условно-истинное и ложное содержание, проявляющееся и развивающееся в процессе его создания и использования.*

Если кому-то это определение покажется слишком длинным и утомительным, тот вполне может заменить его более коротким: *модель есть системное отображение действительности.*

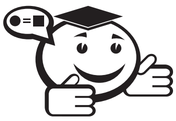
1.3 Системы, их общее описание и классификация

Понятие системы очень важно, и многие авторы анализировали это понятие, уточняли и развивали его до разной степени формализации. Существует очень много определений системы. С учетом того, что говорилось о моделях, эта множественность понятна – определение есть не что иное, как модель (языковая), и, следовательно, различие целей и требований к модели приводит к разным определениям.

Попытаемся дать определение системы в развитии, поэтапно уточняя, развивая и конкретизируя модель на пути от естественно-языковой до математической.

1.3.1 Первое определение системы. Модель «чёрный ящик»

Будем рассматривать искусственные системы. Выше речь уже шла о том, что человеческая деятельность целенаправленна. Наиболее ярко это проявляется в трудовой деятельности. Однако цель, которую человек перед собой ставит, редко достигается только собственными возможностями. Такое несоответствие желаемого и действительного можно охарактеризовать как *проблемную ситуацию*. Проблемная ситуация развивается постепенно: от неосознанного чувства неудовлетворенности к осознанию потребности, к выявлению проблемы и далее – к формулировке цели. Последующая деятельность направлена на достижение этой цели. Укрупненно, в общих чертах ее можно описать как отбор из окружающей среды объектов, свойства которых можно использовать для достижения цели и на объединение этих объектов надлежащим образом, т. е. как работу по созданию того, что, собственно, и называется *системой*.



Это и есть первое определение системы: ***система*** *– это средство достижения цели.*

Сформулировать цель порой бывает непросто. Одной из причин этого является то, что между целью (т. е. абстрактной и конечной моделью) и реальной системой нет и не может быть однозначного соответствия: для достижения данной цели могут использоваться разные системы, а заданную реальную систему можно использовать и для других целей, прямо не предусмотренных при ее создании.

Четкая формулировка, постановка цели в инженерной практике – один из важнейших этапов создания систем. Обычно этот этап идет итерационно, с постепенным уточнением и конкретизацией целей.

Первое определение системы не только отвечает на вопрос «Зачем нужна система?», но и конструктивно указывает, какие объекты следует, а какие не следует из окружающей среды включать в систему: включаются такие объекты, свойства которых во взаимосвязи с уже включенными объектами позволяют достигать поставленную цель.

В первом определении системы акцент сделан на назначение системы и об ее устройстве почти ничего не говорится. Человеку удобнее работать с наглядными, образными моделями, поэтому представим языковую модель первого определения системы в виде визуального эквивалента. О внутреннем устройстве системы ничего неизвестно, поэтому изобразим систему в виде ящика с непрозрачными (чёрными) стенками. Уже при таком изображении модель отражает два свойства системы: целостность и обособленность от среды.

Далее, в определении хоть и косвенно, но сказано, что система не полностью изолирована. Достигнутая цель – это запланированные изменения в окружающей среде, некоторые продукты работы системы, предназначенные для потребления вне данной системы. Система связана со средой и с помощью этих связей воздействует на среду. Изобразим эти связи стрелками, выходящими из системы. Это выходы системы.

Наконец, в определении есть намек и на связи другого типа: система является средством, поэтому должны существовать и возможности ее использования, воздействия на нее, то есть такие связи, которые направлены из внешней среды в систему. Это входы системы.

В результате получим модель системы, которая называется *чёрным ящиком* (рис. 1.2). Эта модель, несмотря на внешнюю простоту, часто оказывается весьма полезной.

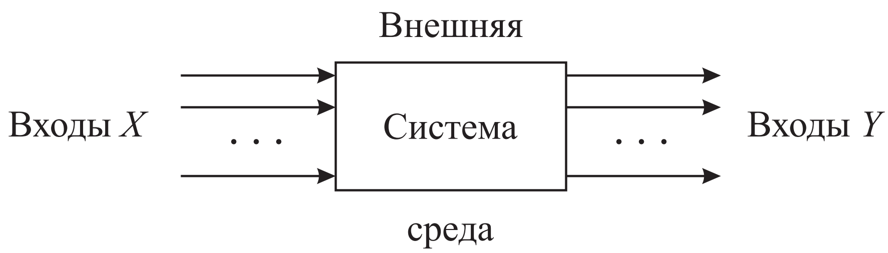


Рис. 1.2 – Модель системы «черный ящик»

В некоторых случаях достаточно содержательного описания входов и выходов системы, тогда модель чёрного ящика – это их список. В других случаях требуется количественное описание некоторых или всех входов и выходов. Чтобы максимально формализовать модель «чёрного ящика», необходимо задать два множества X и Y входных и выходных переменных.

Задание этих множеств – сама по себе задача нетривиальная, даже для конкретной системы, так как на вопрос о том, какие и сколько связей следует включать в модель, ответ не прост и не однозначен. Дело в том, что любая реальная система, как и любой объект, взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов. Выбрать для построения модели из этого бесконечного множества связей конечное их множество – задача часто непростая. Критерий отбора здесь – целевое назначение системы, существенность той или иной связи по отношению к цели. А вот при оценке этой существенности и могут возникать ошибки.

Особенно важно учитывать этот момент при задании цели системы, то есть при определении выходов. При этом основную цель приходится сопровождать заданием *дополнительных* целей, невыполнение которых может сделать ненужной или даже вредной достижение основной цели.

Модель «чёрного ящика» оказывается часто не только полезной, но и единственно возможной при изучении систем. Например, это бывает, когда речь идет об исследовании живых организмов в естественных для них условиях, где следует заботиться о том, чтобы измерения как можно меньше влияли на систему.

1.3.2 Модель состава системы

Более подробное изучение системы требует рассмотрения внутренности «черного ящика». Это позволяет различать составные части системы, некоторые из которых при еще более детальном рассмотрении в свою очередь могут быть разбиты на составные части и т. д. Части, которые мы считаем неделимыми, называются *элементами*. Части, состоящие более чем из одного элемента, называются *подсистемами.* В результате получается *модель состава* системы, описывающая, из каких подсистем и элементов она состоит.

Как и любая модель, модель состава является целевой, и для разных целей может быть разбита различным образом.

Модели состава одной и той же системы различаются потому, что всякое деление целого на части в достаточной степени условно. Границы между подсистемами условны, относительны. Это же относится и к границам самой системы с окружающей средой.

Таким образом, модель состава ограничена снизу тем, что считается элементом, и сверху – границей системы. Как эта граница, так и границы разбиения на подсистемы определяются целями построения модели и, следовательно, не абсолютны.

1.3.3 Модель структуры системы. Второе определение системы

Если углубляться дальше в изучение систем, становится понятным, что есть вопросы, которые нельзя решить только на уровне моделей «черного ящика» или модели состава. Необходимо еще правильно соединить элементы и подсистемы, т. е. установить между составными частями системы определенные связи. Совокупность необходимых и достаточных для достижения цели отношений между элементами называется *структурой системы.*

Перечень связей между элементами (структура системы) является отвлеченной, абстрактной моделью: установлены только отношения между элементами, но ничего не говорится о самих элементах. На практике обычно сначала описываются сами элементы (модель структуры), но теоретически можно исследовать отдельно модель структуры. Опять-таки, из множества реальных отношений между элементами в модель структуры включаются только те, которые важны, существенны для достижения цели.

Суммируя, объединяя все три рассмотренные модели, можно сформулировать ***второе определение системы****: это совокупность взаимосвязанных элементов, обособленная от среды и взаимодействующая с ней как целое.*

Графическое изображение такой модели, объединяющей и модель «черного ящика», и модель состава, и модель структуры, называется *структурной схемой системы.*

На структурной схеме указаны все элементы, все связи между элементами и связи определенных элементов с окружающей средой (входы и выходы системы). Все структурные схемы имеют нечто общее, и если абстрагироваться от содержательной стороны структурных схем, в результате получим элементы и связи между ними, а также (если это необходимо) пометки для различения элементов и (или) связей. Это есть не что иное, как ориентированный (возможно, взвешенный) граф, и эффективное изучение структурных схем осуществляется с помощью *теории графов*.

Для ряда исследований одной структурной информации, содержащейся в графе, оказывается недостаточно, и тогда методы теории графов становятся вспомогательными, а главным является рассмотрение конкретных функциональных связей между входными, внутренними и выходными переменными систем.

1.3.4 Динамические модели системы

Все рассмотренные выше модели отображали систему в некоторый фиксированный момент времени, были как бы застывшими снимками системы. В этом смысле их можно назвать *статическими*, подчеркивая их неподвижный, застывший, неизменный характер. Следующий шаг – это понять и описать, как система работает, что происходит с ней самой и с окружающей средой во времени, в ходе реализации поставленной цели. И подход, и описание, и степень подробности этого описания могут быть различными, но общее у всех этих моделей – это то, что они должны отражать поведение систем, описывать происходящее во времени изменения, последовательности этапов, операций, действий.

Системы, в которых происходят изменения со временем, называются ***динамическими****, а соответствующие модели, отображающие эти изменения –* ***динамическими моделями****.*

Для разных систем и объектов разработано большое число динамических моделей, описывающих процессы с разной степенью подробности: от общего понятия динамики, движения вообще – до математических моделей конкретных процессов. Развитие моделей при этом происходит примерно также: от «чёрного ящика» к структурной схеме.

Уже на уровне «черного ящика» различают два типа динамики систем – это *функционирование и развитие*. Под функционированием понимают процессы, которые происходят в системе (и среде), стабильно реализующей фиксированную цель. Развитием называют то, что происходит с системой при изменении ее целей, когда существующая структура перестает удовлетворять новую цель. Не следует считать, что система только либо функционирует, либо развивается. Могут быть разные соотношения между ее подсистемами.

На следующих уровнях динамических моделей происходит уточнение, конкретизация происходящих процессов.

Динамический вариант «чёрного ящика» – это начальное состояние системы (вход «чёрного ящика») и конечное (выход). Модель состава – перечень этапов. Структурная схема (или «белый ящик») – подробное описание происходящего или планируемого процесса.

1.3.5 Общая математическая модель динамической системы

Сложность построения моделей заключается в том, что в общем случае выход системы определяется не только значением входа в данный момент, но и предыдущими значениями входа. Кроме того, в самой системе с течением времени как под действием входных процессов, так и независимо от них могут происходить изменения. Все это требует отражения в модели. В наиболее общей модели это обеспечивается введением понятия *состояние системы* как некоторой внутренней характеристики системы.

Входные величины в качестве причины определяют изменения во времени всех переменных системы и, в частности, всех выходных величин. Значения этих величин в определенный, заданный момент времени t в общем случае зависит от изменений во времени входных величин на интервале $(-\infty, t]$, то есть значение выхода определяется, как правило, всей предысторией изменения входа. В случае, если предшествующая данному моменту эволюция входных величин известна не полностью, а только, скажем, на интервале $[t_0, t](t_0 < t)$, предшествующем моменту времени t, то может оказаться, что в общем случае этой информации будет недостаточно для определения внутренних переменных системы и выходных величин в текущий момент времени. Однако в том случае, когда имеется дополнительная информация о значениях определенных переменных системы в момент времени t_0, значения выхода снова могут быть определены полностью, так же как и значения всех внутренних переменных. Таким образом, отсутствие информации о динамике входных величин на интервале $(-\infty, t_0)$ можно скомпенсировать тем, что известны значения некоторых переменных системы в момент времени t_0. Такие переменные называются *переменными состояния системы.*

Если обозначить переменные состояния через $\mathbf{q}(t)$ (в общем случае это вектор размерностью n), входные переменные через $\mathbf{x}(t)$ (размерность вектора $\mathbf{x}(t)$, т. е. число входов – m), а выходные переменные через $\mathbf{y}(t)$ (вектор размерностью k) (рис. 1.3), то соответствующие отображения можно записать как

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{x}(\tau)\right] \to \mathbf{q}(t); \\ &\left[\mathbf{q}(t_0), \mathbf{x}(\tau)\right] \to \mathbf{y}(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

или, в другой форме,

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\delta}\big(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{x}(\tau)\big); \\ &\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\lambda}\big(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{x}(\tau)\big). \end{aligned} \tag{1.2}$$

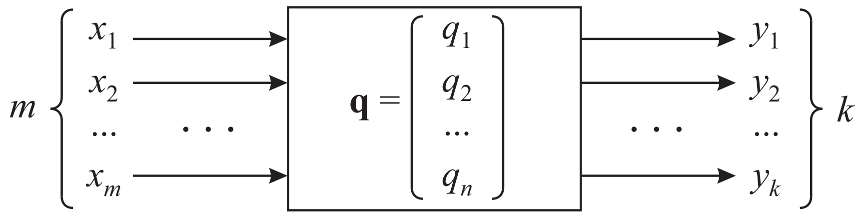


Рис. 1.3 – Математическая модель динамической системы

В данной записи следует под обозначением τ понимать не точку на оси времени, а весь интервал от t_0 до t.

Отображение δ часто называют переходным, а отображение λ – отображением выхода.

Естественно, что векторная запись уравнений (1.2) предполагает, что δ и λ также векторы.

Для каждого фиксированного τ значение вектора $\mathbf{q}(\tau)$ задает состояние динамической системы в момент времени τ. Множество Q^n всех векторов $\mathbf{q}$ образует алфавит состояний динамической системы, или *пространство состояний.* Таким образом, $\mathbf{q}(\tau)$ можно трактовать как точку в пространстве состояний.

Пример 1.1

Рассмотрим электрическую цепь (четырехполюсник) (рис. 1.4).

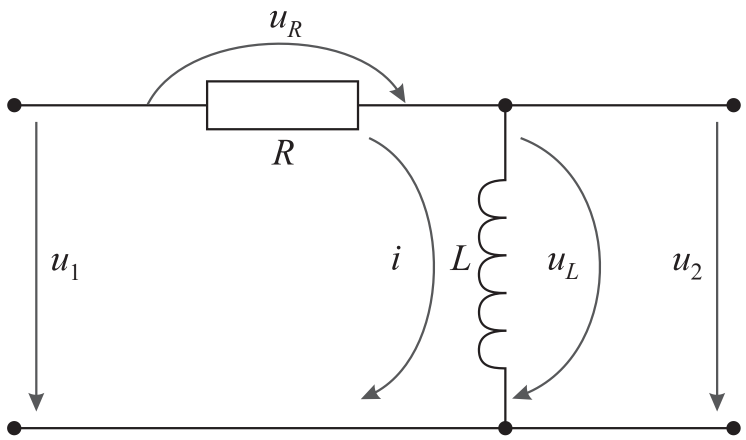


Рис. 1.4 – Пример динамической системы (электрический четырехполюсник)

Пять существующих в этой цепи физических величин (четыре напряжения u_1, u_2, u_R, u_L и ток i) связаны, согласно законам Ома и Кирхгофа, соотношениями:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_R + u_L, \\ &u_R = R \cdot i, \\ &u_2 = u_L, \\ &u_L = L \cdot \frac{di}{dt}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Предполагается, что индуктивность L и сопротивление R не зависят от тока, напряжения и времени, т. е. постоянны.

С учетом электротехнических применений данной цепи эти пять физических величин (переменных системы) можно разделить:

- на заданную величину u_1 (причина, вход, входное воздействие);

- величину, предназначенную для некоторых целей u_2 (следствие, выход, выходное воздействие);
- величины, участвующие в преобразовании входного воздействия u_1 в выходное воздействие u_2: промежуточные величины u_R, u_L, i (внутренние переменные системы).

Решение уравнений (1.3) относительно, например, тока i и выхода u_2 для $t \geq t_0 = 0$ будет равно

$$i(t) = \left(i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_1(\tau) e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$
$$u_2(t) = L\frac{di}{dt}. \tag{1.4}$$

Если входная величина $u_1(\tau)$ непрерывна на интервале $[0,t] = I$, то переменная системы $i(t)$ для каждого момента времени $t \in I$ однозначно определяется по значению тока в момент времени $t = 0$ и по входной величине $u_1(\tau)$ на интервале $0 \leq \tau < t$. Причем это происходит независимо от того, принимали различные входные величины или другие переменные системы значения, отличные от нуля при $t < 0$, или нет. Таким образом, воздействие, оказываемое $u_1(t)$ на систему до момента времени $t = 0$, например на изменение $i(t)$ при $t < 0$, можно учесть только в одном значении тока в момент времени $t = 0$. Это же самое относится и к выходной величине $u_2(t)$. Приведенные рассуждения позволяют уравнения (1.4) записать в символической форме аналогично соотношениям (1.1):

$$[i(0), u_1(\tau)] \to i(t),$$
$$[i(0), u_1(\tau)] \to u_2(t),\ (0 \leq \tau < t).$$

Из последних соотношений следует, что ток i является переменной состояния системы, изображенной на рисунке 1.4.

. . . .

Исходя из основных уравнений динамической системы (1.2), можно установить, что для всестороннего описания системы должны быть заданы три основных множества:

а) множество X значений входных величин $\mathbf{x}$ (входной алфавит);

б) множество Y значений выходных величин $\mathbf{y}$ (выходной алфавит);

в) множество Q значений переменных состояния $\mathbf{q}$ (алфавит состояний).

Вектор $\mathbf{q}(t)$ (так же как и вектор $\mathbf{q}(\tau)$) является тогда элементом n-кратного декартового произведения $Q^n : \mathbf{q}(t) \in Q^n$. Соответственно для k выходных величин вектор $\mathbf{y}(t)$ является элементом k-кратного декартового произведения $Y^k : \mathbf{y}(t) \in Y^k$.

Вообще говоря, не обязательно эти множества должны быть множеством вещественных чисел R, т. е. не обязательно должно быть $X = Y = Q = R$. Чтобы получить более общее определение системы, под множествами X, Y, Q следует понимать множества более общего вида. При этом каждая компонента $x_\nu(\tau)$ $(\nu = 1,2,...,m)$ входного вектора $\mathbf{x}(\tau)$ $(t_0 \le \tau < t)$ уже определяется как некоторое отображение интервала $T_t = [t_0, t]$ действительной временной оси $T = R$ или в более общем случае множества $T_{0t} = T_t \cap T_0$ $(T_0 \subset R)$ на множество X:

$$x_\nu(\tau) : T_{0t} \to X,\ T_{0t} = T_t \cap T_0,\ T_0 \subset R, T_t - (t_0, t), \nu = 1,2,...,m.$$

Здесь вектор $\mathbf{x}(\tau) \in X^n$. Если через $\mathcal{X} = \{T_{0t} \to X^m\}$ обозначить множество всех отображений всех множеств T_{0t} в декартово произведение X^m (или в некоторое подмножество этого множества), то соотношения (1.2) можно записать как отображения вида

$$\begin{aligned} &\delta : Q^n \times \mathcal{X} \to Q^n; \\ &\lambda : Q^n \times \mathcal{X} \to Y^k. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Конкретизируя множества $\mathcal{X}$, Y и Q, приходим к математическим моделям различных систем. Если эти множества *конечны*, то такая система будет называться *конечным автоматом* и для ее исследования разработана соответствующая теория конечных автоматов. Это довольно простой класс систем в том смысле, что для исследования конечных автоматов необходимы лишь методы логики, алгебры и теории множеств. И в то же время это достаточно важный и широкий класс систем, так как в него входят все дискретные (цифровые) измерительные, управляющие и вычислительные устройства.

Если $\mathcal{X}$, Y^k и Q^n являются метрическими или в более общем случае топологическими пространствами [6], а отображения λ и δ непрерывны в этих пространствах, то мы переходим к так называемым гладким системам. Для такого класса систем характерно, что переходное отображение δ является общим решением векторно-матричного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{x}),\ t \in R\,. \tag{1.6}$$

Если же в уравнении (1.6) время t является элементом счетного множества, т. е. течет дискретно, шагами или квантами (это будет в случае, если $T_0 \subseteq N_0$, где N_0 – множество натуральных чисел), то от выражения (1.6) приходим к разностному уравнению:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathrm{f}\left(t_k, \mathbf{q}\left(t_k\right), \mathbf{x}\right),\ k \in N_0, \tag{1.7}$$

являющемуся описанием дискретных во времени систем.

Если отображение λ не зависит явно от времени и отображение δ инвариантно (неизменно) к сдвигу во времени, то получаем описание *стационарных систем*. У таких систем их свойства со временем не меняются.

Особо нужно остановиться на таком свойстве реальных систем, как принцип причинности. Этот принцип означает, что отклик (выход) системы на некоторые воздействия не может появиться раньше самого воздействия. Это условие не всегда выполняется в рамках математических моделей систем, и одна из проблем теории таких систем состоит как раз в выяснении условий физической реализуемости теоретических моделей.

Следует также отметить, что в основных уравнениях (1.1)–(1.2) всегда предполагается, что $t > t_0$. Физически это означает, что из состояния системы в данный момент времени $\mathbf{q}\left(t_0\right)$ можно сделать заключение о поведении системы только в *последующие* моменты времени. Таким образом, не предполагается, что по заданным значениям $\mathbf{q}\left(t_0\right)$ и $\mathbf{x}(\tau)$ можно также определить и $\mathbf{q}(t)$ при $t < t_0$ $(t < \tau \le t_0)$. Иными словами, если известно конечное состояние $\mathbf{q}\left(t_0\right)$ и входное воздействие $\mathbf{x}(\tau)$ на предшествующем интервале времени $t < \tau \le t_0$, то восстановить первоначальное состояние $\mathbf{q}(t)$ не всегда представляется возможным. Эти же рассуждения справедливы и для $\mathbf{y}(t)$. Это означает, что будущее поведение некоторой динамической системы зависит от всей ее предшествующей эволюции только в той мере, насколько эта предыстория влияет на начальное состояние. То есть динамические системы по определению не обязательно являются обратимыми (во времени) [6].

1.3.6 Классификация систем

Когда мы сравниваем системы, начинаем их различать, мы тем самым вводим некоторую классификацию. *Основания классификации*, т. е. свойства систем, по которым мы их различаем, могут быть самыми различными. Необходимо только помнить, что всякая классификация – это модель реальности и, как любая модель, конечна, упрощённа, приближенна и условна. Разграничение внутри класса приводит к подклассам и, в конце концов, получается многоуровневая, иерархическая классификация. Важным моментом является полнота классификации. Когда нет уверенности в полноте классификации, имеет смысл вводить класс «все остальное».

По происхождению системы можно разделить на искусственные (т. е. созданные человеком), естественные и смешанные. К искусственным системам относятся механизмы, орудия, машины, роботы и т. д. В естественных системах можно выделить подклассы систем живых, неживых, социальных, экологических. Примером подклассов смешанных систем могут служить эргономические системы (человек-оператор и машина), биотехнические системы (системы, в которые входят живые организмы и технические устройства), автоматизированные системы.

Важной является классификация систем по типам входных, выходных переменных и переменных состояния. На рисунке 1.5 приведен фрагмент такой классификации. Разных подходов при исследовании систем требуют переменные, описываемые количественно и качественно, что и приводит к первому уровню классификации. Могут быть ситуации, когда часть переменных описывается количественными, а часть – качественными характеристиками, поэтому и появляется класс смешанного описания. Для систем с качественными переменными следующий уровень классификации подразумевает описание переменных на уровне естественного языка и на более формализованном уровне (например, на уровне предикатных переменных). Возможно также и смешанное описание. Для систем с количественным описанием переменных разного подхода требуют переменные непрерывные и дискретные. Выделен также подкласс дискретно-непрерывного описания переменных. Для третьего класса систем (со смешанным описанием переменных) второй уровень классификации является объединением подклассов систем двух первых ветвей и на рисунке 1.5 не показан. Третий уровень классификации можно принять одинаковым для всех подклассов второго уровня. На рисунке 1.5 он показан только для одного подкласса.

Для работы любой системы требуются ресурсы: материальные, энергетические и информационные. Один из возможных подходов к классификации по обеспеченности этими ресурсами приведен на рисунке 1.6.

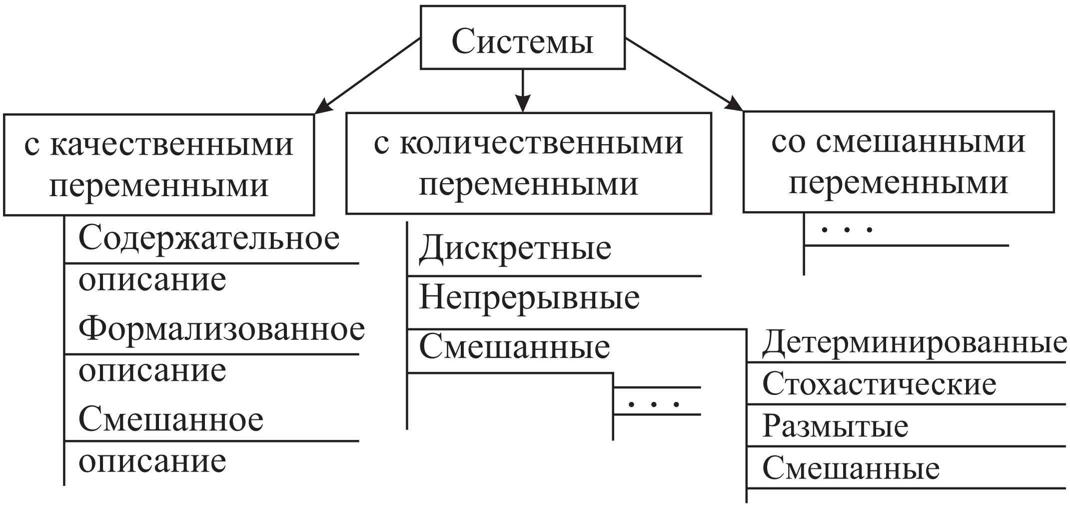


Рис. 1.5 – Классификация систем по описанию переменных

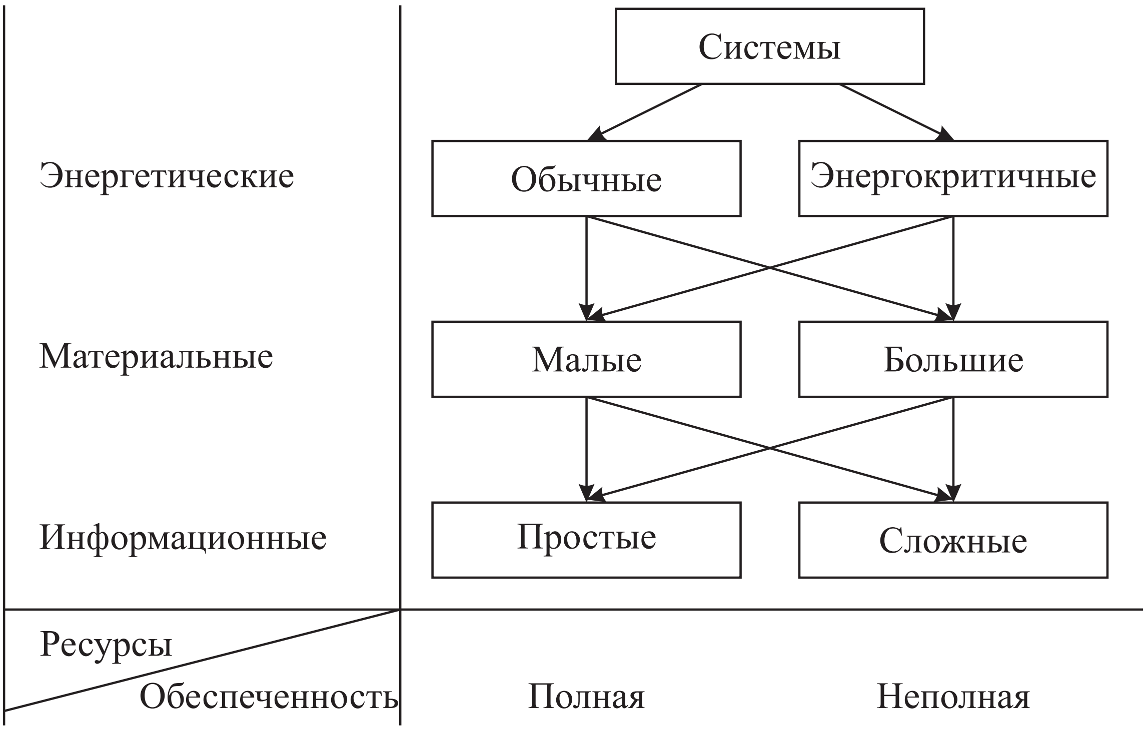


Рис. 1.6 – Классификация систем по ресурсообеспеченности

Если идет речь о системе управления, то энергетические затраты на выработку управления, как правило, малы по сравнению с энергопотреблением объекта управления, и в этом случае их просто не принимают во внимание в классе обычных систем. Но в некоторых случаях управляемая и управляющая части могут потреблять соизмеримое количество энергии и питаться от одного источника. При этом возникает нетривиальная задача перераспределения ограниченной энергии между этими частями, и мы приходим к классу энергокритичных систем.

Материальные затраты на функционирование систем также могут создавать определенные ограничения. Например, в случае управления объектом большой размерности с помощью ЦВМ такими ограничениями могут быть объем оперативной памяти и быстродействие. В соответствии с этим большими можно назвать системы, моделирование которых затруднено вследствие их большой размерности. Перевод систем из больших в малые можно осуществить двумя способами. Это либо применение более мощной вычислительной базы, либо декомпозиция многомерной задачи на задачи меньшей размерности (если такое возможно).

Третий тип ресурсов – информационный. Если информации о системе достаточно (а признаком этого служит успешность управления), то систему можно назвать простой. Если же управление, выработанное на основе имеющейся информации об объекте, приводит к неожиданным, непредвиденным или нежелательным результатам, то систему можно интерпретировать как сложную. Поэтому сложной системой можно назвать систему, в модели которой недостаточно информации для эффективного управления[1]. Два способа можно предложить для перевода системы из подкласса сложных в подкласс простых. Первый состоит в выяснении конкретной причины сложности, получении недостающей информации и включении ее в модель системы. Второй способ связан со сменой цели, что в технических системах неэффективно, но в отношениях между людьми часто является единственным выходом.

Перечисленные виды ресурсов являются более или менее независимыми, поэтому возможно самое различное сочетание между подклассами этой классификации.

Безусловно, эту классификацию (как, впрочем, и все предыдущие классификации) можно при необходимости развивать: либо при более подробном рассмотрении видов ресурсов, либо в результате введения большего числа градаций.

---

[1] Существуют и другие подходы к определению понятия сложной системы.

Контрольные вопросы по главе 1

1. Перечислите основные свойства систем.
2. Приведите классификацию абстрактных моделей.
3. Приведите классификацию материальных моделей.
4. Назовите различия между моделью и оригиналом.
5. В чем сходство между моделью и оригиналом?
6. Что такое модель «черного ящика»? Приведите пример, когда эта модель единственно возможна.
7. Что такое модель состава системы? Приведите пример:
   а) моделей, имеющих одинаковый элементный состав, но различающихся делением на подсистемы;
   б) моделей, имеющих одинаковые подсистемы, но различающихся элементным составом.
8. Дайте второе определение системы.
9. Что такое динамическая модель «черного ящика»? Приведите пример.
10. Что такое динамический вариант модели состава? Приведите пример.
11. Что такое динамический вариант структурной схемы?
12. Дайте понятия состояния системы и переменных состояния системы.
13. Приведите классификацию математических моделей систем.
14. Каковы основаные классификации систем?
15. Приведите классификацию систем по типам переменных (входных, выходных и состояния).
16. Назовите виды систем в соответствии с ресурсным обеспечением. Приведите пример системы: а) малой и сложной; б) большой и простой; в) большой и сложной.

2 Автоматное описание систем. Теория конечных автоматов

В том случае, если множества входных X, выходных Y и внутренних переменных Q являются конечными, мы приходим к так называемому автоматному описанию системы. Для этого случая разработана достаточно разветвленная, хорошо формализованная *теория конечных автоматов.* Конечными автоматами можно описывать любые цифровые устройства и элементы. Анализ и синтез цифровых устройств также успешно может быть осуществлен с применением теории конечных автоматов. Для изучения этого раздела достаточно знать методы формальной логики, теорию множеств, теорию графов и основы абстрактной алгебры.

Естественно, что и пользоваться при этом мы будем понятиями, определениями и терминологией (то есть профессиональным языком), принятыми в соответствующих разделах дискретной математики [7].

2.1 Основные понятия. Способы задания автоматов

2.1.1 Определение абстрактного автомата

Пусть $X=\{x_1, x_2, \dots x_m\}$ и $Y=\{y_1, y_2, \dots y_k\}$ – два произвольных множества элементов, которые будем называть *алфавитами,* а их элементы – *буквами алфавита*. Конечную упорядоченную последовательность букв назовем *словом* в данном алфавите. Обозначим X^* и Y^* – множества всех слов в алфавитах X и Y соответственно. Тогда произвольное преобразование дискретной информации можно задать как однозначное отображение S множества слов X^* во множество слов Y^*. Отображение S называется алфавитным отображением или алфавитным оператором, а алфавиты X и Y – входным и выходным алфавитами оператора S. Каждому входному слову $\mathbf{x}=x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ оператор S сопоставляет выходное слово $\mathbf{y}=y_{j_1}y_{j_2}\dots y_{j_k}$. Поэтому для каждого $\mathbf{x}\in X^*$ существует свое $\mathbf{y}\in Y^*$, такое, что $\mathbf{y}=S(\mathbf{x})$. То есть S есть функция, область определения которой X^*, а область значений – Y^*.

В общем случае отображение S может быть частичным, т. е. не всюду определенным. Это позволяет рассматривать отображение S как оператор в одном и том же расширенном алфавите $Z = X \cup Y$. Частичное отображение S множества Z^* в себя, определенное на словах, состоящих только из $\{x_1 \ldots x_m\}$, можно выбрать таким образом, что оно будет совпадать с отображением S множества X^* в Y^*. Любой абстрактный автомат реализует некоторый оператор S или *индуцирует* некоторое отображение S.

Условия, накладываемые на автоматные отображения, рассмотрим несколько позже, а сейчас отметим ряд допущений, связанных с понятием абстрактного автомата:

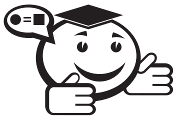
а) наличие произвольного числа отличных друг от друга состояний автомата и свойство мгновенного перехода из одного состояния в другое;

б) переход из одного состояния в другое оказывается возможным не ранее, чем через некоторый промежуток времени Δ ($\Delta > 0$ – интервал дискретности) после предыдущего перехода;

в) число различных входных и выходных сигналов конечно;

г) входные сигналы – причина перехода автомата из одного состояния в другое, а выходные сигналы – реакция автомата на входные сигналы и относятся они к моментам времени, определенным соответствующим переходом автомата из состояния в состояние.

Учитывая это, можно интерпретировать автомат как устройство, работающее в дискретном времени $t' = n \times \Delta$ $(n \in N_0)$. На каждый входной сигнал $x(t)$ автомат реагирует выходным сигналом $y(t)$, где $t = \dfrac{t'}{\Delta}$ – нормированное время. Связь между входом и выходом определяется текущим состоянием автомата q и задается функцией выхода $y = \lambda(q, x)$, а переход автомата из одного состояния в другое – функцией переходов $q = \delta(q, x)$.



Определим ***абстрактный автомат*** *как пятерку объектов:*

$$A = (X, Y, Q, \lambda, \delta),$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ *– входной алфавит или множество входных состояний;* $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_k\}$ *– выходной алфавит или множество выходных состояний;* $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_k\}$ *– множество внутренних со-*

стояний; $\delta : Q \times X \to Q$ *– функция перехода;* $\lambda : Q \times X \to Y$ *– функция выхода.*

. . . .

Если $|Q| < \infty$, то мы имеем дело с *конечным* автоматом, если Q – множество счетное – то с бесконечным. Если начальное состояние зафиксировано (например, q_1), то автомат называется инициальным. Таким образом, по неинициальному автомату можно n способами задать инициальный автомат.

В приведенном определении ничего не сказано о времени, ни о непрерывном, ни о дискретном. Таким образом, представление абстрактного автомата или его интерпретация как некоторого устройства, на вход которого в дискретные моменты времени поступают сигналы и в эти же моменты времени выдаются выходные сигналы, позволяет только более наглядно представить его работу.

С другой стороны, описание реального устройства, функционирующего в реальном времени, в виде автомата является абстрактной моделью. Следовательно, автоматная модель (как всякая модель) является упрощенной (фактически время перехода не нулевое), конечной (описывает систему только на уровне входов, выходов и состояний) и приближенной (реальное поведение системы может отличаться от модельного за счет помех, непредусмотренных внешних воздействий и т. п.).

Покажем теперь, каким образом определить отображение S, индуцируемое заданным конечным автоматом. Возьмем интерпретацию автомата как устройства, функционирующего в дискретном времени. Предположим, что автомат инициальный и задано начальное состояние q_1. В каждый момент времени, отличный от нулевого, на вход автомата поступает входной сигнал $x(t)$ – произвольная буква входного алфавита $x(t) \in X$, а на выходе возникает некоторый выходной сигнал $y(t)$ – буква выходного алфавита $y(t) \in Y$. Для данного автомата его функции δ и λ могут быть определены не только на множестве X всех входных букв, но и на множестве X^* всех входных слов. Действительно, для любого входного слова $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$ справедливо соотношение:

$$\delta(q_{1,}\mathbf{x}) = \delta(q_1, x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}) = \delta\Big(\delta\Big(...\delta\Big(q_{1,} x_{i_1}\Big), x_{i_2}\Big), x_{i_k}\Big), \tag{2.1}$$

или, используя индуктивное определение:

- для каждой входной буквы x_j функция $\delta(q_i, x_j)$ первоначально задана;
- для любого слова $\mathbf{x} \in X^*$ и любой буквы $x_j \in X$

$$\delta\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right) = \delta\left(\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right), x_j\right). \qquad (2.2)$$

С помощью такой расширенной функции δ можно также индуктивно определить и λ:

$$\lambda\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right) = \lambda\left(\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right), x_j\right). \qquad (2.3)$$

Появление на входе конечной последовательности $x(1) = x_{i_1}$, $x(2) = x_{i_2}$, $..., x(l) = x_{i_k}$, то есть входного слова $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$ на основании известных функций λ и δ, вызовет появление на выходе однозначной последовательности $y(1) = y_{j_1}, y(2) = y_{j_2}, ..., y(l) = y_{j_k}$, которая соответствует выходному слову $\mathbf{y} = y_{j_1} y_{j_2} ... y_{j_k} = \lambda\left(q_1, x_{i_1}\right) \lambda\left(q_1, x_{i_1} x_{i_2}\right) ... \lambda\left(q_1, x_{i_1} ... x_{i_k}\right)$.

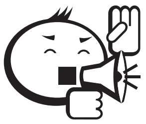
Соотнося с каждым входным словом соответствующее ему выходное, получим искомое отображение, которое и является *автоматным отображением*, или *автоматным оператором*. Если результатом применения оператора к слову **x** будет выходное слово **y**, то это обозначается так: $S\left(q_1, \mathbf{x}\right) = \mathbf{y}$ или $S(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Автоматное отображение можно определить и индуктивно:

$$-S\left(q_i, x_j\right) = \lambda\left(q_i, x_j\right); \qquad (2.4)$$

$$-S\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right) = S(q_i, \mathbf{x}) \lambda\left(d(q_i, \mathbf{x}), x_j\right). \qquad (2.5)$$

. . . .



Автоматное отображение обладает двумя свойствами, непосредственно следующими из определения:

1) слова **x** и $\mathbf{y} = S\left(\mathbf{x}\right)$ имеют одинаковую длину;

2) если $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2$ и $S\left(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2\right) = \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2$, где $\left|\mathbf{x}_1\right| = \left|\mathbf{y}_1\right| = i$, то $S\left(\mathbf{x}_1\right) = \mathbf{y}_1$.

Иначе говоря, образ отрезка длины *i* равен отрезку образа той же длины.

Свойство второе означает, что автоматные операторы – операторы без предвосхищения, то есть операторы, которые перерабатывают слово слева направо, не «заглядывая» вперед.

. . . .

Таким образом, одна из интерпретаций абстрактного автомата – это некоторое цифровое вычислительное, управляющее или преобразовательное устройство. Входная буква – это входной сигнал (комбинация сигналов на всех входах устройства), входное слово – последовательность входных сигналов, поступающих в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ Выходное слово – последовательность выходных сигналов, выдаваемых автоматом, внутреннее состояние автомата – комбинация состояний запоминающих элементов устройства.

Такая интерпретация, безусловно, верна, но она не требуется ни для определения автомата, ни для построения соответствующей теории конечных автоматов. Все, что действительно важно в абстрактной теории автоматов, – это работа со словами при конечной памяти.

2.1.2 Задание автоматов

Поскольку функции δ и λ определены на конечных множествах, то их можно задать таблицами. Обычно две таблицы (для функции δ и для функции λ) сводят в одну таблицу $\delta \times \lambda : Q \times X \to Q \times Y$ и называют такую таблицу *автоматной таблицей*, или таблицей переходов автомата. В этой таблице на пересечении столбца с входной буквой x_i и строки с состоянием q_j стоит пара – состояние q_l, в которое переходит автомат из состояния q_j по входной букве x_i, и выходная буква y_k, которая при этом выдается автоматом.

Часто вместо автоматной таблицы для задания автомата используют так называемую *матрицу соединений автомата*. Это матрица $n \times n$, строки и столбцы которой соответствуют различным состояниям автомата. На пересечении q_i-й строки и q_j-го столбца стоит буква (или дизъюнкция букв) входного алфавита $x_l \in X$, вызывающая переход автомата из состояния q_i в состояние q_j, и в скобках (можно через запятую, тире или слеш) – буква (или дизъюнкция букв) выходного алфавита $y_k \in Y$, которая появляется при этом на выходе автомата. Если ни одна из букв входного алфавита не переводит состояние q_i в q_j, то ставится прочерк или ноль. В любой строке каждая буква входного алфавита встречается не более одного раза (условие однозначности переходов).

Еще один способ задания автоматов – ориентированный мультиграф, называемый *графом переходов*, или диаграммой переходов. Вершины графа переходов соответствуют состояниям автомата. Если $\delta(q_i, x_j) = q_k$ и $\lambda(q_i, x_j) = y_l$, то из вершины q_i в вершину q_j ведет ребро, на котором написаны пара x_j, y_l. Для любого графа переходов выполняются следующие условия корректности:

а) для любой входной буквы x_j имеется ребро, выходящее из q_i, на котором написано x_j (условие полноты);

б) любая буква x_j встречается только на одном ребре, выходящем из вершины q_i (условие непротиворечивости, или детерминированности).

На графе переходов наглядно представимы все функции, определяемые формулами (2.1)–(2.5). Если зафиксирована вершина q_i, то всякое слово $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$ однозначно определяет путь длины k из этой вершины (обозначим его $q_i, \mathbf{x}$), на k ребрах которого написаны $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$. Поэтому $\delta(q_i, \mathbf{x})$ – это последняя вершина пути $q_i, \mathbf{x}$; $\lambda(q_i, \mathbf{x})$ – выходная буква, написанная на последнем ребре пути $q_i, \mathbf{x}$, а отображение $S(q_i, \mathbf{x})$ – слово, образованное выходными буквами на k ребрах пути $q_i, \mathbf{x}$.

Пример 2.1

Пусть автомат задан своей автоматной таблицей (табл. 2.1):

Таблица 2.1 – Автоматная таблица к примеру 2.1

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	2, y_1	3, y_3
2	2, y_2	3, y_1
3	1, y_1	2, y_2

Здесь и в дальнейшем, если это не вызовет разночтений, внутренние состояния обозначены своими индексами, т. е. алфавит состояний – это $Q = \{1, 2, 3\}$. Входной алфавит автомата $X = \{x_1, x_2\}$, выходной алфавит $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Матрица соединений данного автомата приведена ниже (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Матрица соединений автомата к примеру 2.1

$q \backslash q$	1	2	3
1	0	x_1,y_1	x_2,y_3
2	0	x_1,y_2	x_2,y_1
3	x_1,y_1	x_2,y_2	0

На рисунке 2.1 представлен граф (состояний) автомата.

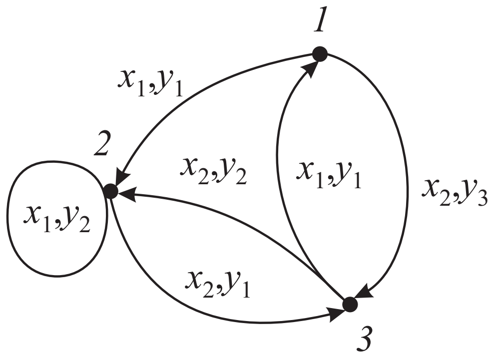


Рис. 2.1 – Переходной граф состояний

Если на вход автомата, находящегося в состоянии *1*, поступит, например, слово $\mathbf{x} = x_1x_2x_2x_1x_2x_2$, то на выходе появится слово $\mathbf{y} = y_1y_1y_2y_2y_1y_2$, а автомат перейдет в состояние *2*.

. . . .

Пример 2.2

Граф, представленный на рисунке 2.2, нельзя интерпретировать как некоторый автомат, поскольку в этом графе нарушено условие автоматности: из вершины *2* выходят два ребра с одной буквой *a*.

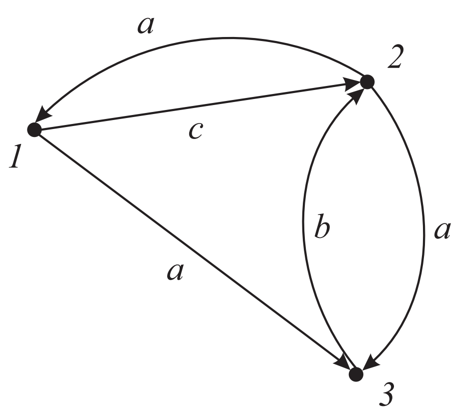


Рис. 2.2 – Граф, не являющийся автоматом

2.2 Виды автоматов и их свойства

Дадим несколько определений, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

Состояние q_j называется ***достижимым*** *из состояния q_i, если существует входное слово* **x***, такое, что* $\delta(q_i, \mathbf{x}) = q_j$. *Автомат называется* ***сильно связанным****, если из любого его состояния достижимо любое другое состояние.*

2.2.1 Автономные автоматы

Автомат называется ***автономным по входу****, если его входной алфавит состоит из одной буквы:* $X = \{x\}$. *Все входные слова у такого автомата имеют вид xx…x.*

Из произвольного автомата с входным алфавитом $X = \{x_1, \ldots x_m\}$ может быть построено m различных автономных по входу автоматов исключением из графа переходов автомата всех ребер, кроме ребер с выбранной буквой x_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Аналогично, автомат называется ***автономным по выходу****, если его выходной алфавит состоит из одной буквы* $Y = \{y\}$.

Автономный по выходу автомат получается из произвольного автомата с выходным алфавитом $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_k\}$ исключением из графа переходов ребер со всеми выходными буквами кроме выбранной буквы y_i.

Пример 2.3

Возьмем автомат из примера 2.1. Его автоматная таблица приведена в таблице 2.1.

Таблица автономного автомата по входной букве, например x_2, получится удалением всех столбцов, кроме столбца с буквой x_2 (табл. 2.3).

Таблица 2.3 – Автономный автомат по входной букве x_2 к примеру 2.3

$q\backslash x$	x_2
1	3, y_3
2	3, y_1
3	2, y_2

Таблица автономного автомата по выходной букве, например y_1, получится удалением всех элементов исходной таблицы, кроме элементов с буквой y_1 (табл. 2.4).

Таблица 2.4 – Автономный автомат по выходной букве y_1 к примеру 2.3

$q\backslash x$	x_1	x_2
1	2, y_1	–
2	–	3, y_1
3	1, y_1	–

. . . .

2.2.2 Автоматы синхронные и асинхронные

В синхронных автоматах переход из одного состояния в другое осуществляется через равные промежутки времени, задаваемые в реальных устройствах генератором тактовых импульсов. Другими словами, синхронный автомат реагирует на каждую букву входного алфавита.

В асинхронном автомате его внутреннее состояние может меняться только при изменении входного состояния. В результате этого изменения автомат всегда приходит в конечном итоге в некоторое устойчивое полное состояние[1], т. е. в такое полное состояние, в котором автомат остается до тех пор, пока не изменится его входное состояние.

Полагают также, что новое изменение входа не может произойти до того, как автомат перейдет в устойчивое полное состояние.

В итоге моменты перехода асинхронного автомата из состояния в состояние зависят от значения входа. Понятно, что при этом теряет смысл рассмотрение входных слов, содержащих одинаковые соседние буквы.

---

[1]Полное состояние – это совокупность входного и внутреннего состояний.

Сформулированные для асинхронного автомата условия налагают некоторые ограничения на таблицу переходов $\|\delta_{ij}\|$.

Чтобы было понятнее, рассмотрим вначале усиленный вариант этих условий, когда любое полное состояние автомата связано с некоторым устойчивым состоянием прямым, непосредственным переходом. Это означает, что если некоторый элемент δ_{ij} автоматной таблицы имеет значение q_k, то это же значение должен иметь и элемент δ_{kj}.

Такому требованию удовлетворяет, например, следующая таблица переходов (табл. 2.5).

Таблица 2.5 – Автоматная таблица для асинхронного автомата

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3	x_4
1	**1**	**1**	**1**	5
2	1	**2**	**2**	**2**
3	**3**	2	4	5
4	3	2	**4**	5
5	3	**5**	4	**5**

Жирным шрифтом выделены элементы, соответствующие устойчивым полным состояниям.

В общем виде эти условия формулируются так: для любого элемента δ_{ij} таблицы переходов должна выполняться цепочка равенств:

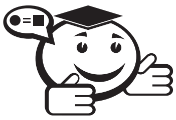
$$\delta_{ij} = k_1,\ \delta_{k_1 j} = k_2,\ ...,\ \delta_{k_p j} = k_p.$$

Это означает, что любое полное состояние (q_i, x_j) асинхронного автомата должно быть связано цепочкой переходов с некоторым устойчивым полным состоянием (q_{k_p}, x_j).

На таблицу выходов $\|\lambda_{ij}\|$ асинхронного автомата каких-либо ограничений не налагают.

2.2.3 Автоматы Мили и автоматы Мура

Общее определение автомата, данное в п. 2.1, задает так называемый *автомат Мили.* Характерной особенностью автомата Мили является то, что значение его выхода зависит от полного состояния, то есть как от внутреннего, так и от входного состояний. Другими словами, функция выхода λ является двуместной функцией $y(t)=\lambda\big(q(t-1),x(t)\big)$.

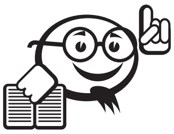


В случае если функция выхода зависит только от внутреннего состояния, но не от входа, получаем автомат, носящий название ***автомат Мура****. Для автомата Мура для любых q, x_i и x_j выполняется условие $\lambda(q,x_i)=\lambda(q,x_j)$, т. е. функция выхода одноместная.*

Часто ее в этом случае обозначают буквой μ и называют *функцией отметок*, так как она каждое состояние помечает вполне однозначно буквами выходного алфавита.

Для автомата Мура таблица выходов вырождается в один столбец, а автоматная таблица записывается с лишним столбцом. Матрица соединений также содержит лишний столбец.

Возможности этих двух видов автоматов совпадают, то есть для любого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура (и наоборот). Это утверждение можно сформулировать в виде теоремы.



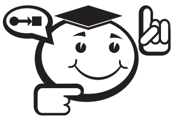
Теорема 2.1. Для произвольного автомата Мили

$$S=(X,Q,Y,\delta,\lambda),\ X=\{x_1,x_2,\ldots x_m\},\ Q=\{q_1,q_2,\ldots q_n\},$$

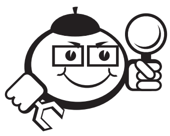
существует эквивалентный ему автомат Мура

$$S_{\text{М}}=\left(X_{\text{М}},Q_{\text{М}},Y_{\text{М}},\delta_{\text{М}},\mu\right).$$

Он может быть построен следующим образом: входной и выходной алфавиты исходного автомата Мили и эквивалентного автомата Мура совпадают $X_{\text{М}}=X$, $Y_{\text{М}}=Y$. Алфавит состояний $Q_{\text{М}}$ содержит $m\cdot n+n$ состояний: $m\cdot n$ состояний q_{ij} $(i=1,\ldots n, j=1,\ldots m)$, соответствующих парам (q_i,x_j) автомата S и n состояний q_{i0} $(i=1,\ldots n)$. Функция $\delta_{\text{М}}$ определяется так: $\delta_{\text{М}}(q_{i0},x_k)=q_{ik}$ $(i=1,\ldots n)$, $\delta_{\text{М}}(q_{ij},x_k)=q_{lk}$, где индекс l определяется функцией перехода автомата $S:\delta(q_i,x_j)=q_l$. Функция отметок $\mu(q_{i0})$ – не определена, а для остальных состояний $\mu(q_{ij})=\lambda(q_i,x_j)$. Состояние q_{i0} $(i=1,\ldots n)$ автомата $S_{\text{М}}$ отождествляется с начальным состоянием q_i автомата S (если задан инициальный автомат).



