Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика (курс лекций)
семестр 1, часть 1
для специальности 09.03.03
"прикладная информатика в экономике"

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2016

Настоящее электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ (профилирующая кафедра АСУ) в группах 446-1 и 446-2 осенью 2016 года.

Оглавление.

ЛЕКЦИЯ № 1. 02.09.2016

Глава 1. МАТРИЦЫ.

§ 1. Действия над матрицами.

Определение матрицы. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из чисел (либо других объектов, например, функций), содержащая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент обозначается a_{ij}, где i это номер строки, в которой он расположен, а j - номер столбца.

! Обратите внимание: количество строк - это то же самое, что количество элементов в столбце, а количество столбцов равно количеству элементов в строке (заметим, что от каждого элемента 1-й строки начинается столбец, то есть сколько чисел в строке, столько и столбцов).

Если $m = n$, то есть матрица А имеет размер $n \times n$ то она называется **квадратной** матрицей порядка n.

Примеры матриц из жизни:

1. Таблица результатов ЕГЭ по нескольким предметам в группе учеников.
2. Таблица расстояний между каждой парой из n городов.

Кратчайшее расстояние между городами:

	Томск	Новосибирск	Кемерово
Томск	0	205	144
Новосибирск	205	0	204
Кемерово	144	204	0

По главной диагонали 0 , потому что до этого же города расстояние равно 0.

3. Расписание занятий. День недели и номер пары, каждый элемент - номер аудитории в этот день в это время.
4. Шахматная доска, 64 элемента, квадратная матрица порядка 8.

Сложение и вычитание матриц размера $m \times n$.

Эти операции определяются поэлементно, то есть суммируется или вычитается каждая соответствующая пара элементов a_{ij} и b_{ij}.

Примеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

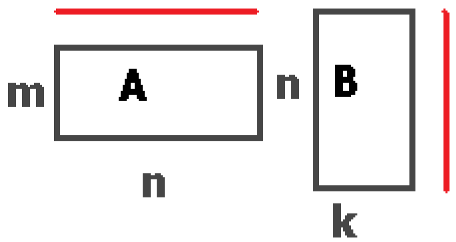
Умножение матрицы на константу определяется следующим образом. В матрице αA все элементы умножены на коэффициент α, то есть равны $\alpha \cdot a_{ij}$.

Умножение двух матриц.

* Нужно вспомнить из школьного курса операцию скалярного произведения двух векторов.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Если есть 2 матрицы, одна размера $m \times n$, другая $n \times k$, то их размеры называются согласованными. Такие матрицы можно умножать друг на друга.



Операция умножения матриц определяется следующим образом. Мысленно разобьём первую матрицу на строки, вторую - на столбцы. Для каждой строки 1-й матрицы и каждого столлбца 2-й матрицы определено скалярное произведение. Всего существует $m \times k$ всевозможных скалярных произведений строк (1-й матрицы) на столбцы (2-й матрицы). Именно из них и состоит произведение, это матрица размера $m \times k$

Пример: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Для матриц размеров $m \times n$ и $n \times m$ существуют оба произведения, AB и BA. Но произведение BA в примере выше оказалось бы не матрицей 2 порядка, а 3 порядка, то есть из 9 элементов.

Умножение квадратных матриц.
В этом случае размеры всегда согласованы, и произведение - это тоже матрица $n \times n$.

2 примера: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

обратите внимание, что даже для квадратных матриц далеко не всегда выполняется закон коммутативности, здесь $AB \neq BA$.
* Существует такая матрица, которая во множестве матриц обладает свойством, аналогичным 1 во множестве чисел, то есть $AE = EA = A$. Но как мы видели только что, матрица из всех единиц этим свойством не обладает, а вот если единицы только по главной диагонали, а вокруг - нули, то такое свойство будет выполняться.
<u>Единичная матрица</u> Е. Строение: $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

2-го порядка: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3 порядка: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(Аналог среди матриц первого порядка: число 1).

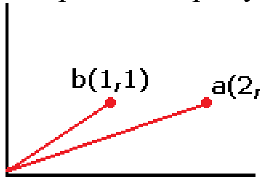
Свойства действий над матрицами:
$A + B = B + A$ коммутативность сложения
$(A + B) + C = A + (B + C)$ ассоциативность сложения
$(A + B)C = AC + BC$ и $A(B + C) = AB + AC$ дистрибутивность
$(AB)C = A(BC)$ ассоциативность умножения

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ и $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

$AE=EA=A$.

О взаимосвязи матрицы с системой векторов.
Если в плоскости 2 вектора, т.е. каждый имеет по 2 координаты, можно построить матрицу 2 порядка. Аналогично, если дано 3 вектора в пространстве - можно построить матрицу 3 порядка.



Матрица, соответствующая этой векторной системе $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

§ 2. Определители.

Пусть дана матрица 2 порядка. $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определителем квадратной матрицы порядка 2 называется такое число:

$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (произведение элементов главной диагонали, минус произведение элементов побочной диагонали).

Геометрический смысл: модуль определителя равен площади параллелограмма, сторонами которого являются 2 вектора, координаты которых расположены по строкам (либо столбцам) матрицы.

Если бы мы просто вычисляли площадь параллелограмма, построенного на векторах (2,1) и (1,2), где ни один вектор не расположен вдоль координатной оси, то понадобилось бы найти длину основания, затем высоту. А с помощью определителя, S вычисляется гораздо короче.

Примеры. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$.

поменяем местами строки, изменится знак:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$.

Заметим, что при введении определителя, умножаемые элементы всегда расположены так, что 2 из них не находятся в одной строке или в одном столбце. Кстати, кроме главной и побочной диагонали, в матрице порядка 2 таких наборов элементов больше нет.

Вообще, если расположить первые n натуральных чисел 1,2,3,..., n в некотором порядке, то есть не по возрастанию, а перепутать каким-то образом, то они образуют так наз. «перестановку».

Лемма. Существует n! перестановок порядка n.

Для n = 2 очевидно, перестановки только (12) и (21).

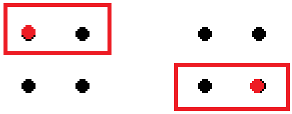
При n = 3. (123) (132) (213) (231) (312) (321)

На первом месте одно из 3 чисел, при этом оставшиеся 2 можно расставить на два места именно 2 способами. Получается 3*2 = 6 способов. (Заметим, что 6 = 3!)

Дальше, доказательство по индукции. Пусть теперь для (n-1) этот факт доказан. Рассмотрим для n. На первом месте может стоять любое из n чисел, и при каждой из этих ситуаций, остаётся (n-1) число, которые должны занять (n-1) место, а это возможно (n-1)! способами. Итак, получается $n \cdot (n-1)!$ что как раз равно n!, что и требовалось доказать.

Каждый набор элементов, которые мы перемножаем в определителе 2 порядка, можно задать с помощью перестановки: главная диагональ (12) побочная диагональ (21). Число i на месте j показывает, что когда мы находимся в строке номер j то надо выбрать элемент, находящийся в столбце номер i.

Большой прямоугольник в 1 строке, выбираем из 1 столбца, а когда он спустился во 2 строку, там из 2 столбца. Как на схеме:

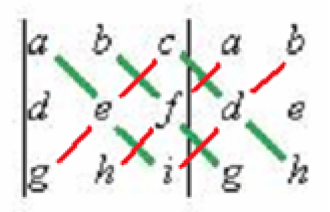


таким путём мы как раз и получаем главную диагональ с помощью перестановки (12).

Определитель 3 порядка, примеры, методы вычисления.

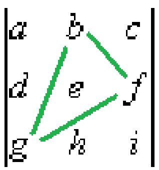
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi\,.$$

Запомнить легче всего так: с помощью произведений по 3 параллельным линиям.



Надо дописать копии 1 и 2 столбца справа, и соединить по 3 параллельных линии: главная диагональ и параллельные ей (показаны зелёным цветом), затем побочная диагональ и параллельные ей (показаны красным). Умножить тройки чисел по 3 зелёным линиям, и взять их со знаком «+» а по красным прибавить со знаком «—». (Кстати, вместо столбцов справа можно дописать две строки снизу, и получится то же самое).

Можно запомнить и с помощью треугольников, например, bfg соответствует



Это один из двух треугольников, для которого главная диагональ - это средняя линия. Второй такой треугльник это cdh.

В записи определителя 3 порядка $|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$ каждому элементу можно поставить в соответствие перестановку из 3 чисел.
Представьте себе прямоугольник, который сначала в 1-й строке, а затем спускается ко 2-й и 3-й, внутри него вправо и влево может двигаться квадрат, указывающий на какой-то из элементов. Запишем, в каком № столбца взяли элемент, когда находились в 1-й строке, затем так же во 2-й и 3-й. Например, для bfg получится (231):

$$\begin{vmatrix} a & \boxed{b} & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & \boxed{f} \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \boxed{g} & h & i \end{vmatrix}$$

для aei соответствует (123) и т.д. напишем под каждым элементом свою перестановку:
$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$
(123) (231) (312) (321) (132) (213)

Видим, что при этом учтены все возможные перестановки, количество которых 3! = 6.

Рассмотрим подробнее, как знак определяется по перестановкам. Назовём инверсией такую ситуацию, когда большее число в перестановке расположено раньше, чем меньшее. Обозначим дугой каждую инверсию:

$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$
$$(123)\ (231)\ (312)\ (321)\ (132)\ (213)$$

Если инверсий нечётное количество (1 или 3), то знак « - », если чётное (0 или 2) то «+».

Фактически, умножаем на $(-1)^k$, где k - число инверсий. Знак каждого произведения зависит от чётности или нечётности перестановки.

Причём, все рассмотренные наборы элементов, которые перемножаются между собой, обладают тем свойством, что никакие 2 из 3 не находятся в одной и той же строке либо одном и том же столбце. Таких наборов всего 6, и они все учтены. А для матрицы порядка 2 таких наборов всего 2, поэтому там определитель состоит всего из 2 слагаемых. Почему же они не могут быть в одной строке или столбце? Ответ простой: ведь перестановка состоит из разных чисел, то есть там нет одинаковых на двух местах, поэтому из одного и того же столбца 2 раза мы не выберем. Из одной строки тем более: находясь в некоторой строке, мы выбираем элемент только 1 раз.

А для матрицы 4 порядка потребуется найти все четвёрки элементов, так чтобы никакие два не оказывались в одной строке или одном столбце. Их будет 24 = 1*2*3*4 = 4!

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 1*2*4 + 1*3*0 + 2*0*1 — 0*2*2 — 1*3*1 — 4*0*1 = 8 — 3 = 5.

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ = 1*3*6 + 4*0*2 + 8*7*3 — 8*3*2 — 1*0*3 — 6*4*7 = 18 + 0 + 168 — 48 — 0 — 168 = -30.

ЛЕКЦИЯ № 2.   09.09.2016

Взаимосвязь определителя большего порядка и меньшего порядка. Разложение по строке.

Запишем разложение определителя порядка 3.

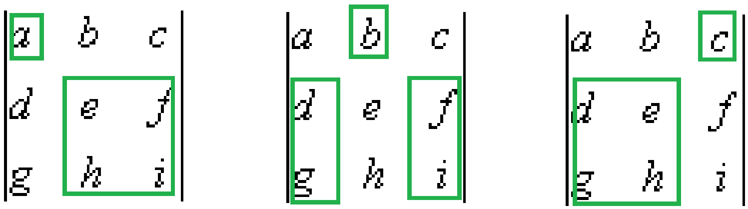
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi .$$

Вынесем за скобку элементы первой строки (они есть в 2 из 6 слагаемых): $a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg)$.

То, что получилось в скобках, называют алгебраическими дополнениями элементов соответственно a, b, c.

Выражение в 1-й скобке $(ei - fh)$ называется алгебраическим дополнением к элементу a, соответственно $(fg - di)$ - алгебраическим дополнением к b, $(dh - eg)$ - алгебраическим дополнением к c.

Заметим, что $ei - fh = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, $fg - di = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$, $dh - eg = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.



Если для элемента a_{ij} и вычеркнуть всю строку и весь столбец, где он находится, образуется подматрица порядка (n-1). Определитель подматрицы порядка (n-1), которая получилась путём вычёркивания строки номер i и столбца номер j, называется **дополняющим минором** к элементу a_{ij}. Всего таких миноров n^2, например для матрицы 3 порядка их будет 9 штук. Минор, соответствующий элементу a_{ij}, обозначается M_{ij}.

Мы видим, что в одних случаях алгебраическое дополнение равно минору, а где-то противоположно ему по знаку. Взаимосвязь алгебраических дополнений и миноров для произвольных i,j:
$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, то есть знаки меняются в шахматном порядке, для верхнего левого элемента a_{11} знак «+».

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Итак, определители можно вычислять разложением по строке:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Общая запись в произвольных обозначениях:
$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$.
Разложение возможно по любой строке или по любому столбцу. Так, например, в той же рассмотренной ранее записи можно собрать пары слагаемых, содержащих d, e, f и точно так же вынести за скобку, получится $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$ =
$d(ch - bi) + e(ai - cg) + f(bg - ah)$ =

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$ здесь чередование знака начинается с минуса, что и должно быть в соответствии с шахматным порядком, о чём сказано выше.

Заметим, что если матрица треугольная, то для вычисления $|A|$ можно просто умножить все числа по диагонали.
$|A| = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
Это объясняется очень просто: если разложить по строке, где есть всего один ненулевой элемент и (n-1) нулей, то сразу переходим к

минору меньшего порядка, для него получается аналогичное действие, и так до конца. Рассмотрим на примере:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Для диагональных матриц, как и для треугольных, верен такой же факт.

Рассмотрим ещё пример с определителем треугольной матрицы 4 порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

Поэтому приведение к треугольному виду очень часто используется для вычисления определителей. Метод Гаусса, который будет подробно изучен в теме «системы уравнений», в полной мере может применяться и для вычисления определителей. Если обнулить элементы ниже главной диагонали, то вычисление определителя сильно упростится.

Основные свойства определителей и их геометрический смысл.

1) Транспонированная матрица. При транспонировании определитель не меняется: $|A| = |A^T|$.

2) Если A, B две квадратные матрицы, то $|AB| = |A||B|$.

Рассмотрим доказательство для n=2.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = eh - fg.$$

Произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ec+dg & cf+dh \end{pmatrix},$$ её определитель:

$$(ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ec+dg) =$$

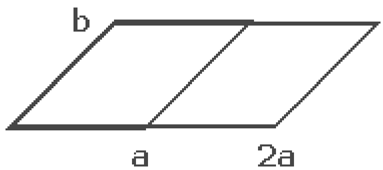
$aecf + bgdh + aedh + bgcf - afec - afdg - bhec - bhdg =$
полностью вычитаются 1-е и 5-е слагаемое, а также 2-е и 8-е.
$= aedh + bgcf - afdg - bhec$.
В то же время, произведение определителей равно
$(ad - bc)(eh - fg) = adeh + bcfg - adfg - bceh$.
То есть это то же самое выражение.

