Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика (курс практических занятий) семестр1, часть 1 для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике"

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2016

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группах 446-1, 446-2 осенью 2016 года. В осеннем семестре, согласно рабочим программам, на специальности 09.03.03 изучаются следующие темы: линейная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчсиление. Даны с подробным разбором задачи, которые решались на каждом практическим занятии. Задачи для домашнего задания часто даны в контексте рассмотрения темы, по ходу урока, то есть видно, после разбора каких задач будет сразу легко понять, как решить это домашнее задание. Домашние задания в пособии даны без решений, но с ответами. Пособие может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий.

Оглавление

Номера практик по датам для групп 446-1, 446-2 согласно расписанию

Практика №	446-1	446-2
1	02.09.16	03.09.16
2	06.09.16	03.09.16
3	09.09.16	09.09.16
4	16.09.16	17.09.16
5	20.09.16	17.09.16
6	23.09.16	23.09.16
7	30.09.16	27.09.16
8	04.10.16	27.09.16
9	07.10.16	07.10.16
10	14.10.16	11.10.16
11	18.10.16	11.10.16
12	21.10.16	21.10.16
13	28.10.16	25.10.16
14	01.11.16	25.10.16
15	11.11.16	07.11.16
16	15.11.16	07.11.16
17	18.11.16	18.11.16
18	25.11.16	21.11.16
19	29.11.16	21.11.16
20	02.12.16	02.12.16
21	09.12.16	05.12.16
22	13.12.16	05.12.16
23	16.12.16	16.12.16
24	23.12.16	19.12.16
25	27.12.16	19.12.16
26	30.12.16	30.12.16

Практика 1. Входной тест по школьной программе. (неравенства с модулем, логарифмические неравенства, задачи на движение).

<u>Практика 2. Действия над матрицами, сложение, умножение.</u>

Задача 1. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем эти матрицы. Если первую разбить на строки, а вторую на столбцы, то видно, что есть всего 4 варината скалярно умножить друг на друга вектор-строку их первой на вектор-столбец из второй.

$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \\ 2 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} \end{pmatrix}$	$1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2 = 3 + 1 + 0 = 4$
$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \\ 2 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}} \end{pmatrix}$	$1\cdot 0 + 1\cdot 4 + 0\cdot 7 = 0 + 4 + 0 = 4$
$\begin{pmatrix} 1 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} \end{pmatrix}$	$2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 6 + 1 + 2 = 9$
$\begin{pmatrix} 1 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}} \end{pmatrix}$	$2\cdot 0 + 1\cdot 4 + 1\cdot 7 = 0 + 4 + 7 = 11$

Например, если умножаем строку номер 1 на столбец номер 2, то и число, которое при этом получается, ставим в 1 строку 2 столбец новой матрицы. Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$ Найти $AC+3BC$.

Решение. Так как матрица С находится справа во всех слагаемых, то для удобства можно использовать приведение подобных $AC+3BC$ = $(A+3B)C$ - тогда умножение надо будет проводить всего один раз, а не два.

Сначала запишем $A+3B$.

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -9 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}.$$

Теперь умножим на матрицу С. Точно так же, как и в прошлом примере, мысленно обведём строку из 1-й матрицы на столбец из 2-й. Есть 4 варианта это сделать:

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot4+3\cdot2 & 5\cdot(-1)+3\cdot1\\ (-5)\cdot4+(-7)\cdot2 & (-5)\cdot(-1)+(-7)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}20+6 & -5+3\\ -20-14 & 5-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & -2\\ -34 & -2\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix}26 & -2\\ -34 & -2\end{pmatrix}$.

Задача 3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ найти A^2.

Решение. Умножим матрицу саму на себя, то есть две её копии напишем рядом и умножим их.

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot(-4) & 2\cdot1+1\cdot(-2)\\ (-4)\cdot2+(-2)\cdot(-4) & (-4)\cdot1+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 2-2 \\ -8+8 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ **Ответ.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Как видно из этого примера, для матриц, в отличие от чисел, возможно, что получается нулевой объект в ответе, притом что в исходной матрице вообще ни одного нуля не было. Это из-за особенностей её строения: правый столбец в 2 раза меньше, чем левый, а нижняя строка в минус 2 раза больше, чем верхняя. И вообще, если взять пару матриц, где у первой будет пропорциональность строк (в k раз больше) а у второй - столбцов (в минус k раз меньше) получим такой же эффект.

Домашняя задача №1.

Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответом здесь тоже будет служить нулевая матрица.

Задача 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. Найти AB, BA.

Решение. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-18 & -12+12 \\ 36-36 & -24+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-24 & -27+36 \\ 12-16 & -18+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Даны матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ Найти AB, BA.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2+4 & 10+6+3 \\ -12+6-8 & 20-18-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь поставим их наоборот, но при этом произведением будет уже не матрица 2 порядка, а матрица 3 порядка: теперь у первой 3 строки, но более коротких, а у второй 3 столбца. Вариантов умножить строку на столбец будет 9.

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+20 & 3+15 & -3-10 \\ 4-24 & -2-18 & 2+12 \\ 8+12 & -4+9 & 4-6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти AB, BA.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+4 & 5+6+4 \\ 4+0+3 & 10+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+10 & 4+0 & 8+15 \\ 1+6 & 2+0 & 4+9 \\ 1+2 & 2+0 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 23 \\ 7 & 2 & 13 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $AB=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 7 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}12 & 4 & 23\\ 7 & 2 & 13\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$.

Задача 7. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Найти A^3.

Решение. Сначала умножим две, и найдём A^2.

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & -1-2\\ 3+6 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Теперь домножим ещё на одну матрицу А, чтобы найти A^3.

$$\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-9 & 2-6\\ 9+3 & -9+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -4\\ 12 & -7\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix}-11 & -4\\ 12 & -7\end{pmatrix}$.

Домашняя задача № 2. Найти A^4 для этой же матрицы. Замечание. Здесь есть 2 метода решения: либо умножить A^3, полученную в прошлой задаче, ещё раз на A, либо взять A^2, полученную на первом этапе, и её умножить саму на себя. Ответ. $\begin{pmatrix}-23 & 3\\ -9 & -26\end{pmatrix}$.

Задача 8. Вычислить матрицу $A-2E$ для какой-нибудь матрицы 3-го порядка. (Операции типа $A-\lambda E$ понадобятся изучении следующих тем: собственные числа линейного оператора).

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 4 & -2\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 4 & -2\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1-2 & 2 & 6\\ 0 & 4-2 & -2\\ 3 & -5 & 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 6\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}.$$

Задача 9. Решить уравнение $|A-\lambda E|=0$ для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 6-\lambda\end{pmatrix}$.

Найдём определитель 2 порядка.

$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(6-\lambda)-6=\lambda^2-7\lambda$.

Уравнение $\lambda^2-7\lambda=0$, что равно $\lambda(\lambda-7)=0$, имеет 2 корня 0 и 7.

Ответ. Параметр λ может принимать значения 0 и 7.

Замечание. Фактически, здесь мы нашли все такие числа, что если их вычесть из главной диагонали, то строки будут пропорциональны. Одно из них 0 только потому, что строки и так изначально пропорциональны, т.е. можно вычесть 0. А если вычесть 7, получим:

$A-7E=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ тоже как строки, так и столбцы пропорциональны.

Никакого третьего числа, обладающего таким свойством, для матриц 2 порядка нет, так как соответствующее уравнение (в будущем будем называть его характеристическим уравнением) 2 степени, и количество корней максимум 2. А вот для матрицы 3 порядка могло быть и 3 корня.

Задача 10. Найти определитель $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}$.

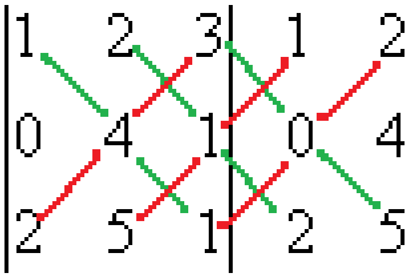
Решение. $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2-(-5)\cdot 4=-2-(-20)=18$.

Ответ. 18.

Замечание. Если построить пару векторов в плоскости, то площадь получившегося параллелограмма будет 18.

Задача 11. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Допишем копии первых двух столбцов, проведём 3 параллельных линии (главная диагональ и ещё две). Перемножим все эти тройки элементов и внесём в общую сумму с их исходным знаком. А вот для побочной диагонали и линий, ей параллельных, со сменой знака.



$1\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 5 - 2\cdot 4\cdot 3 - 5\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 2\ =$
$4+4+0-24-5-0 = 8-29 = -21.$

Ответ. -21.

Замечание. Модуль этой величины равен объёму параллелепипеда, построенного на 3 векторах, если в качестве векторов рассматривать строки либо столбцы.

Так, эквивалентная формулировка этой задачи может быть: найти объём параллелепипеда, одна из верших которого (0,0,0), и 3 ребра расположены по радиус-векторам (1,0,2), (2,4,5), (3,1,1). Ответ: 21.

Если надо найти объём тетраэдра, то дополнительно разделить на 6.

Найти объём тетраэдра с вершинами (0,0,0), (1,0,2), (2,4,5), (3,1,1).

Ответ: 21 / 6 = 3,5. Дело в том, что площадь основания тетраэдра в 2 раза меньше, чем для параллелепипеда, а кроме того, в формуле объёма таких фигур, как пирамида, конус, тетраэдр есть коэффициент 1/3, итого в 6 раз меньше, чем для параллелепипеда.

Задача 12. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение проводится аналогичным образом,

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

То, что перемножено по зелёным линиям, включим в сумму со знаком плюс, а по красным - со знаком минус.

$1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 6 - 1 = 5$.

Ответ. 5.

Задача 13. Найти определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right.$$

$-6 - 12 + 0 - 2 - 0 - (-8) = -20 + 8 = -12$.

Ответ. -12.

Задача 14. Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

$2 + 18 + 0 - 3 - 6 - 0 = 20 - 9 = 11$.

Ответ. 11.

Практика 3. (9 сентября у обеих групп).
Определители, разложение по строке (столбцу).

Задача 1. Найти произведение ABC, где

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $(AB)C$, сначала умножим первые две матрицы:

$\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&11\\3&12\end{pmatrix}$. Теперь умножим на третью матрицу.

$\begin{pmatrix}3&11\\3&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\33\end{pmatrix}$. **Ответ.** $\begin{pmatrix}31\\33\end{pmatrix}$.

Замечание. Если вычислять $A(BC)$, то получается точно такой же результат, т.к. выполняется закон ассоциативности.

Замечание. При умножении квадратной матрицы на вектор-столбец получается снова вектор-столбец, то есть квадратная матрица фактически выступает в роли функции, отображающей векторы в пространстве (или на плоскости, если n = 2).

Задача 2. Умножение квадратной матрицы порядка 3 на вектор-столбец из 3 координат (параметры произвольные, задаёт группа).

Задача 3. Найти параметр c, при котором определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&c&1\\1&4&1\end{vmatrix}=0.$$

Решение. Вычислим определитель и решим получившееся уравнение:
$c+2-3c-4=0$, $\quad -2c-2=0$, $2c=-2$, $c=-1$.
Ответ. $c=-1$.

Задача 4. Найти объём тетраэдра, вершины которого A(1,1,1), B(2,1,3), C(2,2,4), D(1,2,4).

Решение. Объём тетраэдра ровно в 6 раз меньше объёма параллелепипеда с рёбрами AB, AC, AD.
Найдём эти векторы, и сначала вычислим объём параллелепипеда с помощью определителя, затем поделим на 6.
AB = (1,0,2), AC = (0,1,3), AD = (1,1,3).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3+0+0-2-3-0=2, \quad V=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ответ. Объём тетраэдра равен $V=\frac{1}{3}$.

Задача 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по первой строке.

Решение. Выберем дополняющий минор для каждого элемента 1-й строки, и домножим на

$$1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (12-20)-(8-24) = 8.$$ **Ответ.** 8.

Задача 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ методом Гаусса (приведением к треугольной форме).

Решение. Вычитаем из 2-й строки удвоенную 1-ю, и из 3-й 1-ю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ затем вычитаем из 3-й строки 2-ю.

получили $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$. **Ответ.** 2.

Задача 7(а,б). Вычислить определитель 4 порядка двумя способами: а) разложением по 1-й строке. б) с помощью преобразований матрицы, т.е. приведением к треугольной форме.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Решение. Первый способ.
Разложение по 1-й строке:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Очевидно, что последние 2 минора 3-го порядка вычислять не надо, так как они умножаются на 0. Осталось вычислить два минора 3 порядка, то есть мы свели определитель 4 порядка к определителям 3 порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2-3-1)-(2+9-6-6) = -1-(-1) = 0.$$

Ответ. 0.
Второй способ. Из 2-й строки вычтем удвоенную 1-ю, а из 4-й утроенную 1-ю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Здесь мы добиваемся того, чтобы под левым верхним углом были только нули. В 3-й строке слева и так 0, из неё ничего вычитать не надо.

Теперь к 3-й строке прибавим 2-ю, а из 4-й вычтем удвоенную 2-ю. Этим самым мы обнулим элементы ниже a_{22}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

Теперь надо к 4-й строке прибавить 3-ю, и мы получим 0 под элементом a_{33}, этим как раз и завершится процесс приведения к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Но получилось так, что вся 4 строка состоит из нулей, а тогда определитель равен 0. Итак, получили точно такой же ответ.

Задача 8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Здесь можно применить старый, давно известный способ, то есть достроить 2 столбца и перемножить по трём параллельным линиям. А можно и преобразования строк. Но для этого удобно, чтобы в левом верхнем углу было число 1. Мы можем поменять местами строки, учтём, что при этом сменится знак.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

В принципе, можно ещё и поменять местами 2 и 3 строки, чтобы знак снова исчез. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. А вот теперь уже вычитать из 2-й строки (удвоеннную 1-ю) и из 3-й (утроенную 1-ю).

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -13 & -3 \end{vmatrix}$. Дальше можно и не преобразовывать, а просто разложить по 1 стролбцу, там всего лишь одно число, остальные нули. $1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = 24$. **Ответ.** 24.

Задача 9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавим 1-ю строку ко 2-й, 3-й и 4-й.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Эта матрица треугольная, определитель равен произведению чисел по диагонали, то есть 24.

Ответ. 24.

Задача 10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Можно просто добавить копии 1,2 столбцов и применить старый способ, а можно разложить по 3 строке, где есть всего одно ненулевое число. Сделаем именно так.

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 30-2 = 28.$$

Ответ. 28.

Задача 11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Приведём к треугольному виду.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 10 \end{vmatrix}$ теперь разложим по 1-му столбцу

$1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} = 50.$ **Ответ.** 50.

<u>Практика 4. Обратная матрица.</u>

Формула вычисления элементов обратной матрицы: $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$.

Алгоритм нахождения A^{-1}.

1. Проверить невырожденность с помощью определителя.
2. Составить матрицу из дополняющих миноров M_{ij}.
3. Изменить знаки в шахматном порядке, то есть домножить на $(-1)^{i+j}$, где i,j - номера строки и столбца.
4. Транспонировать полученную матрицу.
5. Поделить на определитель исходной матрицы.

Задача 1. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1). Проверяем определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$, так что обратная матрица существует.
2) Составляем матрицу из дополняющих миноров, то есть для каждой клетки вычёркиваем строку и столбец, остаётся подматрица порядка 1, то есть то число, которое напротив, как раз и является дополняющим минором. Получаем $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3) В шахматном порядке меняем знак там, где i+j нечётное.
Тем самым, мы переходим от M_{ij} к A_{ij}. Получили $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4) Транспонируем эту матрицу. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
5) Определитель был равен 1. Делить на 1 не обязательно, можно автоматически считать, что уже и так разделили.
Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
В качестве домашнего задания сделать проверку, и потренироваться умножать матрицы.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричные уравнения. Пусть A - квадратная матрица $n \times n$, X, B - матрицы размера $n \times k$ (чаще всего в таких задачах $k = n$, то есть все рассматриваемые матрицы квадратные), причём X - неизвестная матрица. Тогда определено умножение $AX = B$. Матрицу X таким образом. Домножим всё равенство слева на обратную матрицу A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Тогда $EX = A^{-1}B$, то есть $X = A^{-1}B$.

