

Министерство образования и науки Российской Федерации
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

А. В. Новиков

**ДЕМОДУЛЯЦИЯ БИНАРНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ
СИГНАЛЬНЫЙ ПОДХОД**

Учебное пособие для студентов радиотехнических специальностей

2016

Демодуляция бинарных цифровых сигналов. Сигнальный подход.

Оглавление

Предисловие.....	3
Общие принципы демодуляции.....	3
Формирование квадратур (pulse shaping).....	5
Принцип захвата тактовой частоты и фазы.....	10
Согласованная фильтрация.....	12
Пример переноса видеосигнала на промежуточную частоту.....	16
Принцип работы ФАПЧ на примере BPSK.....	17
Некогерентная демодуляция сигнала с частотной манипуляцией.....	33
Послесловие.....	42
Список источников.....	42
Приложение А. Один из примеров модели петли Костаса в Simulink.....	43
Приложение Б Скрипт примера некогерентной частотной демодуляции на языке GNU Octave	44

Предисловие

Перед прочтением данного материала рекомендуется пособие [1], где поставлена статистическая задача различения двух сигналов и подробно рассмотрено её решение при наличии аддитивной помехи типа белого гауссова шума (канал с **AWGN, Additive White Gaussian Noise**).

В этом пособии предлагается изучить процесс демодуляции с точки зрения сигналов, наглядно показав проблемы, возникающие при реализации модемов, а также пути решения этих проблем. Подробно рассмотрена идея, позволяющая восстановить несущее колебание для двоичной фазовой манипуляции (ФМ) без остаточной несущей, а также процесс формирования «гладких» квадратур без межсимвольной интерференции.

Также дана для изучения некогерентная демодуляция бинарного частотно модулированного сигнала. Разъяснён способ формирования ЧМ-сигнала с непрерывной фазой, дан (в том числе в виде скрипта) способ некогерентной демодуляции в цифровом виде. Иллюстрируется ручная установка фазы тактовых импульсов в цепи тактовой синхронизации.

Общие принципы демодуляции

Вся радиосвязь построена на принципе несущей частоты — гармонической функции времени

$$s(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi) , \quad (1)$$

где A — амплитуда, f — частота, в герцах, φ — начальная фаза, в радианах.

Гармонические функции являются удобными кандидатами на излучение в пространство (в эфир), так как они являются собственными функциями того самого пространства: если идеально излучённый сигнал является гармоническим, то идеально принятый сигнал будет иметь ту же самую форму, то есть останется гармоническим.

После идеального приёма гармонического сигнала изменятся его амплитуда (из-за ослабления радиоволн), фаза, которая вообще не определена, и, если передатчик и/или приёмник движутся (**мобильная связь**), то за счёт **эффекта Доплера** сдвигается частота: в сторону увеличения, если объекты радиально сближаются, и уменьшения, если объекты радиально отдаляются.

Удобство гармоник заключается в том, что искажение такого сигнала эфиром (пространством) в процессе передачи и приёма сводится лишь к изменению параметров

функции, а не к изменению самой функции

$$\text{ЭФИР} \{A(t) \sin[2\pi ft + \varphi(t)]\} = B(t) \sin[2\pi ft + \psi(t)] .$$

Естественно, чистый тон (1) нет особого смысла излучать в эфир. Исходя из теории информации, такой сигнал не будет нести информационной нагрузки, так как в нём ни один из трёх параметров не изменяется со временем. Поэтому в системах связи передаётся такой сигнал, в котором хотя бы один из трёх параметров изменяется, а значит этот сигнал уже не будет чистым тоном и займёт некоторую **полосу частот (band)** в окрестности несущей частоты. В этой ненулевой полосе и будет сосредоточена передаваемая информация¹.

Информационные параметры сигнала (1) должны меняться **медленно** по сравнению с несущей частотой². В противном случае за счёт переходных процессов (например, в полосовом фильтре) сигнал может не успеть набрать номинальную мощность (рис. 1).

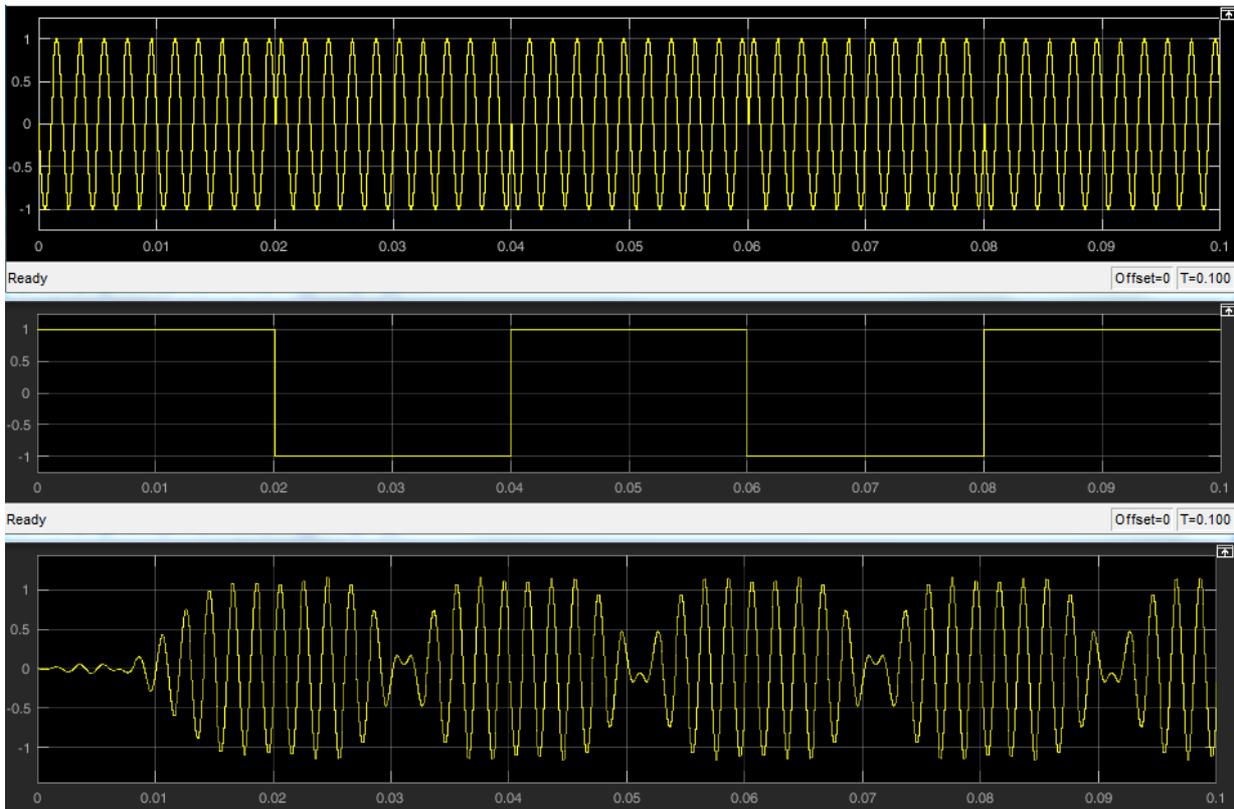


Рис. 1 Эффект амплитудной модуляции при прохождении идеального ФМ сигнала через полосно-пропускающий фильтр.

На рис. 1 показан вариант отношения частот 1 к 10, то есть на длительность одного символа (0,02 с) приходится 10 периодов несущей (500 Гц). Задержка выходного сигнала на половину длительности символа связана с фазовой характеристикой фильтра. Фильтр

1 Нулевая ширина спектра сигнала, кстати, по формуле Шеннона соответствует нулевой пропускной способности канала связи.

2 В этом случае сигнал называют узкополосным (**narrow-band**).

настроен на пропускание диапазона частот (450...550) Гц, так как информационные символы имеют частоту следования $1/0,02 = 50$ Гц. При этих условиях сигнал набирает свою мощность за 4–5 периодов несущей частоты.

Смена фазы на 180 градусов у ФМ сигнала даёт самую глубокую паразитную амплитудную модуляцию. В реальности видеосигнал, кодирующий символы, генерируют так, чтобы не было резких перепадов уровня, как это имеет место на среднем графике рис. 1. В этом случае мощность радиосигнала меньше расплёскивается по частотному диапазону и больше сосредотачивается в окрестности несущей частоты. Другими словами, спектр сигнала становится более компактным (но за счёт некоторого уширения), что благоприятно сказывается на требованиях к полосно-пропускающим фильтрам передатчика, которые обеспечивают заданную стандартами частотную маску (**modulation mask**).

Формирование квадратур (pulse shaping)

Техника формирования **baseband**³ сигнала называется **pulse shaping**; за это отвечает формирующий фильтр, который реализуется в цифровом виде с последующим цифро-аналоговым преобразованием (ЦАП). На вход формирующего фильтра поступают **цифры** с формирователя комплексной огибающей (**IQ mapper**), который работает с таблицей, отображающей битовые кодовые слова в две квадратуры I и Q . Программная смена таблицы позволяет легко переключаться на другой вид цифровой модуляции.

Рассмотрим вариант, когда у сигнала (1) медленно изменяется амплитуда и фаза

$$s(t) = A(t) \cos[2\pi f t + \varphi(t)] \quad . \quad (2)$$

Сигнал (2) можно разложить на квадратурные составляющие $I(t)$ и $Q(t)$

$$\begin{aligned} s(t) &= A(t) \cos(2\pi f t) \cos[\varphi(t)] - A(t) \sin(2\pi f t) \sin[\varphi(t)] = \\ &= I(t) \cos(2\pi f t) - Q(t) \sin(2\pi f t) \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

Этот принцип позволяет построить универсальный квадратурный модулятор, в составе которого должен быть генератор частоты f , два множителя и сумматор⁴. Формирующий фильтр при этом будет отвечать за формирование квадратур I и Q , то есть за интерполяцию отсчётов с выхода табличного формирователя **IQ mapper**.

На приёмной стороне квадратуры должны быть пропущены через фильтр, согласованный с формой передаваемого видеопульса, и продетектированы с помощью

3 **Baseband** сигнал — сигнал с нулевой центральной частотой (видеосигнал).

4 В настоящее время генерация произвольных сигналов может быть сделана с помощью техники прямого цифрового синтеза, **DDS (Direct Digital Synthesis)**.

отсчётного устройства и квантователя. Согласованный фильтр на своём выходе даёт максимальное отношение сигнал-шум, если шум является белым гауссовым. Тепловой шум в рабочей полосе частот хорошо подходит под эту модель.

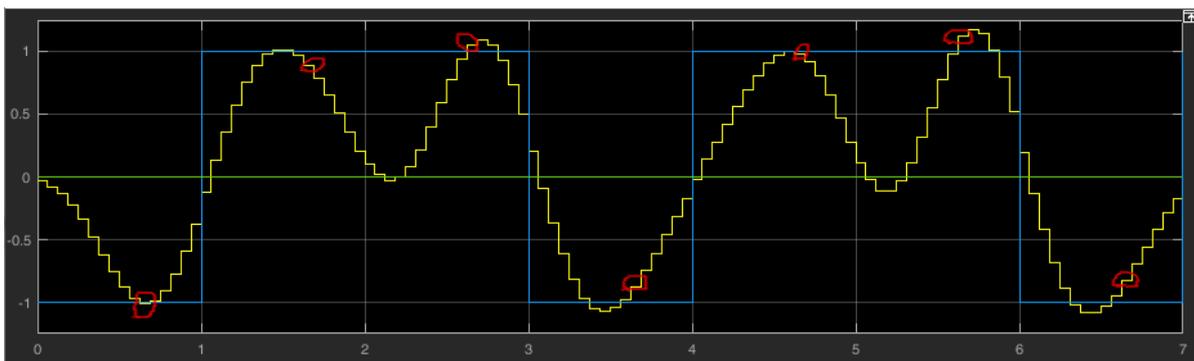
Если согласованная фильтрация делается в цифровом виде, то отсчётное устройство не требуется, точнее эта функция тривиально перейдёт в прореживание отсчётов. Квантователь требуется всегда, так как согласованная фильтрация, как правило, делается над данными с некоторой разрядностью (например, 16 бит), а символы модуляции имеют гораздо меньшую битность: 1 бит/символ для двоичной ФМ, 2 бита/символ для КАМ-4 и т. д.

На рис. 1 на среднем графике показана одна квадратура, а вторая равна нулю. Формирующий фильтр в данном случае имеет нереализуемую АЧХ⁵ типа

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| ,$$

для реализации которой требуется неограниченная полоса частот. Такая АЧХ даёт недопустимый уровень внеполосных компонент **baseband** сигнала: мощность такого сигнала падает со скоростью 6 дБ/октаву⁶.

Однако выбрать формирующий фильтр из принципа «абы какой-нибудь ФНЧ⁷» не получится. В цифровых системах связи данные идут дискретно с заданной тактовой частотой, т. е. символ за символом. Абы какой-нибудь ФНЧ при подаче на его вход текущего символа $A[i]$, вероятно, даст ненулевой отклик в момент времени $i+1$: в этом случае произойдёт **межсимвольная интерференция (Inter Symbol Interference, ISI)**. На рисунке показан случай прохождения идеального **baseband** сигнала с уровнями ± 1 через некоторый



ФНЧ с единичным максимумом импульсной характеристики (11 такт, обведено красным кружочком). Цифровые данные идут каждый 16 такт (с шагом 1 с). Видно, что первый обведённый отсчёт идеально совпадает с уровнем -1 , второй и последующие уже нет — это и есть результат интерференции.

5 Амплитудно-частотную характеристику.

6 $10 \lg(f_2/f_1)^2 = 10 \lg 4 \approx 6$, октава — двукратное увеличение частоты.

7 Фильтр нижних частот.

В общем случае по известной сумме нельзя однозначно узнать слагаемые, то есть точно извлечь информацию; приближённо извлечь можно, так как исходная битовая информация в рассматриваемом варианте заложена в условии «больше-меньше нуля», поэтому ошибка по амплитуде не всегда приведёт к ошибке в бите на выходе детектора.

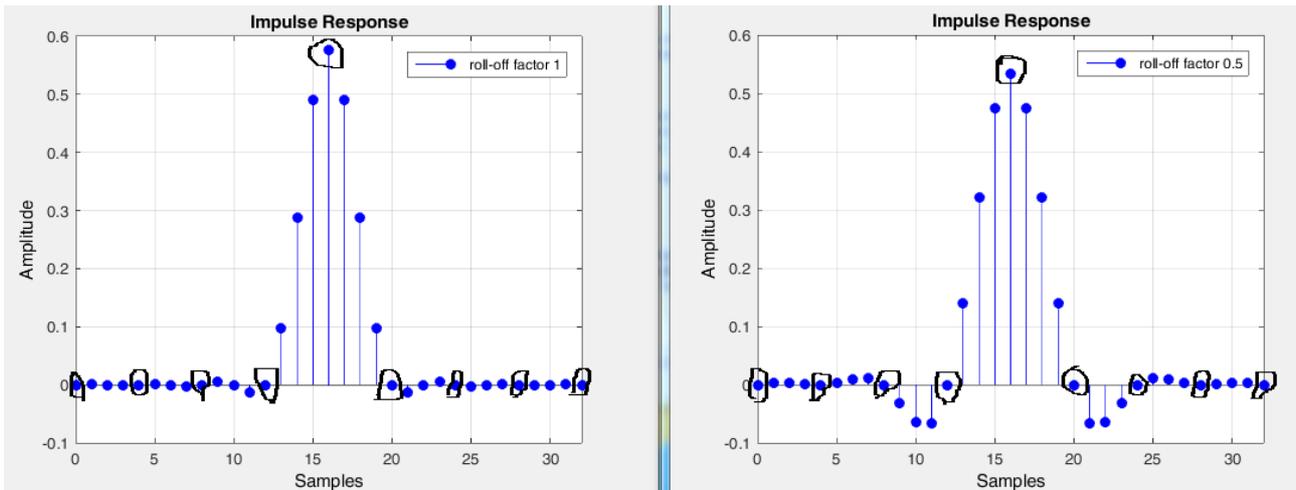
В качестве формирующих фильтров подходят фильтры с нулевой межсимвольной интерференцией⁸ и с достаточно малым уровнем внеполосных компонент. Кстати, формирующий фильтр на рис. 1 имеет нулевую интерференцию, причём на всей длительности символа! Однако, для запуска такой системы связи потребуются «жирный» канал шириной $(10...15)/T_s$ (можно и шире), зато к цепи тактовой синхронизации будут предъявляться очень слабые требования по нестабильности временного положения (фазы) тактовых импульсов.