3) Если строка или столбец матрицы состоит из нулей, то $|A| = 0$.

Геометрический смысл: Если в системе векторов есть 0 - вектор, то объём параллелепипеда равен 0.

4) Если любую строку (столбец) матрицы умножить коэффициент с, то $|A|$ увеличится в с раз.

Это свойство даёт возможность выносить общий множитель за знак определителя из какой-либо строки.
Геометрический смысл: Если умножить на коэффициент даже один из векторов, образующих параллелограмм, то площадь параллелограмма умножится на этот коэффициент.



Если умножить не один, а оба вектора, то площадь увеличится в c^2 раз. Для 3 векторов в пространстве и параллелепипеда, если умножить каждый вектор на c, то объём вырастет в c^3 раз. Для матриц $n \times n$ получается
Следствие: 4а) $|cA| = c^n |A|$.

5) Если поменять местами любые две строки (или два столбца), то $|A|$ сменит знак.
Это связано с тем, что при смене мест 2 элементов в перестановке меняется чётность: одна инверсия появится или наоборот, исчезнет.

6) Если матрица содержит две одинаковых (или пропорциональных) строки или столбца, то $|A| = 0$.

Доказывается из предыдущего свойства: если в матрице две одинаковые строки, то меняя их местами, мы изменим знак, но они же одинаковы, поэтому $|A|$ не должен измениться. Тогда $|A| = -|A|$, то есть $|A| = 0$. Для пропорциональных то же самое, так как можем сначала вынести коэффициент за знак определителя, и строки станут одинаковыми, а тогда $|A| = 0$.

Геометрический смысл. Если два ребра параллелепипеда коллинеарны, то объём 0.

7) Если все элементы какой-либо строки представлены в виде сумм двух элементов, то данный определитель равен сумме двух определителей, где в первом из них в этой строке - первые слагаемые, а во втором - вторые (все остальные строки в обоих определителях без изменения).

Чтобы легче запомнилось, покажем на примере произвольных матриц 2-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & g \end{vmatrix}.$$

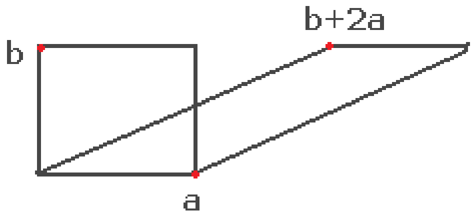
действительно: $(a+b)g - (c+d)e = ag + bg - (ce + de) =$
$ag - ce + bg - de$.

Для матриц большего порядка, аналогично, в любом из n! слагаемых по n элементов, какой-то один окажется суммой двух чисел, в итоге каждое слагаемое распадётся на два, и в сумме будет 2 n! слагаемых, где одни n! образуют 1-й определитель, а другое n! - второй.

8). Если к любой строке прибавить другую строку, домноженную на число, $|A|$ не изменится.

Если в предыдущем свойстве в роли вторых элементов взяты элементы другой строки этой же самой матрицы, домноженные на коэффициент k, то:

$\begin{vmatrix} a+ke & b+kg \\ e & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ke & kg \\ e & g \end{vmatrix}$ тогда во 2-м определителе строки пропорциональны, он равен 0. То есть мы видим, что если к одной строке прибавить строку, кратную какой-то строке из этой же матрицы, определитель не изменится.
Это важное свойство даёт возможность преобразовывать и упрощать матрицы в процессе вычисления определителей.
Замечание. Очевидно, что можно не только прибавить, но и отнять от строки строку, ведь мы можем домножить на коэффициент -1.
Геометрический смысл. Если к вектору b прибавить вектор a, умноженный на любой коэффициент, то площадь параллелограмма не изменится, основание и высота остались старыми, см. чертёж:



Здесь площадь параллелограмма, образованного векторами a,b такая же, как для образованного векторами a, b+2a.

Из свойства 8 следует, что строки можно складывать и вычитать, на этом основан метод Гаусса приведения к треугольной форме.
Важно! Определитель не меняется (св-во 8), если умножать строку в уме (в буфере обмена) и затем, уже кратную, прибавлять к какой-либо другой. Если же просто умножать строку, которая находится в матрице, то определитель умножится на коэффициент (свойство 4). Это совершенно разные операции, не надо их путать.
Пример.
Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ приведением к треугольной форме.
Заметили, что ниже углового элемента (1) число 2. Поэтому из 2-й строки вычтем 1-ю, домноженную на 2. То есть, вычитать надо строку (2 6).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2-2 & 7-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следствие 8 а). Если какая-либо строка матрицы является суммой других строк, то $|A| = 0$.

Доказательство: Если третья строка есть сумма первой и второй, то вычитая 1-ю и 2-ю из неё, получим строку из нулей.

Пример (метод Гаусса, приведение к треугольной форме).

Применим свойство 8 к вычислению такого определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

Постараемся обнулить все элементы ниже, чем a_{11}.

Из 2-й строки вычтем 1-ю строку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

Теперь из 3-й вычтем удвоенную 1-ю, будет $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

Чтобы завершить приведение к треугольному виду, вычтем из 3-й строки удвоенную 2-ю, получится $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. А теперь просто найдём произведение чисел по диагонали, так как привели к треугольной форме. Определитель равен 2.

Этот метод особено будет нужен в теме «системы уравнений», но, как видим, помогает и при вычислении определителей.

§ 3. **Обратная матрица.**

Определение вырожденной матрицы ($|A| = 0$), невырожденной матрицы ($|A| \neq 0$).

Определение обратной матрицы. Пусть A, X - квадратные матрицы. Если $AX = XA = E$ то X называется обратной матрицей для матрицы A.

Обозначение: Обратная матрица обозначается A^{-1}.

Замечание. Для чисел, которые являются матрицами порядка 1, обратный элемент вычисляется известным образом, например $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $c^{-1} = \frac{1}{c}$.

Итак, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Но оказывается, что не для любой квадратной матрицы существует обратная.

Лемма. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда А невырожденная.

Для доказательства рассмотрим $|AX| = |A||X| = |E| = 1$. Если $|A| = 0$ то $|A||X| = 0c = 1$, то есть существовало бы такое число, которое при умножении на 0 даёт результат 1, но это невозможно. Получили противоречие.

Формула вычисления элементов обратной матрицы: $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

Алгоритм нахождения A^{-1}.

1. Проверить невырожденность с помощью определителя.
2. Составить матрицу из дополняющих миноров M_{ij}.
3. Изменить знаки в шахматном порядке, то есть домножить на $(-1)^{i+j}$, где i,j - номера строки и столбца.

Получатся алгебраические дополнения A_{ij}.

4. Транспонировать полученную матрицу.
5. Поделить на определитель исходной матрицы.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. Вывод: $|A| \neq 0$, существует обратная матрица.

Матрица из миноров: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица из алг. дополнений: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Делим её на определитель, и записываем ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Можно сделать проверку: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти обратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

Решение. 1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$. $|A| \neq 0$, существует A^{-1}.

2) Запишем матрицу, состоящую из всех возможных миноров 2×2, которых существует 9 штук: $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Матрица из алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(т.е. в шахматном порядке изменили знаки, там где сумма номеров строки и столбца нечётна).

Транспонируем её: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Делим на определитель, равный 2,

итог: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ЛЕКЦИЯ № 3. 16.09.2016

§ 4. **Ранг матрицы.**

Для прямоугольных матриц не существует понятие определителя, однако там можно выбирать квадратные подматрицы, и для них определитель вычислить можно. Если задать какие-нибудь k номеров строк и k номеров столбцов, то на пересечениях, очевидно, получится минор из k^2 элементов. Он может быть вырожденным либо нет. Существует минор максимального порядка, который является невырожденным. Его порядок и называется рангом матрицы.

Определение. Порядок наибольшего невырожденного минора называется рангом матрицы.

Обозначается $r(A)$. Примеры:

Матрица размера 3×4 ранга 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Здесь есть

невырожденный минор порядка 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Миноры 3 порядка можно рассматривать не все, достаточно только окаймляющие, то есть содержащие уже найденный минор меньшего порядка.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

поэтому ранг не равен 3, а остаётся равен 2, так как минор 2 порядка уже найден.
Миноров 4 порядка в этой матрице нет, так как всего 3 строки. Итак, $r(A) = 2$. Цветом закрашен базисный минор.

Ранг прямоугольной матрицы размера m*n меньше или равен, чем минимальное из чисел m, n. Причина: минор более высокого порядка в этой матрице просто не существует, ведь размер вписанного квадрата не может превышать ни длину, ни ширину прямоугольника, в который вписан этот квадрат.

Пример. Матрица ранга 1. Здесь все строки пропорциональны 1-й.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица А является матрицей ранга 0 $\Leftrightarrow$ она состоит только из нулей (очевидно, что если в матрице есть хоть один элемент, не равный 0, то он уже является минором 1 порядка, то есть ранг не 0, а уже 1).

Метод элементарных преобразований для нахождения ранга.
Бывает лучше упростить матрицу, чтобы видеть, какие миноры равны 0 или не равны 0. Как и при вычислении определителей, можно прибавлять к строке другую строку, умноженную на число, то же самое со столбцами. Но при нахождении ранга даже больше возможных действий, чем при вычислении определителя: можно менять местами строки (столбцы), умножать строки (столбцы) на

коэффициент. Дело в том, что соответствующие миноры в этом случае меняют знак или умножаются на с, но ведь свойство быть равными 0, либо не равными 0, от этого не меняется!
Если число $M \neq 0$, то $-M \neq 0$ и $cM \neq 0$.
Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$ из 2-й строки вычесть 1-ю, а из 3-й удвоенную 1-ю.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

теперь из 3-й строки вычтем 2-ю $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ниже главной диагонали получились нули.

$$\left(\begin{array}{|ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Теперь лучше видно базисный минор порядка 3. Ранг = 3. Если бы оказалось, что последняя строка состоит из нулей, то тогда был бы ответ ранг матрицы = 2.

Ранее упоминали, что матрицы естественным путём связаны с системами векторов.

Определение. Пусть $\{a_1,..., a_n\}$ - система векторов. $\alpha_1,..., \alpha_n \in R$ - константы. Тогда вектор $b = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$ называется линейной комбинацией векторов $\{a_1,..., a_n\}$.
(А если все коэффициенты = 1, то это просто сумма векторов).
Пример. $a_1 = (1,1,1), a_2 = (1,2,3)$. Пусть коэффициенты 2 и 1. Линейная комбинация это вектор (3,4,5):

2(1,1,1)+1(1,2,3) = (3,4,5).
В пространстве, рассмотрим 3 вектора: (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1). Любой вектор 3-мерного пространства можно представить как линейную комбинацию этих трёх векторов.

* Если все коэффициенты 0, то линейная комбинация есть 0 вектор в любом случае, какими бы ни были векторы.
* Допустим, что взяты векторы (1,0) и (-1,0). Если их сложить, то получим (0,0). Видим, что бывают ситуации, когда линейная комбинация ненулевых векторов - это нулевой вектор, даже если ненулевые коэффициенты! Аналогичная ситуация, если вектор c есть a+b, тогда a+b-c = 0. В связи с этим возникает определение линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов.

Определение. Если из равенства $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0$ следует, что $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0$, то система векторов называется линейно-независимой системой (ЛНС). Если же существует набор ненулевых коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_n$, такой, что линейная комбинация = 0, то система называется линейно-зависимой системой (ЛЗС).

Примеры. * Если вектор c есть a+b, тогда a+b-c = 0. Коэффициенты 1,1,-1.
* если 2 вектора коллинеарны, то они образуют ЛЗС.
* если нулевой вектор принадлежит системе, то она ЛЗС. Это доказывается так: коэффициент при 0-векторе может быть любым числом, т.к. он всё равно не влияет на сумму векторов, а значит, существует набор коэффициентов, в котором не все нули, и значит, формально по определению такая система векторов ЛЗС.

Теорема. Система линейно зависима $\Leftrightarrow$ хотя бы один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.
Идея доказательства. Необходимость. Если система ЛЗС, то хотя бы у какого-то вектора есть ненулевой коэффициент, тогда это слагаемое можно перенести в другую сторону и разделить всё равенство на этот коэффициент.

Достаточность. Если вектор выражен через остальные, его можно перенести в другую сторону равенства, ко всем остальным векторам, то есть в записи $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0$ ему будет соответствовать коэффициент (-1).
Так, если выражен 1-й вектор, то $a_1 = \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$, тогда $-1a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0$.

Определение. Максимальная линейно-независимая подсистема называется **базисом системы** векторов, а число векторов в ней - **рангом системы** векторов.
Пример. Если в плоскости есть 2 неколлинеарных вектора, и добавлены 100 векторов в той же плоскости, r = 2.

* 3 вектора, из которых 2 коллинеарны. Ранг = 2.
* 3 вектора, из которых все 3 коллинеарны. Ранг = 1.

Как видим, было 2 подхода к понятию ранга: ранг системы (число векторов в максимальной независимой подсистеме) и ранг матрицы (порядок наибольшего невырожденного минора). На самом деле, не случайно используется одно и то же слово: если матрицу мысленно разрезать на строки, будет система векторов, и у неё ранг точно такой же, как был у исходной матрицы. Аналогичное верно и для системы столбцов.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен рангу системы её строк (столбцов).

§ 5. Элементы векторной алгебры.

Скалярное, векторное, смешанное произведение.
Скалярное произведение $(a,b) = a_1 b_1 + ...a_n b_n$ хорошо известно из школьного курса.
А сейчас мы научимся с помощью матриц и определителей находить общий перпендикуляр для пары векторов.
Векторное произведение.

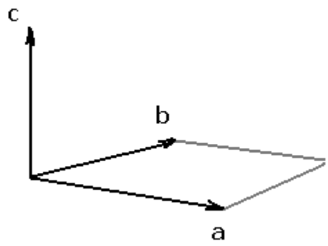
Определение. Вектор c называется векторным произведением векторов a,b, обозначается $c=[a,b]$, если выполнены 3 условия: 1) $c \perp a$, $c \perp b$. 2) Векторы a,b,c образуют правоориентированную тройку, то есть с конца вектора c кратчайший поворот от a к b виден против часовой стрелки. 3) $\|c\|=S$ параллелограмма, образованного парой векторов a,b, то есть $\|c\|=\|a\|\|b\|\sin\varphi$.	