Доказательство теоремы заключается в том, чтобы показать равенство автоматных отображений $S\left(q_i, \mathbf{x}\right) = S_{\text{М}}\left(q_{i0}, \mathbf{x}\right)$ для любого состояния q_i и любого слова **x**. Это делается индукцией по длине **x** и предлагается проделать самостоятельно.



Пример 2.4

Автомат Мили задан автоматной таблицей (табл. 2.6).

Таблица 2.6 – Автомат Мили к примеру 2.4

$q\backslash x$	x_1	x_2
1	$2, y_1$	$3, y_1$
2	$2, y_2$	$3, y_2$
3	$1, y_3$	$2, y_1$

Для данного автомата число состояний $n = 3$, число входных букв $m = 2$. Построим эквивалентный автомат Мура. В соответствии с теоремой 2.1 число состояний эквивалентного автомата Мура составит $n \cdot m + n = 9$. Полагая в формуле $\delta_{\text{М}}(q_{i0}, x_k) = q_{ik}$ $i = 1,2,3;\ k = 1,2$, получим:

$$\delta_{\text{М}}\left(q_{10}, x_1\right) = q_{11}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{20}, x_1\right) = q_{21}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{30}, x_1\right) = q_{31},$$

$$\delta_{\text{М}}\left(q_{10}, x_2\right) = q_{12}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{20}, x_2\right) = q_{22}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{30}, x_2\right) = q_{32}.$$

Воспользовавшись формулой $\delta_{\text{М}}\left(q_{ij}, x_k\right) = q_{lk}$ и учитывая, что индекс l определяется из соотношения $\delta\left(q_i, x_j\right) = q_l$ таблицы 2.5, имеем:

$$\delta_{\text{М}}\left(q_{11}, x_1\right) = q_{21}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{21}, x_1\right) = q_{21}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{31}, x_1\right) = q_{11},$$

$$\delta_{\text{М}}\left(q_{11}, x_2\right) = q_{22}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{21}, x_2\right) = q_{22}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{31}, x_2\right) = q_{12},$$

$$\delta_{\text{М}}\left(q_{12}, x_1\right) = q_{31}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{22}, x_1\right) = q_{31}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{32}, x_1\right) = q_{21},$$

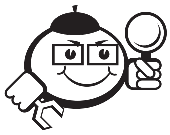
$$\delta_{\text{М}}\left(q_{12}, x_2\right) = q_{32}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{22}, x_2\right) = q_{32}, \quad \delta_{\text{М}}\left(q_{32}, x_2\right) = q_{22}.$$

Далее находим функцию отметок по формуле $\mu\left(q_{ij}\right) = \lambda\left(q_i, x_j\right)$ и составляем автоматную таблицу автомата Мура (табл. 2.7).

Таблица 2.7 – Автомат Мура к примеру 2.4

	x_1	x_2	μ
q_{10}	q_{11}	q_{12}	–
q_{20}	q_{21}	q_{22}	–
q_{30}	q_{31}	q_{32}	–
q_{11}	q_{21}	q_{22}	y_1
q_{12}	q_{31}	q_{32}	y_1
q_{21}	q_{21}	q_{22}	y_2
q_{22}	q_{31}	q_{32}	y_2
q_{31}	q_{11}	q_{12}	y_3
q_{32}	q_{21}	q_{22}	y_1

Обратное (получение автомата Мили по автомату Мура) очевидно и не вызывает трудностей.



Пример 2.5

Пусть автомат Мура задан автоматной таблицей (табл. 2.8).

Таблица 2.8 – Автомат Мура к примеру 2.5

	x_1	x_2	μ
1	2	3	y_2
2	3	2	y_1
3	1	2	y_2

Построим эквивалентный автомат Мили *B*. Используя таблицу 2.8, строим обычную функцию выхода $\lambda(q,x)$, определяющую автомат Мили $B=(X,Q,Y,q_1\in Q,\delta,\lambda)$:

$$\lambda(1,x_1)=y_1,\quad \lambda(1,x_2)=y_2,$$
$$\lambda(2,x_1)=y_2,\quad \lambda(2,x_2)=y_1,$$
$$\lambda(3,x_1)=y_2,\quad \lambda(3,x_2)=y_1.$$

Автоматная таблица построенного автомата Мили выглядит следующим образом (табл. 2.9).

Таблица 2.9 – Автомат Мили к примеру 2.5

	x_1	x_2
1	$2, y_1$	$3, y_2$
2	$3, y_2$	$2, y_1$
3	$1, y_2$	$2, y_1$

. . . .

Можно проверить, что автомат Мили B, заданный таблицей 2.9, индуцирует такое же автоматное отображение, что и автомат Мура A, определяемый таблицей 2.8.

Таким образом, при исследовании автоматов достаточно пользоваться только автоматом Мура. Это в некоторых случаях удобнее потому, что автомат Мура можно рассматривать как автомат без выходов, состояния которого различным образом отмечены. Можно считать, что таких отметок вообще две (например, 0 и 1) и они делят состояния на два класса, один из которых можно назвать заключительным. Это позволяет дать еще одно определение абстрактного автомата – *автомата без выходов* $S=\left(X,Q,Y,\lambda,q_1,F\right)$, где $F\subseteq Q$ – множество заключительных состояний, а q_1 – начальное состояние автомата.

Вспоминая понятие автономного автомата, можно сказать, что автомат Мили может быть представлен как совокупность автономных автоматов по входным и выходным буквам. В случае автоматов Мура имеет смысл говорить об автономных автоматах только по входным буквам.

2.2.4 Автоматы первого и второго рода

Вспомним интерпретацию автомата как некоторого устройства, работающего в дискретном времени. Первопричиной появления выходного сигнала и изменения состояния является входной сигнал. Следовательно, выходной сигнал $y(t)$ всегда появляется после входного сигнала $x(t)$. Однако относительно времени t перехода автомата из состояния $q(t-1)$ в состояние $q(t)$ выходной сигнал может появиться либо раньше, либо позже этого момента времени.

В первом случае уравнения, описывающие работу автомата, будут следующие:

$$\begin{aligned} q(t)&=\delta\big(q(t-1),x(t)\big),\\ y(t)&=\lambda\big(q(t-1),x(t)\big), \end{aligned} \tag{2.6}$$

а автомат будет именоваться *автоматом первого рода*.

Во втором случае получаем *автомат второго рода* с уравнениями:

$$q(t)=\delta\big(q(t-1),x(t)\big),$$
$$y(t)=\lambda\big(q(t),x(t)\big). \qquad (2.7)$$

В уравнениях (2.6) и (2.7) функция λ называется либо обычной (для автоматов первого рода), либо сдвинутой (для автоматов второго рода) функцией выхода.

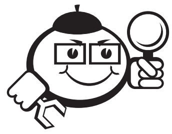
Установим взаимосвязь между автоматами первого и второго рода. Пусть дан автомат второго рода $S=(X,Q,Y,\delta,\lambda)$. Запишем функцию переходов $\delta(q,x)$ и сдвинутую функцию выхода $\lambda(q,x)$:

$$y(t)=\lambda\big(q(t),x(t)\big),$$
$$q(t)=\delta\big(q(t-1),x(t)\big).$$

Подставим в первое уравнение $q(t)$, определяемое вторым уравнением. Тогда получим уравнение

$$y(t)=\lambda\Big(\delta\big(q(t-1),x(t)\big),x(t)\Big)=\lambda'\big(q(t-1),x(t)\big),$$

определяющее обычную функцию выхода $\lambda'(q,x)$, которая характеризует автомат первого рода. Таким образом, подставляя в сдвинутую функцию выхода $\lambda(q,x)$ автомата второго рода функцию переходов $\delta(q,x)$, получаем автомат первого рода $S'=\{X,Q,Y,\delta,\lambda'\}$, который индуцирует то же самое автоматное отображение, что и автомат *S*. Такое сведение автомата второго рода к эквивалентному автомату первого рода называется интерпретацией автомата второго рода автоматом первого рода.



Пример 2.6

Пусть задан автомат $A=(X,Q,Y,q_1\in Q,\delta,\lambda)$, где $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Q=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, а автоматная таблица представлена в таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Автоматная таблица к примеру 2.6

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2, y_1	4, y_1	1, y_2
2	1, y_2	3, y_1	4, y_1
3	1, y_1	4, y_2	2, y_2
4	4, y_2	1, y_1	3, y_1

Предположим, что автомат A является автоматом первого рода. Тогда функция выхода $\lambda(q,x)$, полученная из таблицы 2.10 и представленная в таблице 2.11, будет являться обычной функцией выхода.

Таблица 2.11 – Обычная функция выхода автомата к примеру 2.6

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	y_1	y_1	y_2
2	y_2	y_1	y_1
3	y_1	y_2	y_2
4	y_2	y_1	y_1

Функция переходов $\delta(q,x)$, выделенная из таблицы 2.10, приведена в таблице 2.12.

Таблица 2.12 – Функция переходов автомата к примеру 2.6

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2	4	1
2	1	3	4
3	1	4	2
4	4	1	3

Если на вход автомата, находящегося первоначально в состоянии 1, поступит слово $\mathbf{x} = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$, то на выходе будет слово $\mathbf{y} = y_1y_2y_1y_1y_2y_1$.

Теперь предположим, что автомат A является автоматом второго рода. Тогда таблица 2.10 определяет сдвинутую функцию выхода. При поступлении на вход автомата второго рода слова $\mathbf{x} = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$, такого же, как и в случае автомата первого рода, на выходе появится слово $\mathbf{y} = y_2y_1y_1y_2y_1y_2$, которое отличается от соответствующего выходного слова автомата первого рода. Поэтому отображение, индуцируемое автоматом первого рода, отличается от отображения, индуцируемого автоматом второго рода.

Построим автомат A' первого рода, эквивалентный автомату A первого рода. Подставляя в сдвинутую функцию выхода $\lambda(q,x)$, заданную в таблице 2.11, функцию перехода $\delta(q,x)$ из таблицы 2.12, получим обычную функцию выхода $\lambda'(q,x)$ (см. табл. 2.13).

Таблица 2.13 – Сдвинутая функция выхода автомата к примеру 2.6

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	y_2	y_1	y_2
2	y_1	y_2	y_1
3	y_1	y_1	y_1
4	y_2	y_1	y_2

Функция $\lambda'(q,x)$ задает автомат первого рода $A' = (X, Q, Y, q_1 \in Q, \delta, \lambda')$.

Объединяя таблицу 2.13 выходов и таблицу 2.11 переходов, получим автоматную таблицу автомата A' первого рода, интерпретирующего автомат A второго рода (табл. 2.14).

Таблица 2.14 – Автоматная таблица автомата первого рода к примеру 2.6

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2, y_2	4, y_1	1, y_2
2	1, y_1	3, y_2	4, y_1
3	1, y_1	4, y_1	2, y_1
4	4, y_2	1, y_1	3, y_2

Легко заметить, что при поступлении на вход автомата A' первого рода того же слова $\mathbf{x} = x_1x_1x_2x_3x_2x_3$, на выходе получим слово $\mathbf{y} = y_2y_1y_1y_2y_1y_2$, такое же, как и в случае автомата A второго рода. Таким образом, автомат A' интерпретирует автомат A.

. . . .

Несколько сложнее показать (на этом останавливаться не будем), что для любого автомата первого рода можно построить эквивалентный ему автомат второго рода.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что автоматы первого и второго рода мы различаем, когда интерпретируем работу конечного абстрактного автомата некоторым реальным устройством.

В дальнейшем по умолчанию будем считать, что задан автомат первого рода, если не оговорено обратное.

2.2.5 Гомоморфизм, изоморфизм и эквивалентность автоматов

Ранее уже упоминались эквивалентные автоматы. Приведем строгое определение эквивалентности. Но прежде дадим понятия гомоморфизма и изоморфизма.

Пусть $S=(X_S,Q_S,Y_S,\delta_S,\lambda_S)$, *и* $T=(X_T,Q_T,Y_T,\delta_T,\lambda_T)$ *– два автомата. Три отображения* $\mathrm{f}:X_S\to X_T$, $\mathrm{g}:Q_S\to Q_T$ *и* $\mathrm{h}:Y_S\to Y_T$ *называются **гомоморфизмом** автомата S в автомат T, если для любых* $x\in X_S$, $q\in Q_S$ *и* $y\in Y_S$ *выполняются условия:*

$$\begin{aligned}&\delta_T\big(\mathrm{g}(q),\mathrm{f}(x)\big)=\mathrm{g}\big(\delta_S(q,x)\big),\\&\lambda_T\big(\mathrm{g}(q),\mathrm{f}(x)\big)=\mathrm{h}\big(\lambda_S(q,x)\big).\end{aligned}\tag{2.8}$$

В этом случае автомат *T* называется гомоморфным автомату *S*. Если все три отображения сюръективны, то эта тройка называется *гомоморфизмом S на T*. Если, кроме того, эти отображения взаимно однозначны, то они называются *изоморфизмом S на T*. Автоматы, для которых существует изоморфизм, называются *изоморфными*. Это обозначается *S*~*T*.

Понятно, что мощности соответствующих алфавитов у таких автоматов должны быть одинаковыми. Изоморфизм можно пояснить так: автоматы *S* и *T* изоморфны, если входы, выходы и состояния *S* можно переименовать так, что автоматная таблица *S* превратится в автоматную таблицу *T*. Изоморфизм соответствующих графов переходов является необходимым, но недостаточным условием изоморфизма автоматов. При гомоморфизме, кроме переименования, происходит еще и «склеивание» некоторых состояний *S* в одно состояние *T*.

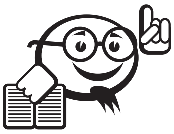
Теперь пусть оба автомата *S* и *T* имеют одинаковые входные и выходные алфавиты. Состояние *q* автомата *S* и состояние *r* автомата *T* называют *неотличимыми*, если для любого входного слова $S(q,\mathbf{x})=T(r,\mathbf{x})$.

Автоматы *S* и *T* называют неотличимыми, если для любого состояния *q* автомата *S* найдется неотличимое от него состояние *r* автомата *T* и наоборот. Неотличимость автоматов означает, что автоматное отображение, реализуемое одним из них, может быть реализовано другим. Отношение неотличимости между состояниями (и автоматами) рефлексивно, симметрично и транзитивно, а следовательно, является отношением эквивалентности. Это и явилось основанием называть неотличимость эквивалентностью и говорить об *эквивалентных* *состояниях*, или *эквивалентных автоматах*, имея в виду отношение неотличимости.

Переход от автомата S к эквивалентному ему автомату называется эквивалентным преобразованием автомата S. Существует много различных задач по эквивалентному преобразованию автоматов к автомату с заданными свойствами.

2.2.6 Минимизация автоматов

Среди задач по эквивалентному преобразованию автоматов наиболее изученной и интересной является задача о минимизации числа состояний автомата, или, более коротко, задача минимизации автомата: среди автоматов, эквивалентных заданному, найти автомат с наименьшим числом состояний – так называемый минимальный автомат. При интерпретации автомата цифровым устройством это означает минимизацию числа элементов памяти такого устройства.



Теорема 2.2. Для любого автомата S существует минимальный автомат S_0, единственный с точностью до изоморфизма. Если множество состояний S разбивается на k классов эквивалентности $(k \le n)$: $C_1 = \{q_{11}, \ldots q_{1p_1}\}$, $C_2 = \{q_{21}, \ldots q_{2p_2}\}, \ldots,$ $C_k = \{q_{l1}, \ldots, q_{lp_k}\}$, то S_0 имеет l состояний.

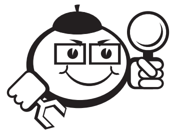
Эта теорема приводится без доказательства и, к сожалению, не конструктивна, поскольку не дает метода нахождения классов эквивалентности. Определение неотличимости также не дает такого метода, поскольку предполагает перебор по бесконечному множеству входных слов. Среди многочисленных алгоритмов минимизации наибольшее распространение получил алгоритм Мили, который и приводится ниже (он описан индуктивно).

Дан автомат $S = (X, Q, Y, \delta, \lambda)$ с n состояниями. На каждом шаге алгоритма строится некоторое разбиение Q на классы, причем разбиение на каждом последующем шаге получается расщеплением некоторых классов предыдущего шага.

Шаг 1. Два состояния q и q' относим в один класс C_{1j}, если и только если для любого $x \in X$ $\lambda(q, x) = \lambda(q', x)$.

Шаг $i + 1$. Два состояния q и q' из одного класса $C_{i,j}$ относим в один класс $C_{i+1,j}$, если и только если для любого $x \in X$ состояния $\delta(q,x)$ и $\delta(q',x)$ принадлежат одному и тому же классу $C_{i,l}$. Если $i + 1$-й шаг не меняет разбиения, то алгоритм заканчивает свою работу и полученное разбиение является разбиением на классы эквивалентных состояний, в противном случае применяем шаг $i + 1$ к полученному разбиению.

Так как на каждом шаге число классов увеличивается (а всего их не более n), то приведенный алгоритм заканчивается не больше, чем за $(n-1)$ шагов. Нетрудно показать, что алгоритм действительно дает разбиение на классы эквивалентности.



Пример 2.7

Для автомата A с восемью состояниями и двумя выходными буквами, заданного таблицей 2.15, алгоритм строит следующую последовательность разбиений:

- 1-й шаг: {1,5}, {2,3,8}, {4,6,7};
- 2-й шаг: {1,5}, {2}, {3,8}, {4,6,7};
- 3-й шаг: {1,5}, {2}, {3,8}, {4,7}, {6};
- 4-й шаг: {1,5}, {2}, {3}, {8}, {4,7}, {6}.

Таблица 2.15 – Автоматная таблица к примеру 2.7

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	4,1	2,2	5,1
2	5,2	1,1	4,2
3	3,2	5,1	4,2
4	5,1	8,2	4,2
5	7,1	2,2	1,1
6	1,1	2,2	4,2
7	5,1	8,2	7,2
8	3,2	5,1	6,2

Последнее разбиение является искомым, т. е. минимальный автомат имеет шесть состояний. Если найденные классы переобозначить, например, по порядку: $\{1,5\}\to 1$; $\{2\}\to 2$, $\{3\}\to 3$, $\{8\}\to 4$, $\{4,7\}\to 5$, $\{6\}\to 6$, то автоматная таблица минимального автомата будет следующей (табл. 2.16).

Таблица 2.16 – Автоматная таблица минимального автомата к примеру 2.7

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	5,1	2,2	1,1
2	1,2	1,1	5,2
3	3,2	1,1	5,2
4	3,2	1,1	6,2
5	1,1	4,2	5,2
6	1,1	2,2	5,2

. . . .

2.2.7 Частичные автоматы и их свойства

Представим себе, что хотя бы одна из двух функций, δ или λ, является не полностью определенной, то есть для некоторых пар (состояние-вход) функция перехода или выхода не определена. Это отражается наличием прочерков в соответствующих местах автоматной таблицы или матрицы соединений. В графе переходов, где функция δ не определена, нарушено условие полноты. В таких случаях автомат называется *частичным*, или не полностью определенным. Для частичного автомата задание функций δ и λ нуждаются в уточнении. Удобно при этом пользоваться значком $\cong$: запись $A \cong B$ означает, что либо A и B одновременно не определены, либо определены и равны.

Функция перехода $\delta(q_i, \mathbf{x})$:

1) для каждой входной буквы x_j функция $\delta(q_i, x_j)$ задана автоматной таблицей;
2) если функция $\delta(q_i, \mathbf{x})$ определена, то $\delta(q_i, \mathbf{x}\,x_j) \cong \delta(\delta(q_i, \mathbf{x}), x_j)$;
3) если функция $\delta(q_i, \mathbf{x})$ не определена, то $\delta(q_i, \mathbf{x}\,x_j)$ не определена для всех x_j.

Выходная функция $\lambda(q_i, \mathbf{x})$:

$$\lambda(q_i, \mathbf{x}x_j) \cong \lambda(\delta(q_i, \mathbf{x}), x_j).$$

Автоматный оператор $S(q_i, x_j)$:

1) $S\left(q_i, x_j\right) = \lambda\left(q_i, x_j\right)$ (если функция $\lambda\left(q_i, x_j\right)$ не определена, то значение $S(q_i, x_j)$ – это прочерк);
2) $S\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right) = S\left(q_i, \mathbf{x}\right)\lambda\left(\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right), x_j\right)$, если $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ определена. В случае если не определена $\lambda\left(\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right), x_j\right)$, справа от $S\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ ставится прочерк;
3) если не определена функция $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$, то не определено и отображение $S\left(q_i, \mathbf{x}x_j\right)$.

Отсюда видна неравноправность функций δ и λ: если δ не определена на слове **x**, то она не определена и на всех его продолжениях, а для функции λ это не обязательно. На графе это наглядно видно: если функция $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ не определена, то это значит, что не определен путь **x** из вершины q_i, поэтому не ясно, как его продолжить. Если же $\delta\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ определена, следовательно, определен путь **x** из вершины q_i, то, идя по этому пути, можно прочесть и выходное слово (возможно, с прочерками там, где функция выхода не определена). Входное слово **x**, для которого автоматное отображение $S\left(q_i, \mathbf{x}\right)$ определено, называется *допустимым* для q_i. Таким образом, отображение, индуцируемое частичным автоматом, является не чем иным, как частичным отображением, областью определения которого является множество допустимых слов данного автомата.

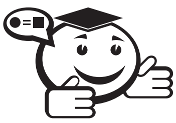
Понятие неотличимости для частичных автоматов также нуждается в корректировке. Наиболее простое обобщение этого понятия следующее. Состояния q_i автомата S и r_j автомата T называются *псевдонеотличимыми*, если для любого слова **x** $S\left(q_i, \mathbf{x}\right) \cong T\left(r_j, \mathbf{x}\right)$, то есть если области определения операторов S и T совпадают и в этих областях q_i и r_j эквивалентны. Автоматы S и T псевдонеотличимы, если для любого состояния S найдется псевдонеотличимое состояние T и наоборот. Достоинство такого определения в том, что оно совпадает с обычным определением неотличимости для вполне определенных автоматов и, кроме того, является отношением эквивалентности. Недостаток же этого определения в том, что оно искусственно сужает рассматриваемые классы псевдонеотличимых автоматов, требуя совпадения областей определения сравниваемых состояний. То есть понятие псевдонеотличимости слишком слабое и не учитывает всех возможностей, скажем, минимизации автоматов.

Для частичных автоматов часто используются понятия эквивалентного и изоморфного продолжения (покрытия) автоматов. Для иллюстрации этих понятий рассмотрим автомат, заданный таблицей 2.17.

Таблица 2.17 – Автоматная таблица частичного автомата

$q \backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	2,0	–	3,–
2	–	1,–	3,0
3	2,1	1,–	3,0

Возьмем состояния 2 и 3 (q_2 и q_3). Область определения для q_2 содержится в области определения для q_3, и, кроме того, в области определения для q_2 выполняется условие $S(q_2,\mathbf{x}) = S(q_3,\mathbf{x})$ для любого слова **x**, так как при любой входной букве x $\lambda(q_2,x) = \lambda(q_3,x)$ и $\delta(q_2,x) = \delta(q_3,x)$. Поскольку область определения для q_3 включает в себя область определения для q_2, то можно сказать, что возможности состояния q_3 больше, чем q_2, на тех словах, на которых $S(q_2,\mathbf{x})$ не определено, а $S(q_3,\mathbf{x})$ определено. Если заменить теперь состояние q_2 на q_3 (просто вычеркнуть строку q_2, а переходы в q_2 поменять на переходы в q_3), то получим автомат S', который «делает больше, чем *S*». Говорят, что автомат S' покрывает автомат *S*, или является продолжением автомата *S*, или автомат S' содержит (включает) автомат *S*. В этом случае S' есть эквивалентное продолжение, покрытие или надавтомат автомата *S*, а *S* – эквивалентное сужение или подавтомат автомата S'. Это обозначается как $S \subseteq S'$ или $S' \supseteq S$.



Дадим более строгое определение покрытия. ***Состояние q_i автомата S покрывает (включает) состояние r_j автомата T (S и T могут совпадать), если для любого слова x из того, что $T(r_j,\mathbf{x})$ определено, следует, что $S(q_i,\mathbf{x})$ определено и $T(r_j,\mathbf{x}) = S(q_i,\mathbf{x})$. Автомат S включает (покрывает) автомат T, если для любого состояния T найдется покрывающее его состояние S****. Таким образом, автомат $S = (X_S, Q_S, Y_S, \delta_S, \lambda_S)$ покрывает автомат $T = (X_T, Q_T, Y_T, \delta_T, \lambda_T)$, если $X_T \subseteq X_S$, $Y_T \subseteq Y_S$, а ав-*

томатное отображение $S(q_S, \mathbf{x}_S)$ $(q_S \in Q_S, \mathbf{x}_S \in X_S^*)$ *продолжает отображение* $T(q_T, \mathbf{x}_T)$ $(q_T \in Q_T,\ \mathbf{x}_T \in X_T^*)$ *на множестве* X_S^*.

. . . .

Пусть теперь *S*, *T* и *W* – автоматы, удовлетворяющие условиям $S \sim T$ и $T \subseteq W$. Тогда автомат *S* является изоморфно вложенным в *W*. Можно также сказать, что *W* является изоморфным продолжением *S*, а автомат *S* является изоморфным сужением автомата *W*. Обозначается это $S \underset{\sim}{\subseteq} W$.

Можно показать, что отношение покрытия (равно как и изоморфного вложения) автоматов обладает следующими свойствами:

- $A \subseteq A$ (рефлексивность),
- $(A \subseteq B) \& (B \subseteq A) \mapsto A = B$ (антисимметричность),
- $(A \subseteq B) \& (B \subseteq C) \mapsto A \subseteq C$ (транзитивность),

т. е. являются отношениями нестрогого порядка.

Вернемся к таблице 2.14 и обратим теперь внимание на состояния 1 и 2. Они примечательны тем, что можно придумать состояние, покрывающее и q_1, и q_2. Например, это будет некоторое состояние 4: 2,0; 1, – ; 3,0. Такие состояния q_1 и q_2 называются совместимыми.

Состояния q_i автомата *S* и r_j автомата *T* (может быть $S = T$) *совместимы*, если существует состояние p_k (возможно, какого-то третьего автомата *W*), покрывающее и q_i, и r_j. Автоматы *S* и Т *совместимы*, если существует автомат *W*, включающий *S* и *T*. Можно дать определение совместимости автоматов, рассматривая автоматные отображения: состояния q_j и r_j совместимы, если для любого слова **x** либо одно из отображений $S(q_i, \mathbf{x})$ и $T(r_j, \mathbf{x})$ не определено, либо выходные слова $S(q_i, \mathbf{x})$ и $T(r_j, \mathbf{x})$ (они могут содержать прочерки) непротиворечивы, т. е. не содержат на одинаковых местах разных букв.

Используя понятия совместимости и покрытия, можно предложить план минимизации частичных автоматов, аналогичный методу минимизации вполне определенных автоматов: находим совместимые состояния и заменяем их покрывающим состоянием. Однако здесь имеются некоторые трудности. Отношение совместимости в отличие от неотличимости и отношения включения нетранзитивно и не является отношением эквивалентности. Это означает, что классы совместимости могут пересекаться.

*Назовем систему классов совместимости **полной**, если $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = Q$, и **замкнутой**, если из того, что состояния q и q' находятся в одном классе совместимости, например в C_i ($q \in C_i$, $q' \in C_i$), следует, что состояния $\delta(q, \mathbf{x})$ и $\delta(q', \mathbf{x})$ также находятся в одном классе совместимости, например в C_j, всякий раз, когда соответствующие функции перехода определены.*

Имеется теорема (Полла – Ангера), аналогичная теореме 2.2:

Теорема 2.3. Если для частичного автомата имеется полная и замкнутая система классов совместимости $C_1 \ldots C_k$, то существует автомат S', включающий *S*. Автомат $S' = (X_S, Q_S, Y_S, \delta_S, \lambda_S)$ строится следующим образом. Множество состояний равно $Q_S = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$. Для любого C_i и любой буквы $x \in X_S$ функция $\delta_{S'}(C_i, x) = C_j$, если для некоторых $q \in C_i$ функция перехода $\delta(q, x) \in C_j$; $\delta_{S'}(C_i, x)$ не определена, если для всех $q \in C_i$ функция перехода $\delta_S(q, x)$ не определена. Функция выхода $\lambda_{S'}(C_i, x) = y$, если для некоторых состояний $q \in C_i$ функция выхода $\lambda_S(q, x) = y$ и $\lambda_{S'}(C_i, x)$ не определена, если для всех $q \in C_i$ функция $\lambda_S(q, x)$ не определена.

Нетрудно видеть, что состояние C_i автомата S' покрывает все состояния из класса совместимости C_i автомата *S* и, следовательно (ввиду полноты системы классов $\{C_i\}$), автомат S' покрывает автомат *S*. Что и требовалось доказать.

Если автомат *S* полностью определен, обе теоремы (2.2 и 2.3) совпадают.

Для минимизации частичных автоматов можно использовать и алгоритм Мили. При этом нужно сначала построить различные доопределения частичного автомата до полных автоматов (конечно, они будут покрывать исходный автомат), а затем минимизировать полученные полные автоматы по алгоритму Мили.

Реализация этого пути на практике сталкивается со значительными, порой непреодолимыми трудностями. По крайней мере, две из них заслуживают особого внимания.

1. Доопределить частичный автомат S можно различным образом. При этом получаются автоматы, скажем S_1,... S_N, неэквивалентные между собой. Соответствующие минимальные автоматы $S_{1_0},...,S_{N_0}$ могут иметь различное число состояний, и также неэквивалентны между собой, т. е. их нельзя получить друг из друга эквивалентными преобразованиями. Поэтому результат минимизации будет сильно зависеть от того, насколько удачно мы доопределим исходный частичный автомат. Кроме того, полученный результат нельзя улучшить эквивалентными преобразованиями и необходимо весь путь проделывать заново: доопределять автомат по-другому, находить классы эквивалентных состояний и т. д. Число различных вариантов доопределения достаточно велико: нетрудно подсчитать, что если $|Q_S| = n$, $|Y_S| = k$, функция перехода δ_S не определена в p клетках автоматной таблицы, а функция выхода λ_S – в r клетках, то это число равно $n^p \cdot k^r$.
2. Даже полный перебор всех вариантов доопределения может не привести к минимальному автомату. Алгоритм Мили дает систему непересекающихся классов совместимости, но ведь эти классы могут пересекаться. Из-за возможности пересечения классов совместимости число различных вариантов минимизации еще больше числа вариантов доопределения.

Пример 2.8

Простой пример иллюстрирует вышеизложенное. Рассмотрим автомат S, заданный таблицей 2.18.

Таблица 2.18 – Автоматная таблица к примеру 2.8

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	1, –	2,0
2	3,0	1,0
3	2,1	1,0

Есть два варианта его доопределения: либо $\lambda(1, x_1) = 0$, либо $\lambda(1, x_1) = 1$. Легко видеть, что ни в первом, ни во втором случае автомат не минимизируется, так как не имеет эквивалентных состояний. Это означает, что исходный автомат S не имеет нетривиальной системы замкнутых непересекающихся классов совместимости. Но для автомата S существует замкнутая система пересекающихся классов совместимости $C_1 = \{1,2\}$ и $C_2 = \{1,3\}$ и по теореме 2.3 имеется автомат S' с двумя состояниями (табл. 2.19), включающий автомат S.

Таблица 2.19 – Автоматная таблица минимального автомата к примеру 2.8

	x_1	x_2
C_1	$C_2, 0$	$C_1, 0$
C_2	$C_1, 1$	$C_1, 0$

Перечисленные трудности заставляют искать дополнительные методы построения системы классов совместимости, некоторые из них изложены в [8].

. . . .

2.3 Распознавание множеств автоматами

2.3.1 Понятие события и постановка задачи представления событий автоматами

Пусть $X = \{x_1 \ldots x_m\}$ – произвольный входной алфавит, а X^* – множество всех слов в этом алфавите.

. . . .

Тогда любое подмножество $E \subseteq X^*$ назовем ***событием*** *в алфавите X.*

. . . .

Конечно, можно было бы просто говорить «множество слов», но термин «событие» прижился в теории автоматов и стал общепринятым.

Для простоты изложения далее будем оперировать с автоматами без выходов.

. . . .

Событие $E \subseteq X^*$ назовем ***представимым*** *в автомате $S = (X, Q, \delta, q_1, F)$, если $\delta(q_1, \mathbf{x}) \in F$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \in E$.*

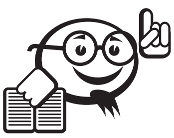
. . . .

Всякому автомату при заданных q_1 и F однозначно соответствует представимое в нем событие: на графе автомата оно соответствует множеству путей, ведущих из q_1 в вершины, принадлежащие множеству заключительных состояний F. Событие называется представимым, если существует конечный автомат, в котором оно представимо. Синонимом этого понятия является множество, определимое, или допустимое, или распознаваемое автоматом. Другими словами представимое в автомате событие можно назвать множеством, разрешимым автоматом.

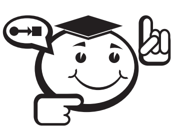
Начальное состояние q_1 также может относиться к множеству заключительных состояний $q_1 \in F$. В этом случае автомат, ничего не имея на входе, уже что-то представляет. Принято считать, что это «что-то» – пустое слово (пустой символ e) и оно содержится в событии, представимом этим автоматом. Для произвольного слова $\mathbf{x}$ выполняется равенство $e\mathbf{x} = \mathbf{x}e = \mathbf{x}$, то есть пустое слово e играет роль единицы в свободной полугруппе слов входного алфавита, где ассоциативной бинарной операцией является *конкатенация* (приписывание одного слова к другому).

Не нужно путать пустое слово e с пустым событием (пустым множеством Ø). Автомат представляет пустое событие Ø, если ни одно из его заключительных состояний не достижимо из начального состояния.

До сих пор мы рассматривали конечную последовательность букв входного алфавита, то есть слова конечной длины. Но можно говорить, что автомат распознает и бесконечную последовательность букв $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots$, если он представляет множество $E = \left\{ x_{i_1}, x_{i_1} x_{i_2} \ldots \right\}$, составленное из всех начальных отрезков бесконечного слова $\mathbf{x}$. Оказывается, что не все события представимы в автоматах. Об этом говорит следующая теорема.



Теорема 2.4. Существуют события, непредставимые в автоматах, именно: никакая непериодическая бесконечная последовательность не распознаваема конечным автоматом.



Первая часть теоремы должна быть очевидна: во-первых, из сопоставления мощностей соответствующих множеств (множество всех событий континуально, а множество конечных автоматов счетное), а во-вторых, потому, что существуют неразрешимые множества.

Вторая часть теоремы говорит о том, что могут быть разрешимые множества, но не представимые в автоматах. Пример такой последовательности, скажем, а алфавите $\{0,1\}$: 010110111011110…

Действительно, предположим, что некоторая непериодическая последовательность $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots$ все же распознаваема автоматом S с n состояниями. Тогда для любого ее начального отрезка $\mathbf{x}_k = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ будет верным соотношение $\delta(q_1, \mathbf{x}_k) = q_{i_k}$, где q_{i_k} – заключительное состояние.

В процессе переработки последовательности $\mathbf{x}$ автомат проходит последовательность заключительных состояний $q_{i_1}, \ldots q_{i_k} \ldots$, а так как множество Q_S конечно, то какое-то состояние q_{i_k} встретится дважды: $q_{i_k} = q_{i_{k+n}}$ Таким образом, выполняется соотношение $\delta\left(q_{i_k}, x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}} \ldots x_{i_{k+n}}\right) = q_{i_k}$ (все состояния, проходимые автоматом, заключительные). Поэтому, если на вход автомата в состоянии q_1 подать периодическую бесконечную последовательность $\mathbf{x_1} = x_{i_1} \ldots x_{i_k} \left(x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}} \ldots x_{i_{k+n}}\right)$, где в скобках – период такой последовательности, то автомат будет проходить последовательность заключительных состояний. Это означает, что все начальные отрезки слова $\mathbf{x_1}$ входят в событие, представимое в автомате, и, следовательно, автомат не отличает $\mathbf{x_1}$ от $\mathbf{x}$, то есть не распознает $\mathbf{x}$ вопреки предположению. Что и требовалось доказать.

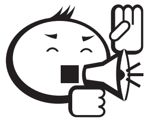
. . . .

Из теоремы 2.4 следует, что класс множеств, распознаваемых автоматом, есть лишь часть (собственное подмножество) класса разрешимых множеств. Отсюда и из теоремы Райса[1] вытекает, что свойство множества «быть представимым в конечном автомате» алгоритмически неразрешимо. Поэтому не имеет смысла описывать эти множества в терминах произвольных разрешимых множеств и требуются какие-то другие, более слабые, средства такого описания.

---

[1] Теорема Райса гласит, что никакое нетривиальное свойство вычислимых функций (или разрешимых множеств) не является алгоритмически разрешимым, т. е. по описанию алгоритма, вычисляющего некоторую функцию (формирующему некоторое множество), невозможно установить ее (функции) свойства.

2.3.2 Регулярные события и алгебра Клини

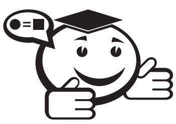


Зададим три операции над событиями R и S в алфавите X.

1. *Объединением* (дизъюнкцией) событий R и S называется событие P, обозначаемое $R \cup S = P$, которое образуется обычным теоретико-множественным объединением множеств R и S.
2. *Конкатенацией* (умножением) событий R и S будет событие $U = R \cdot S$, состоящее из слов вида $\mathbf{u} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$, *где* $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{r} \in R$, $\mathbf{s} \in S$, то есть слова события U образуются приписыванием справа любого слова события S к любому слову события R (но не наоборот!).
3. *Итерацией* события R называется событие

$$R^* = e \cup R \cup RR \cup RRR \cup \ldots \cup R^i \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i .$$

Одноэлементные события, т. е. события $\{x_i\}$, где $x_i \in X$, будем называть элементарными и обозначать буквами x_i. Событие e, образованное пустым словом e, состоит из одного слова нулевой длины и также относится к элементарным событиям.

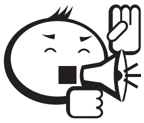


*Событие назовем **регулярным**, если оно может быть получено из элементарных событий путем конечного применения перечисленных операций: объединения, умножения и итерации, которые также назовем регулярными.*

Таким образом, мы определили алгебру регулярных событий $(R;\bullet,\cup;*)$, несущим множеством которой является множество регулярных событий, а сигнатурой – две бинарные (конкатенация и дизъюнкция) и одна унарная (итерация) операции. Образующие этой алгебры (называемой еще алгеброй Клини) являются элементарные события. Каждый элемент этой алгебры (регулярное событие) может быть описан регулярным выражением в алфавите $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, которое определяется рекурсивно следующим образом:

1) символы $x_1, x_2, \ldots, x_m$, e и Ø являются регулярными выражениями;

2) если R и S – регулярные выражения, то таковыми являются $R \cup S$, $R \cdot S$ и R^*;
3) никакое другое выражение не является регулярным, если оно не получено путем конечного числа применения правил 1 и 2.



Таким образом, регулярное выражение – это формула в алгебре событий. Регулярные выражения эквивалентны, если они описывают одно и то же регулярное событие.

Эквивалентные соотношения в алгебре регулярных событий вытекают из свойств операций $\cup$, –, *. Если P, R, и S – регулярные события, то имеют место соотношения:

- $P \cup \varnothing = \varnothing \cup P = P$;
- $P \cdot \varnothing = \varnothing \cdot P = \varnothing$;
- $P \cdot e = e \cdot P = \varnothing$;
- $\varnothing^* = e$;
- $e^* = e$;
- $\left.\begin{matrix} P \cup R = R \cup P, \\ P \cdot P^* = P^* \cdot P \end{matrix}\right\}$ – коммутативность объединения и итерации;
- $\left.\begin{matrix} P \cup (R \cup S) = (P \cup R) \cup S, \\ P \cdot (R \cdot S) = (P \cdot R) \cdot S \end{matrix}\right\}$ – ассоциативность объединения и умножения;
- $\left.\begin{matrix} P \cdot (R \cup S) = P \cdot R \cup P \cdot S, \\ (P \cup R) \cdot S = P \cdot S \cup P \cdot S \end{matrix}\right\}$ – левая и правая дистрибутивность умножения относительно объединения;
- $P^* = e \cup P \cdot P^*$ – развертывание итерации;
- $\left.\begin{matrix} P \cup P = P, \\ (P^*)^* = P^* \end{matrix}\right\}$ – идемпотентность объединения и итерации;
- $P^* \cup P = P^*$ – дизъюнктивное поглощение итерации;
- $P^* \cdot P^* = P^*$ – мультипликативное поглощение итерации.

Из рассмотрения операций объединения, умножения и итерации вытекает, что все конечные события регулярны. Это следует из того, что любое слово события выражается произведением букв, а любое конечное событие – объединением образующих его слов.

Бесконечное регулярное событие может появиться только благодаря итерации и наоборот, если в регулярном выражении присутствует операция итерации, то оно описывает бесконечное событие (если только итерация не применяется к пустой букве *e*, так как $e^* = e$, т. е. конечно).

Пример 2.9

Регулярное выражение $U = \left(x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_m\right)^*$ задает множество всех слов (включая пустое) в алфавите $X = \{x_1, x_2, ... x_m\}$. Такое событие называется *универсальным* событием (по аналогии с универсальным множеством).

Пример 2.10

Регулярное выражение $E = \left(a \cup c\right)^* b\left(a \cup c\right)^*$ задает событие в алфавите $\{a, b, c\}$, состоящее из всех слов, содержащих букву *b* только один раз.

Регулярные события тесно связаны с автоматами. Эта связь дается фундаментальной *теоремой Клини*.

Теорема 2.5. (Клини). Класс событий, представимых в конечных автоматах, совпадает с классом регулярных событий.

По сути, эта теорема состоит из двух теорем.

Теорема 2.5, а (теорема синтеза). Для любого регулярного события существует конечный автомат, представляющий это событие.

Теорема 2.5, б (теорема анализа). Всякое событие, представимое конечным автоматом, непременно регулярно.

Чтобы подойти к доказательству этих теорем, введем понятие *источника* (синонимы: переходный граф сигналов, сигнальный граф), под которым будем понимать ориентированный граф, в котором выделены начальные и заключительные вершины, и на каждом ребре написана буква из алфавита *X* либо *e* (пустое ребро). Каждый источник H однозначно определяет некоторое событие E в алфавите X, порождаемое множеством путей из начальных вершин в заключительные вершины. В этом случае говорят, что источник H представляет событие E. Источники, представляющие одно и то же событие, называются эквивалентными. Частный случай источника – это автомат без выхода.

Для любого источника H можно построить эквивалентный источник H_0 с двумя полюсами (с одной начальной вершиной и одной заключительной). Для такого построения нужно в H_0 ввести новую вершину q_0 (единственная начальная вершина) и соединить ее пустыми ребрами с прежними начальными вершинами в H, а также новую вершину q_z (единственную заключительную) и соединить с ней все заключительные вершины в H пустыми ребрами. В остальном H_0 совпадает с H.

Теорема 2.6. Для любого регулярного события E существует двухполюсный источник, представляющий E.

Теорема доказывается индукцией по глубине построения формулы регулярного события. Элементарное событие представляется сигнальным графом с двумя вершинами – начальной и заключительной и ребром, соединяющим эти вершины. Это ребро взвешено буквой x_i или e (рис. 2.3, *а*).

Если построены двухполюсные источники: H_1, представляющий регулярное событие E_1, и H_2, представляющий регулярное событие E_2, с начальными q_{01}, q_{02} и заключительными q_{z1} и q_{z2} вершинами соответственно, то источник H с начальной вершиной q_0 и заключительной – q_z, представляющий регулярное событие E – результат регулярной операции над E_1 и E_2, строится следующим образом:

1) объединение $E = E_1 \cup E_2$ будет изображено параллельным соединением H_1 и H_2 (рис. 2.3, *б*). Из вершины q_0 проводятся пустые ребра в q_{01} и q_{02}, а из q_{z1} и q_{z2} проводятся пустые ребра в вершину q_z;
2) конкатенация $E = E_1 \cdot E_2$ строится последовательным соединением H_1 и H_2 (рис. 2.3, *в*). Из q_{z1} проводится пустое

ребро в q_{02}; вершина q_{01} объявляется начальной у H, вершина q_{z2} – заключительной;

3) итерация $E = (E_1)^*$ получается зацикливанием H_1 (рис. 2.3, *г*): из вершины q_{z1} проводится пустое ребро в q_{01}, и эта же вершина q_{01} объявляется начальной и заключительной в H.

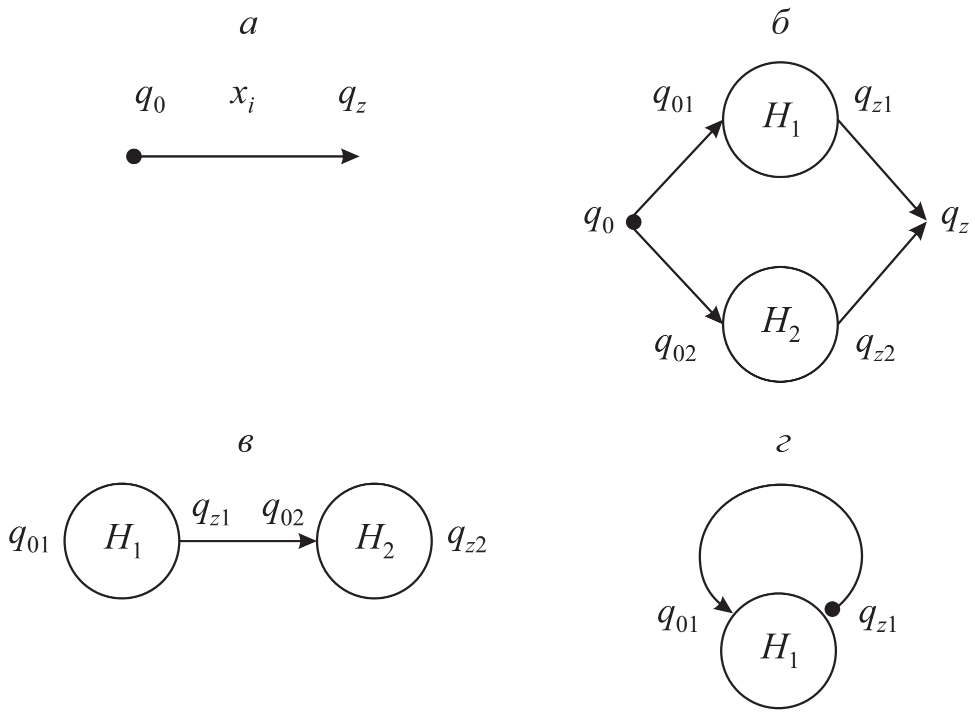


Рис. 2.3 – Источники, представляющие регулярные операции

Построенные таким образом источники действительно представляют соответствующие события. Докажем это, например, для объединения $E = E_1 \cup E_2$ (доказательства для умножения и итерации аналогичны). Возьмем $\mathbf{x} \in E$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in E_1$, а $\mathbf{x}_2 \in E_2$. По условию H_1 представляет E_1, H_2 представляет E_2, поэтому существует путь $\mathbf{x}_1$ из q_{01} в q_{z1} и путь $\mathbf{x}_2$ из q_{02} в q_{z2}. Тогда по построению существует путь $e\mathbf{x}_1 e \cup e\mathbf{x}_2 e = \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2$ из вершины q_0 в вершину q_z. И наоборот, всякий путь $\mathbf{x}$ из q_0 в q_z обязательно проходит через q_{01} и q_{z1} либо через q_{02} и q_{z2} и имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1$ – путь из q_{01} в q_{z1}, а $\mathbf{x}_2$ – путь из q_{02} в q_{z2}, откуда следует, что $\mathbf{x}_1 \in E_1$ и $\mathbf{x}_2 \in E_2$. Что и требовалось доказать.

. . . .

. . . .

При построении источника в некоторых случаях необходимо вводить пустые ребра (ребра, взвешенные пустой буквой *e*). Это делается для того, чтобы избежать ложных путей. Система правил, когда следует вводить пустые ребра в граф регулярного выражения, следующая.

. . . .

1. Пустые ребра вводятся в случае произведения двух или более итераций $S=\prod_{i\in N}(R_i)^*$ (рис. 2.4), где R_i – регулярные выражения.

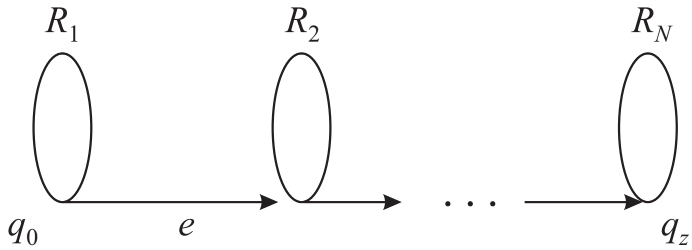


Рис. 2.4 – Введение пустых ребер при произведении итераций

2. Пустые ребра в источнике, представляющем событие *S*, когда регулярное выражение для *S* начинается или заканчивается итерацией, вводятся в случаях:

а) $S=(P^*\cdot R)^*$;

б) $S=(R\cdot N^*)^*$;

в) $S=(P^*\cdot R\cdot N^*)^*$.

Здесь *R*, *P* и *N* – произвольные регулярные выражения.

Соответствующие графы изображены на рисунке 2.5.

3. Пустые ребра вводятся в случае дизъюнкции, если хотя бы один из дизъюнктивных членов начинается с итерации $S=R^*\cdot Q\cup P^*\cup\ldots\cup Q$, где Q – регулярное выражение, не содержащее итерации (рис. 2.6).