Задача 2. Решить матричное уравнение $AX = B$, где
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Требуется найти $X = A^{-1}B$, заметим, что матрица А тут в точности такая, для которой мы искали обратную в прошлой задаче.

Так, можно использовать $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала найдём обратную матрицу

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. Матрица из миноров: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица из алг. дополнений: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Делим её на определитель, и получаем $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

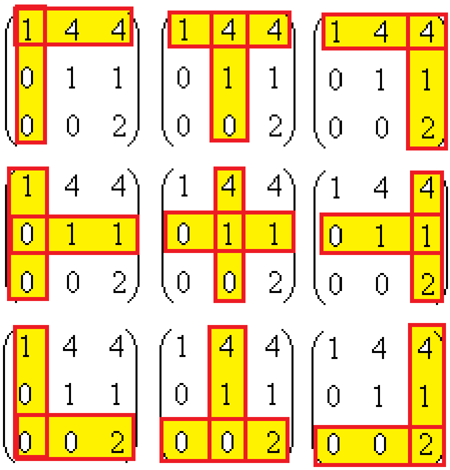
$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Сначала ищем определитель. Так как матрица треугольная, то достаточно перемножить числа по диагонали. $|A| = 2$.

Строим матрицу, состоящую из дополняющих миноров.
Зачёркиваем ту строку и тот столбец, где находится элемент, и остаётся минор 2 порядка из 4 элементов.
На схеме показано, что именно надо зачеркнуть:



$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь надо сменить знаки в шахматном порядке, т.е. переходим от миноров к алгебраическим дополнениям. Обведено красным, где надо менять знак. Ясно, что 0 остаётся 0, там знак менять нет смысла.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Транспонируем эту матрицу, то есть бывшие строки запишем по столбцам.

$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. И осталось разделить на $|A| = 2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Найдём определитель

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$2-6+2-8+3-1=-8$.

Найдём матрицу из дополняющих миноров к каждой из 9 клеток.

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Меняем знаки в шахматном порядке, то есть там, где i+j нечётное.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем транспонируем эту матрицу.

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -7 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Осталось только разделить на $|A| = -8$.

Ответ. $-\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -7 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Сначала находим определитель.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$1+0+2-3-2-0=-2$.

Найдём матрицу из дополняющих миноров.

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Меняем знаки в шахматном порядке, там, где i+j нечётное.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем транспонируем эту матрицу.

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Затем делим на $|A| = -2$.

Ответ. $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$

Задача 7. Матричным методом решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =3 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{array}\right\}$$

Решение. Запишем систему в виде: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Обратите внимение, что основная матрица системы это та самая матрица, для которой мы нашли обратную в прошлой задаче.

Если у нас есть равенство $A\overline{x} = \overline{b}$, то $A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, тогда $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Задача 8. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Сначала вычислим определитель: $-2+6-3=1$.

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исходный определитель был равен 1, так что делить не нужно.

Ответ. $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Теоретическое упражнение на тему «единственность обратной матрицы». Доказать, чтоне существует различных обратной слева и справа, то есть, если $XA = E$ и $AY = E$, то $Y = X$.

Решение. Пусть $XA = E$ и $AY = E$. По закону ассоциативности, можно записать такое равенство: $X(AY) = (XA)Y$.

Но тогда получается $XE = EY$, то есть $Y = X$.

Задача 10. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Решение. Найдём определитель: $5+24-105-72=-148$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 5 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -67 & -24 & -15 \\ -62 & -20 & 6 \\ -27 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -67 & 24 & -15 \\ 62 & -20 & -6 \\ -27 & -8 & 5 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -67 & 62 & -27 \\ 24 & -20 & -8 \\ -15 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Осталось разделить на $|A| = -148$.

Ответ. $-\dfrac{1}{148}\begin{pmatrix} -67 & 62 & -27 \\ 24 & -20 & -8 \\ -15 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>**Практика 5. Ранг матрицы.**</u>

Задача 1. Найти ранг матрицы. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Метод 1. Выбираем окаймляющие миноры, начиная от левого верхнего угла. Видно, что минор 2 порядка не равен 0, поэтому ранг больше или равен 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Вычисляя минор 3 порядка (а он здесь единственный, это и есть сам определитель матрицы) видим, что он равен 0.
$12+14+3-18-7-4=29-29=0$. Тогда раен не равен 3.
$r(A) \geq 2$, но при этом $r(A) \neq 3$. Остаётся единственный вариант: $r(A)=2$.

Метод 2. Преобразуем матрицу к треугольному виду.
Вычитаем из 2-й строки 1-ю, и из 3-й удвоенную 1-ю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Теперь 2-ю строку, умноженную на 0,5, прибавим к 3-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь видно, что 3-я строка состоит из нулей, поэтому ранг не может быть равен 3. Минор 2-го порядка тоже сразу виден, это $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Ответ. $r(A)=2$.

Задача 2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Поменяем 1-ю и 2-ю строки, так чтобы в верхнем левом углу было число 1. Это удобнее для преобразований к треугольной форме методом Гаусса. Ранг при этом не меняется. После этого, вычтем 1-ю строку с коэффициентом 1 либо 4 из последующих, так, чтобы обнулить всё ниде углового элемента.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \end{pmatrix}$$

Ещё мы поменяли 2 и 3 строку, чтобы продолжить метод Гаусса без излишних дробных коэффициентов.

Теперь 2-ю строку, домноженную на 10, прибавим к 3-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -10 & -4 & -28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 46 & -18 \end{pmatrix}.$$

Итак, исходная матрица сводится к такой, в которой уже есть треугольная сруктура в первых трёх столбцах.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 46 & -18 \end{array}\right)$$

Очевидно, что обведённый минор равен 46, не равен 0. Он 3-го порядка, поэтому ранг равен 3.

Ответ: $r(A) = 3$.

Задача 3. Найти ранг матрицы и базисный минор. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сначала из 2 строки вычитаем 1-ю, домноженную на 2, то есть вычитаем строку (2 4 6) а из 3-й 1-ю, домноженную на 5, т.е. строку (5 10 15). Затем к 3-й прибавляем 20ю с коэффициентом 7.

Видно, что базисный минор не может быть в левом верхнем углу, потому что во 2-й строке два нуля. Зато можно найти минор 2 порядка, состоящий из частей 10и 3 столбца, либо 2 и 3-го.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минор порядка 3, то есть сам определитель всей этой матрицы, равен 0, так как третий столбец содержит только нули. Поэтому ранг равен 2, а не 3.

Ответ. $r(A) = 2$.

Задача 4. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу. Ко второй строке прибавим 1-ю, а от 3-й отнимем удвоенную 1-ю. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

теперь к третьей прибавим вторую, получим $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ранг равен 3, так как есть невырожденный минор 3 порядка.

Ответ. $r(A) = 3$.

Задача 4а (вариант с параметром).

Найти параметр c, при котором ранг матрицы

равен 2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & c & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & c & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & c & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & c+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Третья строка сосотяла бы из всех нулей, только если $c + 2 = 0$, то есть $c = -2$. То есть, если бы на месте a_{33} изначально было число -2,

то ранг был бы меньше, так как в итоге получилась бы третья строка из всех нулей.
Ответ. $c = -2$.

Задача 5. Доказать, что 3 столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух, и найти коэффициенты этой комбинации.
Решение. Во-первых, если вычислить определитель и обнаружить, что он равен 0, то этим самым уже доказана линейная зависимость столбцов. Однако требуется найти коэффициенты, поэтому запишем систему уравнений:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} \alpha + 5\beta = 11 \\ -2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 11 \end{cases}$$

Прибавим удвоенное 1-е уравнение ко 2-му, и вычтем утроенное 1-е из 3-го.

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = 11 \\ 11\beta = 22 \\ -11\beta = -22 \end{cases}$$ отсюда видно, что $\beta = 2$, тогда $\alpha = 1$.

Ответ. коэффициенты линейной комбинации равны 1 и 2.

Задача 6. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Преобразуем методом Гаусса к треугольной форме.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что 4-я строка из нулей, поэтому ранг не равен 4, то есть $r(A) \le 3$. Минор порядка 2 легко находится в верхнем левом углу, но угловой минор порядка 3 равен 0. Однако это ещё не значит, что ранг равен 2, ведь можно отступить к правмому краю матрицы и взять минор с разрывом, из 1,2,4 столбцов, например такой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот минор невырожденный, и он тоже является окаймляющим (ведь он полностью включает в себя квадрат, закрашенный жёлтым). Мы нашли базисный минор порядка 3. Также можно было рассматривать аналогичное в 1,2,5 столбцах, тоже минор порядка 3.

Ответ. $r(A) = 3$.

Задача 7. Найти такие параметры p, q, что ранг матрицы равен 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем методом Гаусса к треугольной форме.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & p-9 \\ 0 & 0 & q-15 \end{pmatrix}.$$

Если $p = 9$ и $q = 15$, то две последних строки только из нулей, и равен будет равен 1.

Ответ. $p = 9$, $q = 15$.

Задача 8. Найти ранг матрицы (4*4, можно с произвольными элементами, заданными группой).

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Для удобства преобразования методом Гаусса, сначала поменяем местами 1 и 3 строки. Ещё можно сразу прибавить 3-ю строку к 4-й.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Дальше стандартным методом, обнулим всё ниже угла.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Для удобства вычислений домножим 2 строку на (-1), ранг при этом не меняется. Затем прибавим к 3 строке удвоенную 2-ю.

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&1\\0&-4&-3&1\\0&0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&1\\0&0&-1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}$$

Теперь осталось прибавить к 4 строке удвоенную 3-ю.

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&1\\0&0&-1&3\\0&0&0&10\end{pmatrix}$. Видно, что получилась треугольная матрица, то есть определитель 4 порядка невырожденный. Поэтому $r(A)=4$.

Ответ. $r(A)=4$.

Элементы векторной алгебры.

Задача 9. (8.16 [1]) Найти косинус угла между векторами $a=(3,3,1), b=(3,1,-3)$.

Решение. Известно, что $(a,b)=|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi$.

$(a,b)=9+3-3=9$, $|a|\cdot|b|=\sqrt{9+9+1}\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19}\sqrt{19}=19$.

$9=19\cdot\cos\varphi$, тогда $\cos\varphi=9/19$, что приблизительно равно 0,5, то есть угол чуть больше 60^0.

Ответ. cos = 9/19.

Задача 10. Найти скалярное и векторное произведение векторов: $(1,3,-2)$ и $(3,1,-5)$.

Решение. $(a,b)=3+3+10=16$.

Для поиска векторого произведения запишем определитель.

$$\begin{vmatrix}1&3&-2\\3&1&-5\\e_1&e_2&e_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2\\1&-5\end{vmatrix}e_1-\begin{vmatrix}1&-2\\3&-5\end{vmatrix}e_2+\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}e_3=-13e_1-1e_2-8e_3.$$

Ответ. Скалярное: 16, векторное: (-13, -1, -8).

Задача 11. Дано: $a = r + s$, $b = 2r + s$, $|r| = 1$, $|s| = 1$, угол между векторами r, s 45 градусов. Найти (a,b).

Решение. $(r+s, 2r+s) = 2(r,r) + 2(s,r) + (r,s) + (s,s)$ =

$$2|r|^2 + 3(r,s) + |s|^2 = 2|r|^2 + 3|s|\ |r|\cos(45) + |s|^2 = 3 + 3\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Примечание. Как видим, можно вычислять скалярное произведение, даже не зная координат векторов. Здесь фактически r, s служат в качестве базисных векторов, и через них выражены a, b, то есть (1,1) и (2,1) координаты a, b относительно базиса r, s.

Ответ. $3 + 3\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Практика № 6 (23 сентября у обеих групп).
45 минут - продолжение темы «скалярное, векторное, смешанное проиведение». Повторение перед контрольной.

Задачи 1,2,3.
Векторы a,b выражены через p,r: $a = 3p + r$, $b = p - 3r$.

$|p| = 5, |r| = \sqrt{2}$, угол между ними 45 град.

Задача 1. Найти (a,b). **Задача 2.** Найти | [a,b] |.

Задача 3. Найти $|a|^2$

Решение задачи 1.
(a,b) = $(3p + r, p - 3r)$ = $3(p,p) - 9(p,r) + (r,p) - 3(r,r)$.
Это мы раскрыли скобки, используя свойства скалярного произведения. Далее, так как $(p,r) = (r,p)$ то объединим их, и получим $3(p,p) - 8(p,r) - 3(r,r)$.
Это можно выразить так:

$3|p|^2 - 8|p||r|\cos 45^0 - 3|r|^2$ и получаем $75 - 40 - 6 = 29$. **Ответ.** 29.

Решение задачи 2.
$|[a,b]| = |[3p + r, p - 3r]| = |3[p,p] - 9[p,r] + [r,p] - 3[r,r]|$

Несмотря на то, что скобки мы раскрыли похожим образом, дальше будет существенное отличие, т.к. свойства векторного произведения совсем другие, чем скалярного. Так, $(p,p)=|p|$, но $[p,p]=0$. Кроме того, чтобы объединить $[p,r],[r,p]$ в одно слагаемое, здесь надо сначала у одной из них сменить знак.

$|3[p,p]-9[p,r]+[r,p]-3[r,r]| = |0-9[p,r]-[p,r]-0| =$

$|-10[p,r]| = 10|[p,r]|$. Модуль векторного произведения p и r это площадь параллелограмма, где эти векторы являются сторонами, поэтому далее можно продолжить так:

$10|[p,r]| = 10|p||r|\sin 45^0 = 10\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 50.$ **Ответ.** 50.

Решение задачи 3.

$|a|^2 = (a,a) = (3p+r,3p+r) = 9(p,p)+3(p,r)+3(r,p)+(r,r) =$

$9(p,p)+6(p,r)+(r,r) = 9|p|^2+6|p||r|\cos 45^0+|r|^2 =$

$9\cdot 25+6\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2 = 225+30+2=257.$ **Ответ.** 257.

Задача 4. (8.19 [1]) Вычислить площадь параллелограмма, образованного векторами a,b, если $a=3p-2q, b=4p+5q$, $|p|=4, |q|=2$, угол между p,q равен $\pi/6$.

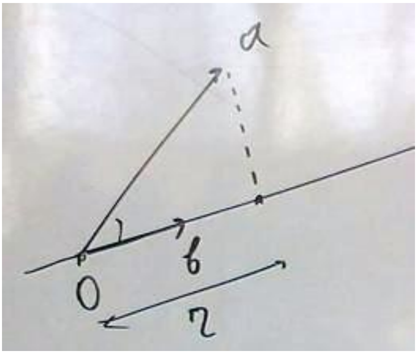
Решение. Вычислим площадь с помощью векторного произведения.

$|[a,b]|=|[3p-2q,4p+5q]|= |12[p,p]+15[p,q]-8[q,p]-10[q,q]| =$

$|15[p,q]+8[p,q]| = 23|[p,q]| = 23|p||q|\sin\frac{\pi}{6} = 92.$ **Ответ** 92.

Задача 5. Вывод формулы проекции вектора на ось $Пр_b a = \frac{(a,b)}{|b|}$.

Во-первых, $(a,b)=|a||b|\cos\varphi$.



(чертёж с доски)

Во-вторых, длина проекции r это катет, $|a|$ гипотенуза треугольника, поэтому $\frac{r}{|a|} = \cos\varphi$. Получается, что $(a,b) = |a||b|\frac{r}{|a|}$, то есть $(a,b) = |b| \cdot r$, откуда и следует $r = \frac{(a,b)}{|b|}$.