Таблица свойств скалярного и векторного произведений: сходство и различия.

$(a,b)=(b,a)$	$[a,b]=-[b,a]$
$(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$	$[a,b+c]=[a,b]+[a,c]$
$(\alpha a,b)=\alpha(a,b)$	$[\alpha a,b]=\alpha[a,b]$
$(a,a)=\|a\|^2$	$[a,a]=0$
$(a,b)=\|a\|\|b\|\cos\varphi$	$\|\,[a,b]\,\|=\|a\|\|b\|\sin\varphi$

Метод нахождения векторного произведения с помощью определителя: Можно записать в 1-ю и 2-ю строку исходные два вектора, в третьей строке добавить произвольные обозначения осей e_1,e_2,e_3, и вычислить этот определитель.

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3$. Миноры порядка 2 вычислятся, эти числа как раз и будут координатами c_1,c_2,c_3 нового вектора, который является векторным произведением.

Пример. Найти векторное произведение векторов (1,1,1) и (1,2,3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 1e_1 - 2e_2 + 1e_3 = (1,-2,1).$$ Ответ (1,-2,1).

Также можно проверить, что он действительно перпендикулярен исходным векторам (скалярно умножить на 1-й или на 2-й вектор, получим 0).

Примечание. Определитель можно вычислять либо разложением по 3-й строке, либо ранее известными методами, в том числе добавить копии двух первых столбцов справа.

Смешанное произведение. Определеятся так: $(a,b,c) = ([a,b],c)$.

Этот объект корректно определён и существует: векторное произведение первой пары есть какой-то вектор, и его можно скалярно умножить на ещё один, третий вектор, в итоге получится константа.

Смешанное произведение вычисляется с помощью определителя так:

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Обоснование: Если рассмотреть разложение этого определителя по третьей строке, то получится

$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$, то есть 1-я координата векторного произведения $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ как раз и умножается на 1-ю координату вектора c, 2-я на 2-ю и т.д. то есть это и есть $([a,b],c)$.

Геометрический смысл: объём параллелепипеда, образованного тремя векторами.

Глава 2. Системы линейных уравнений.
§ 1. Введение, основные методы решения.

Произвольная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

система из m линейных уравнений с m неизвестными.
Примечание. Не обязательно все n переменных есть в каждом уравнении, в некоторых какие-то могут быть пропущены, то есть коэффициенты a_{ij} = 0.

Уравнения здесь называются линейными потому, что все неизвестные именно в первой степени, то есть нигде не возводятся в квадрат, не умножаются между собой, не извлекается корень и т.д.
Если при этом ещё и все $b_i = 0$, то система называется **однородной**.

Решением системы называется такой набор констант $\alpha_1,..., \alpha_n$, что при подстановке их вместо $x_1,..., x_n$ во всех уравнениях получатся тождества. Можно представлять также и в виде вектора $\overline{\alpha}$.
Обычный, матричный и векторный виды записи системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Основная (A) и расширенная матрица (C).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Если существует хотя бы одно решение (то есть набор x_i, обращающий в тождества все уравнения) то система называется **совместной**, а если решения не существует, то **несовместной, или противоречивой.**
Слово «совместная» система означает, что уравнения совместны между собой, не противоречат друг другу. Примеры:

Совместная: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ есть решение (1,1).

Несовместная $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ если вычесть из 2-го уравнения удвоенное первое, получим противоречие: 0=1.
Если в правой части 2-го уравнения было бы 4, а не 5, то система была бы совместной.

ЛЕКЦИЯ № 4. 23.09.2016

Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы уравнений.
Система линейных уравнений совмстна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(C)$ (ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы).
Замечание. Вообще, при добавлении нового столбца ранг может или остаться прежним, или увеличиться на 1.
Идея доказательства. Если вектор b (вспомним векторный вид системы) является линейной комбинацией столбцов матрицы А, то существуют x_i - коэффициенты, и решение существует, а если он не является линейной комбинацией столбцов матрицы А, то x_i не существует, и решения нет.
$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ или $x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 = \overline{b}$.
Рассмотрим расширенную матрицу для системы из недавнего примера:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$, $C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Если рассматривать основную матрицу (до черты) там ранг = 1, потому что во 2-й строке только нули. А если всю расширенную матрицу, то там есть

невырожденный минор 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ранги основной и расширенной матриц не совпадают.

Определение. Если решение системы линейных уравнений единственно, то она называется **определённой,** если не единственно, то **неопределённой.**

Определённая: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ экв. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ решение (1,1).

Неопределённая: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ Решения: (1,1) или (2,0) или (0,2) или (3,-1) или (4,-2), их бесконечно много.

Фактически 2-е уравнение лишнее, а из 1-го следует $x_2 = 2 - x_1$. Что бы мы ни подставляли вместо x_1, найдётся x_2. Единственного точного решения как такового здесь нет, их бесконечно много. Запись $x_2 = 2 - x_1$ здесь называется **общим решением**, а переменная x_1, которую перенесли вправо и можем свободно задавать - **свободной переменной.**

* Если ранг основной матрицы меньше, чем число неизвестных, т.е. $r(A) < n$ то система неопределённая, так как есть столбцы, не входящие в базисный минор, и именно эти неизвестные переносятся вправо.

Геометрический смысл при n=2.

Рассмотрим систему из 2 уравнений и 2 неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Её геометрический смысл. Каждое из уравнений задаёт некоторую прямую в плоскости. Прямые могут:

1. пересекаться в одной точке (решение единственно), в этом случае система совместная и определённая.

2. совпадать (решений бесконечно много), в этом случае система совместная, но неопределённая.
3. быть параллельны (нет решений) - система несовместна.

Методы решения систем с квадратной основной матрицей.
1) Матричный метод.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, или $A\overline{x} = \overline{b}$. Слева домножим обратную матрицу:

$A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, то есть $E\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, то есть $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$. Получается, что все x_i можно найти так: умножить обратную матрицу на правую часть.

На примере: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$. Матричный вид системы:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, обратную матрицу для этой матрицы ранее находили, это $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

2) Метод Крамера.
Пусть А - основная матрица системы линейных уравнений. Если удалить какой-либо i-й столбец основной матрицы и внести на это место правую часть, то получится некая новая квадратная матрица, обозначим её A_i. Тогда верны следующие формулы для x_i. $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ для каждого i от 1 до n.

Идея доказательства формул Крамера проста и основывается на подробной записи матричного равенства $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$, учитывая структуру обратной матрицы:

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots \\ A_{12} & A_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$ тогда $x_1 = \dfrac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + .. b_n A_{n1}}{|A|}$ как видим,

алгебраические дополнения здесь именно к элементам 1-го столбца, но умножаются они на b_i, то есть, как если бы вместо 1-го столбца была поставлена правая часть системы.

Рассмотрим на примере той же самой системы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Но эти два способа используются чаще для матриц 2 и 3 порядка, и они очень трудоёмкие, если матрица порядка 4 и больше.

3) Метод Гаусса.

Метод состоит в преобразовании основной матрицы к треугольному виду. Можно последовательно обнулить элементы ниже углового a_{11}, вычитая из других уравнений 1-е, домноженное на коэффициент $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ (для каждой строки разные). Теперь x_1 будет только в первом уравнении, в других нет. Затем так же точно можем обнулить всё ниже чем a_{22}, вычитая из каждой строки 2-ю с соответствующим коэффициентом. Кстати, при этом нули, уже расположенные слева, не изменятся. Затем обнулим все элементы ниже a_{33}, ниже a_{44}, и так далее. В итоге для основной матрицы системы получится треугольный вид: нули везде ниже главной диагонали. При преобразованиях можно работать с расширенной матрицей, а не системой, чтобы не переписывать каждый раз n^2 букв

«x». Обратите внимание, что правая часть подвергается тем же преобразованиям, что и вся строка, где находится этот b_i.

После преобразований надо восстановить полную запись системы с неизвестными, но в ней уже будет хорошее свойство: чем ниже уравнение, тем меньше переменных, а в последнем вообще одна лишь x_n. Это и позволит нам сначала выразить x_n, затем с этой известной информацией подняться в предпоследнее уравнение, и найти

x_{n-1}, и так дажее до 1-го уравнения, где найдём x_1.

На примере. $\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =6 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \end{array}\right\}$ Преобразования расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала из 2-й строки вычли 1-ю, а из 3-й удвоенную 1-ю.
На втором этапе, к 3-й прибавили 2-ю.
Система после преобразований:

$\left.\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ & x_2 & +2x_3 & =3 \\ & & +x_3 & =1 \end{array}\right\}$, из последнего $x_3 = 1$, подставляем в предпоследнее, будет $x_2 + 2 = 3$, то есть $x_2 = 1$. Далее, уже известные x_2 и x_3 подставми в первое уравнение, и получим $x_1 = 1$.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, или $\bar{x} = (1,1,1)$.

Некоторые особенности решения систем уравнений методом Гаусса.

1) Допустим, 1-й элемент в следующей строке не кратен угловому элементу, например: $\begin{cases} 3x_1 + \ldots \\ 5x_1 + \ldots \end{cases}$

Вообще, можно отнять от 2-й строки 1-ю, домноженную на 5/3. Однако чтобы избежать вычислений с дробями, можно сначала умножить всю 2-ю строку на 3, получится $\begin{cases} 3x_1 + \ldots \\ 15x_1 + \ldots \end{cases}$ и затем уже можно работать только с целыми коэффициентами.

2) Если угловой элемент основной матрицы уже 0, то есть нет x_1 в первом уравнении. Тогда вычитание 1-й строки из других строк не изменит элементы ниже углового a_{11} и не позволит приводить матрицу системы к треугольному виду в итоге. Однако проблема решается элементарно: сначала нужно поменять местами 1-е уравнение с каким-то из следующих, где есть элемент x_1. Желательно с тем, где оно с коэффициентом, равным 1, чтобы затем вычитать только строки, кратные первой. Таким образом, метод Гаусса очень устойчив, и может выполняться, даже когда в матрице угловой элемент был 0.

§ 2. Неоднородные системы с произвольной матрицей.

В общем случае, основная матрица системы не квадратная, а прямоугольная. При этом базисный минор порядка r, где $r \le n, r \le m$. Возможно, что ранг даже и строго меньше, $r < n, r < m$.

Сначала нужно упростить расширенную матрицу системы методом Гаусса и обвести базисный минор.

Если $r < m$ (ранг меньше числа неизвестных) то в процессе преобразований методом Гаусса получатся $m - r$ строк, состоящих из нулей. Уравнения, соответствующие им, в системе уравнений не несут никакой информации: $0x_1 + ... + 0x_n = 0$. Такие уравнения просто вычёркиваются.

Но также возможно, что $r < n$ - ранг меньше числа неизвестных (то есть базисный минор не заполняет всю матрицу до правого края). Столбцы, не являющиеся базисными, переносят вправо. В системе это означает, что $n - r$ переменных нужно перенести вправо в каждом уравнении (они называются свободными переменными), а r базисных переменных оставить слева.

Фактически, при этих действиях мы стремимся к тому, чтобы слева получить именно квадратную матрицу (порядка r), причём она уже будет приведена к треугольному виду, и можно будет выражать неизвестные $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ поочерёдно. Но в отличие от определённых систем, справа в это время не просто константы, а блоки, состоящие из констант и свободных неизвестных.

Таким образом, первые r переменных в ответе будут не конкретными числами, а функциями от последних $n-r$ переменных. Совокупность таких выражений называется ОБЩИМ РЕШЕНИЕМ.

Если присвоить какие-либо значения свободным переменным и вычислить r базисных, то получим тогда уже конкретный набор из n чисел, это называется ЧАСТНЫМ РЕШЕНИЕМ. Частных решений может быть бесконечно много, потому что присваивать свободным неизвестным можно любые действительные значения.

Общее и частное решение.

Пример.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$.

Запишем расширенную матрицу и преобразуем её методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из 2-й строки отняли 1-ю, из 3-й удвоенную 1-ю. Замечаем, что 2 и 3 строка одинаковы, вычитаем из 3-й 2-ю, и 3-я строка получилась состоящей из 0. Это уравнение 0 = 0 , очевидно, его можно вычеркнуть.

Базисный минор 2 порядка можно найти в левом верхнем углу.

Здесь m = 3, n = 4, r = 2.

Обратите внимание. Типичной и характерной ошибкой является то, что вычёркивают обе пропорциональных строки, а не одну. Но если провести алгоритм Гаусса до конца, то видно, что одна из них сотаётся и несёт содержательную информацию, а её копия лишняя, она и обратилась в 0. Не нужно торопиться и вычёркивать все пропорциональные строки, ведь хотя бы одна из них не лишняя! Развернём две оставшихся строки снова в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Здесь перенесём x_3 вправо, именно 3-я переменная - свободная, так как баисный минор обвели в левом углу.
* Впрочем, это не единственный вариант: базисный минор можно составить из фрагментов 1 и 3 столбца, тогда x_2 была бы свободная.
Итак, перенесём x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - x_3 \\ \quad x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$ Основная матрица системы фактически стала квадратной, 2 порядка, т.е. множество коэффициентов при базисных переменных образует такую квадратную матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Просто справа при этом не только константы, а составные выражения из констант и каких-то параметров.
Видно, что x_2 уже и так выражена, $x_2 = 2 - x_3$. Подставим это выражение в 1 уравнение, чтобы выразить отдельно x_1 через x_3.
$x_1 + (2 - x_3) = 3 - x_3$, в итоге $x_1 = 1$. Как видно, свободные переменные где-то могут и сократиться полностью, то есть какие-то базисные переменные выражаются просто через константу. Но в других примерах могут и все базисные зависеть от свободных переменных.
Итак, $\{x_1 = 1, x_2 = 2 - x_3\}$ - это общее решение. В нём есть один свободный параметр x_3.
Его можно записать также и в виде такого вектора: $(1, 2 - x_3, x_3)$.
Если задавать любое $x_3 \in R$, будет получать тройки чисел, которые служат частными решениями.
Например, при $x_3 = 0$ получим (1,2,0). А при $x_3 = 1$ получим (1,1,1).

При $x_3 = 2$ получим (1,0,2), также можно задавать дробные значения x_3, например, частным решением является также и $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Частных решений бесконечно много.

* Свободных неизвестных $n - r$. Как правило, это последние, но не факт: зависит от строения системы. Если, например, 2-й столбец кратен 1-у, то базисный минор не удастся выбрать в левом верхнем углу, а только с разрывом через второй столбец, тогда 2-й столбец не будет базисным, и x_2 - свободная пременная.

Теорема (о наложении решений).