Разработан фильтр типа «приподнятый косинус» (**raised cosine filter**), который имеет нулевую интерференцию (рис. 2) и позволяет регулировать уровень внеполосных компонент сигнала за счёт ширины спектра, которую можно менять в пределах

$$\frac{(1+\beta)}{T_s}, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \beta - \text{roll-off factor.}$$

Однако, нулевая интерференция сохраняется только в тактовые моменты времени (при идеальной тактовой синхронизации), причём чем шире спектр, тем быстрее затухают так называемые боковые лепестки импульсной характеристики фильтра, что приводит к меньшему влиянию нестабильности фазы тактовых импульсов на уровень интерференции.

8 Можно использовать фильтры с ненулевой интерференцией, но введённой по заранее известному правилу, то есть фильтры с контролируемой интерференцией. Способ их детектирования отличается. См. дуобинарные сигналы в книгах Джона Прокиса «Цифровая связь» или Бернарда Скляра.



Чёрными кружочками обведены отсчёты в тактовые моменты времени: все они имеют нулевой уровень, кроме одного центрального отсчёта, который предназначен для переноса информации

Рис. 2 Импульсные характеристики реализуемого фильтра типа «приподнятый косинус» длиной 8 символов; коэффициент интерполяции 4.

Чем ниже **roll-off factor**, тем больше уровень пульсаций в импульсной характеристике фильтра (рис. 2) и больше уровень внеполосных компонент (рис. 3), но уже спектр. Коэффициент интерполяции (число отсчётов на символ) позволяет регулировать период спектра, т. е. позволяет «раздвинуть башни», облегчив требования к фильтру ЦАП⁹. Если **roll-off factor** равен нулю, то импульсная характеристика совпадёт с функцией $\sin x/x$, а частотная характеристика совпадёт с функцией прямоугольника.

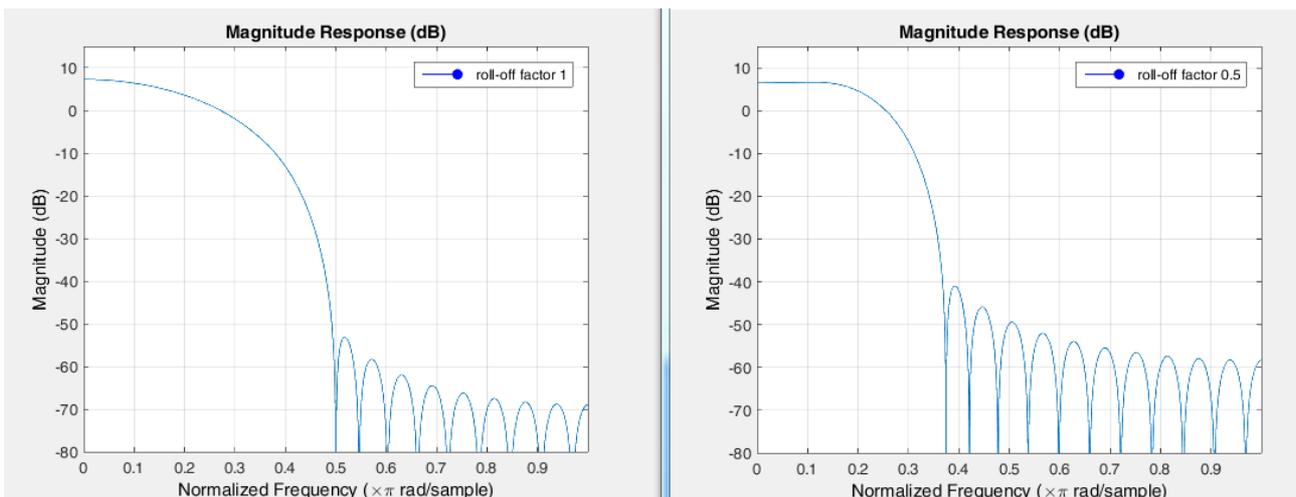


Рис. 3 Амплитудно-частотные характеристики реализуемого фильтра типа «приподнятый косинус».

Словосочетание «реализуемый фильтр» подразумевает его реализуемость в виде конечного числа ячеек памяти, умножителей и сумматоров.

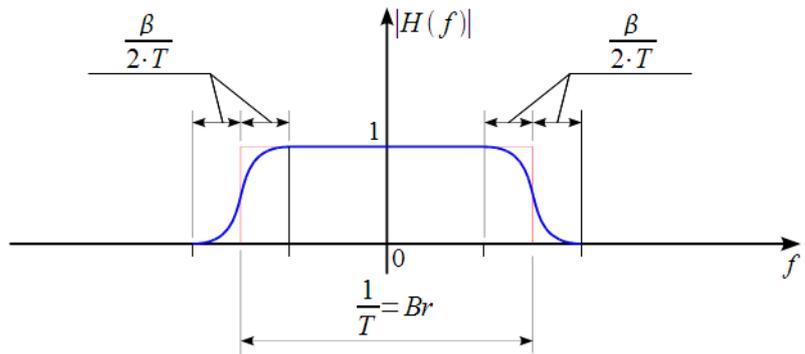
⁹ Цифро-аналоговый преобразователь.

Теоретическая импульсная характеристика $h(t)$ фильтра «приподнятый косинус» не ограничена, поэтому для реализуемости её приходится ограничивать; мало того — дискретизировать $h_n = h(nT_d)$.

Из-за ограничения импульсной характеристики, за идеальной полосой пропускания

$$\frac{(1+\beta)}{T_s}$$

появляется ненулевая составляющая, которая и даёт внеполосную компоненту. Теоретическая АЧХ не имеет такой компоненты, так как она моделируется отрезком «косинусоида-константа-косинусоида»¹⁰. Поэтому уровень внеполосной компоненты зависит не только от параметра **roll-off factor**, но и от количества символов на длину импульсной характеристики (на рис. 2 это 8, т. е. восемь символьных интервалов).

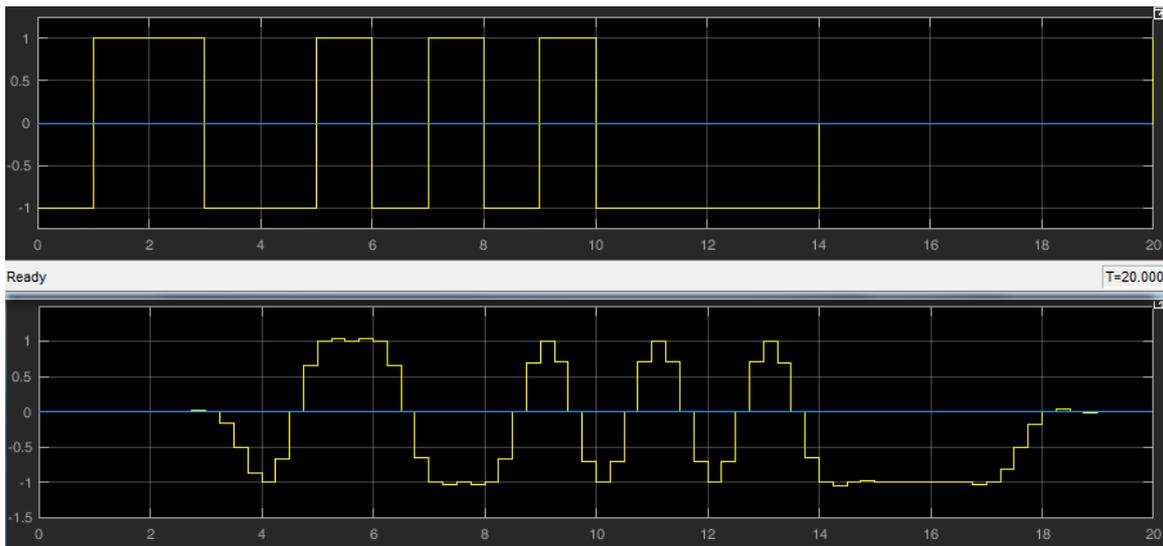


Межсимвольная интерференция также возникает из-за неидеальной частотной характеристики линии передачи. Для беспроводной связи такой линией является так называемый эфир (открытое пространство) с множеством естественных и искусственных объектов. Причём эти объекты могут перемещаться в пространстве (автомобили, дождевые облака), а также менять свои электрические характеристики (подстилающая поверхность земли, растительность). Поэтому в приёмнике перед согласованным фильтром должен стоять **эквалайзер**, выравнивающий частотную характеристику линии передачи, которая периодически оценивается приёмо-передатчиком с помощью тестовых сигналов (адаптивный эквалайзер). Адаптивность особенно важна для мобильной связи, где в результате возможного перемещения абонентов частотная характеристика линии передачи изменяется во времени, причём это изменение должно быть плавным относительно длительности символа — это является одним из ограничителей символьной скорости передачи данных.

На рис. 4 показан результат моделирования прохождения **BPSK**¹¹ **baseband** сигнала через фильтр «приподнятого косинуса», так, что пик его импульсной характеристики равен единице, коэффициент интерполяции — 4, длительность характеристики — 8 символов.

¹⁰ Рисунок с теоретической АЧХ фильтра «приподнятый косинус» взят с сайта <http://www.dsplib.ru/content/isi/isi.html>, с которым рекомендуется познакомиться.

¹¹ **Binary Phase-Shift Keying**, двоичная ФМ.



Битовый поток: 01100101010000_____

Рис. 4 Прохождение идеального BPSK baseband сигнала через фильтр «приподнятого косинуса».

На рис. 4 видна задержка сигнала на выходе фильтра, равная $8 \cdot 4/2 = 16$ тактам. В тактовые моменты времени $4nT_d = n$ сигнал равен либо +1, либо -1, т. е. в эти моменты в сигнале содержится информация только о текущем символе и ни о каких других (интерференция отсутствует). На выходе фильтра первый бит **0** кодируется отсчётом -1 в момент времени 4, а последний бит **0** — отсчётом -1 в момент времени 17.

При демодуляции отсчёты принятого аналогового сигнала следует брать как можно ближе к этим идеальным моментам времени, поэтому в приёмнике должна быть цепь восстановления тактовой частоты с точностью до фазы, основанная на априорных¹² знаниях о форме **baseband** сигнала.

Принцип захвата тактовой частоты и фазы

Для успешного захвата тактовой частоты (**timing recovery**) символы должны претерпевать изменения. Эти изменения гарантируются за счёт скремблирования¹³ данных псевдослучайными последовательностями, которые генерируются по известным правилам, но свойства которых таковы, что нули и единицы почти равновероятны, пары **00**, **01**, **10**, **11** также почти равновероятны и т. д. до некоторого предела, ограниченного длиной регистра сдвига.

Такие последовательности гарантируют достаточно частую смену символов.

¹² До опыта известных. Опыт в данном случае — это приём сигнала, его измерение устройством.

¹³ Слабого шифрования, **scrambling**.

Скремблирование для битов — это **сумма по модулю два** информационной последовательности и псевдослучайной последовательности. На приёмной стороне делается обратная операция, т. е. вычитание, но по модулю два обе операции эквивалентны, поэтому в приёмнике по сути делается та же самая операция. Для успешного декодирования фаза генератора скремблирующей последовательности приёмника должна совпадать с фазой генератора передатчика.

Для понимания работы схем захвата тактовой частоты с точностью до фазы, рассмотрим детектор Гарднера (**Gardner detector**), основанный на следующем.

Так как форма идеальных квадратурных сигналов известна (биполярный сигнал), то при наличии смены полярности справедливо предположение (рис. 5).

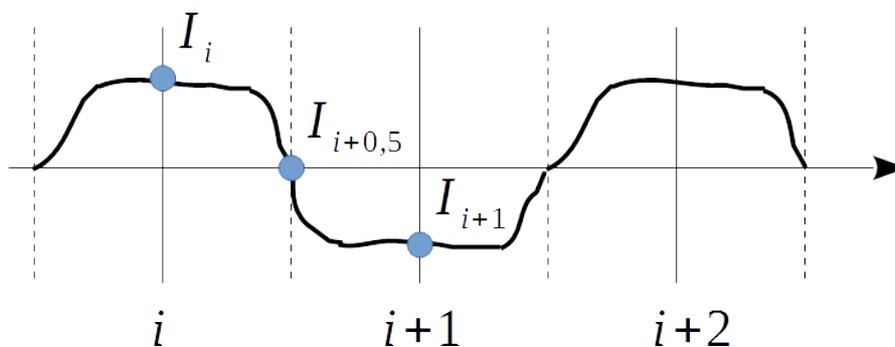


Рис. 5: К пониманию работы детектора Гарднера.

На рис. 5 показано идеальное согласование частоты и фазы тактового генератора. Детектор Гарднера требует **два отсчёта на символ**. Это обеспечивается соответствующей выборкой отсчётов в приёмнике. Момент перехода сигнала через ноль является зацепкой для синхронизации, поэтому сигнал детектора ошибки можно взять пропорциональным $I_{i+0,5}$. Но в случае отсутствия перехода через ноль (могут придти два одинаковых бита) с синхронизацией ничего делать не требуется, поэтому в качестве сигнала детектора ошибки (**timing error detector**) можно взять произведение

$$e = I_{i+0,5}(I_{i+1} - I_i) . \quad (4)$$

То же самое касается квадратуры Q , поэтому в сигнал ошибки добавляется аналогичное слагаемое относительно Q . Детектор Гарднера работает и для **QPSK** модуляции.

Сигнал ошибки подаётся на петлевой фильтр и затем на устройство управления фазой тактового генератора (такты АЦП). Возможен вариант (полностью цифровой демодулятор, [2]), когда АЦП приёмника, расположенный до согласованного фильтра, работает с произвольной нерегулируемой фазой тактирования, а подстройка фазы делается устройством **Numerically Controlled Oscillator (NCO)** путём подачи его выходного сигнала на вход

интерполятора¹⁴.

Устройство **НСО** генерирует дискретную периодическую последовательность линейно-возрастающих чисел (типа «пилы») с частотой, задаваемой входным числом. Таким образом, при появлении ошибки синхронизации на вход **НСО** подаётся изменяющийся код, который изменяет частоту следования импульсов и, значит, их фазу (фаза — это интеграл от частоты).

Допустим, тактовые импульсы на рис. 5 имеют верную частоту следования, но идут чуть левее идеального положения, то есть не выровнены по фазе. Тогда сигнал ошибки (8) будет отрицательным, что приведёт к уменьшению мгновенной частоты следования чисел на выходе **НСО**, то есть тактовые импульсы начнут притормаживаться. Постепенно сигнал ошибки дойдёт до нуля, то есть тактовые импульсы постепенно ускорятся до исходной частоты, но их фаза будет подкорректирована.

Анализ корректировки фазы тактовых импульсов с неверной частотой следования более сложен и требует математического моделирования.

Детектор (4) может обеспечить захват тактовой частоты с неоднозначностью фазы $T_s/2$, то есть 180 градусов (половина длительности символа). В этом случае на сигнальном созвездии появятся точки возле нуля и потребуются сместить индекс выдачи протектированных отсчётов на половину символьного интервала.