Задача 6. (8.18 [1]) Найти проекцию вектора $a = (4,5,-6)$ на ось $b = (1,-2,-2)$.

Решение. $Пр_b a = \frac{(a,b)}{|b|} = \frac{4-10+12}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{3} = 2$. **Ответ.** 2.

Задача 7. Найти смешанное произведение трёх векторов: $(3,2,6),(1,4,5),(-2,7,1)$.

Решение. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 12+42-20+48-105-2 = -25.$$ **Ответ.** -25.

Домашнее задание. Векторы a,b выражены через p,q: $a = 2p-4q$, $b = p-3q$. $|p| = 5, |q| = 11$, угол между ними 60^0.

№ 1. Найти (a,b). **№ 2.** Найти | [a,b] |.

45 минут - контрольная работа. Темы:
1. Умножение матриц
2. Определитель (3-го порядка).
3. Обратная матрица (3-го порядка).
4. Ранг матрицы.

Практика № 7
(Подробный разбор домашних задач по скалярному и векторному произведению).

Задача 1. Векторы a,b выражены через p,q: $a = 2p - 4q$, $b = p - 3q$. $|p| = 5, |q| = 11$, угол между ними 60^0. Найти (a,b).

Решение. $(a,b) = (2p - 4q, p - 3q) =$

$$2(p,p) - 6(p,q) - 4(q,p) + 12(q,q) = 2(p,p) - 10(p,q) + 12(q,q) =$$

$$2|p|^2 - 10|p| \cdot |q| \cdot \cos(60) + 12|q|^2 = 50 - 10 \cdot 55 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 121 =$$

$$50 - 275 + 1452 = 1227.$$

Ответ. 1227.

Задача 2. Векторы a,b выражены через p,q: $a = 2p - 4q$, $b = p - 3q$. $|p| = 5, |q| = 11$, угол между ними 60^0. Найти | [a,b] |.

Решение. | [a,b] | = $\left|[2p - 4q, p - 3q]\right| =$

$$|2[p,p] - 6[p,q] - 4[q,p] + 12[q,q]| = |0 - 6[p,q] + 4[p,q] + 0| =$$

$$|-2[p,q]| = 2|[p,q]| = 2|p||q|\sin(60) = 2 \cdot 55 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 55\sqrt{3}.$$

Ответ. $55\sqrt{3}$.

Системы линейных алгебраических уравнений.

Сначала решим задачи с помощью матричного метода и с помощью метода Крамера.

Задача 3. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x+4y=-2 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$$

Решение.

3-а. Матричным методом.

Запишем систему в виде: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Домножим на обратную матрицу слева обе части равенства, для этого сначала найдём обратную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-12=-16\neq 0$$

Выполним действия, необходимые для поиска обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\to-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим $A^{-1}b$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 13 \end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4-52 \\ 6+26 \end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -48 \\ 32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили $x=3, y=-2$.

3-б. Методом Крамера.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 13 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-48}{-16}=3 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{32}{-16}=-2.$$

Ответ. $x=3, y=-2$.

Задача 4. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x-4y=-2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

Решение.

3-а. Матричным методом.

Запишем систему в виде: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу для А.

$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-8)=9\neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\to\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2+20 \\ 4+5 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3-б. Методом Крамера.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{18}{9}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{9}{-9}=1.$$

Ответ. $x=2, y=1$.

Метод Гаусса.

Задача 5. Решить систему уравнений $\left.\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =6 \end{matrix}\right\}$

Решение.

Построим расширенную матрицу системы и преобразуем её.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

чтобы обнулились коэффициенты ниже левого верхнего угла, то есть чтобы исчезла переменная x из всех уравнений кроме первого, надо:
а) из 2-й строки вычесть 1-ю;
б) из 3-й строки вычест удвоенную 1-ю.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1-1 & 2-1 & -3-2 & 1-5\\ 2-2 & 1-2 & 1-4 & 6-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5 & -4\\ 0 & -1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

Теперь, чтобы обнулить ниже чем a_{22}, нужно к 3-й строке просто прибавить 2-ю, так как знаки там противоположны. При этом структуру из нулей, которые уже получились слева, мы на последующем шаге всё равно никак не испортим, ведь там к 0 будет прибавляться 0 либо вычитаться 0, то есть ступенчатая структура там уже всё равно будет сохраняться.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5 & -4\\ 0 & -1+1 & -3-5 & -4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -8 & -8\end{pmatrix}$$

Когда в основной матрице уже получена треугольная структура, снова перепишем в виде системы

$$\left.\begin{matrix}x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5\\ & x_2 & -5x_3 & =-4\\ & & -8x_3 & =-8\end{matrix}\right\}$$

В первом уравнении 3 неизвестных, а в каждом следующем всё меньше и меньше, а в последнем вообще только одна неизвестная. Именно этой цели мы и хотели добиться, приводя к треугольному виду: из последнего уравнения можно теперь сразу выразить $x_3=1$. Затем с этой информацией мы поднимаемся в предпоследнее уравнение, где две неизвестных, впрочем, одна из них уже известна.

$x_2-5=-4 \Rightarrow x_2=1$.

А теперь уже две последних неизвестных стали известны, и с этой информацией поднимаемся в 1-е уравнение, подставляя туда $x_3 = 1$ и $x_2 = 1$. Итак, $x_1 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow x_1 = 2$.

Ответ. x_1=2, x_2=1, x_3=1.

Можно ответ записать и в виде вектора: $\bar{x} = (2,1,1)$.

Задача 6. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +3x_3 & =11 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =6 \\ x_1 & & +x_3 & =3 \end{array}\right\}$

Решение. Во-первых, можно всё 2-е уравнение сократить на 2, так удобнее для решения, числа будут меньше. Затем обнуляем ниже углового элемента: вычитаем из 2-го уравнения удвоенное 1-е, а также 3-го 1-е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 2-2 & 1-0 & 1-6 & 3-22 \\ 1-1 & 0-0 & 1-3 & 3-11 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$ треугольная структура уже получилась.

Перепишем снова в виде системы:

$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & +3x_3 & =11 \\ & x_2 & -5x_3 & =-19 \\ & & -2x_3 & =-8 \end{array}\right\}$ из 3-го уравнения $x_3 = 4$, подставляем во 2-е,

там получается $x_2 - 20 = -19 \Rightarrow x_2 = 1$.

А из 1-го $x_1 + 12 = 11 \Rightarrow x_1 = -1$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$.

Задача 7. Решить систему уравнений $\left.\begin{array}{llll} 4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-4 \\ 6x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =-1 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-3 \end{array}\right\}$

Решение.

При построении расширенной матрицы, сразу же домножим 2-е и 3-е уравнения на такие коэффициенты, чтобы в начале строки были числа, кратные угловому элементу. А именно, 2-ю строку на 2, а 3-ю строку на 4. Так надо, чтобы потом в методе Гаусса можно было не домножать на дробные коэффициенты при вычитании строк.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 12 & -4 & 6 & -2 \\ 20 & -12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Теперь вычтем из 2-й строки 1-ю, домноженную на 3,
а из 3-й строки 1-ю, домноженную на 5.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 12-12 & -4-(-9) & 6-6 & -2-(-12) \\ 20-20 & -12-(-15) & 8-10 & -12-(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Если теперь поменять местами 2 и 3 строки, получится:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ система: } \left.\begin{matrix} 4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =-4 \\ & 3x_2 & -2x_3 & =8 \\ & 5x_2 & & =10 \end{matrix}\right\}$$

И хотя матрица не выглядит как матрица треугольного вида, тем не менее, основная идея метода Гаусса уже реализована: чем ниже, тем меньше переменных, а в последнем уравнении всего одна, а именно x_2. Здесь тоже можно последовательно выразить все переменные, просто начинаем не с последней, а в другом порядке. К треугольному виду в этом случае можно до конца и не приводить.

Итак, из третьего: $5x_2 = 10$, то есть $x_2 = 2$.

Подставляем во второе уравнение. $6 - 2x_3 = 8$, т.е. $-2x_3 = 2$, $x_3 = -1$.

Из первого: $4x_1 - 6 - 2 = -4$, откуда $4x_1 = 4$, $x_1 = 1$.

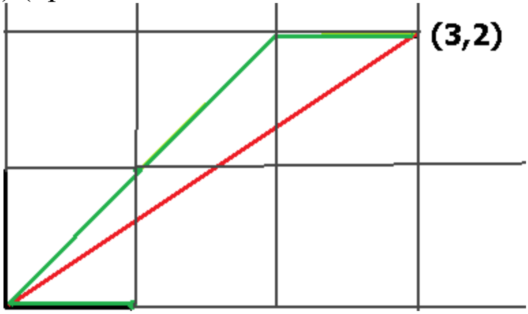
Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Координаты в новом базисе.

Любой вектор можно выразить не только как комбинацию базисных векторов, расположенных на осях, например (1,0) и (0,1), но и как комбинацию какой-то другой линейно-независимой системы.

Так, $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, в ведь то же время и $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

В декартовом базисе координаты (3,2) (пройти 3 шага вправо и 2 вверх), а в новом базисе, состоящем из векторов (1,1) и (1,0) координаты (2,1) (пройти 2 шага по диагонали и 1 шаг вправо).



Найти новые координаты можно так. Запишем их сначала как неизвестные в векторном равенстве:

$x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ а это очевидно, преобразуется к системе:

$\begin{cases}x_1 + x_2 = 3\\ x_1 = 2\end{cases}$. Ответ: координаты (2,1).

Матрица, где векторы нового базиса записаны по столбцам, а именно $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ для этого примера, называется **матрицей перехода** от старого к новому базису, обозначается C. Именно она и есть основная матрица системы, которую надо решить. Правая часть это старые координаты. Верно равенство $C\overline{x}=\overline{b}$, т.е. новые координаты можно найти и так: $\overline{x}=C^{-1}\overline{b}$ умножив обратную матрицу на старые координаты. Впрочем, это то же самое, что решить систему с квадратной матрицей матричным методом.

Задача 8. $a=(1,1), b=(2,1)$ Найти новые координаты вектора (3,2).

Решение.

Векторное равенство для этой ситуации: $x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, получается система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$.

Вычитая из 1-го уравнения 2-е, сразу видим $x_2 = 1$, а тогда и $x_1 = 1$.
Ответ. Координаты в новом базисе равны (1,1).

Задача 9. $a = (1,1), b = (1,0)$ Найти новые координаты вектора (5,4).
Решение.

Векторное равенство: $x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$, система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \quad\quad = 4 \end{cases}$.

Видно из 2-го уравнения, что $x_1 = 4$, тогда $x_2 = 1$.
Ответ. Координаты в новом базисе (4,1).
Задача 10. Дан базис в пространстве: $a = (1,2,3), b = (0,1,1), c = (1,1,1)$.
Найти новые координаты вектора (0,3,4).
Решение.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \quad \text{система: } \left.\begin{matrix} x_1 & & +x_3 = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 = 3 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 = 4 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&1&3\\3&1&1&4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1&0\\2-2&1-0&1-2&3-0\\3-3&1-0&1-3&4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&3\\0&1&-2&4\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&3\\0&1-1&-2-(-1)&4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&3\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Система: $\left.\begin{matrix} x_1 & & +x_3 = 0 \\ & x_2 & -x_3 = 3 \\ & & -x_3 = 1 \end{matrix}\right\}$. Из 3-го уравнения $x_3 = -1$.

Тогда из 2-го: $x_2 - (-1) = 3$, т.е. $x_2 = 2$.
Из 1-го уравнения: $x_1 - 1 = 0$, то есть $x_1 = 1$.
Ответ. Координаты в новом базисе $(1,2,-1)$.

Практика № 8
Неопределённые системы ($r < n$).

Задача 1. Решить неоднородную систему $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = 2 \end{matrix}\right\}$

Решение. Построим расширенную матрицу и преобразуем её.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2-2 & 1-2 & -1-2 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Это равносильно такой системе уравнений $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ -x_2 - 3x_3 & = -4 \end{matrix}\right\}$

Базисный минор в первых двух столбцах, 3-й столбец соответствует свободной переменной x_3, её надо перенести вправо.

$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 & = 3 - x_3 \\ -x_2 & = -4 + 3x_3 \end{matrix}\right\}$ теперь надо выразить x_1, x_2 через x_3.

x_2 фактически и так уже почти выражено, во 2-м уравнении.

$x_2 = 4 - 3x_3$. Подставим теперь эту информацию в 1-е уравнение.

$x_1 + (4 - 3x_3) = 3 - x_3$, откуда $x_1 = -1 + 2x_3$.

Вот эти два выражения $x_1 = -1 + 2x_3$, $x_2 = 4 - 3x_3$
как раз и составляют общее решение системы. Задавая любое значение x_3, можно вычислить x_1, x_2, и получится конкретная тройка чисел, то есть частное решение.

Общее решение можно записать также в виде такого вектора:
$(-1 + 2x_3, 4 - 3x_3, x_3)$.

Частные решения, например:

$x_3 := 1 \Rightarrow$ частное решение $(1,1,1)$.

$x_3 := 0 \Rightarrow$ частное решение $(-1,4,0)$.

Ответ. Общее решение $(-1 + 2x_3, 4 - 3x_3, x_3)$.

Задача 2. Решить неоднородную систему $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 5 \end{array}\right\}$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, впрочем, сразу при этом удобно будет поменять местами 1-ю и 3-ю строки, чтобы угловой элемент содержал именно число 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

обнулим всё ниже углового элемента, для этого:
из 2-й строки вычтем 1-ю, из 3-й удвоенную 1-ю, из 4-й 1-ю, домноженную на 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

теперь можно поменять местами 2 и 3 строки, а также домножить на -1 три последних уравнения (там почти везде были знаки минус)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

затем из 4-й строки вычитаем 2-ю, чтобы продолжить стандартную процедуру метода Гаусса, потом видим что 3-я и 4-я стали одинаковы, тогда из 4-й вычитаем 3-ю. Получается, что 4-е уравнение 0 = 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, осталось 3 уравнения, базисный минор легко заметить в первых трёх столбцах (там треугольная структура матрицы, и этот определитель явно отличен от 0). 4-й столбец не входит в базисный минор, то есть 4-я переменная свободная, т.е. когда будем записывать систему, переносим её через знак равенства во всех уравнениях.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 - x_4 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 1 - x_4 \\ 3x_3 &= -2 - 3x_4 \end{aligned}\right\}$$

Из последнего уравнения $x_3 = -\frac{2}{3} - x_4$, подставляя это выражение во 2-е уравнение, выразим x_2. $x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_4 - 3x_3) = \frac{1}{3}(1 - x_4 + 2 + 3x_4)$,

$x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_4$. Далее из 1-го уравнения:

$x_1 = 1 - x_4 - x_2 - 2x_3 = 1 - x_4 - 1 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{4}{3} + 2x_4$,

$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4$. Итак, общее решение:

$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4$, $x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_4$, $x_3 = -\frac{2}{3} - x_4$.

Можно записать в виде вектора: $\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4, 1 + \frac{2}{3}x_4, -\frac{2}{3} - x_4, x_4\right)$.

Если задать, например, $x_4 = 0$ получим частное решение: $\left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}, 0\right)$.

Ответ. Общее решение: $\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4, 1 + \frac{2}{3}x_4, -\frac{2}{3} - x_4, x_4\right)$.

Задача 3. Решить неоднородную систему $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \end{matrix}\right\}$

Решение. Запишем расширенную матрицу, вычтем из 2-й строки 1-ю. Здесь всего две строки, так что метод Гаусса проводится достаточно коротко.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Видим, что базисный минор можно выбрать в первых двух столбцах. Получается, что 3-я переменная свободная. Перепишем снова в виде системы, а не матрицы.