Если даны 2 системы уравнений с одной и той же основной матрицей, отличающиеся лишь правой частью, $\bar{x}$ - решение системы с правой частью $\bar{b_1}$, а вектор $\bar{y}$ - решение соответствующей системы с правой частью $\bar{b_2}$, тогда $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ является решением третьей системы, где правая часть $\alpha\bar{b_1} + \beta\bar{b_2}$.

Доказательство. Дано $A\bar{x} = \bar{b_1}$, $A\bar{y} = \bar{b_2}$, тогда

$A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y} = \alpha\bar{b_1} + \beta\bar{b_2}$.

Пример. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ - две системы с одной той же основной матрицей. Решение первой (1,1), для второй (1,2).

Если образуем третью новую систему, в которой в правой части поставим сумму,

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ сумма тех двух решений будет для неё решением: (2,3).

§ 3. Системы линейных однородных уравнений.

Если в каждом уравнении правая часть $b_i = 0$, такая система называется однородной.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \quad \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 \quad \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Расширенная матрица содержит столбец, состоящий только из 0, то есть ранг расширенной матриц точно не больше, чем ранг основной! По теореме Кронекера-Капелли получается, что однородная система всегда совместна, то есть существует хотя бы одно решение. Заметим, что при подстановке всех 0 вместо неизвестных, $x_i = 0$, все равенства автоматически выполняются, т.е. нулевое решение для такой системы всегда существует. Оно называется <u>тривиальным</u> решением.

Тривиальное решние может быть не единственным, возможно, есть ещё какие-то наборы чисел, которые можно подставить в систему. Основной задачей для однородных систем как раз и является поиск ненулевых решений.
Нетривиальные решения есть, например:
$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ решения (1,1), (2,2), и т.д. Любое (C,C) для $C \in R$ есть решение.
Здесь ранг равен 1, и 2-я перменная свободная.
$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ А здесь ранг основной матрицы равен 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, базисный минор фактически заполняет всю основную матрицу, до правого края, в этом случае нет свободных переменных. Решение только тривиальное.

Если решать методом Гаусса, то получим $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$ тогда $x_2 = 0$, и отсюда $x_1 = 0$.
После приведения к треугольному виду, последняя неизвестная получится 0, за ней и предпоследняя и т.д.

Теорема 1. Однородная система с квадратной основной матрицей имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда основная матрица вырожденная.

* А если матрица невырожденная, то решение единственно, но поскольку обязательно существует тривиальное, то оно и есть тривиальное (все нули), других решений нет.

Теорема 2. Линейная комбинация решений однородной системы тоже есть решение.

Доказательство. Дано $A\overline{x} = \overline{0}$, $A\overline{y} = \overline{0}$, тогда $A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) =$ $\alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y} = \alpha\overline{0} + \beta\overline{0} = \overline{0}$.

* Для неоднородных систем такой факт был не верен! Там есть лишь более сложный аналог - теорема о наложении решений. Но идея доказательства похожая: если в той теореме $\overline{b_1}$ и $\overline{b_2}$ - нулевые векторы, получим эту теорему.

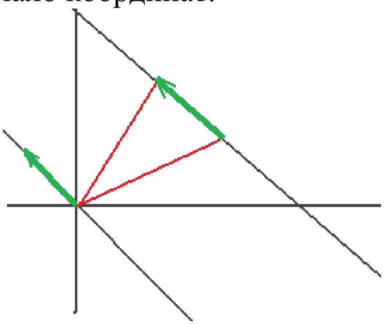
Теорема 3. Сумма решений неоднородной и соответствующей однородной системы есть решение неоднородной системы.

Доказательство. Пусть $\overline{x}$ решение неоднородной системы, $\overline{y}$ - решение соответствующей однородной системы (с той же основной матрицей, но 0 в правой части).

$A\overline{x} = \overline{b}$, $A\overline{y} = \overline{0}$, тогда $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{b} + \overline{0} = \overline{b}$.

Следствие. Разность двух различных частных решений неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы.

Геометрический смысл. Если взять разность двух радиус-векторов, проведённых к точке какой-либо прямой, не проходящей через начало координат, получится вектор, лежащий на параллельной прямой, проходящей через начало координат.



Теорема 4. Пусть дана однородная система с n неизвестными, ранг основной матрицы равен r. Тогда существует $n-r$ линейно-независимых решений однородной системы, и всякое другое решение есть их линейная комбинация.

Определение. Данная система, состоящая из $n-r$ линейно-независимых решений, называется фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы уравнений.

Пример. (r=2, n=4). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

базисный минор порядка 2, можно обвести в левом углу, поэтому 3-я и 4-я переменная - свободные. Перенесём их через знак равенства.

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ \quad x_2 = x_3 + 2x_4 \end{cases}$. x_2 уже выражено: $x_2 = x_3 + 2x_4$, подставим это в первое уравнение, чтобы выразить и x_1.

$x_1 + (x_3 + 2x_4) = -x_3 - x_4$, $x_1 = -2x_3 - 3x_4$.

Общее решение: $\{\, x_1 = -2x_3 - 3x_4,\ x_2 = x_3 + 2x_4 \,\}$.

Если поочерёдно присвоить значение 1 каждой из свободных переменных (а другая в это время 0) то получим гарантированно 2 линейно-независимых вектора, они не пропорциональны, так как 1 на разных местах.

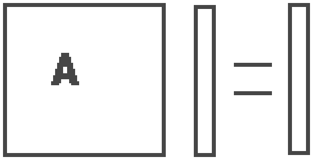
$x_3 := 1, x_4 := 0$, получим $(-2,1,1,0)$

$x_3 := 0, x_4 := 1$, получим $(-3,2,0,1)$.

Эти 2 вектора $\{\,(-2,1,1,0),\ (-3,2,0,1)\,\}$ и есть ФСР. Это $n-r$ частных решений, из которых можно составить любые другие частные решения. Любые их линейные комбинации будут частными решениями однородной системы. В этом примере $n = 4$, $r = 2$.

* Для системы с квадратной матрицей справа были только числа, для системы с прямоугольной матрицей к ним добавляются свободные переменные, и там будут выражения типа $(2 - x_3)$. А для однородной системы справа констант нет (они = 0), но туда перенесены свободные переменные. То есть идея решения методом Гаусса во всех этих 3 параграфах одна и та же, но справа разные типы объектов.

Лекция № 5. 30. 09. 2016
Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.
§ 1. Линейный оператор и его матрица
В этой главе будут изучаться отображения векторных пространств.
Во-первых, рассмотрим умножение квадратной матрицы на столбец. Ax = y. В результате один вектор преобразуется в другой. Получается, что квадратная матрица задаёт некоторое отображение одних векторов в другие.



Определение. Отображение $L: R^n \to R^n$ называется линейным отображением (синоним: линейный оператор) если выполнены 2 условия:

$$1)\ \ L(x+y) = L(x) + L(y) \qquad 2)\ \ L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Умножение квадратной матрицы на вектор удовлетворяет свойствам линейности, в силу свойств умножения матриц.
Примечание. Вместо 2 условий в определении линейности можно использовать одно, общее: $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$.

Из определения напрямую следует, что всякое линейное отображение зависит только от того, куда отображаются базисные векторы:

$$L(x) = L(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = L(x_1 e_1) + ... + L(x_n e_n) = x_1 L(e_1) + ... + x_n L(e_n).$$

Образ вектора x в итоге зависит от координат вектора x и от образов базисных векторов, то есть линейный оператор однозначно задаётся образами базисных векторов.

Матрица линейного оператора, строение матрицы.
Покажем, что образы базисных векторов должны быть расположены в столбцах матрицы, что именно при таком строении матрицы

умножение её на вектор-столбец будет задано корректно, то есть оно будет действительно отображать базисные векторы в их образы.
Пусть в нашем примере базисные векторы (1,0) и (0,1) переходят в (1,3) и (2,4). Построим матрицу, где это - столбцы, и умножим её на (1,0) и (0,1) поочерёдно:

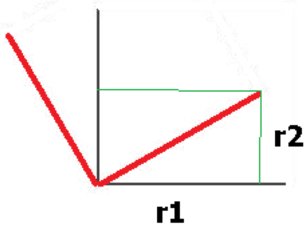
Умножим на $e_1 = (1,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

на $e_2 = (0,1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Обнаружили, что базисные векторы при умножении на квадратную матрицу отобажаются именно в такие векторы, координаты которых записаны в 1 и 2 столбце матрицы!

Строение матрицы оператора: столбцы есть образы базисных векторов при данном отображении, то есть столбец номер i матрицы оператора содержит вектор $L(e_i)$.

Итак, если задан какой-либо закон, по которому отображаются векторы, то чтобы задать матрицу оператора, надо найти, куда отображаются базисные векторы. Для примера, найдём матрицу оператора поворота на 90 градусов.
$(1,0) \to (0,1)$, $(0,1) \to (-1,0)$. Запишем в 1-й и 2-й столбец эти образы:
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Действие оператора на любой вектор задаётся матрицей так:
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ - любой вектор поворачивается на 90 градусов.
Поворот на произвольный угол:



Расстояния r1 и r2 здесь равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Красным показаны образы базисных векторов. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

При $\alpha = 90^0$ как раз и получится $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. А вот при $\alpha = 180^0$ матрица будет иметь вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и действительно, умножение на такую матрицу переводит любой вектор (x, y) в $(-x, -y)$, а при повороте на $\alpha = 180^0$ каждый вектор как раз и должен повернуться и стать противоположным исходному.

Как построить матрицу по общему виду функции, например

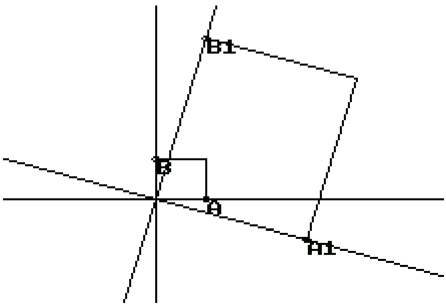
$$L(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, x_1 + 4x_2)$$

Отобразим базис: $(1,0) \to (2,1)$, $(0,1) \to (3,4)$.

Запишем в столбцы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

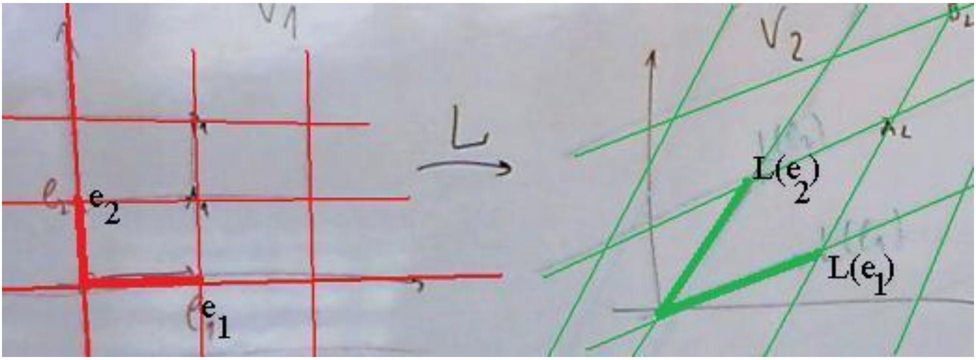
Образ произвольного вектора как раз и получается таким, как требуется в изначальной формуле: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим, как же графически выглядит преобразование плоскости при действии линейного оператора.



Наклонные прямые – образы координатных осей при действии линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Единичный квадрат, сторонами которого являются векторы (1,0) и (0,1) отображается в параллелограмм со сторонами (3,-1) и (1,4). Точка A переходит в A_1, точка B – в B_1.

Восстановленный чертёж с доски. Показано, как прямоугольная сетка искажается после действия линейного оператора:



Оператор проекции на ось Ox.
Базисный вектор (1,0) остаётся на своём месте, а (0,1) отображается в (0,0). Проекции на ось x соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

* Свойство: L(0)=0. Действительно, пусть 0 вектор задан в виде $x - x$. Тогда: $L(x - x) = L(x) - L(x) = y - y = 0$.

Получается, что только растяжение и поворот и их комбинации есть линейные отображения, а параллельный перенос (сдвиг) не входит в это понятие, ведь он не сохраняет 0-вектор на своём месте. Среди отображений 1-мерного пространства получается, что линейным отображением является лишь y=kx, но не y=kx+b.

k(x+y)= k(x) + k(y), но для y=kx+b сумму так раскрыть уже нельзя, потому что k(x+y) +b = k(x) + k(y) +b , а не (k(x) +b) + (k(y) +b).

Тождественный оператор I.
Линейный оператор, который отображает каждый вектор в исходный, называется тождественным. I(x)=x. Ему соответствует матрица E.

Композиция операторов. Если последовательно действуют два линейных оператора: $L_2(L_1(x))$ то итоговое отображение называется композицией двух операторов. Соответственно, с помозью матриц это задаётся так: $B(Ax)$, что равно $(BA)x$, так что композиции операторов соответствует произведение матриц.

Обратный оператор. Если для линейного оператора L существует линейный оператор, который каждый вектор отображает обратно в x, то L называется обратимым, а этот второй оператор - обратным для L.
$L(x) = y \quad L^{-1}(y) = x$.
Примеры: поворот на угол - обратимый, проекция - необратимый линейный оператор.
При последовательном действии двух этих операторов получается тождественный: $L^{-1}(L(x)) = A^{-1}(Ax) = x = I(x)$
Обратному оператору соответствует обратная матрица.
Лемма. Линейный оператор является обратимым $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

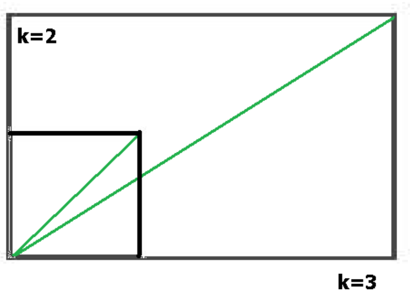
§ 2. Собственные векторы.

Определение. Если для ненулевого вектора выполняется $Lx = \lambda x$, то λ называется собственным числом, а вектор x называется собственным вектором, соответствующим этому собственному числу.
Замечания.
* Геометрически это означает, что при действии отображения вектор остаётся на той же самой прямой.
* Для нулевого вектора рассматривать это понятие нет смысла, ведь $L0 = \lambda 0 = 0$ для любого числа λ.
Не для каждого оператора существуют собственные векторы.

Примеры. При повороте плоскости на произвольный угол, ни один вектор не остаётся на той же самой прямой. Однако в случае поворота на 0 и 180 градусов, все векторы остаются на своих прямых, $\lambda = 1$ для поворота на 0 градусов (это тождественное оторажение), $\lambda = -1$ для поворота на 180^0, так как все векторы переходят в противоположные.