Подробнее про **timing recovery** можно прочитать в [3, 4].

Согласованная фильтрация

Из-за желания минимизировать влияние теплового шума, в приёмнике ставят согласованный фильтр (**matched filter**), но так, чтобы межсимвольной интерференции на его выходе при этом не было.

Амплитудный спектр сигнала с выхода формирующего фильтра совпадает с формой АЧХ этого фильтра (на то он и формирующий). Частотная характеристика согласованного фильтра равна спектру сигнала, но комплексно-сопряжённому. Если спектры вещественные, то комплексное сопряжение не требуется. Поэтому в рассматриваемом случае АЧХ формирующего фильтра берут как корень квадратный из «приподнятого косинуса»; тогда и согласованный фильтр будет иметь такую же АЧХ. Сквозная АЧХ системы связи равна произведению АЧХ блоков, поэтому после согласованного фильтра межсимвольной интерференции не будет.

Согласованный фильтр даёт максимальное отношение сигнал-шум на своём выходе при

14 Например, интерполятора Фарроу, http://ru.dsplib.org/content/resampling_lagrange.html

условии, что аддитивная помеха является белым гауссовым шумом. В этом случае дисперсия информационных (продетектированных) отсчётов будет минимальна. В эту дисперсию входит дисперсия за счёт остаточной межсимвольной интерференции плюс дисперсия за счёт остаточного теплового шума. Дисперсии (мощности) складываются, так как считается, что помеха типа «межсимвольная интерференция» не коррелирована с помехой типа «белый гауссов шум». Практически отсутствие корреляции означает то, что обе помехи влияют независимо друг от друга, так как у них разная природа.

В дискретном варианте импульсная характеристика согласованного фильтра равна зеркальному отражению сигнала, с которым фильтр согласован

$$h_n = s_{N-n} \quad . \quad (5)$$

Например, для прямоугольного сигнала при $N=3$

$$s_n = (s_0, s_1, s_2, s_3) = (1, 1, 1, 1) \quad , \quad (\text{остальные отсчёты равны нулю и явно не пишутся!})$$

импульсная характеристика совпадёт с сигналом

$$h_0 = s_3 = 1, \quad h_1 = s_2 = 1, \quad h_2 = s_1 = 1, \quad h_3 = s_0 = 1 \quad .$$

Тогда отклик фильтра на свой сигнал будет равен

$$y_k = \sum_{n \leq k} h_{k-n} s_n = \sum_{n \leq k} s_{N+n-k} s_n \quad , \quad k \geq 0 \quad . \quad (6)$$

Рассмотрим подробный расчёт отклика согласованного фильтра:

$$y_0 = s_3 s_0 = 1 \quad ,$$

$$y_1 = s_2 s_0 + s_3 s_1 = 1 + 1 = 2 \quad ,$$

$$y_2 = s_1 s_0 + s_2 s_1 + s_3 s_2 = 1 + 1 + 1 = 3 \quad ,$$

$$y_3 = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \quad ,$$

$$y_4 = s_0 s_1 + s_1 s_2 + s_2 s_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \quad ,$$

$$y_5 = s_0 s_2 + s_1 s_3 = 1 + 1 = 2 \quad ,$$

$$y_6 = s_0 s_3 = 1 \quad .$$

Из (6) следует, что выход согласованного фильтра совпадает с функцией корреляции сигнала s_n с центром (пиком) в точке $k=N$. Для прямоугольного импульса функция корреляции является треугольным импульсом удвоенной длительности $2N+1$.

В центре функции корреляции имеется максимум, превысить который невозможно, так как в этот момент вычисляется корреляция сигнала самого с собой (сумма квадратов). Именно этот максимум несёт информацию, то есть именно этот отсчёт должен быть взят приёмником в качестве информационного. Для этого отсчёты с выхода согласованного фильтра пропускают через устройство **downsampling** с коэффициентом прореживания

$N+1$.

Если входной сигнал искажён шумом w_n с нулевым средним и дисперсией $\sigma_w^2 = \overline{w_n^2}$

$$z_n = s_n + w_n ,$$

то информационный отсчёт на выходе согласованного фильтра будет равен сумме сигнальной составляющей и шумовой составляющей

$$q = s_0(s_0 + w_0) + s_1(s_1 + w_1) + s_2(s_2 + w_2) + s_3(s_3 + w_3) = y_3 + \sum_n s_n w_n .$$

Среднее значение q равно сигнальной составляющей $\bar{q} = y_3 = E_s / \Delta t = \|s\|^2$, то есть энергии сигнала, делённой на длительность такта, или **квадрату евклидовой нормы сигнала**. Дисперсия q равна

$$\sigma_q^2 = \overline{(q - \bar{q})^2} = \sum_n \overline{s_n w_n \sum_m s_m w_m} = \sum_n \sum_m \overline{s_n s_m w_n w_m} = \sum_n \overline{s_n^2 w_n^2} = \sigma_w^2 E_s / \Delta t = \sigma_w^2 \|s\|^2 \quad 15 .$$

Здесь использовалось свойство некоррелированности белого шума

$$\overline{w_n w_m} = \begin{cases} \overline{w_n^2} , & \text{если } n = m \\ 0 & \text{если } , n \neq m \end{cases} .$$

Отсюда отношение сигнал-шум **после** согласованной фильтрации

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{out}} = \frac{y_3^2}{\sigma_q^2} = \frac{E_s^2}{\Delta t \sigma_w^2 E_s} = \frac{E_s}{\Delta t \sigma_w^2} ,$$

а отношение сигнал-шум **до** согласованной фильтрации

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{in}} = \frac{\overline{s_n^2}}{\sigma_w^2} = \frac{E_s / \Delta t}{N+1} \frac{1}{\sigma_w^2} .$$

Значит выигрыш согласованного фильтра (его усиление, **gain**)

$$\text{GAIN} = \frac{\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{out}}}{\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{in}}} = N+1 .$$

то есть на $10 \lg(N+1)$ дБ. В рассмотренном случае выигрыш 6 дБ.

Если рассмотреть схему (рис. 6), то спектральная плотность мощности входного аналогового шума будет связана с мощностью (дисперсией) ограниченного по полосе шума (на выходе АЦП) равенством

$$N_0 = 2 \sigma_w^2 \Delta t , \text{ Вт/Гц} ,$$

которое можно получить, если рассмотреть рис. 7 и определить мощность шума как произведение спектральной плотности мощности на шумовую полосу.

15 Здесь использовался следующий факт: произведение двух сумм равно двойной сумме произведений.

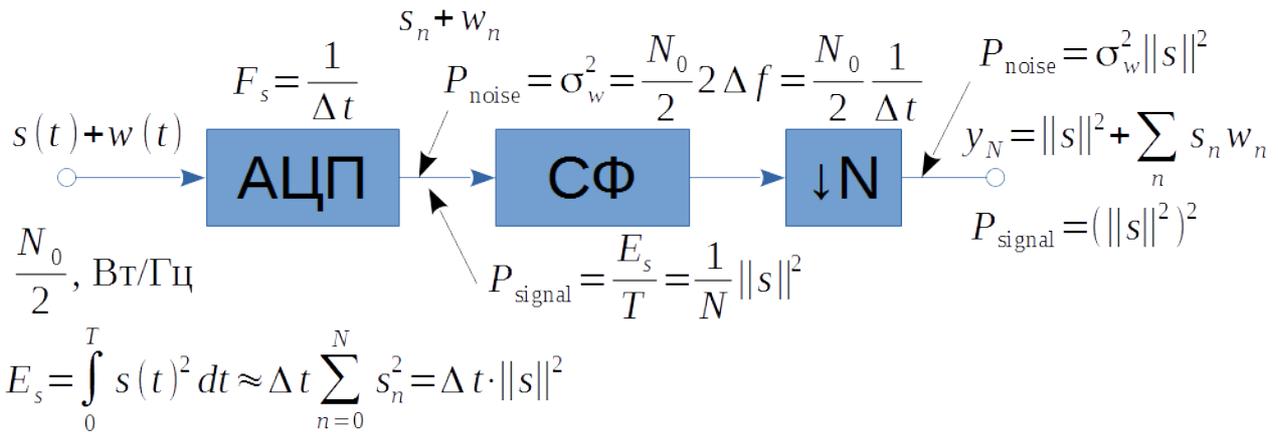


Рис. 6 Прохождение смеси сигнала и белого шума через АЦП и согласованный фильтр (СФ) с прореживанием отсчётов.

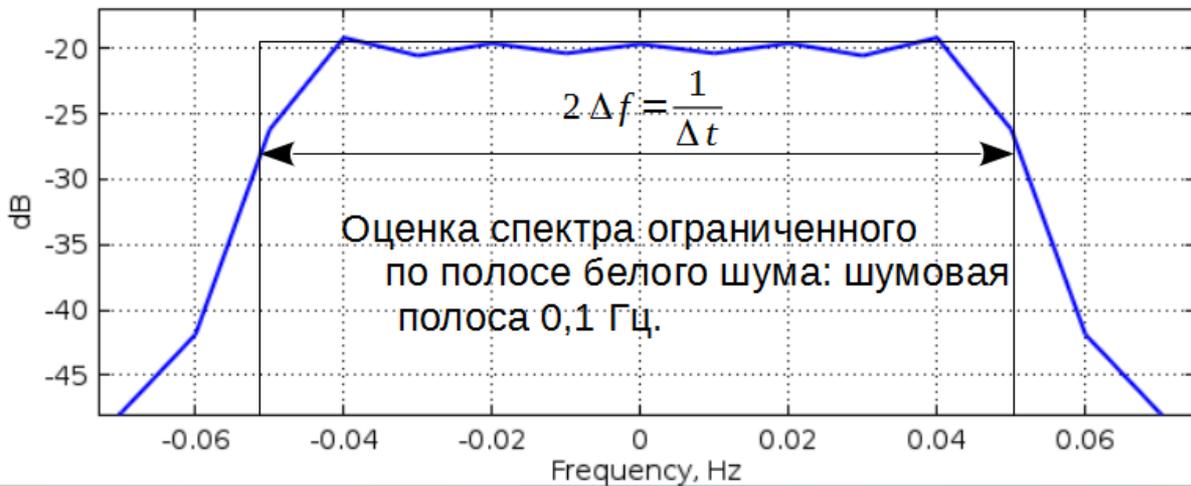
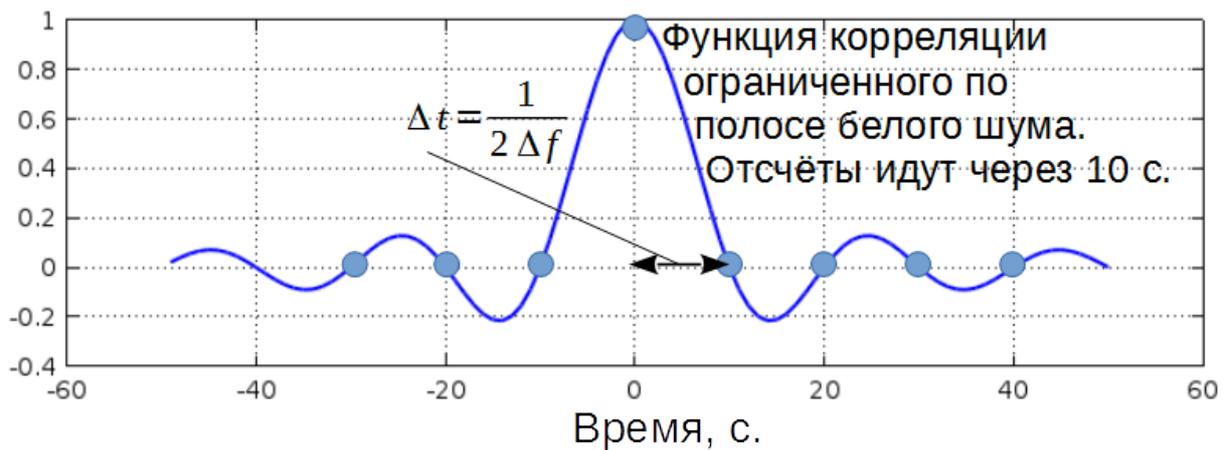
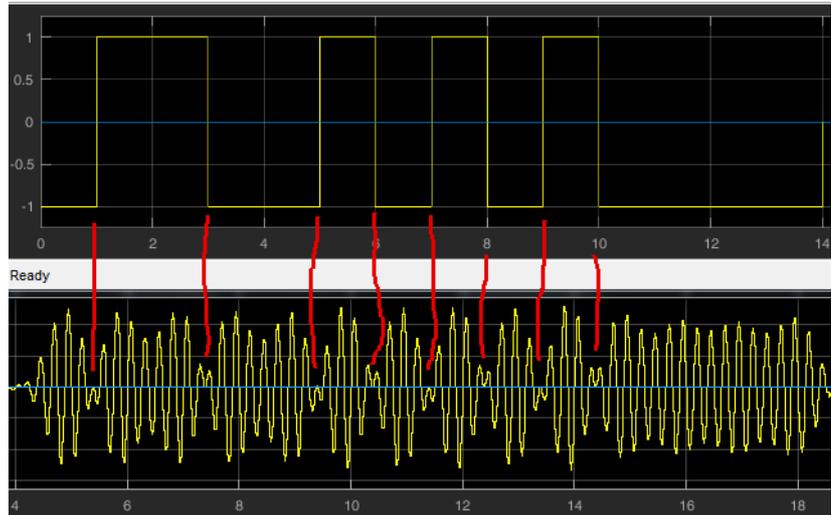


Рис. 7 Функция корреляции ограниченного по полосе белого шума и оценка (по ограниченной по времени функции корреляции) его спектра мощности.

Пример переноса видеосигнала на промежуточную частоту

Результат переноса видеосигнала на промежуточную несущую частоту показан на рис. 8. Перед переносом на промежуточную частоту сигнал с выхода формирующего фильтра был интерполирован с коэффициентом 16 и пропущен через цифровой ФНЧ. Так была промоделирована процедура ЦАП, хотя у ЦАП коэффициент интерполяции равен бесконечности, а ФНЧ — аналоговый.



Красной линией показаны моменты смены фазы на 180°

В моменты смены символа (в данном случае бита **0** на **1** или **1** на **0**) фаза несущей претерпевает скачок на 180 градусов. При этом присутствует паразитная амплитудная модуляция. В моменты, где бит не меняется, скачка фазы нет, однако присутствует небольшая амплитудная модуляция из-за неступенчатой переходной характеристики¹⁶ формирующего фильтра.

Чтобы из принятого сигнала выделить квадратурные компоненты, в приёмнике должен быть генератор несущей частоты, следящий за частотой и фазой колебания, неявно присутствующего в принятом сигнале. Слежением за несущей частотой (**carrier recovery**) занимается блок **фазовой автоподстройки частоты**¹⁷ (ФАПЧ).

¹⁶ Переходная характеристика — это отклик фильтра на «ступеньку»

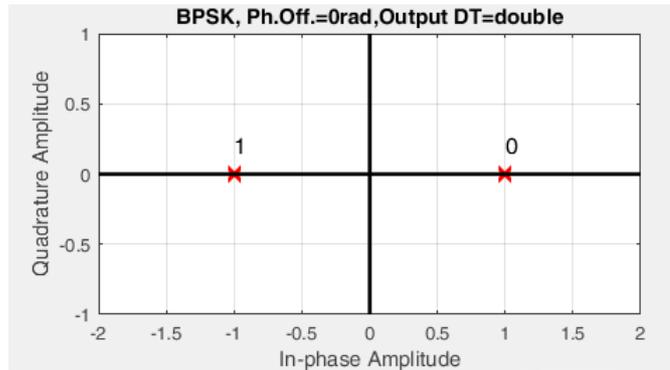
¹⁷ **Phase-Locked Loop, PLL**

Принцип работы ФАПЧ на примере BPSK

Для понимания работы ФАПЧ рассмотрим идеальное созвездие **BPSK**.