4. Пустые ребра вводятся при умножении слева на дизъюнкцию, если хотя бы один из дизъюнктивных членов заканчивается итерацией (рис. 2.7)

$$S=\left(Q\cdot R^*\cup P^*\cup\ldots\cup Q\right)\cdot N .$$

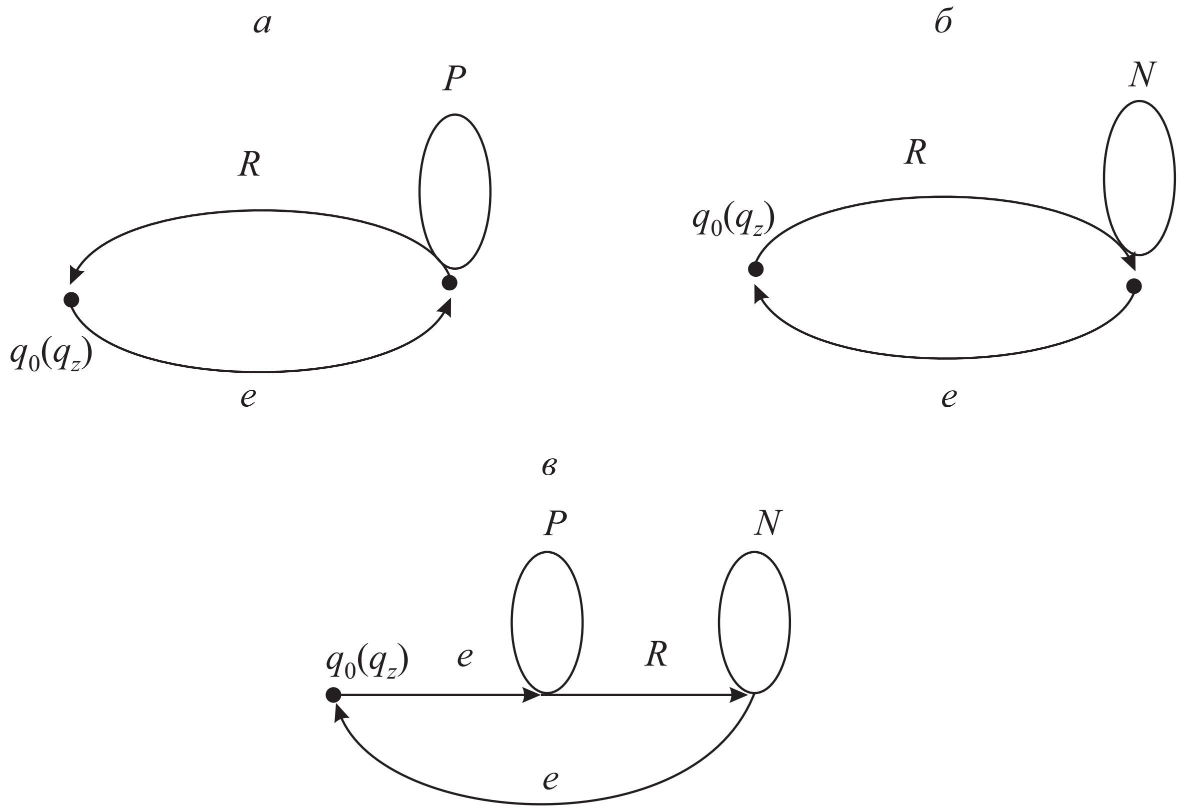


Рис. 2.5 – Введение пустых ребер при итерации

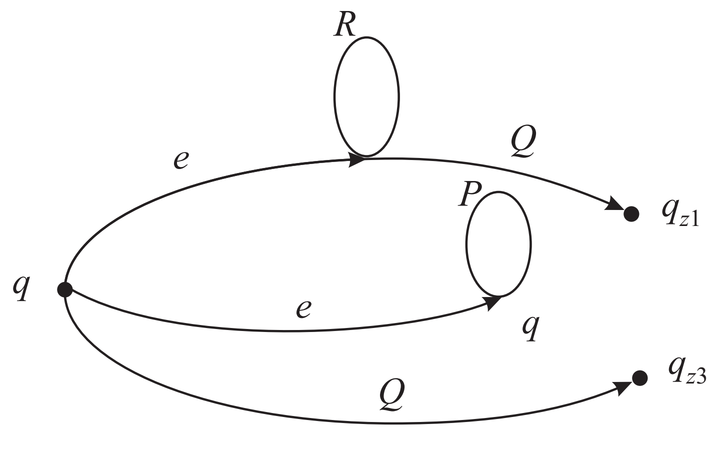


Рис. 2.6 – Введение пустых ребер в случае дизъюнкции

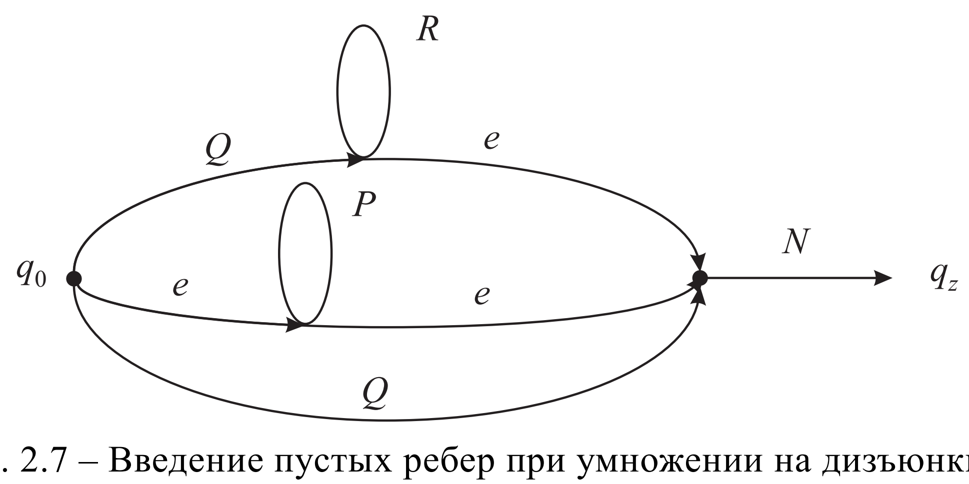


Рис. 2.7 – Введение пустых ребер при умножении на дизъюнкцию

Перечисленная система правил является полной, т. е. ни в каких других случаях вводить пустые ребра нет необходимости. Это нетрудно показать, рассматривая всевозможные сочетания операций (∪, •, *) в регулярном выражении.

2.3.3 Синтез автоматов (абстрактный уровень)

Перейдем теперь к синтезу автоматов, т. е., по сути, к доказательству теоремы 2.5, *а*.

Введем понятие *детерминированного источника*. Речь уже шла о том, что автомат без выходов – это частный случай источника. Источник будет являться графом автомата без выходов, если он:

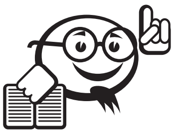
а) содержит одну начальную вершину;

б) не содержит пустых ребер;

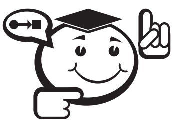
в) удовлетворяет условиям автоматности.

Такой источник и назовем детерминированным источником в отличие от произвольного недетерминированного источника. Это название связано с тем, что произвольный источник можно интерпретировать как недетерминированный автомат, т. е. как автомат, в котором функция переходов $\delta(q,x)$ может иметь несколько значений (символу x при вершине q может соответствовать множество ребер, а слову **x** – множество путей из вершины q).

Теперь докажем вспомогательную теорему.



***Теорема 2.7* (*детерминизации*).** Для любого источника H с n вершинами существует эквивалентный ему детерминированный источник H', имеющий не более чем 2^n вершин.



Назовем множество вершин $\tilde{q}$ замкнутым, если из того, что $q_i \in \tilde{q}$, следует, что $\tilde{q}$ принадлежит любая вершина, в которую из q_i ведет пустое ребро. Таким образом, для источника без пустых ребер любое множество вершин замкнуто.

Источник H' строится следующим образом. Образуем все замкнутые подмножества вершин H (а их не более чем 2^n) и каждому такому подмножеству поставим в соответствие вершину $\tilde{q}_i$ источника H'.

Через $\tilde{q}_0$ обозначим наименьшее замкнутое подмножество вершин *H*, содержащее все начальные вершины *H*.

Это будет начальная вершина *H′*. Заключительными вершинами *H′* объявим все подмножества $\tilde{q}_i$, содержащее хотя бы одну заключительную вершину *H*. Если из множества $\tilde{q}_i$ источника *H* есть пути *x* ($x \in X$) в множество $\tilde{q}_j$, то в источнике *H′* соединяем вершину $\tilde{q}_i$ с вершиной $\tilde{q}_j$ ребром, на котором написан символ *x*. Если же в *H* никакая из вершин $\tilde{q}_i$ не имеет выходящего из нее ребра с символом *x*, то соединяем вершину $\tilde{q}_i$ в *H′* с вершиной Ø (пустое подмножество вершин *H*) ребром *x*. Таким образом, каждой вершине $\tilde{q}_i$ в *H′* и каждому символу *x* соответствует ровно одно ребро *x*, выходящее из $\tilde{q}_i$, и источник *H′* является детерминированным. Построение ребер *H′* определяет функцию перехода автомата, граф которого – это источник *H′*. Начальное состояние этого автомата $\tilde{q}_0$.

Осталось показать, что источник *H′* эквивалентен *H*. Действительно, *H′* обладает свойством: в *H′* непустой путь **x** из $\tilde{q}_0$ в $\tilde{q}_j$ существует тогда и только тогда, когда в *H* для любой вершины $q \in \tilde{q}_j$ существует путь **x** из некоторой начальной вершины $q_0 \in \tilde{q}_0$ в *q*. Пустым путь **x** быть не может, так как если $\mathbf{x} = e$, то $\tilde{q}_j = \tilde{q}_0$ по условию замкнутости, а в *H′* пустых ребер по построению нет. Это свойство доказывается индукцией по длине слова **x**.

Если $\mathbf{x} = x$ (состоит из одного символа), то это свойство выполняется по построению ребер в *H′*. Предположим теперь, что оно выполняется и для слова длины, меньшей или равной *k*, и докажем, что оно выполняется и для слова $\mathbf{x}x$, где $x \in X$ произвольная буква входного алфавита.

Пусть в *H′* имеется непустой путь $\mathbf{x}x$ из $\tilde{q}_0$ в $\tilde{q}_j$: $\delta(\tilde{q}_0, \mathbf{x}x) = \tilde{q}_j$. Если $\delta(\tilde{q}_0, \mathbf{x}) = \tilde{q}_k$, то из $\tilde{q}_k$ в $\tilde{q}_j$ ведет ребро *x*. По предположению, в *H* для любой вершины $q^* \in \tilde{q}_0$ существует путь **x** из начальной вершины q_0 в q^*. По построению *H′* из того, что в *H′* есть ребро *x* из $\tilde{q}_k$ в $\tilde{q}_j$, следует, что в *H* для любой вершины $q \in \tilde{q}_i$ найдется вершина из подмножества $\tilde{q}_k$, из которой ведет путь x в q, поэтому в H имеется путь из q^* в q и, следовательно, путь $\mathbf{x}x$ из q_0 в q.

И наоборот, если в H для любой вершины $q \in \tilde{q}_i$ есть путь $\mathbf{x}x$ из начальной вершины $q_0 \in \tilde{q}_0$ в вершину q, то в H' будет выполняться условие $\delta\left(\tilde{q}_0, \mathbf{x}x\right) = \tilde{q}_j$. Доказывается это аналогичным образом. При этом рассматривается множество путей $\mathbf{x}x$ из начальных вершин H в вершины множества $\tilde{q}_i$ и множества $\tilde{q}_k$ всех вершин, в которые ведут отрезки $\mathbf{x}$ этих путей.

Из доказанного свойства H' и определения заключительных вершин H' следует, что в H' путь $\mathbf{x}$ из $\tilde{q}_0$ в заключительную вершину есть тогда и только тогда, когда в H имеется путь $\mathbf{x}$ из некоторой начальной вершины в заключительную. Следовательно, источники H и H' эквивалентны, поскольку представляют одно и то же событие. Что и требовалось доказать.

По сути дела, из доказательства теорем 2.6 и 2.7 и следует доказательство теоремы синтеза 2.5, *а*, а синтез автомата, представляющего произвольное регулярное событие E, состоит в том, что сначала строится источник, представляющий E, а затем этот источник детерминируется согласно процедуре, изложенной при доказательстве теоремы 2.7.

Практически детерминизация упрощается в связи с тем, что некоторые подмножества вершин H (состояния H') не достижимы из начального состояния и их удаление не изменит события, представляемого автоматом. Поэтому в матрицу переходов H' включаются только те подмножества, которые порождаются процедурой детерминизации, начатой с подмножества $\tilde{q}_0$. В этом случае построенный автомат может иметь меньше чем 2^n состояний.

Пример 2.11

Рассмотрим синтез автомата на абстрактном уровне. Регулярное событие, которое должен представлять автомат, может быть задано либо словесным описанием, либо регулярным выражением. Пусть регулярное событие в алфавите $\{a, b, c\}$ задано выражением

$$\left(a^* b \cup c \cdot c^*\right) \cdot (a \cup b)^* \cdot (ac)^*. \qquad (2.9)$$

Процедура синтеза начинается с построения источника *H*. При этом нужно учитывать правила введения пустых ребер. В формуле (2.9) имеется произведение итераций (правило 1); первая скобка представляет собой дизъюнкцию, в которой один из дизъюнктивных членов начинается с итерации (правило 3), а также один из дизъюнктивных членов заканчивается итерацией (правило 4). Поэтому построенный источник *H* будет содержать пустые ребра (см. рис. 2.8).

На рисунке 2.8 ребра, которым не приписано букв, – пустые. Начальная вершина источника – *1*, заключительная – *5*.

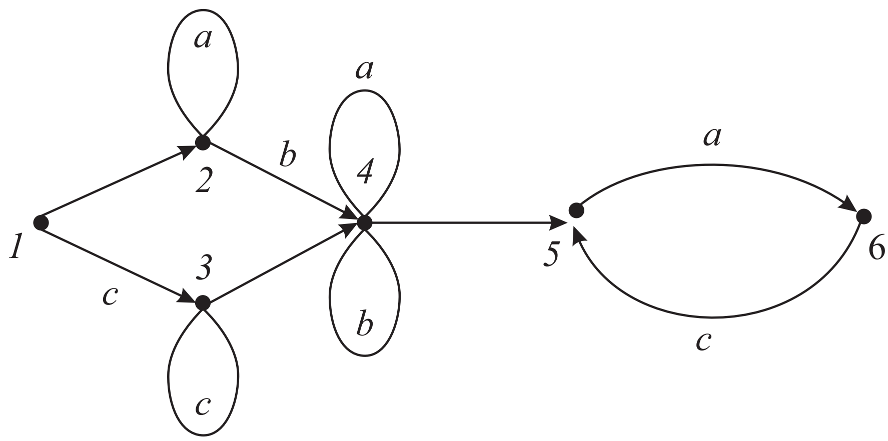


Рис. 2.8 – Источник, представляющий событие (2.9)

Следующий этап – детерминизация источника *H* в соответствии с теоремой 2.7. При этом строим только замкнутые подмножества, достижимые из начального замкнутого подмножества {1,2}. Функция переходов полученного автомата приведена в таблице 2.20.

Таблица 2.20 – Функция переходов после детерминизации

	a	*b*	*c*
{1,2}	{2}	{4,5}	{3,4,5}
{2}	{2}	{4,5}	∅
{4,5}	{4,5,6}	{4,5}	∅
{3,4,5}	{4,5,6}	{4,5}	{3,4,5}
∅	∅	∅	∅
{4,5,6}	{4,5,6}	{4,5}	{5}
{5}	{6}	∅	∅
{6}	∅	∅	{5}

В этой таблице знаком $\varnothing$ обозначено пустое множество. После переобозначения подмножеств вершин: $\{1,2\}\to1$; $\{2\}\to2$; $\{4,5\}\to3$; $\{3,4,5\}\to4$; $\varnothing\to6$; $\{4,5,6\}\to7$; $\{5\}\to8$; $\{6\}\to9$ – автоматная таблица приобретет следующий вид (табл. 2.21).

Таблица 2.21 – Функция переходов после переобозначений состояний

	a	*b*	*c*
1	2	3	4
2	2	3	5
3	5	3	5
4	5	3	4
5	5	5	5
6	5	3	7
7	8	5	5
8	5	5	7

В таблице 2.21 выделены жирным шрифтом заключительные состояния 3, 4, 6 и 7, соответствующие подмножествам из таблицы 2.20, содержащим заключительное состояние 5 источника *H*.

. . . .

2.3.4 Анализ автоматов (абстрактный уровень)

Для процедуры анализа автоматов потребуется ввести несколько новых понятий. Ребра и вершины источника, не входящие в контур обратных связей, назовем *каскадными.* Вершины называются *стоком*, если они имеют только входящие ребра и *истоком*, если они имеют только выходящие ребра. Две вершины, лежащие в контуре обратной связи, называются спаренными.

Источник, состоящий только из каскадных вершин, называется *каскадным*. Поскольку стоки и истоки всегда каскадные, то любую из вершин обратной связи можно сделать каскадной с помощью операции, называемой *расщеплением* вершины. Произвольная вершина q в этом случае расщепляется на две вершины: q', которая называется истоком, и q'', служащую стоком. Пример такого расщепления приведен на рисунке 2.9.

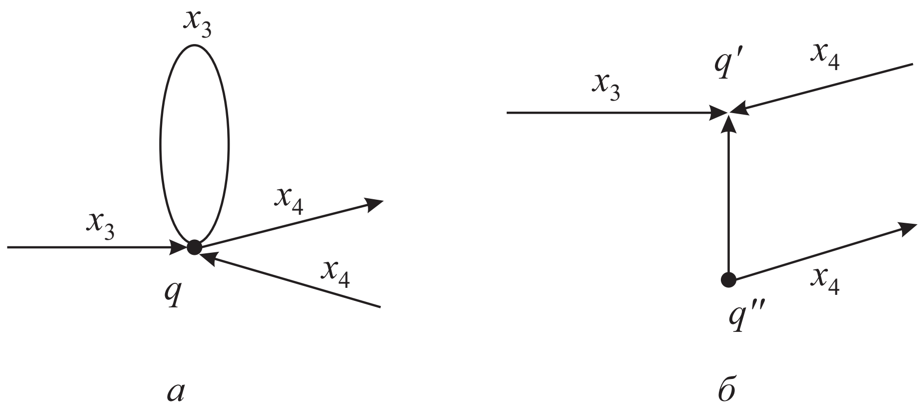


Рис. 2.9 – Пример расщепления вершины

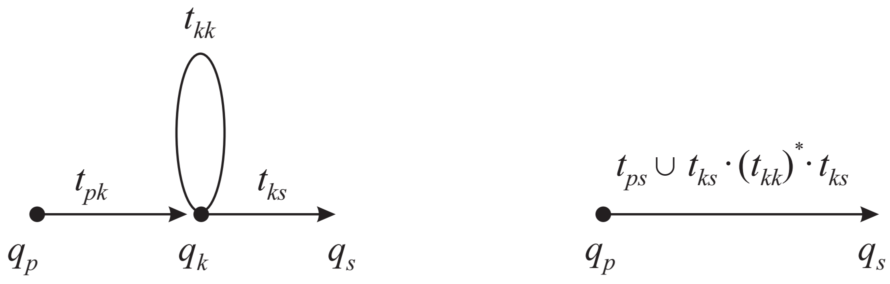
Расщепленные вершины называются индексными вершинами. Минимальное число вершин, которые нужно расщепить, чтобы разбить все контуры обратной связи, называется *индексом соединения* обратной связи.

Граф, изображающий источник, можно упростить, устранив ряд вершин и приведя ветвевой переход к значению пути через устраненные вершины. Полученный граф называется *остатком* первоначального. Вершина, входящая в остаточный граф, называется остаточной. Путь, если он связывает остаточную вершину с собой или с заданной остаточной вершиной и не проходит через другие остаточные вершины, называется остаточным.

Исключая в исходном источнике все вершины, кроме истоков, стоков и индексных вершин, получим *индексный остаток*. Если необходимо сохранить вершину q, не являющуюся ни истоком, ни стоком, ни индексной вершиной, то это можно сделать путем соединения новой вершины q' с вершиной q ребром e и устранением вершины q. В результате получается исток. Аналогичным образом поступают и для образования стока.

Все методы анализа можно разделить на графические, использующие понятие источника и его эквивалентные преобразования, и аналитические, в которых применяются уравнения в алгебре регулярных событий.

Приведем графический алгоритм анализа. Отыскание регулярного выражения, означающего множество слов, переводящих автомат из состояния q_i в состояние q_j, сводится в конечном итоге к нахождению ветвевого перехода из вершины q_i в q_j на графе автомата. В этом случае граф автомата приводится к источнику, имеющему только два состояния: q_i и q_j. Если в начале приведения вершина q_i является истоком, q_j – стоком, то полученный источник будет иметь только один непустой переход от q_i к q_j, и вес этого перехода будет являться искомым регулярным выражением. Остальные вершины при этом должны быть удалены. Например, пусть необходимо удалить в графе вершину q_k с петлей t_{kk} (см. рис. 2.10, *а*).



а *б*

Рис. 2.10 – Удаление вершины с петлей

Регулярное выражение, связывающее q_p и q_s, будет $R_1 = t_{pk} \cdot (t_{kk})^* \cdot t_{ks}$, а при устранении вершины q_k получим (рис. 2.10, *б*): $R = t_{ps} \cup t_{pk} \cdot (t_{kk})^* \cdot t_{ks}$.

Таким образом, любой граф автомата можно свести к источнику с двумя вершинами q_i и q_j, ветвевой переход между которыми и есть искомое регулярное выражение, представимое состоянием q_j при условии, что q_i – начальное состояние.

При анализе граф автомата, как правило, приводят к индексному остатку. Это можно сделать, используя приведение к индексному остатку с проверкой по правилу. Это правило заключается в том, что между остаточными вершинами q_i и q_j в построенном источнике должно быть ребро, если в первоначальном графе есть по крайней мере один остаточный путь от q_i к q_j. Вес такого ребра равен объединению всех приращений остаточных путей от q_i к q_j. Прирост пути от q_i к q_j определяется произведением приращений ребер, образующих этот путь.

Если индексный остаток включает сложный контур обратной связи, устраняемые вершины могут быть исключены расщеплением вершин. При удалении некоторой вершины q_k все другие вершины расщепляются на истоки и стоки. Далее вычисляются пути от истока до стока и расщепленные вершины соединяются вновь.

Пример 2.12

Исходный граф автомата изображен на рисунке 2.11, *а*. Пусть q_1 – начальное состояние, а q_2 – заключительное. Расщепляем вершину q_1

(рис. 2.11, *б*). Вычисляем переход от $q_1{}'$ к $q_1{}''$ (рис. 2.11, *в*). Соединяем $q_1{}'$ и $q_1{}''$ (рис. 2.11, *г*). Записываем окончательный результат (рис. 2.11, *д*).

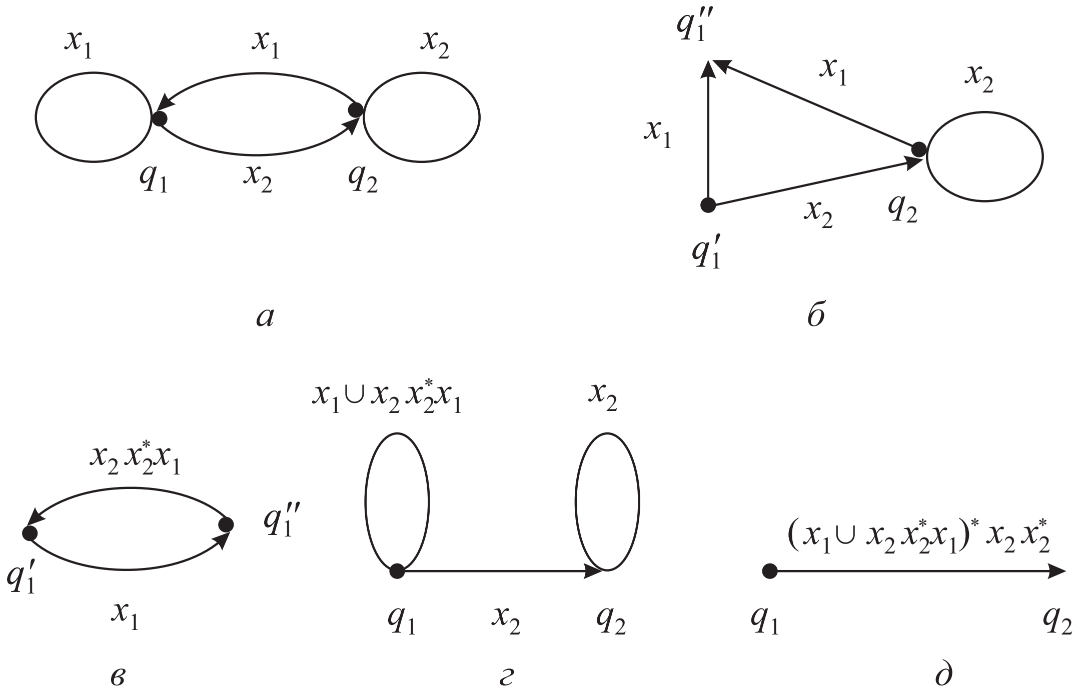


Рис. 2.11 – Пример расщепления сложного контура обратной связи

Теперь можно сформулировать графический алгоритм анализа автоматов.

1. По графу автомата находим исток и сток. Если их нет, то с начальной вершиной q_i соединяется пустым ребром новая вершина $q_i{}'$, а заключительная вершина q_j соединяется пустым ребром с новой вершиной $q_j{}'$. После этого $q_i{}'$ берется как исток, а $q_j{}'$ – как сток.
2. Все параллельные пути приводятся к форме $x_k \cup x_s$, а все последовательные – к форме $x_k \cdot x_s$.
3. Получаем индексный остаток графа, отмечая вершины q_i, q_j и индексные вершины. Находим приращения остаточных дуг.
4. Устраняем последовательно все индексные вершины индексного остатка графа. Приращение пути от вершины q_i к вершине q_j есть регулярное выражение события, представимого в автомате состоянием q_j при условии, что q_i – начальное состояние автомата.

Пример 2.13

Пусть автомат задан графом переходов (см. рис. 2.12).

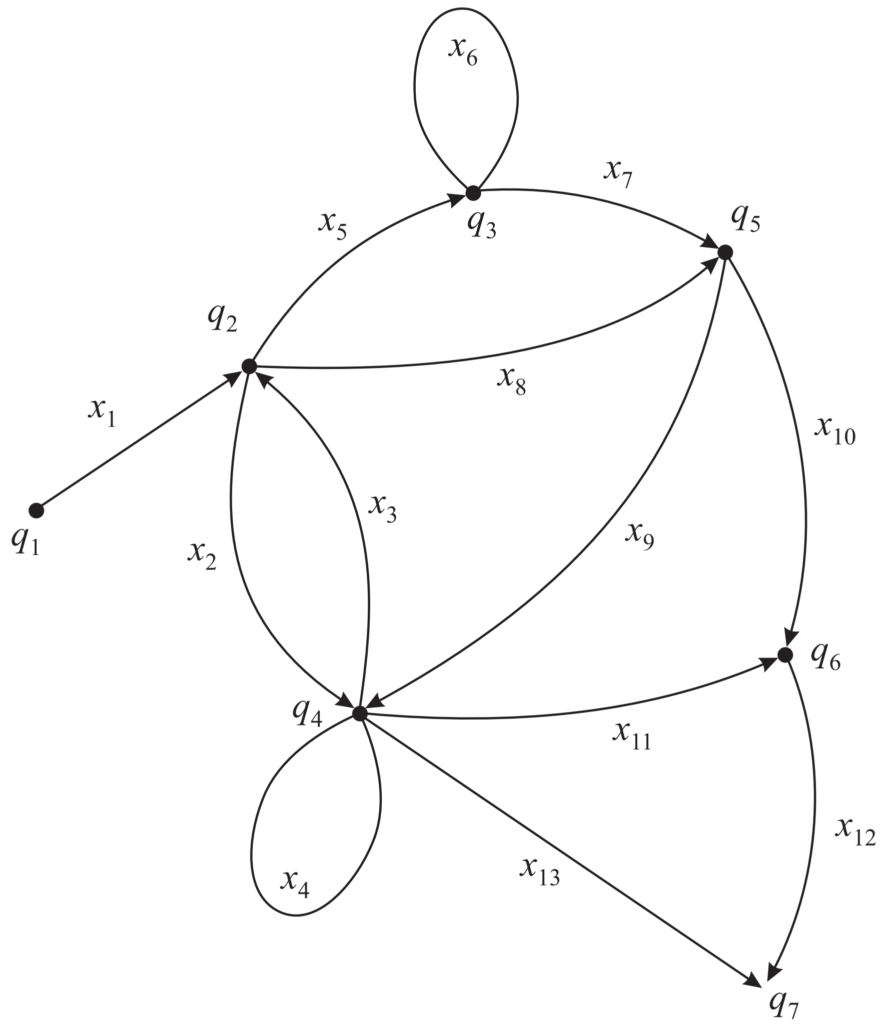


Рис. 2.12 – Граф автомата

Пусть начальное состояние автомата q_1, а заключительное – q_7. Требуется провести анализ автомата, т. е. найти регулярное выражение, представимое этим автоматом. Поскольку вершина q_1 является истоком, а вершина q_7 – стоком, вводить дополнительные вершины не требуется. В графе на рисунке 2.12 две индексные вершины – q_2 и q_4. Можно оставить любую из них, например, q_4. Тогда индексный остаток графа будет таким, как на рисунке 2.13.

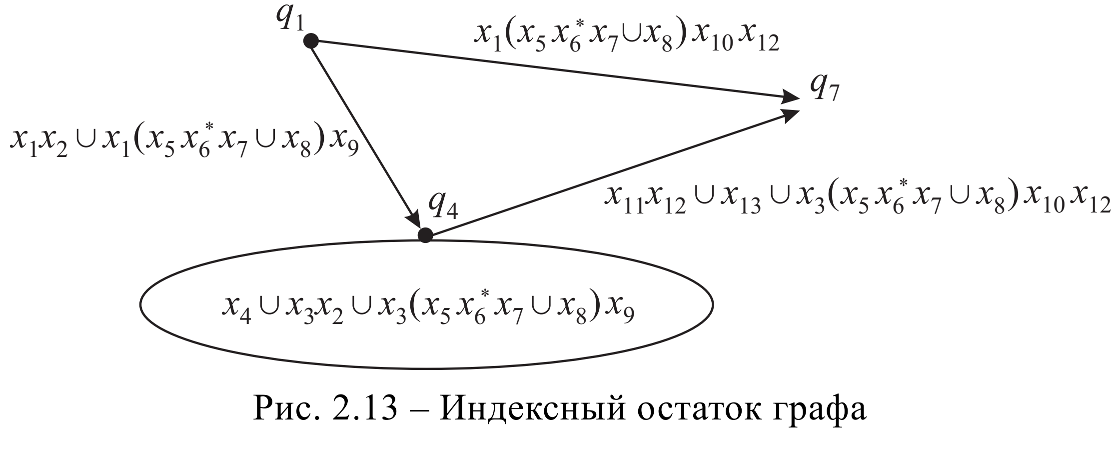


Рис. 2.13 – Индексный остаток графа

Путь $x_3\left(x_5x_6^*x_7 \cup x_8\right)x_9\left(x_{13} \cup x_{11}x_{12}\right)$ от вершины q_4 до вершины q_7 не является остаточным, так как проходит через индексную вершину q_4. Устраняя индексную вершину q_4, получаем окончательное выражение для регулярного события, представимого автоматом при условии, что начальное состояние автомата – q_1, а заключительное – q_7:

$$(x_1x_2 \cup x_1(x_5x_6{}^*x_7 \cup x_8)x_9)(x_4 \cup x_3x_2 \cup x_3(x_5x_6{}^*x_7 \cup x_8)x_9)^*(x_{11}x_{12} \cup$$
$$\cup x_{13} \cup x_3(x_5x_6{}^*x_7 \cup x_8)x_{10}x_{12}) \cup x_1(x_5x_6{}^*x_7 \cup x_8)x_{10}x_{12}.$$

. . . .

2.4 Алгебра абстрактных автоматов

Рассмотрим теоретико-множественные и алгебраические операции на множестве абстрактных автоматов. Есть две теоретико-множественные операции – объединение и пересечение, а также четыре алгебраические – умножение, суммирование, суперпозиция и композиция. Все эти операции бинарные и играют важную роль при синтезе автоматов, так как на структурном уровне они соответствуют различным способам соединения простых (в частности элементарных) автоматов между собой при построении структурных схем более сложных автоматов [9].

Множество автоматов совместно с операциями над ними образуют алгебру абстрактных автоматов, которую не нужно путать с алгеброй регулярных событий.

Задать определенную бинарную операцию на множестве автоматов означает указать закон, по которому любым двум автоматам из некоторого множества автоматов сопоставляется третий автомат из этого же множества. Какое именно множество имеется в виду, зависит от конкретного случая (от конкретной операции), а равенство понимается, как правило, с точностью до изоморфизма.

2.4.1 Теоретико-множественные операции

Операции объединения и пересечения автоматов играют вспомогательную роль при задании алгебраических операций, хотя их можно рассматривать и как самостоятельные операции на множестве $B(L)$ подавтоматов произвольного непустого автомата L. Тогда объединение двух автоматов $A \in B(L)$ и $B \in B(L)$ представляет автомат $C = A \cup B$, который является эквивалентным продолжением автоматов A и B, а пересечение представляет автомат $D \in B(L)$, по отношению к которому автоматы A и B являются эквивалентными продолжениями.

Зададим операции объединения и пересечения. Пусть L – произвольный непустой автомат Мили, а $B(L)$ – множество его подавтоматов. Пусть далее $A \in B(L)$ и $B \in B(L)$ – подавтоматы автомата L, причем и A, и B имеют одинаковые начальные состояния, совпадающие с начальным состоянием L. Пусть заданы автомат

$$A = \left(X_1, Q_1, Y_1, q_1 \in Q_1, F_1\left(x \in X_1 / y \in Y_1\right)\right)$$

и автомат

$$B = \left(X_2, Q_2, Y_2, q_1 \in Q_2, F_2\left(x \in X_2 / y \in Y_2\right)\right).$$

Тогда автомат $C = \left(X, Q, Y, q \in Q, F\left(x \in X / y \in Y\right)\right)$ будет являться объединением A и B, если множества X, Y, Q и отображение F определяются по формулам:

$$X = \left(\{1\} \times X_1\right) \cup \left(\{2\} \times X_2\right); \tag{2.10}$$

$$Q = Q_1 \cup Q_2; \tag{2.11}$$

$$Y = \left(\{1\} \times Y_1\right) \cup \left(\{2\} \times Y_2\right); \tag{2.12}$$

$$Fq = F_1 q \cup F_2 q, \tag{2.13}$$

где $q \in Q$. Для тех состояний, когда $q \notin Q_1$, полагаем $F_1 q = \varnothing$, а при $q \notin Q_2$ имеем $F_2 q = \varnothing$.

Если не происходит нарушения автоматности для автомата C, то есть равенство $F_1 q(x / y) = F_2 q(x / y)$ не нарушается для любых $q \in Q$, $x \in X$ и $y \in Y$ (когда оба отображения не пусты) или если

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing, \tag{2.14}$$

$$Y_1 \cap Y_2 = \varnothing, \tag{2.15}$$

то формулы (2.10) и (2.12) упрощаются и принимают вид

$$X = X_1 \cup X_2; \tag{2.16}$$

$$Y = Y_1 \cup Y_2. \tag{2.17}$$

В том случае, когда A и B вполне определенные автоматы, автомат $C = A \cup B$ также вполне определен, в противном случае автомат C будет частичным.

Пример 2.14

Автоматы заданы своими автоматными таблицами (табл. 2.22 и 2.23).

Таблица 2.22 – Автомат *A*

$q\backslash x$	x_1	x_2
1	–	$3, y_2$
2	$2, y_2$	–
3	$3, y_1$	$2, y_3$

Таблица 2.23 – Автомат *B*

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	$2, y_1$	$3, y_2$	–
2	$2, y_2$	–	$1, y_1$
3	–	–	$1, y_3$

Найдем их объединение $C = A \cup B$. Поскольку нарушения условий автоматности не происходит, то нет необходимости различать одинаковые буквы алфавитов, и поэтому пользуемся формулами (2.16) и (2.17), а также формулами (2.11) и (2.13). В результате получаем автомат *C* (табл. 2.24).

Таблица 2.24 – Автоматная таблица автомата *C* к примеру 2.14

$q\backslash x$	x_1	x_2	x_3
1	$2, y_1$	$3, y_2$	–
2	$2, y_2$	–	$1, y_1$
3	$3, y_1$	$2, y_3$	$1, y_3$

Операцию объединения с соответствующими формулами (2.10)–(2.17) легко обобщить и на случай *n* автоматов.

Из формул (2.11), (2.13), (2.14)–(2.17) следует, что каждый автомат Мили может быть представлен объединением автономных автоматов по входным и выходным буквам:

$$A = \left(\bigcup_{x\in X} A_x\right) \cup \left(\bigcup_{y\in Y} A_y\right).$$

Такое представление используется при разложении автоматов по различным операциям.

Автоматное отображение $S_C\left(q_1, \mathbf{x}\right)$, индуцируемое автоматом C, есть продолжение автоматных отображений $S_A\left(q_1, \mathbf{x}\right)$ на множество X*.

Пересечением автоматов A и B будет являться автомат $D = A \cap B$, если его алфавиты X, Q, Y и отображение F определяются формулами:

$$X = X_1 \cap X_2; \tag{2.18}$$

$$Q = Q_1 \cap Q_2; \tag{2.19}$$

$$Y = Y_1 \cap Y_2; \tag{2.20}$$

$$Fq = F_1 q \cap F_2 q, \tag{2.21}$$

где $q \in Q$.

Пример 2.15

Найдем пересечение автоматов A и B из примера 2.14.

Применяя формулы (2.18)–(2.21), получаем автоматную таблицу автомата $D = A \cap B$ (табл. 2.25).

Таблица 2.25 – Автоматная таблица автомата D к примеру 2.15

$q \backslash x$	x_1	x_2
1	–	3, y_2
2	2, y_2	–
3	–	–

Так же, как и операцию объединения, операцию пересечения, определяемую формулами (2.18)–(2.21), можно распространить на случай n автоматов.

Задание объединения и пересечения автоматов Мура наталкивается на трудности, связанные с тем, что одинаковые состояния могут иметь разные значения функции отметок, в связи с чем рекомендуется сначала интерпретировать автоматы Мура эквивалентными автоматами Мили, а затем находить их объединение или пересечение по известным формулам.

Нетрудно заметить, что операции объединения и пересечения автоматов ассоциативны, коммутативны и дистрибутивны.

2.4.2 Алгебраические операции

К алгебраическим операциям над автоматами относятся умножение, суммирование, суперпозиция и композиция.

Операция умножения графов приводит к двум операциям умножения автоматов. Первая операция, обозначаемая ×, применяется к произвольным автоматам с раздельными входами, то есть с разными входными алфавитами, а вторая обозначается ⊗ и применяется к автоматам с общим входом, то есть с одним и тем же входным алфавитом.

. . . .

Произведением *произвольных непустых автоматов* $A=\left(X,Q,Y,q_1\in Q,F\left(x\in X\,/\,y\in Y\right)\right)$ *и* $B=\left(U,W,V,w_1\in W,P\left(u\in U\,/\,v\in V\right)\right)$ *будет называться автомат* $K=\left(Z,H,S,h_1\in H,R\left(z\in Z\,/\,s\in S\right)\right)$*, у которого*

$$Z=X\times U; \tag{2.22}$$

$$H=Q\times W; \tag{2.23}$$

$$S=Y\times V; \tag{2.24}$$

$$Rh=Fq\times Pw, \tag{2.25}$$

где $q\in Q,\ w\in W,\ h\in H,\ h=(q,w),\ z=(x,u),\ s=(y,v).$

. . . .

Начальным состоянием автомата $K=A\times B$ будет состояние $h_1=\left(q_1,w_1\right)$. Если оба автомата *A* и *B* вполне определенные, то и их произведение является вполне определенным автоматом. Если хотя бы один из исходных автоматов частичный, то в результате умножения получаем частичный автомат.

Можно определить операцию умножения и через матрицы соединений. Пусть имеется матрица соединений автомата *A*: $\mathbf{R}_A=\left\|r_{ij}\left(x/y\right)\right\|$, где $i,j\in\{1,\ 2,\ \ldots m\}$ и

$$r_{ij}\left(x/y\right)=\begin{cases}x/y,\ \text{если } q_j\in F_{q_i} \text{ по букве } x\in X \text{ с выходом } y\in Y,\\ 0,\ \text{если } q_j\notin F_{q_i};\end{cases}$$

и матрица соединений автомата *B*: $\mathbf{R}_B=\left\|r_{kl}\left(u/w\right)\right\|$, где $k,l\in\{1,\ 2,\ \ldots n\}$ и

$$r_{kl}\left(u/v\right)=\begin{cases}u/v, \text{ если } w_l\in P_{w_k} \text{ по букве } u\in U \text{ с выходом } v\in V,\\ 0, \text{ если } w_l\notin P_{w_k}.\end{cases}$$

Матрица соединений $\mathbf{R}_k$ автомата $K=A\times B$ равна прямому произведению матриц $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$, то есть $\mathbf{R}_K=\mathbf{R}_A\times\mathbf{R}_B$, а ее элементы определяются так:

$$r_{\alpha\beta}\left(z/s\right)=\begin{cases}\left(x,u\right)/\left(y,v\right), \text{ если } r_{ij}=x/y \text{ и } r_{kl}=u/v,\\ 0, \text{ если } r_{ij}=0 \text{ или } r_{kl}=0,\end{cases}$$

где $\alpha,\beta\in\{1,\ 2,\ \dots p\}$, $p=m\cdot n$, $z=\left(x,u\right)$, $s=\left(y,v\right)$.

Пример 2.16

Автоматы A и B заданы автоматными таблицами (табл. 2.26 и 2.27):

Таблица 2.26 – Автомат A

$q\backslash x$	x_1	x_2
q_1	q_2,y_1	q_1,y_2
q_2	q_3,y_2	–
q_3	–	q_3,y_1

Таблица 2.27 – Автомат B

$w\backslash u$	u_1	u_2
w_1	w_1,v_2	–
w_2	w_1,v_1	w_2,v_1

Найдем произведение этих автоматов, т. е. автомат $K=A\times B$.

Входной алфавит автомата K – это упорядоченные пары входных букв автоматов A и B: обозначим их $Z=\left\{z_1,z_2,z_3,z_4\right\}$, где $z_1=\left(x_1,u_1\right)$, $z_2=\left(x_1,u_2\right)$, $z_3=\left(x_2,u_1\right)$, $z_4=\left(x_2,u_2\right)$.

Выходной алфавит автомата K обозначим через $\mathrm{S}=\left\{\mathrm{s}_1,s_2,s_3,s_4\right\}$, где $s_1=\left(y_1,v_1\right)$, $s_2=\left(y_1,v_2\right)$, $s_3=\left(y_2,v_1\right)$, $s_4=\left(y_2,v_2\right)$.

Алфавит состояний автомата K – это $H=\left\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\right\}$, где $h_1=\left(q_1,u_1\right)$, $h_2=\left(q_1,u_2\right)$, $h_3=\left(q_2,u_1\right)$, $h_4=\left(q_2,u_2\right)$, $h_5=\left(q_3,u_1\right)$, $h_6=\left(q_3,u_2\right)$.

Найдем отображение Rh_1 по входной букве z_1. Состояние h_1 – это пара $\left(q_1,w_1\right)$, а входная буква z_1 – это пара $\left(x_1,u_1\right)$. Автомат A из состояния q_1 по входной букве x_1 согласно автоматной таблице перейдет в состояние q_2, а автомат *B* из состояния w_1 по входной букве u_1 перейдет в состояние w_1. Эта пара (q_2, w_1) согласно обозначениям есть состояние h_3 автомата *K*. На выходах автоматов *A* и *B* появятся при этом буквы y_1 и v_2 соответственно. Пара (y_1, v_2) – это буква s_2 выходного алфавита автомата *K*. Аналогично находим отображение Rh_1 по входной букве z_3. Отображение состояния w_1 автомата *B* по входной букве u_2 не определено, поэтому также не определено отображение состояния h_1 автомата *K* по входным буквам z_2 и z_4. Таким образом, получаем $Rh_1 = \{h_3(z_1, s_2), h_1(z_3, s_4)\}$.

Далее проделываем то же самое для состояний h_2, h_3, h_4, h_5, h_6. Соответствующие отображения этих состояний имеют вид:

$$Rh_2 = \{h_3(z_1, s_1), h_4(z_2, s_1), h_1(z_3, s_3), h_2(z_4, s_3)\};$$

$$Rh_3 = \{h_5(z_1, s_4)\};$$

$$Rh_4 = \{h_5(z_1, s_3), h_6(z_2, s_3)\};$$

$$Rh_5 = \{h_5(z_3, s_2)\};$$

$$Rh_6 = \{h_5(z_3, s_1), h_6(z_4, s_1)\}.$$

По полученным отображениям можно составить автоматную таблицу (табл. 2.28) и матрицу соединений $\mathbf{R}_K$ (табл. 2.29).

Таблица 2.28 – Автомат *K*

$h \backslash z$	z_1	z_2	z_3	z_4
h_1	h_3, s_2	–	h_1, s_4	–
h_2	h_3, s_1	h_4, s_1	h_1, s_3	h_2, s_3
h_3	h_5, s_4	–	–	–
h_4	h_5, s_3	h_6, s_3	–	–
h_5	–	–	h_5, s_2	–
h_6	–	–	h_5, s_1	h_6, s_1

Таблица 2.29 – Матрица соединений $\mathbf{R}_K$

$h \backslash h$	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_1	z_3, s_4	0	z_1, s_2	0	0	0
h_2	z_3, s_4	z_4, s_3	z_1, s_1	z_2, s_1	0	0
h_3	0	0	0	0	z_1, s_4	0
h_4	0	0	0	0	z_1, s_3	z_2, s_3
h_5	0	0	0	0	z_3, s_2	0
h_6	0	0	0	0	z_3, s_1	z_4, s_1

Эту же матрицу соединений можно получить и из матриц соединений автоматов A и B. Для этого по автоматным таблицам составим матрицы соединений автоматов A и B – $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ (табл. 2.30 и 2.31):

Таблица 2.30 – Матрица соединений $\mathbf{R}_A$

	q_1	q_2	q_3
q_1	x_2, y_2	x_1, y_1	0
q_2	0	0	x_1, y_2
q_3	0	0	x_2, y_1

Таблица 2.31 – Матрица соединений $\mathbf{R}_B$

	w_1	w_2
w_1	u_1, v_2	0
w_2	u_2, v_1	u_1, v_1

Проведем прямое умножение этих матриц, т. е. каждый элемент одной матрицы умножается на каждый элемент другой матрицы (декартово произведение). В результате получим матрицу соединений автомата K (ввиду большого объема приведен только фрагмент матрицы – таблица 2.32).

Таблица 2.32 – Матрица соединений $\mathbf{R}_K$

	(q_1, w_1)	(q_1, w_2)	(q_2, w_1)	(q_2, w_2)
(q_1, w_1)	$(x_2, u_1), (y_2, v_2)$	0	$(x_1, u_1), (y_1, v_2)$	0
(q_1, w_2)	$(x_2, u_2), (y_2, v_1)$	$(x_2, u_1), (y_2, v_1)$	$(x_1, u_2), (y_1, v_1)$	$(x_1, u_1), (y_1, v_1)$
(q_2, w_1)	0	0	0	0
(q_2, w_2)	0	0	0	0

После переобозначений матрица принимает уже знакомый вид.

. . . .

Автомат $K = A \times B$ соответствует параллельной одновременной работе автоматов A и B (рис. 2.15), причем Z и S определяются по формулам (2.22) и (2.24).

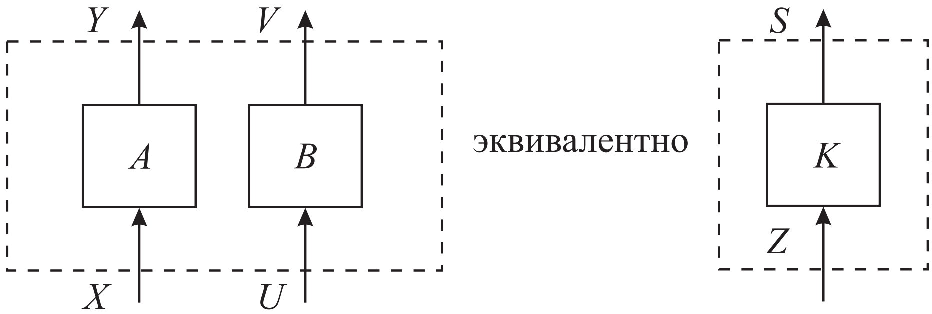


Рис. 2.14 – Произведение двух автоматов с раздельными входами

Обозначим отображения, индуцируемые автоматами A и B через S_A и S_B соответственно, а отображение, индуцируемое автоматом $K = A \times B$, через S_K, и пусть $\mathbf{x} \in X^*$ и $\mathbf{u} \in U^*$ – слова в соответствующих алфавитах, имеющие равную длину:

$$\mathbf{x} = x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik}, \ \mathbf{u} = u_{j1} u_{j2} \dots u_{jk}$$

$$\text{и } S_A(\mathbf{x}) = y_{i1} y_{i2} \dots y_{ik}, \ S_B(\mathbf{u}) = v_{j1} v_{j2} \dots v_{jk}.$$

Слово $\mathbf{z} \in Z^*$ является декартовым (прямым) произведением слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ и обозначается $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{u}$, если каждая буква слова $\mathbf{z}$ есть пара, образованная соответствующими буквами слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Поэтому $\mathbf{z} = \left(x_{i1}, u_{j1}\right)\left(x_{i2}, u_{j2}\right) \dots \left(x_{ik}, u_{jk}\right)$, и $S_K(\mathbf{z}) = \left(y_{i1}, v_{j1}\right)\left(y_{i2}, v_{j2}\right) \dots \left(y_{ik}, v_{jk}\right)$.

Таким образом, можно записать:

$$S_K(\mathbf{z}) = S_K(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) = S_A(\mathbf{x}) \times S_B(\mathbf{u}) = \mathbf{y} \times \mathbf{v} = \mathbf{s},$$

где $\mathbf{y} \in Y^*$, $\mathbf{v} \in V^*$, $\mathbf{s} \in S^*$.

Отображение S_K называется ***произведением отображений*** *S_A и S_B:*

$$S_K = S_A \times S_B.$$

Операция умножения $\otimes$ применяется к автоматам с одним и тем же входным алфавитом. Возьмем два произвольных непустых автомата Мили: $A = \left(X, Q, Y, q_1 \in Q, F\left(x \in X / y \in Y\right)\right)$ и $B = \left(X, W, U, w_1 \in W, P\left(x \in X / u \in U\right)\right)$. Автомат $K = \left(X, V, S, v_1 \in V, R\left(x \in X / s \in S\right)\right)$ называется произведением автоматов A и B: $K = A \otimes B$, если

$$V = Q \times W; \tag{2.26}$$

$$S = Y \times U; \tag{2.27}$$

$$Rv = \bigcup_{x \in X} \left(F_x q \times P_x w\right), \tag{2.28}$$

где $v \in V$, $q \in Q$, $w \in W$, $v = (q, w)$, а $F_x q$ и $P_x w$ – отображения состояний q и w соответственно по букве входного алфавита $x \in X$.

Вопрос о полной или частичной определенности произведения $\otimes$ решается так же, как и в случае произведения $\times$.

Возьмем теперь матрицы соединений автоматов A и B и представим их объединением матриц автономных автоматов по входным буквам:

$$\mathbf{R}_A = \bigcup_{x \in X} \mathbf{R}_{A_x} \text{ и } \mathbf{R}_B = \bigcup_{x \in X} \mathbf{R}_{B_x}.$$

Тогда матрица соединений R_K автомата $K = A \otimes B$ будет равна

$$\mathbf{R}_K = \bigcup_{x \in X} \left(\mathbf{R}_{A_x} \times \mathbf{R}_{B_x}\right),$$

т. е. объединению прямых произведений матриц автономных автоматов.

Пример 2.17

Найдем произведение автомата A и B с общим входом (табл. 2.33 и 2.34):

Таблица 2.33 – Автомат A

$q \backslash x$	x_1	x_2
q_1	q_1, y_2	q_2, y_1
q_2	q_1, y_1	–

Таблица 2.34 – Автомат B

$w \backslash x$	x_1	x_2
w_1	–	w_1, u_2
w_2	w_1, u_1	w_2, u_1

Автомат $K = A \otimes B$ будет иметь алфавит состояний $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и выходной алфавит $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, где $v_1 = (q_1, w_1)$, $v_2 = (q_1, w_2)$, $v_3 = (q_2, w_1)$, $v_4 = (q_2, w_2)$, $s_1 = (y_1, u_1)$, $s_2 = (y_1, u_2)$, $s_3 = (y_2, u_1)$, $s_4 = (y_2, u_2)$.

Декартовы произведения отображений состояний автоматов A и B по входным буквам x_1 (табл. 2.35) и x_2 (табл. 2.36) приведены ниже.

Таблица 2.35 – Произведение отображений по букве x_1

	x_1
(q_1, w_1)	–
(q_1, w_2)	$(q_1, w_1), (y_2, u_1)$
(q_2, w_1)	–
(q_2, w_2)	$(q_1, w_1), (y_1, u_1)$

Таблица 2.36 – Произведение отображений по букве x_2

	x_2
(q_1, w_1)	$(q_2, w_1), (y_1, u_2)$
(q_1, w_2)	$(q_2, w_2), (y_1, u_1)$
(q_2, w_1)	–
(q_2, w_2)	–

Объединение этих таблиц с учетом введенных обозначений даст таблицу автомата K (табл. 2.37).

Таблица 2.37 – Автомат K

	x_1	x_2
v_1	–	(v_3, s_2)
v_2	(v_1, s_3)	(v_4, s_1)
v_3	–	–
v_4	(v_1, s_1)	–

. . . .

Автомат $K = A \otimes B$ соответствует параллельной одновременной работе автоматов A и B (рис. 2.15).