Вращение в пространстве: все векторы на оси вращения - собственные, соответствуют $\lambda = 1$.

Если растяжение по оси x с коэффициентом 2, а по оси y с коэффициентом 3, то векторы, не лежащие на осях, немного поворачиваются, не являются собственными.



Теорема 1. Линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному и тому же числу λ, тоже является собственным вектором, соответствующим тому же λ.

Доказательство. Дано $Lx = \lambda x$, $Ly = \lambda y$. Тогда

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda \cdot (\alpha x + \beta y).$$

Итак, для линейной комбинации, действие оператора тоже равносильно умножению на λ, что и требовалось доказать.

* Важные следствия: Если какой-то вектор на прямой является собственным, то и любой другой вектор на этой же прямой является собственным, так как он кратен первом у вектору, то есть является его линейной комбинацией.

Если растяжение в плоскости на один и тот же коэффициент по двум осям, то и все векторы плоскости - собственные векторы.

Теорема 2. Любые два собственных вектора, соответствующих различным собственным числам, образуют линейно-независимую систему.

Доказательство. Дано $Lx = \lambda_1 x$, $Ly = \lambda_2 y$. Допустим, что они были бы линейно-зависимы, то есть предположим $y = kx$.

Можно сначала отобразить линейным оператором, а потом представить в виде $y = kx$, а можно наоборот, сначала выразить через kx, а потом применить отображение:

$$L(y) = \lambda_2 y = \lambda_2 kx$$

$$L(y) = L(kx) = kL(x) = k\lambda_1 x$$

тогда $\lambda_1 kx = \lambda_2 kx$, то есть $(\lambda_1 - \lambda_2)kx = 0$. Но вектор x ненулевой, коэффициент k тоже. Тогда $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, то есть $\lambda_1 = \lambda_2$, а это противоречит условию теоремы. Итак, предположение $y = kx$ ложно, векторы не могут быть линейно-зависимы. Что и требовалось доказать.

Вывод: Вся прямая состоит из собственных векторов, соответствующих одному и тому же λ, там не может быть векторов, соответствующих другим числам, а также векторов, не являющихся собственными.

Теорема 3. О собственных векторах обратного оператора.
Если x является собственным вектором линейного оператора L, соответствующим λ, то он также является собственным и для обратного оператора L^{-1}, и соответствует числу $1/\lambda$.

Доказательство. Если $L(x) = \lambda x$, то по определению обратного оператора $L^{-1}(\lambda x) = x$. Но тогда вынесем константу: $\lambda \cdot L^{-1}(x) = x$ а значит, $L^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x$.

Введём такие понятия:
Характеристическая матрица $A - \lambda E$.
Характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = 0$ (вычислить определитель хар. матрицы и приравнять к 0).

Теорема 4. Число λ является собственным для линейного оператора, заданного матрицей A, тогда и только тогда, когда $|A-\lambda E|=0$.

Доказательство. Покажем для матрицы 2 порядка. Запишем подробно выражение $Ax=\lambda x$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \left.\begin{matrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2=\lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2=\lambda x_2 \end{matrix}\right\}$$

Это кажется похоже не неодородную, но на самом деле это однородная система, так как справа не константы, а выражения с теми же переменными, что и слева, то есть их можно перенести все в одну сторону, и справа останутся 0, вот что получилось:

$$\left.\begin{matrix} (a_{11}-\lambda)x_1 & +a_{12}x_2 & =0 \\ a_{21}x_1 & +(a_{22}-\lambda)x_2 & =0 \end{matrix}\right\}$$

Если основная матрица такой системы невырождена, то решение только тривиальное (так как ранг равен числу переменных, и нет свободных переменных), а если вырождена, то нетривиальные решения есть.

Итак, решение существует $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$, это и есть

$|A-\lambda E|=0$, так как это определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Что и требовалось доказать.

* Рассмотрим случай $\lambda=0$. Прямая, состоящая из собственных векторов, соответствующих $\lambda=0$, называется ядром оператора. $Ker(L)=\{x \mid Lx=0\}$.

Алгоритм поиска собственных векторов.

1. Вычислить определитель $|A-\lambda E|$ и приравнять к нулю - получится характеристическое уравнение.
2. Решить характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$, найти все собственные числа.

Их будет не больше, чем n, так как уравнение порядка n, так как по диагонали n элементов.
3. Подставить каждое конкретное λ в характеристическую матрицу, и решить однородную систему $(A-\lambda E)x=0$. Таких шагов может быть n. Каждый раз надо изменить диагональ и заново решить систему! ФСР системы это и будет собственный вектор для того λ .

Пример. Найти собственные числа и векторы для $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$.

$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 3\\ 2 & 6-\lambda\end{pmatrix}$. Далее, $\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$. Тогда уравнение $(1-\lambda)(6-\lambda)-6=0$.

Рещим это уравнение: $\lambda^2-7\lambda=0$. Получим $\lambda_1=0,\lambda_2=7$.

Теперь подставим каждое λ и решим системы уравнений.

$\lambda=0$:

$\begin{pmatrix}1-0 & 3\\ 2 & 6-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, система: $\begin{matrix}x_1 & +3x_2=0\\ 2x_1 & +6x_2=0\end{matrix}$.

Общее решение: $x_1=-3x_2$, вектор $(-3,1)$.

$\lambda=7$:

$\begin{pmatrix}1-7 & 3\\ 2 & 6-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, система:

$\begin{matrix}-6x_1 & +3x_2=0\\ 2x_1 & -x_2=0\end{matrix}$. Общее решение: $x_2=2x_1$, вектор $(1,2)$.

Проверка:

$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 14\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

Никакого третьего собственного числа в этом примере быть не может, так как матрица порядка 2, и характеристическое уравнение степени 2.

Теорема 5. Если базис состоит из собственных векторов, то матрица оператора в этом базисе диагональна.

Доказательство.

$Le_1 = \lambda_1 e_1 = \lambda_1 e_1 + 0e_2 + 0e_3 + ...0e_n$, то есть 1-й столбец в матрице оператора это такие числа: $(\lambda_1, 0, 0, ..., 0)$.

Аналогично $Le_2 = \lambda_2 e_2 = 0e_1 + \lambda_2 e_2 + 0e_3 + ...0e_n$, то есть 2-й столбец $(0, \lambda_2, 0, ..., 0)$. И т.д.

Таким образом, получится матрица оператора: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Теорема 6. Следующее свойство (Ax,y) = (x,Ay) выполняется $\Leftrightarrow$ матрица A симметрична (то есть $a_{ij} = a_{ji}$).

Доказательство. Рассмотрим это равенство для базисных векторов: $(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j)$. Если оно выполняется для любой пары базисных векторов, то есть для любых индексов i, j .

Ae_i, как показано раньше, это i-й столбец матрицы линейного оператора. Если скалярно умножить его на e_j, то есть на тот вектор, где все координаты 0 и только на месте j единица, - получим j - й элемент из i - го столбца, это a_{ji} в матрице.

Аналогично, (e_i, Ae_j) это i - й элемент из j - го столбца, то есть a_{ij}.

Таким образом, $(Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j)$ эквивалентно тому, что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех индексов i, j.

Определение. Если для линейного оператора L, для любой пары векторов x, y верно $(Lx, y) = (x, Ly)$, то L называется симметрическим оператором.

Лекция № 6. 07. 10. 2016

Теорема 7. Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство. Дано: $(Ax, y) = (x, Ay)$, пусть первый вектор собственный и соответствует λ_1, а второй λ_2. То есть верно: $Ax = \lambda_1 x$ и $Ay = \lambda_2 y$. Тогда $(Ax, y) = (x, Ay)$ можно записать в виде $(\lambda_1 x, y) = (x, \lambda_2 y)$, тогда $\lambda_1 (x, y) = \lambda_2 (x, y)$, тогда $(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0$. Собственные числа разные, поэтому первый множитель не равен 0, тогда $(x, y) = 0$. Скалярное произведение 0, векторы ортогональны.

Следствие. Для линейного оператора, матрица которого симметрична, существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов.

§ 3. Квадратичные формы.

Билинейная форма, её задание с помощью матрицы.

Рассмотрим подробнее скалярное произведение типа (x, Ay), A - матрица некоторого линейного оператора. Произведение квадратной матрицы на столбец y это вектор-столбец, затем его скалярно умножаем на вектор x, в итоге получится число. Таким образом, (x, Ay) это некоторая скалярная функция от 2 векторов. Она линейна по каждому аргументу: если на 1 или 2 месте сумма векторов, то результат тоже представляется в виде суммы. Обозначим $B(x, y) = (x, Ay)$ и назовём эту функцию **билинейной формой**.

Подробнее при n=2 :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

При произвольном n: $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ здесь n^2 слагаемых.

Фактически, это обобщённое скалярное произведение. Обычное скалярное произведение можно задать таким же способом, но с единичной матрицей E: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2$. Это частный случай билинейной формы.

Теперь рассмотрим такой случай. Пусть билинейная форма вычисляется от 2 одинаковых векторов, $y = x$. Обозначим $B(x, y) = Q(x)$ и назовём эту функцию, отобраюющую один вектор в число, **квадратичной формой**.

Квадратичная форма задаётся через скалярное произведение так: $Q(x) = (x, Ax)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ задаёт такую квадратичную форму:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2x_1 + 5x_2^2 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Очевидно, $x_1x_2 = x_2x_1$, то есть эта группа из двух слагаемых $a_{12}x_1x_2$ и $a_{21}x_2x_1$ может быть объединена. Коэффициенты a_{12} и a_{21} распределить поровну. Так, $3x_1x_2 + x_2x_1$ это то же самое, что $2x_1x_2 + 2x_2x_1$. Но ведь тогда матрицу квадратичной формы можно сделать симметричной, перераспределить эквивалентные элементы с сохранением их суммы. Таким образом, квадратичную форму всегда можно задать симметричной матрицей. Эта же самая квадратичная форма может быть задана и такой матрицей: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример. Построить матрицу квадратичной формы $Q = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 4x_2^2$.

Решение. Распределим поровну коэффициенты: $Q = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2x_1 + 4x_2^2$. Каждый коэффициент, стоящий при x_ix_j, запишем на место a_{ij}.

Ответ: матрица: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

* Очевидно, если матрица диагональна, то $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

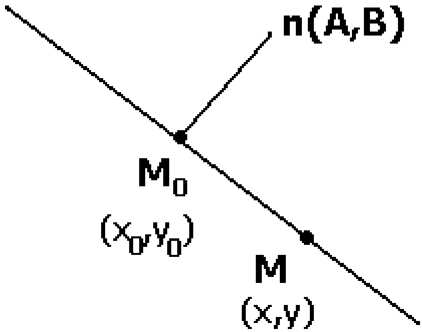
$a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2$ квадратичная форма не содержит попарных произведений, а содержит только квадраты координат.
* Вспомним теорему 7 из прошлого §. Если матрица симметрична, то собственные векторы ортогональны.
* Вспомним также теорему 5 из прошлого §. Если в качестве нового базиса взять n собственных векторов, то матрица оператора в новом базисе будет диагональной.
Из всего сказанного следует, что квадратичную форму всегда можно привести к виду, не содержащему попарные произведения, а содержащему лишь квадраты, называется к «главным осям» (главные оси это направления, соответствующие собственным векторам).
Приведение к главным осям основано на поиске собственных чисел и векторов, примеры на эту тему решим подробно на практике.

Глава 4. Аналитическая геометрия.
§1. Прямая на плоскости.

Известное из школы уравнение прямой: $y = kx + b$. Однако такое уравнение не позволяет задавать вертикальные прямые. Существует общий вид уравнения прямой: $Ax + By + C = 0$.
Кстати, уравнение $y = kx + b$ относится к типу явных уравнений $y = f(x)$, а уравнение $Ax + By + C = 0$ неявное - типа $F(x, y) = 0$

Пункт 1. Вывод уравнения прямой по точке и перпендикуляру.
Допустим, дана точка M_0 с координатами (x_0, y_0) и перпендикуляр (синоним: «нормаль») к прямой, вектор $\overline{n}$.
Если произвольную точку M с координатами (x, y) взять вне этой прямой, то M_0M и n не перпендикулярны, а если M принадлежит прямой, то перпендикулярны, тогда их скалярное произведение = 0.

$\left(M_0M, n\right) = 0$ см. чертёж. $M_0M = (x - x_0, y - y_0)$ (из координат конца вектора вычли координаты его начала).



Тогда $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$, обозначим $-Ax_0 - By_0$ через C, и получим $Ax + By + C = 0$.

Таким образом, мы также доказали, что координаты нормали являются коэффициентами при x,y в уравнении прямой.

Замечание. Здесь может возникать вопрос: А если вектор нормали длиннее или короче, чем исходный, это тоже нормаль, не получится ли другое уравнение прямой? На самом деле, если вектор нормали умножить на k, то все коэффициенты уравнения, включая константу, будут больше в k раз, но тогда можно вынести число k и сократить на него всё уравнение, а справа 0 ведь при этом так и останется 0. То есть, получим уравнение той же самой прямой, и от длины нормали на самом деле ничего не зависит.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) перпендикулярно вектору (3,4).

Решение. $M_0M = (x-1, y-2)$, $n = (3,4)$, они перпендикулярны. Тогда $3(x-1) + 4(y-2) = 0$, то есть $3x + 4y - 11 = 0$.

Замечание. Здесь можно явно выразить y и привести к форме

$$y = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Если в этой задаче была бы нормаль (3,0), т.е. горизонтальный вектор, то получили вертикальную прямую: $3(x-1)+0(y-2)=0$, т.е. $3(x-1)=0$, т.е. $x=1$ - вертикальная прямая, где у в уравнении нет, то есть оно любое.
Итак, точка и перпендикуляр однозначно определяют прямую на плоскости.

Пункт 2. Вывод уравнения прямой по точке и направляющему вектору.

Пусть задана точка M_0 с координатами (x_0, y_0) и направляющий вектор $\bar{l}$ с координатами (k,m). Поставим произвольную точку M (x, y) на прямой. В данном пункте M_0M не ортогонален, а коллинеарен вектору (k,m), то есть координаты векторов $(x-x_0, y-y_0)$ и (k,m) пропорциональны.

Запишем пропорцию: $\dfrac{x-x_0}{k}=\dfrac{y-y_0}{m}$ Это называется «**каноническое уравнение прямой**». Конечно, можно свести к общему виду, умножив крайние и средние члены пропорции: $m(x-x_0)=k(y-y_0)$, сводится к $mx-ky+C=0$.