$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_2 + 2x_3 & = 1 \end{matrix}\right\}$ переносим x_3 вправо: $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 & = 2 - x_3 \\ x_2 & = 1 - 2x_3 \end{matrix}\right\}$

Выражаем x_2, а затем поднимаемся в 1-е уравнение и x_1,через константы и x_3. Впрочем, x_2 фактически и так уже выражено: $x_2 = 1 - 2x_3$. Подставим это выражение в 1-е уравнение $x_1 + (1 - 2x_3) = 2 - x_3$, тогда $x_1 = 1 + x_3$

общее решение симстемы: $\left.\begin{matrix} x_1 & = 1 + x_3 \\ x_2 & = 1 - 2x_3 \end{matrix}\right\}$

Также записывается в виде вектора: $(1 + x_3, 1 - 2x_3, x_3)$.

Задавая какое-либо значение x_3, всякий раз можем вычислить остальные переменные, и получить тройку чисел. Частные решения: (1,1,0) или (2,-1,1) или (3,-3,2) ... их бесконечно много.

Ответ. Общее решение $(1 + x_3, 1 - 2x_3, x_3)$.

Однородные системы.

Задача 4. Решить однородную систему:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 0 \end{matrix}\right\}$$

Решение.

Видим, что отличие от предыдущей задачи в том, что справа нулевые константы. Если преобразовывать расширенную матрицу, то получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что справа всё равно как был, так и остаётся столбец из нулей, так что в будущем для однородных систем можно использовать только основную матрицу, ведь расширенная не несёт никакой новой информации, всё равно там справа нулевой столбец, и он не меняется при преобразованиях строк.

Итак, получили систему $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ базисный минор можно заметить в первых двух столбцах, так что x_3 свободная переменная, переносим её вправо: $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}\right\}$. Теперь последовательно выражаем через свободную переменную две базисные переменные.

Из 2-го: $x_2 = -2x_3$, а подставляя в 1-е, получим

$x_1 - 2x_3 = -x_3$, т.е. $x_1 = x_3$.

Общее решение системы : $\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}\right\}$.

Также записывается в виде вектора: $(x_3, -2x_3, x_3)$.

Отличие от прошлой задачи в том, что на всех местах, где там были константы, здесь 0. Все переменные преобразовывались точно так же.

Частные решения здесь отличаются тем, что задавая x_3 в k раз больше, мы и все остальные получим тоже в k раз больше:

$(1,-2,1)$, $(2,-4,2)$, $(5,-10,5)$, $(10,-20,10)$ и так далее.

То есть все тройки чисел будут пропорциональны какой-то одной.

Если для неоднородной системы представить эти тройки чисел как точки в пространстве, то там они образовывали прямую,не проходящую через начало координат, а для однородной системы - проходящую через начало координат. Поэтому разумно выбрать для этой прямой всего 1 вектор, который задаёт её. Это как раз и есть ФСР (фундаментальная система решений). ФСР $(1,-2,1)$.

Ответ. Общее решение $(x_3, -2x_3, x_3)$, ФСР $(1,-2,1)$.

Задача 5. Решить однородную систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Можно записать основную матрицу и там вычесть 1-ю строку из 2-й, впрочем, можно для небольшой системы сделать это и сразу в системе, вычесть 1-е уравнение из 2-го. Получится:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг равен 2, а неизвестных 3, 3-я неизвестная свободная, переносим вправо. Тогда: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$

Из 2-го уравнения $x_2 = 2x_3$, тогда $x_1 + 2x_3 = -x_3$, а значит $x_1 = -3x_3$.

Общее решение: $x_1 = -3x_3$, $x_2 = 2x_3$. В виде вектора: $(-3x_3, 2x_3, x_3)$.

Присвоим $x_3 := 1$, получим остальные неизвестные.

ФСР состоит всего из одного вектора: $(-3,2,1)$. Все остальные решения пропорциональны этому.

Если бы, например, присвоили $x_3 := 2$, получили бы $(-6,4,2)$. Это потому, что всего одна свободная переменная.

Ответ. Общее решение: $(-3x_3, 2x_3, x_3)$, ФСР $(-3,2,1)$.

Задача 6. Решить однородную систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Решение. Запишем основную матрицу, преобразуем её.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

снова представим в виде системы: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

базисный минор порядка 2, можно обвести в левом углу, поэтому 3-я и 4-я переменная - свободные. Здесь их уже две, так как $r = 2, n = 4$, поэтому $n - r = 2$. Перенесём их через знак равенства.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

здесь x_2 уже выражено: $x_2 = 2x_3 - x_4$, подставим это в первое уравнение, чтобы выразить и x_1.

$x_1 + (2x_3 - x_4) = -x_3 - x_4$, $x_1 = -3x_3$.

Общее решение: $x_1 = -3x_3$, $x_2 = 2x_3 - x_4$.

В виде вектора: $(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4)$.

Если поочерёдно присвоить значение 1 каждой из свободных переменных (а другая в это время 0) то получим гарантированно 2 линейно-независимых вектора, они не пропорциональны, так как число 1 в них на разных местах.

$x_3 := 1, x_4 := 0$, получим $(-3,2,1,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(0,-1,0,1)$.

Эти 2 вектора $\{ (-3,2,1,0), (0,-1,0,1) \}$ и есть ФСР. Это $n - r$ частных решений, из которых можно составить любые другие частные решения. Любые их линейные комбинации будут частными решениями однородной системы.

Ответ. Общее решение: $(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4)$.

ФСР это множество из 2 векторов: $\{ (-3,2,1,0), (0,-1,0,1) \}$.

Задача 7. Решить однородную систему, найти ФСР.

$$\left. \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =0 \end{array} \right\}$$

Решение. Запишем основную матрицу системы и преобразуем её методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 2, базисные столбцы 1-й и 2-й. Несмотря на то, что сначала могло показаться, что здесь будет одна свободная переменная (4 переменных и 3 уравнения), на самом деле здесь будет две свободных переменных, ведь 3-е уравнение оказалось линейной комбинацией первых двух. $n - r = 4 - 2 = 2$.

Снова возвращаемся от матрицы к системе уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

перенесём свободные неизвестные вправо:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 - x_4 \\ 3x_2 \quad = -4x_3 \end{cases}$ из 2 уравнения $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$, подставим это в 1-е,

будет $x_1 + \frac{4}{3}x_3 = x_3 - x_4$, то есть $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$.

Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$.

В виде вектора: $\left(-\frac{1}{3}x_3 - x_4, -\frac{4}{3}x_3, x_3, x_4\right)$

Построим ФСР из 2 векторов.

$x_3 := 3, x_4 := 0$, получим $(-1,-4,3,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(-1,0,0,1)$.

Так как здесь есть дроби, то для того, чтобы векторы в ФСР содержали только целые координаты, можно задавать не только 1, но и другое число, главное только чтобы в 3 и 4 координатах помещался невырожденный минор. Если мы задаём поочерёдно каждой свободной переменной какое-то число (не обязательно 1) а остальным 0, то линейная независимость этой системы векторов всё равно заведомо обеспечена.

Ответ. Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$.

ФСР из 2 векторов: $\{(-1,-4,3,0),(-1,0,0,1)\}$.

Задача 8. Решить однородную систему, найти ФСР.

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Решение. Преобразуем методом Гаусса основную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Треугольная структура продолжилась до самой последней строки, и не проявилась строка из нулей, то есть ранг равен 3. Здесь всего одна свободная переменная. Развернём обратно эту матрицу, т.е. запишем в виде системы, а затем перенесём свободные переменные вправо.

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =0 \\ & & -4x_3 & +4x_4 & =0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =0 \\ & & -4x_3 & +4x_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Из последнего, $x_3 = x_4$, это подставим во 2-е и получим $x_2 = x_4$.

Затем это всё в 1-е уравнение, получим $x_1 = -x_4$.

ФСР: один вектор $(-1,1,1,1)$.

Ответ. Общее решение: $\left(-x_4, x_4, x_4, x_4\right)$. ФСР: $(-1,1,1,1)$

Задача 9. Решить однородную систему, найти ФСР.

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Решение. Преобразуем методом Гаусса основную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь ранг 2, неизвестных 5, $n - r = 5 - 2 = 3$.

Переписывая в виде системы, переносим вправо 3 свободных переменных.

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & = & x_3 & -x_4 & -x_5 \\ & -x_2 & = & -3x_3 & +2x_4 & +x_5 \end{array}\right\}$$

Выражаем из 2-го x_2 как линейную функцию от $x_{3,} x_{4,} x_5$, а затем с помощью 1-го уравнения, также и x_1.

$x_2 = 3x_3 - 2x_4 - x_5$, $x_1 = -2x_3 + x_4$.

Общее решение: $(-2x_3 + x_4,\ 3x_3 - 2x_4 - x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$.

ФСР из 3 векторов. Для этого задаём поочерёдно 1 какой-либо из свободных переменных, а 0 остальным.
ФСР: $(-2,3,1,0,0)$, $(1,-2,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$.

Ответ. Общее решение: $(-2x_3 + x_4,\ 3x_3 - 2x_4 - x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$.

ФСР: $(-2,3,1,0,0)$, $(1,-2,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$.

Домашнее задание.
Задача 1. Решить однородную систему, найти ФСР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ. Общее решение $x_1 = -3x_3 - 5x_4$, $x_2 = 5x_3 + 4x_4$.
ФСР (-3,5,1,0) и (-5,4,0,1).

Задача 2. Решить однородную систему, найти ФСР

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Ответ. Общее решение: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3$, ФСР: $\{(-1,-4,3)\}$.

<u>Практика 9 (7 октября у обеих групп).</u>

Линейные операторы, собственные векторы.

Задача 1. Построить матрицу линейного оператора в 2-мерном пространстве, если действие оператора задано таким образом: $L:(x_1,x_2)\to(x_1-2x_2, 3x_1+5x_2)$.

Решение. Находим, в какие векторы отображаются два базисных вектора: $(1,0)\to(1,3)$, $(0,1)\to(-2,5)$.

Эти результаты запишем по столбцам: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

Ответ. Матрица линейного оператора $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\ 3x_1+5x_2\end{pmatrix}$. То есть действительно, вычисление координат образа вектора по данным формулам даёт точно такой же результат, как и с помощью умножения на матрицу.

Так, $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 8\end{pmatrix}$ но ведь и по исходным формулам $L:(x_1,x_2)\to(x_1-2x_2, 3x_1+5x_2)$ получилось бы то же самое: $L:(1,1)\to(-1,8)$.

Задача 2. Построить матрицу линейного оператора в 3-мерном пространстве $L:(x_1,x_2,x_3)\to(3x_1+2x_2+x_3, 2x_2, -2x_1+4x_2)$

Решение. Отобразим базис 3-мерного пространства.

$L:(1,0,0)\to(3,0,-2)$ $L:(0,1,0)\to(2,2,4)$ $L:(0,0,1)\to(1,0,0)$

Ответ. Матрица линейного оператора $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

Задачи на поиск собственных чисел и векторов.

Задача 3. Найти собственные числа и векторы линейного оператора, заданного матрицей: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала построим харакреристическое уравнение, то есть отнимем λ по главной диагонали, и приравняем этот определитель к нулю. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Вычислим определитель, чтобы свести всё к уравнению. $(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$. Характеристические корни $\lambda = 1, \lambda = 3$. Теперь поочерёдно подставляем каждое конкретное из найденных λ, и формируем однородную систему.

$\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ система: $\begin{cases} 2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

Здесь есть единственная информация: $y = 0$. Переменной x в системе нет, но это значит, что она может принимать любое значение, она не влияет на систему уравнений. Распространённая ошибка в данном случае - думать, что если коэффициенты при x нулевые, то $x = 0$. На самом деле x является свободной неизвестной. Если вспомнить тему «ранг матрицы», то увидим, что базисный минор матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ это минор 1-го порядка, и расположен именно во втором столбце (любая клетка размера 1 на 1), где есть число. Невырожденного минора 2-го порядка здесь нет. Таким образом, 1-я переменная свободная, и пусть даже 2-я через неё здесь не выражена, а просто равна 0, но всё равно свободной переменной мы можем присвоить любое значение, например 1. Итак, ФСР в данном случае (1,0), и именно это и является собственным вектором. Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Замечание. Любой вектор на этой прямой, то есть вида (с,0) тоже является собственным.

$\lambda = 3$

$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ система состоит из одного уравнения: $-2x + 2y = 0$. Ранг системы равен 1, а вот базисный минор можно выбрать как в 1-м так и во 2-м столбце, поэтому любую переменную можно считать свободной. Неважно, какую выразить через другую, всё равно одна и та же информация: $x = y$ или $y = x$. Задавая одну, получаем вторую. Вектор (1,1).

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Действительно, мы нашли такой вектор, который при умножении на эту матрицу становится больше в 3 раза.

Ответ. $\lambda = 1$ вектор (1,0), $\lambda = 3$ вектор (1,1).

Задача 4. Найти собственные числа и векторы для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$.

$D = 16 - 4(-5) = 36$. Корни $\frac{4 \pm 6}{2}$, то есть -1 и 5.

Ищем собственный вектор для каждого из этих чисел.

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

система состоит из двух одинаковых уравнений $\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

Одну переменную выразим через вторую $x = -y$. ФСР $(-1,1)$.

$\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 3 & 2-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

система состоит из пропорциональных уравнений $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$

Одну переменную выразим через вторую $x = y$. ФСР $(1,1)$.

Ответ. $\lambda = -1$ вектор $(-1,1)$, $\lambda = 5$ вектор $(1,1)$.

Проверка. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Найти собственные числа и векторы для матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 = 0$

Здесь хар. корень кратности 2: $\lambda = 5$.

Ищем собственные векторы.

$$\begin{pmatrix} 5-5 & 1 \\ 0 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Однородная система состоит всего лишь из одного уравнения $y = 0$.

При этом формально x свободная переменная, так как базисный минор 1-го порядка во втором столбце, а 1-й столбец тогда не базисный. То есть x можно присваивать любое значение, например 1. Итак, собственный вектор (1,0). Двух линейно-независимых собственных векторов для этого оператора нет.

Ответ. $\lambda = 5$, собственный вектор (1,0).

Замечание. Вообще, количество собственных векторов меньше или равно кратности корня.

А если бы матрица изначально была $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ то система уравнений получилась бы только из уравнений вида 0 = 0, то есть обе переменные свободные, ФСР было бы (1,0) и (0,1) и тогда собственные векторы - вся плоскость.

Задача 6. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к уравнению

$(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$, корни которого $\lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4$.

Найдём собственные векторы.

$\lambda = 2$. Вычтем 2 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}.$$

Из этих уравнений следует, что $z = 0, y = 0$, про x нет информации, это свободная переменная. ФСР: вектор (1,0,0).

$\lambda = 3$. Вычтем 3 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Из этих уравнений следует $z = 0, y = x$, ФСР: вектор (1,1,0).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базисный минор здесь во 2 и 3 столбцах, так что x могло считаться свободной переменной.

$\lambda = 4$. Вычтем 4 по диагонали, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ то есть } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисный минор можно найти, например, в левом верхнем углу, тогда z считаем свободной переменной и все остальные выразим именно через неё. Из 2-го $y = z$, а затем из 1-го $-2x + 2z = 0$, то есть $x = z$. ФСР: вектор (1,1,1).

Ответ.
Собст. число $\lambda = 2$ собст. вектор (1,0,0),
собст. число $\lambda = 3$ собст. вектор (1,1,0)
собст. число $\lambda = 4$ собст. вектор (1,1,1).

Задача 7. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Решение.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$ разложим по 2-й строке:

$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((-1-\lambda)(4-\lambda)+6\big) = 0$ что сводится к $(1-\lambda)\big(\lambda^2 - 3\lambda + 2\big) = 0$, первый корень и так виден и равен 1, у второго выражения найдём корни, например, через дискриминант, получаем 1 и 2. Итак, $(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$, корни 1,1,2, они же собственные числа. Два характеристических корня совпали (1 это корень кратности 2). Теперь ищем собственные векторы.

$\lambda = 1$.