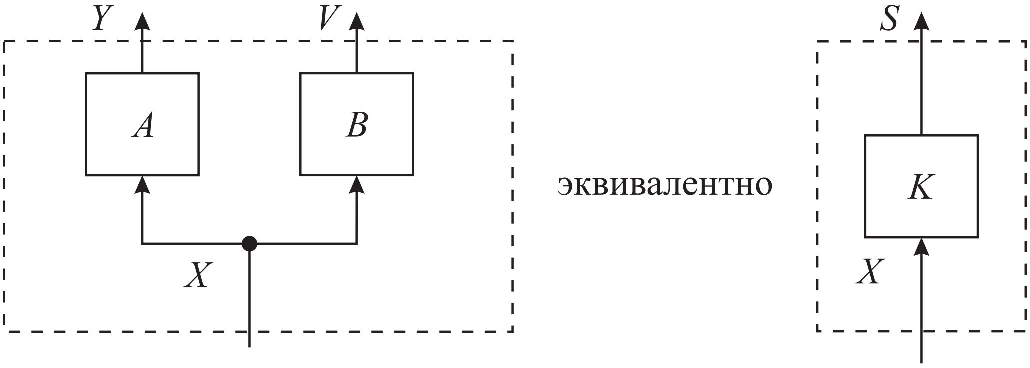


Рис. 2.15 – Произведение двух автоматов с общим входом

Операцию умножения автоматов × и ⊗ можно обобщить и на случай n автоматов.

. . . .

Суммой *двух произвольных автоматов* $A = \left(X, Q, Y, q_1 \in Q, F\left(x \in X / y \in Y\right)\right)$ *и* $B = \left(U, W, V, w_1 \in W, P\left(u \in U / v \in V\right)\right)$ *называется автомат* $M = \left(Z, H, S, h \in H, R\left(z \in Z / s \in S\right)\right)$ $\left(M = A + B\right)$, *если*

$$Z = \{1\} \times X \cup \{2\} \times U; \qquad (2.29)$$

$$H = Q \times W; \qquad (2.30)$$

$$S = \{1\} \times Y \cup \{2\} \times V; \qquad (2.31)$$

$$Rh = Fq \times \{w\} \cup \{q\} \times Pw, \qquad (2.32)$$

где $q \in Q$, $w \in W$, $h \in H$, $h = \left(q, w\right)$. *Начальным состоянием автомата M будет* $h_1 = \left(q_1, w_1\right)$.

. . . .

Формулы (2.29) и (2.31) используются для того, чтобы различать, возможно, одинаковые буквы входных алфавитов X и U и выходных алфавитов Y и V. Если таких совпадающих букв нет, т. е. $X \cap U = \varnothing$, $Y \cap V = \varnothing$, то вместо формул (2.29) и (2.31) используют выражения:

$$Z = X \cup U; \qquad (2.33)$$

$$S = Y \cup V. \qquad (2.34)$$

Пример 2.18

Заданы два автомата *A* (табл. 2.38) и *B* (табл. 2.39).

Таблица 2.38 – Автомат *A*

	x_1	x_2
q_1	q_2, y_1	q_3, y_2
q_2	q_3, y_2	–
q_3	–	q_2, y_1

Таблица 2.39 – Автомат *B*

	u_1	u_2
w_1	w_2, v_2	–
w_2	w_2, v_1	w_1, v_1

Найдем сумму $M = A + B$. Поскольку ни входные, ни выходные алфавиты автоматов *A* и *B* не пересекаются, для определения входного и выходного алфавитов автомата *M* пользуемся формулами (2.33) и (2.34). Поэтому $Z = \{x_1, x_2, u_1, u_2\}$ и $S = \{y_1, y_2, v_1, v_2\}$. Алфавит состояний, как и в случае операции произведения, будет $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, где $h_1 = (q_1, w_1)$, $h_2 = (q_1, w_2)$, $h_3 = (q_2, w_1)$, $h_4 = (q_2, w_2)$, $h_5 = (q_3, w_1)$, $h_6 = (q_3, w_2)$.

Найдем отображение Rh_1 по входной букве x_1, т. е. функцию перехода $\delta_M(h_1, x_1)$. Поскольку состояние h_1 есть пара (q_1, w_1), а входная буква принадлежит алфавиту *X* автомата *A*, то в формуле (2.32) останется только первый член объединения, и $\delta_M(q_1, x_1) = (q_2, w_1) = h_3$. Функция выхода будет равна $\lambda_M(q_1, x_1) = y_1$.

Отображение Rh_1 по входной букве x_2 (функция перехода $\delta_M(h_1, x_2)$) будет равно $\delta_M(q_1, x_2) = (q_3, w_1) = h_5$, а функция выхода – $\lambda_M(q_1, x_2) = y_2$.

Отображение Rh_1 по входной букве u_1 (функция $\delta_M(h_1, u_1)$) будет представлено только вторым членом объединения в формуле (2.32), т. е. $\delta_M(q_1, u_1) = (q_1, w_2) = h_2$, а функция выхода будет равна $\lambda_M(q_1, u_1) = v_2$.

Функции перехода и выхода автомата B по входной букве u_2 не определены, поэтому не определено, конечно, и отображение Rh_1 по букве u_2.

Окончательно будет

$$Rh_1 = \{h_3(x_1, y_1), h_5(x_2, y_2), h_2(u_1, v_2)\}.$$

Аналогичным образом определяем и отображения оставшихся состояний:

$$Rh_2 = \{h_4(x_1, y_1), h_6(x_2, y_2), h_2(u_1, v_1), h_1(u_2, v_1)\};$$

$$Rh_3 = \{h_5(x_1, y_2), h_4(u_1, v_2)\};$$

$$Rh_4 = \{h_6(x_1, y_2), h_4(u_1, v_1), h_3(u_2, v_1)\};$$

$$Rh_5 = \{h_3(x_2, y_1), h_6(u_1, v_1)\};$$

$$Rh_6 = \{h_4(x_2, y_1), h_6(u_1, v_1), h_5(u_2, v_1)\}.$$

По полученным отображениям составляем автоматную таблицу (табл. 2.40) и матрицу соединений $\mathbf{R}_M$ (табл. 2.41):

Таблица 2.40 – Автомат M

	x_1	x_2	u_1	u_2
h_1	h_3, y_1	h_5, y_2	h_2, v_2	–
h_2	h_4, y_1	h_6, y_2	h_2, v_1	h_1, v_1
h_3	h_5, y_2	–	h_4, v_2	–
h_4	h_6, y_2	–	h_4, v_1	h_3, v_1
h_5	–	h_3, y_1	h_6, v_1	–
h_6	–	h_4, y_1	h_6, v_1	h_5, v_1

Таблица 2.41 – Матрица соединений $\mathbf{R}_M$

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_1	0	u_1, v_2	x_1, y_1	0	x_2, y_2	0
h_2	u_2, v_1	u_1, v_1	0	x_1, y_1	0	x_2, y_2
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_3	0	0	0	u_1, v_2	x_1, y_2	0
h_4	0	0	u_2, v_1	u_1, v_1	0	x_1, y_2
h_5	0	0	x_2, y_1	0	0	u_1, v_1
h_6	0	0	0	x_2, y_1	u_2, v_1	u_1, v_1

. . . .

Операцию суммирования и соответствующие формулы (2.29)–(2.34) легко обобщить на случай *n* автоматов и можно использовать для автоматов Мура.

Матрица соединений $\mathbf{R}_M$ автомата $M = A + B$ определяется по формуле

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_A \times \mathbf{E}_B \cup \mathbf{E}_A \times \mathbf{R}_B,$$

где $\mathbf{E}_A$ и $\mathbf{E}_B$ – единичные матрицы порядков $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ соответственно.

Автомат $M = A + B$ соответствует параллельной неодновременной работе двух автоматов *A* и *B* (рис. 2.16).

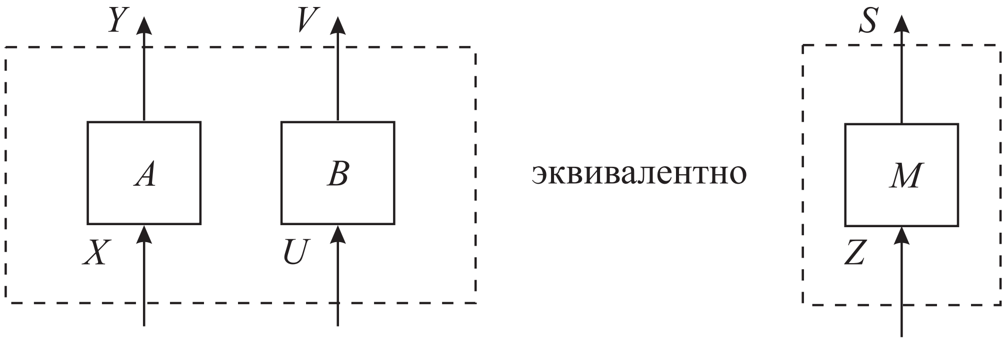


Рис. 2.16 – Сумма двух автоматов

Любое входное слово в алфавите *Z* автомата *M* образуется чередованием букв *x* и *u*, принадлежащих алфавитам *X* и *U*. Аналогично и выходное слово автомата *M* – это последовательность чередующихся букв $y \in Y$ и $v \in V$. Если в очередной момент времени *t* на вход автомата *M* поступит буква $x \in X$, то в момент времени $t+1$ на входе обязательно появится буква $u \in U$. Выходная буква в момент времени *t* является буквой алфавита *Y,* а в момент времени $t+1$ – буквой из алфавита *V*. На уровне автоматов *A* и *B* это означает, что в момент времени *t* на входе автомата *A* имеется буква $x \in X$, а на входе автомата *B* в это же время – пустая букве *e*. В следующий $t+1$-й момент времени на вход автомата *B* поступает буква $u \in U$, а на вход автомата *A* – пустая буква *e*.

Пусть $\mathbf{x} \in X^*$ и $\mathbf{u} \in U^*$ – слова, отличающиеся длиной не более чем на одну букву:

$$\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},\ \mathbf{u} = u_{j_1} u_{j_2} \ldots u_{j_{k-1}}.$$

Слово $\mathbf{z} \in Z^*$ называется *сплетением* слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, обозначается $\mathbf{z} = \mathbf{x} \rangle\langle \mathbf{u}$ и образуется чередованием букв $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$:

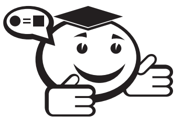
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \rangle\langle \mathbf{u} = x_{i_1} u_{j_1} x_{i_2} u_{j_2} \ldots u_{j_{k-1}} x_{j_k}.$$

Любые две соседние буквы слова $\mathbf{z}$ принадлежат разным входным алфавитам.

Если областью определения частичного отображения S_A служит множество допустимых слов $\mathbf{x} \in X^*$, а областью определения отображения S_B – множество допустимых слов $\mathbf{u} \in U^*$, то областью частичного отображения S_M будет множество слов $\mathbf{z} \in Z^*$, полученных сплетением пар допустимых слов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, отличающихся длиной не более чем на одну букву. Следовательно, можно записать

$$S_M(\mathbf{z}) = S_M\left(\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{u}\right) = S_A(\mathbf{x})\rangle\langle S_B(\mathbf{u}) = \mathbf{y}\rangle\langle\mathbf{v} = \mathbf{s},$$

где $\mathbf{y} \in Y^*$, $\mathbf{v} \in V^*$, $\mathbf{s} \in S^*$.



*Отображение S_M называется **сплетением отображений** S_A и S_B и обозначается $S_M = S_A\rangle\langle S_B$.*

Суперпозиция двух автоматов Мили $A = \left(X_1, Q, Y_1, q_1 \in Q,\ F\left(x \in X \,/\, y \in Y_1\right)\right)$ и $B = \left(X_2, W, Y_2, w_1 \in W, P\left(x \in X_2 \,/\, y \in Y_2\right)\right)$ предполагает, что пересечение $Y_1 \cap X_2 = Z$ не пусто в общем случае.

Отображение произвольного состояния $q \in Q$ автомата A можно представить в следующем виде:

$$Fq = F_{y_1} q \cup F_{y_2} q \cup \ldots \cup F_{y_p} q = \bigcup_{y \in Y_1} F_y q\,,$$

где p – число букв входного алфавита Y_1, а $F_y\, q$ – отображение состояния q, при котором на выходе появляется буква $y \in Y_1$.

Отображение произвольного состояния w автомата B представим в виде

$$Pw = P_{x_1} w_k \cup P_{x_2} w \cup \ldots \cup P_{x_s} w = \bigcup_{x \in X_2} P_x w\,,$$

где s – число букв входного алфавита X_2, а $P_x w$ – отображение состояния w по букве $x \in X_2$.

Автомат $N = \left(X_1, H, Y_2, h_1 \in H, S\left(x \in X_1 \,/\, y \in Y_2\right)\right)$ будет являться суперпозицией автоматов A и B $\left(N = A * B\right)$, если множество состояний

$$H = Q \times W, \tag{2.35}$$

а отображение S задано выражением:

$$Sh = \left(F_{z_1} q \times P_{z_1} w\right) \cup \left(F_{z_2} q \times P_{z_2} w\right) \cup \ldots \cup \left(F_{z_m} q \times P_{z_m} w\right) = \bigcup_{z \in Z_1} \left(F_z q \times P_z w\right),$$

где $h \in H$, $q \in Q$, $w \in W$, $h = (q, w)$, $z \in Z = Y_1 \cap X_2$ (m – число букв алфавита Z).

Пример 2.19

Даны два автомата A (табл. 2.42) и B (табл. 2.43):

Таблица 2.42 – Автомат A

	x_1	x_2
q_1	q_2, y_1	q_3, y_2
q_2	q_3, y_2	–
q_2	–	q_2, y_1

Таблица 2.43 – Автомат B

	y_1	y_2
w_1	w_2, v_2	–
w_2	w_2, v_1	w_1, v_1

Найдем суперпозицию $N = A * B$. Входной алфавит автомата N совпадает со входным алфавитом автомата A: $X = \{x_1, x_2\}$, а выходной алфавит – с выходным алфавитом автомата B: $V = \{v_1, v_2\}$. Алфавит состояний, как и во всех алгебраических операциях, – это $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, где $h_1 = (q_1, w_1)$, $h_2 = (q_1, w_2)$, $h_3 = (q_2, w_1)$, $h_4 = (q_2, w_2)$, $h_5 = (q_3, w_1)$, $h_6 = (q_3, w_2)$.

Возьмем состояние h_1 автомата N. Оно соответствует состоянию q_1 автомата A и состоянию w_1 автомата B. По входной букве x_1 автомат A перейдет из состояния q_1 в состояние q_2 с выходом y_1, и по этой же букве y_1 автомат B перейдет из состояния w_1 в состояние w_2 с выходом v_2. Поэтому пара (q_2, w_2) есть значение функции перехода автомата N: $\delta_N(h_1, x_1) = (q_2, w_2) = h_4$, а v_2 есть значение функции выхода автомата N: $\lambda_N(h_1, x_1) = v_2$. По входной букве x_2 автомат A переходит из состояния q_1 в состояние q_3 с выходом y_2, но отображение состояния w_1 автомата B по этой букве (y_2) не определено, поэтому не определено и отображение состояния h_1 автомата N по входной букве x_2. Таким образом, получаем

$$Sh_1 = \{h_4(x_1, v_2)\}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим отображения остальных состояний:

$$Sh_2 = \{h_4(x_1, v_1), h_5(x_2, v_1)\},\ Sh_3 = \varnothing,\ Sh_4 = \{h_5(x_1, v_1)\},$$

$$Sh_5 = \{h_4(x_2, v_2)\},\ Sh_6 = \{h_4(x_2, v_1)\}.$$

Автоматная таблица, составленная по этим отображениям, приведена ниже (табл. 2.44).

Таблица 2.44 – Автомат N

	x_1	x_2
h_1	h_4,v_2	–
h_2	h_4,v_1	h_5,v_1
h_3	–	–
h_4	h_5,v_1	–
h_5	–	h_4,v_2
h_6	–	h_4,v_1

. . . .

Суперпозицию автоматов можно представить и через разложение исходных автоматов на автономные. Представим автомат A объединением автономных автоматов по выходной букве:

$$A = \bigcup_{y \in Y_1} A_y,$$

а автомат B объединением автономных автоматов по входной букве:

$$B = \bigcup_{x \in X_2} B_x.$$

Тогда автомат $N = A * B$ будет задан выражением:

$$N = \left(A_{z_1} \times B_{z_1}\right) \cup \left(A_{z_2} \times B_{z_2}\right) \cup \ldots \cup \left(A_{z_n} \times B_{z_n}\right) = \bigcup_{z \in Z_1} \left(A_z \times B_z\right), \qquad (2.36)$$

где $Z = Y_1 \cap X_2$.

Из последнего выражения следует, что операция суперпозиции автоматов соответствует *композиции* соответствующих *отображений*, если $Y_1 = X_2$, т. е.

$$S_N(\mathbf{x}) = S_B(\mathbf{y}) = S_B\left(S_A(\mathbf{x})\right), \text{ или } S_N = S_A \circ S_B,$$

где $\mathbf{x} \in X_1$, $\mathbf{y} \in Y_1$.

Если же $Y_1 \neq X_2$ и $Y_1 \cap X_2 = Z$, то получим композицию сужений отображений S_A и S_B на множество Z. Операция суперпозиции автоматов ассоциативна, но, конечно же, некоммутативна, так же как и композиция отображений. Поэтому множество автоматов по операции суперпозиции образует некоммутативную полугруппу B_*.

Теперь запишем операцию суперпозиции в матричной форме.

Разложим матрицу соединений $\mathbf{R}_A$ автомата A по автономным матрицам выходного алфавита:

$$\mathbf{R}_A = \bigcup_{y \in Y_1} \mathbf{R}_{Ay},$$

и из каждой автономной матрицы исключим ту букву, по которой выделена эта матрица.

Матрицу автомата B представим объединением матриц автономных автоматов входного алфавита:

$$\mathbf{R}_B = \bigcup_{x \in X_2} \mathbf{R}_{Bx},$$

также исключая из каждой автономной матрицы ту букву, по которой данная матрица выделена.

Тогда матрица соединений $\mathbf{R}_N$ автомата $N = A * B$ при условии, что $Y_1 \cap X_2 = Z \neq \varnothing$, определиться формулой

$$\mathbf{R}_N = \bigcup_{z \in Z} \left(\mathbf{R}_{A_z} \times \mathbf{R}_{B_z} \right).$$

Операции суперпозиции двух автоматов соответствует последовательная их работа (рис. 2.17).

Наиболее общий случай совместной работы автоматов задается операцией *композиции*, а различные типы их соединений и виды работы, которые соответствуют введенным ранее операциям, являются частными случаями композиции автоматов.

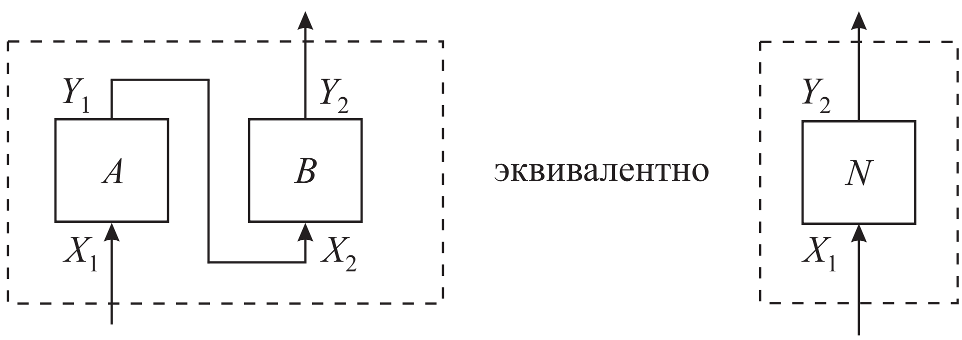


Рис. 2.17 – Суперпозиция двух автоматов

Зададим произвольные автоматы $A=\left(X,V,L,v_1\in V,F\left(x\in X,t\in T\,/\,l\in L\right)\right)$ и $B=\left(Y,W,T,w_1\in W,P\left(y\in Y,l\in L\,/\,t\in T\right)\right)$. Входной алфавит автомата A – это X, V – алфавит состояний, L – выходной алфавит, F – отображение множества состояний V в себя по буквам входного алфавита $x\in X$ и выходного алфавита $t\in T$ автомата B, при котором на выходе автомата A появляется выходная буква $l\in L$. Аналогично для автомата B.

Представим отображение F и P в виде объединения соответствующих выражений по буквам алфавитов T и L:

$$Fv=\bigcup_{t\in T}\bigcup_{l\in L}F_{t/l}v\,,$$

$$Pw=\bigcup_{l\in L}\bigcup_{t\in T}P_{l/t}w\,.$$

Автомат $C=\left(Z,Q,M,q_1\in Q,K\left(z\in Z\,/\,m\in M\right)\right)$ будет называться композицией автоматов A и B $\left(C=A\circ B\right)$, если

$$Z=X\times Y; \tag{2.37}$$

$$Q=V\times W; \tag{2.38}$$

$$M=L\times T; \tag{2.39}$$

$$Kq=\bigcup_{\substack{l\in L\\ t\in T}}\left(F_{t/l}v\times P_{l/t}w\right), \tag{2.40}$$

где $q=\left(v,w\right)$, $q\in Q$, $v\in V$, $w\in W$, а $F_{t/l}v$ – отображение состояния v по букве $t\in T$, при котором на выходе появляется буква $l\in L$, $P_{l/t}w$ – отображение состояния w по букве $l\in L$, при котором на выходе появляется буква $t\in T$.

Композиции автоматов эквивалентна совместная работа автоматов, приведенная на рисунке 2.18.

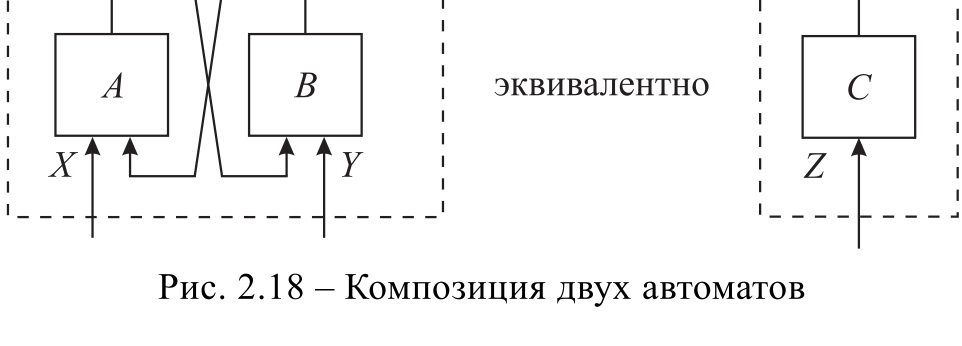


Рис. 2.18 – Композиция двух автоматов

Автомат A можно разложить на автономные автоматы по входным буквам $t \in T$: $A = \bigcup_{t \in T} A_t$, а каждый автономный автомат A_t, в свою очередь, – по буквам $l \in L$: $A_t = \bigcup_{l \in L} A_{t/l}$.

Таким образом,

$$A = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} A_{t/l}. \tag{2.41}$$

Аналогично и автомат B:

$$B = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} B_{l/t}. \tag{2.42}$$

Из формул (2.37)–(2.42) следует, что автомат $C = A \circ B$ можно найти по формулам:

$$C = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} A_{t/l} \times B_{l/t}. \tag{2.43}$$

Из последнего выражения легко получить операцию композиции в матричной форме. Возьмем матрицу соединений автомата A с элементами:

$$r_{\alpha\beta}\left(xt/l\right) = \begin{cases} x/l, \text{ если } v_\beta \in F_{v_\alpha} \text{ по буквам } x \in X,\, t \in T \text{ с выходом } l \in L, \\ 0, \text{ если } v_\beta \notin F_{v_\alpha},\ \alpha, \beta = \{1, 2, \ldots k\}, \end{cases}$$

где k – число состояний автомата A, – и матрицу соединений автомата B:

$$r_{\gamma\delta}\left(yl/t\right) = \begin{cases} yl/t, \text{ если } w_\delta \in P_{w_\gamma} \text{ по буквам } y \in Y,\, l \in L \text{ с выходом } t \in T, \\ 0, \text{ если } w_\delta \notin P_{w_\gamma},\ \gamma, \delta = \{1, 2, \ldots n\}, \end{cases}$$

где n – число состояний автомата B.

Тогда матрица соединений автомата $C = A \circ B$ будет равна:

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_A \circ \mathbf{R}_B = \bigcup_{\substack{t \in T \\ l \in L}} \mathbf{R}_{A(t/l)} \times \mathbf{R}_{B(l/t)},$$

где $\mathbf{R}_{A_{(t/l)}}$ – матрица соединений автономного подавтомата $A_{t/l}$ и буква $t \in T$, по которой выделен этот подавтомат, исключена из матрицы; $\mathbf{R}_{B_{(l/t)}}$ – матрица соединений автономного подавтомата $B_{l/t}$, а буква $l \in L$ исключена.

В более общем случае автоматы A и B могут иметь и общий входной алфавит

$$N: A = \Big(N, X, V, L, v_1 \in V, F\big(n \in N, x \in X, t \in T / l \in L\big)\Big),$$

$$B = \Big(N, Y, W, T, w_1 \in W, P\big(n \in N, y \in N, l \in L / t \in T\big)\Big).$$

Тогда композиция A и B определяется выражением

$$C = A \circ B = \bigcup_{n\in N} \left(A_n \circ B_n \right),$$

где A_n и B_n – автономные автоматы по буквам входного алфавита $n \in N$.

Учитывая (2.43) получим:

$$C = \bigcup_{n\in N} \left(\bigcup_{\substack{t\in T \\ l\in L}} \left(A_{n(t/l)} \times B_{n(l/t)} \right) \right),$$

то есть автомат C задан выражениями:

$$Z = N \times X \times Y; \tag{2.44}$$

$$Q = V \times W; \tag{2.45}$$

$$M = L \times T; \tag{2.46}$$

$$Kq = \bigcup_{n\in N} \left(\bigcup_{\substack{t\in T \\ l\in L}} \left(F_{n(t/l)} v \times P_{n(l/t)} w \right) \right). \tag{2.47}$$

Используя соотношения (2.44)–(2.47), можно показать, что операция композиции ассоциативна и с точностью до изоморфизма коммутативна.

В частных случаях операция композиции соответствует рассмотренным ранее операциям умножения, суммирования, суперпозиции.

Например, пусть $A = \left(X, V, L, v_1 \in V, F\left(x \in X / l \in L \right) \right)$ и $B = \left(Y, W, T, w_1 \in W, P\left(y \in Y / t \in T \right) \right)$ – независимо работающие автоматы. Так как автоматы имеют различные входные алфавиты ($X \cap Y = \varnothing$), пользуемся формулами (2.37)–(2.40). Отображение F состояния $v \in V$ автомата A не зависит от выхода автомата B, а отображение P состояния $w \in W$ автомата B не зависит от выхода автомата A, поэтому

$$\bigcup_{\substack{l\in L \\ t\in T}} F_{t/l} v = Fv, \quad \bigcup_{\substack{l\in L \\ t\in T}} P_{l/t} w = Pw.$$

Окончательно автомат $C = \left(Z, Q, M, q_1 \in Q, K\left(z \in Z / m \in M \right) \right)$ определяется по формулам:

$$Z = X \times Y, \; Q = V \times W, \; M = L \times T, \; Kq = Fv \times Pw,$$

которые совпадают с формулами (2.22)–(2.25) и, следовательно, задают операцию умножения $\times$.

Нетрудно для частных случаев перейти от композиции и к другим алгебраическим операциям: умножению автоматов с общим выходом, суперпозиции и суммированию.

2.5 Структурное исследование автоматов

Переходим теперь к внутреннему устройству автоматов и к задачам, связанным с их внутренним устройством, то есть к структурному уровню. Здесь, как и на абстрактном уровне, главными задачами исследования являются анализ и синтез автоматов.

2.5.1 Комбинационные логические автоматы

Для дальнейшего изложения нужно дать несколько определений.

Автомат называется ***комбинационным****, если для любого входного символа* $x \in X$ *и любых состояний* $q_i, q_j \in Q$ *выполняется равенство* $\lambda(q_i, x) = \lambda(q_j, x)$, *то есть выход автомата не зависит от его состояния и определяется только его входом.*

В таком автомате все состояния эквивалентны и минимальный комбинационный автомат имеет *только одно состояние*. Функция переходов в нем вырождена, а поведение такого автомата задается функцией выходов с одним аргументом $\lambda(x_i) = y_i$.

Если входной алфавит автомата состоит из 2^m двоичных векторов длины m, а выходной – из 2^n двоичных векторов длины n, то такой автомат называется *логическим.* Понятно, что автомат с произвольными алфавитами можно свести к логическому автомату соответствующим *кодированием* его алфавитов. Таким образом, *комбинационный логический* автомат – это автомат, функция выхода которого – это система n логических функций от m переменных:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \lambda_1(x_1, x_2, \ldots x_m); \\
y_2 &= \lambda_2(x_1, x_2, \ldots x_m); \\
&\ldots \\
y_n &= \lambda_n(x_1, x_2, \ldots x_m),
\end{aligned}
\qquad (2.48)
$$

где x_i – логическая переменная (i-я компонента вектора $\mathbf{x}$ длины m), а y_j – также логическая переменная (j-я компонента вектора $\mathbf{y}$ длины n).

Эту же систему уравнений (2.48) можно записать и в компактной форме $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$, где Φ – упорядоченная совокупность функций λ_i.

Логический комбинационный автомат можно представить рисунком 2.19.

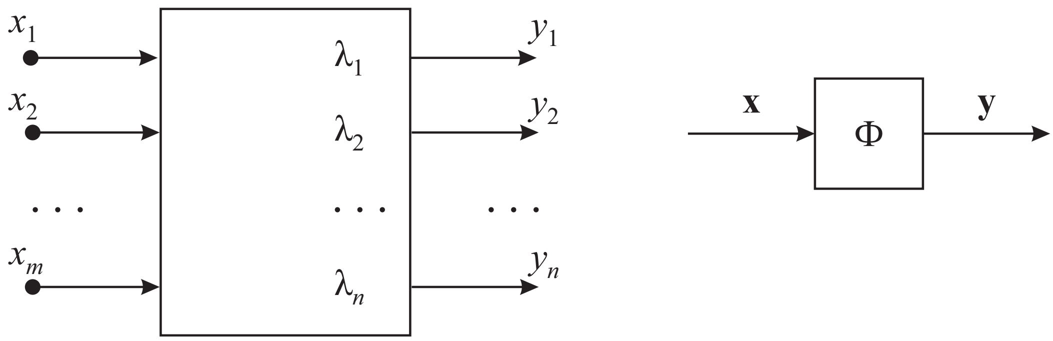


Рис. 2.19 – Функциональная схема комбинационного автомата

Удобно рассматривать x_1, x_2, ... x_m как входные, а y_1, y_2, ... y_n – как выходные полюсы автомата. Считая, что каждый полюс может находиться в состоянии 0 или 1, приходим к выводу, что в комбинационном логическом автомате каждой комбинации состояний входных полюсов вполне однозначно соответствует комбинация состояний выходных полюсов. Отсюда и название – *комбинационный*. Система уравнений (2.48) и схема на рисунке 2.19 – это *функциональная* модель автомата.

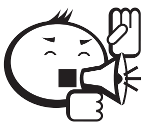
2.5.2 Постановка задач синтеза и анализа на структурном уровне

Структурная схема автомата, т. е. его структурная модель, показывает, как он устроен, из каких элементов состоит и как эти элементы соединены (связаны) между собой.

Структурная модель дискретного автомата отражает схему реальной дискретной системы, и элементы автомата ставятся в соответствие некоторым реальным конструктивным элементам.

Основное содержание теории автоматов на структурном уровне – это исследование соотношения между функциональной моделью и структурной моделью. И по-прежнему здесь возникают две задачи: задача анализа и задача синтеза. Задача анализа – это получение функциональной модели по заданной структурной. Синтез – обратная задача: нахождение структурной модели по заданной функциональной. Вторая задача значительно сложнее, так как ее решение не единственно и среди многих возможных решений требуется выбрать оптимальное (наилучшее) в каком-то смысле. Поскольку задача синтеза более трудная, то и большая часть сил и времени на структурном уровне тратится на решение именно этой задачи.

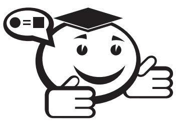
Исходная для синтеза информация задается следующим образом. Во-первых, описывается функциональная модель. Во-вторых, указывается из каких элементов нужно автомат синтезировать, то есть задается *элементный* *базис.* В-третьих, определяется *синтаксис структур*, то есть формулируются правила взаимных соединений элементов, выделяющие из всевозможных структур класс допустимых (или правильных). Синтаксис играет компенсирующую роль: заменяя реальные элементы абстрактными, мы допускаем некоторую идеализацию, которая, тем не менее, оказывается допустимой, пока синтезированные из данных элементов структуры являются правильными, т. е. удовлетворяющими синтаксису. Однако как только мы переходим к рассмотрению неправильных структур, может появиться нежелательный эффект идеализации, то есть поведение реального устройства может существенно отклониться от поведения его абстрактного двойника (модели).



Будем считать, что элементный базис в совокупности с правилами соединения элементов образуют базис синтеза или просто базис.

2.5.3 Элементный базис

В элементный базис могут входить самые разнообразные элементы, которые сами являются простейшими автоматами. Выбор их диктуется как уровнем развития технологии производства реальных элементов, так и требованиями, предъявляемыми к базису со стороны методов синтеза. Основные требования, которым должен удовлетворять элементный базис, – это *полнота и эффективность.*



Базис называется ***полным относительно некоторого класса автоматов****, если в нем может быть синтезирован любой автомат этого класса.*

Требование эффективности достаточно расплывчатое, и его можно сформулировать примерно так: более эффективным будет базис, синтезируемые в котором структуры будут в каком-то смысле лучшими (проще, дешевле, надежнее и т. д.). При определении эффективности базиса нужно учитывать как свойства реальных элементов, так и применяемые методы синтеза: для одних базисов эти методы могут быть развиты сильнее, для других – слабее.

Какие же элементы могут входить в базис? Это, во-первых, логические элементы и, во-вторых, элементы памяти.

Логическими элементами называются элементарные комбинационные логические автоматы, функциональные свойства которых представляются достаточно простыми логическими функциями: дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, функцией Шеффера, импликацией, стрелкой Пирса и т. д.

Как правило, ограничиваются элементами И (конъюнкция), ИЛИ (дизъюнкция), НЕ (отрицание), И-НЕ (штрих Шеффера), ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса) и многовходовыми аналогами соответствующих элементов.

Элементами памяти служат некоторые элементарные логические автоматы. Наиболее простые и распространенные из них – это *элемент задержки* и *триггер*.

Элемент задержки можно рассматривать как элементарный синхронный автомат, функции которого сводятся к задержке на один такт значения одной логической переменной. То есть значение выхода в момент времени t равно значению входа в момент времени $t-1$. Схематичное изображение и автоматная таблица элемента задержки приведены на рисунке 2.20.

	0	1
0	0,0	1,0
1	0,0	1,1

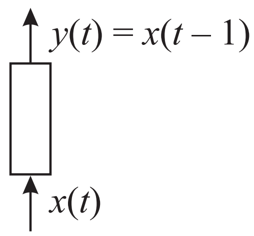


Рис. 2.20 – Элемент задержки

Триггер можно представить себе как асинхронный автомат с двумя внутренними состояниями, которые могут фиксироваться и в каждое из которых при определенных условиях автомат можно перевести. Из различных вариантов автоматов, удовлетворяющих этим условиям, остановимся на автомате, графическое изображение и автоматная таблица которого приведены на рисунке 2.21.

Входом и выходом такого автомата являются двоичные векторы длины 2. Первые компоненты этих векторов проиндексированы на рисунке 2.21 буквой «л» (левые полюса), а вторые – буквой «п» (правые полюса). В связи с тем, что поведение триггера при комбинации 11 на входе не определено, использовать эту комбинацию на входе не рекомендуется.

	00	01	10	11
0	0,10	1,01	0,10	–
1	1,01	1,01	0,10	–

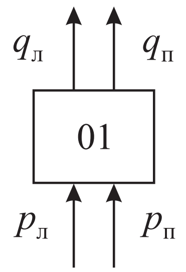
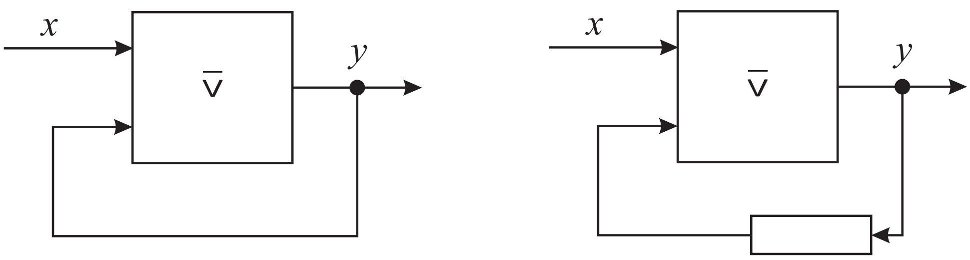


Рис. 2.21 – Триггер

2.5.4 Автоматные сети

Возьмем некоторую совокупность автоматных элементов (безразлично, разных или одинаковых). Выделим из множества входных полюсов P всех элементов некоторое подмножество $X \subset P$, а из множества Q всех выходных полюсов некоторое подмножество Y. Отобразим разность $P \backslash X$ в Q и будем считать, что это отображение задает множество связей между элементами множества P, с одной стороны, и множества Q – с другой. Полученную таким образом структуру будем называть *сетью*, элементы множества X – ее входными полюсами, а элементы множества Y – ее выходными полюсами. При небольшом числе элементов в сети можно пользоваться графическим представлением, в иных случаях удобнее задавать сеть в форме некоторого списка, содержащего перечень элементов и связей между ними.

Очевидно, что структуру любого автомата можно представить некоторой сетью. Обратное, вообще говоря, неверно. Для подтверждения этого факта достаточно рассмотреть классический пример сети, изображенной на рисунке 2.22, *а*.



а *б*

Рис. 2.22 – Пример сети

Для $x=0$ при определении значения y возникает противоречие типа «если $y=0$, то $y=1$, если $y=1$, то $y=0$». Это противоречие можно разрешить, если добавить в обратную связь, например, блок задержки (рис. 2.22, *б*). В этом случае сеть можно рассматривать как синхронный автомат, в котором при $x=0$ переменная y принимает последовательно значения 1, 0, 1, 0, … .

Этот пример показывает, что сети из логических элементов, содержащие контур обратной связи без задержек, могут не иметь конкретной автоматной интерпретации. В то же время обратные связи с элементами памяти являются мощным средством построения автоматов. В связи с этим будем рассматривать только *правильные* сети, то есть такие, которые можно рассматривать как структуры автоматов.

Правильная синхронная сеть – это сеть из логических элементов и элементов задержки (назовем и те и другие для краткости блоками), если: 1) к каждому входному полюсу блока присоединен не более чем один выходной полюс (однако допускается присоединение выходного полюса блока к нескольким входным полюсам, то есть разветвление выходов); 2) в каждом контуре обратной связи, то есть в каждом цикле, есть хотя бы один элемент задержки. Входными полюсами правильной синхронной сети будут полюса, не присоединенные ни к каким выходным полюсам блоков, а выходными полюсами – только те, которые не подсоединены ни к каким входным полюсам.

Оказывается, что любой автомат можно представить правильной синхронной сетью. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 2.8. Любой конечный автомат при любом двоичном кодировании его алфавитов X, Q, Y может быть реализован правильной синхронной сетью из логических комбинационных автоматов и двоичных задержек, причем число задержек не может быть меньше $\log_2 |Q|$.

Существует и обратная теорема.

Теорема 2.9. Всякая правильная синхронная логическая сеть (ПЛС) с входами $x_1,\dots x_m$, выходами $z_1,\dots z_n$ и k элементами задержки является конечным автоматом, входной алфавит которого состоит из 2^m двоичных наборов длины m, выходной алфавит – из 2^n наборов длины n, а множество состояний – из 2^k наборов длины k (см. рис. 2.23).

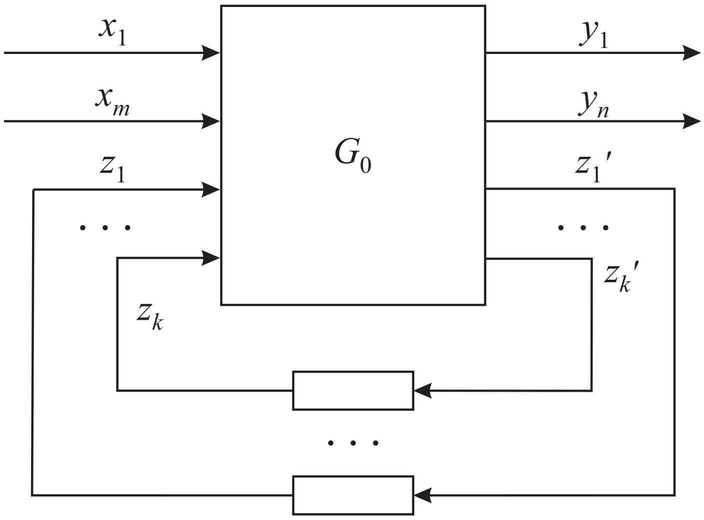


Рис. 2.23 – Правильная синхронная сеть, представляющая автомат

. . . .

Рассмотрим теперь сети, составленные только из логических элементов и содержащие в отличие от ПЛС контуры (обратные связи). Анализируя поведение таких сетей, можно прийти к одному из выводов:

а) при любой комбинации значений входных полюсов сеть будет переходить в некоторое устойчивое состояние и оставаться в нем, пока входной сигнал не изменится;
б) при некоторых обстоятельствах условие предыдущего пункта может нарушаться, и в сети возникают противоречия (как, например, это было в сети, изображенной на рис. 2.22, *а*).

Сеть, удовлетворяющая первому выводу, называется *асинхронной сетью* и ее можно рассматривать как структуру асинхронного автомата.

Простейший пример приведен на рисунке 2.24.

Легко видеть, что эта сеть оказывается триггером, который с учетом переобозначений входов совпадает с изображенным на рисунке 2.21.

Рассматривая триггеры как элементы, произвольный асинхронный автомат по аналогии с рисунком 2.23 можно представить некоторым логическим комбинационным автоматом G_0 и совокупностью триггеров, концентрирующих в себе «память» автомата (рис. 2.25). Вход и выход автомата представляются, как обычно, двоичными наборами x и y, а внутренние состояния – значениями вектора $q_{п} = (q_{1п}, q_{2п}, \ldots q_{kп})$, где $q_{iп}$ – правый выходной полюс i-го триггера. Переменная $q_{л}$ всегда (см. автоматную таблицу на рисунке 2.21) принимает инверсное значение по отношению к $q_{п}$, в связи с чем можно считать, что логические функции, реализуемые комбинационным автоматом G_0, зависят только от переменных $x_1,\dots x_m,\ q_{1\text{п}},\dots q_{k\text{п}}$.

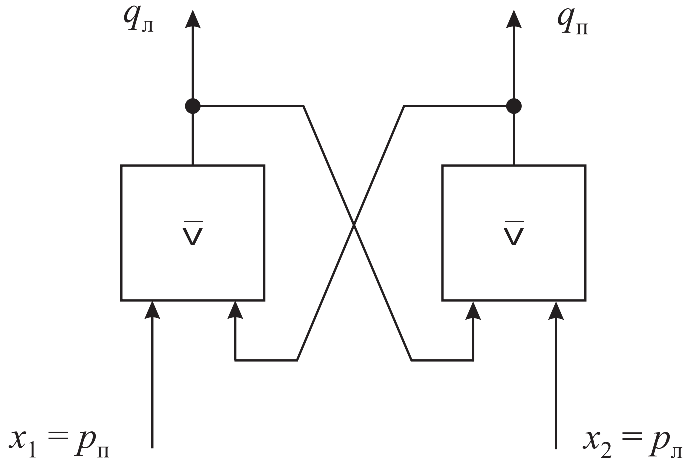


Рис. 2.24 – Схема триггера

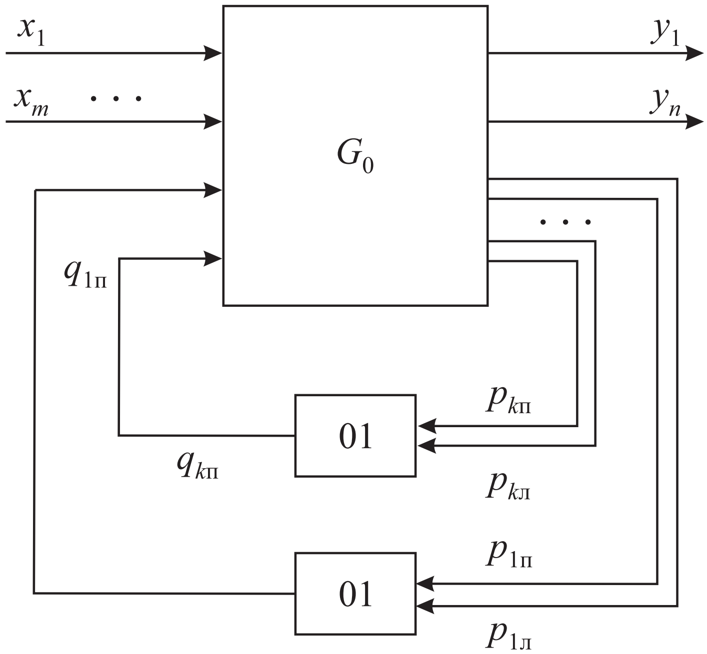


Рис. 2.25 – Асинхронный автомат, представленный сетью

Эти функции представляют собой, во-первых, функции выхода:

$$y_i = \lambda_i\left(x_1,\dots,x_m,q_{1\text{п}},\dots,q_{k\text{п}}\right),\ i=\{1,2,\dots n\},$$

а во-вторых, *функции возбуждения* триггеров:

$$p_{i\text{л}} = \delta'\left(x_1,\dots,x_m,q_{1\text{п}},\dots,q_{k\text{п}}\right),\ i=\{1,2,\dots k\}$$

(для левого входа) и

$$p_{i\text{п}} = \delta''\left(x_1,\dots,x_m,q_{1\text{п}},\dots,q_{k\text{п}}\right),\ i=\{1,2,\dots k\}$$

(для правого входа).

При решении задачи синтеза асинхронного автомата большое значение имеет нахождение функций возбуждения триггеров. Определение этих функций допускает некоторую вольность, которая становится ясной при анализе автоматной таблицы триггера (рис. 2.21). Действительно, если при реализации некоторого перехода между внутренними состояниями автомата *i*-й триггер должен сменить состояние 0 на состояние 1 (условно обозначим этот факт как $0 \to 1$), то на его вход должна быть подана вполне определенная комбинация 01. Но если переход при смене состояний должен быть $0 \to 0$, то такое возможно как при комбинации на входе 00 (как не меняющей состояние триггера), так и при комбинации 10 (эта комбинация всегда переводит триггер в состояние 0 независимо от того, в каком состоянии он перед этим находится). Таким образом, на входе должна быть комбинация 0, где прочерк означает произвольное значение (либо 0, либо 1). Анализируя автоматную таблицу триггера, придем к следующей таблице смены состояний триггера (табл. 2.45).

Таблица 2.45 – Автоматная таблица триггера

Тип изменения состояний триггера	**Требуемая комбинация на входе**
$0 \to 0$	– 0
$0 \to 1$	01
$1 \to 0$	10
$1 \to 1$	0 –

Изображенный на рисунке 2.25 триггер реализован на элементах Пирса, но возможна реализация триггера и на других логических элементах, например на элементах Шеффера. Из других видов триггеров полезно упомянуть счетный триггер (или триггер со счетным входом), таблица переходов которого приведена ниже (табл. 2.46).

Таблица 2.46 – Автоматная таблица счетного триггера

Тип изменения состояний	**Значение входа**
$0 \to 0$	0
$0 \to 1$	1
$1 \to 0$	1
$1 \to 1$	0

В состав счетного триггера входят два уже рассмотренных ранее триггера и логическая комбинационная схема. При небольших умственных затратах можно нарисовать структурную схему счетного триггера. Рекомендуется проделать это самостоятельно в качестве упражнения.

2.5.5 Анализ комбинационных автоматов

Из теорем 2.8 и 2.9 следует, что структуру комбинационного автомата всегда можно представить линейно-упорядоченной сетью, содержащей только логические элементы. Для краткости назовем такую сеть комбинационной.

Если соответствующее какой-либо комбинационной сети отображение $P \backslash X$ в Q является взаимно-однозначным отображением $P \backslash X$ на некоторое подмножество Q, то такая сеть называется *сходящейся*, если нет, то *расходящейся*. Необходимо напомнить, что P – множество входных полюсов элементов сети, X – множество входных полюсов сети, а Q – множество выходных полюсов элементов сети. То есть связи расходящейся сети могут ветвиться (один выходной полюс может быть соединен с несколькими входными), а для сходящейся сети это невозможно.

Если комбинационная сеть имеет только один выходной полюс (реализует одну логическую функцию) и является сходящейся, то ее можно представить в виде одной формулы, задающей суперпозицию логических функций, реализуемых элементами сети. Для подобного представления расходящейся сети требуется уже система формул. Эта система может быть получена путем введения дополнительных переменных для обозначения тех связей, удаление которых превращает расходящуюся сеть в сходящуюся.

Ясно, что система формул требуется и для описания комбинационной сети с более чем одним выходным полюсом.

Исследование комбинационных автоматов сводится к исследованию отношений между логическими функциями и их представлением в виде суперпозиции элементарных функций, реализуемых отдельными элементами сети. При анализе по заданной суперпозиции, определяемой комбинационной сетью, находится формула (или система формул), представляющая логическую функцию (систему функций). Затем путем эквивалентных преобразований эта формула представляется в некоторой более удобной форме.

Пример 2.20

Проведем анализ сети, изображенной на рисунке 2.26.

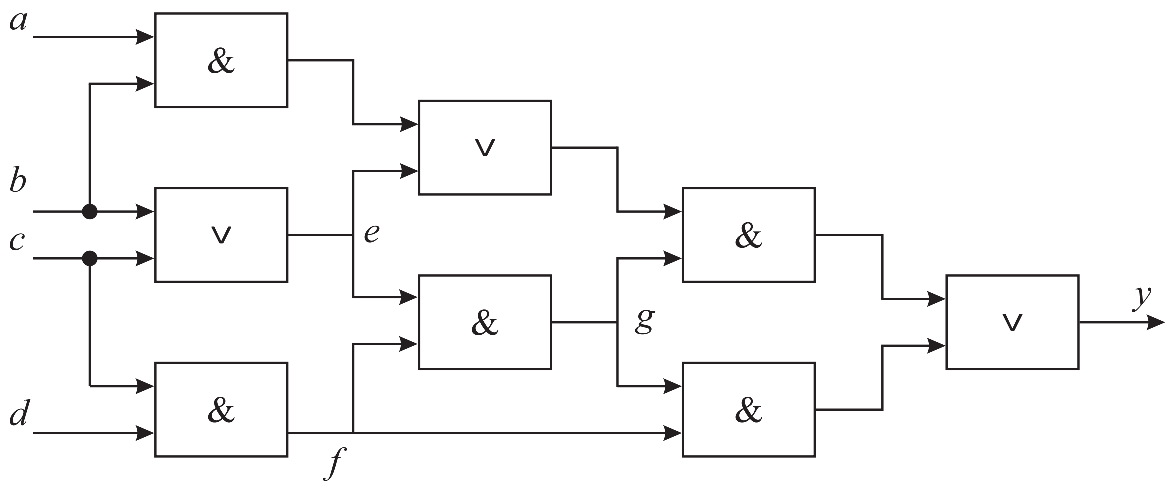


Рис. 2.26 – К анализу сети (пример 2.20)

Вводя промежуточные переменные, соответствующие расходящимся выходам элементов, получаем систему формул:

$$e = b \vee c, \qquad g = e \cdot f,$$
$$f = c \cdot d, \qquad y = (ab \vee e)g \vee gf.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для промежуточных переменных и применяя правила эквивалентных преобразований булевых формул, получаем окончательно весьма простую булеву формулу $y = cd$, которую, очевидно, можно реализовать и одним элементом.