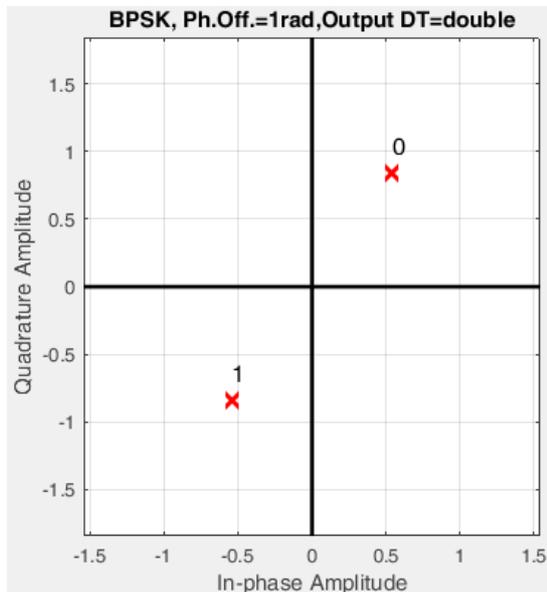
Здесь разность фаз несущей между битами **0** и **1** равна 180 градусам. Начальная фаза несущей роли не играет.

При прохождении сигнала через линию передачи (усилители, фильтры, среду распространения радиоволн, ...), задержка такого сигнала заранее не



известна и является случайной величиной. Претерпев задержку на Δt , гармоника с частотой f получает набег фазы $\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t$. Если при этом делать демодуляцию с использованием исходной несущей передатчика, то **BPSK** созвездие повернётся на угол, соответствующий этому набегу фазы; например, на 1 радиан, как на рисунке ниже.

В случае демодуляции с произвольной фазой несущей (без контура ФАПЧ) поворот



созвездия будет случайным и отличить **0** от **1** будет невозможно. Из-за случайного начального поворота созвездия приёмник, построенный по схеме универсального квадратурного демодулятора, в большинстве случаев выдаст две ненулевые квадратуры, тогда как в идеале **BPSK** имеет лишь одну. Уже исходя из этого наблюдения следует идея схемы ФАПЧ: подстроить частоту и фазу местного генератора так, чтобы вторая квадратура, стала равна нулю. Тогда управляющий сигнал (сигнал ошибки) берётся из этой самой второй квадратуры.

В случае фиксированного частотного рассогласования, $\Delta f = \text{const}$, созвездие будет вращаться со скоростью, пропорциональной величине Δf . В мобильных системах связи такие частотные рассогласования обязательно должны отслеживаться ФАПЧ; мало того, должны отслеживаться и медленные изменения частотного рассогласования, когда объекты движутся с радиальным ускорением друг относительно друга.

Заметим, что детектор ФАПЧ можно делать и в цифровом виде, так как важно лишь обеспечить условие $Q \rightarrow 0$, где Q — оцифрованная квадратура.

Квадратуры получаются обычным образом: перемножением входного **BPSK** сигнала на две квадратуры опорного генератора ФАПЧ. Детектор ФАПЧ можно сделать в виде умножителя выделенных квадратур: если хотя бы одна квадратура станет равной нулю, то и всё произведение (сигнал ошибки, управляющий сигнал) станет равным нулю. Эта идея лежит в основе **петли Костаса (Costas loop)**, рис. 9¹⁸.

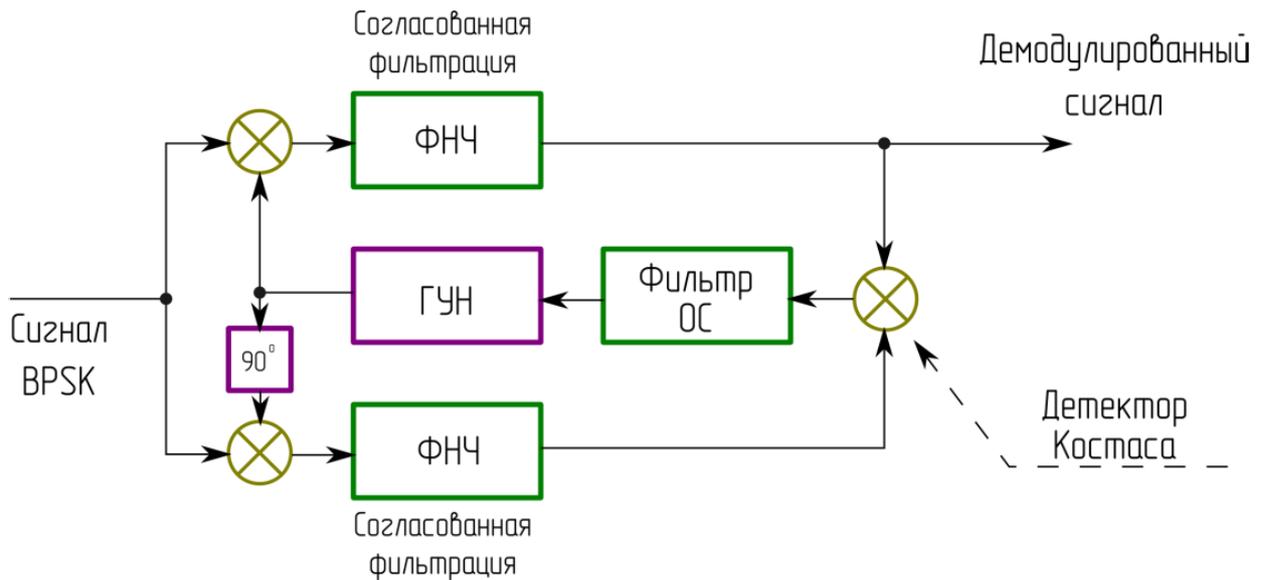


Рис. 9 Петля Костаса для выравнивания частоты и фазы местного генератора.

Мгновенная частота сигнала с ГУН¹⁹ по определению линейно зависит от входного напряжения, значит фаза является интегралом от входного напряжения $s_{LF}(t)$

$$s_{vco}(t) = A_{vco} \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_c \int_{-\infty}^t s_{LF}(t) dt + \varphi_{vco} \right), \quad (7)$$

где k_c — чувствительность ГУН, Гц/В, f_0 — центральная частота ГУН.

Обозначение «Фильтр ОС» на рис. 9 по сути означает петлевой фильтр, хотя автор рисунка под сокращением имел ввиду «Фильтр обратной связи». Петлевой фильтр является фильтром нижних частот. Порядок фильтра определяет тип возмущений, которые способна отслеживать схема ФАПЧ: скачки фазы, скачки частоты, линейное изменение частоты и т. п.

После захвата схема ФАПЧ может работать в двух устойчивых состояниях, которые соответствуют созвездию с нулевой Q составляющей и с ненулевой I составляющей; причём где на оси I бит **0**, а где бит **1**, слева или справа — не определено. В этом и кроется суть двузначной работы ФАПЧ для **BPSK**: в процессе захвата перевесит либо правое вращение, либо левое, но в обоих случаях условие $Q=0$ будет выполнено.

18 Рисунок взят из [1]; пособие [1] рекомендуется для просмотра.

19 ГУН — генератор, управляемый напряжением. **VCO** – **Voltage-controlled oscillator**.

Проблему с возможной инверсией битов решают с помощью дифференциального кодирования (**DBPSK**²⁰), когда передаётся не сам бит, а разность между входным текущим битом и выходным предыдущим.

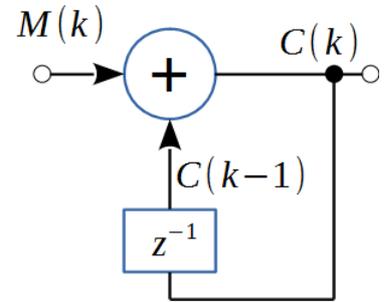
Да, биты можно вычитать друг из друга, получая снова биты. Этой операции соответствует **исключающее ИЛИ (XOR)**. Вообще, сумма и разность для битов являются эквивалентными операциями. Это легко понять, учтя, что **XOR** есть **сумма по модулю два**:

$$1+1=2=0, 1+0=0+1=1, 0+0=0.$$

$$1-1=0, 0-1=-1=1, 1-0=1, 0-0=0.$$

В случае инверсной работы демодулятора дифференциальное декодирование, построенное по принципу разности между текущим битом и предыдущим, даст тот же самый результат, так как $1-1=0-0=0$.

Дифференциальный кодер — рекурсивный фильтр первого порядка, а декодер — трансверсальный (фильтр с конечной импульсной характеристикой, КИХ-фильтр). На рисунке справа показана схема кодера.



Предлагается построить схему декодера и проверить кодирование-декодирование некоторой случайной последовательности битов, при условии нулевого начального состояния кодера-декодера.

Помимо петли Костаса есть схема Пистолькорса, где **BPSK** сигнал возводится в квадрат, а ГУН работает на удвоенной несущей частоте. Делитель частоты на два даёт неоднозначность фазы восстановленной несущей 180 градусов.

Рассмотрим подробнее²¹ работу петли Костаса на примере **BPSK** сигнала с одинаковыми битами (все нули или все единицы). Тогда такой сигнал можно записать как

$$s_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad (8)$$

где неизвестными являются фаза и частота, причем фаза полностью неизвестна (известно, что она случайная и имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 2π), а частота известна частично как $f_0 = f_{\text{transmit}} + \Delta f$, где f_{transmit} — частота передатчика, а Δf — частотный сдвиг за счёт эффекта Доплера²².

Напряжение на выходе ГУН и фазовращателя на 90 градусов имеет вид

20 **Differential BPSK.**

21 Для этого использовался **Simulink**.

22 Для более точного описания процессов следует учесть случайное дрожание фазы — фазовый шум.

$$\begin{aligned} s_{\text{vco}}(t) &= A_{\text{vco}} \cos(2\pi f_{\text{vco}} t + \varphi_{\text{vco}}) \\ s_{90}(t) &= -A_{\text{vco}} \sin(2\pi f_{\text{vco}} t + \varphi_{\text{vco}}) \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда сигналы на выходе двух умножителей перед ФНЧ будут равны

$$\begin{aligned} A_0 A_{\text{vco}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos(2\pi f_{\text{vco}} t + \varphi_{\text{vco}}) &= \\ \frac{A_0 A_{\text{vco}}}{2} \cos[2\pi(f_0 - f_{\text{vco}})t + (\varphi_0 - \varphi_{\text{vco}})] - \frac{A_0 A_{\text{vco}}}{2} \sin[2\pi(f_0 + f_{\text{vco}})t + (\varphi_0 + \varphi_{\text{vco}})] &, \quad (1) \\ -A_0 A_{\text{vco}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin(2\pi f_{\text{vco}} t + \varphi_{\text{vco}}) &= \quad (0) \\ \frac{A_0 A_{\text{vco}}}{2} \sin[2\pi(f_0 - f_{\text{vco}})t + (\varphi_0 - \varphi_{\text{vco}})] - \frac{A_0 A_{\text{vco}}}{2} \sin[2\pi(f_0 + f_{\text{vco}})t + (\varphi_0 + \varphi_{\text{vco}})] & \end{aligned}$$

ФНЧ проектируется так, чтобы подавить сигнал на суммарной частоте и оставить сигнал на разностной частоте, причём так как доплеровский сдвиг может изменяться во времени, то ФНЧ должен пропускать эти, пусть и медленные, но изменения.

Сигнал на выходе умножителя-детектора равен

$$s_{\text{detector}}(t) = K_d A_0 A_{\text{vco}} \sin[4\pi(f_0 - f_{\text{vco}})t + 2(\varphi_0 - \varphi_{\text{vco}})] \quad (11)$$

где $K_d = 1/8$ — коэффициент передачи детектора для петли Костаса.

Из-за появившейся двойки в полной фазе сигнала петля Костаса позволяет снять манипуляцию фазы на 180 градусов (**BPSK** сигнал). По сути, выражение (11) является характеристикой фазового детектора.

Допустим, разность начальных фаз равна нулю, тогда если частота ГУН несколько больше частоты входного сигнала, то сигнал с выхода детектора меньше нуля, так что ГУН под управлением этого сигнала начинает понижать частоту, так как его частота пропорциональна входному напряжению. И наоборот.

Если разность начальных фаз не равна нулю, а разность частот равна нулю, то если фаза ГУН будет больше фазы входного сигнала (сигнал ГУН чуть опережает, то есть находится чуть левее на оси времени), то отрицательный сигнал с детектора скажет уменьшить частоту ГУН, таким образом тормозя сигнал ГУН²³ и подстраивая его к фазе входного сигнала.

Если разность начальных фаз не равна нулю и разность частот не равна нулю, то анализировать ФАПЧ становится сложнее, и в этом случае лучше пользоваться программами моделирования.

Петлевой фильтр строится как пропорционально-интегрирующее звено (рис. 10). Такой фильтр имеет второй порядок и позволяет отслеживать скачки по фазе и по частоте. Практически его достаточно для произвольных изменений частоты, но с ограничением на

²³ Фаза — это интеграл от частоты.

скорость изменения частоты и на диапазон частот рассогласования. Большие скачки по фазе могут переводить синхронизацию в инверсный режим.

Операторный коэффициент передачи пропорционально-интегрирующего звена равен

$$F(p) = K_p + \frac{K_i}{p} . \quad (12)$$

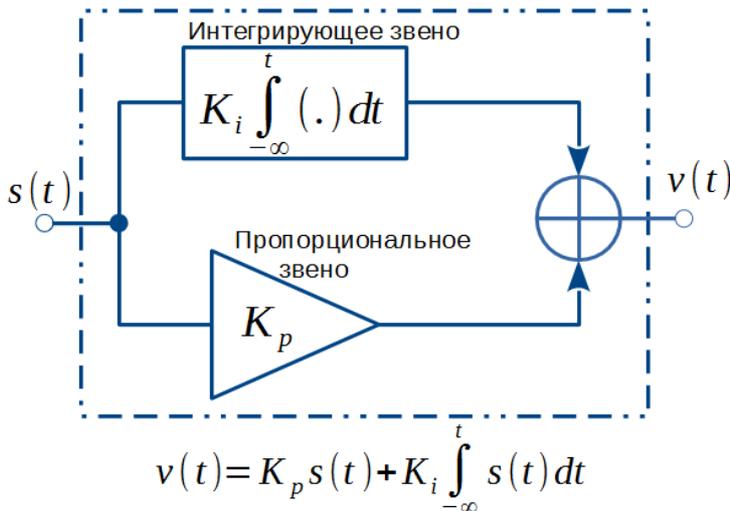


Рис. 10 Пропорционально-интегрирующее звено.

фаза имеется случайное рассогласование на интервале от 0 до 2π . Примем чувствительность ГУН — $k_c = 4$ Гц/В, коэффициент передачи петлевого фильтра (**loop filter**) — $K_p = 200$. Частота входного сигнала 1 кГц, частота ГУН при нулевом входном напряжении — 1 кГц.

На рис. 11 показаны сигналы с выхода детектора Костаса, выхода ФНЧ, с выхода ГУН и входной сигнал. ФАПЧ в этом случае захватила фазу в синфазном состоянии сигналов. При этом сигнал с выхода детектора нулевой (стремится к нулю). Анализируя сигнал детектора, можно сделать вывод, что ФАПЧ не может сразу захватить фазу и присутствует затухающий колебательный процесс. Сигнал детектора (после усилителя) доходит до $\pm(20...30)$ вольт, то есть частота ГУН в процессе захвата отклоняется от номинальной на $\pm(80...120)$ Гц и должна обеспечиваться перестройка ГУН (10...15) %.

На рис. 12 показан случай инверсного захвата фазы, при этом сигнал с выхода ФНЧ инвертировался — это и есть обратная работа демодулятора, когда вместо одной полярности принимается другая — противоположная (не важно, плюс или минус).