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, если в такой системе уравнений вычесть из 3-го уравнения утроенное 1-е, то 3-е обнулится, и в итоге ранг системы равен 1. То есть мы видим, что в случае корня кратности 2, ранг понизился сразу на 2 пункта, здесь будет 2 свободных неизвестных.
Итак, система из 1 уравнения с 3 неизвестными: $-2x - 2y + z = 0$.
Тогда $z = 2x + 2y$, свободные переменные x, y поочерёдно принимают значение 1, ФСР из двух векторов: (1,0,2) (0,1,2).

$\lambda = 2$.

$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, при этом сразу замечаем, что из 2-го уравнения будет следовать $y = 0$, поэтому в остальных уравнениях его сразу не пишем. Однородная система:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -3x + z = 0 \\ -6x + 2z = 0 \end{cases}$$

Ещё два уравнения в ней пропорциональны, так что в итоге, у нас есть такое общее решение: $y = 0, z = 3x$. ФСР вектор (1,0,3).

Ответ. Кратный корень $\lambda = 1$ два вектора: (1,0,2) (0,1,2),
Корень $\lambda = 2$ вектор (1,0,3).

Проверка. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Доказать, что линейный оператор $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет собственных векторов.

Решение. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$.

$D = 4 - 20 = -16 < 0$, действительных корней нет, то есть корни комплексные, они $\notin R$.

Замечание. Если линейный оператор в 3-мерном пространстве, то характеристический многочлен 3 степени, и в том случае есть по крайней мере хотя бы один действительный корень.

Задача 9. Доказать, что для оператора поворота $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ в общем случае нет собственных векторов, и найти такие углы α, при которых собственные векторы есть.

Решение. $\begin{vmatrix} (\cos\alpha)-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha)-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $((\cos\alpha)-\lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$,

$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$, получили многочлен вида $a\lambda^2 + b\lambda + c$, где $a = 1,\ \ b = -2\cos\alpha,\ \ c = 1.\quad D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1)$.

$D \le 0$ так как $\cos^2\alpha \le 1$. Лишь для углов 0 и π получается D = 0, и тогда собственные векторы есть. При $\alpha = 0$ матрица линейного оператора примет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда все векторы плоскости являются собственными, и соответствуют числу $\lambda = 1$.

При $\alpha = \pi$ матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, все векторы собственные, соответствуют $\lambda = -1$.

Задача 10. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к уравнению

$(1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) = 0$, корни которого: $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 7$.

$\lambda = 1$.

$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, система $\begin{cases} 6x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

откуда $y = -z, x = 0$, ФСР это вектор $(0,-1,1)$.

$\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ система } \begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

откуда $y = -5x, z = 0$, ФСР это вектор $(1,-5,0)$.

$\lambda = 7$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ система } \begin{cases} y + z = 0 \\ -5y + z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases}$$

откуда $z = 0$, а значит и $y = 0$, x свободная переменная.
Тогда ФСР это вектор (1,0,0).

Ответ.
Собст. число $\lambda = 1$ собст. вектор $(0,-1,1)$,
собст. число $\lambda = 2$ собст. вектор $(1,-5,0)$,
собст. число $\lambda = 7$ собст. вектор (1,0,0).

Домашнее задание. (9.6 из [1]). Найти собственные числа и векторы для линейного оператора $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ.
Собст. число $\lambda = 1$ собст. вектор $(0,2,-1)$,
собст. число $\lambda = 4$ собст. вектор (0,1,1),
собст. число $\lambda = 16$ собст. вектор $(-5,-2,1)$.

Практика 10

Задача 1. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Решение. Найдём собственные числа с помощью характеристического уравнения.

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ сводится к $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0$

Видно, что есть по крайней мере один корень $\lambda = 1$.

Затем разделим многочлен $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12$ на $(\lambda - 1)$, получим крадратичное уравнение и там найдём ещё 2 корня.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 - 7\lambda + 12 \\ \quad -7\lambda^2 + 19\lambda & \\ \quad \underline{-7\lambda^2 + 7\lambda} & \\ \qquad\quad 12\lambda - 12 & \\ \qquad\quad \underline{12\lambda - 12} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Итак, разделилось без остатка. Таким образом,

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 \ = \ (\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 12)$.

Для многочлена 2 степени: $D = 49 - 4 \cdot 12 = 1$. Корни $\dfrac{7 \pm 1}{2}$, т.е. 3 и 4.

Итак, собственные числа: $\lambda = 1, \lambda = 3, \ \lambda = 4$.

Теперь ищем вектор для каждого из этих чисел.

Пусть $\lambda = 1$. Составим однородную систему

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ здесь сразу видим, что 2 и 3 строка одинаковы, то есть 3-е уравнение копия 2-го, так что в системе фактически не 3, а 2 уравнения.

Запишем систему, заодно при этом поделив 1-е уравнение на 2.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Из 1-го сразу $y = 2x$, подставляя во 2-е, можно также и z выразить через x: $9x - 3z = 0$, т.е. $z = 3x$. При этом x свободная переменная. Общее решение $(x, 2x, 3x)$. ФСР это вектор (1,2,3).

Пусть теперь $\lambda = 3$. Составим однородную систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из 1-го уравнения сразу очевидно $x = y$.

Система: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$ Если учесть $x = y$, то $\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 5y - 5z = 0 \end{cases}$ так что очевидно, что и $z = y$. ФСР (1,1,1).

Пусть теперь $\lambda = 3$. Составим однородную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Система: $$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

из 1-го уравнения $x = 2y$, подставим эту информацию во 2-е и 3-е.

$\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 6y - 6z = 0 \end{cases}$ значит $z = y$. ФСР (2,1,1).

Ответ. $\lambda = 1$ собственный вектор (1,2,3),
$\lambda = 3$ собственный вектор (1,1,1),
$\lambda = 4$ собственный вектор (2,1,1).

Квадратичные формы.

Задача 2. Построить матрицу квадратичной формы:
$Q = 3x_1^{\ 2} + 4x_2^{\ 2} + 5x_3^{\ 2} + 6x_1x_2 + 16x_1x_3$.

Решение. По диагонали коэффициенты при квадратах, а остальные должны быть разделены поровну, то есть $16x_1x_3 = 8x_1x_3 + 8x_3x_1$. Таким образом мы добиваемся, чтобы матрица была симметрической.

Ответ. Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка.

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^{\ 2} + 4x_2^{\ 2} + 5x_3^{\ 2} + 6x_1x_2 + 16x_1x_3.$$

Задача 3. Квадратичную форму $Q = 2xy$ привести к главным осям.

Решение. Сначала построим её матрицу: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$, собственные числа $1, -1$. Ищем собственные векторы для каждого из них.

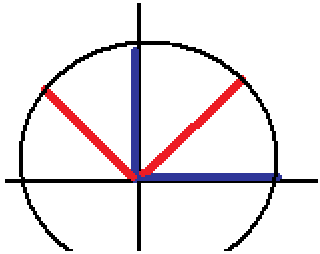
$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = y$, собственный вектор (1,1).

Нормируем этот вектор, то есть делим на его длину, которая составляет $\sqrt{2}$. Получаем $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = -y$, собственный вектор $(-1,1)$.

Нормируем его: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Как видим, эти векторы ортогональны. Это потому, что матрица оператора симметрична (что и так следует из теоремы 7, см.лекции). Обратите внимание, что этот новый базис - повёрнутый на 45^0 декартов базис, то есть (1,0) и (0,1). Синим цветом нарисованы векторы (1,0) и (0,1) а красным $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



При таком преобразовании плоскости не искажаются площади фигур. Если бы мы не нормировали векторы, то при линейном преобразовании искажались бы площади, коэффициенты квадратичной формы в новом базисе не получились бы равны собственным числам λ. Причём если $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ это именно 2-й а не 1-й, то преобразование плоскости получается без зеркального отражения, т.е. просто поворот.

Запишем связь старых и новых координат, новые мы обозначаем z,w.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ здесь надо вспомнить, что для нахождения новых координат мы решали систему уравнений, где основная матрица - это «матрица перехода», у которой в столбцах векторы нового базиса.

Итак, верны такие формулы: $x=\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{w}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{w}{\sqrt{2}}$.

В записи квадратичной формы заменим x,y по этим формулам. Мы увидим, что после приведения подобных сократятся все произведения, содержащие разные переменные, вида zw,wz, и останутся только квадраты, причём коэффициентами как раз и окажутся собственные числа.

$$2xy = 2\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) = z^2 - w^2.$$

Ответ. Кв.форма: $z^2 - w^2$, новый базис $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 4. Квадратичную форму $Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2$ привести к главным осям.

Решение. Матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдём собственные числа и векторы. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

Собственные числа 5 и 1.

Решаем две однородные системы, для каждого λ по отдельности.

$\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ранг системы = 1, остаётся одно уравнение $x = y$, собственный вектор (1,1).

Аналогично,

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ранг системы = 1, остаётся одно уравнение $x = -y$, собственный вектор (-1,1).

Затем нужно нормировать их, то есть поделить на длину. Итак получили новый ортонормированный базис:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Обозначим новые координаты z, w, тогда взаимосвязь старых и новых координат через матрицу перехода выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ - отсюда, умножив матрицу на столбец, можно записать формулы связи старых и новых координат:

$$x = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\ , \qquad y = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\,.$$

Если мы подставим эти x, y в исходную квадратичную форму $Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2$, то увидим, что в ней не будет произведений типа zw, wz, а коэффициенты при квадратах - это и будут ранее найденные собственные числа. Покажем это подробнее:

$$Q = 3x^2 + 4xy + 3y^2 =$$

$$3\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$3\left(\frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2} - 2\frac{zw}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) + 4\left(\frac{z^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) + 3\left(\frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2} + 2\frac{zw}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)z^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)w^2 + 3zw - 3zw = 5z^2 + 1w^2\,.$$

Собственные числа, как видим, как раз и оказались в роли коэффициентов при квадратах.

Ответ. $Q = 5z^2 + w^2$, новый базис $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 5. Привести к главным осям квадратичную форму:
Q(x,y) = 14 x^2+24 xy+21 y^2.

Решение. Матрица: $\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$. Ищем собственные числа и векторы.

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & 12 \\ 12 & 21-\lambda \end{vmatrix} = (14-\lambda)(21-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0\,.$$

$D = 1225 - 600 = 625$, $\lambda = \dfrac{35 \pm 25}{2}$, корни 30 и 5.

Ищем собственные векторы.

Пусть $\lambda = 30$. $\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} -16a + 12b = 0 \\ 12a - 9b = 0 \end{cases}$

уравнения в такой системе пропорциональны, ранг равен не 2, а 1.
Фактически, здесь одно уравнение: $4a = 3b$.
Можно в качестве ФСР принять вектор (3,4).
Однако его ещё надо нормировать. Длина равна $\sqrt{9+16}$ = 5.
Итак, нормированный собственный вектор $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Пусть $\lambda = 5$. $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 9a + 12b = 0 \\ 12a + 16b = 0 \end{cases}$

уравнения пропорциональны, ранг равен 1.
Фактически, здесь одно уравнение: $3a = -4b$.
Можно в качестве ФСР принять вектор $(-4,3)$. Длина равна 5.
Нормированный собственный вектор $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Итак, новый базис состоит из векторов $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Переход к новым координатам:

$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, т.е. $x = \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w$, $y = \frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w$.

Если подставить эти выражения в $14x^2 + 24xy + 21y^2$ и привести подобные, получим $30z^2 + 5w^2$.

$$14\left(\frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w\right)^2 + 24\left(\frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w\right)\left(\frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w\right) + 21\left(\frac{4}{5}z + \frac{3}{5}w\right)^2 =$$

$$z^2\left(14 \cdot \frac{9}{25} + 24 \cdot \frac{12}{25} + 21 \cdot \frac{16}{25}\right) + w^2\left(14 \cdot \frac{16}{25} - 24 \cdot \frac{12}{25} + 21 \cdot \frac{9}{25}\right) +$$

$$zw\left(-14 \cdot \frac{24}{25} + 24 \cdot \frac{9-16}{25} + 21 \cdot \frac{24}{25}\right) =$$

$$z^2\left(\frac{126+288+336}{25}\right)+w^2\left(\frac{224-288+189}{25}\right)+zw\left(\frac{24(-14-7+21)}{25}\right)=$$

$$\frac{750}{25}z^2+\frac{125}{25}w^2+0zw=30z^2+5w^2.$$

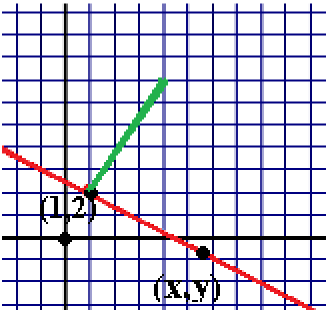
Ответ. $Q=30z^2+5w^2$, новый базис: $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Аналитическая геометрия.

Блок задач на построение уравнений прямых на плоскости.

Задача 1. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 с координатами (1,2) и перпендикуляру n (3,5).

Решение. Возьмём произвольную точку M с координатами (x,y). Если она принадлежит этой прямой, то вектор M_0M, координаты которого равны $(x-1,y-2)$ перпендикулярен вектору n.



Таким образом, скалярное произведение векторов $(x-1,y-2)$ и (3,5) есть 0. Тогда $3(x-1)+5(y-2)=0$, приводя подобные, получаем $3x+5y-13=0$.

Ответ. $3x+5y-13=0$.

Задача 2,3. На закрепление метода. Прямая по точке и перпендикуляру, с какими-либо произвольными случайно взятыми параметрами, которые придумает группа.

Задача 4. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 с координатами (1,2) и направляющему ***l*** (3,5).

Решение. Возьмём произвольную точку M с координатами (x, y). Если она принадлежит этой прямой, то вектор M_0M а именно $(x-1, y-2)$ коллинеарен вектору ***l*** (3,5). Таким образом, их координаты пропорциональны: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5}$. Это уравнение называется каноническим. Приведём к обычному уравнению, для этого домножим на константы. $5(x-1) = 3(y-2)$, то есть $5x-5 = 3y-6$ что сводится к $5x-3y+1=0$.

Замечание. Нормаль к полученной прямой - вектор $(5,-3)$. Вообще говоря, мы могли бы сразу перейти от направляющего вектора к нормали (поменять координаты и у одной из них сменить знак), а потом уже строить уравнение по нормали, как в прошлом методе.

Ответ. $5x-3y+1=0$.

Задача 5. На закрепление метода. Прямая по точке и направляющему, с какими-либо произвольными параметрами.

Практика 11

Задача 1. Построить уравнение прямой по 2 точкам A(1,2) и B(6,9).

Решение. Направляющий вектор AB здесь (5,7). Тогда для всякой точки M с произвольными координатами (x, y), принадлежащей этой прямой, векторы AM и AB коллинеарны. Из координаты пропорциональны, то есть $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{7}$, из этого следует $7x-7 = 5y-10$. В итоге ответ $7x-5y+3=0$.

Замечание. Можно было в качестве основной взять и 2-ю точку а не 1-ю. При этом, после приведения подобных, получилось бы точно такое же уравнение. Действительно, из $\frac{x-6}{5} = \frac{y-9}{7}$ следует $7x-42 = 5y-45$, что приводит к тому же результату $7x-5y+3=0$.