Заметим, что здесь $A=m, B=-k$. То есть, можно было бы и сразу от направляющего перейти к нормали, для этого поменять местами координаты вектора, и у одной координаты сменть знак. А потом действовать как в прошлом пункте.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) параллельно вектору (3,4).

Решение. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}$, $\quad 4x-4=3y-6$, $\quad 4x-3y+2=0$.

Замечание. Построение уравнения прямой по двум точкам сводится к этому же методу, так как вектор, проведённый между этими точками, как раз и есть направляющий к прямой.

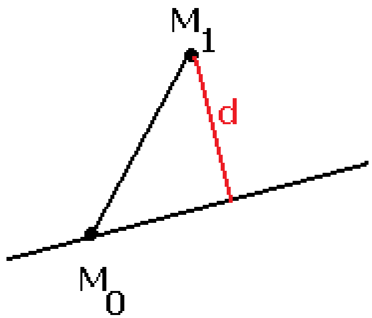
Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки (3,4) и (5,7).

Решение. Направляющий вектор здесь (5-3, 7-4) = (2,3).

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3}$, $3x-9=2y-8$, $3x-2y-1=0$.

Пункт 3. Расстояние от точки до прямой.

Пусть дана прямая $Ax+By+C=0$ и точка $M_1(x_1, y_1)$. Кратчайшее расстояние, то есть длину перпендикуляра, проведённого от точки к прямой, обозначим d. Нам не известно, где основание перпендикуляра, более того, его и не нужно искать. Возьмём произвольную точку M_0 на прямой. Это можно сделать так: присвоим x=0 и вычислим y, либо наоборот, y=0 и вычислить x. Короче, найти какую-нибудь точку на прямой можно элементарно. Далее, соединим M_0 и M_1. Вектор M_0M_1 не перпендикулярен прямой, однако его проекция на нормаль это и есть d.



Применим формулу проекции вектора на ось. $Пр_b a = \frac{(a,b)}{|b|}$. В нашем случае это $\frac{(M_0M_1, n)}{|n|}$. Но расстояние всегда положительно, независимо от того, с какой стороны от прямой эта точка. Поэтому в числителе должен быть ещё и модуль, а не само скалярное произведение.

$d = \dfrac{|(M_0M_1, n)|}{|n|}$, если расписать это подробнее, то

$\dfrac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ т.е. $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Замечание. Если точка M_1 принадлежит прямой, то в числителе 0, и тогда d = 0, что и должно получиться, ведь точка лежит на прямой.

Пример. Найти расстояние от точки $M_1(1,4)$ до прямой $3x + 4y + 1 = 0$.

Решение. Нормаль $n = (3,4)$. Тогда $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ =

$\dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ = $\dfrac{20}{5} = 4$.

Пункт 4. Взаимное расположение прямых в плоскости в зависимости от коэффициентов.

Пусть даны две прямых.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Если решить систему из этих 2 уравнений, то мы и получим точку пересечения. Решение единственно при $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, когда ранг основной матрицы системы, а именно матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, равен 2.

Т.е. если пропорция нарушается в коэффициентах при x,y то есть $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ тогда пересекаются в одной точке.

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, то возможны ещё 2 случая:

1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямые совпадают (система уравнений неопределённая, так как полностью пропорциональны все элементы двух уравнений, а значит, фактически в системе уравнение одно, а не два).

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямые параллельны (систему уравнений получается несовместная).

Если прямые пересекаются в 2 точках, то они совпадают. Это тот случай, когда ранг основной матрицы системы равен 1. Там будет одна свободная переменная, и бесконечное множество решений.

§2. Плоскость в пространстве

Вообще, эта ситуация похожа на прямую в плоскости, ведь там тоже не хватает 1 размерности, здесь 2-мерное множество в 3-мерном пространстве, то есть тоже отличие из размерностей на 1. Нормаль тоже однозначно определяет плоскость в пространстве.

Явное уравнение плоскости: $z = kx + my + c$. Но таким путём невозможно задать никакую вертикальную плоскость, то есть явное уравнение применимо не ко всем ситуациям.

Общее, или неявное уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пункт 1. Вывод уравнения плоскости по точке и перпендикуляру.

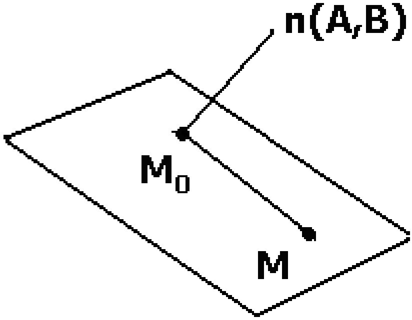
Пусть дана точка M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) и перпендикуляр $n(A, B, C)$. Сейчас мы докажем, что именно эти координаты A,B,C окажутся коэффициентами в уравнении плоскости. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$, принадлежащую плоскости. Тогда вектор M_0M перпендикулярен нормали, то есть вектору $n(A, B, C)$.

Тогда их скалярное произведение, то есть пары векторов $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и (A, B, C) равно 0.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Раскроем скобки:

$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$

Обозначим константу $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Тогда получается $Ax + By + Cz + D = 0$. Чертёж:



Обратите внимание, что координаты нормали оказались именно коэффициентами при x,y,z.

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1,1,1) перпендикулярно вектору (1,2,3).

Решение. Вектор $(x-1, y-1, z-1)$ ортогонален вектору (1,2,3).

Тогда $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ следовательно,

$x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Замечание. Длина нормали не влияет на уравнение. Если бы изначально было дано, что нормаль (2,4,6) то получили бы: $2x + 4y + 6z - 12 = 0$, но это уравнение задаёт ту же самую плоскость. Достаточно вынести 2 за скобку, и сократить на 2, получили бы то же самое уравнение. $2(x + 2y + 3z - 6) = 2 \cdot 0 = 0$.

Пункт 2. Вывод уравнения плоскости по точке и двум направляющим.

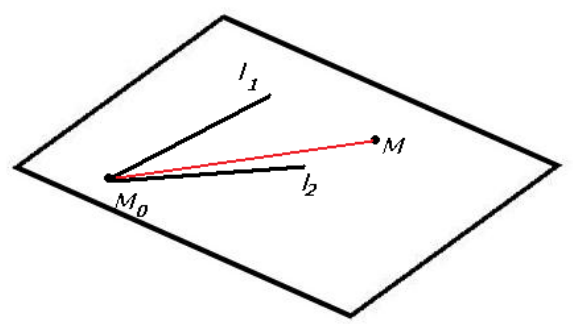
Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и 2 направляющих вектора l_1, l_2 ими однозначно порождается некоторый параллелограмм, а следовательно и плоскость. Одного направляющего вектора недостаточно, ведь тогда плоскость может вращаться вокруг него, то есть плоскость не будет однозначно фиксирована.

Обозначим координаты направляющих, например, так: $l_1(p_1,q_1,r_1)$ и $l_2(p_2,q_2,r_2)$.

Первый способ. Можно найти нормаль к плоскости как векторное произведение 2 направляющих векторов $n=[l_1,l_2]$ и далее искать уравнение плоскости по точке и нормали, методом, рассмотренным в пункте 1. Но это будет решение в 2 шага.

Однако можно также получить уравнение плоскости сразу, без вычисления векторного произведения:

Второй способ. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)$. Если она принадлежит плоскости, то вектор M_0M (показан красным цветом) будет лежать в плоскости, то есть тройка векторов l_1,l_2,M_0M образует линейно-зависимую систему (ЛЗС), то есть эти векторы не образуют параллелепипед, а лежат в одной плоскости.



Тогда смешанное произведение 0, то есть определитель, составленный из них, равен 0:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0$$

Вычисляя этот определитель, мы получим в качестве результата некоторое уравнение, содержащее x,y,z. А если начальная точка (0,0,0), то уравнение будет вычисляться с помощью такого определителя: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0$.

Пример. Построить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельно 2 направляющим (1,2,3) и (1,1,1).

Решение. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Можем разложить по первой строке:

$$x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 2y - z = 0.$$

Для удобства, чтобы 1-й коэффициент был положителен, можно домножить на -1. Ответ: $x - 2y + z = 0$.

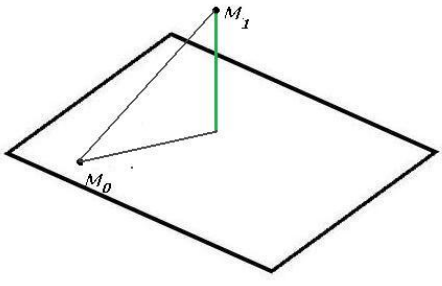
Замечание. Векторы l_1, l_2 можно поменять местами, и это не влияет на уравнение плоскости. Неважно, какой из них считается первым, а какой вторым. Если все миноры сменят знак, то из уравнения просто можно будет вынести коэффициент -1.

Замечание. Построение уравнения плоскости по трём точкам. Если дано 3 точки, достаточно взять 2 направляющих M_1M_2 и M_1M_3 (пусть это и будут те самые l_1, l_2) и затем действовать так, как сказано ранее.

Лекция № 7. 14. 10. 2016

Пункт 3. Расстояние от точки до плоскости.

Пусть дано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и произвольная точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

	Возможно, она лежит в плоскости (тогда расстояние по формуле автоматически получится 0). Но в общем случае она не принадлежит плоскости. Мы не знаем, где основание перпендикуляра, более того, его и не потребуется искать.

Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в плоскости. Сделать это просто: присвоим какие-нибудь значения 2 переменным из трёх, и вычислим третью. Например, как правило, задать x,y и вычислить z. Итак, выбрали какую-то точку в плоскости. Отрезок между M_1 и M_0 не перпендикулярен плоскости, но его проекция на нормаль - это как раз и есть кратчайшее расстояние до плоскости (d).

$$Пр_n M_0 M_1 = \frac{(M_0 M_1, n)}{|n|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .$$

Если подставить в уравнение плоскости (в числителе) точку, лежащую в плоскости, то получим 0. В общем же случае, результат подстановки некоторой точки, не лежащей в плоскости, в уравнение плоскости, характеризует удаление от плоскости.

Пункт 4. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны 2 плоскости.

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Если рассматривать это как систему уравнений, то видим, что 2 уравнения и 3 переменных, то есть по меньшей мере одна свободная переменная. Это означает, что если решения есть, то их бесконечно много. Это и есть все точки, принадлежащие прямой, являющейся пересечением плоскостей.

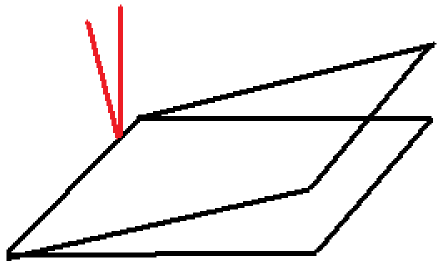
Чтобы найти пересечение, достаточно решить систему уравнений, где 2 уравнения - это и есть уравнения этих плоскостей.

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ то плоскости совпадают, так как уравнения полностью пропорциональны.

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ то плоскости параллельны. Дело в том, что если из одного уравнения вычесть кратное второму, то получим все 0

коэффициенты при x, y, z, и останется противоречивое уравнение (некая ненулевая константа = 0).
Если пропорциональность нарушена среди каких-то из первых 3 дробей, то плоскости пересекаются по прямой.

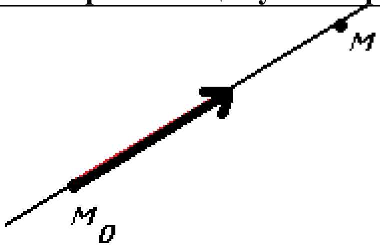
Пункт 5. Угол между плоскостями и метод его нахождения.

	Можно искать как угол между нормалями n_1, n_2 (показаны красным). Их координаты известны - это (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). В то же время известно, что $(n_1, n_2) = \|n_1\| \cdot \|n_2\| \cdot \cos\varphi$. Тогда $\cos\varphi = \frac{(n_1, n_2)}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$. $\varphi = \arccos\frac{(n_1, n_2)}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|}$.

§3. Прямая в пространстве.

Для прямой на плоскости и для плоскости в пространстве есть однозначно определённое направление нормали (перпендикуляра) т.к. там размерности рассматриваемых многообразий 1 и 2 (2 и 3 соответственно), то есть «не хватает» одной размерности. А для прямой в пространстве не хватает 2 размерностей (1 и 3). Это совершенно новый случай, здесь нельзя однозначно задать перпендикуляр. Есть целая плоскость, перпендикулярная прямой, то есть бесконечное число нормалей. А вот направляющий вектор однозначно определён (с точность до его длины, конечно). Это проявится в том, что мы получим другой тип уравнений.

Пункт 1. Построение уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.



Пусть дана точка M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) и направляющий вектор $l(p,q,r)$ (выделен жирно на чертеже)
Представим себе, что какая-то произвольная точка M с координатами (x,y,z) лежит на этой же прямой.
Тогда M_0M и l коллинеарны, то есть их координаты - пропорциональны, т.е. $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \parallel (p,q,r)$

тогда $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$.

Это канонические уравнения прямой в пространстве.
Фактически здесь не одно, а два уравнения, впрочем, это прямая может быть задана как пересечение 2 плоскостей. Кстати, если перемножить 1-ю и 2-ю пропорции независимо друг от друга, и свести к обычным уравнениям, то мы и получили бы уравнения каких-то 2 плоскостей.
Если эти 3 дроби равны, то можно приравнять их к некоторому параметру t.

$\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r} = t$. Если теперь выразим x,y,z через t из каждой дроби по отдельности, получим:

$\left\{\begin{matrix} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{matrix}\right\}$ - параметрические уравнения. Это физические уравнения движения, в момент времени t=0 находимся в точке (x_0, y_0, z_0), в момент времени t=1 сдвинулись к концу направляющего вектора.

Векторный вид записи этих 3 равенств: $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{l}t$. При t=0 радиус-вектор из начала координат к исходной точке, через 1 секунду он будет направлен в конец вектора l.

Пример. Построить уравнения прямой, если начальная точка (1,1,1) направляющий вектор (1,2,3).
$(x-1, y-1, z-1) \parallel (1,2,3)$,

тогда $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ - канонические уравнения.

Параметрические: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

Если привести 2 пропорции $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$ и $\frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ то получим $2x-2 = y-1$ и $3y-3 = 2z-2$, то есть $2x-y-1=0$ и $3y-2z-1=0$
это и есть уравнения двух плоскостей, в пересечении который лежит эта прямая.

Замечание. Если требуется построить уравнение прямой по 2 точкам, то направляющий вектор от 1-й ко 2-й точке, и далее известный алгоритим.