Каков произойдет захват фазы — противофазный или синфазный — зависит от начального рассогласования фаз (рис. 13, рис. 14).

Рассмотрим для начала петлевой фильтр первого порядка, то есть выключим интегрирующее звено. В этом случае фильтр вырождается в усилитель с некоторым коэффициентом передачи (**gain**). Фильтр первого порядка позволяет отслеживать скачки по фазе, но не позволяет отслеживать скачки по частоте. Покажем это.

Предположим, что рассогласования по частоте нет, а по

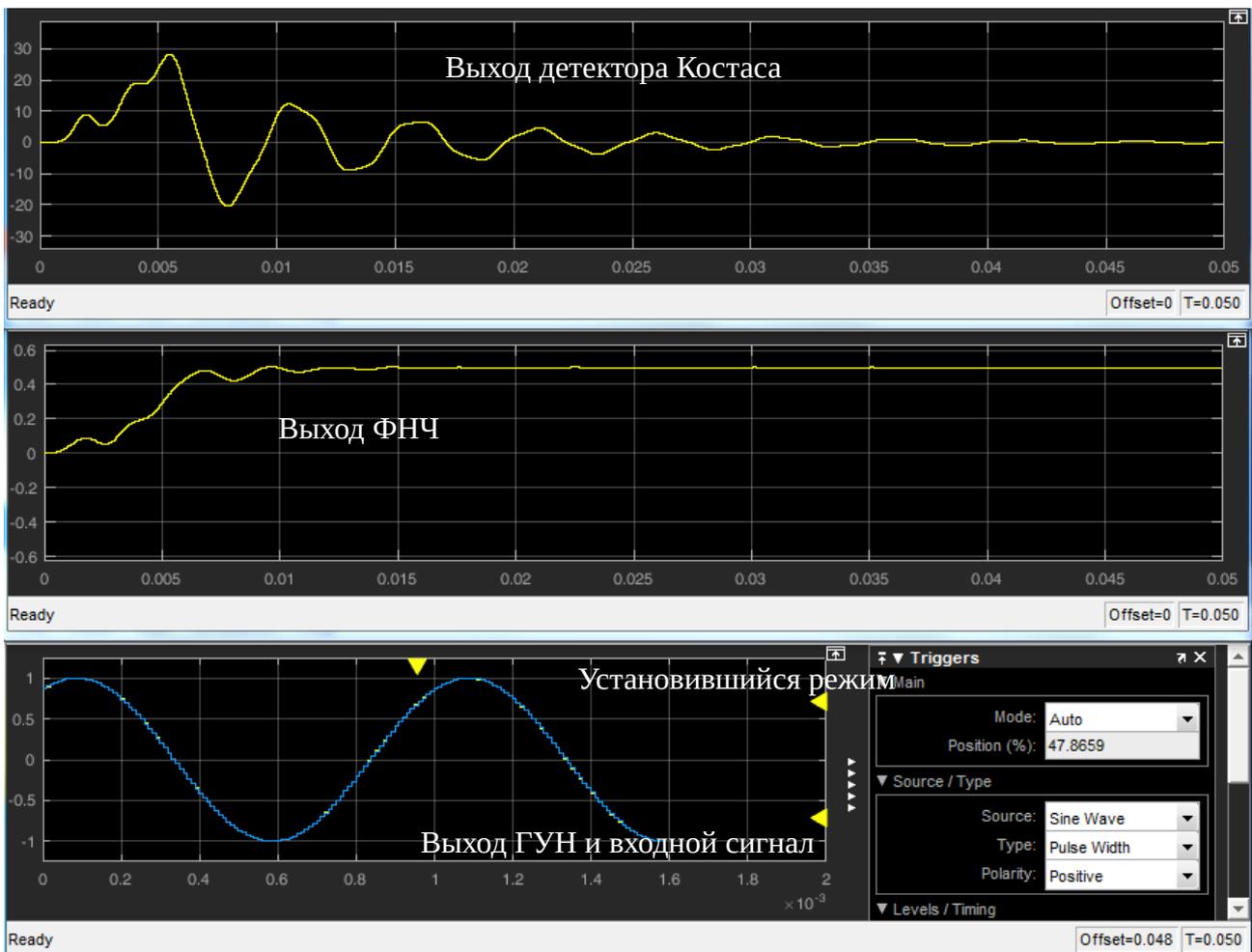
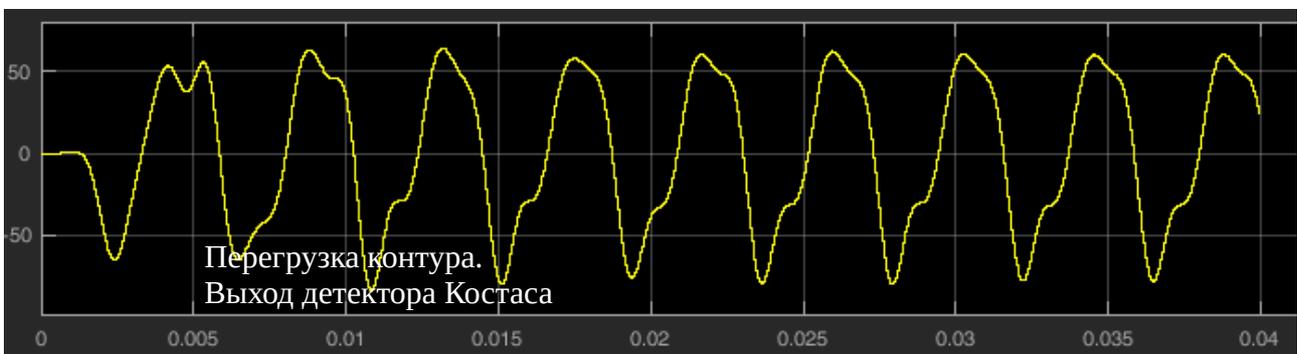


Рис. 11 Сигналы петли Костаса: синфазный захват фазы при нулевом начальном рассогласовании по частоте.

Уменьшение коэффициента усиления детектора приведёт к более медленному процессу захвата, а увеличение — к более быстрому с перспективой перегрузки контура и невозможностью захвата:



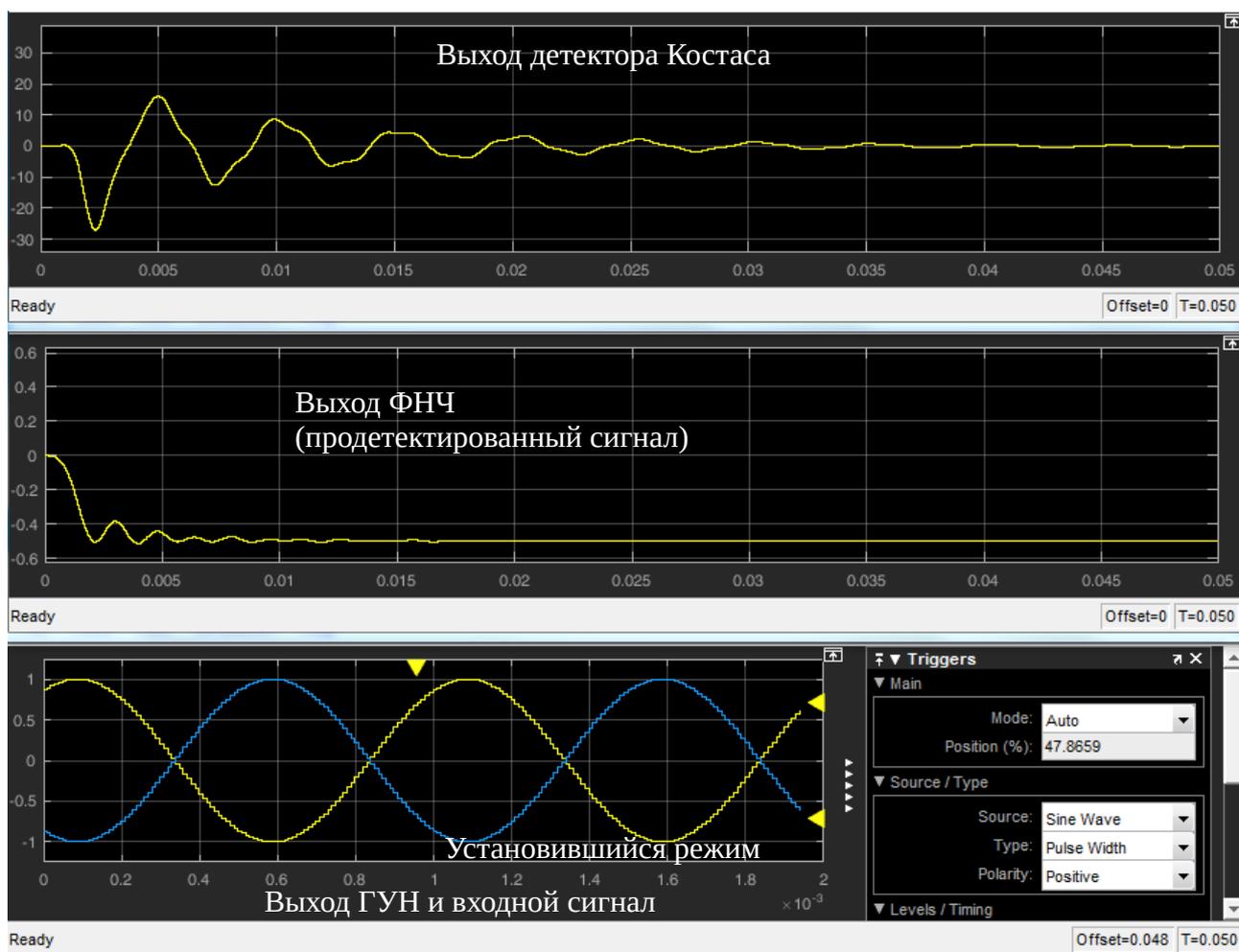


Рис. 12 Сигналы петли Костаса: противофазный захват фазы при нулевом начальном рассогласовании по частоте.

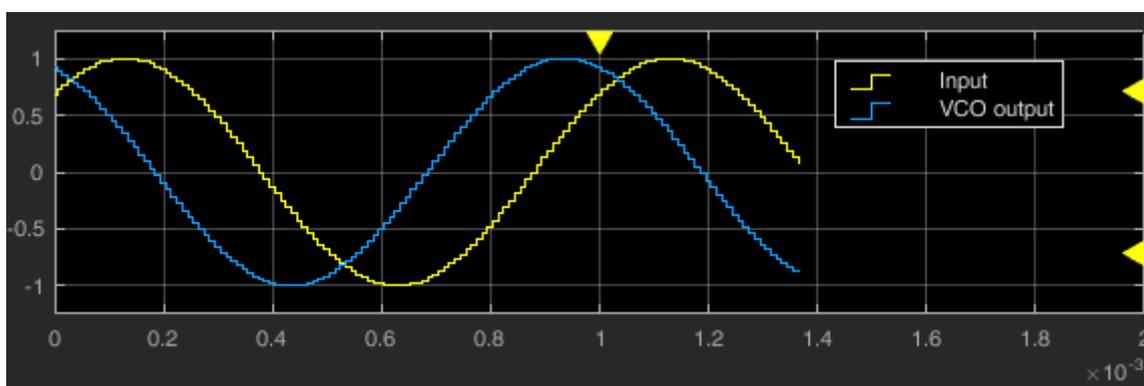


Рис. 13 Начальное рассогласование фаз сигнала ГУН и входного сигнала, приводящее к синфазному захвату (слиянию, рис. 11).

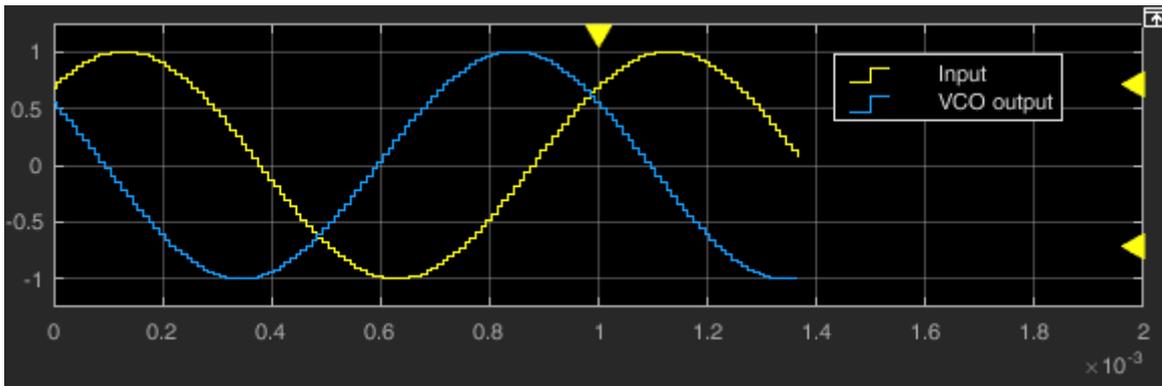


Рис. 14 Начальное рассогласование фаз сигнала ГУН и входного сигнала, приводящее к противофазному захвату (противопоставлению, рис. 12).

Если есть начальное рассогласование по частоте, то начальная фаза до нуля не синхронизируется: будет остаточное рассогласование по фазе, тем меньшее, чем больше коэффициент усиления детектора. Это недостаток петлевого фильтра первого порядка.

Если так уменьшать коэффициент усиления, что рассогласование по фазе будет 45 градусов, то дальнейшее снижение приведёт к невозможности захвата частоты: рассогласование по фазе всегда будет больше 45 градусов и система не сможет стабилизироваться. Для рассматриваемого примера критический коэффициент усиления равен 40 при частотном рассогласовании 20 Гц (рис. 17).

Формула для критического коэффициента усиления может быть получена из (11) путём подстановки разности фаз 45 градусов при нулевой разности частот, так как частота уже захвачена

$$K_{p \text{ critical}} = \frac{\Delta f}{k_c K_d} , \quad (1)$$

3)

где Δf — начальное рассогласование по частоте.