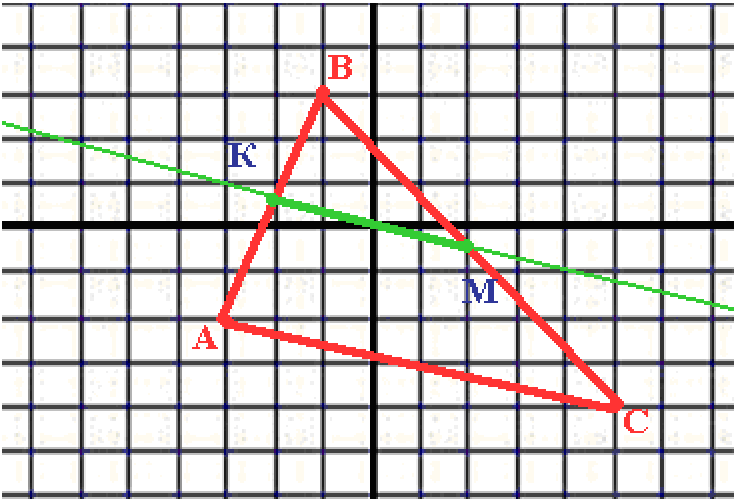
Ответ. $7x-5y+3=0$.

Задача 2. (10.17 [1]) Найти уравнение средней линии треугольника с вершинами $A(-3,-2)$, $B(-1,3)$, $C(5,-4)$, проходящей параллельно стороне АС.

Решение.

Сначала найдём середины сторон AB, BC. Обозначим их, например, через К и М. Найдём среднее арифметическое абсцисс и ординат.

$$К\left(\frac{-3-1}{2},\frac{-2+3}{2}\right)=\left(-2,\frac{1}{2}\right),\quad М\left(\frac{5-1}{2},\frac{-4+3}{2}\right)=\left(2,-\frac{1}{2}\right)$$



На прямой, содержащей отрезок КМ, направляющий вектор $(4,-1)$.

$$\left(x+2,y-\frac{1}{2}\right)\parallel(4,-1)\;\Rightarrow\;\frac{x+2}{4}=\frac{y-1/2}{-1}\;\Rightarrow\;-x-2=4y-2\;\Rightarrow$$

$x+4y=0$. **Ответ.** $x+4y=0$.

Домашнее задание: Найти уравнение средней линии треугольника $A(-3,-2)$, $B(-1,3)$, $C(5,-4)$ параллельно стороне AB.

Ответ. $7x+6y+11=0$.

Блок задач на поиск пересечений прямых в плоскости.

Задача 3. Найти пересечения прямой $3x-4y+12=0$ с координатными осями, а также площадь треугольника, который она отсекает от одной из координатных четвертей.

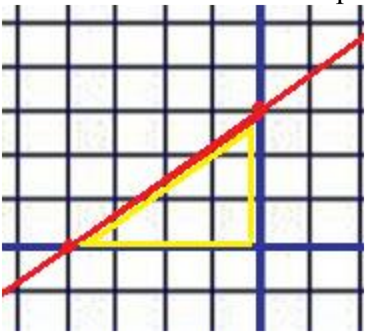
Решение. Сначала присвоим $y=0$ и найдём x.

$3x+12=0$, $x=-4$. Точка пересечения с осью Oy: $(-4,0)$.

Затем присвоим $x=0$ и найдём y.

$-4y+12=0$, $y=3$. точка пересечения с осью Ox: $(0,3)$.

Очевидно, что треугольник лежит во 2-й четверти (см. чертёж).



Его площадь это ровно половина площади прямоугольника, которая, в свою очередь, равна $3\cdot 4=12$. Тогда S = 6.

Ответ. Точки пересечения $(-4,0)$ и $(0,3)$, S = 6.

Задача 4. Найти точку пересечения двух прямых $x+4y-9=0$ и $2x+y-4=0$.

Решение. Запишем оба уравнения в виде системы.

$x+4y=9$

$2x+y=4$

Каждое уравнение системы задаёт прямую, а координаты точки пересечения - это как раз и есть те числа x, y, которые удовлетворяют каждому из уравнений. Система имеет единственное решение, так как определитель основной матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-8 \neq 0$. В любом другом случае, прямые были бы или параллельны, или совпадали.

Систему решим методом Гаусса, вычтем из 2-го удвоенное 1-е.

Получим $-7y=-14$, т.е. $y=2$, тогда $x=1$.

Ответ. Точка пересечения (1,2).

Задача 5. (10.23 [1]) При каком значении параметра А три прямых $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $Ax + y - 13 = 0$
пересекаются в одной точке?

Решение. Составим систему из трёх уравнений.

$2x - y = -3$

$x + y = -3$

$Ax + y = 13$

Достаточно решить систему из первых двух, найти точку пересечения, и затем на втором шаге найти такой параметр, при котором эта точка принадлежит третьей прямой. Сложим 1-е и 2-е уравнения. Получим $3x = -6$, т.е. $x = -2$. Подставим во 2-е. $-2 + y = -3$, тогда $y = -1$.
Итак, 1-я и 2-я прямые пересекаются в точке $(-2,-1)$.
А теперь подставим эти значения $x = -2, y = -1$ в 3-е уравнение, чтобы узнать параметр А.

$-2A - 1 = 13$, $-2A = 14$, $A = -7$.

Ответ. $A = -7$.

Блок задач на поиск расстояний.

Задача 6. Найти расстояние от точки $M_1(1,4)$ до прямой $6x + 2y - 15 = 0$.

Решение. По формуле $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$:

$$d = \frac{|6 + 8 - 15|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{40}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}.$$

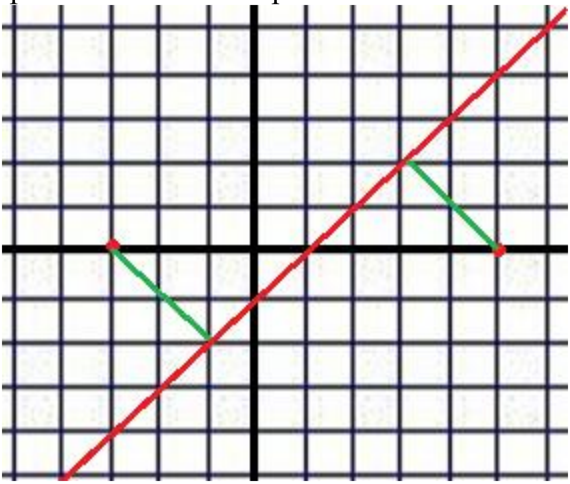
Обратите внимание, что в знаменателе должна быть сумма квадратов не чисел 1 и 4, а 6 и 2, так как A, B это именно коэффициенты из уравнения прямой, а не координаты точки!

Ответ. $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

Задача 7. Найти 2 точки на оси Ох, отстоящие от прямой $x - y - 1 = 0$ на расстояние $2\sqrt{2}$.

Решение. Применим формулу $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ но только в ней d уже известно. В нашем примере должно быть $2\sqrt{2} = \dfrac{|x_1 - y_1 - 1|}{\sqrt{2}}$.

Мы ищем точки вида (с,0), ведь сказано, что они должны быть на оси Ох. Поэтому $2\sqrt{2} = \dfrac{|c-0-1|}{\sqrt{2}}$, $|c-1| = 4$, $c-1 = \pm 4$. Две возможности: $c = -3$ и $c = 5$. На чертеже зелёным показаны кратчайшие пути от этих точек до прямой. Расстояния равны $2\sqrt{2}$.



Ответ. (-3,0) и (5,0).

Задача 8. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x + y + 3 = 0$ и $6x + 3y + 4 = 0$.

Решение. Заметим, что прямые действительно параллельны:

$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{3}{4}$, то есть проворция сохраняется для всех коэффициентов, но нарушается для констант. Если бы уравнения были полностью пропорциональны, то это бы означало, что они задают одну и ту же прямую. А так они параллельны. Если бы не было пропорции и для коэффициентов, то прямые бы пересекались в одной точке.

Для поиска расстояния применяется та же формула $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

на одной прямой выбирается какая-либо точка, и ищется расстояние от этой точки до второй прямой.

Так, можно заметить, что $(-1,-1) \in$ первой прямой.

Если не заметили, то для нахождения какой-либо точки можно присвоить одну переменную (проще всего присвоить 0)и вычислить вторую. Например, $x := 0$, тогда $2 \cdot 0 + y + 3 = 0$, $y = -3$, и точка $(0,-3)$ принадлежит первой прямой. Ищем расстояние от неё до 2-й прямой. $d = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) + 4|}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{|-9+4|}{\sqrt{36+9}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Уравнение плоскости в пространстве.

Задача 9. Построить уравнение плоскости, проходящей через точку А (1,2,3) перпендикулярно вектору n (1,4,2)

Решение. Для произвольной точки $M(x, y, z)$ в плоскости, вектор AM с координатами $(x-1, y-2, z-3)$ ортогонален $n(1,4,2)$. Их скалярное произведение 0. Тогда $(x-1) + 4(y-2) + 2(z-3) = 0$, т.е. $x + 4y + 2z - 15 = 0$.

Ответ. Уравнение плоскости $x + 4y + 2z - 15 = 0$.

Задача 10. Построить уравнение плоскости по точке (2,2,8) и перпендикуляру (3,3,7).

Решение. Как и в прошлой задаче, берём произвольную точку $M(x, y, z)$ в плоскости, тогда вектор $(x-2, y-2, z-8)$ ортогонален вектору $n(3,3,7)$. Тогда $3(x-2) + 3(y-2) + 7(z-8) = 0$ из чего следует $3x + 3y + 7z - 68 = 0$.

Ответ. $3x + 3y + 7z - 68 = 0$.

Задача 11. То же самое с произвольными параметрами.

Задача 12. Построить уравнение плоскости по точке $M_0(-2,3,7)$ и двум направляющим векторам $l_1(4,2,3)$ и $l_2(2,-5,0)$.

Решение. Способ 1. Сначала можно найти нормаль как векторное произведение: $n=[l_1,l_2]$, а затем уравнение плоскости по точке и нормали.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 15e_1 + 6e_2 - 24e_3 .$$

Итак, нормаль $(15,6,-24)$, при этом можно заметить, что есть общий множитель 3, и поделить на 3, ведь от изменения длины, направление нормали не изменится. Итак, рассматриваем $n=(5,2,-8)$.

Теперь возьмём произвольную точку в этой плоскости, и проведём к ней вектор от точки $M_0(-2,3,7)$. Это вектор $(x+2, y-3, z-7)$. Он ортогонален вектору $n=(5,2,-8)$.

Тогда $5(x+2)+2(y-3)-8(z-7)=0$, т.е. $5x+2y-8z+60=0$.

Но это было решение в 2 этапа. А можно проще:

Способ 2. Возьмём вектор $(x+2, y-3, z-7)$ в плоскости, тогда 3 вектора, а именно $M_0M(x+2, y-3, z-7)$, $l_1(4,2,3)$ и $l_2(2,-5,0)$ должны образовывать линейно-зависимую систему. То есть, можем сразу найти такой определитель и приравнять к 0:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-7)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$15(x+2)+6(y-3)-24(z-7)=0$.

Из этого следует $15x+6y-24z+180=0$. Такое уравнение можно сократить на 3, и получается $5x+2y-8z+60=0$.

Ответ. $5x+2y-8z+60=0$.

Задача 13. Построить уравнение плоскости, проходящей через (0,0,0) параллельно 2 направляющим (1,1,2) и (2,1,3).

Решение. Вектор от начала координат до произвольной точки (x, y, z), который сам имеет координаты (x, y, z), лежит в плоскости двух направляющих, т.е. определитель равен 0.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x + y - z = 0.$$

Ответ. $x + y - z = 0$.

Задача 14. Построить уравнение плоскости по трём точкам. A(1,2,3), B(3,5,7), C(4,5,6).

Решение. Здесь можно одну из точек, например A, рассматривать в качестве основной, а две другие помогут найти 2 направляющих вектора: AB и AC. AB = (2,3,4), AC = (3,3,3).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Для удобства вычислений, вынесли из определителя коэффициент 3. Можно сразу сократить на него правую и левую часть.

Итак, $(x-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$-(x-1) + 2(y-2) - (z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2y - z = 0$.

Сократим ещё на -1, получим $x - 2y + z = 0$.

Ответ. $x - 2y + z = 0$.

Практика 12 (21 октября у обеих групп).

Задача 1. Найти расстояние от точки M_0 (1,3,5) до плоскости $x-2y+z=0$.

Решение. По формуле $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ получаем, что

$$d=\frac{|x_1-2y_1+z_1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|1-2\cdot 3+5|}{\sqrt{6}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=0.$$

Это значит, что точка принадлежит плоскости.

Ответ. $d=0$.

Задача 1а. Найти расстояние от точки M_0 (7,15,22) до плоскости $x-2y+z=0$.

Решение. По формуле $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ получаем, что

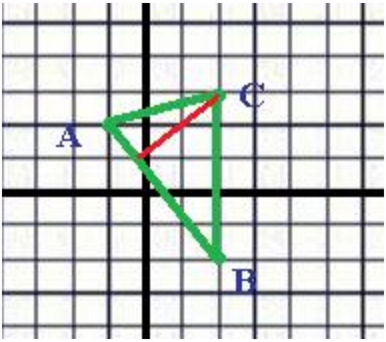
$$d=\frac{|x_1-2y_1+z_1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|7-2\cdot 15+22|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ответ. $d=1/\sqrt{6}$.

Задача 2. (На плоскости). Даны точки $A_1(-1,2)$, $B_1(2,-2)$, $C_1(2,3)$. Вывести уравнение прямой, содержащей A_1B_1, и найти расстояние от точки C_1 до этой прямой (то есть высоту треугольника).

Решение. Вектор A_1B_1 равен $(3,-4)$, и это есть направляющий на прямой. В то же время вектор A_1M до произвольной точки $M(x,y)$, который равен $(x+1,y-2)$, пропорционален A_1B_1. Тогда $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-4}$, то есть $-4x-4=3y-6$, и уравнение прямой: $4x+3y-2=0$.

Теперь по формуле $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ найдём расстояние от этой прямой до точки $C_1(2,3)$. $d=\dfrac{|4x_1+3y_1-2|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{|8+9-2|}{5}=\dfrac{15}{5}=3$.



Ответ. Прямая $4x+3y-2=0$, расстояние 3.

Задача 3. Найти угол между двумя плоскостями: $x-2y+2z=0$ и $x+2y+2z+1=0$.

Решение. Нормали к этим плоскостям: $(1,-2,2)$ и $(1,2,2)$.

Нормали не коллинеарны, то есть плоскости не параллельны, значит, они действительно пересекаются по какой-то прямой, и между ними есть какой-то угол.

$$\varphi = \arccos\frac{(n_1, n_2)}{|n_1|\cdot|n_2|} = \arccos\frac{1-4+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \arccos\frac{1}{9}.$$

Кстати, константа в уравнении одной из плоскостей никак не влияет на ответ, так как параллельный перенос плоскости не влияет на угол, который она образует с другой плоскостью.

Ответ. $\arccos\left(1/9\right)$, что приблизительно составляет 83,6 градусов.

Прямая в пространстве

Задача 4. Построить уравнение прямой в пространстве (каноническое, параметрическое) по точке $M_0(2,-3,4)$ и направляющему $l(1,2,3)$.

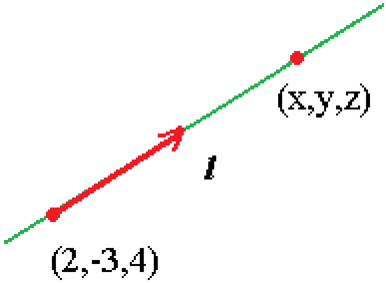
Решение. Если отложить вектор от $M_0(2,-3,4)$ к произвольной точке $M(x,y,z)$, то вектор $M_0M=(x-2,y+3,z-4)$ коллинеарен вектору $l(1,2,3)$, то есть их координаты пропорциональны. Тогда:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{3}$$

(это мы сейчас получили канонические уравнения).

Обратите внимание, что в знаменателях здесь оказались именно координаты направляющего вектора!

Чертёж:



Как мы видим, прямая в пространстве задаётся не одним уравнением, а системой уравнений. Здесь как минимум 2 знака равенства. 1-я дробь равна 2-й, а 2-я равна 3-й. На самом деле здесь даже 3 уравнения, ведь ещё и 1-я равна 3-й.