2.5.6 Синтез комбинационных автоматов

При синтезе заданную логическую функцию f необходимо представить в виде суперпозиции элементарных функций, определяющей структуру комбинационного автомата. Если функция f задана формулой F над множеством Σ элементарных функций, то формуле F можно поставить в соответствие схему G из логических элементов, реализующих функции Σ. Построение G осуществляется индукцией по глубине формулы:

1) если $F = \varphi(x_{i1},\dots x_{ik})$, где $\varphi \in \sum$, $x_{i1},\dots x_{ik}$ – исходные переменные, то схема G состоит из одного элемента φ, входы которого отождествляются с переменными $x_{i1},\dots x_{ik}$, а выход – с переменной y;
2) если $F = \varphi(F_1,\dots F_k)$, где F_i – переменная x_{ji} или функция, уже реализованная схемой G_i, то схема G для F строится так: к i-му входу элемента φ присоединяется выход схемы G_i (если F_i – функция) или входная переменная (если $F_i = x_{ij}$), выходом y будет выход элемента φ.

Такой способ построения всегда приводит к линейно-упорядоченной сходящейся сети, т. е. имеет форму дерева, причем входные полюса соответствуют концевым вершинам, а выход – корню дерева.

Понятно, что между множеством формул над $\sum$ и множеством древовидных схем из элементов, реализующих функции $\sum$, существует взаимно-однозначное соответствие: по любой формуле F над $\sum$ изложенный метод однозначно строит схему G и, наоборот, анализ схемы G (например, с помощью теоремы 2.9) дает исходную формулу F. Число знаков операций в F равно числу элементов схемы G. Все это сводит задачу преобразования схем (в том числе их минимизацию) к задаче преобразования логических формул.

Итак, по формуле над $\sum$ всегда можно построить линейно-упорядоченную сходящуюся сеть из элементов $\sum$; обратное утверждение в силу теоремы 2.9 верно для любой (не обязательно сходящейся) сети. Отсюда следует важный, хотя и очевидный факт: для того чтобы произвольная логическая функция могла быть реализована схемой над $\sum$, необходимо и достаточно, чтобы множество функций $\sum$ было *функционально полным.*

Для системы функций справедливо то же самое.

Проблема минимизации схемных решений оказывается куда более сложной. Задача минимизации формул сама по себе сложна, но и она не исчерпывает возможности минимизации схем.

До настоящего времени известно очень небольшое количество классов функций, для которых найдены минимальные схемные решения. И в общем случае, видимо, поиск минимальных решений невозможен без большого перебора вариантов. Даже достаточно точно оценить по заданной функции хотя бы число элементов в минимальной схеме (не проводя синтеза) также не удается.

Ознакомимся теперь с методами синтеза, развитыми для конкретных базисов $\sum$.

Базис произвольных дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Это базис, в котором синтезируются структуры, непосредственно соответствующие ДНФ. Элементами базиса являются конъюнкторы и дизъюнкторы с произвольным числом входов, реализующие конъюнкцию и дизъюнкцию любого числа переменных. Эти элементы могут соединяться так, чтобы образовывались двухъярусные сети, в которых элементами первого яруса служат конъюнкторы, а элементами второго – дизъюнкторы. При этом выходные полюсы элементов первого яруса могут соединяться с входными полюсами элементов второго яруса, а выходные полюса элементов второго яруса являются выходными полюсами сети в целом. Входные же полюсы сети соединены непосредственно с входными полюсами элементов первого яруса. Эти правила соединения – синтаксис базиса.

Отмечая некоторые из входных полюсов сети символами инверсий аргументов, предполагаем, что эти инверсии получаются где-то вне синтезируемой сети и доступны измерению (наблюдению). Это обеспечивает функциональную полноту базиса.

Для реализации одной функции в базисе произвольных ДНФ нужно построить в данном базисе сеть с одним выходным полюсом. При этом сеть должна быть оптимальной в каком-то смысле. Например, если мы по ДНФ найдем известными методами *тупиковую* ДНФ, получим схему с минимальным числом элементов. Можно минимизировать число входных полюсов сети, отказываясь от дублирования прямых значений аргументов их инверсиями. Можно стремиться к минимуму инверсных значений и т. д. В результате получаем и разные методы синтеза.

При синтезе комбинационного автомата, реализующего систему функций, возникают другие проблемы. Можно, конечно, реализовать каждую функцию отдельно, но такое решение вряд ли будет лучшим в каком-то смысле.

Пусть, например, требуется минимизировать число элементов в сети. Число элементов второго яруса, как правило, равно числу функций. Исключения бывают, когда функция представлена одной конъюнкцией или когда некоторые функции равны либо становятся равными при соответствующем их дополнении. Это случаи тривиальные и поэтому неинтересные. Следовательно, основные усилия должны быть направлены на минимизацию числа элементов первого яруса.

Исходная же система функций может задаваться по-разному, в зависимости от таких параметров, как число функций, число аргументов, степень определенности функций, степень их взаимосвязи и т. д. Разными в таких случаях получаются и методы минимизации.

Функция Шеффера (элемент «И-НЕ» или инверсный конъюнктор) и *стрелка Пирса* (элемент «ИЛИ-НЕ» или инверсный дизъюнктор). Каждый из этих элементов может реализовать функционально полный базис.

Рассмотрим двухъярусные сети, элементами которых могут служить элементы Шеффера с произвольным числом входных полюсов.

Применим правило де Моргана к ДНФ простейшей функции, например, к $xy \vee zu$:

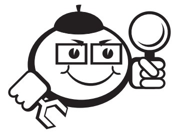
$$xy \vee zu = \overline{\overline{xy} \,\&\, \overline{zu}}\,.$$

Легко видеть, что синтез сети данного класса, реализующий заданную функцию, может быть сведен к синтезу соответствующей двухъярусной сети в базисе произвольных ДНФ с последующей заменой всех элементов полученной сети на элементы Шеффера.

К этому же можно свести и синтез двухъярусной сети на элементах Пирса. Для этого достаточно перейти от дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), построить соответствующую двухъярусную сеть (на этот раз первый ярус будет содержать дизъюнкторы, а второй – конъюнкторы) и согласно формуле

$$(x \vee y) \,\&\, (z \vee u) = \overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{z \vee u}}$$

заменить все элементы построенной сети элементами Пирса.



Пример 2.21

Пусть логическая функция задана булевой формулой:

$$f = \left(x_1 \vee x_2\right) x_3 \overline{x_4} \left(\overline{x_1} \vee x_3\right).$$

Синтезируем комбинационный автомат, реализующий данную функцию в *базисе ДНФ*. Для этого приведем заданную формулу к дизъюнктивной нормальной форме, т. е. к дизъюнкции элементарных конъюнкций, используя правила эквивалентных преобразований булевых формул:

$$f = \left(x_1 \vee x_2\right) x_3 \overline{x_4} \left(\overline{x_1} \vee x_3\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) x_3 \overline{x_4} = x_1 x_3 \overline{x_4} \vee x_2 x_3 \overline{x_4}\,.$$

Затем строим двухъярусную сеть, в первом ярусе которой будет два конъюнктора, а во втором – один дизъюнктор (см. рис. 2.27).

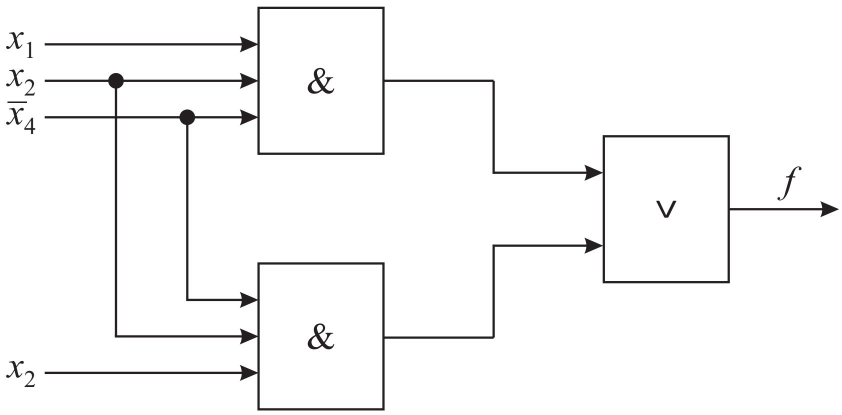


Рис. 2.27 – Сеть в базисе ДНФ

Если необходимо реализовать ту же логическую функцию в *базисе элементов Шеффера* («И-НЕ»), то каждый элемент сети, представленной на рисунке 2.27, заменяем элементом «И-НЕ» (см. рис. 2.28).

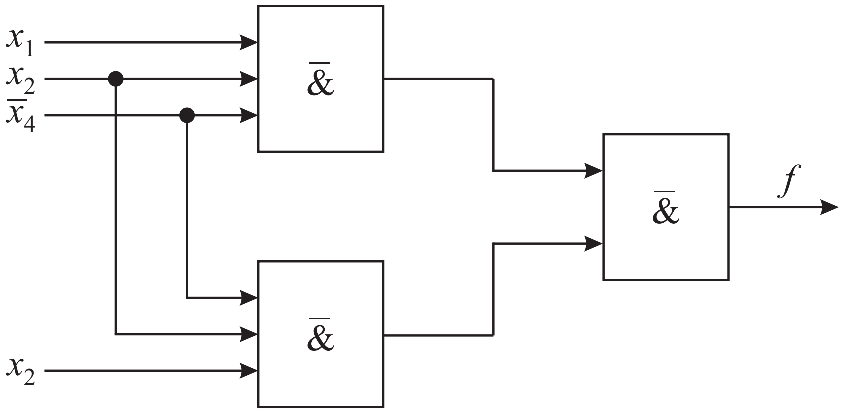


Рис. 2.28 – Сеть в базисе элементов Шеффера

Пример 2.22

Пусть логическая функция задана булевой формулой:

$$f = \overline{x_1 x_2} \cdot \left(\overline{x_2} \vee x_1 x_3\right).$$

Для реализации данной функции в *базисе КНФ* необходимо вначале по формулам эквивалентных преобразований перейти к конъюнктивной нормальной форме, т. е. к конъюнкции элементарных дизъюнкций:

$$f=\overline{x_1x_2}\cdot\left(\overline{x_2}\vee\overline{x_1}x_3\right)=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\overline{\overline{\left(\overline{x_2}\vee\overline{x_1}x_3\right)}}=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\overline{\left(x_2\cdot\overline{\overline{x_1}x_3}\right)}=$$

$$=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\overline{\left(x_2\cdot\left(x_1\vee\overline{x_3}\right)\right)}=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\overline{\left(x_2x_1\vee x_2\overline{x_3}\right)}=$$

$$=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\overline{x_2x_1}\cdot\overline{x_2\overline{x_3}}=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\left(\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\right)\left(\overline{x_2}\vee x_3\right)=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right)\left(\overline{x_2}\vee x_3\right).$$

Сеть, реализующая данную формулу, представлена на рисунке 2.29.

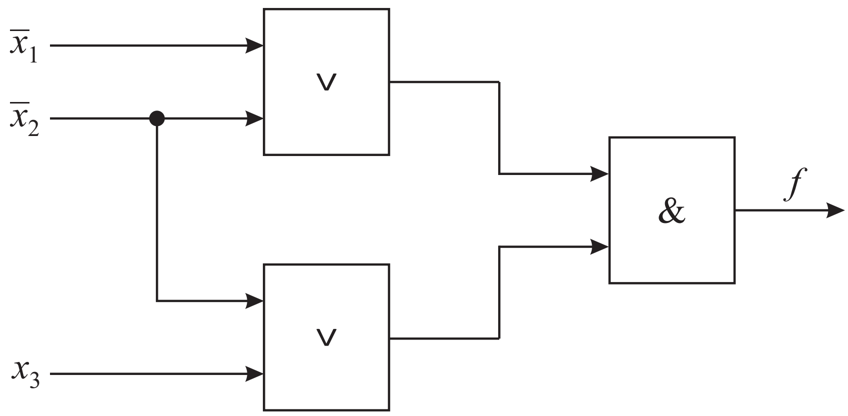


Рис. 2.29 – Сеть в базисе КНФ

Для реализации той же функции в *базисе элементов Пирса* («ИЛИ-НЕ») заменяем каждый элемент сети на рисунке 2.29 элементом «ИЛИ-НЕ» (см. рис. 2.30).

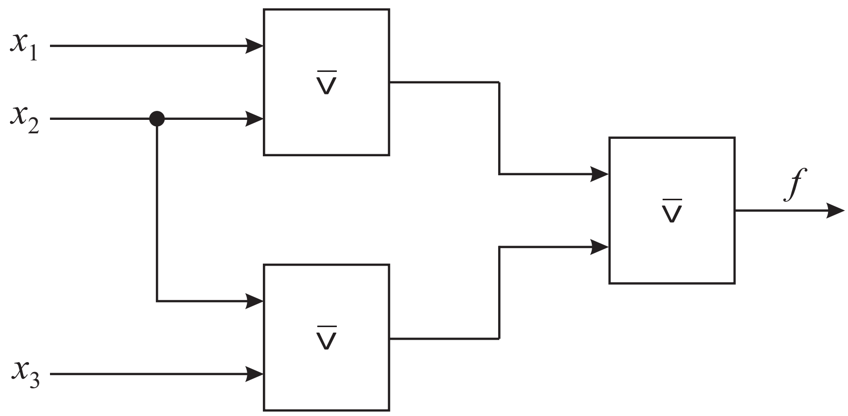


Рис. 2.30 – Сеть в базисе элементов Пирса

. . . .

2.5.7 Кодирование состояний

Речь пойдет о кодировании в основном внутренних состояний, так как двоичное кодирование входного и выходного алфавитов не вызывает принципиальных трудностей и практически не влияет на сложность полученных при этом структурных схем.

Пусть имеется автомат $A=\left(X,Q,Y,q_1\in Q,F\left(x\in X/y\in Y\right)\right)$ и набор элементов памяти U_1, U_2, ... U_p. Каждому состоянию q автомата A поставим в соответствие конечный упорядоченный набор (z_1, z_2, ... z_p) состояний автоматов U_1, ... U_p так, что различным состояниям автомата A ставятся в соответствие различные последовательности состояний элементарных автоматов U_1, ... U_p. Таким образом, состояния автомата A кодируются наборами состояний элементов памяти U_1, ... U_p, в результате чего возникают структурные состояния автомата A. Поскольку при практическом синтезе схем используются в основном в качестве элементов памяти элементарные автоматы с двумя состояниями 0 и 1, то и состояния автомата A кодируются наборами двоичных переменных (z_1,...z_p) (двоичное кодирование).

В зависимости от того, каким образом выполнять кодирование, структурные схемы одного и того же автомата могут получаться различными, так как каждому варианту кодирования соответствует структурная схема определенной сложности. Различные способы кодирования оказываются неравноценными как с точки зрения простоты структуры автомата, так и с точки зрения других критериев: быстродействия, надежности и пр.

Самое главное, конечно, – это простота структуры автомата. В качестве промежуточной цели можно наметить простоту системы логических функций, реализуемых комбинационной частью автомата. Выбирая различные варианты кодирования, мы получаем различные системы логических функций. Можно минимизировать эти системы, например в классе ДНФ, а затем подсчитывать число символов в полученных выражениях. Можно надеяться, что, выбирая способ кодирования, который приводит к выражениям с минимальным числом букв, мы получим в итоге и более простую структуру автомата.

В асинхронных автоматах могут возникать при кодировании другие проблемы, связанные с практической реализацией и конструктивными особенностями элементов памяти (триггеров). Каждый из реальных элементов памяти обладает инерционностью (ненулевое время срабатывания), причем эта инерционность не является постоянной и одинаковой для всех элементов. Это не учитывается в абстрактной модели автомата. Вследствие этого при переходе автомата из одного состояния в другое может реализоваться некоторая последовательность элементарных переходов (соответствующих изменениям состояния отдельных элементов памяти), при которой автомат проходит через некоторое множество промежуточных состояний и которая в общем случае непредсказуема. Последующие действия автомата будут определяться уже значениями функции переходов на достигнутых промежуточных состояниях.

Таким образом, дальнейшее поведение автомата может оказаться в зависимости от того, какой из элементов памяти быстрее среагирует на прикладываемое к нему воздействие. Элементы как бы состязаются в быстроте реакции, чем и обусловлено название соответствующего явления – состязания между элементами памяти. Если, в конце концов, автомат приходит в намеченное матрицей переходов состояние, то состязания можно считать неопасными, в противном случае их следует рассматривать как опасные.

Чтобы поведение автомата не отличалось от заданного матрицей переходов, необходимо устранить все опасные состязания между элементами памяти. Одним из эффективных способов предотвратить опасные состязания является рациональное кодирование внутренних состояний автомата. Этот способ описан в [8].

2.5.8 Программная реализация комбинационных автоматов

Комбинационный автомат вычисляет некоторую логическую функцию или систему функций, а, как известно, любой процесс вычисления может быть реализован как в аппаратном виде (схема из элементов), так и программным образом.

Под программой будем понимать некоторую пронумерованную последовательность команд $k_1,...k_s$, взятых из некоторого фиксированного набора (системы команд). Программа работает над конечным множеством пронумерованных (поименованных) двоичных ячеек. Номер ячейки – это ее адрес. Адресом ячейки может служить и имя логической переменной, значения которой хранятся в данной ячейке. Система команд содержит команды – операторы типа $b := f\left(a_1,\dots a_p\right)$ – выполнить операцию *f* над содержимым ячеек $a_1,...a_p$ и записать результат в ячейку *b*; и условные двухадресные переходы двух видов:

1) «если *a*, то *i*, иначе *j*» (если $a=1$, то перейти к выполнению команды k_i, иначе перейти к команде k_j) и
2) «если $\overline{a}$ ($a=0$), то *i*, иначе *j*». Операция $f\left(a_1,\dots a_p\right)$ – это логическая функция *p* переменных (в частном случае она может быть константой 0 или единицей). Если *j* – это номер следующей по порядку команды, то переход можно считать одноадресным, если $i=j$ – то это без-

условный переход. Любая из перечисленных команд может быть заключительной, что указывается словом «конец».

Процессом вычисления программы $k_1,\ldots k_s$ называется последовательность шагов $k(1),\ldots k(t)$, на каждом из которых выполняется одна команда программы. Указанная последовательность определяется так:

1) $k(1)=k_1$;
2) если $k(i)=k_r$ – оператор, то $k(i+1)=k_{r+1}$;
3) если $k(i)$ – условный переход, то номер команды $k(i+1)$ указывается этим переходом;
4) если $k(i)$ – заключительная команда, то процесс вычисления останавливается после ее выполнения.

Программа П вычисляет некоторую логическую функцию $y=f\left(x_1,\ldots x_n\right)$, если для любого двоичного набора $\sigma=(\sigma_1,\ldots\sigma_n)$ при начальном состоянии $x_1=\sigma_1,\ x_2=\sigma_2,\ldots x_n=\sigma_n$ программа через конечное число шагов останавливается и при этом в ячейке y будет величина $f(\sigma_1,\ldots\sigma_n)$.

Критерии, по которым можно оптимизировать программу, следующие:

1) число команд в тексте программы;
2) объем промежуточной памяти, то есть число ячеек, необходимых для хранения промежуточных результатов;
3) время вычисления – среднее $t_{\text{ср}}(\Pi)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{\sigma}\tau_n(\sigma)$ и максимальное – $t_{\max}(\Pi)=\max\limits_{\sigma}\tau_n(\sigma)$, где $\tau_n(\sigma)$ – время работы программы на конкретном наборе σ, а сумма и максимум берется по всем 2^n наборам.

Любой линейно-упорядоченной сети (а следовательно, и любому комбинационному логическому автомату), содержащей N элементов и реализующей функцию f, нетрудно поставить в соответствие программу, вычисляющую f и состоящую из N команд, следующим образом. Занумеруем элементы сети числами 1, …, N в соответствии с линейной упорядоченностью. Номер 1 получит один из входных элементов, номер N – выходной элемент.

Пусть элемент e_i реализует функцию φ_i и к его входным полюсам присоединены выходные полюсы элементов $e_{j1},\ldots e_{jp}$. Некоторые из них, возможно, являются входными полюсами сети. Поставим в соответствие элементу e_i

ячейку a_i и команду $a_i := \varphi_i\left(a_{j1},\ldots a_{jp}\right)$, если $i \neq N$ или ячейку y и команду $y := \varphi_N\left(a_{j1},\ldots a_{jp}\right)$ конец, если $i = N$. Получим в результате программу, не содержащую условных переходов (так называемая *операторная* программа), в которой порядок команд в точности соответствует порядку элементов в сети, а система команд – базису сети.

Проблема синтеза операторных программ сводится в основном к проблемам синтеза комбинационных сетей: в частности, задачи функциональной полноты системы команд и минимизации собственно текста программы соответствуют задачам о функциональной полноте системы функций и минимизации комбинационных схем. Так как операторные программы не содержат условных переходов, время ее вычисления на любом наборе одинаково и совпадает с максимальным временем $t_{\text{ср}} = t_{\max} = N$ и при больших *n* приближается к $\frac{2^n}{n}$. А проблема минимизации памяти (за счет многократного использования одной и той же ячейки для нескольких последовательно получающихся промежуточных результатов) для таких программ – нетривиальная комбинационная задача.

Другой вид программ – это программы, состоящие из команд типа $y := \sigma$ ($\sigma = 0$ или $\sigma = 1$) и условных переходов. Такие программы называются *бинарными.* Всякую булеву формулу *F*, содержащую *N* символов, можно реализовать бинарной программой, вычисляющей *F* за время $t_{\max} = N$ и содержащую *N* команд условного перехода, а также две команды $y = 0$ и $y = 1$ (эти команды не вошли в общее время $t_{\max}$). Чтобы было понятнее, представим программу в виде графа, где вершины – это команды, а ребра – переходы. Пусть G_1 – граф программы для функции f_1 с начальной вершиной V_{10} и двумя заключительными вершинами V_{1z}^0 (с командой $y = 0$) и V_{1z}^1 (с командой $y = 1$), а G_2 – граф программы, реализующей функцию f_2 с начальной V_{20} и заключительными V_{2z}^0 и V_{2z}^1 вершинами. Тогда:

а) вычислять функцию $f = f_1 \vee f_2$ будет программа, граф *G* которой получен присоединением G_2 к «нулю» G_1 (то есть отождествлением вершин V_{1z}^0 и V_{20}; команда $y := 0$ при этом отбрасывается);

б) вычислять функцию $f = f_1 \& f_2$ будет программа, граф G' которой получен присоединением G_2 к «единице» G_1 (отождествлением V_{1z}^0 и V_{20});

в) вычислять отрицание $f = \overline{f_1}$ будет программа, граф которой получен из G_1 заменой команд в V_{1z}^0 и V_{1z}^1 на инверсные.

В графе G (пункт *а*) получаются при этом две единичные, а в графе G' (пункт *б*) две нулевые вершины. В обоих случаях их надо отождествлять.

Пример 2.23

Граф бинарной программы, реализующей булеву формулу $f = (x_1 \vee x_2) x_3 \overline{x_4}$, приведен на рисунке 2.31.

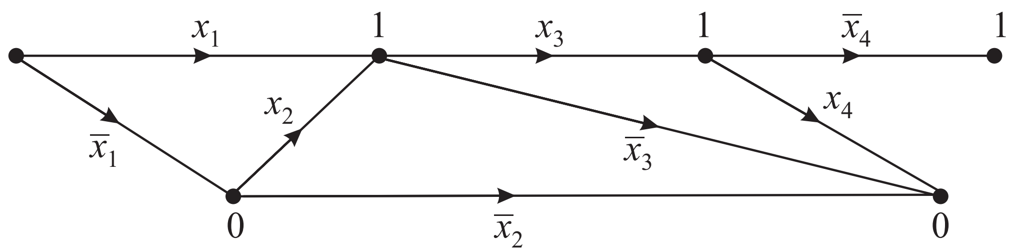


Рис. 2.31 – Граф бинарной программы

Рассмотренный метод не гарантирует оптимальность получаемых программ в смысле минимума времени или минимума числа команд. Существуют и другие методы.

Показатели качества бинарных программ характеризуются следующими параметрами: $L_б(n)$ – функция Шеннона для числа команд бинарных программ, асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$, причем существуют методы синтеза, для которых $t_{\max} \sim n$.

Доля функций (для любого $\varepsilon > 0$), для которых $L_б(f) \le (1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}$ и $t_{ср}(f) \le (1-\varepsilon) \cdot n$, стремится к нулю с ростом *n*.

То есть сложность бинарных программ по числу команд асимптотически равна сложности операторных программ, но в отличие от операторных программ бинарные имеют два преимущества – это отсутствие промежуточной памяти и более высокое быстродействие, которое можно охарактеризовать соотношением:

$$\left(\log_2 n+1\right) \le t_{\max}\left(f\right) \le n.$$

Если в программе использовать и операторы, и условные переходы, то число команд, асимптотически равное для операторных и бинарных программ $\frac{2^n}{n}$, можно понизить вдвое.

Контрольные вопросы по главе 2

1. Назовите отличия алфавитного отображения от автоматного.
2. Дайте понятие конечного автомата.
3. Перечислите способы задания автоматов.
4. Назовите виды автоматов.
5. Как интерпретировать автомат второго рода автоматом первого рода?
6. Дайте определение асинхронного автомата.
7. Дайте определение изоморфизма и эквивалентности автоматов.
8. Как происходит задание функций перехода и выхода для частичных автоматов?
9. Определите понятие покрытия и совместимости состояний автоматов.
10. Назовите проблемы минимизации частичных автоматов.
11. Перечислите регулярные операции над событиями.
12. Дайте понятие регулярного события.
13. В чем заключается связь регулярных событий и автоматов?
14. Что такое источник?
15. Перечислите правила построения источника по регулярному событию.
16. Перечислите основные этапы алгоритма синтеза автомата на абстрактном уровне.
17. Раскройте понятие индексного остатка источника.
18. Назовите основные этапы графического алгоритма анализа автомата на абстрактном уровне.
19. Перечислите операции над автоматными отображениями.
20. Что такое комбинационный автомат?
21. Что необходимо для структурного синтеза автомата?
22. Что входит в состав элементного базиса?

23. Определите понятие правильной синхронной сети.
24. Назовите проблемы кодирования состояний в асинхронных автоматах.
25. Какая из программ, предназначенных для реализации комбинационного автомата, лучше – бинарная или операторная?

3 Системы с непрерывными во времени переменными

В этой главе полагаем, что функции $r(t)$ и $y(t)$, интерпретируемые соответственно как входной и выходной сигналы некоторой системы, определены на континуальном множестве моментов времени t.

3.1 Дифференциальные уравнения динамики систем

3.1.1 Описание систем дифференциальными уравнениями

Связь между входным сигналом некоторой динамической системы, описываемым функцией $r(t)$, и ее выходным сигналом $y(t)$ может задаваться нелинейным дифференциальным уравнением произвольного порядка n:

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, r^{(m)}, r^{(m-1)}, \dots, r\right) = 0\,, \tag{3.1}$$

где $F\left(z_1, z_2, \dots, z_{n+m+2}\right)$ – функция $n+m+2$ аргументов. Задав вид функции $r(t)$ и n начальных условий $y\left(t_0\right) = y_0, \dot{y}\left(t_0\right) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-1)}$, можно в принципе решить это уравнение и найти выход (реакцию) $y(t)$ данной системы на входной сигнал $r(t)$.

Уравнение (3.1) является уравнением самого общего вида и описывает поведение системы во всех режимах. Один из частных, но весьма распространенных случаев таких режимов – это статический режим, то есть такой режим, при котором ни входные, ни выходные сигналы системы не меняются во времени. Конечно, это определенная идеализация, которая получается из уравнения (3.1) формальной подстановкой вместо всех производных по времени нулей:

$$y^{(n)} = y^{(n-1)} = \dots = \dot{y} = r^{(m)} = r^{(m-1)} = \dots = \dot{r} = 0\,.$$

Тогда уравнение статики примет вид

$$F\left(0, 0, \dots, y_{\text{ст}}, 0, 0, \dots, r_{\text{ст}}\right) = 0\,, \tag{3.2}$$

из которого можно установить связь между статическим значением входного сигнала $r_{\text{ст}}$ и статическим значением выходного сигнала $y_{\text{ст}}$

$$y_{\text{ст}} = f\left(r_{\text{ст}}\right). \tag{3.3}$$

Это уравнение описывает так называемую *статическую характеристику* системы.

Решение уравнения (3.1) для произвольной функции F наталкивается на непреодолимые трудности и возможно только в некоторых частных случаях. Одним из таких частных, но весьма важных и распространенных случаев является случай, когда функция F является *линейной* функцией по своим аргументам, то есть когда уравнение, связывающее входной сигнал $r(t)$ с выходным $y(t)$, является *линейным дифференциальным* уравнением. Упомянутое уравнение принято записывать так, чтобы выходная величина и её производные располагались бы в левой части, а входная величина и её производные – в правой части уравнения:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = b_0(t)r^{(m)} + \ldots + b_m(t)r. \tag{3.4}$$

Коэффициенты этого уравнения a_i, b_k в общем случае могут зависеть от времени и тогда уравнение (3.4) описывает *нестационарную* систему. Если такой зависимости от времени нет (или она очень слабая), то приходим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 r^{(m)} + \ldots + b_m r. \tag{3.5}$$

3.1.2 Линеаризация

В некоторых случаях удается даже нелинейное уравнение типа (3.1) свести к линейному уравнению типа (3.4) или (3.5). Такая замена является приближенной и называется *линеаризацией*. Из многочисленных видов линеаризации рассмотрим самый простой – разложение в ряд Тейлора. Обычно такое разложение осуществляют в одном или нескольких интересующих нас режимах. Рассмотрим, как это происходит, например, в статическом режиме. Пусть для некоторого установившегося значения входа $r_{\text{ст}}$ получено уравнение статики (3.2). Разложим левую часть уравнения (3.1) в ряд Тейлора (предполагая, что такое разложение возможно) около точки установившегося режима и ограничим этот ряд линейными приращениями переменных:

$$\begin{gathered} F(z_1, \ldots z_{n+m+2}) \approx F(0, \ldots y_{cm,} 0, \ldots r_{cm}) + \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)_0 \Delta y^{(n)} + \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)_0 \Delta y^{(n-1)} + \ldots \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+2}}\right)_0 \Delta r^{(m)} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial z_{n+m+2}}\right)_0 \Delta r = 0, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где частные производные $\left(\dfrac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0$ вычисляются при подстановке в них значений $y_{\text{ст}}$ и $r_{\text{ст}}$ и нулевых значениях производных, соответствующих установившемуся режиму.

Первое слагаемое в (3.6) равно нулю согласно (3.2). Вводя обозначения $\left(\dfrac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0 = a_{i+1}$ $\;1 \le i \le n+1$ и $-\left(\dfrac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0 = b_{i-n-2}$ $\;\mathrm{n}+2 \le i \le n+m+2$ и перенося слагаемые с входным воздействием и его производными в правую часть, получим:

$$a_0\Delta y^{(n)} + a_1\Delta y^{(n-1)} + \ldots + a_n\Delta y = b_0\Delta r^{(m)} + \ldots + b_m\Delta r\,. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) по форме точно такое же, как и (3.5), но записано относительно соответствующих отклонений $\Delta y = y - y_{\text{ст}}, \Delta r = r - r_{\text{ст}}$.

Полученное уравнение (3.7) описывает ту же самую систему, что и уравнение (3.1), но имеет следующие отличия.

Во-первых, уравнение (3.7) приближенное, причем это приближение тем точнее, чем меньше отклонения переменных от установившихся значений.

Во-вторых, поскольку при выводе уравнения (3.7) использовалось разложение в ряд Тейлора, такая операция применима только к непрерывно-дифференцируемым нелинейностям. Такие нелинейности называются *линеаризуемыми*, а нелинейные функции, не удовлетворяющие этому условию, называются существенно нелинейными.

В-третьих, уравнение (3.7) составлено относительно отклонений, а не самих сигналов. Такого рода уравнения называются уравнениями в отклонениях или в вариациях.

И, наконец, в-четвертых (и это основное), уравнение (3.7) линейное.

Поскольку форма уравнений (3.7) и (3.5) совпадает, в дальнейшем можно использовать любое из них, например (3.5), подразумевая, что в качестве переменных могут быть и соответствующие отклонения.

Пример 3.1

Система описывается уравнением

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 5y\frac{dy}{dt} + 3y^2 = 12\left(1 - e^{-t}\right). \tag{3.8}$$

Требуется линеаризовать уравнение (3.8) в точке статического режима.

Установившееся статическое значение входного сигнала найдем, устремив t к бесконечности $r_{\text{ст}} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(12 - 12e^{-t}\right) = 12$. Запишем уравнение статики, приравняв нулю производные в выражении (3.8) $3y_{\text{ст}}^2 = 12$, откуда $y_{\text{ст}} = \pm 12$. В выражении (3.8) нелинейными являются второе и третье слагаемые в левой части уравнения. Вычислим частные производные по $\dot{y}$ и по y левой части уравнения (3.8):

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{y=y_{\text{ст}}} = 5\left.y\right|_{y=\pm 2} = \pm 10, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_{\text{ст}}\\ \dot{y}=0}} = 5\left.\dot{y}\right|_{\dot{y}=0} + 6\left.y\right|_{y=\pm 2} = \pm 12.$$

Запишем окончательно линеаризованное уравнение, сократив на 2 левую и правую его части:

$$\Delta\ddot{y} \pm 5\Delta\dot{y} \pm 6\Delta y = -6e^{-t}. \tag{3.9}$$

Альтернативной формой записи уравнения (3.5) является форма, в которой связь между входом и выходом системы производится посредством некоторого оператора, осуществляющего операцию над входным сигналом, чтобы получить выходной. Для этого обозначим оператор дифференцирования по времени через $p = \dfrac{d}{dt}$. Тогда $p^k y = \dfrac{d^k y}{dt^k}$, при этом $p^0 = 1$ означает отсутствие дифференцирования. Тогда выражение (3.5) можно переписать в таком виде:

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_n y = b_0 p^m r + \ldots + b_m r. \tag{3.10}$$

Решив формально последнее уравнение относительно выхода y, получим

$$y = \frac{b_0 p^m + \ldots + b_m}{a_0 p^n + \ldots + a_n} \cdot r = W(p) \cdot r, \tag{3.11}$$

где введено обозначение

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + \ldots + b_m}{a_0 p^n + \ldots + a_n} = \frac{N(p)}{D(p).}, \tag{3.12}$$

а $N(p)$ и $D(p)$ – это полиномы степени m и n соответственно.

Дробь (3.12) носит название *передаточной функции*, или оператора системы. Пока будем рассматривать ее как удобную форму записи линейного дифференциального уравнения (3.11).

3.1.3 Общие свойства линейных дифференциальных уравнений

Возьмем уравнение (3.10). Если правая часть этого уравнения тождественно равна нулю, то такое уравнение называется *однородным*:

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_n y = 0\,. \tag{3.13}$$

Уравнение же (3.10) называют соответственно *неоднородным* дифференциальным уравнением.

Уравнение (3.13) имеет ровно *n* линейно независимых решений. Необходимое и достаточное условие линейной независимости произвольных *n* решений этого уравнения состоит в отличие от нуля определителя Вронского или вронскиана:

$$V(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ py_1 & py_2 & \cdots & py_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p^{n-1}y_1 & p^{n-1}y_2 & \ldots & p^{n-1}y_n \end{vmatrix}, \tag{3.14}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения уравнения (3.13).

Раз $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения линейного уравнения (3.13), то решением того же уравнения будет являться также и любая линейная комбинация отдельных решений y_k. Таким образом, общее решение уравнения (3.13) записывается в виде:

$$y_{\text{о}}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t), \tag{3.15}$$

где c_k – произвольные постоянные, определяемые обычно из начальных условий.

Общее решение неоднородного уравнения (3.10) состоит из суммы $y_{\text{о}}(t)$ общего решения однородного уравнения (3.13) и любого произвольного (частного) решения $y_{\text{н}}(t)$, удовлетворяющего уравнению (3.10):

$$y(t) = y_{\text{о}}(t) + y_{\text{н}}(t)\,.$$

Так как $y_{\text{н}}(t)$ не содержит произвольных постоянных, то в решении $y(t)$, также как и в $y_{\text{о}}(t)$, содержится *n* постоянных. Для их нахождения следует знать начальные или граничные условия.

3.2 Классические методы решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение уравнения (3.10) начнем с решения соответствующего ему однородного уравнения (3.13).

3.2.1 Однородные уравнения

Каждое решение уравнения (3.13) имеет вид $y(t)=e^{st}$, где s – подлежащая определению постоянная величина. Подставив предполагаемое решение в уравнение (3.13), получим $\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{st} = 0$.

Так как последнее уравнение должно удовлетворяться при всех значениях *t*, нулю должно равняться выражение в скобках:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{3.16}$$

где *s*, как уже было упомянуто, некоторая постоянная алгебраическая величина.

Выражение (3.16) называется *характеристическим уравнением* и непосредственно может быть получено из уравнения (3.13). Поскольку в левой части этого уравнения стоит полином *n*-го порядка с постоянными действительными коэффициентами (этот полином называется *характеристическим*), то оно содержит ровно *n* корней. Обозначим их через $s_1, s_2, \ldots s_n$. Тогда соответствующие решения уравнения (3.13) будут $y_1 = e^{s_1 t}, y_2 = e^{s_2 t}, \ldots, y_n = e^{s_n t}$. Если эти *n* решений линейно независимы (а это согласно (3.14) будет, если все s_i различны), то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{o}}(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_n e^{s_n t} = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{s_k t}. \tag{3.17}$$

Пример 3.2

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0. \tag{3.18}$$

Запишем уравнение (3.18) в символической форме с применением оператора дифференцирования $p = \dfrac{d}{dt}$:

$$p^2 y + 5py + 6y = \left(p^2 + 5p + 6\right)y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $s^2 + 5s + 6 = 0$. Его корни $s_1 = -2,\ s_2 = -3$. Общее решение, согласно (3.17), равно

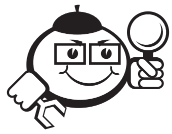
$$y_{\text{o}}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Если $s_1 = s_2$, то линейно независимы решения $y_1 = e^{s_1 t}$ и $y_2 = te^{s_1 t}$. Если корень имеет кратность r (т. е. $s_1 = s_2 = \ldots = s_r$), то линейно независимыми решениями, соответствующими этому корню, будут

$$y_1 = e^{s_1 t}, y_2 = te^{s_1 t}, y_3 = t^2 e^{s_1 t}, \ldots, y_r = t^{r-1} e^{s_1 t}, \tag{3.19}$$

и общее решение запишется в виде

$$y_{\text{о}}\left(t\right) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} + \ldots + c_r t^{r-1} e^{s_1 t} + c_{r+1} e^{s_{r+1} t} + \ldots + c_n e^{s_n t}. \tag{3.20}$$



Пример 3.3

Найти решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0. \tag{3.21}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (3.21), имеет кратный корень $s_1 = s_2 = -1$, поэтому общее решение составляем по формуле (3.19):

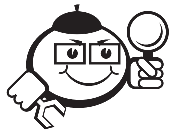
$$y_{\text{о}}\left(t\right) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Для комплексно сопряженных корней $s_1 = \alpha + j\beta$, $s_2 = \alpha - j\beta$ удобнее решения (3.17) представить в иной форме (воспользовавшись формулами Эйлера):

$$y_{\text{о}}\left(t\right) = e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right) = Ce^{\alpha t}\cos\left(\beta t + \varphi\right), \tag{3.22}$$

где A, B, C и φ – действительные числа.

В последнем выражении связи произвольных постоянных определяются обычными формулами приведения тригонометрических функций $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = -\arctan\dfrac{B}{A}$.



Пример 3.4

Найти решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0. \tag{3.23}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (3.23), имеет корни $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Согласно формуле (3.22) решение будет иметь вид

$$y_{\text{о}}(t) = e^{-0,5t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3.2.2 Неоднородные уравнения

Предполагая, что входной сигнал $r(t)$ известен, правую часть уравнения (3.10) можно представить как функцию $f(t)$, называемую иногда вынуждающей функцией, и переписать уравнение (3.10) в виде

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_n y = f(t). \tag{3.24}$$

Для определения частного решения $y_{\text{н}}(t)$ существует два стандартных метода – *метод неопределенных коэффициентов и метод вариации (Лагранжа) параметров* [10].

Метод неопределенных коэффициентов может быть применен в том случае, если вынуждающая функция $f(t)$ имеет конечное число линейно независимых производных. Функция $f(t)$ в этом случае может быть многочленом целой положительной степени *t* или состоять из комбинации экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической функций. Идея метода состоит в том, что предполагаемое решение $y_{\text{н}}(t)$ представляет собой линейную комбинацию составляющих $f(t)$ и их производных, при этом каждый элемент этой линейной комбинации входит с неопределенными коэффициентами. Далее предполагаемое решение подставляется в уравнение (3.24), а неопределенные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы это уравнение удовлетворялось при всех значениях *t*.

Пример 3.5

Найти частное решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 1 - e^{-t}. \tag{3.25}$$

Правая часть уравнения – это сумма константы 1 и экспоненты e^{-t}. Производная константы – нуль, производная экспоненты – та же экспонента, поэтому предполагаемое решение представляем в виде суммы двух слагаемых, первое из которых умножаем на неопределённый коэффициент *A*, а второе – на *B*:

$$y_{\text{н}}(t) = A + Be^{-t}.$$

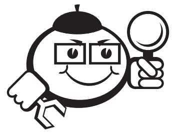
Вычисляем производные $\dfrac{dy_{\text{н}}}{dt} = -Be^{-t}$, $\dfrac{d^2y_{\text{н}}}{dt^2} = Be^{-t}$ и подставляем предполагаемое решение и найденные производные в уравнение (3.25):

$$Be^{-t} - 5Be^{-t} + 6A + 6Be^{-t} = 1 - e^{-t}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых составляющих в правой и левой частях последнего уравнения, находим $A = \dfrac{1}{6}$, $B = -\dfrac{1}{2}$. Таким образом, окончательно получаем:

$$y_{\text{н}}(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

В том случае, когда отдельные члены в точности совпадают по виду с какой-либо составляющей решения $y_0(t)$ однородного уравнения, процедура решения предполагает в общем случае умножение на *t* соответствующих составляющих в выражении для $y_{\text{н}}(t)$. Подобная схема сохраняется, когда член $f(t)$ содержит дополнительный множитель t^n. Если же какой-либо член $f(t)$ соответствует кратному корню характеристического уравнения (например, кратности *m*), то соответствующий член в $y_{\text{н}}(t)$ следует умножить на t^m.



Пример 3.6

Найти частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}.$$

Правая часть уравнения – e^{-t}, и частное решение следовало бы представить в форме $y_{\text{н}}(t) = Ae^{-t}$, но обратив внимание на левую часть уравнения, замечаем (см. пример 3.3), что общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t},$$

поэтому предполагаемое частное решение нужно умножить на t^2: $y_{\text{н}}(t) = At^2 e^{-t}$.

Определив производные

$$\frac{dy_{\text{н}}}{dt} = \left(2At - At^2\right)e^{-t},$$

$$\frac{d^2 y_{\text{н}}}{dt^2} = \left(2A - 4At + At^2\right)e^{-t},$$

и подставив все необходимое в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$\left(2A - 4At + At^2\right)e^{-t} + 2\left(2At - At^2\right)e^{-t} + At^2 e^{-t} = e^{-t}.$$

Приведя подобные члены в последнем уравнении, получим $2Ae^{-t} = e^{-t}$, откуда с очевидностью имеем $A = \dfrac{1}{2}$ и, таким образом,

$$y_{\text{н}}(t) = \frac{t^2}{2} e^{-t}.$$

. . . .

Метод вариации параметров может быть применен для любых функций $f(t)$ независимо от того, имеет или не имеет эта функция конечное число независимых производных. Также этот метод может быть применен и для нестационарных систем, когда коэффициенты a_i уравнения (3.10) зависят от времени.

По методу вариации параметров частное решение определяется на основе составляющих решения однородного уравнения, предполагая, что это решение уже известно.

В уравнении первого порядка

$$\left(a_0 p + a_1\right) y(t) = f(t) \qquad (3.26)$$

решение соответствующего однородного уравнения

$$\left(a_0 p + a_1\right) y(t) = 0 \qquad (3.27)$$

содержит одну составляющую $y_{\text{о}} = c_1 y_1$.

Частное решение ищем в виде

$$y_{\text{н}} = u y_1, \qquad (3.28)$$

где u – неизвестная пока функция времени.

Подставляя решение (3.2.13) в уравнение (3.2.11), имеем:

$$a_0\left(u\dot{y}_1 + \dot{u}y_1\right) + a_1 u y_1 = f(t)$$

или, делая очевидные преобразования, получим:

$$a_0\dot{u}y_1 + u\left(a_0\dot{y}_1 + a_1y_1\right) = f\left(t\right).$$

В последнем уравнении выражение в скобках равно нулю, так как y_1 является решением уравнения (3.2.12). Следовательно

$$\dot{u} = \frac{1}{a_0y_1}f\left(t\right), \tag{3.29}$$

откуда, интегрируя, можно найти u.

Пример 3.7

Решить уравнение

$$\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}.$$

Однородное уравнение имеет решение $y_{\text{о}}\left(t\right) = ce^{-t}$, так что $y_1 = e^{-t}$ и, согласно (3.29),

$$\dot{u} = \frac{1}{a_0y_1}f\left(t\right) = \frac{1}{e^{-t}}e^{-t} = 1.$$

Интегрируя, получим $u\left(t\right) = t$ и $y_{\text{н}}\left(t\right) = te^{-t}$. Общее решение равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения:

$$y\left(t\right) = y_{\text{н}}\left(t\right) + y_{\text{о}}\left(t\right) = te^{-t} + ce^{-t}.$$

Возьмем далее уравнение второго порядка

$$\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)y\left(t\right) = f\left(t\right). \tag{3.30}$$

Решение однородного уравнения

$$\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)y\left(t\right) = 0 \tag{3.31}$$

состоит из двух слагаемых $y_{\text{о}} = c_1y_1 + c_2y_2$. Частное решение предполагаем в виде

$$y_{\text{н}} = u_1y_1 + u_2y_2, \tag{3.32}$$

где уже две неизвестные функции u_1 и u_2, следовательно, необходимы два условия для их определения.

Одно из условий – это удовлетворение уравнения (3.30) при подстановке (3.32), а второе можно выбрать любым наиболее удобным образом. Запишем, например, $\dot{y}_{\text{н}}$:

$$\dot{y}_{\text{н}} = \dot{u}_1 y_1 + u_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 y_2 + u_2 \dot{y}_2$$

и положим для упрощения последнего уравнения

$$\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 = 0 . \tag{3.33}$$

Уравнение (3.33) возьмем в качестве второго условия. Определяя производные $\dot{y}_{\text{н}}$, $\ddot{y}_{\text{н}}$ и подставляя их в уравнение (3.30), получим

$$a_0\left(u_1\ddot{y}_1 + \dot{u}_1\dot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 + \dot{u}_2\dot{y}_2\right) + a_1\left(u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2\right) + a_2\left(u_1 y_1 + u_2 y_2\right) = f .$$

Перегруппируем

$$a_0\left(\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2\right) + u_1\left(a_0\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2 y_1\right) + u_2\left(a_0\ddot{y}_2 + a_1\dot{y}_2 + a_2 y_2\right) = f .$$

Учитывая, что y_1 и y_2 удовлетворяют уравнению (3.31), имеем

$$\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 = \frac{f}{a_0} . \tag{3.34}$$

Совместное решение (3.33) и (3.34) по правилу Крамера дает:

$$\dot{u}_1 = \frac{-y_2 f}{a_0\left(y_1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 y_2\right)}, \quad \dot{u}_2 = \frac{y_1 f}{a_0\left(y_1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 y_2\right)} . \tag{3.35}$$

Знаменатель выражений (3.35), являющийся вронскианом уравнения (3.31), отличен от нуля, так как решения y_1 и y_2 линейно независимы, и, следовательно, решения $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ всегда существуют. Интегрируя (3.35), получаем u_1, u_2 и частное решение в форме (3.32).

Пример 3.8

Найти частное решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}$$

из примера 3.6 методом вариации параметров.

Общее решение соответствующего однородного уравнения (см. пример 3.3):

$$y_{\text{о}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} ,$$

так что $y_1 = e^{-t}$, $y_2 = te^{-t}$. Подсчитаем вронскиан:

$$V(t) = y_1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 y_2 = e^{-t}\left(e^{-t} - te^{-t}\right) + e^{-t}\left(te^{-t}\right) = e^{-2t} .$$

Затем по формулам (3.35) вычислим $\dot{u}_1, \dot{u}_2$

$$\dot{u}_1 = \frac{-y_2 f}{a_0 V} = \frac{-te^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}} = -t, \quad \dot{u}_2 = \frac{y_1 f}{a_0 V} = \frac{e^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}} = 1.$$

Проинтегрировав последние соотношения, получим $u_1 = \frac{t^2}{2}, \; u_2 = t$.

По формуле (3.32) получаем окончательно частное решение, совпадающее с результатом примера 3.6:

$$y_\text{н} = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\frac{t^2}{2}e^{-t} + t^2 e^{-t} = \frac{t^2}{2}e^{-t}.$$

. . . .

Для уравнения произвольного n-го порядка решение соответствующего однородного уравнения (3.13) имеет вид $y_\text{о} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, а частное решение ищем в виде

$$y_\text{н} = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n. \tag{3.36}$$

Аналогично условиям (3.33) и (3.34) производные от u_i находим из уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 + \ldots + \dot{u}_n y_n = 0, \\ &\dot{u}_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 + \ldots + \dot{u}_n \dot{y}_n = 0, \\ &\qquad\qquad \ldots \\ &\dot{u}_1 y_1^{(n-1)} + \dot{u}_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \dot{u}_n y_n^{(n-1)} = \frac{f(t)}{a_0}. \end{aligned}$$

Эта система уравнений решается на основе правила Крамера:

$$\dot{u}_i = \frac{V_{ni}(t) f(t)}{a_o V(t)}, \; i = \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{3.37}$$

где $V(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & \ldots & y_n \\ \dot{y}_1 & \ldots & \ldots & \dot{y}_n \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$, – определитель Вронского, а $V_{ni}(t)$ – ni-е алгебраическое дополнение этого определителя.

Знаменатель выражения (3.37) отличен от нуля, если $y_1, y_2, \ldots y_n$ – независимые решения однородного дифференциального уравнения.

Интегрируя выражения (3.37), подставляем результат в формулу (3.36) и определяем частное решение $y_\text{н}(t)$.

Из примеров (3.19)–(3.22) видно, что метод неопределенных коэффициентов зачастую проще метода вариации параметров, однако последний метод более общий, поскольку не имеет ограничений на правую часть уравнения.

3.2.3 Вычисление постоянных интегрирования

Произвольные постоянные в решении однородного уравнения вычисляются на основе начальных или граничных условий. В большинстве случаев для решения дифференциального уравнения *n*-го порядка при определении постоянных интегрирования используют значения $y(t)$ и ее $n-1$ производных при $t = t_{0+}$. Обозначение t_{0+} означает, что значения выхода $y(t)$ и его производных заданы непосредственно после момента t_0. Очень часто полагают $t_0 = 0$. Начальные условия обычно определяются, исходя из запасенной системой энергии к моменту $t = t_{0+}$. Очень важно, что постоянные интегрирования зависят также от вынуждающей функции и не могут быть определены, пока не найдена составляющая решения $y_{\text{н}}(t)$.

В ряде важных случаев начальные условия нулевые. Для уравнения *n*-го порядка (3.23) это означает, что

$$y(t_0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \ldots = \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} = 0. \tag{3.38}$$

Рассмотренный метод вариации параметров может быть использован и для получения общего решения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям (3.38).

Действительно, возьмем, например, уравнение первого порядка. Объединяя уравнения (3.28) и (3.29), можно записать:

$$y(t) = y_1(t)\big(u(t) - u(t_0)\big) = y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{f(\xi)}{a_0 y_1(\xi)} d\xi. \tag{3.39}$$

Верхний предел в (3.39) соответствует частному решению, а нижний предел дает постоянную интегрирования в решении однородного уравнения. Причем из (3.39) следует, что $y(t_0) = 0$.

В общем случае уравнения *n*-го порядка при нулевых начальных условиях из выражений (3.36) и (3.37) следует:

$$y(t) = y_1(t)\big(u_1(t) - u_1(t_0)\big) + \ldots + y_n(t)\big(u_n(t) - u_n(t_0)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \int_{t_0}^{t} \frac{V_{ni}(\xi)}{a_0 V(\xi)} f(\xi) d(\xi).$$

3.3 Методы преобразований

Выше было рассмотрено описание сигналов и систем во временной области, то есть в зависимости от непрерывного времени *t*. Альтернативной формой математического описания является частотное описание.