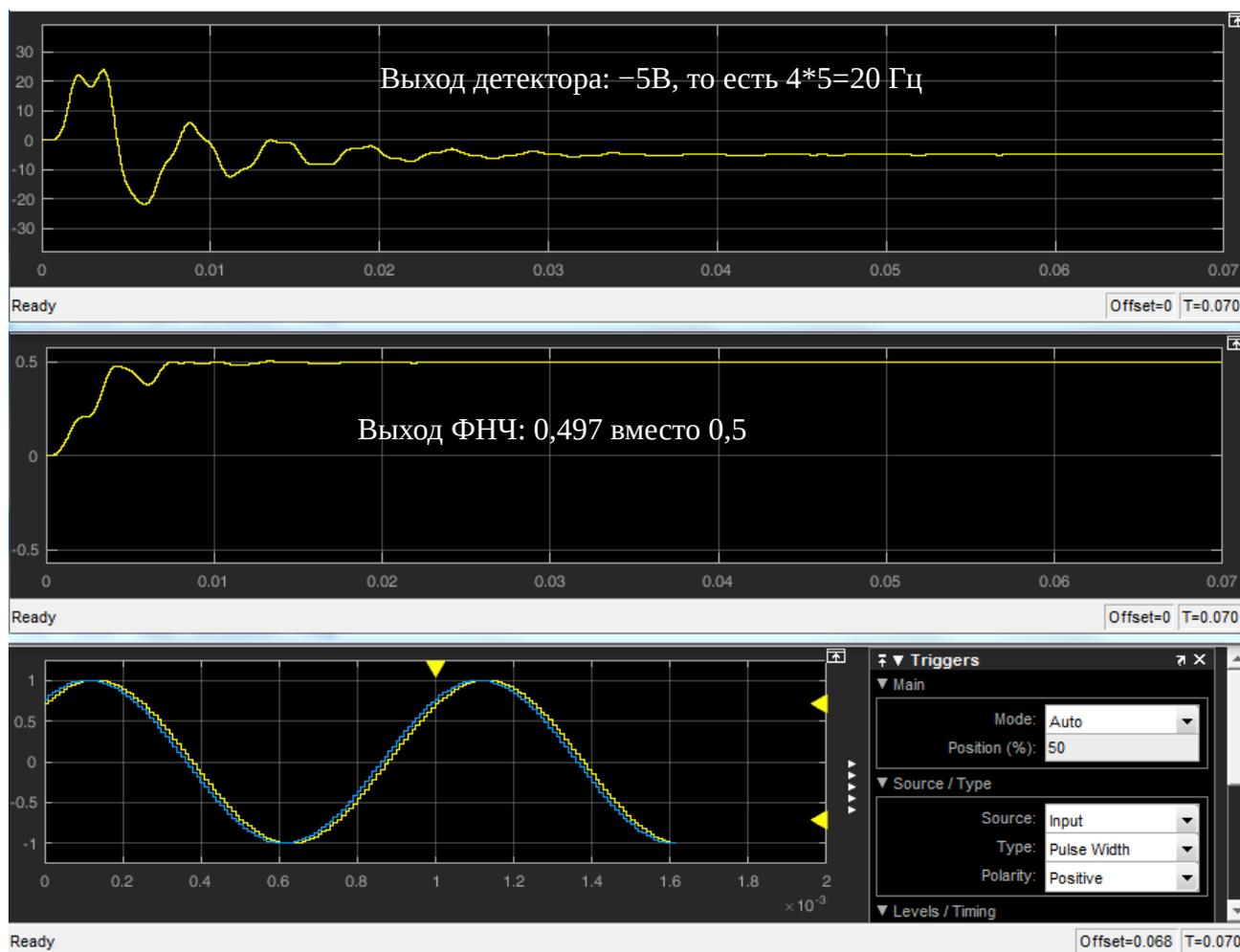


Рис. 15 Петля Костаса при начальном рассогласовании частоты 2% (20 Гц)

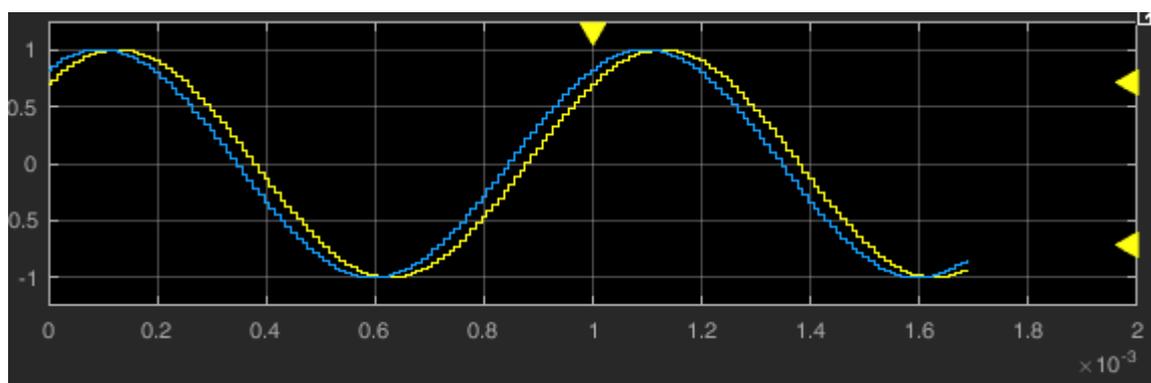


Рис. 16 Остаточное рассогласование фазы (менее 45 градусов) при уменьшении коэффициента усиления в два раза (с 200 до 100)

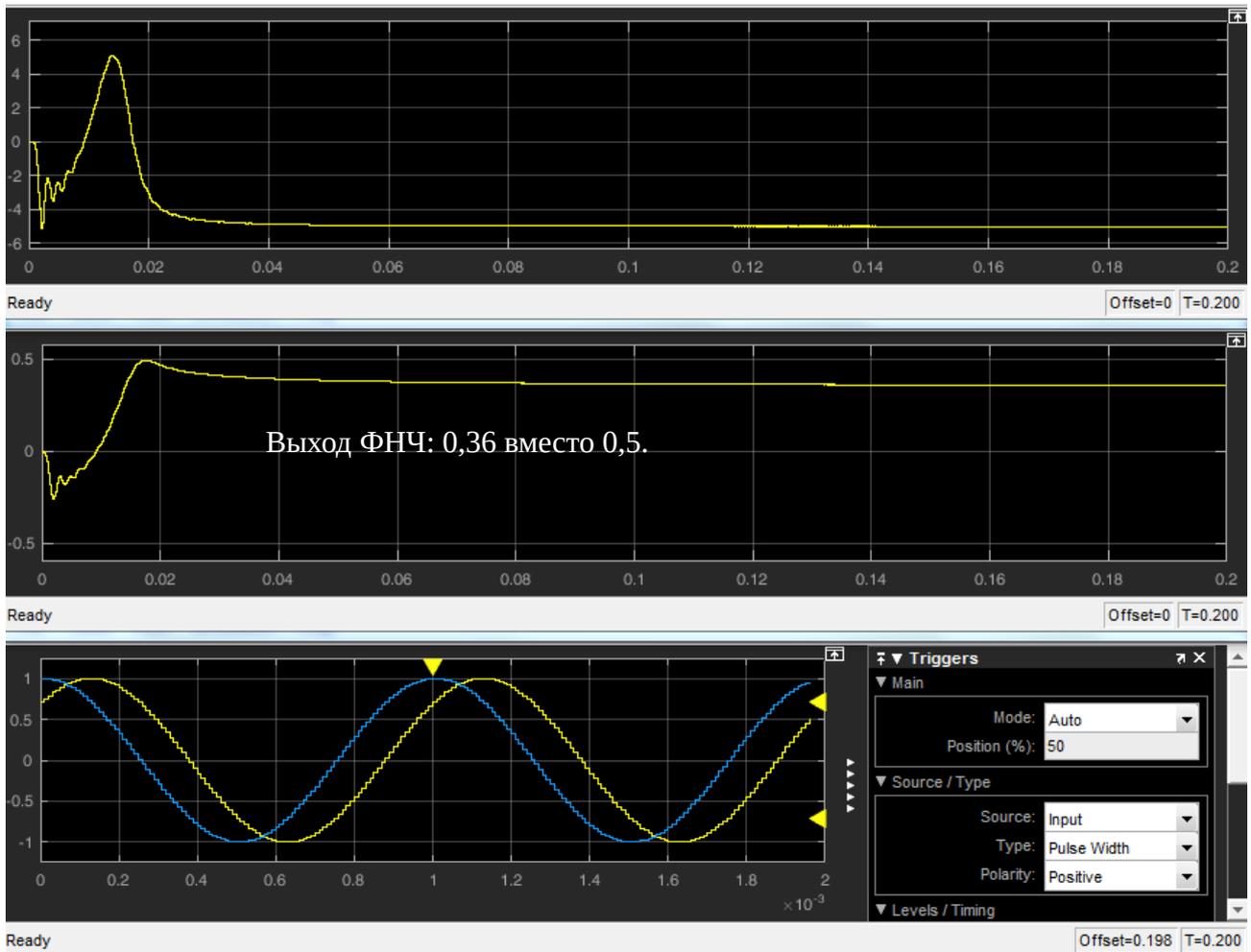


Рис. 17 Остаточное рассогласование по фазе 45 градусов (чуть меньше) при критическом коэффициенте усиления: система медленно, но вышла на рабочий режим (захватила частоту).

Формула для остаточного рассогласования по фазе может быть найдена из (11) путём обнуления **текущего** частотного рассогласования (амплитуды сигналов, A_{vco} , A_0 , взяты по единице)

$$k_c K_p K_d \sin(2\varphi_{\text{limit}}) = \Delta f, \quad (14)$$

$$\varphi_{\text{limit}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\Delta f}{k_c K_p K_d}\right).$$

Рассогласование по фазе для рис. 16 будет равно около 12 градусам. Если амплитуды не равны единице, то вместо $K_p K_d$ следует брать $K_p K_d A_0 A_{vco}$, то есть напряжение на входе ГУН U_{vco}

$$\varphi_{\text{limit}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\Delta f}{k_c U_{vco}}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\Delta f}{k_c K_p U_{\text{detector}}}\right). \quad (15)$$

Остаточное рассогласование фазы приводит к уменьшению отношения сигнал шум в $\cos^2 \varphi_{\text{limit}}$ раз или на $20 \log_{10} |\cos \varphi_{\text{limit}}|$ дБ. Например, рассогласование фазы 45 градусов даёт проигрыш 3 дБ (два раза по мощности).

Рассмотрим петлевой фильтр второго порядка, который позволяет отследить скачки по частоте (важно для компенсации эффекта Доплера).

В этом случае уравнение (11) может быть записано в виде

$$s_{\text{detector}}(t) = A_0 A_{\text{vco}} K_d \sin \left[4\pi(f_0 - f_{\text{vco}})t + 2(\varphi_0 - \varphi_{\text{vco}}) + 4\pi k_c \int_{-\infty}^t s_{\text{LF}}(t) dt \right]. \quad (16)$$

То, что стоит в качестве аргумента синуса, является ошибкой слежения

$$e(t) = 4\pi(f_0 - f_{\text{vco}})t + 2(\varphi_0 - \varphi_{\text{vco}}) + 4\pi k_c \int_{-\infty}^t s_{\text{LF}}(t) dt, \quad (17)$$

которая в установившемся режиме в идеале должна быть равна нулю.

Сигнал с выхода петлевого фильтра (**Loop Filter**) можно записать так

$$s_{\text{LF}}(t) = K_p s_{\text{detector}}(t) + K_i \int_{-\infty}^t s_{\text{detector}}(t) dt. \quad (18)$$

Объединяя три уравнения, можно записать дифференциальное уравнение относительно ошибки слежения для петли Костаса

$$\frac{d^2}{dt^2} e(t) - A \cos e(t) \frac{d}{dt} e(t) - B \sin e(t) = 0, \quad (19)$$

$$A = 4\pi k_c K_p K_d (A_0 A_{\text{vco}})^2, \quad B = 4\pi k_c K_i K_d (A_0 A_{\text{vco}})^2.$$

Данное уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Нелинейность связана с синусом и косинусом ошибки слежения. Для его решения требуется задать два начальных условия: ошибку слежения в момент $t=0$ и производную ошибки слежения в момент $t=0$:

$$e(0) = 2(\varphi_0 - \varphi_{\text{vco}}), \quad \frac{de(t)}{dt}(t \rightarrow 0) = 4\pi(f_0 - f_{\text{vco}}). \quad (20)$$

Эти начальные условия выведены из (17) в предположении, что сигнал на выходе петлевого фильтра в начальный момент времени равен нулю (логично, если все цепи в фильтре разряжены). Таким образом, начальное значение ошибки слежения зависит от начального рассогласования по фазе, а начальная скорость изменения ошибки (её крутизна) зависит от начального рассогласования по частоте. Удвоение начальной ошибки и её крутизны связано с платой за теоретическую нечувствительность петли ФАПЧ к смене фазы **BPSK**-импульсов.

Модель петли Костаса относительно фаз показана на рис. 18. Здесь принято упрощение $A_{vco} = A_0 = 1$, которое требует нормировки амплитуды входного сигнала и сигнала ГУН.

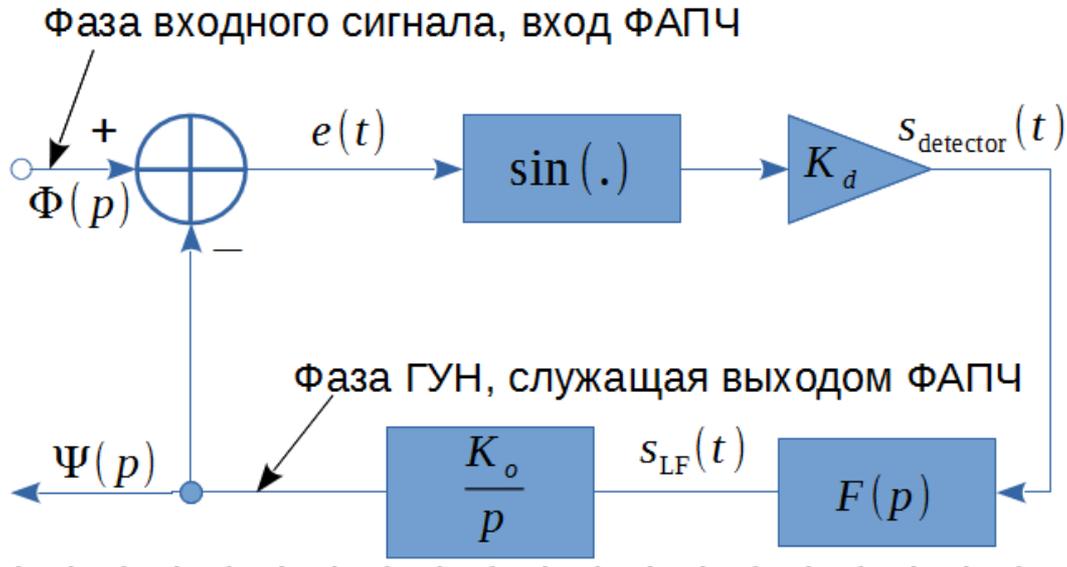


Рис. 18 Модель петли Костаса относительно фаз, $K_o = 2\pi k_c$.

Если рассматривать линеаризованную модель петли Костаса, то блок синуса убирается, что справедливо для малых фаз, так как при этом $\sin x \approx x$. В этом случае можно найти операторный коэффициент передачи по фазе для такой петли

$$\Psi(p) = [\Phi(p) - \Psi(p)] K_d F(p) \frac{K_o}{p},$$

$$H(p) = \frac{\Psi(p)}{\Phi(p)} = \frac{K_d F(p) \frac{K_o}{p}}{1 + K_d F(p) \frac{K_o}{p}} = \frac{p K_d K_o K_p + K_d K_o K_i}{p^2 + p K_d K_o K_p + K_d K_o K_i}. \quad (21)$$

Для удобства вводят обозначения

$$\omega_p^2 = K_d K_o K_i, \quad 2\zeta\omega_p = K_d K_o K_p, \quad (22)$$

которые дают компактную запись коэффициента передачи петли ФАПЧ

$$H(p) = \frac{2\zeta\omega_p p + \omega_p^2}{p^2 + 2\zeta\omega_p p + \omega_p^2}. \quad (23)$$

Частота ω_p называется собственной частотой контура. Колебание с такой частотой возникает в петле ФАПЧ при нулевом (или малом) коэффициенте усиления K_p пропорционального звена. В этом случае демпфинг-фактор ζ равен нулю. Демпфинг-фактор как раз и отвечает за меру затухания колебаний: чем он больше, тем быстрее затухают колебания, но тем медленнее контур отслеживает изменения фазы входного сигнала.

Подставляя в (23) $p = j\omega$, можно найти эквивалентную шумовую полосу контура ФАПЧ

$$B_{\text{экв.}} = 2 \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega, \quad (\text{двусторонняя полоса}), \quad (24)$$

$$B_{\text{экв.}} = 2\pi\omega_p \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta} \right), \quad \text{рад/с.}$$

Время захвата сигнала примерно можно оценить по формуле

$$t_{\text{захвата}} \approx (3..4) \frac{K_p}{K_i} = (3..4) \frac{2\zeta}{\omega_p}, \quad \text{с.} \quad (25)$$

Эта оценка делается в мало-сигнальном приближении (19) $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ и решении соответствующего линейного дифференциального уравнения.