Если теперь каждую такую дробь приравнять к некоторому параметру t, то: $\frac{x-2}{1}=t$, $\frac{y+3}{2}=t$, $\frac{z-4}{3}=t$, следовательно:

$x-2=t$, $y+3=2t$, $z-4=3t$.

Тогда $\{x=2+t, y=-3+2t, z=4+3t\}$ - параметрические уравнения.

Можно их записать ещё и в векторной форме: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}t$.

Они задают движение точки по этой прямой во времени. Здесь при $t=0$ мы как раз оказались бы в исходной точке, а при $t=1$ в конце направляющего вектора.

Ответ. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}$, $\{x=2+t, y=-3+2t, z=4+3t\}$

Задача 5. Построить уравнение прямой в пространстве (каноническое, параметрическое) по точке и направляющему (с произвольными случайно взятыми параметтрами, которые придумает группа).

Задача 6. Построить уравнение прямой, лежащей в пересечении двух плоскостей $2x-3y+5z-6=0$ и $x+5y-7z+10=0$.

Решение. Векторное произведение нормалей $l = [n_1, n_2]$ это

направляющий вектор, вычислим его. $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} e_3 = -4e_1 + 19e_2 + 13e_3$.

Итак, направляющий вектор $l = (-4, 19, 13)$.

Теперь нужно найти хотя бы одну точку на этой прямой. Чтобы взять произвольную точку из пересечения плоскостей, можно положить $z = 0$ и решить систему, вычислив x, y.

Два уравнения, без z, приводят к такой системе: $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 5y = -10 \end{cases}$.

Выразим из 2-го $x = -5y - 10$ и подставим в 1-е.

Получим $-10y - 20 - 3y = 6$. Тогда $-13y = 26$, т.е. $y = -2$.

Но тогда $x = 0$. Итак, получили точку $M_0(0, -2, 0)$.

Вектор от этой точки к произвольной точке (x, y, z) равен $(x, y+2, z)$ и он попорционален направляющему вектору. Тогда

$\frac{x}{-4} = \frac{y+2}{19} = \frac{z}{13}$ канонические уравнения этой прямой.

Приравнивая все эти дроби к t, можно вычислить и параметрические уравнения $x = -4t, y = -2 + 19t, z = 13t$.

Ответ. $\frac{x}{-4} = \frac{y+2}{19} = \frac{z}{13}$, $x = -4t, y = -2 + 19t, z = 13t$.

Задача 7. Доказать, что прямая $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ пересекает ось Oz и найти точку пересечения.

Решение. Если прямая пересекает ось Oz, то точка пересечения имеет вид $(0, 0, c)$. Если в первые две дроби вместо x, y подставить 0, то получим $\frac{0-3}{3} = \frac{0-2}{2} = \frac{c-4}{3} = -1$. Тогда $c - 4 = -3$, т.е. $c = 1$.

Если бы первые две дроби после такой подстановки оказались не равны, то это бы означало, что нет пересечения с осью Oz.
Ответ. (0,0,1).

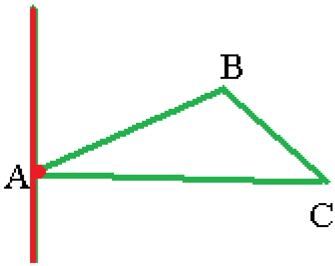
Задача 8. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$
и плоскостью $x+2y+z=0$.

Решение. Формула, выведенная в лекциях: $\varphi = 90 - \arccos\frac{(n,l)}{|n|\cdot|l|}$.

Направляющий к прямой $(2,3,1)$, нормаль к плоскости $(1,2,1)$.
Их скалярное произведение равно 9.
Модули векторов равны $\sqrt{14}$ и $\sqrt{6}$. $\varphi = 90 - \arccos\left(9/\sqrt{84} \right)$.

Приблизительно представим, какой это угол. Если бы было $\sqrt{81}$ вместо $\sqrt{84}$ то было бы $\varphi = 90 - \arccos(1)$ = 90.
Но в данном случае дробь чуть меньше, а угол составляет около 79 градусов. **Ответ.** $\varphi = 90 - \arccos\left(9/\sqrt{84} \right)$.

Задача 9. Найти параметрические и канонические уравнения прямой, перпендикулярной к плоскости треугольника с вершинами $A(0,-2,3)$, $B(3,1,3)$, $C(-3,-1,0)$ и проходящей через вершину A.
Решение. Направляющие AB и AC это (3,3,0) и $(-3,1,-3)$.



Их векторное произведение:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} e_3 = -9e_1 + 9e_2 + 12e_3 .$$

Итак, вектор $(-9,9,12)$. Но можно в том же направлении выбрать вектор короче в 3 раза (для удобства вычислений) ведь направление от этого не изменится. Итак, пусть направляющий для прямой $(-3,3,4)$, точка $A(0,-2,3)$. Вектор от $A(0,-2,3)$ к произвольной точке имеет вид $(x, y+2, z-3)$. Он коллинеарен $(-3,3,4)$, есть пропорциональность координат. Тогда $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$. Это и есть канонические уравнения. Перейти к параметрическим можно так же, как и в прошлых задачах: приравнять все дроби к t и выразить всё через t.

Ответ. Канонические $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$,
параметрические $x = -3t, y = -2 + 3t, z = 3 + 4t$.

Задача 10. Доказать, что две прямые в пространстве

$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 - 3t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ пересекаются, и найти точку пересечения.

Решение. Если у них есть общая точка, то можно приравнять x, y, z из первых и вторых равенств. Но неизвестно, при каком параметре достигаются эти значения в каждом случае, поэтому нужно решить систему уравнений, положив в первых равенствах t_1, а во вторых t_2.

$\begin{cases} 2 - t_1 = 5 - 2t_2 \\ 4 - 3t_1 = 3 - t_2 \\ -2 + 4t_1 = t_2 \end{cases}$ перенесём все t_1, t_2 в одну сторону, а константы в другую, чтобы система была записана в стандартной форме.

$\begin{cases} -t_1 + 2t_2 = 3 \\ -3t_1 + t_2 = -1 \\ +4t_1 - t_2 = 2 \end{cases}$ расширенная матрица: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & | \; 3 \\ -3 & 1 & | -1 \\ 4 & -1 & | \; 2 \end{pmatrix}$

Преобразуем методом Гаусса. От 2-й строки отнимем утроенную 1-ю, а к 3-й прибавим 4-кратную 1-ю.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -5 & | & -10 \\ 0 & 7 & | & 14 \end{pmatrix}$$ т.е. $\begin{cases} -t_1 + 2t_2 = 3 \\ -5t_2 = -10 \\ 7t_2 = 14 \end{cases}$ то есть сразу же $t_2 = 2$ из 2-го и 3-го уравнений, и они не противоречат друг другу. Кстати, эта система совместна, равнги основной и расширенной матриц совпадают, так как равны 2. Из 1-го затем $-t_1 + 4 = 3$, т.е. $t_1 = 1$.

Затем подставить $t_1 = 1$ в первые уравнения либо $t_2 = 2$ во вторые, получим одни и те же значения для x, y, z.

$\begin{cases} 2 - t_1 = 1 = 5 - 2t_2 \\ 4 - 3t_1 = 1 = 3 - t_2 \\ -2 + 4t_1 = 2 = t_2 \end{cases}$, т.к. $\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 4 - 3 = 1 \\ z = -2 + 4 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 5 - 4 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Ответ точка пересечения (1,1,2).

Задача 11. Доказать, что две прямые в пространстве:

$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ скрещивающиеся, и найти расстояние между ними.

Решение. Решая систему уравнений, как в прошлой задаче, здесь мы обнаружим, что система несовместна.

$\begin{cases} 6 + t_1 = 1 + t_2 \\ 1 - t_1 = 2 + 3t_2 \\ 2 + t_1 = 1 - 4t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = -5 \\ -t_1 - 3t_2 = 1 \\ t_1 + 4t_2 = -1 \end{cases}$ матрица: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -5 \\ -1 & -3 & | & 1 \\ 1 & 4 & | & -1 \end{pmatrix}$

прибавим ко 2-й строке 1-ю, а от 3-й отнимем 1-ю.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -5 \\ 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 5 & | & 4 \end{pmatrix}$ получили систему $\begin{cases} t_1 - t_2 = -5 \\ -4t_2 = -4 \\ 5t_2 = 4 \end{cases}$

2-е и 3-е уравнения противоречат друг другу. Система не имеет решений, значит, эти 2 прямые не имеют ни одной общей точки.

Так как направляющие векторы $(1,-1,1)$ и $(1,3,-4)$ не коллинеарны, то прямые не параллельные, а скрещивающиеся.
Найдём расстояние между ними. Точку на каждой прямой можно найти, присваивая $t=0$. $M_1(6,1,2)$, $M_2(1,2,1)$. Вектор, соединяющий две прямых, $M_1M_2=(-5,1,-1)$.

Вычисляем по формуле $d=\dfrac{V}{S}=\dfrac{|(M_1M_2,l_1,l_2)|}{|[l_1,l_2]|}$.

Смешанное произведение с помощью определителя.

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \text{ (прибавили 2-ю строку к 1-й)}$$

$= (-4)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-4)(4-3)=-4$, а по модулю получается 4.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} e_3 = 1e_1+5e_2+4e_3.$$

Модуль векторного произведения равен $\sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$.

$d=\dfrac{V}{S}=\dfrac{|(M_1M_2,l_1,l_2)|}{|[l_1,l_2]|} = \dfrac{4}{\sqrt{42}}$. **Ответ.** $\dfrac{4}{\sqrt{42}}$.

Дом. задача 1. (12.22 [1]) Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6-4t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=5+t \\ y=-1-4t \\ z=-4+t \end{cases}$$ пересекаются и найти точку.

Ответ. (3,7,-6).

Дом. задача 2. (12.35 [1])

Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \text{ и } \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$$

Ответ 13.

<u>Практика 13.</u> Прямая в пространстве. Кривые и поверхности.

Задача 1. Вычислить расстояние от точки (4,4,-2) до прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$ в пространстве.

Решение. Применим формулу $d=\frac{|[M_0M_1,l]|}{|l|}$.

Точка M_0 на прямой ищется из таких соображений: все дроби в каноническим уравнении приравняем к 0, тогда $x=1$, $y=0$, $z=-2$. $M_0(1,0,-2)$. $M_0M_1=(3,4,0)$. Направляющий вектор состоит из чисел в знаменателях в канонических уравнениях: $l(2,2,1)$.

Его модуль равен $\sqrt{4+4+1}=3$. Векторное произведение:

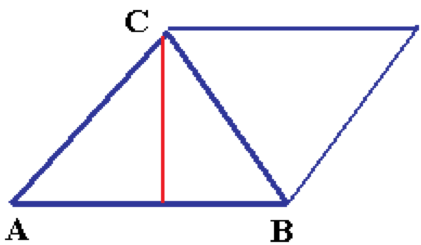
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}e_1-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}e_2+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}e_3 = 4e_1-3e_2-2e_3.$$

Модуль этого вектора равен $\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$. **Ответ.** $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

Задача 2. Даны три точки A(1,1,1),B(2,2,3),C(2,1,2). Вывести уравнение прямой, содержащей AB, и найти расстояние от точки C до этой прямой (высота треугольника ABC).

Решение. Вектор AB (1,1,2) можем принять в качестве направляющего для этой прямой. Он отложен от точки A(1,1,1).

Тогда канонические уравнения прямой: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.



Расстояние в данной ситуации, в пространстве, надо искать по формуле $d = \frac{|[M_0M_1, l]|}{|l|}$ в данном случае $d = \frac{|[AC, AB]|}{|AB|}$.

Здесь точки А,С играют ту же роль, что M_0, M_1 в прошлой задаче.

2-я сторона параллелограмма: AC=(1,0,1). $|AB| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Векторное произведение:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 = 1e_1 + 1e_2 - 1e_3 .$$

Модуль вектора $(1,1,-1)$ равен $\sqrt{3}$. Тогда результат: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 3. Найти точку пересечения плоскости $x + y + 2z + 3 = 0$ и прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$.

Решение. Запишем прямую с помощью параметрических уравнений: $x = 1 + t$, $y = 2 + 3t$, $z = 1 + 2t$.

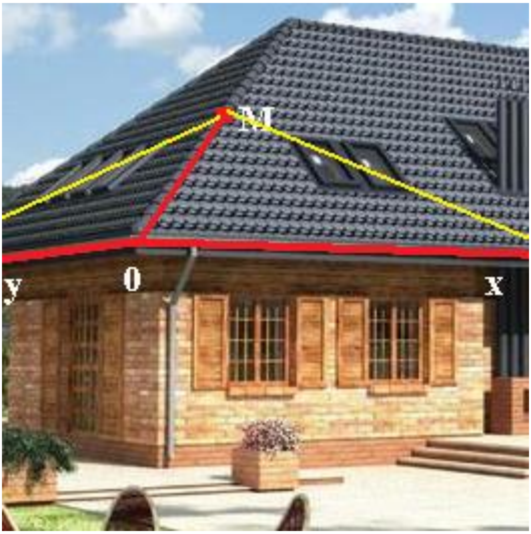
Подставим эти выражения в уравнение плоскости, чтобы найти, при каком значении t оно выполняется. $(1+t) + (2+3t) + 2(1+2t) + 3 = 0$ $\Rightarrow 8t + 8 = 0 \Rightarrow t = -1$. Тогда $x = 0, y = -1, z = -1$.

Ответ. Точка пересечения $(0,-1,-1)$.

Задача 4. Через точку $M(2,1,-2)$ и ось Ох проходит одна плоскость, через эту же точку и ось Оу вторая. Найти косинус тупого угла между этими плоскостями.

Решение. Если плоскость содержит ось и точку, то в ней по крайней мере содержится начало координат, и 2 такие направляющих: один проведён от (0,0,0) к точке $(2,1,-2)$, а второй - это просто базисный вектор оси, то есть для Ох вектор (1,0,0), а в случае оси Оу (0,1,0). Таким образом, уравнения каждой плоскости можно построить.

А затем мы найдём угол между их нормалями. Эти плоскости можно представить так: две наклонные части крыши. Плоскость, перпендикулярная линии ОМ, не горизонтальна, так что угол между двумя частями такой крыши вовсе не 90 градусов. Чем более пологая крыша, тем ближе этот угол к 180, а чем более крутая, тем ближе к 90. Плоскость, перпендикулярная стыковочной линии крыши, а именно линии ОМ, показана жёлтым цветом.



Строим уравнение 1-й плоскости. Возьмём 3-й вектор, проведённый к какой-то произвольной точке (x, y, z) от начала координат. Тогда 3 радиус-вектора, проведённых из начала координат, а именно $(2,1,-2)$, $(1,0,0)$, (x, y, z) должны образовать линейно-зависимую систему.

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} z = 0x - 2y - 1z = 0 .$$

Нормаль к этой плоскости $(0,-2,-1)$.

Строим уравнение 2-й плоскости. Аналогично, только (0,1,0).

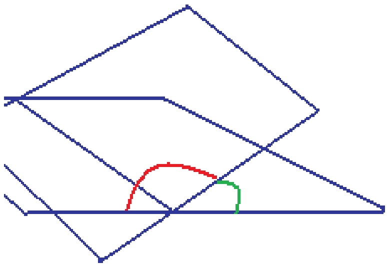
$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}z=2x-0y+2z=0.$$

Нормаль к этой плоскости $(2,0,2)$.

Известно, что $(n_1,n_2)=|n_1|\cdot|n_2|\cdot\cos\varphi$.

Тогда $-2=\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\cos\varphi$, т.е. $\cos\varphi=\dfrac{-2}{\sqrt{40}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Замечание. Если бы надо было найти косинус наименьшего угла, то есть острого, то должны были бы рассматривать модуль $|(n_1,n_2)|$, чтобы угол получился именно в 1-й четверти, т.е. с положительным cos.