3.3.1 Интегральное преобразование Фурье

Переход в частотную область производится с помощью интегрального преобразования Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{3.40}$$

где $f(t)$ однозначная, содержащая конечное число максимумов, минимумов и разрывов функция.

Кроме того, для существования интеграла (3.40) требуется абсолютная интегрируемость функции $f(t)$, то есть выполнение условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \tag{3.41}$$

Функция $F(j\omega)$ называется комплексным частотным спектром или Фурье-изображением функции времени $f(t)$. Связь функции $f(t)$ с её изображением является взаимно-однозначной, то есть по частотному спектру $F(j\omega)$ всегда может быть восстановлен оригинал $f(t)$ по формуле обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{3.42}$$

Представим экспоненту в интегралах (3.40) и (3.42) по формуле Эйлера и выделим только вещественную часть. Получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_c(\omega) \cos\omega t d\omega, \; F_c(\omega) = 2 \int_{0}^{\infty} f(t) \cos\omega t dt.$$

Эти выражения определяют косинус-преобразование Фурье.

Выделяя аналогично только мнимую часть в интегралах (3.40) и (3.42), получаем синус-преобразование Фурье.

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega t d\omega,\ F_s(\omega)=2\int\limits_0^\infty f(t)\sin\omega t dt.$$

Если $f(t)$ – четная функция, то $F(j\omega)=F_c(\omega)$; если $f(t)$ – нечетная функция, то $F(j\omega)=jF_s(\omega)$.

Пример 3.9

Определить частотный спектр прямоугольного импульса (см. рис. 3.1, *а*):

$$f(t)=\begin{cases} P \text{ при } |t|\le\dfrac{2}{P}, \\ 0 \text{ при } |t|>\dfrac{2}{P}. \end{cases}$$

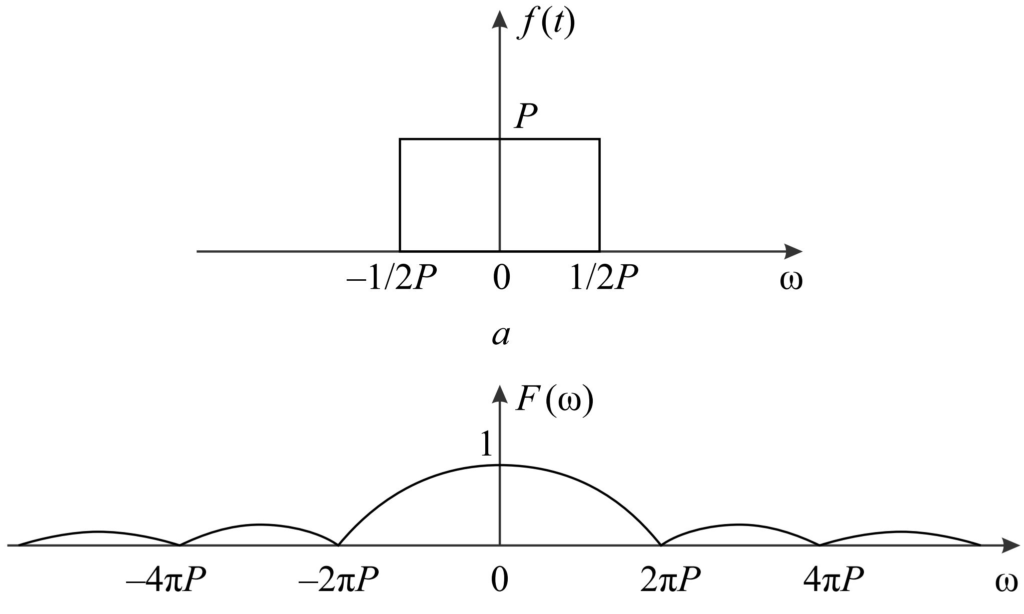


Рис. 3.1 – Импульсный сигнал и его частотный спектр

Поскольку исходная функция четная, для определения спектра можно воспользоваться косинус-преобразованием Фурье:

$$F(\omega)=F_c(\omega)=2\int\limits_0^{\frac{1}{2P}} P\cos\omega t dt=\frac{\sin\dfrac{\omega}{2P}}{\dfrac{\omega}{2P}}.$$

График полученного спектра изображен на рисунке 3.1, *б*. При стремлении P к бесконечности $f(t)$ превращается в единичный мгновенный импульс, а частотный спектр в пределе – в константу, равную единице.

. . . .

Приведенный пример иллюстрирует обратно пропорциональную взаимосвязь между длительностью импульса и шириной его частотного спектра.

Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют соответственно преобразование Фурье $F(j\omega)$ и $G(j\omega)$. Тогда обратное преобразование Фурье от произведения изображений равно свертке функций $f(t)$ и $g(t)$. Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-j\omega t}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Полагая в последнем выражении $t = 0$, получим формулу, известную как *равенство Парсеваля*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(-\tau)d\tau, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(-j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Если положить $g = f$, то равенство Парсеваля будет иметь вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(j\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt.$$

Преобразование Фурье играет важную роль при частотном исследовании систем и сигналов, но находит значительно меньшее распространение непосредственно для решения дифференциальных уравнений при произвольных входных сигналах, поэтому остальные свойства преобразования Фурье целесообразно изучить по аналогичным свойствам преобразования Лапласа, которые изложены в соответствующем разделе.

3.3.2 Интегральные преобразования Лапласа, Карсона, Хевисайда

Определение преобразований. Условие (3.41) часто не выполняется даже для очень простых функций, например единичной ступенчатой или полиномиальной функции. Один из путей, позволяющих расширить преобразование

(3.40), (3.42) для значительно большего класса функций, заключается в следующем. Если условие (3.41) не выполняется для функции $f(t)$, то оно может выполняться для функции $f_1(t)=f(t)e^{-ct}$, где c больше радиуса сходимости функции $f(t)$[1]. Практический интерес в теории систем представляют обычно функции, определенные при $t \geq 0$. Поэтому ограничимся классом функций, тождественно равных нулю при $t<0$. Найдем преобразование Фурье функции $f_1(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(c+j\omega)t}dt.$$

Обозначив $s=c+j\omega$, получим функцию комплексной переменной s:

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\,. \qquad (3.43)$$

Преобразование, определяемое формулой (3.43), называется *преобразованием Лапласа*[2].

Вообще говоря, интеграл (3.43) можно представить как предел:

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\lim_{\substack{a\to 0\\ M\to\infty}}\int_{a}^{M} f(t)e^{-st}dt\,.$$

При этом а может стремиться к нулю, оставаясь все время положительной величиной $(a\to +0)$ либо оставаясь все время отрицательной величиной $(a\to -0)$. В связи с этим можно определять преобразование Лапласа как левостороннее $(a\to -0)$ или как правостороннее $(a\to +0)$. Обычно удобнее рассматривать правостороннее преобразование Лапласа, когда $a\to +0$. Именно в таком смысле и будем в дальнейшем говорить о преобразовании Лапласа без дополнительного об этом упоминания. При этом начальные условия для самих функций и ее производных будут, естественно, рассматриваться в точке +0. Нетрудно получить формулу обращения для преобразования Лапласа, которая по изображению восстанавливала бы оригинал. Так как при фиксированном с функцию $F(s)=F(c+j\omega)$ можно рассматривать как результат преобразования

---

[1]Подобные функции называются функциями экспоненциального типа.

[2]Строго говоря, формула (3.43) задает так называемое *одностороннее* преобразование Лапласа в отличие от *двухстороннего* преобразования, у которого нижний предел в интеграле (3.43) равен минус бесконечности. Для функций, тождественно равных нулю при отрицательном времени, одностороннее и двухстороннее преобразования совпадают.

Фурье функции $f_1(t)=f(t)e^{-ct}$, то, применяя к функции $F(c+j\omega)$ обратное преобразование Фурье, получим:

$$f_1(t)=f(t)e^{-ct}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(c+j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Умножив правую и левую часть последнего выражения на e^{ct}/j и сделав обратную замену $c+j\omega=s$, имеем:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds. \tag{3.44}$$

Интегрирование в (3.44) ведется снизу вверх вдоль прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на величину с. Величина с выбирается правее всех полюсов функции $F(s)$. Минимальная величина *c*, удовлетворяющая этому условию, называется *абсциссой абсолютной сходимости*. Формула (3.44) задает обратное преобразование Лапласа.

Символическая запись преобразования Лапласа часто имеет вид $F(s)=L\{f(t)\}$, а обратного преобразования – $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}s$.

Интеграл (3.44) можно вычислить, воспользовавшись, например, теоремой о вычетах [11], которая гласит: интеграл по замкнутому контуру, не имеющему особенностей подынтегральной функции, равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах, охватываемых этим контуром, помноженной на коэффициент $2\pi j$, то есть

$$\oint_{\Gamma}F(s)ds=2\pi j\sum_{i=1}^{n}\text{вычеты }F(s)\Big|_{\text{в полюсах }s_i},$$

где s_i – полюсы[1] $F(s)$, попадающие в контур Г, *n* – число этих полюсов, а интегрирование ведется против часовой стрелки.

Чтобы воспользоваться сформулированной теоремой для вычисления интеграла (3.44), нужно замкнуть контур интегрирования дугой бесконечно большого размера через левую полуплоскость.

Если абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, то $s=j\omega$ и формулы (3.43) и (3.44) определяют так называемое *одностороннее* преобразование

---

[1]Полюс – вид особой точки, обращающей знаменатель в нуль. Например, функция $\frac{s}{(s+2)(s+3)}$ имеет два полюса: $s_1=-2$ и $s_2=-3$.

Фурье (в отличие от *двухстороннего* преобразования, определяемого формулами (3.40) и (3.42)).

Пример 3.10

Найти преобразование Лапласа от единичной ступенчатой функции $1(t)$[1]. Пользуясь формулой (3.43), получаем:

$$L\{1(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, если вещественная часть s больше нуля $\operatorname{Re} s > 0$, и, таким образом, $L\{1(t)\} = \dfrac{1}{s}$.

Пример 3.11

Найти преобразование Лапласа от экспоненты e^{-at}.

Подставляя заданную функцию в формулу (3.43), получаем:

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt = -\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} + \frac{1}{s+a}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, если выполняется условие $\operatorname{Re} s > -a$, и, таким образом, $L\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$.

Другими вариантами преобразования Лапласа являются преобразование Карсона и преобразование Хевисайда. Преобразование Карсона отличается от преобразования Лапласа множителем s в формуле прямого преобразования и соответственно множителем $1/s$ в формуле обратного преобразования. А преобразование Хевисайда является частным случаем преобразования Карсона, если функция-оригинал и ее производные имеют нулевые начальные условия.

Преобразование Карсона удобно тем, что, как нетрудно вычислить, изображение единичной функции есть единица:

[1]Единичная функция $1(t)$ равна единице при $t \geq 0$ и нулю при $t < 0$ и часто применяется в теории управления.

$$F_k(s) = s\int_0^{\infty} 1(t)\cdot e^{-st}dt = -s\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} = 1.$$

Свойства преобразования Лапласа. Одно из основных свойств преобразования Лапласа заключается в том, что изображение производной от функции $f(t)$ очень просто связано с изображением самой функции. Действительно, найдем изображение по Лапласу от производной df/dt, интегрируя по частям:

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt = e^{-st}\cdot f(t)\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = sF(s) - f(0), \qquad (3.45)$$

где $f(0) = \lim\limits_{t\to 0} f(t)$.

Пользуясь формулой (3.45), можно найти изображение и для *n*-й производной:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}f^1(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \qquad (3.46)$$

Если начальные условия для функции и всех ее производных до $(n-1)$-й включительно нулевые, то выражение (3.46) упрощается:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\{f(t)\}.$$

Двойственным к свойству, описываемому уравнением (3.46), является свойство *дифференцирования преобразования Лапласа* (теорема об умножении на *t*). Для целого положительного *n* имеем:

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n f(t)e^{-st}dt = (-1)^n L\left\{t^n f(t)\right\}. \qquad (3.47)$$

Пример 3.12

Найти преобразование Лапласа от функции $f(t) = t$.

Поскольку речь идет об одностороннем преобразовании Лапласа, исходную функцию можно представить как $f(t) = t\cdot 1(t)$, и тогда по формуле (3.47) для $n = 1$ и согласно результату примера 3.10 получим:

$$L\{t\} = (-1)\frac{d(1/s)}{ds} = \frac{1}{s^2}.$$

Пример 3.13

Найти преобразование Лапласа от функции $f(t)=t\cdot e^{-at}$. Применяя формулу (3.47) для $n=1$ и пользуясь результатом примера 3.11, получим:

$$L\left\{te^{-at}\right\}=(-1)\frac{d\left(\left(s+a\right)^{-1}\right)}{ds}=\frac{1}{\left(s+a\right)^{2}}.$$

Следующие два очевидных свойства позволяют считать оператор Лапласа линейным оператором: изображение суммы равно сумме изображений:

$$L\left\{f_1(t)+f_2(t)\right\}=L\left\{f_1(t)\right\}+L\left\{f_2(t)\right\},$$

возможность выносить постоянный множитель за знак оператора Лапласа:

$$L\left\{af(t)\right\}=aL\left\{f(t)\right\}.$$

Для нахождения прямого и обратного преобразований Лапласа полезны еще ряд свойств, которые можно сформулировать в виде теорем.

Теорема запаздывания задается формулой

$$L\left\{f(t-a)\right\}=e^{-sa}\cdot L\left\{f(t)\right\}.$$

Теорема о конечном значении. Если существует $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$, то

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sL\left\{f(t)\right\}.$$

Теорема о начальном значении. Начальное значение функции равно пределу при $s\to\infty$ от ее изображения, умноженного на s:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}sL\left\{f(t)\right\}.$$

Теорема дифференцирования. Изображение производной от функции по параметру равно производной от изображения по этому же параметру:

$$L\left\{\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}\right\}=\frac{\partial L\left\{f(t,a)\right\}}{\partial a}. \qquad (3.48)$$

Пример 3.14

Найти преобразование Лапласа от функции $f(t)=te^{-at}$.

Замечаем, что исходная функция – это производная от экспоненты $-e^{-at}$ по параметру a:

$$f(t) = te^{-at} = \frac{\partial\left(-e^{-at}\right)}{\partial a}.$$

Применив формулу (3.48) и воспользовавшись результатом примера 3.11, получим:

$$L\left\{te^{-at}\right\} = L\left\{\frac{\partial\left(-e^{-at}\right)}{\partial a}\right\} = -\frac{\partial\left(\left(s+a\right)^{-1}\right)}{\partial s} = \frac{1}{\left(s+a\right)^2},$$

что совпадает с результатом примера 3.13.

. . . .

Теорема свертки во временной области. Произведение изображений равно изображению свертки оригиналов:

$$F_1(s)F_2(s) = L\left\{\int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^\infty f_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau\right\}.$$

При записи последней формулы учтено, что $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Теорема об умножении на экспоненту:

$$L\left\{e^{-\lambda t}\cdot f(t)\right\} = F(s+\lambda). \qquad (3.49)$$

. . . . Пример 3.15 . . . .

Найти преобразование Лапласа от функции te^{-at}.

Применим формулу (3.49), учитывая, что $f(t) = t$. Тогда

$$L\left\{e^{-at}\cdot t\right\} = L\{t\}\Big|_{s=s+a} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=s+a} = \frac{1}{\left(s+a\right)^2},$$

что совпадает с результатами примеров 3.13 и 3.14.

. . . .

Теорема подобия:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Теорема свертки в области изображений. Изображение произведения функций равно свертке их изображений:

$$L\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-\xi)\cdot F_2(\xi)d\xi, \qquad (3.50)$$

где вдоль пути интегрирования величина c удовлетворяет соотношениям

$$\tau_2 < c < \operatorname{Re}s - \tau_1 \qquad (3.51)$$

и

$$\operatorname{Re} s > \max\left\{\tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2\right\}. \tag{3.52}$$

τ_1, τ_2 – абсциссы сходимости для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно.

Пример 3.16

Найти преобразование Лапласа от функции te^{-at}.

В качестве функции f_1 возьмем экспоненту $f_1(t) = e^{-at}$, а в качестве функции $f_2 - t$. Тогда, согласно выражению (3.50), получим:

$$L\left\{f_1(t)\cdot f_2(t)\right\} = L\left\{e^{-at}t\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[\frac{1}{s+a-\xi}\right]\frac{1}{\xi^2}d\xi,$$

где линия интегрирования, согласно условиям (3.51) и (3.52), лежит правее полюса функции в квадратных скобках подынтегрального выражения.

Стандартная процедура вычисления такого интеграла состоит в применении теоремы Коши о вычетах. Для этого замыкаем контур интегрирования дугой бесконечного радиуса через левую полуплоскость против часовой стрелки. Тогда в контур интегрирования попадает единственный полюс функции $1/s+a-\xi$, равный $\xi = s + a$, а искомое преобразование равно вычету подынтегральной функции в этом полюсе:

$$L\left\{e^{-at}t\right\} = \text{вычету}\left\{\frac{1}{\left(s+a-\xi\right)\xi^2}\right\}\Bigg|_{\text{в полюсе } \xi=s+a} = \frac{1}{\xi^2}\Bigg|_{\xi=s+a} = \frac{1}{\left(s+a\right)^2},$$

что совпадает с результатами предыдущих примеров.

Обратное преобразование Лапласа может быть найдено по таблицам преобразований, которые содержатся в многочисленной справочной литературе.

Определение оригинала часто облегчается в тех случаях, когда изображение по Лапласу представляется в виде отношения двух многочленов с вещественными коэффициентами, при этом степень числителя меньше степени знаменателя. В этом случае можно воспользоваться приёмом, иногда называемым *теоремой разложения*. Разберем этот метод.

Пусть полином знаменателя в изображении Лапласа имеет в общем случае корень s_1 кратности r и различные корни $s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_n$, т. е.

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-s_1)^r(s-s_{r+1})\dots(s-s_n)}.$$

Тогда выражение в правой части можно разложить на простые дроби:

$$\frac{P(s)}{(s-s_1)^r(s-s_{r+1})\dots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2}+\dots+\frac{A_r}{(s-s_1)^r}+\frac{A_{r+1}}{s-s_{r+1}}+\dots+\frac{A_n}{s-s_n},$$

где $A_k=\begin{cases}\dfrac{1}{(r-k)!}\dfrac{\partial^{r-k}}{\partial s^{r-k}}\Big[(s-s_1)^r F(s)\Big]\Big|_{s=s_1} & (k=1,2,\dots,r),\\ (s-s_k)F(s)\big|_{s=s_k} & (k=r+1,\dots,n).\end{cases}$

Обратное преобразование Лапласа от каждого слагаемого при таком разложении определяется как экспонента в соответствующей степени либо как подобная же экспонента, помноженная на t в целой положительной степени по теореме об умножении на t.

Пример 3.17

Найти обратное преобразование Лапласа от функции

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2(s^2+3s+2)}.$$

Представим знаменатель в виде сомножителей и разложим выражение на простые дроби:

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2(s^2+3s+2)}=\frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s+1}+\frac{A_4}{s+2}. \qquad (3.53)$$

Вычислим коэффициенты разложения A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A_1=\frac{d}{ds}\left(s^2F(s)\right)\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right)\Big|_{s=0}=\left(\frac{s^2+3s+2-(2s+3)(s+3)}{(s^2+3s+2)^2}\right)\Bigg|_{s=0}=-\frac{7}{4},$$

$$A_2=\left(s^2F(s)\right)\Big|_{s=0}=\left(\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right)\Big|_{s=0}=\frac{3}{2},$$

$$A_3=\left((s+1)F(s)\right)\Big|_{s=-2}=\left(\frac{s+3}{s^2(s+2)}\right)\Big|_{s=-1}=2,$$

$$A_4=\left((s+2)F(s)\right)\Big|_{s=-2}=\left(\frac{s+3}{s^2(s+1)}\right)\Big|_{s=-2}=-\frac{1}{4}.$$

Подставив найденные коэффициенты в выражение (3.53), получим:

$$F(s) = -\frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)}. \qquad (3.54)$$

Проверить правильность разложения можно, приведя правую часть формулы (3.54) к общему знаменателю и сравнивая полученное выражение с исходной функцией.

Осталось перейти к оригиналам каждого слагаемого в правой части выражения (3.54):

$$f(t) = \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)1(t).$$

Умножение на единичную ступенчатую функцию в последнем выражении означает, что искомая функция равна нулю при отрицательных моментах времени.

. . . .

3.3.3 Преобразование Лапласа и дифференциальные уравнения

Свойства преобразования Лапласа, описанные в предыдущем подпараграфе, позволяют успешно применять преобразование Лапласа для решения линейных стационарных (а в некоторых случаях и нестационарных) дифференциальных уравнений. Возьмём дифференциальное уравнение общего вида (3.5)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 r^{(m)} + \ldots + b_m r$$

и применим к правой и левой частям этого уравнения преобразование Лапласа. В результате получим:

$$A(s)Y(s) - M(s) = B(s)R(s), \qquad (3.55)$$

где $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$,

$$M(s) = m_0 s^{n-1} + \ldots + m_{n-2}s + m_{n-1}, \qquad (3.56)$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m,$$

причём

$$\begin{gathered} m_0 = a_0 y(0), \\ m_1 = a_0 \dot{y}(0) + a_1 y(0), \\ \ldots \\ m_{n-2} = a_0 y^{(n-2)}(0) + a_1 y^{(n-3)}(0) + \ldots + a_{n-2}y(0), \\ m_{n-1} = a_0 y^{(n-1)}(0) + a_1 y^{(n-2)}(0) + \ldots + a_{n-1}y(0). \end{gathered} \qquad (3.57)$$

Разрешая уравнение (3.55) относительно $Y(s)$, получим:

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}R(s)+\frac{M(s)}{A(s)}=W(s)R(s)+W_{\text{н}}(s). \qquad (3.58)$$

При нулевых начальных условиях второе слагаемое в правой части формулы (3.58), как легко видно из (3.56) и (3.57), равно нулю. Поэтому строгое определение передаточной функции линейной системы, учитывая формулу (3.58), можно сформулировать так: *передаточная функция системы* $W(s)$ *есть отношение изображений по Лапласу выхода системы* $Y(s)$ *к её входу* $R(s)$ *при нулевых начальных условиях*:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}. \qquad (3.59)$$

Переходя в формуле (3.58) во временну́ю область и применяя теорему свёртки, получим:

$$y(t)=\int_0^t w(t-\tau)\cdot r(\tau)d\tau+w_{\text{н}}(t), \qquad (3.60)$$

где $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$ – весовая функция системы, равная обратному преобразованию Лапласа от передаточной функции, а $w_{\text{н}}(t)=L^{-1}\{W_{\text{н}}(s)\}$.

Таким образом, мы получим общее решение уравнения (3.5), содержащее n произвольных постоянных, роль которых выполняют значения искомой функции $y(0)$ и её $n-1$ производных в начальный момент времени. Конкретная форма решения будет зависеть от того, каковы будут корни характеристического уравнения (3.16):

$$A(s)=0.$$

Получение решения $y(t)$ упрощается во многих частных, но широко распространённых в теории систем случаях, именно тогда, когда изображение по Лапласу входного сигнала $R(s)$ представляет дробно-рациональную функцию:

$$R(s)=\frac{N(s)}{P(s)}, \qquad (3.61)$$

где $N(s)$ и $P(s)$ – некоторые многочлены s.

В этих случаях нет необходимости использовать интеграл свёртки и записывать решение в форме уравнения (3.60). Подставив соотношение (3.61) в уравнение (3.58), получим:

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}\cdot\frac{N(s)}{P(s)}+\frac{M(s)}{A(s)}=\frac{B(s)N(s)}{D(s)}+\frac{M(s)}{A(s)}.$$

Для перехода в область переменной t можно воспользоваться любым методом определения обратного преобразования Лапласа, например теоремой разложения.

Пример 3.18

Решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\frac{dr}{dt}+3r,$$

при $r(t)=\begin{cases} t & \text{при } t\ge 0, \\ 0 & \text{при } t<0, \end{cases}$ и нулевых начальных условиях.

Применим преобразование Лапласа к *дифференциальному* уравнению, учитывая, что $L\{t\}=1/s^2$:

$$\left(s^2+3s+2\right)Y(s)=(s+3)\frac{1}{s^2}.$$

Решим полученное *алгебраическое* уравнение относительно $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{s+3}{s^2\left(s^2+3s+2\right)}.$$

Перейдём к оригиналу, используя результат примера 3.48:

$$y(t)=\left(-\frac{7}{4}+\frac{3}{2}t+2e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)1(t).$$

Контрольные вопросы по главе 3

1. В каких случаях возможна линеаризация нелинейных уравнений?
2. В чем различия и что общего между исходным нелинейным уравнением и линеаризованным?

3. Как записывается общее решение однородного линейного дифференциального уравнения в случае некратных и кратных корней характеристического уравнения?
4. Какова форма записи решения для комплексных корней характеристического уравнения?
5. Какие методы существуют для нахождения частного решения уравнения?
6. К каким вынуждающим функциям применим метод неопределенных коэффициентов при решении неоднородных дифференциальных уравнений?
7. В чем состоит необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка?
8. К каким функциям не применимо преобразование Фурье?
9. Как получить из преобразования Лапласа преобразование Фурье?
10. Что такое передаточная функция системы?
11. Назовите основные свойства преобразования Лапласа.
12. Что такое абсцисса абсолютной сходимости?
13. Как получить оригинал по изображению?
14. Чем отличается преобразование Карсона – Хевисайда от преобразования Лапласа?

4 Операторное описание дискретных по времени систем

Будем полагать в этом разделе, что функции $r(t)$ и $y(t)$, то есть входной и выходной сигналы системы, определены на счетном множестве моментов времени. Другими словами, время течет дискретно, квантами через равные промежутки, обозначаемые в этом разделе буквой *T*, то есть $t = kT$, где $k \in N_0$. Для упрощения записи можно выбрать соответствующий масштаб по оси времени и положить $T = 1$, то есть считать $r(k)$ и $y(k)$ как функции, определенные только при целых значениях *k*.

4.1 Прямой и обратный разностные операторы

4.1.1 Оператор сдвига и разностный оператор

Определим оператор сдвига E так:

$$E\{y(k)\} = y(k+1). \tag{4.1}$$

Последовательное применение этого оператора дает в общем случае

$$E^n\{y(k)\} = y(k+n), \tag{4.2}$$

где $n \in N_0$.

Разностный оператор Δ можно определить как

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k). \tag{4.3}$$

Оператор, определяемый формулой (4.3), называют еще правым разностным оператором, и он задает так называемую первую прямую разность функции $y(k)$, в отличие от используемого иногда левого разностного оператора ∇, определяемого выражением

$$\triangledown y(k) = y(k) - y(k-1)$$

и задающего первую обратную разность функции $y(k)$.

Выражение (4.3) с учетом (4.1) можно записать в виде

$$\Delta y(k) = (E-1)y(k),$$

где операторы Δ и *E* связаны соотношением

$$\Delta = E - 1. \tag{4.4}$$

Разности второго, третьего и более высокого порядков определяются по очевидным формулам:

$$\Delta^2 y(k) = \Delta\left(\Delta y(k)\right) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k),$$

$$\Delta^3 y(k) = \Delta\left(\Delta^2 y(k)\right) = y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) + y(k)$$

или, в общем случае,

$$\Delta^n y(k) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^n \binom{n}{r} y(k+n-r), \qquad (4.5)$$

где через $\binom{n}{r}$ обозначены биномиальные коэффициенты.

С учетом уравнений (4.2) и (4.4) из выражения (4.5) получим:

$$\Delta^n y(k) = (E-1)^n y(k) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^n \binom{n}{r} E^{n-r} y(k).$$

Операторы Δ и E являются линейными операторами, то есть справедливы следующие соотношения, например, для оператора Δ:

$$\Delta c y(k) = c \Delta y(k),$$

$$\Delta^n \left(y(k) + x(k) \right) = \Delta^n y(k) + \Delta^n x(k),$$

$$\Delta^n \Delta^m y(k) = \Delta^m \Delta^n y(k) = \Delta^{m+n} y(k).$$

где c – константа, m и n – целые положительные числа.

Таким образом, оператор Δ для функций дискретного переменного является аналогом дифференциального оператора $p = d/dt$ для непрерывных функций. Чтобы еще раз подчеркнуть эту аналогию, рассмотрим производную от непрерывной функции $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{f(t+T) - f(t)}{T}.$$

Если функцию $f(t)$ рассматривать только в дискретные моменты времени $t = kT$ $(k \in N_0)$, то оператор сдвига и разностный оператор дадут выражения:

$$Ef(t) = f(t+T) \text{ и } \Delta f(t) = f(t+T) - f(t).$$

Тогда получим:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta f(t)}{T},$$

или для случая m-й производной:

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta^m f(t)}{T^m}.$$

Существуют и разностные формулы, аналогичные (но не идентичные) формулам дифференцирования произведения и дроби.

Например:

$$\Delta\big(y(k)x(k)\big)=\Delta y(k)\Delta x(k)+y(k)\Delta x(k)+\Delta y(k)x(k),$$

$$\Delta\frac{y(k)}{z(k)}=\frac{z(k)\Delta y(k)-y(k)\Delta z(k)}{z(k)z(k+1)}.$$

Дифференцирование многочленов аналогично вычислению разностей *факториальных многочленов* [10]. Произвольный обыкновенный многочлен можно представить суммой факториальных многочленов. Факториальный многочлен m-го порядка определяется как

$$(k)^{(m)}=k(k-1)(k-2)...(k-m+1), \tag{4.6}$$

где m – положительное целое число.

Согласно определению разностного оператора, имеем:

$$\Delta(k)^{(m)}=m(k)^{(m-1)}=mk(k-1)(k-2)...(k-m+2). \tag{4.7}$$

4.1.2 Обратный разностный оператор

Найдем теперь обратный оператор, аналогичный интегральному оператору p^{-1}, при этом

$$p^{-1}\big(f(t)\big)=\int f(t)dt+c=\int\limits_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau+K, \tag{4.8}$$

где c и K – постоянные интегрирования.

Нижний предел t_0, вообще говоря, произвольный и определяется началом отсчета времени при анализе системы (обычно моментом поступления входного воздействия). Величина t_0 формирует часть постоянной интегрирования, именно:

$$c=K-\int f(t)dt\Big|_{t=t_0}.$$

Выражение $y(t)=p^{-1}\big(f(t)\big)$ является решением уравнения $py(t)=f(t)$.

Соответственно, выполняется соотношение $pp^{-1}f(t)=f(t)$.

По аналогии обратный оператор Δ^{-1} должен иметь такой вид, чтобы выражение $y(k)=\Delta^{-1}f(k)$ являлось решением уравнения

$$\Delta y(k)=f(k) \tag{4.9}$$

или чтобы удовлетворялось равенство

$$\Delta\Delta^{-1}f\left(k\right)=f\left(k\right). \tag{4.10}$$

Так как

$$\Delta\left(\sum_{n=0}^{k-1}f\left(n\right)+K\right)=\left(f(k)+f(k-1)+...+f(0)+K\right)-\left(f(k-1)+...+f(0)+K\right)=f\left(k\right),$$

то обратный оператор, удовлетворяющий уравнениям (4.9) и (4.10), имеет вид

$$\Delta^{-1}f\left(k\right)=\sum_{n=0}^{k-1}f\left(n\right)+K. \tag{4.11}$$

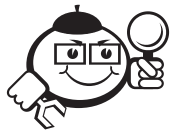
Уравнение (4.11), определяющее обратный оператор, можно переписать так:

$$\Delta^{-1}f\left(k\right)=\sum^{n=k-1}f\left(n\right)+c=\sum^{n=k}f\left(n-1\right)+c, \tag{4.12}$$

где суммирование производится по фиктивной переменной n.

Нижний предел в уравнении (4.12) не указан, так как можно объединить произвольное число членов $f\left(0\right),f\left(1\right),f\left(2\right)...$ в уравнении (4.11) с постоянной суммирования K и образовать новую постоянную с. Таким образом, произвольный предел в уравнении (4.12) является аналогом постоянной t_0 в уравнении (4.8), и его выбор определяется наиболее выгодным образом для каждого конкретного случая.

В отличие от интегралов, точное вычисление которых требует определенного искусства, а иногда и невозможно, для операторов Δ^{-1} таких сложностей не существует, однако вычисление $\Delta^{-1}f\left(k\right)$ непосредственно по формуле (4.12) довольно утомительно, особенно при больших k. Поэтому желательно выражать $\Delta^{-1}f\left(k\right)$ в замкнутом свернутом виде. Суммирование конечных рядов (как и вычисление интегралов) подчиняется определенным правилам. Существуют таблицы формул суммирования, правило суммирования по частям (аналог интегрированию по частям), используются многочлены Бернулли, разложение функций на простые дроби и т. д.



Пример 4.1

Найти сумму так называемого телескопического ряда $\sum\limits_{n=2}^{k}\dfrac{1}{n\left(n-1\right)}$.

Сумму такого ряда нетрудно найти, если представить выражение под знаком суммы в виде простых дробей:

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Тогда результат суммирования будет:

$$\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{k}.$$

. . . .

Но не всегда конечные суммы можно свернуть и выразить в замкнутой форме. В некоторых случаях можно пользоваться верхней и нижней оценкой таких сумм.

При использовании факториальных многочленов из уравнения (4.7) можно получить с учетом формулы (4.12):

$$\Delta^{-1}(k)^{(m)}=\frac{1}{m+1}(k)^{(m+1)}+K.$$

Аналогами дифференциальных уравнений для дискретной переменной являются разностные уравнения или, как их еще называют, уравнения в конечных разностях.

4.2 Разностные линейные уравнения динамики

4.2.1 Общие свойства разностных уравнений

Общий вид разностного уравнения, связывающего выход $y(k)$ с входом $r(k)$ системы с дискретным временем, следующий:

$$a_0y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\ldots+a_ny(k)=b_0r(k+m)+\ldots+b_mr(k). \qquad (4.13)$$

Это же уравнение (4.13) можно представить в другом виде:

$$\left(c_0\Delta^n+c_1\Delta^{n-1}+\ldots+c_n\right)y(k)=\left(d_0\Delta^m+d_1\Delta^{m-1}+\ldots+d_m\right)r(k). \qquad (4.14)$$

Переход от одной формы уравнения к другой очевиден, если иметь в виду соотношения (4.1)–(4.5). Уравнение (4.14) – более близкий аналог уравнению (3.5), а уравнение (4.13) легче решать, и поэтому оно более распространено.

Для линейных систем коэффициенты уравнений (4.13) и (4.14) не зависят от y или r, а для стационарных систем они независимы и от k, то есть являются постоянными величинами.

Применяя оператор сдвига E, уравнение (4.13) перепишем в виде

$$\left(a_0E^n + a_1E^{n-1} + \ldots + a_n\right)y\left(k\right) = \left(b_0E^m + b_1E^{m-1} + \ldots + b_m\right)r\left(k\right). \qquad (4.15)$$

Поскольку вход $r\left(k\right)$ считается известным, правую часть уравнения (4.13) (или (4.15)) можно обозначить как известную вынуждающую функцию $F\left(k\right)$ и записать уравнение (4.13) более компактно:

$$a_0y\left(k+n\right) + a_1y\left(k+n-1\right) + \ldots + a_ny\left(k\right) = F\left(k\right). \qquad (4.16)$$

Разностными уравнениями описываются системы, в которых процессы являются функциями дискретного переменного. Чаще всего эта дискретная переменная – время, но это может быть и положение, пространственные координаты, например в периодических структурах.

Уравнение (4.13), если $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$, является разностным уравнением *n*-го порядка. Если $a_n = 0$, а $a_0 \neq 0$ и $a_{n-1} \neq 0$, то получим уравнение $n-1$-го порядка. То есть в отличие от дифференциального уравнения, порядок разностного уравнения определяется разностью высшей и низшей степеней *E*. При использовании оператора Δ, например в уравнении (4.14), установить порядок уравнения непосредственно по его виду невозможно. Уравнение (4.15) называется неоднородным разностным уравнением, в отличие от однородного уравнения

$$\left(a_0E^n + a_1E^{n-1} + \ldots + a_n\right)y\left(k\right) = 0. \qquad (4.17)$$

Разностные уравнения, по сути, являются рекуррентными формулами. Уравнение (4.16) можно решить относительно $y\left(k+n\right)$:

$$y\left(k+n\right) = \frac{1}{a_0}\Big(F\left(k\right) - a_1y\left(k+n-1\right) - \ldots - a_ny\left(k\right)\Big). \qquad (4.18)$$

При известных значениях $y\left(0\right) \div y\left(n-1\right)$ (начальные условия) $y\left(k\right)$ можно непосредственно найти для всех $k \geq n$ путем последовательного применения соотношения (4.18).

Таким образом, в отличие от дифференциального уравнения, $y\left(k\right)$ можно найти непосредственно по разностному уравнению для любых значений *k*. Но обычно не прибегают к итерационной процедуре, описываемой уравнением (4.18), а находят решение в замкнутой форме.

4.2.2 Решение однородных разностных уравнений

Однородное разностное уравнение *n*-го порядка содержит *n* линейно независимых решений. Обозначим *n* решений уравнения (4.17) при $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$

через $y_1(k), y_2(k),..., y_n(k)$. Тогда условием (необходимым и достаточным) линейной независимости этих решений будет:

$$C(k)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ Ey_1 & Ey_2 & \dots & Ey_n \\ . & . & . & . \\ E^{n-1}y_1 & . & .. & E^{n-1}y_n \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.19)$$

Определитель $C(k)$ называется определителем Касорати.

Поскольку уравнение (4.17) линейное, то его решением будет и линейная комбинация независимых решений $y_i(k)$, то есть общее решение уравнения (4.17) можно записать как

$$y_{\text{o}}(k)=c_1 y_1(k)+c_2 y_2(k)+\ldots+c_n y_n(k), \qquad (4.20)$$

где c_i – постоянные, не зависящие от k.

Решение уравнения (4.17) можно по аналогии с дифференциальными уравнениями искать в форме

$$y(k)=e^{uk},$$

где u – неизвестная постоянная величина, подлежащая определению.

Но удобнее ввести обозначение $z=e^u$ и предполагаемое решение записать в виде

$$y(k)=z^k. \qquad (4.21)$$

Подставляя решение (4.21) в (4.17) и учитывая соотношение $E^n z^k = z^n z^k$, получим характеристическое уравнение:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (4.22)$$

При различных корнях характеристического уравнения $z_1, z_2, ..., z_n$ общее решение уравнения (4.17) получит вид

$$y_{\text{o}}(k)=c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + \ldots + c_n z_n^k. \qquad (4.23)$$

Можно показать, что при различных z_i отдельные решения $y_i = z_i^k$ удовлетворяют условию (4.19) и, следовательно, независимы. Если же, например, корень z_1 имеет кратность m, то составляющая общего решения, соответствующая этому корню, равна

$$y_{\text{o}}(k)=c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k + \ldots + c_m k^{m-1} z_1^k.$$

Пример 4.2

Найти общее решение разностного уравнения

$$y(k+2)+0,3y(k+1)+0,02y(k)=0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$z^2+0,3z+0,02=0$$

и найдем его корни $z_1=-0,2; z_2=-0,1$. Осталось записать решение в форме (4.23):

$$y_{\text{o}}(k)=c_1(-0,2)^k+c_2(-0,1)^k.$$

Для любого комплексного корня уравнения (4.22) с действительными коэффициентами должен существовать и комплексно сопряженный корень. Решение разностного уравнения, соответствующее паре комплексно сопряжённых корней:

$$z_{1,2}=\rho e^{\pm j\theta}, \tag{4.24}$$

записывается в форме

$$y_{\text{o}}(k)=\rho^k\left(A\cos\theta k+B\sin\theta k\right)=C\rho^k\cos(\theta k+\varphi), \tag{4.25}$$

где A, B, C и φ – действительные постоянные, связанные друг с другом известными формулами приведения тригонометрических функций $C=\sqrt{A^2+B^2}$, $\varphi=-\arctan B/A$.

Пример 4.3

Решить уравнение $y(k+2)+y(k+1)+y(k)=0$.

Корни характеристического уравнения $z^2+z+1=0$ равны

$$z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}e^{\pm j\arctan\sqrt{3}}=e^{\pm j\frac{\pi}{3}}.$$

Таким образом, в выражении (4.24) $\rho=1,\ \varphi=\pi/3$ и решение согласно (4.25) равно $y(k)=A\cos\dfrac{\pi k}{3}+B\sin\dfrac{\pi k}{3}$.

Особое внимание нужно уделять нулевым корням характеристического уравнения (4.22). Если $a_n=0$, а $a_0\neq 0$ и $a_{n-1}\neq 0$ в уравнении (4.22), то характеристическое уравнение содержит один нулевой корень. Так как в этом случае порядок разностного уравнения равен $n-1$, а характеристический полином имеет порядок *n*, то нулевой корень оказывается лишним и не должен учитываться. Также не должны учитываться и нулевые кратные корни.

4.2.3 Решение неоднородных разностных уравнений

Общее решение неоднородного уравнения (4.16), как и в случае дифференциальных уравнений, состоит из суммы общего решения $y_{\text{о}}(k)$ однородного уравнения (4.17) и частного решения $y_{\text{н}}(k)$, удовлетворяющего уравнению (4.16):

$$y(k)=y_{\text{о}}(k)+y_{\text{н}}(k). \tag{4.26}$$

Так как в составляющей $y_{\text{н}}(k)$ нет произвольных постоянных, то в решении (4.26) содержится *n* произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям $y_1(0), y_2(0), \ldots, y_{n-1}(0)$.

Вынужденное движение системы, то есть составляющую решения, соответствующую частному решению $y_{\text{н}}(k)$ неоднородного уравнения (4.16), можно найти на основе тех же самых двух методов, как и в случае дифференциальных уравнений: метода *неопределенных коэффициентов* и метода *вариации параметров*.

Метод неопределенных коэффициентов применим только в случае, если в результате последовательного действия оператора сдвига E на вынуждающую функцию $F(k)$ получится конечное число линейно независимых членов. Это будет в том случае, если $F(k)$ является функцией полиномиальной, экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической либо содержит линейную комбинацию этих функций. Решение ищется в виде линейной комбинации независимых составляющих $F(k)$, $F(k+1)$, $F(k+2)$, …, где каждая составляющая входит с неопределенными постоянными коэффициентами. Эти коэффициенты подбираются таким образом, чтобы предполагаемое решение удовлетворяло уравнению (4.16) для всех значений *k*.

Пример 4.4

Решить уравнение

$$y(k+2)+0{,}3y(k+1)+0{,}02y(k)=k(-1)^k. \tag{4.27}$$

Соответствующее однородное уравнение совпадает с уравнением из примера 4.2, поэтому общее решение однородного уравнения можно записать сразу, воспользовавшись результатом из примера 4.2:

$$y_{\text{о}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k. \tag{4.28}$$

Вынуждающая функция (правая часть уравнения) при воздействии на неё оператора сдвига *E* имеет две линейно независимые составляющие – это $k(-1)^k$ и $(-1)^k$, поскольку $\left(E(-1)^k = (k+1)(-1)^{k+1} = -k(-1)^k - (-1)^k\right)$, поэтому предполагаемое частное решение имеет вид

$$y_{\text{н}}(k) = Ak(-1)^k + B(-1)^k, \tag{4.29}$$

где *A* и *B* – неизвестные пока постоянные коэффициенты.

Подставив выражение (4.29) в левую часть уравнения (4.27), получим

$$A(k+2)(-1)^{k+2} + B(-1)^{k+2} + 0,3A(k+1)(-1)^{k+1} + 0,3B(-1)^{k+1} + 0,02Ak(-1)^k +$$
$$+0,02B(-1)^k = (A - 0,3A + 0,02A)k(-1)^k + (2A + B - 0,3A - 0,3B + 0,02B)(-1)^k =$$
$$= 0,72Ak(-1)^k + (1,7A + 0,72B)(-1)^k.$$

Приравняв в полученном выражении коэффициенты при независимых составляющих решения с соответствующими коэффициентами при таких же составляющих в правой части уравнения (4.27), получим систему из двух уравнений относительно коэффициентов *A* и *B*:

$$\begin{cases} 0,72A = 1, \\ 1,7A + 0,72B = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдём коэффициенты *A* и *B*: $A \approx 1,39$; $B \approx -3,28$. Окончательно получаем общее решение уравнения (4.27) как сумму решения (4.28) и решения (4.29) с определёнными коэффициентами

$$y(k) = y_{\text{о}}(k) + y_{\text{н}}(k) = c_1(-0,2)^k + c_2(-0,1)^k + 0,72k(-1)^k - 3,28(-1)^k \cdot$$

. . . .

Если составляющие $F(k)$, $F(k+1)$, … имеют такой же вид, как и составляющие решения $y_{\text{о}}(k)$, то предполагаемое частное решение видоизменяется. Все составляющие частного решения $y_{\text{н}}(k)$, совпадающие по виду с составляющими общего решения однородного уравнения $y_{\text{о}}(k)$, умножаются на *k* в той наименьшей степени, чтобы их тождественность нарушилась.

Пример 4.5

Пусть требуется найти частное решение уравнения

$$y(k+2)+0{,}3y(k+1)+0{,}02y(k)=(-0{,}1)^k.$$

Вынуждающая функция равна $(-0{,}1)^k$ и это единственная независимая составляющая при воздействии оператора сдвига, поэтому в обычном случае следовало бы частное решение взять в форме $A(-0{,}1)^k$. Но, вспомнив общее решение (4.28) однородного уравнения, замечаем совпадение вынуждающей функции с одним из слагаемых общего решения. Поэтому частное решение нужно брать в виде

$$y_{\text{н}}(k)=Ak(-0{,}1)^k.$$

Подставив предполагаемое решение в исходное уравнение, получим:

$$A(k+2)(-0{,}1)^{k+2}+0{,}03A(k+1)(-0{,}1)^{k+1}+0{,}02Ak(-0{,}1)^k=$$
$$=-0{,}01A(-0{,}1)^k=(-0{,}1)^k,$$

откуда с очевидностью следует $A=-100$, и частное решение равно

$$y_{\text{н}}(k)=-100k(-0{,}1)^k.$$

Второй метод (метод *вариации параметров*) позволяет получить выражение для $y_{\text{н}}(k)$ для любой функции $F(k)$, если известно решение $y_{\text{о}}(k)$.

Рассмотрение метода вариации параметров начнем с уравнения 1-го порядка:

$$(a_0E+a_1)y(k)=F(k). \tag{4.30}$$

Общее решение состоит из одного члена:

$$y_{\text{о}}(k)=c_1y_1(k).$$

Частное решение ищем в виде

$$y_{\text{н}}(k)=\mu_1(k)y_1(k), \tag{4.31}$$

где $\mu_1(k)$ – неизвестная пока функция.

Подставляя выражение (4.31) в (4.30), имеем:

$$a_0\mu_1(k+1)y_1(k+1)+a_1\mu_1(k)y_1(k)=F(k).$$

В левую часть последнего уравнения добавим и вычтем член $a_0\mu_1(k)y_1(k+1)$:

$$a_0\left[\mu_1(k+1)y_1(k+1)-a_0\mu_1(k)y_1(k+1)\right]+\mu_1(k)\left[a_0y_1(k+1)+a_1y_1(k)\right]=F(k).$$

Выражение в первых квадратных скобках есть $y_1(k+1)\Delta\mu_1(k)$, а вторые квадратные скобки равны нулю, так как $y_1(k)$ есть решение однородного уравнения. Получим:

$$a_0\Delta\mu_1(k)y_1(k+1)=F(k),$$

откуда с учетом уравнения (4.12) находим:

$$\mu_1(k)=\Delta^{-1}\frac{F(k)}{a_0y_1(k+1)}=\sum^{n=k}\frac{F(n-1)}{a_0y_1(n)}. \qquad (4.32)$$

Окончательно по формуле (4.31) получим:

$$y_{\text{н}}(k)=\sum^{n=k}\frac{F(n-1)}{a_0y_1(n)}y_1(k).$$

Пример 4.6

Пусть требуется решить уравнение первого порядка

$$y(k+1)+2y(k)=\frac{(-2)^k}{k(k+1)}.$$

Решение однородного уравнения имеет вид $y_{\text{о}}(k)=c_1(-2)^k$, так что $y_1(k)=(-2)^k$. Частное решение записываем в форме (4.31)

$$y_{\text{н}}(k)=\mu_1(k)(-2)^k,$$

где $\mu_1(k)$ определяется по формуле (4.32):

$$\mu_1(k)=\sum_{n=2}^{n=k}\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)n(-2)^n}=-\sum_{n=2}^{n=k}\frac{1}{2(n-1)n}.$$

Воспользовавшись результатом примера 4.1, получим:

$$\mu_1(k)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right),$$

а общее решение представится в виде

$$y(k)=\left(c_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)(-2)^k=\left(c+\frac{1}{2k}\right)(-2)^k.$$

Похожим образом для уравнения второго порядка $\left(a_0E^2+a_1E+a_2\right)y(k)=F(k)$ частное решение записывается в виде $y_{\text{н}}(k)=\mu_1(k)y_1(k)+\mu_2(k)y_2(k)$, где $y_1(k),y_2(k)$ – линейно независимые составляющие общего решения соответствующего однородного уравнения, а $\mu_1(k),\mu_2(k)$ определяются из уравнений

$$\Delta\mu_1(k)=\frac{-y_2(k+1)\cdot F(k)}{a_0\left(y_1(k+1)\cdot y_2(k+2)-y_1(k+2)\cdot y_2(k+1)\right)},$$

$$\Delta\mu_2(k)=\frac{y_1(k+1)\cdot F(k)}{a_0\left(y_1(k+1)\cdot y_2(k+2)-y_1(k+2)\cdot y_2(k+1)\right)}.$$

Применив обратный разностный оператор к последним соотношениям, находим $\mu_1(k),\mu_2(k)$:

$$\begin{aligned}\mu_1(k)&=-\sum^{n=k}\frac{y_2(n)\cdot F(n-1)}{a_0\left(y_1(n)\cdot y_2(n+1)-y_1(n+1)\cdot y_2(n)\right)},\\ \mu_2(k)&=\sum^{n=k}\frac{y_1(n)\cdot F(n-1)}{a_0\left(y_1(n)\cdot y_2(n+1)-y_1(n+1)\cdot y_2(n)\right)}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Знаменатели здесь отличны от нуля, так как $y_1(k),y_2(k)$ – независимые решения однородного уравнения, а следовательно, выполняется условие (4.19).

Пример 4.7

Решим уравнение из примера 4.5 методом вариации параметров

$$y(k+2)+0{,}3y(k+1)+0{,}02y(k)=(-0{,}1)^k.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения найдено в примере 4.2 – $y_{\text{о}}(k)=c_1(-0{,}2)^k+c_2(-0{,}1)^k$, так что $y_1(k)=(-0{,}2)^k, y_2(k)=(-0{,}1)^k$.

Частное решение ищем в форме

$$y_{\text{н}}(k)=\mu_1(k)y_1(k)+\mu_2(k)y_2(k)=\mu_1(k)(-0{,}2)^k+\mu_2(k)(-0{,}1)^k.$$

Учитывая, что определитель Касорати равен

$$y_1(k)\cdot y_2(k+1)-y_1(k+1)\cdot y_2(k)=0{,}1(-0{,}2)^k(-0{,}1)^k,$$

на основе уравнений (4.33) получим:

$$\mu_1(k)=-\sum_{n=1}^{n=k}\frac{(-0{,}1)^n(-0{,}1)^{n-1}}{0{,}1(-0{,}2)^n(-0{,}1)^n}=\sum_{n=1}^{n=k}\frac{(-0{,}1)^n}{(-0{,}1)^2(-0{,}2)^n}=100\sum_{n=1}^{n=k}\left(\frac{1}{2}\right)^n=100\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

$$\mu_2(k)=\sum_{n=1}^{n=k}\frac{(-0,2)^n(-0,1)^{n-1}}{0,1(-0,2)^n(-0,1)^n}=-100k.$$

Окончательно общее решение будет равно

$$y(k)=y_{\text{о}}(k)+y_{\text{н}}(k)=c_1(-0,2)^k+c_2(-0,1)^k+100(-0,2)^k-100\frac{(-0,2)^k}{2^k}-$$
$$-100k(-1)^k=C_1(-0,2)^k+C_2(-1)^k-100k(-1)^k,$$

где через C_1, C_2 обозначены новые постоянные, связанные со старыми соотношениями $C_1=c_1+100,\ C_2=c_2-100$.

. . . .