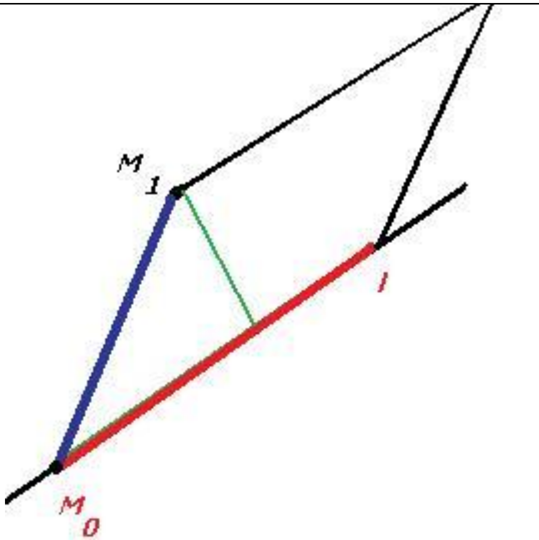
Пункт 2. Построение уравнения прямой в пространстве по точке и двум перпендикулярам.
Если дана точка и 2 нормали, то можно найти направляющий как векторное произведение этих 2 нормалей:
$l = [n_1, n_2]$. Далее можно решать тем методом, как в прошлом пункте.

Замечание. Кстати, канонические уравнения существуют не всегда, а вот параметрические - более универсальны, они существуют всегда, даже если направляющий лежит параллельно какой-то оси. А для канонических уравнений при этом получался бы 0 в знаменателе. Пример, показывающий данную ситуацию:

Пример. Если 2 перпендикуляра (1,0,0) и (1,1,0) то их векторное произведение (0,0,1) - направляющий.
Параметрические уравнения: x = 0 , y = 0 , z = t.

Пункт 3. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
Во-первых, закономерен вопрос, а почему требуется выводить новую формулу, если у нас уже была выведена формула расстояния от точки до прямой? Дело в том, что в пространстве уравнение прямой это вовсе не $Ax + By + C = 0$, а канонические или параметрические уравнения, то есть формула из прошлой темы не применима. В том случае мы пользовались проекцией на нормаль, а в пространстве нормаль к прямой однозначным образом не определяется.

Пусть дана прямая (с помощью точки M_0 и направляющего l) и точка M_1, не лежащая на прямой.



Соединим M_0 и M_1, это одна из двух сторон параллелограмма, вторая это l. Требуемое расстояние это высота, надо площадь поделить на длину основания. Площадь равна векторному произведению векторов, образующих стороны.

Поэтому $d = \dfrac{|\left[M_0M_1, l\right]|}{|l|}$.

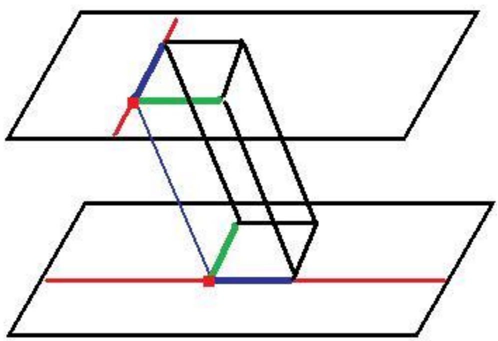
Пункт 4. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Кроме совпадения, параллельности и пересечения, в пространстве появляется ещё одна ситуация: скрещивающиеся прямые.
Скрещивающиеся прямые можно определить как две прямые, не лежащие в одной плоскости. Через совпадающие, пареллельные, пересекающиеся прямые можно провести общую плоскость. Скрещивающиеся прямые можно представить себе как пару прямых, лежащих в параллельных плоскостях, но при этом сами прямые не параллельны (если рассмотреть вид сверху, то они пересекались бы).

Если	и при этом:	тогда прямые:
$(M_1M_2, l_1, l_2) = 0$	$l_1 \parallel l_2 \parallel M_1M_2$	Совпадающие
	$l_1 \parallel l_2$	Параллельные
	M_1M_2 l_1 и l_2 компланарны (в одной плоскости)	Пересекающиеся
$(M_1M_2, l_1, l_2) \neq 0$		Скрещивающиеся

Примером отрезков, лежащих на скрещивающихся прямых, могут быть, например, мост и русло реки. Из-за того, что в пространстве возможны скрещивающиеся прямые, как раз и есть возможность строительства мостов и развязок.

п.5. Расстояние между скрещивающимися прямыми



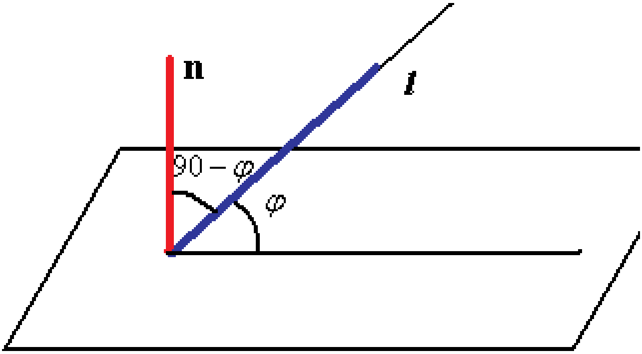
Спроецируем l_1 на ту плоскость, где лежит 2 прямая, и l_2 на плоскость, где 1-я. Получается два параллелограмма. Соединим их вершины, получаем параллелепипед.

Обратите внимание, что отрезок M_1M_2 может не являться кратчайшим, так как точки не ровно одна над другой, т.е. углы параллелипепеда могут быть и не 90^0.
Кратчайшее расстояние = высоте переллелепипеда, то есть d = V / S.
Объём вычислим с помощью смешанного произведения, а площадь основания через векторное от l_1, l_2. Итак, $d = \frac{|(M_1M_2, l_1, l_2)|}{|[l_1, l_2]|}$.

Замечание. Если сближать скрещивающиеся прямые, в итоге они окажутся пересекающимися, тогда и смешанное произведение в числителе станет 0, и расстояние между прямыми 0.

Пункт 6. Угол между прямой и плоскостью.

Пусть дана плоскость с помощью уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая с помощью точки (x_0, y_0, z_0) и направляющего $l(p, q, r)$.



Угол $90 - \varphi$ это угол между прямой и нормалью к плоскости.

$(n, l) = |n| \cdot |l| \cos(90 - \varphi)$, тогда $\cos(90 - \varphi) = \frac{(n, l)}{|n| \cdot |l|}$, и в итоге формула:

$$\varphi = 90 - \arccos \frac{(n, l)}{|n| \cdot |l|}.$$

§4. Кривые и поверхности.

Общее уравнение кривой 2-го порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$$

(здесь все степени не более второй).

Первые три слагаемых - квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, если построить её матрицу и найти собственные числа, то:

если $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (они одного знака) то эллипс

если $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (разного знака) то гипербола,

если $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (одно из них равно 0) то парабола.

Оба собственных числа не могут быть 0, иначе был бы нулевой оператор, т.е. нулевая матрица, то есть в уравнении вообще не было бы квадратичной формы.

Обратим внимание, что далеко не всякое уравнение задаёт кривую, есть и вырожденные случаи, когда геометрическим местом точек является прямая или точка, несмотря на наличие второй степени в уравнении.

Это бывает, например, если в уравнении нет линейной формы и константы.

$x^2 + y^2 = 0$ одна точка, а именно начало координат.

$x^2 = 0$ вертикальная прямая, ось Оу.

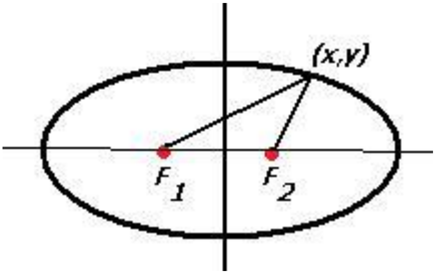
$xy = 0$ две координатные оси.

$x^2 = k^2$ две параллельные вертикальные прямые $x = \pm k$

$x^2 + y^2 = -1$ пустое множество

$x^2 - y^2 = 0$ - две прямых, т.к. распадается на $(x+y)(x-y) = 0$. В результате получаются 2 биссектрисы, лежащие между осями.

Определение эллипса. Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (называемых фокусами) постоянна.



Замечание. Если два фокуса сблизить и совместить в одной точке, тогда эллипс превратится в окружность, так как $r_1 + r_2 = 2r$ = const то есть удвоенное расстояние до центра постоянно, а значит и просто r = const.

Вершины эллипса $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$.
a, b называются большой и малой полуосями.

Выведем уравнение кривой, удовлетворяющей этому свойству ($r_1 + r_2$ = const), и докажем, что в уравнении должна быть сумма квадратов.

Пусть фокусы расположены в точках $(c,0)$ и $(-c,0)$. Вычислим по теореме Пифагора расстояние от точки (x,y) до двух фокусов. F_1 расположен дальше длина катета равна $(x+c)$, тогда длина большего из двух отрезков, а именно r_1, равна: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.
Фокус F_2 наоборот, расположен ближе к точке на чертеже то есть катет на оси Ох равен $(x-c)$, тогда $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.
Выясним, какой именно константе равна величина $r_1 + r_2$. Если расположить точку ровно в правой вершине, то получим $(a+c)+(a-c) = 2a$, такая же сумма расстояний по определению должна быть и для произвольных точек. Итак, $r_1 + r_2 = 2a$.
Заметим, что если оба корня возвести в квадрат, то они будут отличаться только одним слагаемым, а именно $+2cx$ либо $-2cx$.
Тогда можно так оценить разность квадратов:

$$r_1^{\ 2} - r_2^{\ 2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}^{\,2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}^{\,2} =$$
$$\left((x+c)^2 + y^2\right) - \left((x-c)^2 + y^2\right) =$$
$$\left(x^2 + c^2 + 2cx + y^2\right) - \left(x^2 + c^2 - 2cx + y^2\right) = 4cx.$$

Но ведь $r_1^{\ 2} - r_2^{\ 2} = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$, то есть $4cx = (r_1 - r_2)2a$.

Тогда мы знаем и разность: $r_1 - r_2 = 2\dfrac{c}{a}x$.

Итак, получили систему, из которой можно определить каждое r_i:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x$$

Сложив эти 2 равенства, получим $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$,

а вычитая второе из 1-го, $r_2 = a - \dfrac{c}{a}x$.

Сопоставим выражения, изначально полученные по теореме Пифагора, с этими выражениями:

$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = a \pm \dfrac{c}{a}x$. Теперь возведём в квадрат:

$(x \pm c)^2 + y^2 = \left(a \pm \dfrac{c}{a}x\right)^2$. Тогда $x^2 + c^2 \pm 2cx + y^2 = a^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 \pm 2cx$,

далее $x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2$, тогда $\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$, итак, каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Заметим, что при $y = b$, $x = 0$, уравнение выполнено, 1=1. Таким образом, расстояние от центра до фокуса взаимосвязано с размерами, а именно с полуосями эллипса так: $c^2 = a^2 - b^2$ то есть как мы видим,

$b^2 = a^2 - c^2$ это не просто переобозначение, b равняется малой полуоси.

Если $a = b$ то кривая - окружность (частный случай эллипса): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $x^2 + y^2 = a^2$, фактически тогда a это радиус, можно обозначить R.

Геометрические и физические свойства эллипса.

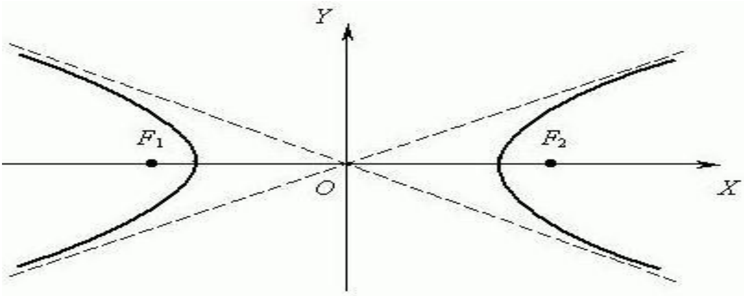
Эллипсы в астрономии. Все планеты и другие небесные тела Солнечной системы движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов - Солнце. Этот закон был открыт ещё Кеплером. Ближайшую точку к Солнцу Земля проходит 4 января, таким образом, для северного полушария зима чуть теплее, чем для южного. К тому же, из-за такой формы орбиты, зима для северного полушария чуть короче, то есть период между осенним и весенним равноденствием не ровно 1/2 года, а меньше. Действительно, на южном полюсе температуры бывают ниже, чем на северном полюсе.

Физическое свойство фокусировки. Лучи, испущенные из одного фокуса, после отражения соберутся во втором фокусе. Название «фокус» как раз и связано со словом «фокусировка» лучей.
Если на орбите Земли расположить зеркала, так чтобы они были повёрнуты ровно по касательной к орбите, то все лучи соберутся во 2 фокусе, то есть из той точки будет видно, что вся орбита светится.

Понятие «эксцентриситет эллипса». Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Геометрический смысл: во сколько раз ближе к центру расположен фокус, чем дальняя вершина эллипса. Если окружность, то эксцентриситет равен 0. Известны эксцентриситеты орбит планет Солнечной системы. Но они - очень малые числа, так как орбиты очень близки к круговым, например 0,017 для Земли.

Лекция № 8. 21. 10. 2016

Определение гиперболы. Гиперболой называется геометрическое место тоек на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек (называемых фокусами) есть постоянная величина.



Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Доказательство формулы во многом аналогично тому, что только что выводили для эллипса.

Асимптоты гиперболы: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Наверное, вам более известна гипербола в виде графика функции $y=\frac{1}{x}$, однако это просто другая форма записи. Если представить эту кривую в виде $xy-1=0$, то видно, что здесь присутствует произведение xy, то есть квадратичная форма. Так вот, если её привести к главным осям, то получится система координат, повёрнутая на 45 градусов, и в ней уже (относительно новых переменных) будет разность квадратов.

Определение параболы. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от некоторой прямой и не лежащей на ней точки.

Эта прямая называется директрисой, точка - фокусом.

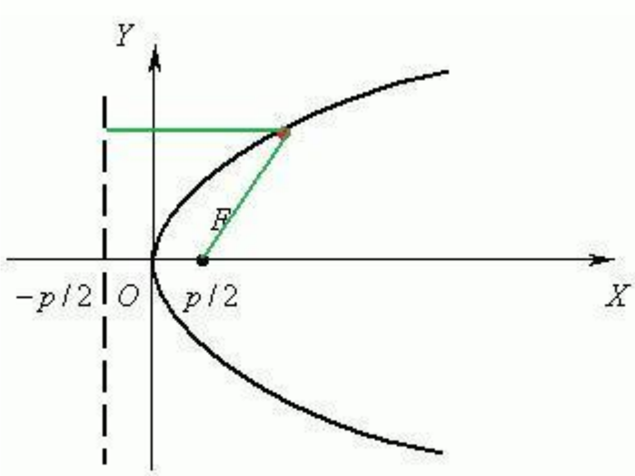
Каноническое уравнение параболы: $y^2=2px$.