Вообще же, всегда имеется два угла, φ и $180-\varphi$. В зависимости от того, острый или тупой угол надо рассматривать, его косинус вычисляется как $\dfrac{|(n_1,n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$ либо $\dfrac{-|(n_1,n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$. **Ответ.** $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Задача 5. Заданы 2 прямые в пространстве, одна - своими параметрическими уравнениями, а другая как пересечение пары плоскостей:

$$\begin{cases} x=5+2t \\ y=2-t \\ z=7+t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}.$$

Доказать, что эти прямые параллельны, и найти уравнение плоскости, содержащей их.

Решение. Сначала найдём направляющие векторы этих прямых и докажем, что они коллинеарны. Для 1-й прямой надо просто выбрать коэффициенты при t, получим $(2,-1,1)$.

Для 2-й прямой надо искать направляющий как векторное произведение нормалей к двум плоскостям.

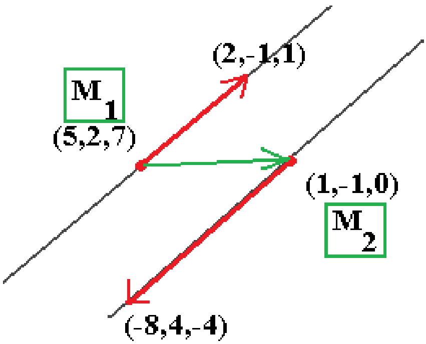
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} e_3 = -8e_1 + 4e_2 - 4e_3 .$$

Векторы $(2,-1,1)$ и $(-8,4,-4)$ коллинеарны, это видно, если вынести множитель -4. Значит, прямые действительно параллельны.

Теперь, чтобы построить уравнение плоскости, нужна какая-то точка и два линейно-независимых направляющих вектора в плоскости. При этом два направляющих для этой пары прямых линейно-зависимы, то есть с помощью них построить уравнение не получится. Один из них можем использовать, а 2-й направляющий в плоскости надо ещё найти. Для этой цели можно взять какой-нибудь вектор, соединяющий пару точек на этих прямых.

Точка на 1-й прямой: присвоим $t = 0$ в параметрических уравнениях, и получим $M_1(5,2,7)$. Точку на 2-й прямой можно найти так: в системе из двух уравнений присвоить $z = 0$ и вычислить x, y. Система станет из 2 уравнений с 2 неизвестными, и она решится.

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1.$$ Чертёж:



Вторым направляющим вектором в плоскости может служить $M_1M_2 = (-4,-3,-7)$ или $M_2M_1 = (4,3,7)$, что кстати удобнее, потому что меньше минусов при вычислении (координаты положительны).

Итак, есть точка $M_1(5,2,7)$ и 2 направляющих $(2,-1,1)$ и $(4,3,7)$ на плоскости. Построим уравнение плоскости. Третий вектор, проведённый к какой-либо произвольной точке в этой пплоскости, и 2 направляющих, образуют ЛЗС:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-5)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (z-7)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$-10(x-5) - 10(y-2) + 10(z-7) = 0 \quad \Rightarrow$ сократим на -10

$(x-5) + (y-2) - (z-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - z = 0$.

Ответ. Плоскость $x + y - z = 0$.

Задача 6. Доказать, что кривая $5x^2 + 7y^2 - 30x + 14y + 17 = 0$ является эллипсом, найти каноническое уравнение, центр и полуоси.

Решение. Выделим полный квадрат по каждой переменной.

$(5x^2 - 30x) + (7y^2 + 14y) + 17 = 0 \quad \Rightarrow$

$5(x^2 - 6x) + 7(y^2 + 2y) + 17 = 0$ в каждой скобке можно получить такое выражение, чтобы затем использовать формулы сокращённого умножения (ФСУ): $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Надо прибавить константы в скобках, так чтобы всё сворачивалось, но для компенсации за скобками вычесть эти константы.

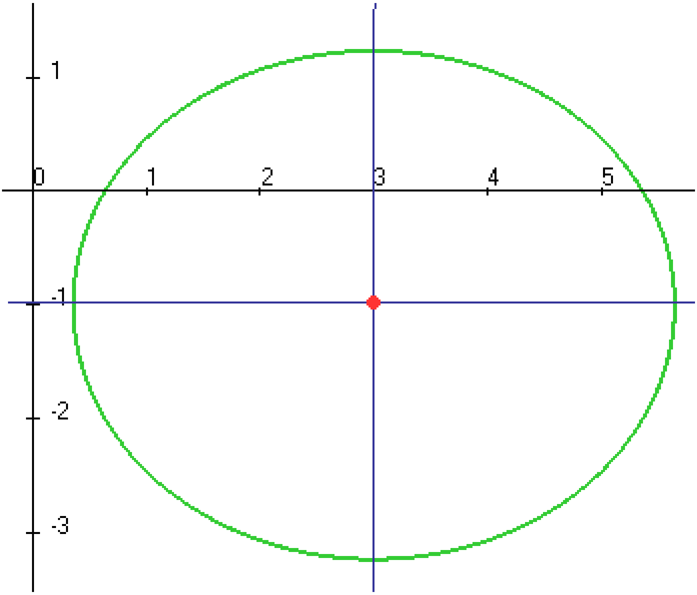
$5(x^2 - 6x) + 7(y^2 + 2y) + 17 = 0 \quad \Rightarrow$

$5(x^2 - 6x + 9) + 7(y^2 + 2y + 1) - 45 - 7 + 17 = 0 \quad \Rightarrow$

$$5(x-3)^2 + 7(y+1)^2 = 35 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(x-3)^2}{\sqrt{7}^2}+\frac{(y+1)^2}{\sqrt{5}^2}=1$$ это каноническое уравнение.

Чертёж:



Ответ. Центр $(3,-1)$, полуоси $\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}$.

Задача 7. Доказать, что кривая $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ является эллипсом, найти каноническое уравнение, центр и полуоси, построить чертёж.

Решение. Здесь в уравнении есть произведение xy, то есть надо сначала привести к главным осям квадратичную форму:

$5x^2+8xy+5y^2$. Строим её матрицу: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Находим собственные числа и векторы. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$(5-\lambda)^2-16=0 \Rightarrow \lambda^2-10\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-9)=0$.

Собственные числа 1 и 9. Ищем собственные векторы.

$\lambda = 9$. $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, оба уравнения пропорциональны, т.е. есть только такая информация: $4x = 4y$, т.е. $x = y$. ФСР: вектор (1,1).

Нормируем его, то есть делим на длину, которая здесь $\sqrt{2}$. Получаем $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - собственный вектор для $\lambda = 9$.

Это единичный вектор в 1-й четверти, получающийся поворотом (1,0) на 45 градусов.

$\lambda = 1$. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, оба уравнения пропорциональны, фактически оно одно: $4x = -4y$, т.е. $x = -y$. ФСР: вектор $(-1,1)$.

Нормируем его, получаем $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ собственный вектор для $\lambda = 1$.

Это вектор во 2-й четверти, получающийся поворотом (0,1) на 45 градусов.

Запишем формулы перехода от одного базиса к другому:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{\sqrt{2}} - \dfrac{w}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{z}{\sqrt{2}} + \dfrac{w}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Если подставить эти выражения в исходное уравнение, то после приведения подобных исчезнут выражения, содержащие разные переменные z и w:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$-18\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right) - 18\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right) + 9 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{z^2}{2}+\frac{w^2}{2}-zw\right)+8\left(\frac{z^2}{2}-\frac{w^2}{2}\right)+5\left(\frac{z^2}{2}+\frac{w^2}{2}+zw\right)-18\frac{2z}{\sqrt{2}}+9=0$$

в линейной форме w полностью сократились, $5zw$ тоже сократятся.

$$\left(\frac{5}{2}+\frac{8}{2}+\frac{5}{2}\right)z^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{8}{2}+\frac{5}{2}\right)w^2-18\sqrt{2}\cdot z+9=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{18}{2}z^2+\frac{2}{2}w^2-18\sqrt{2}\cdot z+9=0 \quad \Rightarrow 9z^2+w^2-18\sqrt{2}\cdot z+9=0\,.$$

Итак, как мы видим, коэффициентами как раз и оказались 9 и 1, то есть собственные числа матрицы этой квадратичной формы.

Заметим, что 1-й степени w здесь нет, так что выделение полного квадрата надо делать только по z.

$$9(z^2-2\sqrt{2}\cdot z)+w^2+9=0 \;\Rightarrow\; 9(z^2-2\sqrt{2}\cdot z+2)-18+w^2+9=0$$

$$\Rightarrow\; 9(z-\sqrt{2})^2+w^2=9 \;\Rightarrow\; \frac{\left(z-\sqrt{2}\right)^2}{1}+\frac{w^2}{9}=1\text{, т.е.}$$

$\dfrac{\left(z-\sqrt{2}\right)^2}{1^2}+\dfrac{w^2}{3^2}=1$. Полуоси 1 и 3, то есть размеры эллипса: 2 на 6.

Центр $z=\sqrt{2}, w=0$, но это центр в новых координатах, а для чертежа надо найти центр именно в старых координатах x, y. Их мы найдём по формулам взаимосвязи этих координат:

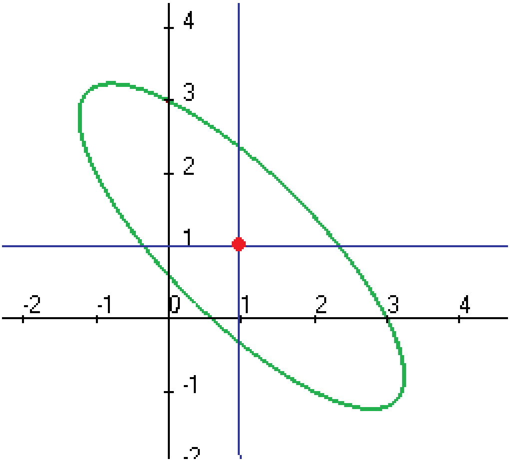
$$x=\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{w}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{w}{\sqrt{2}}\,.$$

Если $z=\sqrt{2}, w=0$, то $x=1, y=1$.

Итак, центр - точка (1,1). В направлении первого вектора нового базиса, а именно $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, полуось длины 1, а в направлении второго вектора $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ полуось длины 3.

Ответ. Центр $(1,1)$, полуоси 1 и 3.

Чертёж:



Задача 8. Доказать, что однополостный гиперболоид

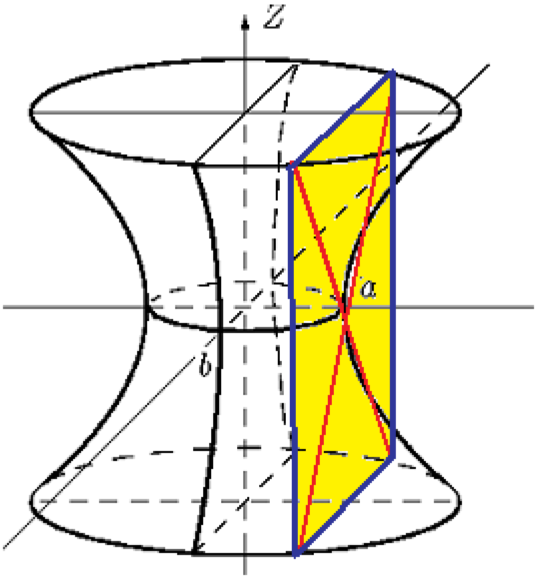
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ содержит прямолинейные образующие.

Решение. В горизонтальном сечении при $z=0$ получается эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Его вершины: $(a{,}0)$, $(-a{,}0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$. Рассмотрим вертикальную плоскость, проходящую через его вершину, например, $(a{,}0)$. Эта плоскость имеет уравнение $x=a$. Тогда в уравнении гиперболоида $1+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, т.е. $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$. Получается $\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=0$, т.е. в вертикальной плоскости две прямых:

$\dfrac{z}{c}=\dfrac{y}{b}$ и $\dfrac{z}{c}=-\dfrac{y}{b}$, или можно записать так: $z=\dfrac{c}{b}y$ и $z=-\dfrac{c}{b}y$.

Это пара пересекающихся прямых.

Чертёж: эта пара прямых показана красным цветом.



Домашняя Задача 1. (13.16 [1]). Доказать, что кривая $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ является эллипсом, найти каноническое уравнение, центр и полуоси.

Ответ. Центр (3,-1), полуоси 3 и $\sqrt{5}$.

Домашняя задача 2. (14.3 a [1]). Доказать, что кривая $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$ является эллипсом, найти каноническое уравнение, центр и полуоси, построить чертёж.

<u>Практика 14.</u> Повторение и контрольная работа.

Векторы a,b выражены через p,r: $a=3p+r$, $b=p-3r$.

$|p|=5, |r|=\sqrt{2}$, угол между ними 45 град.

Задача 1. Найти (a,b). **Ответ.** 29.

Задача 2. Найти | [a,b] |. **Ответ.** 50.

Задача 3. Решить систему уравнений $\left.\begin{aligned} x_1 \quad &+x_2 &+2x_3 &=5 \\ x_1 \quad &+2x_2 &-3x_3 &=1 \\ 2x_1 \quad &+x_2 &+x_3 &=6 \end{aligned}\right\}$

Ответ. x_1=2, x_2=1, x_3=1.

Задача 4. Найти собственные числа и векторы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ. Собст. число $\lambda = 2$ собст. вектор (1,0,0),
собст. число $\lambda = 3$ собст. вектор (1,1,0),
собст. число $\lambda = 4$ собст. вектор (1,1,1).

Задача 5. Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 с координатами (1,2) и перпендикуляру n (3,5). **Ответ**. $3x+5y-13=0$.

Задача 6 . Построить уравнение прямой (на плоскости) по точке M_0 с координатами (1,2) и направляющему ***l*** (3,5). **Ответ.** $5x-3y+1=0$.

Задача 7. Построить уравнение плоскости, проходящей через точку А (1,2,3) перпендикулярно вектору n (1,4,2) .**Ответ.** $x+4y+2z-15=0$.

Задача 8. Построить уравнение плоскости по точке $M_0(-2,3,7)$ и двум направляющим $l_1(4,2,3)$ и $l_2(2,-5,0)$. **Ответ.**
$5x+2y-8z+60=0$.

Задача 9. Построить уравнение прямой в пространстве (каноническое, параметрическое) по точке $M_0(2,-3,4)$ и направляющему $l(1,2,3)$.

Ответ. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$, $\{x=2+t, y=-3+2t, z=4+3t\}$

Вторые 45 минут. Контрольная работа. Темы:
1. Скалярные, векторные произведения.
2. Системы, метод Гаусса.
3. Собственные векторы.
4. Уравнения прямой и плоскости.

Приложение 1.
Пример одного варианта контрольных работ.

Темы 1-й контрольной:
1. Действия над матрицами.
2. Определители.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.

Вариант:

1) Умножить матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2) Найти определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3) Найти обр.матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

4) Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Темы 2-й контрольной:
5. Векторная алгебра (скалярные, векторные произведения).
6. Системы уравнений, метод Гаусса
7. Собственные числа и векторы
8. Уравнения прямой и плоскости

Вариант:

5) Векторы a, b выражены через p, q: $a = p + q$, $b = p + 2q$.
$|p| = 2$, $|q| = 3$, угол между ними 60 градусов. Найти (a, b).

6) Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

7) Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1,4,2) перпендикулярно вектору (2,1,2).

Литература.

Практика:

1. Магазинников Л.И. Высшая математика I. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учебное пособие Томск: ТУСУР, 2007. - 162 с.

Теория:

1. Магазинников Л.И. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие - Томск: ТМЦДО, 2003. - 176 с.

2. Гриншпон И.Э. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия (для экономических специальностей). Учебное пособие. Томск: ТУСУР, 2007. - 247 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – 5-е изд, - М.: Айрис-Пресс, 2007. - 602 с.

Все учебные пособия кафедры математики можно найти на сайте кафедры по ссылке: http://math.tusur.ru/book.html