В общем случае для уравнения n-го порядка частное решение ищется в форме

$$y_{\text{н}}(k)=\mu_1(k)y_1(k)+\mu_2(k)y_2(k)+\ldots+\mu_n(k)y_n(k). \tag{4.34}$$

Функции $\mu_i(k)$ (i = 1, 2, …, n) определяются из уравнения

$$\mu_i(k)=\sum^{n=k}\frac{C_{ni}(n)\cdot F(n-1)}{a_0C(n)}, \tag{4.35}$$

где $C(k)$ – определитель Касорати, а $C_{ni}(k)$ – алгебраические дополнения ni-х элементов.

Из условия (4.19) следует, что $C(k)$ отличен от нуля, если $y_1(k)\div y_n(k)$ – линейно независимые решения однородного уравнения.

Выражения (4.35) позволяют получить в явном виде решение $y_{\text{н}}(k)$ по известному $y_{\text{о}}(k)$ для произвольной вынуждающей функции $F(k)$, хотя в некоторых случаях трудно представить в замкнутом виде входящую в формулу (4.35) сумму. Метод вариации параметров позволяет находить решение и разностных уравнений с переменными коэффициентами, то есть уравнений, описывающих нестационарные во времени системы.

Завершая этот подпараграф, введем понятие передаточной функции дискретной во времени системы.

Решим формально уравнение (4.15) относительно выхода $y(k)$:

$$y(k)=\frac{b_0E^m+b_1E^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0E^n+a_1E^{n-1}+\ldots+a_n}\cdot r(k)=\frac{B(E)}{A(E)}\cdot r(k). \tag{4.36}$$

Идентифицируем оператор E с некоторой независимой переменной z. Тогда характеристикой системы, описываемой уравнением (4.15), будет отношение полиномов $B(z)$ к $A(z)$:

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{4.37}$$

Последнее соотношение и определяет формально передаточную функцию дискретной системы (другие названия – «импульсная передаточная функция», «дискретная передаточная функция»). Более строго импульсная передаточная функция будет определена чуть дальше с использованием z-преобразования.

4.3 Методы преобразований

4.3.1 Дискретное преобразование Лапласа

Для исследования непрерывных систем широко применяется преобразование Лапласа. Но непосредственное применение преобразования Лапласа к разностному уравнению и, в частности, к любой решетчатой функции $f(kT)$ тождественно дает нуль, так как площадь этой функции (или в физической интерпретации – энергия такого сигнала) равна нулю. Чтобы выйти из этого затруднительного положения, придадим функции $f(kT)$ площадь, равную значению этой функции. Проще всего это сделать, умножив значение функции в точке $t = kT$ на дельта-функцию, принимающую бесконечное значение в этой же точке. Проделав такую операцию для всех k, при которых определена функция f, получим импульсную функцию:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT), \tag{4.38}$$

представляющую собой последовательность «идеальных» импульсов с бесконечной амплитудой и бесконечно малой длительностью, причем каждый импульс имеет площадь, равную значению функции $f(kT)$. Точно такую же импульсную функцию можно получить и из непрерывной функции $f(t)$, применив к ней формулу (4.38):

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kT) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = f(t)\delta_T(t), \tag{4.39}$$

где через $\delta_T(t)$ обозначена соответствующая сумма δ-функций.

Воспользовавшись выражением (4.39) можно дать одно из понятий дискретного преобразования Лапласа, наиболее удобное с инженерных позиций. Определим дискретное преобразование Лапласа функции $f(t)$ как преобразование Лапласа от импульсной функции $f^*(t)$, соответствующей непрерывной функции $f(t)$:

$$F^*(s) = L^*\{f(t)\} = L\{f^*(t)\}. \tag{4.40}$$

Преимущество такого определения состоит в том, что эта новая операция полностью выражается через уже знакомую и хорошо изученную операцию обычного преобразования Лапласа.

Согласно (4.40) и с учетом (4.39) имеем:

$$F^*(s) = L^*\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f^*(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^\infty f(kT)\delta(t-kT)\,dt.$$

Поменяв в правой части последнего выражения порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^\infty f(kT)\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-kT)\,dt = \sum_{k=0}^\infty f(kT)e^{-skT}. \tag{4.41}$$

В формуле (4.41) отсутствует δ-функция, и она может быть использована непосредственно для решетчатой функции.

Можно получить альтернативные формулы для вычисления дискретного преобразования Лапласа функции $f(t)$ по ее обычному преобразованию Лапласа $F(s)$:

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^n \text{вычеты} \left\{\frac{F(\xi)}{1-e^{-T(s-\xi)}}\right\}_{\text{в полюсах } \xi=\xi_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\text{вычеты}\, F(\xi)\big|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_i}}{1-e^{-T(s-\xi_i)}}, \tag{4.42}$$

где ξ_i – полюсы функции $F(s)$ и

$$F^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^\infty F(s + j\omega_s k), \tag{4.43}$$

где $\omega_s = 2\pi/T$ – круговая частота отсчетов времени $t = kT$.

Формулы (4.41) и (4.43) дают дискретное преобразование Лапласа в незамкнутой форме, а формула (4.42) – в замкнутой, что и определяет удобство пользования последней. Из свойств дискретного преобразования Лапласа полезно упомянуть свойство периодичности функции $F^*(s)$. Действительно, периодом такой функции будет $j\omega_s$. Это нетрудно показать, например, используя формулу (4.43). Подставим вместо *s* величину $s + jn\omega_s$ в выражение (4.43), где *n* – целое число:

$$F^*\left(s + jn\omega_s\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(s + j\omega_s k + j\omega_s n\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(s + j\omega_s\left(k+n\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(s + j\omega_s m\right) = F^*\left(s\right),$$

где $m = k + n$.

Этот же результат можно получить и из формулы (4.41):

$$F^*\left(s + jn\omega_s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(kT\right)e^{-(s+j\omega_s n)kT} = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(kT\right)e^{-skT}e^{-j2\pi nk} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} = F^*\left(s\right),$$

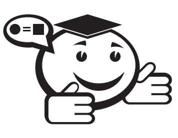
так как $\omega_s = 2\pi/T$, а экспонента в степени $-2\pi mj$, где $m = kn$ – целое число, равна единице.

4.3.2 *z*-преобразование

Определение z-преобразования. Дискретное преобразование Лапласа обладает одним недостатком, который существенно ограничивает его применение для исследования дискретных во времени систем, именно: наличие экспоненты в степени переменной *s* (это явно заложено в формулах (4.41) и (4.42) и неявно – в формуле (4.43)). То есть дискретное преобразование Лапласа не является дробно-рациональной функцией *s*, а появление множителя e^{-sT} может привести к большим трудностям в вычислении обратного преобразования Лапласа. Желательно было бы преобразовать $F^*\left(s\right)$ к такой форме, чтобы это стало дробно-рациональным выражением относительно некоторой новой переменной. Выбор такой переменной очевиден:

$$z = e^{-sT} \text{ или } \mathrm{s} = \frac{1}{T}\ln z. \tag{4.44}$$

Из формул (4.44) видно, что *z* – это комплексная переменная, действительная и мнимая части которой определяются как $\mathrm{Re}\, z = e^{\sigma T}\cos\omega T$, $\mathrm{Im}\, z = e^{\sigma T}\sin\omega T$ $(s = \sigma + j\omega)$.



Таким образом, z-преобразование некоторой непрерывной функции f(t) можно определить как ее ***дискретное преобразование Лапласа*** *после замены* (4.44)*:*

$$F(z)=Z\{f(t)\}=F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=L\{f^*(t)\}\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}. \qquad (4.45)$$

. . . .

Из определения (4.48) следует, что z-преобразование существует для любой функции, имеющей преобразование Лапласа.

Для вычисления z-преобразования можно применить формулы (4.41), (4.42) и (4.43), из которых после замены переменной (4.44) получаются соответственно

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}, \qquad (4.46)$$

$$F(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{вычеты}\, F(\xi)\Big|_{\text{в полюсах } \xi=\xi_i}}{1-z^{-1}e^{T\xi_i}}, \qquad (4.47)$$

$$F(z)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(s+j\omega_s k)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}. \qquad (4.48)$$

Все три формулы равноценны, но имеют разные области применения. Если задана функция $f(t)$ или $f(kT)$, используется выражение (4.46). Строго говоря, на временные ряды или функции никаких ограничений не накладывается, поэтому эта формула является наиболее общей (хотя для того, чтобы записать z-преобразование в замкнутой форме, ряд (4.46) должен сходиться)[1].

В случае, если задано преобразование Лапласа некоторой функции $F(s)=L\{f(t)\}$, ее z-преобразование удобно определять по формуле (4.47).

И, наконец, формула (4.48) обычно используется при частотном исследовании дискретных сигналов и при доказательстве некоторых теорем.

. . . . Пример 4.8 . . . .

Найдем преобразование от единичной ступенчатой функции $1(t)$.

Воспользуемся формулой (4.46):

$$Z\{1(t)\}=\sum_{k=0}^{\infty}1(t)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}.$$

[1]Поскольку вывод формулы (4.46) основан на *одностороннем* преобразовании Лапласа, данная формула определяет так называемое *одностороннее* z-преобразование. В *двухстороннем* преобразовании нижний предел суммы равен минус бесконечности.

Данный ряд является геометрической прогрессией и при $\left|z^{-1}\right|<1$ (или, что то же самое, при $|z|>1$) сходится к $\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$. Таким образом, получаем $Z\{1(t)\}=\dfrac{z}{z-1}$.

. . . .

Пример 4.9

Найти преобразование от экспоненты e^{-at}.

Известно (см. результат примера 3.11), что преобразование Лапласа от экспоненты равно $\dfrac{1}{s+a}$. Воспользуемся формулой (4.47). Вычет $\dfrac{1}{s+a}$ в единственном полюсе $s=-a$ равен единице, следовательно, имеем:

$$Z\left\{e^{-at}\right\}=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-at}}=\frac{z}{z-e^{-at}}.$$

. . . .

Свойства z-преобразования. Свойства *z*-преобразования аналогичны соответствующим свойствам преобразования Лапласа и сформулированы в виде теорем. Применение этих теорем часто облегчает вычисление прямого и обратного *z*-преобразования.

Теорема существования. Для существования $F(z)$ необходимо, чтобы $f(t)$ была определена при всех $t=kT$, $(k=0,1,2,...)$.

Теорема единственности. Две функции времени имеют одно и то же *z*-преобразование, если и только если они совпадают при всех $t=kT$, $(k=0,1,2,...)$.

Теорема линейности:

$$Z\left\{f_1(t)+f_2(t)\right\}=Z\left\{f_1(t)\right\}+Z\left\{f_2(t)\right\},$$

$$Z\left\{cf(t)\right\}=cZ\left\{f(t)\right\},$$

где c – константа.

Теорема об интервале квантования. Преобразование функции $f(t/T)$ не зависит от периода квантования.

Теорема о сдвиге во временной области:

$$Z\left\{f(t-nT)\right\}=z^{-n}Z\left\{f(t)\right\},$$

$$Z\left\{f\left(t+nT\right)\right\}=z^{n}\left(Z\left\{f\left(t\right)\right\}-\sum_{k=1}^{n-1}f\left(kT\right)z^{-k}\right).$$

Теорема об умножении оригинала на t:

$$Z\left\{t\cdot f\left(t\right)\right\}=-Tz\frac{dZ\left\{f\left(t\right)\right\}}{dz}. \tag{4.49}$$

Пример 4.10

Найти преобразование от t.

Функцию t можно представить как $t\cdot 1(t)$, и тогда согласно (4.49) и учитывая результат примера 4.8 имеем:

$$Z\left\{t\right\}=-Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{Tz}{\left(z-1\right)^{2}}.$$

Теорема об умножении оригинала на экспоненту:

$$Z\left\{e^{\pm at}f\left(t\right)\right\}=Z\left\{f\left(t\right)\right\}\Big|_{z=ze^{\mp at}}.$$

Теорема о начальном значении:

$$\lim_{t\to 0}f\left(t\right)=\lim_{z\to\infty}F\left(z\right),$$

при условии, что пределы существуют.

Теорема о конечном значении:

$$\lim_{t\to\infty}f\left(t\right)=\left(1-z^{-1}\right)\lim_{z\to 1}F\left(z\right),$$

при условии, что $\left(1-z^{-1}\right)F\left(z\right)$ является аналитической на окружности единичного радиуса $\left|z\right|=1$ и вне круга, описываемого этой окружностью.

Теорема о дифференцировании по параметру:

$$Z\left\{\frac{\partial f\left(t,a\right)}{\partial a}\right\}=\frac{\partial Z\left\{f\left(t,a\right)\right\}}{\partial a}. \tag{4.50}$$

Теорема о свертке во временной области:

$$F_{1}\left(z\right)\cdot F_{2}\left(z\right)=Z\left\{\sum_{n=0}^{k}f_{1}\left(nT\right)f_{2}\left(kT-nT\right)\right\}.$$

Теорема о свертке в области изображений:

$$Z\left\{f_{1}\left(t\right)f_{2}\left(t\right)\right\}=\oint_{\Gamma}\frac{F_{1}\left(\xi\right)F_{2}\left(z\xi^{-1}\right)}{\xi}d\xi,$$

где контур интегрирования Г разделяет полюсы $F_{1}\left(z\right)$ от полюсов $F_{2}\left(z\xi^{-1}\right)$.

Обратное z-преобразование. Как известно, по изображению Лапласа $F(z)$ вполне однозначно может быть восстановлена функция-оригинал $f(t)$ (см. формулу (3.49)). Для z-преобразования обратное z-преобразование не является однозначным, то есть, если z-преобразование некоторой функции $f(t)$ равно $F(z)$, то обратное z-преобразование, примененное к $F(z)$, не обязательно дает $f(t)$. Корректный результат обратного z-преобразования есть $f(kT)$. Об этом необходимо помнить, и это является одним из ограничений метода z-преобразования.

В общем случае обратное z-преобразование может быть определено одним из трех методов.

Метод разложения на простые дроби. Этот метод при небольшой модификации соответствует методу разложения на простые дроби в преобразовании Лапласа.

Как известно, преобразование Лапласа может быть получено в виде

$$F(s)=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\ldots+\frac{A_n}{s-s_n}, \tag{4.51}$$

где s_i – простые полюсы, а A_i – вычеты в этих полюсах.

Тогда функция-оригинал определится как сумма экспонент.

Для z-преобразования не нужно представлять функцию-изображение в форме (4.51). В таблицах обратное z-преобразование для функции $\dfrac{A}{z-a}$ отсутствует (хотя при положительном значении а член такого вида соответствует последовательности импульсов с экспоненциально затухающей амплитудой, когда присутствует временная задержка).

Но известно (см. пример 4.9), что обратное z-преобразование функции $\dfrac{Az}{z-e^{-at}}$ равно Ae^{-akT}, следовательно, удобнее разложить на простые дроби функцию $F(z)/z$, а после этого обе части равенства умножить на z. Далее находим оригиналы для каждого из слагаемых и записываем результат в виде суммы полученных оригиналов.

Пример 4.11

По заданному преобразованию $F(z)=\dfrac{2z}{z^3-4z^2+5z-2}$ найти $f(kT)$. На основе изложенного метода имеем:

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{z^3-4z^2+5z-2}=\frac{2}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{2}{(z-2)}-\frac{2}{(z-1)}-\frac{2}{(z-1)^2} \text{ и}$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-2)}-\frac{2z}{(z-1)}-\frac{2z}{(z-1)^2}.$$

Согласно примерам 4.8–4.10 при $T=1$ получим:

$$f(k)=2\left(2^k-1-k\right), \text{ при } k\geq 0.$$

Если T не равно единице, то по теореме об интервале квантования

$$f(kT)=2\left(2^k-1-k\right), \text{ при } k\geq 0.$$

Для функций-изображений, не содержащих нулей $z=0$, то есть не имеющих в качестве множителя в числителе z, временная последовательность оригинала будет иметь сдвиг по оси времени. В этом случае нахождение обратного z-преобразования будет таким.

Разложение $F(z)$ представляется в обычном виде

$$F(z)=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\ldots+\frac{A_n}{z-z_n},$$

после чего вводится вспомогательная функция:

$$F_1(z)=zF(z)=\frac{A_1z}{z-z_1}+\frac{A_2z}{z-z_2}+\ldots+\frac{A_nz}{z-z_n}.$$

По последнему выражению определяется функция оригинал $f_1(kT)$ и, далее, функция $f(kT)$:

$$f(kT)=Z^{-1}\left\{F(z)\right\}=Z^{-1}\left\{z^{-1}F_1(z)\right\}=f_1\left((k-1)T\right). \tag{4.52}$$

Последний переход в формуле (4.52) непосредственно следует из определения z-преобразования, если $f(kT)\equiv 0$ при $k<0$.

Метод разложения в степенной ряд. Из определения z-преобразования (формула (4.46)) следует, что обратное z-преобразование может быть получено разложением изображения $F(z)$ в бесконечный ряд по степени z^{-1}:

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ldots + f(kT)z^{-k} + \ldots. \tag{4.53}$$

Величины $f(kT)$ определяются непосредственно по виду этого выражения. Формулу (4.53) можно рассматривать как разложение в ряд Тейлора около бесконечно удаленной точки $z \to \infty$. Если обозначить через $\varphi(z)$ функцию, получающуюся из заменой z на $1/z$, то из выражения (4.53) следует, что

$$\varphi(z) = f(0) + f(T)z + f(2T)z^2 + \ldots + f(kT)z^k + \ldots$$

является разложением в ряд Тейлора функции $\varphi(z)$ относительно начала координат и, следовательно,

$$f(kT) = \frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi(z)}{dz^k}\bigg|_{z=0}.$$

Но обычно проще найти эти коэффициенты непосредственно делением числителя на знаменатель, так как z-преобразование, как правило, дробно-рациональная функция z. Если использовать $\varphi(z)$, то многочлены при делении следует записывать в порядке возрастания степеней. Если же оперировать непосредственно с $F(z)$, числитель и знаменатель нужно записывать по возрастающим степеням z^{-1}.

Этот метод проще любого другого, если требуется определить $f(kT)$ только в нескольких точках $t = kT$. Недостатком же его является невозможность получения общего выражения для k-го члена в замкнутой форме.

Пример 4.12

Найдем первые пять значений функции $f(kT)$ по её преобразованию

$$F(z) = \frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}.$$

Осуществляя непосредственное деление числителя на знаменатель, получаем ряд Лорана:

$$F(z) = 2z^{-2} + 8z^{-3} + 22z^{-4} + \ldots.$$

Коэффициенты этого ряда являются значениями искомой функции в дискретные моменты времени $f(0)=0,\ f(T)=0,\ f(2T)=2,\ f(3T)=8,\ f(4T)=22, \ldots.$

Метод, основанный на использовании формулы обращения. Для обратного z-преобразования можно получить интеграл обращения, аналогичный интегралу обратного преобразования Лапласа (3.49). Вычисление такого интеграла даст

$$f\left(kT\right) = \sum \text{вычеты } \left\{F\left(z\right)z^{k-1}\right\}\Big|_{\text{в полюсах } F(z)} .$$

Пример 4.13

Найдем оригинал от того же преобразования, что и в примерах 4.11 и 4.12.

Преобразование $F\left(z\right) = \dfrac{2z}{\left(z-2\right)\left(z-1\right)^2}$ имеет простой полюс $z = 2$ и кратный (кратности два) полюс $z = 1$.

Вычет $F\left(z\right)z^{k-1}$ в полюсе $z = 2$ равен

$$\left.\frac{2z^k}{\left(z-1\right)^2}\right|_{z=2} = 2^{k+1},$$

а в кратном полюсе $z = 1$

$$\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{2z^k}{z-2}\right)\right|_{z=1} = -2\left(k+1\right),$$

откуда

$$f\left(kT\right) = 2\left(2^k - 1 - k\right) \text{при } k \geq 0 ,$$

что соответствует результату примера 4.11.

4.3.3 Разностные уравнения и *z*-преобразование

Решение разностных уравнений легко получить, используя *z*-преобразование.

Возьмем разностное уравнение в общем виде (4.13):

$$a_0 y\left(k+n\right) + a_1 y\left(k+n-1\right) + \ldots + a_n y\left(k\right) = b_0 r\left(k+m\right) + \ldots + b_m r\left(k\right).$$

Применим *z*-преобразование почленно к правой и левой частям этого уравнения. Учитывая теорему о сдвиге во временной области, получим

$$\begin{gathered}\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\right)Y(z) - z^n a_0 y(0) - z^{n-1}\left(a_0 y(1) + a_1 y(0)\right) - \ldots - \\ -z\left(a_0 y(n-1) + a_1 y(n-2) + \ldots + a_{n-1} y(0)\right) = \\ = \left(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m\right)R(z) - z^m b_0 r(0) - z^{m-1}\left(b_0 r(1) + b_1 r(0)\right) - \ldots - \\ -z\left(b_0 r(m-1) + b_1 r(m-2) + \ldots + b_{n-1} r(0)\right).\end{gathered} \tag{4.54}$$

Разрешив это уравнение относительно $Y(z)$, можно далее на основе методов обратного преобразования получить $y(k)$. Как видно, в уравнении (4.54) присутствуют члены от $y(0)$ до $y(n-1)$. Эти члены представляют *n* граничных (начальных) условий, необходимых для определения произвольных постоянных в классическом решении.

Соотношение (4.54) значительно упрощается, если разностное уравнение (4.13) описывает предварительно невозбужденную физически реализуемую систему. Термин «предварительно невозбужденная система» означает, что запасенная системой к моменту времени $t = 0$ энергия равна нулю или что $y(k) = r(k) \equiv 0$ при $k < 0$.

Для физически реализуемой системы реакция на выходе не может появиться ранее воздействия на ее входе, то есть в разложении по степеням z^{-1} отсутствуют члены с положительными степенями *z*, откуда следует, что в уравнении (4.13) должно выполняться условие $m \le n$. Подставим в уравнение (4.13) последовательно $k = -n;\ k = -n-1;\ k = -n-2 \ldots k = -2;\ k = -1$. С учетом условия $y(k) = r(k) \equiv 0$ при $k < 0$ получим:

$$\begin{gathered}a_0 y(0) = b_0 r(m-n), \\ a_0 y(1) + a_1 y(0) = b_0 r(m-n+1) + b_1 r(m-n), \\ \ldots \\ a_0 y(n-1) + a_1 y(n-2) + \ldots + a_{n-1} y(0) = \\ = b_0 r(m-1) + b_1 r(m-2) + \ldots + b_{m-1} r(0).\end{gathered} \tag{4.55}$$

В правой части равенств (4.55) все слагаемые с отрицательным аргументом равны нулю.

Учитывая выражения (4.55) из (4.54) можно видеть что

$$\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\right)Y(z) = \left(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m\right)R(z),$$

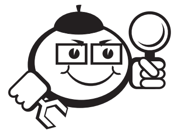
откуда

$$Y(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} R(z) = W(z)R(z). \tag{4.56}$$

Из формулы (4.56) видно, что существует непосредственная связь между преобразованиями от входного и выходного сигналов предварительно невозбужденной системы. Эта связь устанавливается *импульсной передаточной функцией*

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+...+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}, \tag{4.57}$$

которую можно определить как отношение z-преобразований выхода и входа предварительно невозбужденной системы. Сравнение выражений (4.57) и (4.15), (4.25) показывает, что импульсную передаточную функцию можно записать непосредственно по разностному уравнению.



Пример 4.14

Пусть предварительно невозбуждённая система описывается уравнением

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=2r(k+1)+2r(k).$$

Найти выход системы, полагая, что воздействие на входе

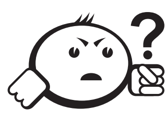
$$r(k)=\begin{cases} k \text{ при } k\ge 0,\\ 0 \text{ при } k<0. \end{cases}$$

Применим z-преобразование, воспользовавшись результатом примера 4.10:

$$Y(z)=\frac{2z+2}{z^2-3z+2}R(z)=\frac{2z+2}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}.$$

На основе примера 4.13 получим

$$f(kT)=2\left(2^k-1-k\right)\text{при } k\ge 0.$$



Контрольные вопросы по главе 4

1. Как связан оператор сдвига E и разностный оператор Δ?
2. Как определяется порядок разностного уравнения?
3. Что такое факториальный многочлен?
4. Какие методы существуют для вычисления конечных рядов?
5. Как записывается обратный разностный оператор Δ^{-1}?

6. В какой форме записывается общее решение однородного разностного уравнения в случае некратных и кратных корней характеристического уравнения?
7. Какова форма записи решения для комплексных корней характеристического уравнения?
8. Какие методы существуют для нахождения частного решения разностного уравнения?
9. К каким вынуждающим функциям применим метод неопределенных коэффициентов при решении неоднородных разностных уравнений?
10. Как составляется определитель Касорати?
11. В чем состоит необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений однородного линейного разностного уравнения n-го порядка?
12. Как учитывается запасенная энергия системы к начальному моменту времени в решении разностного уравнения?
13. Как связано дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование?
14. По каким формулам можно вычислить z-преобразование?
15. Что такое импульсная передаточная функция системы?
16. Какие методы существуют для нахождения обратного z-преобразования?
17. Перечислите основные свойства z-преобразования.
18. Назовите основные этапы решения разностного уравнения с помощью z-преобразования.

5 Матрицы и линейные пространства

Полное описание достаточно сложной системы требует большого количества информации. Эта информация может быть представлена системами дифференциальных либо разностных уравнений. Удобно в этом случае пользоваться матричными формами представления такой информации. Анализ систем тогда сводится, как правило, к анализу свойств матриц. Мощным средством аппарат теории матриц является и при синтезе систем. Поэтому полезно еще раз вспомнить те разделы линейной алгебры, которые непосредственно относятся к изучению теории систем.

5.1 Основные типы матриц и операции над ними

5.1.1 Общие понятия

Как известно, матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из упорядоченных элементов [13]. Элементами таблицы могут быть действительные или комплексные числа или функции от заданных переменных. В отличие от обычной прямоугольной таблицы матрица подчиняется определенным правилам сложения, вычитания, умножения и равенства. Элементы матрицы a_{ij} имеют двойной индекс, первый – это номер строки, второй – номер столбца, где располагается этот элемент. Матрица, содержащая m строк и n столбцов, называется $(m \times n)$-матрицей, или матрицей порядка m на n.

Матрица $(m \times 1)$ называется матрицей-столбцом или вектор-столбцом.

Матрица $(1 \times n)$ называется матрицей-строкой или вектор-строкой.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица – это диагональная матрица с элементами, равными единице.

Нулевая матрица – это матрица, все элементы которой тождественно равны нулю.

Транспонированная матрица – это матрица, у которой строки и столбцы поменялись местами.

Симметрическая матрица – это квадратная матрица с действительными элементами, если она равна своей транспонированной $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Кососимметрическая матрица – это квадратная действительная матрица, если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Если элементы матрицы $\mathbf{A}$ комплексные $a_{ij} = \alpha_{ij} + j\beta_{ij}$, то *комплексно сопряженная* матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ содержит элементы $b_{ij} = \alpha_{ij} - j\beta_{ij}$.

Матрица, *сопряженная* по отношению к матрице $\mathbf{A}$, является транспонированной и комплексно сопряженной по отношению к $\mathbf{A}$, то есть равна $\left(\mathbf{A}^*\right)^T$.

Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, то матрица является *действительной*.

Если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, то матрица $\mathbf{A}$ *мнимая*.

Если матрица равна своей сопряженной, то она называется *эрмитовой*. Для эрмитовой матрицы выполняется соотношение $\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^*\right)^T$.

Если выполняется соотношение $\mathbf{A} = -\left(\mathbf{A}^*\right)^T$, то матрица $\mathbf{A}$ носит название *косоэрмитовой*.

5.1.2 Простейшие операции

Суммой (разностью) матриц одного порядка $(m \times n)$ является матрица $(m \times n)$ $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$, каждый элемент которой определяется как $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Две матрицы одного порядка равны $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, если и только если равны их элементы $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение произведения двух матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ непосредственно следует из аппарата линейных преобразований. Для существования произведения $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ матрица $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должны быть согласованы по форме, то есть число столбцов матрицы $\mathbf{A}$ должно быть равно числу строк матрицы $\mathbf{B}$. Тогда произведение $\mathbf{C}$ двух матриц $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ и $\mathbf{B}$ $(n \times p)$ определяется в виде

$$\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right].$$

Для матриц $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ и $\mathbf{B}$ $(m \times n)$ существует как произведение $\mathbf{AB}$, так и произведение $\mathbf{BA}$, но в общем случае произведение не коммутативно, даже если $m = n$. Однако, если равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ имеет место, то говорят, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ *коммутативны*.

Из определения операции умножения видно, что умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, как справа, так и слева.

Умножение на скаляр k матрицы $\mathbf{A}$ (справа или слева) означает, что на величину k умножается каждый элемент матрицы $\mathbf{A}$.

Произведение двух транспонированных матриц $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ равно транспонированному произведению исходных матриц, взятому в обратном порядке:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \left(\mathbf{AB}\right)^T, \tag{5.1}$$

в чем нетрудно убедиться, транспонируя матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Умножение справа матрицы $\mathbf{A}$ на диагональную матрицу $\mathbf{D}$ равносильно операции со столбцами $\mathbf{A}$. Умножение слева матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{D}$ – это операция со строками $\mathbf{A}$. Очевидно, что умножение слева или справа на единичную матрицу $\mathbf{E}$ не меняет исходной квадратной матрицы: $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$, то есть матрица $\mathbf{E}$ является единичным элементом в некоммутативной полугруппе квадратных матриц по операции умножения.

Правило умножения блочных матриц, когда элементами матриц-сомножителей являются некоторые подматрицы, такое же, как и обычных матриц, важно только, чтобы подматрицы, фигурирующие в соответствующих произведениях, были согласованы по форме.

Дифференцирование и интегрирование матрицы – это соответствующие операции над ее элементами. Дифференцирование произведения матриц осуществляется так же, как и дифференцирование скалярных функций при условии сохранения первоначального порядка следования сомножителей.

5.1.3 Определители, миноры и алгебраические дополнения

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Определитель квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размерностью $\left(n \times n\right)$ и обозначаемый $\left|\mathbf{A}\right|$ равен алгебраической сумме всех возможных произведений n элементов. Каждое произведение содержит только один элемент из каждой строки и столбца и имеет знак «+» или «–» в зависимости от того, четное или нечетное число инверсий (то есть расположений большего числа перед меньшим) вторых индексов содержится в произведении, если расположить элементы в порядке возрастания первых индексов.

Нетрудно установить следующие свойства определителей.

1. Определитель равен нулю, если равны нулю все элементы какой-либо строки (столбца) либо если равны или пропорциональны соответствующие элементы произвольных двух строк (столбцов).

2. Величина определителя остается постоянной по модулю при перестановке строк (столбцов).
3. Знак определителя меняется на противоположный при перемене местами двух любых строк (столбцов).
4. Значение определителя умножается на постоянную k, если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на k.
5. Значение определителя не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить умноженные на k соответствующие элементы другой строки (столбца).

Если в определителе $|\mathbf{A}|$ вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то оставшиеся $n-1$ строк и столбцов образуют определитель M_{ij}, называемый *минором* элемента a_{ij}. Миноры, у которых диагональные элементы являются диагональными элементами $|\mathbf{A}|$, называются *главными*.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} – это минор элемента a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть алгебраическое дополнение $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Используя алгебраические дополнения, можно по формуле Лапласа вычислить определитель матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}&|\mathbf{A}|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij},\ j=1,2,...,n \ \text{(разложение по элементам столбца)},\\&|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij},\ i=1,2,...,n \ \text{(разложение по элементам строки)}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Если заменить элементы i-й строки (столбца) на соответствующие элементы k-й строки (столбца), то согласно свойству первому определитель обратится в нуль. Следовательно, используя разложения (5.2), получим:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{kj}C_{ij}=0\ (k\neq i),\\&\sum_{j=1}^{n}a_{jk}C_{ji}=0\ (k\neq i).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Объединяя (5.2) и (5.3), получим:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{kj}C_{ij}=\delta_{ik}\cdot|\mathbf{A}|,\\&\sum_{j=1}^{n}a_{jk}C_{ji}=\delta_{ik}\cdot|\mathbf{A}|,\end{aligned}\tag{5.4}$$

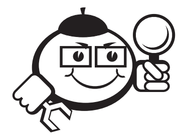
где δ_{ik} – символ Кронекера, равный единице при одинаковых индексах и нулю при различных индексах.

5.1.4 Присоединенная и обратная матрицы

Если $\mathbf{A}$ – квадратная матрица, а C_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, то присоединенной для $\mathbf{A}$ называется матрица, образованная из алгебраических дополнений C_{ij}, то есть

$$\operatorname{Adj}\mathbf{A} = \left[C_{ji} \right]. \tag{5.5}$$

Таким образом, присоединенная матрица (Adj – по первым буквам английского слова *adjust* – приспосабливать, прилаживать, присоединять) является транспонированной для матрицы, образованной заменой элементов a_{ij} их алгебраическими дополнениями.



Пример 5.1

Получить присоединенную матрицу для

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения C_{ij} элементов матрицы

$$C_{11} = 2,\ C_{12} = -2,\ C_{13} = 2,$$
$$C_{21} = -1, C_{22} = -2,\ C_{23} = -1,$$
$$C_{31} = 3,\ C_{32} = -6,\ C_{33} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу согласно (5.5):

$$\operatorname{Adj}\mathbf{A} = \left[C_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Из соотношений (5.4) следует, что

$$\left[a_{ij} \right] \cdot \left[C_{ij} \right]^T = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

Учитывая определение (5.5) и умножив правую и левую часть последнего выражения на $1/|\mathbf{A}|$ (при условии $|\mathbf{A}| \neq 0$), получим:

$$\mathbf{A}\frac{\operatorname{Adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\mathbf{E}. \tag{5.6}$$

Из выражения (5.6) естественным образом определяется обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{Adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|},\quad |\mathbf{A}|\neq 0. \tag{5.7}$$

Таким образом,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}. \tag{5.8}$$

Нетрудно показать, что матрица и обратная ей коммутативны, то есть

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}. \tag{5.9}$$

Если $|\mathbf{A}|=0$, то матрица $\mathbf{A}$ называется *особенной* или *вырожденной*. Если $|\mathbf{A}|\neq 0$, то матрица называется *неособенной* (*невырожденной*). Таким образом, обратные матрицы существуют только для неособенных матриц.

Из выражения (5.7) следует, что обратная матрица для каждой неособенной матрицы является единственной и, следовательно, множество неособенных квадратных матриц по операции умножения образует некоммутативную группу.

Произведение обратных матриц подчиняется тем же правилам перестановки, что и произведение транспонированных матриц, то есть

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}.$$

Производная от обратной матрицы вычисляется по формуле:

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt}=-\mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t),$$

которую нетрудно получить, если рассмотреть соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\right)=\frac{d\mathbf{E}}{dt}=[0].$$

Некоторые специальные обратные матрицы носят отдельные названия.

Инволютивная матрица – это такая матрица, которая совпадает со своей обратной, то есть $\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Ортогональная матрица – это матрица, для которой выполняется соотношение $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{T}$.

Унитарная матрица удовлетворяет соотношению $\mathbf{A}=\left(\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{T}\right)^{-1}$.

5.1.5 Векторы и их свойства

Под вектором будем понимать матрицу размерностью $(n \times 1)$ или вектор-столбец.

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется формулой

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left(\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{y} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n = \mathbf{y}^T \mathbf{x}^* . \tag{5.10}$$

В случае вещественных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выражение (5.10) приобретает более знакомую форму:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle .$$

Ясно, что понятие скалярного произведения существует только для векторов одинаковой размерности.

Сумма и разность векторов, а также умножение вектора на скаляр следуют из соответствующих операций над матрицами.

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Нормой вектора называют квадратный корень из скалярного произведения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$, то есть

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} . \tag{5.11}$$

Можно показать, что из соотношения (5.11) вытекают два важных неравенства:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ (неравенство треугольника),}$$

$$\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\right| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \text{ (неравенство Шварца).}$$

Угол θ между двумя векторами определяется формулой

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Вектор $\hat{\mathbf{x}}$ называют *нормированным*, если $\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

Два вектора будут *ортонормированы*, если они ортогональны и нормированы.

Векторы $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots m\}$ с компонентами $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ будут *линейно независимы*, если не существует таких постоянных $k_i, \ldots, k_m$ (хоть одна из k_i не должна равняться нулю), что

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + k_n \mathbf{x}_n = 0 . \tag{5.12}$$

Основываясь на понятии линейной независимости векторов, дадим еще пару определений.

Вырожденность или *дефект* матрицы определяется так. Если строки (столбцы) особенной матрицы линейно связаны *одним* соотношением, то вырожденность матрицы *простая* (дефект равен единице). Если таких соотношений q, то матрица имеет вырождение кратности q (или дефект равен q).

Рангом r матрицы $\mathbf{A}$ является наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Если размерность матрицы $(n \times n)$, то $r = n - q$.

Существует правило вырожденности Сильвестра, которое гласит, что дефект произведения двух матриц не меньше дефекта каждой из них и не выше суммы дефектов матриц.

Условие линейной независимости векторов можно сформулировать на основе ранга матрицы, образованной из элементов m векторов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Если ранг матрицы $\mathbf{A}$, образованной этими m векторами $(m \le n)$, меньше, чем m, то есть $r < m$, то существует r линейно независимых векторов. Остальные $m - r$ векторов выражаются в виде линейной комбинации этих r векторов. Таким образом, необходимым и достаточным условием линейной независимости этих m векторов является равенство ранга матрицы $\mathbf{A}$ величине m.

Определение ранга матрицы не всегда удобно, поэтому чаще линейную независимость определяют, пользуясь *определителем Грама*. Определитель Грама строится в предположении, что выполняется соотношение (5.12). Умножим уравнение (5.12) скалярно на $\mathbf{x}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots m\}$ и получим, таким образом, систему уравнений:

$$\begin{aligned} &k_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle + k_2\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle + \dots + k_m\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m\rangle = 0, \\ &k_1\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle + k_2\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle + \dots + k_m\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m\rangle = 0, \\ &\dots \\ &k_1\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1\rangle + k_2\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2\rangle + \dots + k_m\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m\rangle = 0. \end{aligned}$$

Эта система однородных уравнений имеет нетривиальное решение для k_i (то есть выполняется условие (5.12) и векторы $\mathbf{x}_i$ являются линейно зависимыми) только в том случае, если определитель матрицы с элементами $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ равен нулю. Этот определитель называется определителем Грама и равен

$$G = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_2, x_m \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \langle x_m, x_2 \rangle & \ldots & \langle x_m, x_m \rangle \end{vmatrix},$$

или, с учетом обозначения (5.13),

$$G = \left| \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right|, \tag{5.14}$$

Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда определитель Грама (5.14) для такой системы отличен от нуля.

5.2 Собственные значения и собственные векторы

5.2.1 Характеристическое уравнение

Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{5.15}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица размерностью $(n \times n)$.

Интерес представляет вопрос о том, существует ли такой вектор $\mathbf{x}$, который в результате преобразования (5.15) переходит в вектор $\mathbf{y}$, имеющий такое же направление, как и вектор $\mathbf{x}$. При положительном ответе на этот вопрос должно выполняться уравнение

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{5.16}$$

где λ – некоторый скаляр, являющийся коэффициентом пропорциональности.

Задача определения значений λ_i и соответствующих им векторов $\mathbf{x}_i$, удовлетворяющих уравнению (5.16), известна как задача *о собственных значениях* (характеристических числах). Векторы $\mathbf{x}_i$, являющиеся решением уравнения (5.16), называются собственными или характеристическими векторами, соответствующими собственным значениям λ_i.

Векторно-матричное уравнение (5.16) можно переписать в таком виде:

$$\left[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} \right] \mathbf{x} = 0, \tag{5.17}$$

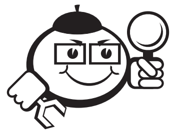
где $\mathbf{E}$ – соответствующая единичная матрица. Система однородных уравнений (5.17) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю:

$$\left|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}\right| = 0, \tag{5.18}$$

Развернув определитель в левой части уравнения (5.18), получим многочлен *n*-й степени относительно λ:

$$D(\lambda) = \left|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}\right| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{5.19}$$

Уравнение (5.19) является характеристическим уравнением матрицы $\mathbf{A}$, а его корни суть собственные значения (характеристические числа) матрицы $\mathbf{A}$.



Пример 5.2

Составить характеристическое уравнение и найти собственные значения матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Составим характеристическую матрицу:

$$[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}.$$

Приравняв нулю определитель характеристической матрицы, получим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Собственные числа равны $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

Вернемся к уравнению (5.19). По теореме Виета коэффициент a_n в этом уравнении равен произведению собственных чисел, то есть

$$a_n = (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n. \tag{5.20}$$

С другой стороны, положив $\lambda = 0$ в $D(\lambda)$, получим:

$$D(0) = \left|-\mathbf{A}\right| = a_n,$$

откуда следует, что $a_n = (-1)^n \left|\mathbf{A}\right|$. Из этого выражения и из формулы (5.20) следует, что произведение собственных чисел равно определителю матрицы $\mathbf{A}$:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \left|\mathbf{A}\right|.$$

Коэффициент a_1 полинома $D(\lambda)$ по формуле Виета равен

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n),$$

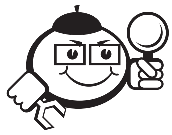
а раскрывая определитель $\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|$, увидим, что коэффициент при λ^{n-1} имеет вид $-\left(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}\right)$, где a_{kk} – диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, *сумма диагональных элементов квадратной матрицы равна сумме ее собственных значений*:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\operatorname{Tr}\mathbf{A}\,.$$

Сумма диагональных элементов матрицы носит название следа матрицы и обозначается $\operatorname{Tr}\mathbf{A}$ (первые буквы англ. *trace* – след).

Введя обозначение $T_k=\operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}^k\right)$, можно записать полезные формулы, связывающие коэффициенты a_i характеристического уравнения с T_k рекуррентными соотношениями, известными как *формулы Бохера*:

$$\begin{aligned}
&a_1=-T_1,\\
&a_2=-\frac{1}{2}\left(a_1T_1+T_2\right),\\
&a_3=-\frac{1}{3}\left(a_2T_1+a_1T_2+T_3\right),\\
&...\\
&a_n=-\frac{1}{n}\left(a_{n-1}T_1+a_{n-2}T_2+...+T_n\right).
\end{aligned}\tag{5.21}$$



Пример 5.3

Составить характеристическое уравнение и найти собственные числа матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&1&3\\3&1&-1\end{bmatrix}.$$

Согласно формуле (5.21), $a_1=-T_1=-2$. Произведение $\mathbf{AA}$ дает

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}5&4&4\\3&2&-2\\1&3&7\end{bmatrix},$$

откуда находим $T_2=14$ и $a_2=-\frac{1}{2}\left(a_1T_1+T_2\right)=-5$. Далее находим $\mathbf{AAA}$:

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 14 & 13 & 13 \\ -4 & 3 & 11 \\ 17 & 11 & 3 \end{bmatrix},$$

$T_3 = 20$, а $a_3 = -\frac{1}{3}\left(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3\right) = 6$.

Характеристическое уравнение, таким образом, имеет вид

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

а собственные числа $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$.

. . . .

5.2.2 Модальная матрица

Для каждого из n различных собственных чисел λ_i матрицы $\mathbf{A}$ можно получить вектор решения $\mathbf{x}_i$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\left[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\right]\mathbf{x}_i = 0,\ (i = 1, 2, ..., n). \qquad (5.22)$$

Так как уравнение (5.22) однородное, его решениями будут также векторы $k\mathbf{x}_i$, где k – произвольный скаляр. То есть уравнение (5.22) однозначно задает лишь направление каждого из $\mathbf{x}_i$. Из вектор-столбцов $\mathbf{x}_i$ или пропорциональных им образуем матрицу, которую часто называют *модальной матрицей*. При *различных* собственных числах столбцы модальной матрицы можно полагать равными или пропорциональными любому ненулевому столбцу матрицы $\mathrm{Adj}\left[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$. Поскольку столбцы присоединенной матрицы линейно зависимы для каждого значения λ_i, то выбор конкретного λ_i определяет только один столбец модальной матрицы.

Таким образом, при различных собственных числах n столбцов модальной матрицы линейно независимы.

. . . . Пример 5.4 . . . .

Найти собственные векторы и составить модальную матрицу для матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица имеет вид

$$\left[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ 2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -1 & \lambda+1\end{bmatrix},$$

а присоединенная матрица равна

$$\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]=\begin{bmatrix}\lambda^2-4 & \lambda+2 & \lambda+2\\ -2\lambda+7 & \lambda^2-\lambda-5 & 3\lambda-8\\ 3\lambda-5 & \lambda+1 & \lambda^2-3\lambda+4\end{bmatrix}.$$

Подстановка в полученную матрицу $\lambda_1=1$ дает $\begin{bmatrix}-3 & 3 & 3\\ 5 & -5 & -5\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

При $\lambda_2=-2$ присоединенная матрица равна $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 14 & 1 & -14\\ -14 & -1 & 14\end{bmatrix}$.

При $\lambda_3=3$ присоединенная матрица равна $\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}$.

Взяв любой ненулевой столбец (или пропорциональный ему) из каждой полученной матрицы, составим модальную матрицу:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\ -5 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}.$$

Столбцы полученной модальной матрицы являются линейно независимыми.

. . . .

В случае кратных корней уравнения (5.19) определение независимых собственных векторов (столбцов модальной матрицы) не очевидно. Дело здесь в том, что не существует однозначного соответствия между порядком кратности корня характеристического уравнения и дефектом соответствующей этому корню характеристической матрицы $\left[\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]$.

Если кратность некоторого корня, например, λ_i равна p, то дефект q характеристической матрицы $\left[\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]$ может быть в пределах $1\le q\le p$, и в этом случае можно найти только q линейно независимых собственных векторов, удовлетворяющих уравнению (5.22) для данного собственного числа λ_i.

Если вырожденность полная $q = p$ (для симметрической матрицы это выполняется всегда), то можно найти ровно p линейно независимых собственных векторов, соответствующих корню λ_i кратности p. Эти p различных модальных столбцов можно получить из ненулевых столбцов матрицы:

$$\frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_i}. \tag{5.23}$$

Пример 5.5

Составить модальную матрицу для матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица равна

$$\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$ имеет два корня $\lambda = 1$ и один корень $\lambda = 3$. Подстановка в характеристическую матрицу $\lambda = 1$ дает только один линейно независимый столбец, то есть ранг характеристической матрицы равен единице, а её дефект – двум (дефект равен размерности матрицы минус её ранг). Поскольку характеристическая матрица полностью вырождена (дефект совпадает с кратностью корня), то для каждого из кратных корней существует линейно независимый вектор.

Присоединенная матрица равна

$$\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} (\lambda-2)(\lambda-1) & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & (\lambda-2)(\lambda-1) & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{bmatrix},$$

а её производная имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} 2\lambda - 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2\lambda - 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 4 \end{bmatrix}.$$

После подстановки в последнюю матрицу $\lambda = 1$ любые два линейно независимых столбца дадут два столбца модальной матрицы. Таким образом, получаем два линейно независимых собственных вектора, соответствующих собственному числу $\lambda = 1$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T.$$

Собственный вектор, соответствующий $\lambda = 3$, получим из любого ненулевого столбца присоединенной матрицы $\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$ при $\lambda = 3$:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Окончательно модальная матрица равна $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

. . . .

Если вырожденность простая $q = 1$, то для корня λ_i кратности p можно найти только один собственный вектор, соответствующий данному λ_i. Этот вектор, как и в случае некратных корней, может быть выбран пропорциональным любому ненулевому столбцу матрицы $\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$.

Если вырожденность характеристической матрицы $1 < q < p$, то q модальных столбцов могут быть получены из различных ненулевых столбцов матрицы (5.23) при замене p на q.

Как определять остальные $p - q$ модальных столбцов (они будут линейно зависимы от q найденных векторов $\mathbf{x}_i$), будет разобрано в параграфе, посвященном матричным преобразованиям.

5.2.3 Симметрическая матрица

Случаи, когда матрица $\mathbf{A}$ является симметрической, встречаются в теории систем довольно часто. Достаточно упомянуть, что симметрическими матрицами описывают системы, состоящие из *RC*-элементов, то есть из емкостей и сопротивлений. Поэтому собственные числа и собственные векторы симметрических матриц требуют особого рассмотрения.

Важным свойством действительной симметрической матрицы является то, что ее собственные значения являются вещественными числами.

Следующее свойство симметрических матриц заключается в том, что их собственные векторы попарно ортогональны.

Третье, уже упомянутое, свойство симметрической матрицы касается кратных собственных значений. Собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i кратности p, линейно независимы.

5.3 Линейные преобразования

5.3.1 Элементарные действия над матрицами

Рассмотрим определённые действия с элементами матриц.

1. Перестановка произвольных двух строк (столбцов).
2. Многократное прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца).
3. Умножение строки (столбца) на отличную от нуля постоянную величину.

Эти три элементарные операции равносильны умножению данной квадратной матрицы слева или справа на некоторую неособенную матрицу, причем такую, чтобы ранг полученной матрицы равнялся бы рангу исходной матрицы.

Операция 1. Эта операция не что иное, как перенумерация строк (столбцов) и, конечно, не меняет ранга матрицы. Пусть $\mathbf{Q}_1$ – единичная матрица размерности $(n \times n)$ с переставленными i-й и j-й строками. Тогда умножение произвольной $(n \times n)$ матрицы $\mathbf{A}$ на $\mathbf{Q}_1$ слева приводит к матрице с переставленными i-й и j-й строками. Умножение $\mathbf{A}$ справа на $\mathbf{Q}_1$ приводит к матрице с переставленными i-й и j-й столбцами.

Операция 2. Сложение с i-й строкой k раз j-й строки обеспечивается умножением на матрицу $\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{Q}_2$ слева $\mathbf{Q}_2\mathbf{A}$, где $\mathbf{Q}_2$ – единичная матрица с элементом k в i-й строке и j-м столбце $(i \neq j)$. Такая же операция со столбцами будет обеспечена умножением $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{Q}_2$ справа $\mathbf{AQ}_2$.

Операция 3. Умножение i-й строки на постоянную $k \neq 0$ произойдет, если взять произведение $\mathbf{Q}_3\mathbf{A}$, где $\mathbf{Q}_3$ – единичная матрица с замененным на k i-м элементом на главной диагонали. Произведение $\mathbf{AQ}_3$ даст аналогичную операцию с i-м столбцом.

Таким образом, любая последовательность элементарных действий над строками матрицы $\mathbf{A}$ может быть выполнена в результате умножения слева на $\mathbf{A}$ соответствующей последовательности неособенных матриц $\mathbf{P}_i$ или, что то же самое, умножения слева на $\mathbf{A}$ неособенной матрицы $\mathbf{P} = \prod_i \mathbf{P}_i$ Аналогичные операции со столбцами $\mathbf{A}$ будут получены в результате умножения справа на $\mathbf{A}$ неособенной матрицы $\mathbf{Q}$. В результате мы получаем матрицу

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}, \tag{5.24}$$

имеющую ранг такой же, как и матрица $\mathbf{A}$.

5.3.2 Эквивалентные преобразования

Свойство матриц иметь одинаковый ранг является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, можно говорить об *эквивалентности* двух матриц, если у них одинаковый ранг (естественно, размерности таких матриц должны совпадать). Преобразование (5.24) не меняет ранга матрицы, то есть можно считать, что две матрицы эквивалентные, если одна из матриц получается в результате выполнения ряда элементарных операций над другой матрицей. Преобразование (5.24) является, таким образом, наиболее общим видом эквивалентных матричных преобразований. Отдельные преобразования получаются из взаимосвязи $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

С помощью эквивалентных преобразований можно произвольную матрицу $\mathbf{A}$ ранга $r>1$ привести к *нормальной* (или *канонической*) форме, т. е. к матрице одного из следующих видов:

$$\mathbf{E}_r, \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_r \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & 0 \end{array}\right].$$

Если неособенную матрицу $\mathbf{A}$ можно привести к единичной путем операций над строками этой матрицы, то в преобразовании (5.24) $\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{Q}=\mathbf{E}$, и по сути это представляет собой другой метод нахождения обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Если в общем случае возможно приведение матрицы $\mathbf{A}$ к единичной путем ряда элементарных операций, то

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PAQQ}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{EQ}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}.$$

Последнее соотношение показывает, что любая неособенная матрица может быть представлена в виде произведения элементарных матриц.

Рассмотрим некоторые виды преобразований.