Выведем это уравнение непосредственно из геометрического определения.

Расположим прямую левее начала координат, а именно $x = -\frac{p}{2}$

фокус - справа, это точка $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Расстояние от произвольной точки (x, y) до директрисы - просто по горизонтали, это $x + \frac{p}{2}$.



Вычислим расстояние от (x, y) до фокуса по теореме Пифагора:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Итак, есть равенство: $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$

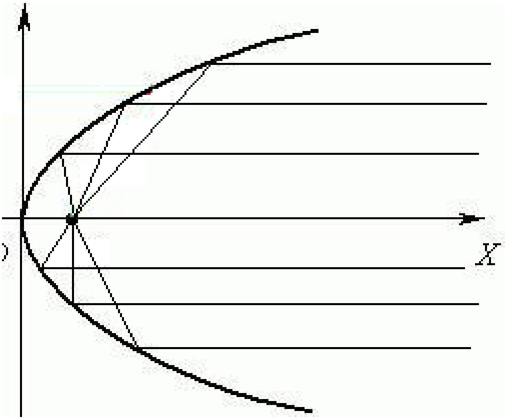
тогда $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$,

следовательно, $x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$, в итоге $y^2 = 2px$.

* Если директрису расположить горизонтально и точку над ней, то ветви параболы будут направлены не вправо, а вверх.

* Параболу можно представить как предельный случай эллипса: если правый фокус удаляется в бесконечность, то эллипс вытянется вправо, получится парабола.

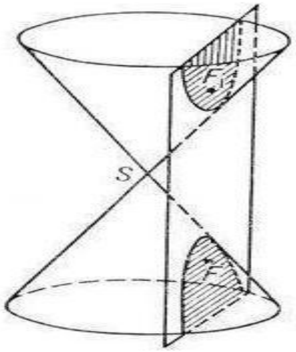
* Свойство фокусировки. Параллельные лучи после отражения от параболы собираются в фокусе. Именно на этом основано применение параболических антенн.



Эллипс, гипербола и парабола как сечения конуса.

Уравнение конуса: $x^2 + y^2 = z^2$. Действительно, если радиус окружности, являющейся сечением, равномерно увеличивается с ростом высоты, то на каждой высоте можно z отождествить с R, то есть из $x^2 + y^2 = R^2$ следует $x^2 + y^2 = z^2$.

Если фиксировать z то получим окружность. Если фиксировать x или y, то есть рассмотреть вертикальное сечение, то получим гиперболу. Например, пусть $y = C$. Тогда $x^2 + C^2 = z^2$, $C^2 = z^2 - x^2$, $\frac{z^2}{C^2} - \frac{x^2}{C^2} = 1$ - гипербола. Если наклон плоскости плавно увеличивать, то от окружности перейдём к эллипсу, затем, когда наклон плоскости равен углу наклона образующей конуса, то получим параболу, если угол больше, т.е. плоскость стремится к вертикальному положению, то в сечении гипербола.



ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Изучим такие типы поверхностей:

1) поверхность вращения 2) цилиндрическая 3) коническая
4) поверхности 2-го порядка.

Пункт 1. Поверхность вращения.

Если кривую в плоскости 0xy вращать вокруг оси 0x, то каждая точка опишет окружность, лежащую в плоскости, параллельной 0yz.

Уравнение будет вида $F\left(x,\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$, то есть y,z входят в уравнение только в составе суммы квадратов, а не по отдельности. Конечно, можно записать и в виде $F\left(x,y^2+z^2\right)=0$ так как $\left(y^2+z^2\right)$ легко можно представить как $\sqrt{y^2+z^2}^{\,2}$.

Если ось вращения 0y то $F\left(y,\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$, а если ось вращения 0z то $F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$.

В частности, поверхностью вращения является и уже рассмотренный нами ранее конус:

$x^2+y^2=z^2$ где неявное уравнение можно представить так:

$x^2+y^2-z^2=0$ то есть в виде $F(x,y,z)=0$.

Пункт 2. Цилиндрическая поверхность.

Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задаёт окружность в плоскости, но если это рассматривать как уравнение 3-мерной поверхности, где отсутствует z, то получается, что z любое (произвольное) то есть вся вертикальная прямая, идущая от точки на окружности, принадлежит поверхности. Получается прямой круговой цилиндр.

Можно обобщить это понятие: проводить прямолинейные образующие не от точек окружности, а от произвольной кривой, лежащей в плоскости 0xy. Уравнение вида $F(x, y) = 0$ задаёт кривую в плоскости, а в пространстве оно же задаёт цилиндрическую поверхность. Если отсутствует какая-то из переменных, то прямолинейные образующие параллельны именно той координатной оси, какая переменная отсутствует. Если например отсутствует z то можно считать, что z любое, то есть вся вертикальная линия тоже принадлежит поверхности. Таким образом, $F(x, y) = 0$, задающее кривую в плоскости, автоматически при этом задаёт некоторую поверхность в пространстве.

Пункт 3. Коническая поверхность.

Если от окружности , лежащей в плоскости z = C провести прямые через начало координат, то получим конус. Но можно в этой плоскости рассматривать не окружность, а произвольную кривую, таким образом строится обобщённая коническая поверхность.

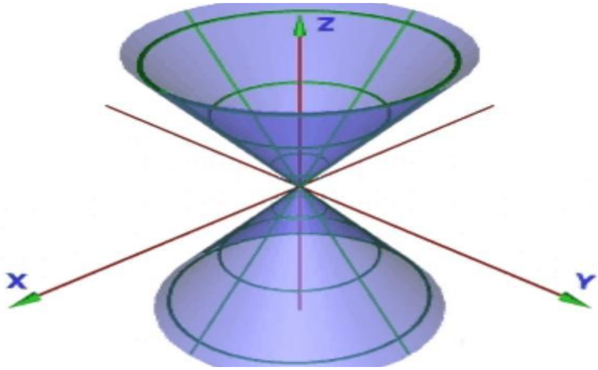
Если в некоторой плоскости взята кривая, через все её точки и некоторую общую точку F проведены прямые линии, то полученная поверхность называется конической. Так, например, пирамида тоже является конической поверхностью, только образующей кривой там является квадрат, а не окружность. Все точки квадрата соединены прямолинейными образующими с некоторой точкой, лежащей вне его плоскости.

Определение. Функция $F(x, y, z)$ называется однородной, если

$F(cx, cy, cz) = c^n F(x, y, z)$.

Например, $x^3 + xy^2$ - однородная функция, здесь у всех слагаемых суммарные степени = 3, и при увеличении всех переменных в с раз, появится общий множитель c^3.

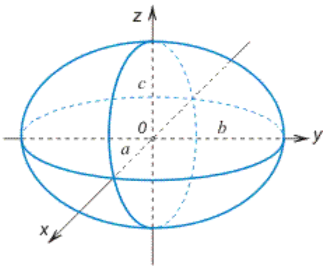
Функция, задающая уравнение конуса, тоже однородная:
$x^2+y^2-z^2=0$.



Докажем, что уравнение $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ однородная функция, задаёт коническую поверхность.
Пусть точка (x,y,z) принадлежит поверхности. Тогда $F(x,y,z)=0$.
Но тогда $F(cx,cy,cz)=c^n F(x,y,z)$, то есть $F(cx,cy,cz)=c^n 0=0$, тогда точка (cx,cy,cz) тоже принадлежит поверхности, и это верно для любого c. Таким образом, вся прямая, соединяющая начало координат и точку (x,y,z), принадлежит поверхности.
Следовательно, это коническая поверхность.

4) поверхности 2-го порядка.

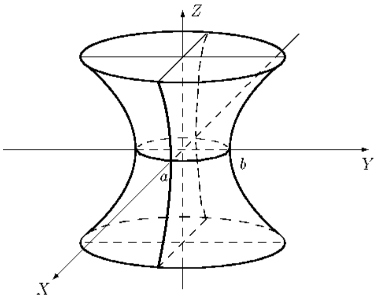
Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



При фиксировании любой переменной получится уравнение эллипса. Любое его сечение - эллипс.   Полуоси a,b,c.
Если пара полуосей совпадает, т.е. $a = b$ или $a = c$ или $b = c$, то эллипсоид вращения (сечения вдоль какой-то из плоскостей - круги а не ээипсы). Если же все 3 равны $a = b = c$, то сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ - пустое множество (ни одна точка пространства не удовлетворяет этому уравнению).

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



При z=0 сечение есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если фиксировать $z \neq 0$, то

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + C$ эллипс большего размера, но с тем же самым соотношением полуосей.

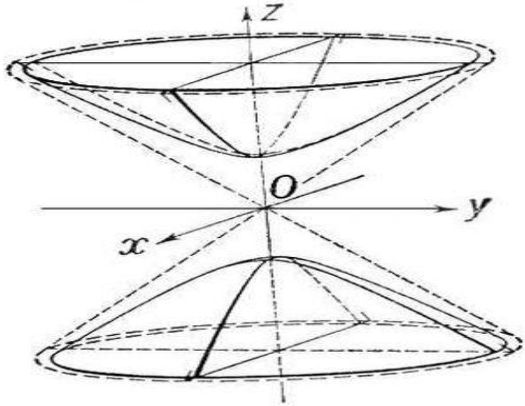
В вертикальных сечениях будут гиперболы: если фиксировать y, то уравнение сводится к виду, где разность квадратов.

Например, при y = 0: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

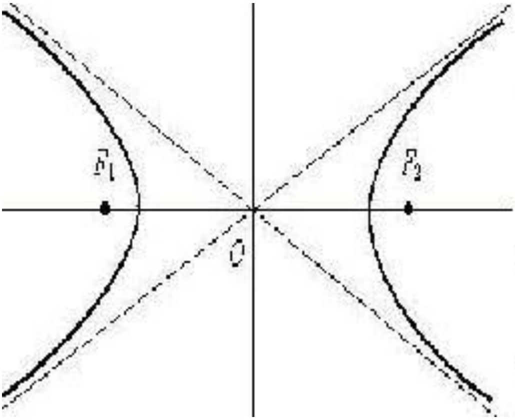
Интересно, что у однополостного гиперболоида есть прямолинейные образующие. Если фиксировать x=a или y=b, т.е. вертикальную плоскость поставить ровно на уровне горловины этой фигуры (т.е. самого малого эллипса) получим:

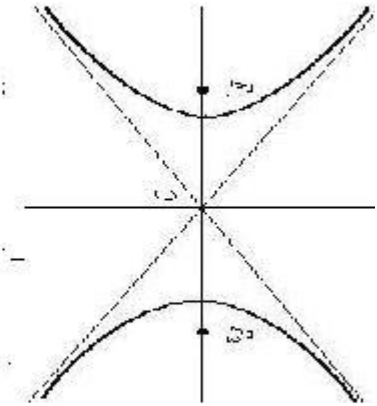
$1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ т.е. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ т.е. $\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$ а это уравнения двух пересекающихся прямых.

Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.



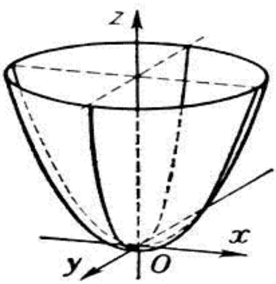
В отличие от прошлого случая, здесь при малых z, по модулю меньших, чем c, вообще пустое множество в горизонтальных сечениях: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2}$ здесь только при $z \ge c$ справа положительное число и в сечениях эллипсы. Поэтому фигура распадается на 2 части, вблизи начала координат вообще нет точек.
Вертикальные сечения - гиперболы.
Кстати, если вращать гиперболу, расположенную в одних четвертях, то получится 1-полостный гиперболоид, а если вращать гиперболу, которая была в других двух четвертях - 2-полостный гиперболоид:





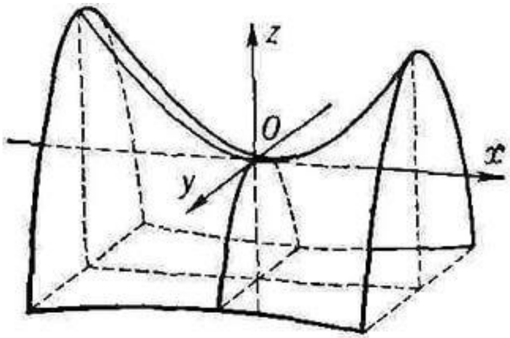
Рассмотрим теперь две поверхности, в уравнениях которых содержится не 3, а 2 квадрата, и первая степень третьей переменной.

Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$



Горизонтальные сечения - эллипсы: если фиксировать z, то получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=C$.Вертикальные сечения - параболы, ветви которых направлены вверх: если фиксировать например y, то получим $\frac{x^2}{a^2}+C=2pz$ уравнение параболы. Параболические антенны построены именно с помощью такой поверхности, но $a=b$ (параболоид вращения).

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$**.**



Вертикальные сечения - параболы. Причём если фиксировать x, то сечение в плоскости 0yz - парабола, ветви которой направлены вниз $C - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$, а если фиксировать y, то ветви вверх: $\frac{x^2}{a^2} - C = 2pz$.

В горизонтальных сечениях - гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = C$

в зависимости от знака z, они то в одних, то в других четвертях.
Можно представить построение этой поверхности так: парабола, ветвями направленная вниз, повернута перпендикулярно и скользит своей вершиной по параболе, направленной ветвями вверх.

Общий случай.

В уравнении поверхности присутствует квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz.$$

Построить её матрицу (см. прошлую тему), найти собственные числа: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Возможны такие ситуации:

Если они все одного знака $(+++)$, то поверхность - эллипсоид.
Если два из них одного знака, а третье другого знака $(++-)$ гиперболоиды.
Если одно из них 0, а другие одного знака $(++0)$ эллиптический параболоид.
Если одно из них 0, а другие разного знака $(+-0)$ гиперболический параболоид.

Литература.

Теория:

1. Магазинников Л.И. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие - Томск: ТМЦДО, 2003. - 176 с.

2. Гриншпон И.Э. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия (для экономических специальностей). Учебное пособие. Томск: ТУСУР, 2007. - 247 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – 5-е изд, - М.: Айрис-Пресс, 2007. - 602 с.

Практика:

4. Магазинников Л.И. Высшая математика I. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учебное пособие Томск: ТУСУР, 2007. - 162 с.

Все учебные пособия кафедры математики можно найти на сайте кафедры по ссылке: http://math.tusur.ru/book.html