Пусть петля моделируется в дискретном времени с шагом $T_s = 10 \text{ мкс}$ и её параметры заданы следующим образом

$$A_0 = A_{\text{vco}} = 1, \quad K_p = 200, \quad K_i = 0,3/T_s = 0,3 \cdot 10^5 \text{ 1/с}, \quad k_c = 4 \text{ Гц/В}. \quad (26)$$

Тогда дифференциальное уравнение (19) запишется так

$$\frac{d^2}{dt^2} e(t) - 1256 \cos e(t) \frac{d}{dt} e(t) - 188500 \sin e(t) = 0. \quad (27)$$

Резонансная частота в этом случае равна 50 Гц, демпинг-фактор — 1, а время захвата оценивается как (0,02...0,03) с.

Задав начальные параметры

$$e(0) = 1 \quad (\text{расстройка } 0,5 \text{ радиан!}), \quad \frac{de(t)}{dt}(0) = 2\pi 80 \quad (\text{расстройка } 40 \text{ Гц!}),$$

и решая это уравнение численно (**Mathcad**), получим кривую ошибки слежения (рис. 19). При этом частота входного сигнала равна 1 кГц, а начальная частота ГУН — 1040 Гц. Время захвата примерно соответствует оценённому по (25).

Given

$$y''(t) - 1256 \cdot \cos(y(t)) \cdot y'(t) - 188500 \cdot \sin(y(t)) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 2 \cdot \pi \cdot 80$$

$y := \text{Odesolve}(t, 0.03)$

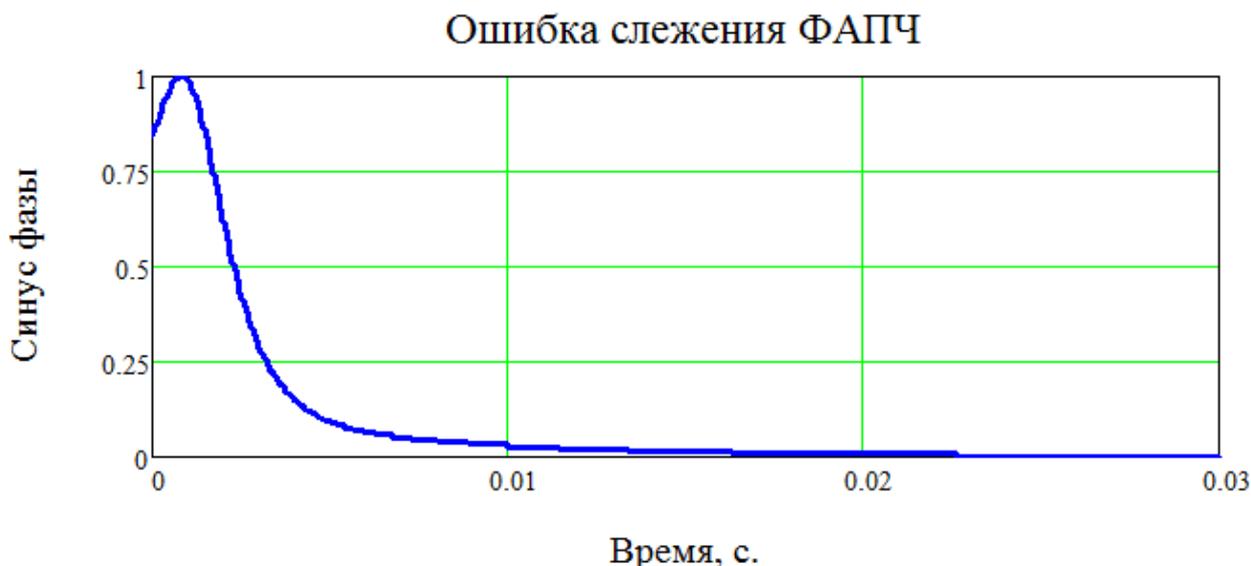


Рис. 19 Пример расчёта ошибки слежения нелинейного контура ФАПЧ с нереализуемым ФНЧ; резонансная частота контура 50 Гц, демпинг-фактор 1.

Такое поведение ошибки слежения соответствует идеальному контуру, так как не существует такого ФНЧ, который мог бы полностью подавить удвоенную частоту со своим спектром и пропустить нулевую частоту со своим спектром и при этом не иметь задержки.

На рис. 20 показан пример ошибки слежения нелинейного контура с реализуемым ФНЧ рекурсивного типа (частота дискретизации 25 кГц, частота среза — 1 кГц, частота заграждения — 2 кГц по -70 дБ, неравномерность в полосе пропускания 2 дБ, рис. 21, рис. 22), причём параметры (27) остались неизменными. Остаточная ошибка слежения $5 \cdot 10^{-4}$ радиан; она зависит от степени подавления суммарной гармоники 2 кГц ФНЧ. Пример модели **Simulink** смотри в приложении А.

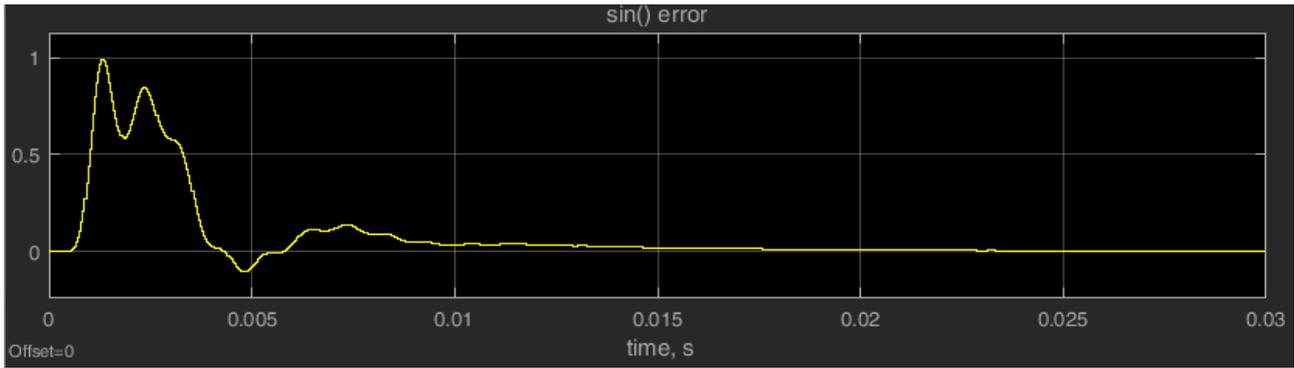


Рис. 20 Пример ошибки слежения нелинейного контура ФАПЧ с реализуемым ФНЧ; резонансная частота контура 50 Гц, демпинг-фактор 1.

Из сравнения рис. 19 и рис. 20 следует, что характеристики петли ФАПЧ с реализуемым ФНЧ заметно отличаются от характеристик петли с нереализуемым ФНЧ.

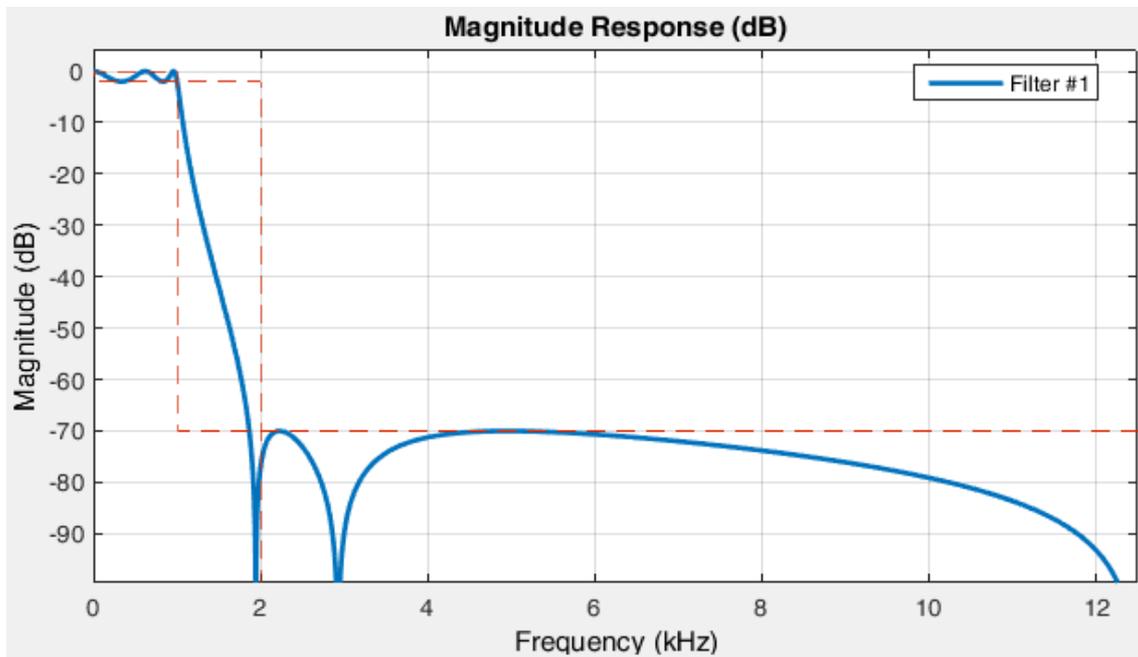


Рис. 21 АЧХ рекурсивного фильтра нижних частот для подавления суммарной гармонике 2 кГц в петле Костаса.

Так как была задана начальная расстройка частоты ГУН и входного сигнала 40 Гц, то в установившемся режиме сигнал на выходе петлевого фильтра должен быть равен 10 В (чувствительность ГУН 4 Гц/В), что и наблюдается на рис. 23 под легендой «**Loop-Filter output**». При этом сигнал с выхода **Gain** (с усилителя K_p пропорционально-интегрирующего звена) равен нулю, то есть в установившемся режиме компенсация частотного ухода держится за счёт выхода интегратора: ошибка слежения равна нулю, то есть на входе петлевого фильтра ноль, но сигнал на его выходе не равен нулю (интегратор помнит накопленное напряжение). Поэтому наличие интегратора позволяет отслеживать скачки

частоты. Практически же частота «скачет» только в начальный момент времени, а затем непрерывно меняется во времени. Конечно, частота может измениться очень быстро (но непрерывно!), так, что это может восприняться системой почти как скачок.

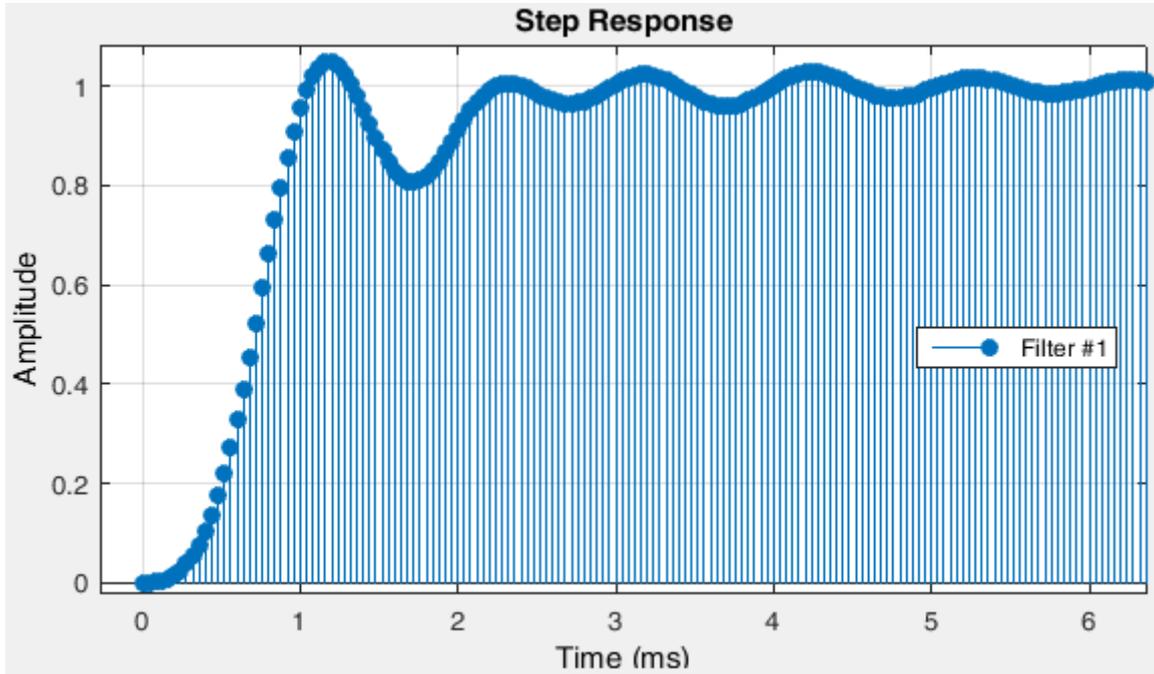
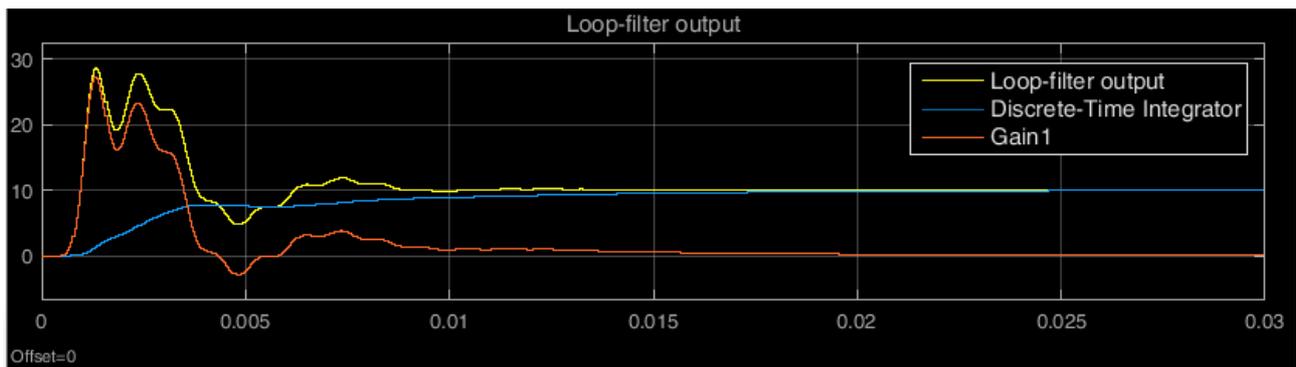


Рис. 22 Переходная характеристика фильтра нижних частот петли Костаса.

Результат выравнивания частоты и фазы показан на рис. 24. Здесь произошёл синфазный захват фазы. Время установления около 2 мс.



Уровни в вольтах, время в секундах.

Рис. 23: Сигналы петлевого фильтра нелинейного контура ФАПЧ с реализуемым ФНЧ

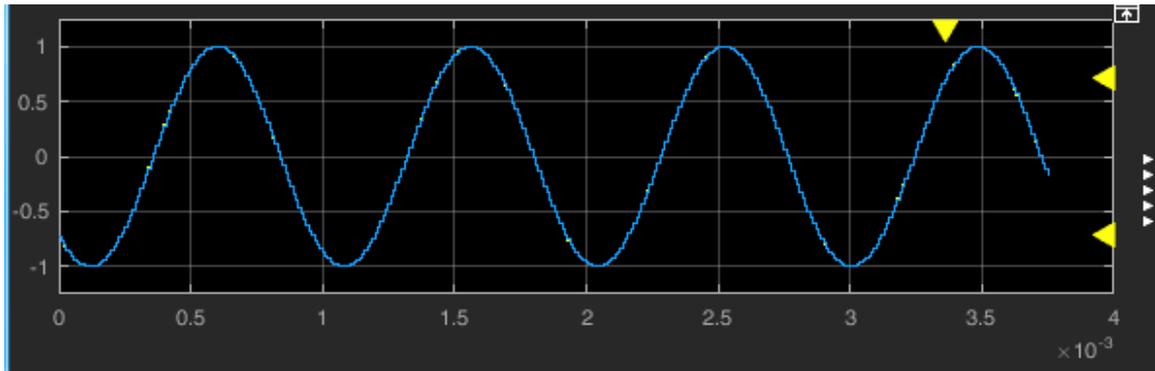


Рис. 24 Результат выравнивания частоты и фазы сигнала с частотой 1 кГц и начальной расстройкой 40 Гц и 0,5 рад.