Преобразование подобия получим, если в выражении (5.24) $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$, то есть

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}. \tag{5.25}$$

Важным свойством преобразования подобия является инвариантность собственных чисел к такому преобразованию.

Ортогональное преобразование имеет место, если в преобразовании подобия задать дополнительное условие $\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}^{-1}$.

Ортогональное преобразование сохраняет неизменными нормы векторов и углы между ними.

Конгруэнтное преобразование задается формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}, \tag{5.26}$$

где $\mathbf{Q}$ – неособенная матрица.

Конгруэнтное преобразование, согласно соотношению (5.26), состоит из пар элементарных операций, причем каждая из пар является одним и тем же элементарным преобразованием последовательно строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

5.3.3 Диагонализация матриц

Часто возможен в различных задачах переход к такой системе координат, в которой линейное преобразование (5.15) описывается диагональной матрицей. Это очень удобно, так как в этом случае уравнения для компонент векторов оказываются несвязанными друг с другом. Подобная система координат называется нормальной системой, а координаты в таком базисе – *нормальными координатами* системы. С помощью различных преобразований можно привести матрицу к диагональному виду.

Конгруэнтное преобразование. С помощью конгруэнтного преобразования действительная симметрическая матрица $\mathbf{A}$ ранга r может быть приведена к каноническому виду

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{E}_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Целое число p называется *индексом* матрицы, а целое число $s = p - (r - p) = 2p - r$ – *сигнатурой* матрицы.

Таким же конгруэнтным преобразованием комплексная симметрическая матрица ранга r может быть приведена к канонической форме

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Преобразование подобия. В преобразовании подобия используется модальная матрица $\mathbf{M}$. В тех случаях, когда матрица А имеет n различных собственных значений либо когда при кратных корнях матрица $[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ полностью вырождена (в этих случаях матрица $\mathbf{M}$ имеет n линейно независимых модальных столбцов) преобразование $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ приводит к диагональной матрице $\mathbf{\Lambda}$. Это нетрудно показать, вернувшись к уравнениям (5.22) для собственных векторов $\mathbf{x}_i$

$$\left[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}\right]\mathbf{x}_i = 0 .$$

Эти уравнения можно объединить для всех $i = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & ... & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & ... & \lambda_n x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & ... & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{bmatrix}$$

или в сокращенной матричной форме

$$\mathbf{M\Lambda} = \mathbf{AM} , \tag{5.27}$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\left[\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n\right]$ – диагональная матрица, составленная из собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Поскольку модальная матрица M имеет *n* линейно независимых столбцов, она является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}$. Умножив на $\mathbf{M}^{-1}$ слева уравнение (5.27), получим:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}.$$

Таким образом, преобразование подобия позволяет перейти при линейно независимых собственных векторах к диагональной матрице.

Применение такого преобразования подобия всегда возможно для действительной симметрической матрицы. Так как собственные векторы действительной симметрической матрицы (точно так же, как и эрмитовой) ортогональны, то всегда существует такая ортогональная матрица, что

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \mathrm{diag}\left[\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n\right] = \mathbf{\Lambda} .$$

Пример 5.6

Привести матрицу $\mathbf{A}$ к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Модальная матрица была найдена в примере 5.5

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица равна

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 22 & 2 & -28 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

а произведение $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ приводит к диагональной матрице

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

. . . .

5.3.4 Приведение к канонической форме Жордана

Несимметрические матрицы $(n \times n)$ с кратными собственными числами могут в общем случае содержать меньше, чем *n* линейно независимых собственных векторов, определяемых уравнениями (5.22). Однако можно показать, что в этом случае произвольная квадратная матрица $\mathbf{A}$ с помощью преобразования подобия может быть приведена к *канонической матрице Жордана*, имеющей следующие свойства:

- диагональные элементы этой матрицы являются собственными числами;
- все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю;
- если соседние элементы на главной диагонали одинаковы, то некоторые элементы, расположенные непосредственно справа от главной диагонали, равны единице;
- остальные элементы равны нулю.

Типичная жорданова форма имеет вид:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc:c:cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]. \tag{5.28}$$

«Единицы» в жордановых матрицах встречаются в блоках вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Они называются клетками Жордана. Количество клеток Жордана, связанных с собственным числом λ_i, равно количеству линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_i, то есть дефекту характеристической матрицы $\left[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$. Но определить порядки клеток Жордана – задача чрезвычайно трудная, несмотря на то, что число единиц, связанных с конкретным собственным числом λ_i, вполне определено и равно кратности λ_i минус дефект $\left[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$. Поэтому совершенно непонятно, получится ли в результате преобразования $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ матрица вида (5.28) или, например, матрица

$$\mathbf{J}_1 = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]. \tag{5.29}$$

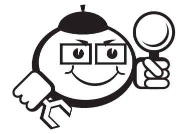
И в той и в другой матрице по две клетки Жордана, связанные с собственным числом λ_i и в обеих матрицах по две единицы в этих клетках, но в матрице (5.28) порядки клеток 3 и 1, а в матрице (5.29) обе клетки порядка 2.

В случае полной вырожденности (дефект $\left[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$ равен кратности корня λ_i) в клетке Жордана не будет ни одной единицы. В случае простой вырожденности (дефект $\left[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$ равен единице) все элементы, непосредственно лежащие справа от главной диагонали с λ_i, будут равны единице. В промежуточных случаях для определения $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ можно довольствоваться методом проб и ошибок исходя из равенства $\mathbf{MJ} = \mathbf{AM}$.

Обозначим модальные столбцы через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$. Тогда клетка Жордана порядка *m*, связанная с λ_i, существует лишь в том случае, если *m* векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_i \mathbf{x}_1,\\
&\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_i \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1,\\
&\dots\\
&\mathbf{A}\mathbf{x}_m = \lambda_i \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m-1}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Уравнения (5.30) применимы для любой клетки Жордана. Модальные столбцы можно определить из этих уравнений, последовательно их решая, начиная с первого уравнения.



Пример 5.7

Привести к канонической форме матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица и присоединенная к ней равны

$$\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 1 & \lambda+3 \end{bmatrix}, \ \mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 4 \\ -1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет два корня $\lambda = 1$. Подстановка этого числа в характеристическую матрицу дает единственный собственный вектор, соответствующий $\lambda = 1$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Поскольку ранг характеристической матрицы при $\lambda = 1$ равен единице, то её дефект также равен единице и каноническое преобразование приведет к клетке Жордана:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Второй собственный вектор найдем, согласно выражению (5.30), из уравнения

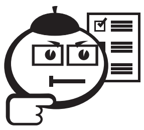
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1.$$

Расписав уравнение по компонентам, получим:

$$\begin{aligned}
-x_{12} + 4x_{22} &= x_{12} + 2,\\
-x_{12} + 3x_{22} &= x_{22} + 1.
\end{aligned}$$

Поскольку полученные уравнения линейно зависимые, одну из компонент вектора $\mathbf{x}_2$ можно выбрать произвольно, например, положить $x_{12} = 1$. Тогда получим $x_{22} = 1$, и модальная матрица равна

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что преобразование подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ приведет к канонической матрице Жордана $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.4 Матричные функции

5.4.1 Матричные ряды

Краткая запись произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}$ может быть сделана в форме $\mathbf{A}^k$, где k – число множителей, входящих в произведение. Как и возведение в степень скаляров, умножение степеней матриц подчиняется обычным правилам: $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$, $\left(\mathbf{A}^k\right)^m = \mathbf{A}^{km}$, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$ где $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица порядка n.

Эти же правила справедливы и при возведении матрицы в отрицательную степень при условии, что матрица неособенная, т. е. существует обратная матрица.

Можно возводить матрицы и в дробную степень. Так, если $\mathbf{A}^m = \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица, то $\mathbf{A}$ является корнем m-й степени из $\mathbf{B}$: $\mathbf{A} = \sqrt[m]{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{1/m}$.

В отличие от скаляров, у которых имеется ровно m корней m-й степени, не существует общего правила определения, каким количеством корней m-й степени обладает матрица $\mathbf{B}$. Это число корней зависит от конкретного вида матрицы.

Возьмем произвольный многочлен m-го порядка от скалярной переменной x:

$$N\left(x\right) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + ... + p_0 . \qquad (5.31)$$

Заменив в этом выражении x на квадратную матрицу $\mathbf{A}$ порядка n, получим соответствующий матричный многочлен:

$$N(\mathbf{A}) = p_m\mathbf{A}^m + p_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + p_0\mathbf{E}_n. \qquad (5.32)$$

Многочлен (5.31) можно, как известно, представить в виде произведения:

$$N(x) = p_m(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_m),$$

где $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,m)$ – корни многочлена, которые предполагаются различными.

Подобным же образом можно представить и матричный многочлен:

$$N(\mathbf{A}) = p_m(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}_n)(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}_n)\ldots(\mathbf{A}-\lambda_m\mathbf{E}_n). \qquad (5.33)$$

Обобщением ряда (5.31) будет бесконечный степенной ряд:

$$S(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k.$$

Заменив переменную x в последнем выражении на квадратную матрицу $\mathbf{A}$, получим бесконечный ряд по $\mathbf{A}$:

$$S(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{E}_n + a_1\mathbf{A} + \ldots + a_k\mathbf{A}^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\mathbf{A}^k. \qquad (5.34)$$

Вопросы сходимости матричных рядов затрагивать не будем, достаточно знать только, что ряд (5.34) сходится, если сходятся соответствующие скалярные ряды $S(\lambda_i)$, $(i=1,2,\ldots,n)$, где λ_i – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

5.4.2 Функции от матриц

Разложение известных скалярных функций в степенные ряды дает основание для определения этих функций от матриц.

Матричная экспонента:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \exp\mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}, \\ e^{-\mathbf{A}} &= \exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{E} - \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathbf{A}^k}{k!}. \end{aligned} \qquad (5.35)$$

Ряды (5.35) сходятся равномерно и абсолютно. Поскольку произведение матриц в общем случае некоммутативно, равенство $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ выполняется, только если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутативны $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Последнее условие выполняется, если $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ или $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. В частности, при $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ имеем

$$e^{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{[0]} = \mathbf{E},$$

откуда ясно, что матрица $e^{-\mathbf{A}}$ является обратной к матрице $e^{\mathbf{A}}$.

Если $\mathbf{A}$ не зависит от времени, то матричная экспонента $e^{\mathbf{A}t}$ определяется подобно уравнению (5.35) в форме бесконечного ряда:

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp\mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\left(\mathbf{A}t\right)^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^k}{k!}. \qquad (5.36)$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно для всех значений времени t. Производная по t от матричной экспоненты $e^{\mathbf{A}t}$ находится почленным дифференцированием ряда (5.36):

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \ldots = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}. \qquad (5.37)$$

Обобщая соотношение (5.37) для k-й производной с учетом обозначения $\frac{d}{dt} = p$ получим:

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = p^k e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^k. \qquad (5.38)$$

Если $N\left(p\right)$ – многочлен от оператора дифференцирования p, то

$$N\left(p\right)e^{\mathbf{A}t} = N\left(\mathbf{A}\right)e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}N\left(\mathbf{A}\right). \qquad (5.39)$$

Интеграл от матричной экспоненты $e^{\mathbf{A}t}$ можно найти путем интегрирования бесконечного ряда (5.36)

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}dt = \int_0^t \mathbf{E}dt + \int_0^t \mathbf{A}tdt + \int_0^t \frac{\left(\mathbf{A}t\right)^2}{2!}dt + \ldots = \mathbf{E}t + \frac{\mathbf{A}t^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^2 t^3}{3!} + \ldots,$$

откуда

$$\mathbf{A}\int_0^t e^{\mathbf{A}t}dt = e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E}.$$

Из последнего соотношения, предполагая, что матрица $\mathbf{A}$ – неособенная, получим:

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}dt = \mathbf{A}^{-1}\left(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E}\right) = \left(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E}\right)\mathbf{A}^{-1}. \qquad (5.40)$$

Матричный синус:

$$\sin\mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - \ldots = \frac{\exp\left(\mathbf{A}j\right) - \exp\left(-\mathbf{A}j\right)}{2j}. \qquad (5.41)$$

Матричный косинус:

$$\cos\mathbf{A} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - \ldots = \frac{\exp\left(\mathbf{A}j\right) + \exp\left(-\mathbf{A}j\right)}{2}. \qquad (5.42)$$

Матричная комплексная экспонента в формулах (5.41) и (5.42) определяется уравнением (5.35) при замене $\mathbf{A}$ на $j\mathbf{A}$:

$$\exp(j\mathbf{A}) = \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - \ldots\right) + j\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - \ldots\right) = \cos\mathbf{A} + j\sin\mathbf{A}\,. \quad (5.43)$$

Как легко видеть, формулы (5.41)–(5.43) являются матричными аналогами формул Эйлера.

Матричный гиперболический синус:

$$\operatorname{sh}\mathbf{A} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \ldots = \frac{\exp(\mathbf{A}) - \exp(-\mathbf{A})}{2}.$$

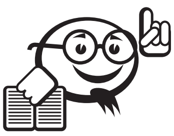
Матричный гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch}\mathbf{A} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} + \ldots = \frac{\exp(\mathbf{A}) + \exp(-\mathbf{A})}{2}.$$

Матричные тригонометрические тождества имеют соответствующие аналоги скалярных тригонометрических тождеств и выводятся с помощью вышеприведенных матричных соотношений.

5.4.3 Теорема Кэли – Гамильтона

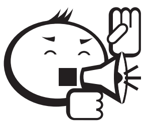
Эта теорема касается весьма важного и полезного свойства характеристического полинома $D(\lambda)$ и используется при нахождении различных функций от матрицы $\mathbf{A}$.



Теорема 5.1 (Кэли – Гамильтона). Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Другими словами, если в характеристическом уравнении

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

заменим λ матрицей $\mathbf{A}$, то получим тождество.



С помощью теоремы Кэли – Гамильтона можно понижать порядок многочленов, находить обратную матрицу, возводить матрицу в произвольную положительную целую степень, вычислять функции от матриц.

Действительно, решив матричное характеристическое уравнение $D(\mathbf{A}) = [0]$ относительно старшей степени матрицы $\mathbf{A}$, получим формулу для вычисления $\mathbf{A}^n$ через полином $(n-1)$-го порядка. Последовательно умножая правую и левую часть этой формулы на $\mathbf{A}$, имеем итерационную процедуру для возведения $\mathbf{A}$ в произвольную степень.

Решив то же уравнение $D(\mathbf{A}) = [0]$ относительно низшей степени матрицы $\mathbf{A}$ (то есть относительно единичной матрицы) и умножив правую и левую части на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, получим выражение для обратной матрицы через полином $(n-1)$-й степени от матрицы $\mathbf{A}$. В некоторых случаях этот метод удобнее, чем другие методы.

Пусть имеется матричный многочлен $N(\mathbf{A})$ степени большей, чем порядок матрицы. Разделив $N(\lambda)$ на характеристический полином $D(\lambda)$, получим:

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{D(\lambda)}, \qquad (5.44)$$

где $R(\lambda)$ – остаточный член порядка меньшего, чем $D(\lambda)$.

Тогда, умножив уравнение (5.44) на $D(\lambda)$, получим:

$$N(\lambda) = D(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda). \qquad (5.45)$$

Так как (согласно теореме Кэли – Гамильтона) $D(\mathbf{A}) = [0]$, то из выражения (5.45) получаем $N(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$ и, таким образом, полином любой степени может быть представлен полиномом $(n-1)$-й степени.

Вышеизложенное можно распространить не только на любую полиномиальную функцию от $\mathbf{A}$, но и на произвольную функцию $F(\mathbf{A})$, где предполагается аналитической функцией λ в некоторой области. При таком условии $F(\lambda)$ может быть в области аналитичности представлена рядом Тейлора. Поэтому функция $F(\mathbf{A})$ может быть записана в виде многочлена от $\mathbf{A}$ степени $(n-1)$. Действительно, если $Q(\lambda)$ – аналитическая функция в некоторой области, то

$$F(\lambda) = D(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda), \qquad (5.46)$$

где $D(\lambda)$ – характеристический полином $\mathbf{A}$, а $R(\lambda)$ – полином вида

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}. \qquad (5.47)$$

Коэффициенты α_i в уравнении (5.47) можно найти путем последовательной подстановки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в уравнение (5.46). Учитывая, что $D(\lambda_i) = 0$, получим систему уравнений:

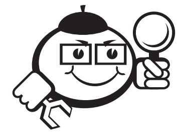
$$
\begin{aligned}
&F(\lambda_1)=R(\lambda_1),\\
&F(\lambda_2)=R(\lambda_2),\\
&\dots\\
&F(\lambda_n)=R(\lambda_n).
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

В этой системе n уравнений и n неизвестных. Следовательно, все α_i определяются однозначно. Нетрудно показать, что $Q(\lambda)$ является аналитической функцией в той же области, что и $F(\lambda)$, поэтому уравнение (5.46) справедливо для всех λ в области аналитичности $F(\lambda)$. Из этого следует, что если область аналитичности $F(\lambda)$ включает все собственные значения $\mathbf{A}$, то вместо переменной λ можно подставить $\mathbf{A}$. В результате из уравнения (5.46) получим:

$$F(\mathbf{A})=D(\mathbf{A})Q(\mathbf{A})+R(\mathbf{A}),$$

а так как согласно теореме Кэли – Гамильтона $D(\mathbf{A})=[0]$, то из последнего соотношения имеем:

$$F(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}). \tag{5.49}$$



Пример 5.8

Воспользовавшись теоремой Кэли – Гамильтона, вычислить матричную экспоненту $e^{\mathbf{A}t}$ для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 5.3:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2.$$

Поскольку матрица $\mathbf{A}$ является матрицей второго порядка, то по теореме Кэли – Гамильтона матричная экспонента может быть представлена полиномом первого порядка:

$$e^{\mathbf{A}t}=\alpha_0\mathbf{E}+\alpha_1\mathbf{A},$$

где коэффициенты α_0, α_1 определяются из системы уравнений (5.48), куда подставлена искомая функция и собственные числа матрицы $\mathbf{A}$:

$$
\begin{aligned}
F(\lambda_1)&=e^{\lambda_1 t}=e^{-t}=\alpha_0-\alpha_1,\\
F(\lambda_2)&=e^{\lambda_2 t}=e^{-2t}=\alpha_0-2\alpha_1.
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений, находим:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0&=2e^{-t}-e^{-2t},\\
\alpha_1&=e^{-t}-e^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Окончательно получаем искомую функцию:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Теперь что касается кратных собственных значений. Ясно, что если матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение λ_i кратности r, то подстановка λ_i в уравнение (5.48) даст лишь одно линейно независимое уравнение. Остальные $r-1$ уравнений для определения α_i находятся дифференцированием обеих частей уравнения (5.48). В этом случае для нахождения единственного решения для коэффициентов α_i полинома (5.47) нужно составить систему линейных уравнений вида

$$\left.\frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i}, \ (k = 1, 2, ..., r-1). \tag{5.50}$$

5.4.4 Теорема Сильвестра

Теорема разложения Сильвестра находит применение при отыскании матричных функций, представляющих в замкнутой форме степенные ряды матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 5.2 (Сильвестра). Пусть $N(\mathbf{A})$ – матричный многочлен от $\mathbf{A}$ (неважно, конечный или бесконечный) и квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет n различных собственных значений. Тогда имеет место формула

$$N(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} N(\lambda_k) Z_0(\lambda_k), \tag{5.51}$$

где $\mathbf{Z}_0(\lambda_i) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}$.

Пример 5.9

Вычислить функцию $e^{\mathbf{A}t}$ с помощью теоремы Сильвестра для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 5.8:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2 .$$

В соответствии с выражением (5.51) запишем:

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_1) = \mathbf{Z}_0(-1) = \frac{\mathbf{A} - (-2)\mathbf{E}}{-1 - (-2)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_2) = \mathbf{Z}_0(-2) = \frac{\mathbf{A} - (-1)\mathbf{E}}{-2 - (-1)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя найденные матрицы в формулу (5.51), получаем:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

что совпадает с примером 5.8.

Следует заметить, что $\mathbf{Z}_0(\lambda_k)$ в формуле (5.51) не зависят от вида полинома $N(\mathbf{A})$. Можно показать, что

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_k) = \left.\frac{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k}, \tag{5.52}$$

где $D(\lambda)$ – характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$.

С учетом соотношения (5.52) формула (5.51) примет вид

$$N(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} N(\lambda_k) \left.\frac{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_k}. \tag{5.53}$$

При наличии у $\mathbf{A}$ кратных собственных значений формула (5.53) нуждается в модификации. Можно показать, что составляющая $N(\mathbf{A})$, обусловленная собственным числом λ_i кратности *r*, равна:

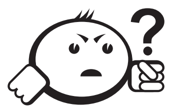
$$\frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}}\left[\frac{N(\lambda)\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\lambda-\lambda_j\right)^r}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_i}. \qquad (5.54)$$

Очевидно, что формула (5.54) годится и для простых корней $(r=1)$, поэтому окончательно

$$N(\mathbf{A})=\sum_i\frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}}\left[\frac{N(\lambda)\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}]}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\lambda-\lambda_j\right)^r}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_i}, \qquad (5.55)$$

где суммирование производится по всем различным корням, причем кратные корни входят в сумму (5.55) только один раз.

Уравнение (5.55) носит название *вырожденной формы* теоремы Сильвестра.



Контрольные вопросы по главе 5

1. Дайте определение матрицы.
2. Перечислите операции над матрицами.
3. Что такое определитель матрицы?
4. Чем отличается минор от алгебраического дополнения?
5. Назовите виды матриц.
6. Что такое дефект матрицы и как он связан с рангом?
7. Для каких матриц не существует обратных?
8. Что такое след матрицы?
9. Что такое ортогональные векторы?
10. Что такое собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы $\mathbf{A}$?
11. Как строится модальная матрица, соответствующая матрице $\mathbf{A}$?
12. Что такое эквивалентные матрицы?
13. Как выглядит преобразование подобия?
14. Любую ли матрицу можно привести к диагональному виду?

15. Существуют ли дробные степени от матриц?
16. Сформулируйте теорему Кэли – Гамильтона.
17. Для чего можно использовать теорему Кэли – Гамильтона?
18. Какие методы используют для вычисления матричных функций?

6 Векторно-матричные дифференциальные уравнения

6.1 Уравнения состояния

Альтернативной дифференциальному уравнению *n*-го порядка формой описания динамических систем является векторно-матричная форма. Векторно-матричная форма по сути является записью дифференциального уравнения *n*-го порядка в нормальной форме Коши с привлечением дополнительных переменных, называемых *переменными состояния.*

Определение переменных состояния уже давалось в подпараграфе 1.3.5, но нелишне вспомнить его ещё раз. Переменные состояния системы – это такие переменные, знание значений которых в некоторый начальный момент времени t_0 позволяет определить поведение системы в текущий момент времени $t > t_0$ (естественно, если известны входные воздействия системы на интервале (t_0, t)). Если ввести обозначения $\mathbf{r}(t)$ – входные переменные, $\mathbf{y}(t)$ – выходные переменные, $\mathbf{x}(t)$ – переменные состояния, то общее математическое описание динамической системы задается уравнениямиЖ

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \delta\big(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{r}(\tau)\big), \\ \mathbf{y}(t) &= \lambda\big(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{r}(\tau)\big). \end{aligned} \tag{6.1}$$

где δ и λ являются однозначными функциями, а τ – отрезок оси времени от t_0 до t.

Уравнения (6.1) называются *уравнениями состояния*. Часто собственно уравнением состояния называется первое из уравнений (6.1), а второе носит название уравнения выхода.

6.1.1 Каноническая форма фазовой переменной

Если динамическая система описывается или может быть описана обыкновенным линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка, то переход к нормальной форме Коши дает уравнения состояния такой системы. Переход от дифференциального уравнения к уравнениям состояния может быть произведен различными способами в соответствии с различным определением переменных состояния, важно только, чтобы переменные состояния системы подлежали измерению (контролю).

Например, перейти от дифференциального уравнения к уравнениям состояния можно следующим образом. Пусть (для простоты) в дифференциальном уравнении отсутствуют производные входного воздействия. Также, не снижая общности, можно положить коэффициент при старшей производной единице. Тогда дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = r. \tag{6.2}$$

Переменные состояния введем следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_1 = y, \\ &x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}, \\ &\ldots \\ &x_n = \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Подставив значения y и его производных в уравнение (6.2), найдем:

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + r.$$

Полученные уравнения запишем в нормальной форме Коши, то есть первые производные перенесем в левую часть, а все остальное – в правую. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\ldots \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n, \\ &\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + r, \\ &y = x_1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Уравнения состояния (6.3) удобнее записать в матричной форме:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r, \\ &y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Уравнения состояния (6.4) с матрицами вида (6.5) носят название *канонической формы фазовой переменной* (у некоторых авторов можно встретить название *стандартной формы*). Матрица **A** вида (6.5) называется *матрицей Фробениуса.*

Уравнения (6.4) естественным образом обобщаются на случай многомерной системы, имеющей m входов и p выходов. Тогда в общем виде $\mathbf{r}$ и $\mathbf{y}$ являются векторами и, кроме того, выход может напрямую зависеть от входа. С учетом этого общий вид уравнений состояния будет такой:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

где $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ – матрицы соответствующих размерностей с изменяющимися в общем случае во времени элементами.

Блок-схема системы, соответствующая уравнениям (6.6), приведена на рисунке 6.1.

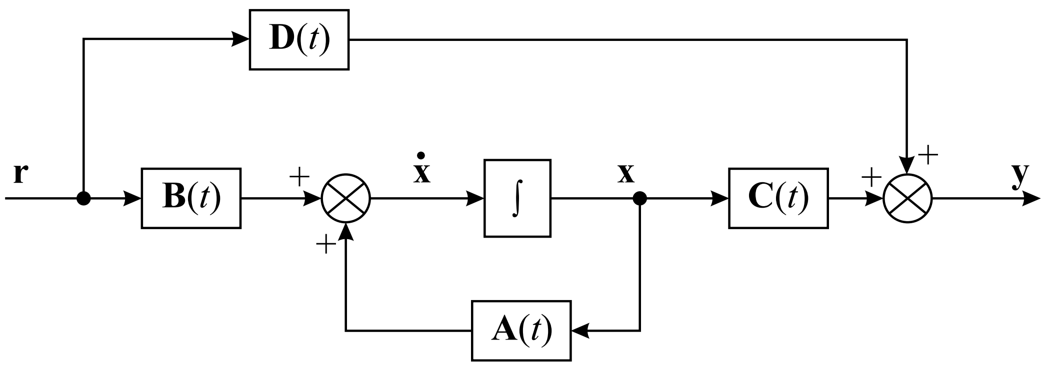


Рис. 6.1 – Блок-схема уравнений состояния

Для системы с постоянными параметрами матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ от времени не зависят и могут записываться просто как $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. В случае стационарных систем уравнения состояния записываются таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.1.2 Каноническая форма

При исследовании систем, описываемых уравнениями состояния, часто является удобным такой выбор переменных состояния, чтобы разноименные компоненты вектора состояния не зависели друг от друга.

Возьмем уравнения состояния (6.7), где, в общем случае, матрица **A** – произвольная квадратная матрица с различными собственными значениями.

Применим линейное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{Mq}$, где $\mathbf{M}$ – модальная матрица. Тогда уравнения (6.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M\dot{q}} &= \mathbf{AMq} + \mathbf{Br}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{CMq} + \mathbf{Dr}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Умножив первое из уравнений (6.8) на $\mathbf{M}^{-1}$, получим:

$$\mathbf{\dot{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AMq} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Br}.$$

Так как матрица $\mathbf{M}$ является модальной матрицей, преобразование подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ дает диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda}$ с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ по диагонали. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{\dot{q}} &= \mathbf{\Lambda q} + \mathbf{B}_n\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_n\mathbf{q} + \mathbf{D}_n\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_n = \mathbf{CM}$, $\mathbf{D}_n = \mathbf{D}$.

Уравнения (6.9) носят название *нормальной*, или *канонической*, формы уравнений состояния. При этом дифференциальные уравнения развязаны относительно переменных состояния $q_1, q_2, ..., q_n$ и имеют вид $\dot{q}_i = \lambda_i q_i + f_i$, где f_i – вынуждающая функция, воздействующая на *i*-ю переменную состояния.

Можно показать, что, если уравнения (6.7) представлены в стандартной форме (т. е. матрица $\mathbf{A}$ является матрицей Фробениуса), то модальная матрица $\mathbf{M}$ имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Матрица вида (6.10) называется *матрицей Вандермонда*.

При наличии у $\mathbf{A}$ кратных собственных значений и в случае, когда дефект характеристической матрицы $\left[\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]$ меньше кратности корня λ_i, диагональная матрица $\mathbf{\Lambda}$ в уравнении (6.9) заменяется канонической матрицей Жордана.

6.2 Решение уравнений стационарных систем

6.2.1 Переходная матрица и методы ее вычисления

Однородное уравнение для линейной стационарной системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{6.11}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная размерностью n матрица с постоянными коэффициентами, $\mathbf{x}$ – вектор-столбец переменных состояния. Аналогично скалярному случаю, общее решение уравнения (6.11) ищется в виде

$$\mathbf{x}_{\text{o}}(t) = e^{\mathbf{A}\cdot(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0), \tag{6.12}$$

где матрица $e^{\mathbf{A}\cdot(t-t_0)}$ определяется уравнением (5.36), а вектор $\mathbf{x}(t_0)$ задает начальные условия.

Подставив выражение (6.12) в уравнение (6.11) и выполнив дифференцирование по всем правилам, удостоверимся, что оно (выражение (6.12)) действительно является решением однородного дифференциального уравнения. Подставив в формулу (6.12) $t = t_0$, можно убедиться, что начальные условия удовлетворяются, поскольку $e^{\mathbf{A}\cdot(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = \mathbf{E}$.

Матрица $\mathbf{\Phi}(t-t_0) = e^{\mathbf{A}\cdot(t-t_0)}$, удовлетворяющая однородному дифференциальному векторно-матричному уравнению (6.11), называется *переходной матрицей*, или *фундаментальной матрицей*. Термином «фундаментальная матрица» чаще пользуются математики, связанные с матричными дифференциальными уравнениями, а словосочетание «переходная матрица состояния» встречается в теории управления и теории систем. Прилагательное «переходная» обусловлено тем, что с помощью матрицы $\mathbf{\Phi}(t-t_0)$ осуществляется «переход» системы от некоторого начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ к текущему состоянию $\mathbf{x}(t)$. Часто для простоты начальный отсчет времени полагают равным нулю $t_0 = 0$.

Для вычисления переходной матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ используют несколько методов. Из уже рассмотренных сюда относятся методы, основанные на *теореме Кэли – Гамильтона* и *теореме разложения Сильвестра* (см. примеры 5.8 и 5.9).

К другим методам относятся метод разложения в степенной ряд и метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Метод разложения в степенной ряд. Согласно уравнению (5.36) переходную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$ можно представить бесконечным рядом

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots. \tag{6.13}$$

Вычисление ряда (6.13) – задача трудоемкая, особенно если ряд сходится медленно, а порядок матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ недостаточно низкий. Степени матрицы $\mathbf{A}^k$ могут быть найдены с использованием теоремы Кэли – Гамильтона. После выполнения суммирования необходимо найти в замкнутом виде все элементы матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$. Количество членов при вычислении ряда (6.13) определяется скоростью сходимости: ограничиваются числом N членов ряда, если относительный вклад $(N+1)$-го слагаемого в уже вычисленную сумму для каждого элемента матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ становится меньше наперед заданного числа.

Метод преобразования Лапласа. Применим преобразование Лапласа к уравнению (6.11), полагая $t_0 = 0$:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s).$$

Полученное уравнение разрешим относительно $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = \left[s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]^{-1} \mathbf{x}(0). \tag{6.14}$$

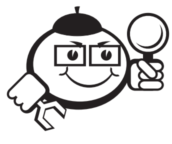
Применяя к обеим частям уравнения (6.14) обратное преобразование Лапласа, получим:

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\left\{\left[s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]^{-1}\right\}\mathbf{x}(0). \tag{6.15}$$

Из уравнений (6.15) и (6.12) делаем вывод, что переходная матрица может быть представлена формулой

$$\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left\{\left[s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]^{-1}\right\}. \tag{6.16}$$

Таким образом, в этом методе для вычисления переходной матрицы необходимо найти обратную матрицу $\left[s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right]^{-1}$ и применить к ней обратное преобразование Лапласа.



Пример 6.1

Найти переходную матрицу для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 5.8:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \; \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -2.$$

Матрица, обратная к $\left[s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$, имеет вид

$$\left[s\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование от каждого элемента матрицы найдем по теореме разложения:

$$\phi_{11}=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=2e^{-t}-e^{-2t},$$

$$\phi_{12}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-t}-e^{-2t},$$

$$\phi_{21}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right\}=2e^{-t}-2e^{-2t},$$

$$\phi_{22}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\right\}=-e^{-t}+2e^{-2t}.$$

Полученная переходная матрица

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

совпадает с найденной в примерах 5.8 и 5.9.

. . . .

Очень просто находить переходную матрицу для уравнений состояния, представленных в канонической форме (6.26). В этом случае переходная матрица равна

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{\Lambda}t}=\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_i t}\right]=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Привести к диагональной форме можно матрицу с различными собственными числами или в случае с кратными корнями, если вырожденность характеристической матрицы полная. Тогда на основании преобразования подобия $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ можно записать:

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}. \tag{6.18}$$

Для целой положительной степени k из последнего соотношения следует $\mathbf{A}^k=\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{M}^{-1}$, или для произвольного матричного многочлена

$$N\left(\mathbf{A}\right)=\mathbf{M}N\left(\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}\begin{bmatrix} N\left(\lambda_1\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N\left(\lambda_2\right) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & N\left(\lambda_n\right) \end{bmatrix}\mathbf{M}^{-1}. \qquad (6.19)$$

Тогда переходную матрицу на основе (6.18) можно представить, воспользовавшись формулой (6.19):

$$\mathbf{\Phi}\left(t\right)=e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}\,\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_i t}\right]\mathbf{M}^{-1}. \qquad (6.20)$$

Выражение (6.20) представляет собой еще один метод вычисления переходной матрицы (с использованием модальной матрицы).

Пример 6.2

Найти переходную матрицу с помощью модальной матрицы для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 6.1:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2.$$

Присоединенная матрица $\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]$ равна:

$$\mathrm{Adj}\left[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Подставив в неё последовательно $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=-2$, получим две матрицы, каждая из которых даст свой собственный вектор как ненулевой столбец. Составим из этих векторов модальную матрицу $\mathbf{M}$ и найдем обратную к ней $\mathbf{M}^{-1}$:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

На основе (6.20) получаем:

$$\mathbf{\Phi}\left(t\right)=\mathbf{M}\,\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_i t}\right]\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

6.2.2 Общее решение неоднородных уравнений

Уравнения состояния линейной стационарной системы задаются согласно (6.7) в виде

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{r}, \qquad (6.21)$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{r}. \qquad (6.22)$$

Матрица $\mathbf{A}$ в этих уравнениях – основная матрица системы, так как ее структура определяет переходную матрицу состояния. От этой матрицы зависит как вынужденная (установившаяся), так и переходная составляющие решения. Матрица $\mathbf{B}$ – матрица связи: структура этой матрицы определяет характер связи входных воздействий с переменными состояния. Матрица $\mathbf{C}$ – также матрица связи, а именно связи переменных состояния с выходными переменными системы. Наконец, матрица $\mathbf{D}$ – опять матрица связи; на этот раз связи входных переменных непосредственно с выходными переменными. Часто для реальных систем $\mathbf{D}$ является нулевой матрицей, так что связь входа непосредственно с выходом отсутствует.

Как и в скалярном случае, возможно общее решение уравнений (6.21), (6.22) для $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ получить разными методами. Можно показать, что в результате решение для $\mathbf{x}(t)$ будет равно:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau)d\tau. \tag{6.23}$$

Решение для $\mathbf{y}(t)$ следует из подстановки уравнения (6.23) в уравнение выхода (6.22):

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{r}(t). \tag{6.24}$$

Выражения (6.23) и (6.24) являются решениями уравнений состояния (6.21), (6.22). Первое слагаемое в уравнении (6.24) представляет собой переходную составляющую решения, обусловленную начальными условиями, тогда как второе слагаемое (по сути, это интеграл свертки) является вынужденной составляющей, зависящей от входного воздействия.

6.3 Решение уравнений нестационарных систем

6.3.1 Переходная нестационарная матрица

Если параметры системы изменяются во времени, то элементы матрицы $\mathbf{A}$ не являются постоянными, а являются функциями времени. В этом случае однородное векторно-матричное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{6.25}$$

При решении этого уравнения естественно обратиться к скалярной аналогии, то есть к скалярному уравнению

$$\dot{x} = a(t)x. \tag{6.26}$$

Решение уравнения (6.26) равно:

$$x(t) = \left(\exp\left\{ \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right\} \right) x(t_0), \tag{6.27}$$

где t_0 – некоторый начальный момент времени.

По аналогии с формулой (6.27) решение матричного уравнения (6.25) предполагается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \left[\exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(t)\,dt \right\} \right] \mathbf{x}(t_0). \tag{6.28}$$

Но при подстановке выражения (6.28) в уравнение (6.25) видно, что формула (6.28) действительно представляет собой решение в том и только в том случае, если

$$\frac{d}{dt}\exp\mathbf{I}(t) = \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\cdot\exp\mathbf{I}(t), \tag{6.29}$$

где $\mathbf{I}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(t)\,dt$.

К сожалению, условие (6.29) выполняется не всегда; более того, оно чаще не выполняется, чем выполняется. В двух частных, но тривиальных случаях уравнение (6.29) выполняется всегда, а именно, когда матрица $\mathbf{A}$ – постоянная или когда $\mathbf{A}$ – диагональная матрица. Решение для первого случая уже разбиралось, а во втором случае уравнения состояния оказываются не связанными друг с другом, так что для каждого x_i годится решение (6.27).

Можно показать, что условие (6.29) трансформируется в условие коммутативности для матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1) \text{ для всех } t_1 \text{ и } t_2. \tag{6.30}$$

Таким образом, если выполняется условие (6.30), то выражение (6.28) является решением уравнения (6.25) и переходная матрица состояния (зависящая уже от двух аргументов t и t_0) равна:

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \exp\int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(t)\,dt. \tag{6.31}$$

Если условие коммутативности (6.30) не выполняется, переходная матрица уже не может выражаться уравнением (6.31). Тогда решение уравнения

(6.25) можно получить методом, известным как *метод интегрирования Пеано – Бэкера*. Этот метод заключается в следующем.

При заданных начальных условиях $\mathbf{x}(t_0)$ проинтегрируем уравнение (6.25):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau)\,d\tau. \tag{6.32}$$

Это уравнение можно встретить под названием *векторного интегрального уравнения Вольтерра.* Решается это уравнение путем последовательных подстановок правой части уравнения (6.32) в подынтегральное выражение вместо $\mathbf{x}(t)$. Например, первая итерация даст

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\left[\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x}(\lambda)\,d\lambda\right]d\tau. \tag{6.33}$$

Упростить запись подобных выражений можно введением оператора интегрирования $Q(...) = \int_{t_0}^{t}(...)\,d\tau$. Тогда уравнение (6.32) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + Q(\mathbf{A}\mathbf{x}),$$

а уравнение (6.33) приобретает вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + Q(\mathbf{A})\mathbf{x}(t_0) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}\mathbf{x})). \tag{6.34}$$

Продолжая процедуру, описываемую уравнением (6.34), получим $\mathbf{x}(t)$ в виде *ряда Неймана*:

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{E} + Q(\mathbf{A}) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A})) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}))) + ...\right]\mathbf{x}(t_0). \tag{6.35}$$

Первое слагаемое в скобках – это единичная матрица. Второе слагаемое равно интегралу от $\mathbf{A}(t)$ в пределах от t_0 до t. Третье слагаемое получается умножением $Q(\mathbf{A})$ на $\mathbf{A}$ слева и последующим интегрированием произведения в пределах от t_0 до t и т. д. Если элементы матрицы $\mathbf{A}$ ограничены на отрезке интегрирования, то бесконечный ряд сходится равномерно и абсолютно к некоторой квадратной матрице $G(\mathbf{A})$, называемой *матрицантом*:

$$G(\mathbf{A}) = \mathbf{E} + Q(\mathbf{A}) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A})) + Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}Q(\mathbf{A}))) + \dots. \tag{6.36}$$

Основное свойство матрицанта заключается в том, что

$$\frac{dG(\mathbf{A})}{dt} = \mathbf{A}G(\mathbf{A}). \tag{6.37}$$

Это свойство нетрудно доказать, если взять производную по t от обеих частей выражения (6.36).

Выражение (6.35) совместно со свойством (6.37) дают основание утверждать, что $G(\mathbf{A})$ представляет собой искомую переходную матрицу состояния нестационарной системы:

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=G(\mathbf{A}). \tag{6.38}$$

Понятно, что при постоянной матрице $\mathbf{A}$ из выражения (6.36) следует, что

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)=\mathbf{E}+(t-t_0)\mathbf{A}+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\mathbf{A}^2+\frac{(t-t_0)^3}{3!}\mathbf{A}^3+\ldots=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}.$$

Недостаток этого метода очевиден: при медленной сходимости ряда (6.36) процесс вычисления достаточно трудоемок.

Во многих случаях переходная матрица легко получается при надлежащем выборе переменных состояния. Может оказаться полезным определить, существуют ли такие переменные состояния, чтобы было правомерным применение соотношения (6.31).

Сведем воедино свойства переходных матриц, часть из которых уже отмечалась.

Свойство 1:

$$\mathbf{\Phi}(t,t)=\mathbf{E}. \tag{6.39}$$

Это свойство следует из определения переходной матрицы.

Свойство 2:

$$\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)\mathbf{\Phi}(t_2,t_3)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_3). \tag{6.40}$$

Свойство 3:

$$\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)=\mathbf{\Phi}^{-1}(t_2,t_1). \tag{6.41}$$

Это свойство вытекает из свойства 2, если вместо t_3 в формулу (6.40) подставить t_1. Получим

$$\mathbf{\Phi}(t_1,t_2)\mathbf{\Phi}(t_2,t_1)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_1)=\mathbf{E}.$$

Умножая последнее соотношение справа на $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_2,t_1)$, получаем формулу (6.41).

Свойство 4 (для стационарных систем):

$$\mathbf{\Phi}(t+\tau)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(\tau). \tag{6.42}$$

Это свойство следует непосредственно из свойств матричной экспоненты, поскольку $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

Свойство 5 (для стационарных систем):

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t). \tag{6.43}$$

Это свойство является непосредственным следствием свойства 3 в применении к стационарным системам или вытекает из формулы (6.42), если в последнюю подставить $\tau = -t$.

6.3.2 Общее решение нестационарных уравнений

В общем виде уравнения состояния линейной системы задаются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{6.44}$$

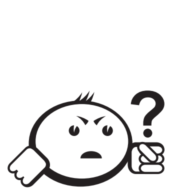
Можно показать, что решение для нестационарных уравнений состояния (6.44) получается по тому же выражению, как и для стационарных систем (6.23) с подстановкой в последнее соответствующих нестационарных матриц.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{r}(\tau)\,d\tau. \tag{6.45}$$

Решение для $\mathbf{y}(t)$ получается подстановкой уравнения (6.45) во второе из уравнений (6.44):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{r}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}(t). \tag{6.46}$$

Выражения (6.45) и (6.46) являются общим решением неоднородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений (6.44).



Контрольные вопросы по главе 6

1. Какой вид имеет стандартная форма (каноническая форма фазовой переменной) записи уравнений состояния?
2. Что такое нормальные координаты системы?
3. Как можно перейти к нормальной (канонической) форме уравнений состояния?
4. Какой вид имеют матрицы в канонической форме уравнений состояния?

5. Что такое переходная (фундаментальная) матрица?
6. Какие методы существуют для вычисления переходной матрицы?
7. Назовите основные свойства переходной матрицы.
8. В каком случае переходная матрица нестационарной системы представляет матричную экспоненту?
9. Что такое матрицант и как он вычисляется?

Заключение

В последнее время теория систем, несомненно, играла ключевую роль в создании и совершенствовании многих технологий. Нужно понимать, что проектирование технических систем, в частности систем управления и контроля, невозможно без хорошего знания математических основ теории систем. Это знание является фундаментом при исследовании (а любое исследование имеет две неразрывные составляющие – анализ и синтез или проектирование) технических систем.

В предлагаемом учебном пособии изложено математическое описание основных классов систем: дискретных, непрерывных, дискретно-непрерывных. При этом современный инженер должен владеть как классическим (частотным) методом описания систем, так и методом пространства состояний, ориентированным на решение задач анализа и синтеза с помощью ЭВМ. Ввиду ограничений на объем учебного пособия не затронуто математическое описание некоторых современных и бурно развивающихся классов систем. Дальнейшее, более углубленное изучение теории систем включает такие разделы, как оптимизация программ и управляющих воздействий, адаптивные системы, стохастическая динамика систем, системы с распределенными параметрами, гибридные и интеллектуальные системы.

Теория систем продолжает развиваться и играет важную роль в постоянно увеличивающемся числе приложений. Но достижения теории систем не должны заслонять тот факт, что методы, приводившие к успеху ранее, могут не дать ожидаемого эффекта в будущем. То, что эффективно при исследовании технологического процесса или полета ракет, не удается непосредственно применить, например, в телекоммуникации, экономике, социальных или экологических системах. Здесь требуется не только определенная модификация старых методов, но и новые идеи, новые математические методы.

Чем бы ни занимались инженеры, все более или менее значительные задачи, стоящие перед ними, включают моделирование, анализ, синтез, оптимизацию, то есть те компоненты, которые образуют сущность методологии теории систем и теории управления. Умения, навыки и компетенции, приобретенные в процессе изучения данного курса, окажутся полезными в любой области деятельности.

Литература

1. Карпов А. Г. Математические основы теории систем : учеб. пособие / А. Г. Карпов. – Томск : ТМЦДО, 2000. – Ч. 1. – 103 с.
2. Карпов А. Г. Математические основы теории систем : учеб. пособие / А. Г. Карпов. – Томск : ТМЦДО, 2002. – Ч. 2. –138 с.
3. Карпов А. Г. Теория автоматического управления : учеб. пособие / А. Г. Карпов. – Томск : ТМЛ-Пресс, 2012. – Ч. 2. – 264 с.
4. Карпов А. Г. Цифровые системы автоматического управления (Основы теории) : учеб. пособие / А. Г. Карпов. – Томск : НТЛ, 2007. – 288 с.
5. Перегудов Ф. И. Основы системного анализа / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – Томск : НТЛ, 2003. – 396 с.
6. Вунш Г. Теория систем / Г. Вунш. – М. : Совет. радио, 1978. – 288 с.
7. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
8. Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов / А. Д. Закревский. – М. : Наука, 1971. – 512 с.
9. Мелихов А. Н. Ориентированные графы и конечные автоматы / А. Н. Мелихов. – М. : Наука, 1971. – 416 с.
10. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М. : Наука, 1970. – 620 с.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Госиздат, 1951.
12. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Наука, 1974. – 543 с.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
14. Ту Ю. Современная теория управления / Ю. Ту. – М. : Машиностроение, 1971. – 472 с.

Глоссарий

Автомат 1-го рода – автомат, выходной сигнал которого появляется *до* изменения его состояния.

Автомат 2-го рода – автомат, выходной сигнал которого появляется *после* изменения его состояния.

Автомат асинхронный – автомат, реагирующий только на новую входную букву.

Автомат инициальный – автомат с заданным начальным состоянием.

Автомат, интерпретация – устройство, работающее в дискретном времени и реагирующее на каждое входное воздействие изменением внутреннего состояния (функция перехода) и изменением выхода (функция выхода).

Автомат комбинационный – автомат, все состояния которого эквивалентны, т. е. минимальный комбинационный автомат имеет *только одно состояние*.

Автомат конечный – автомат с конечным числом входных, выходных и внутренних букв.

Автомат Мили – автомат, функция выхода которого зависит как от внутреннего состояния, так и от входного сигнала.

Автомат минимальный – автомат с минимальным числом внутренних неэквивалентных состояний.

Автомат Мура – автомат, функция выхода которого зависит только от внутреннего состояния и не зависит от входного сигнала.

Автомат синхронный – автомат, реагирующий на каждую входную букву.

Автомат частичный – автомат, функция выхода или функция перехода которого определена не для всех входных букв.

Автоматная таблица – таблица, где на пересечении столбца с входной буквой x_i и строки с состоянием q_j стоит пара – состояние q_l, в которое переходит автомат из состояния q_j по входной букве x_i, и выходная буква y_k, которая при этом выдается автоматом.

Автоматное отображение – алфавитное отображение, удовлетворяющее условиям автоматности, а именно: длина входного слова равна длине его образа и образ отрезка определенной длины равен отрезку образа той же длины.

Автоматы эквивалентные – автоматы, реализующие одно и то же автоматное отображение.

Алгебра регулярных событий (алгебра Клини) – алгебра, несущим множеством которой является множество регулярных событий, а сигнатурой – объединение, конкатенация и итерация.

Алфавит – множество символов (букв).

Алфавитное отображение – отображение, преобразующее последовательность входных букв (входное слово) в последовательность выходных букв (выходное слово).

Источник – ориентированный граф, в котором выделены начальные и заключительные вершины, и на каждом ребре написана буква из входного алфавита или пустая буква.

Конкатенация (умножение) – операция приписывания одного слова к другому.

Линеаризация уравнения (характеристики) – приближенная замена нелинейного уравнения (характеристики) линейным эквивалентом.

Матрица – прямоугольная таблица, составленная из упорядоченных элементов, являющихся вещественными или комплексными числами или функциями от заданных переменных и подчиняющаяся определенным правилам сложения, вычитания, умножения и равенства.

Матрица модальная – матрица, столбцы которой составлены из собственных векторов.

Матрица переходная (фундаментальная) – матрица, удовлетворяющая однородному матричному уравнению состояния.

Матрица соединений автомата – квадратная матрица, строки и столбцы которой соответствуют различным состояниям автомата и на пересечении q_i-й строки и q_j-го столбца стоит буква (или дизъюнкция букв) входного алфавита, вызывающая переход автомата из состояния q_i в состояние q_j , и в скобках (можно через запятую, тире или слеш) – буква (или дизъюнкция букв) выходного алфавита, которая появляется при этом на выходе автомата.

Матрицант – переходная матрица нестационарной системы.

Матричная функция – функция, допускающая представление в виде степенного ряда, в котором вместо скалярной переменной подставлена квадратная матрица.

Модель – отображение объекта: целевое, абстрактное или реальное, статическое или динамическое, согласованное со средой, конечное, упрощенное, приближенное, имеющее наряду с безусловно-истинным условно-истинное и ложное содержание, проявляющееся и развивающееся в процессе его создания и использования.

Модель «черный ящик» – модель, описывающая систему на уровне «вход – выход».

Модель состава – модель, описывающая, из каких подсистем и элементов состоит система.

Модель структуры – совокупность необходимых и достаточных для достижения цели отношений между элементами системы.

Передаточная функция – отношение преобразования по Лапласу аналитической зависимости от времени выходной координаты линейного объекта к преобразованию по Лапласу такой же зависимости от времени входной его координаты, полученное при нулевом начальном состоянии.

Переменные состояния – внутренние переменные системы, знание значений которых в заданный момент времени определяют поведение системы в последующие моменты времени.

Регулярное выражение – формула в алгебре Клини.

Система (первое определение) – средство достижения цели.

Система (второе определение) – совокупность взаимосвязанных элементов, обособленная от среды и взаимодействующая с ней как целое.

Собственное (характеристическое) число матрицы $\mathbf{A}$ – решение характеристического уравнения $\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=0$.

Собственный (характеристический) вектор $\mathbf{x}_i$*, соответствующий собственному числу* λ_i – вектор, удовлетворяющий уравнению $\left[\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}\right]\mathbf{x}_i=0$.

Событие – множество входных слов.

Событие регулярное – событие, полученное из элементарных событий путем конечного применения регулярных операций: объединения, конкатенации и итерации.

Уравнение однородное – уравнение системы с нулевым входным воздействием.

Фундаментальная матрица – см. матрица переходная.

Эквивалентные автоматы – см. автоматы эквивалентные.

Эквивалентные матрицы – матрицы одинаковой размерности, имеющие одинаковый ранг.

Эквивалентные преобразования (матриц) – линейные преобразования матриц, не меняющие их ранга.