В системах связи контурами второго порядка и ограничиваются.

Некогерентная демодуляция сигнала с частотной манипуляцией

Частотная манипуляция является нелинейным методом модуляции и содержит в себе много интересных моментов, особенно при демодуляции сигнала. В частности, таким моментом является возможность формирования ЧМ-сигнала с непрерывной фазой. Это ведёт к наличию памяти и возможности когерентной демодуляции с использованием решётки фаз, аналогично декодированию свёрточных кодов по алгоритму Витерби. В добавок ЧМ-сигнал с непрерывной фазой по умолчанию (т. е. без дополнительного фильтра) имеет более компактный спектр²⁴ по сравнению, например, с **BPSK** сигналом. Это связано с отсутствием скачков уровня в квадратурах ЧМ-сигнала.

Частотной манипуляцией называют кодирование потока битов в виде гармонического сигнала с переключением частоты (ЧМ-сигнал), при этом амплитуда сигнала не меняется, а начальная фаза не определена (может быть любой). Слово «кодирование» понимается буквально, так как сейчас при формировании сигналов широко используется техника прямого цифрового синтеза (**DDS, Direct Digital Synthesis**), то есть ЧМ-сигнал сначала формируется в коде, а затем идёт процедура цифро-аналогового преобразования (ЦАП) и полосовая фильтрация.

Фаза ЧМ-сигнала формируется из принципа непрерывности, так как это ослабляет требования к выходному усилителю мощности. Скачки фазы при смене частоты приводят к

²⁴ Под компактностью подразумевается не столько ширина спектра, сколько мера сосредоточенности мощности сигнала в заданном диапазоне частот. Это определяется скоростью убывания мощности с ростом отклонения частоты от центральной.

скачкам в ЧМ-сигнале, которые приводят к более широкому спектру. Соблюдение принципа непрерывности фазы ЧМ-сигнала позволяет сохранить гладкость сигнала при скачкообразном изменении частоты (рис. 25).

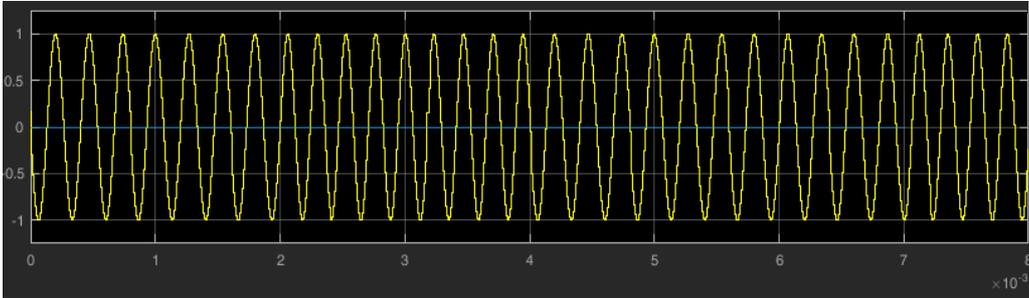


Рис. 25 ЧМ-сигнал с непрерывной фазой и скачкообразным переключением частот: 3,75 кГц и 4,25 кГц.

Длительность символа (бита) на рис. 25 равна 1 мс. Первый импульс имеет 3,75 периодов на символ, то есть частоту 3,75 кГц (допустим, это бит **0**). Второй — аналогично, но начальная фаза у него другая²⁵, а третий — 4,25 периодов, что даёт частоту 4,25 кГц (это бит **1**). ЧМ-сигнал при этом сохраняет непрерывность и декодируется как **00110001**.

Начальная фаза импульса зависит от текущей частоты и от предыдущей фазы, что говорит о наличии памяти в ЧМ-сигнале без разрыва фазы. Кратность $\frac{1}{4}$ ($4,25=4,00+0,25$) даёт четыре начальных фазы, например, 0, 90, 180 и 270 градусов. Число $\frac{1}{4}$ означает четверть окружности, поэтому и шаг кратен 90 градусам; или по-другому: девиация частоты 250 Гц составляет четвертую часть от частоты следования символов 1 кГц.

Демодуляция с учётом памяти возможна лишь при когерентной реализации (то есть при наличии петли ФАПЧ²⁶). Некогерентный демодулятор память не учитывает, так как для этого нужна информация о фазах.

ЧМ-сигнал с центральной несущей частотой f_0 записывается в виде

$$s_{FM}(t) = A \cos \left[2\pi \left(f_0 t + f_d \int_{-\infty}^t s_m(t) dt \right) + \varphi \right], \quad (28)$$

где f_d — частота девиации (на рис. 25 она равна 250 Гц),

$$s_m(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT), \quad |s_m(t)| \leq 1, \quad —$$

25 Проследите это!

26 Фазовая автоподстройка частоты

модулирующий сигнал²⁷, a_n — передаваемые биты в биполярном коде ± 1 ²⁸, $g(t) \geq 0$ — формирующий импульс, отличный от нуля на интервале $0 \leq t < T$. Этот импульс, после интегрирования, отвечает за форму спектра ЧМ-сигнала.

При скачкообразном изменении частоты формирующий импульс является прямоугольным. Именно этот вариант изучается в данной работе. В системе сотовой связи **GSM** формирующий импульс сглаживается гауссовым фильтром, поэтому там частота изменяется не скачкообразно, но достаточно быстро, что позволяет выдержать частотную маску, диктуемую стандартами радиосвязи.

ЧМ-сигнал, генерируемый по (28), является полосовым (**band-pass**). Практически же генерируются лишь квадратуры, то есть эквивалентный низкочастотный сигнал (**baseband**). Выведем практическую формулу для формирования квадратур без разрыва фазы.

Так как формируются лишь квадратуры, то приравняем центральную частоту к нулю $f_0 = 0$ и запишем полную фазу

$$\Theta(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^t \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT) dt + \varphi, \quad (29)$$

после чего дадим правило формирования непрерывной фазы на символьном интервале k

$$\Theta_k(kT + t) = 2\pi f_d \int_0^t a_k g(t) dt + \varphi_{k-1}, \quad 0 \leq t < T, \quad (30)$$

где $\varphi_{k-1} = \Theta_{k-1}(kT)$ — конечная фаза на предыдущем символьном интервале.

Функциональная схема формирования ЧМ-сигнала без разрыва фазы приведена на рис. 26.

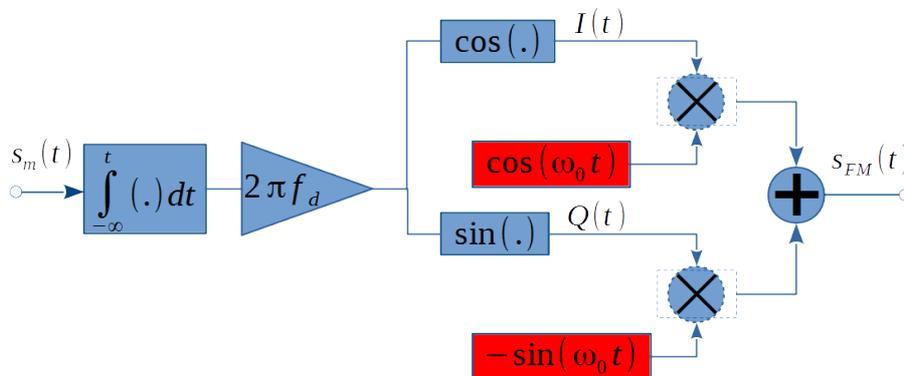


Рис. 26 Функциональная схема формирования ЧМ-сигнала без разрыва фазы.

27 Сигнал с линейной модуляцией. ЧМ-сигнал имеет нелинейную модуляцию.

28 Может рассматриваться не только поток битов ± 1 , но и поток цифр $\pm 1, \pm 3, \dots$

Кодирование битов **00110001** в квадратурах показано на рис. 27 и рис. 28.

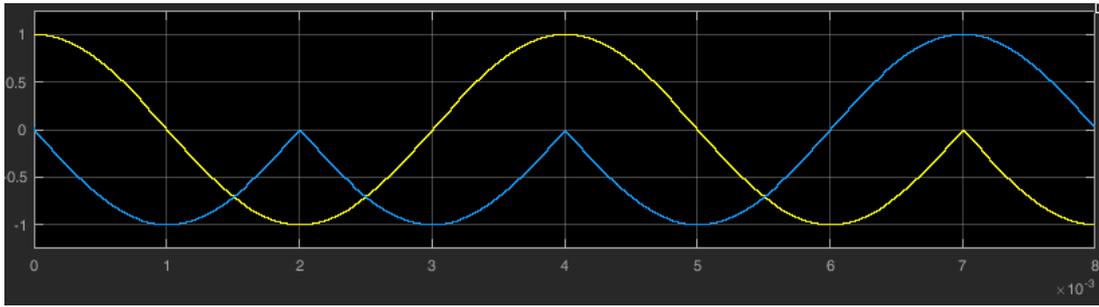


Рис. 27 Квадратуры ЧМ-сигнала, соответствующие рис. 25.

На рис. 28 показан относительный угловой ход вектора в процессе кодирования рассматриваемой битовой последовательности. Начальное состояние вектора $(I, Q) = (1, 0)$. Бит **0** соответствует частоте 3,75 кГц, что ниже центральной частоты 4 кГц, поэтому вращение вектора при бите **0** должно быть приторможено. Вектор с частотой 4 кГц вращается против часовой стрелки (так принято в радиотехнике). На рис. 28 показаны квадратуры, то есть вращения относительно вектора 4 кГц. Торможению соответствует вращение по часовой стрелке, ускорению (бит **1**) — против часовой стрелки.

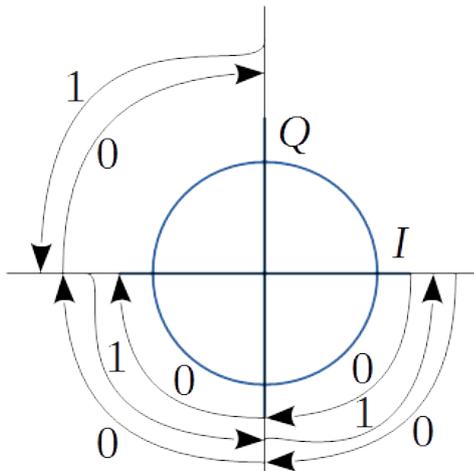


Рис. 28 Квадратуры ЧМ-сигнала, соответствующие рис. 25.

На рис. 27 квадратура I показана жёлтым цветом, Q — синим. После первого бита квадратуры переходят из состояния $(I, Q) = (1, 0)$ в состояние $(I, Q) = (0, -1)$. Отследите этот момент и дальнейшие на обоих рисунках.

Наконец, определим индекс модуляции m — это отношение разности частот к символьной скорости передачи данных. В рассматриваемом варианте индекс равен

$$m = \frac{(4,25 - 3,75) \text{ кГц}}{1 \text{ кГц}} = 0,5 .$$

Оценка среднего спектра мощности ЧМ-сигнала с индексом модуляции $\frac{1}{2}$ дана на рис. 29.

Видно, что уровень первого бокового лепестка составляет -23 дБ. Этот выигрыш достигается за счёт непрерывности фазы. Для сигнала с разрывом фазы уровень первого бокового равен -13 дБ.

Измеренная скорость затухания боковых лепестков составляет 24 дБ/октаву²⁹. Такая

²⁹ Октава — отношение граничных частот диапазона как один к двум. Например, диапазон (6...12) кГц.

скорость соответствует асимптотике спектра мощности $\frac{1}{f^8}$! Это проверяется расчётом

$$10 \lg 2^8 \approx 80 \cdot 0,3 = 24 \text{ дБ.}$$

Спектр мощности ЧМ-сигнала с разрывом фазы соответствует асимптотике $\frac{1}{f^2}$.

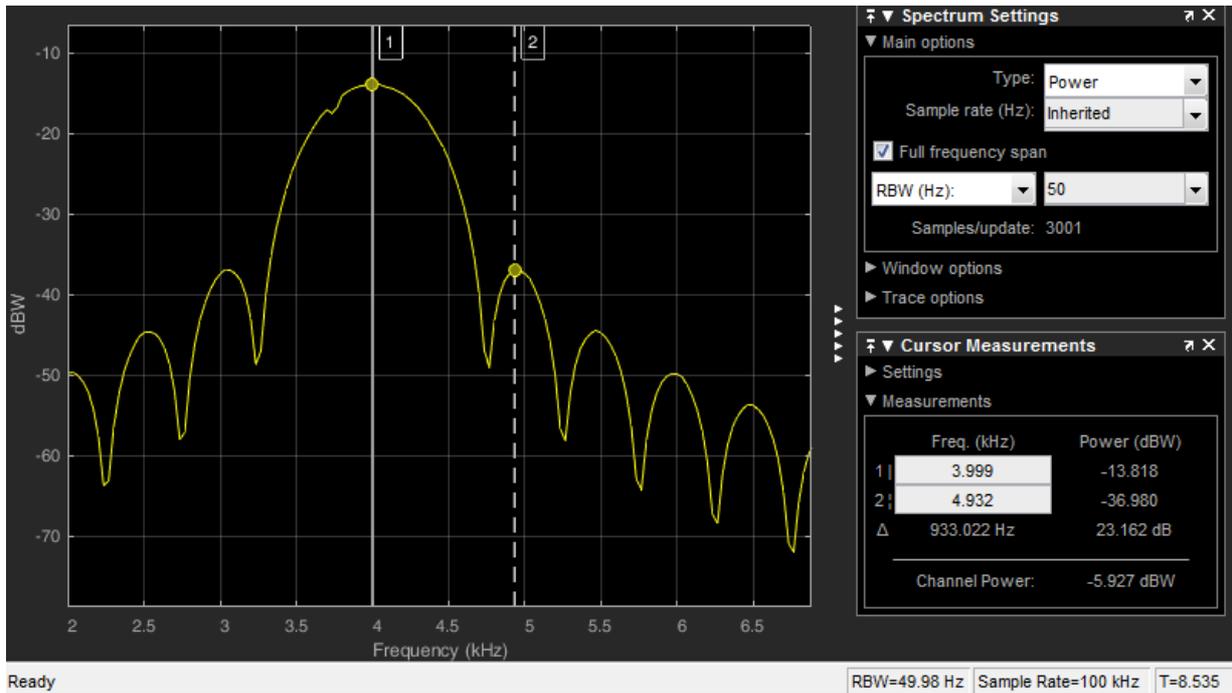


Рис. 29 Оценка среднего спектра мощности ЧМ-сигнала с непрерывной фазой и индексом модуляции $\frac{1}{2}$.

Полоса частот ЧМ-сигнала, определённая по первым нулям, вычисляется по формуле

$$B_0 = 3m/T \quad (31)$$

Индекс модуляции $\frac{1}{2}$ — это минимальный вариант, обеспечивающий ортогональность сигналов, соответствующих биту **0** и **1**. Ортогональность (равенство корреляционного интеграла нулю) важна при когерентной демодуляции, когда есть контроль над начальной фазой генератора опорного колебания в приёмнике. При некогерентном приёме ортогональность не важна — там важен индекс модуляции: чем он больше, тем меньше коэффициент корреляции между сигналами **0** и **1**. Какая при этом у них разность фаз φ — не важно. Для иллюстрации сказанного рассмотрим корреляционный интеграл (нормированный)

$$r_I = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi(f_0 - f_d)t) \cos(2\pi(f_0 + f_d)t + \varphi) dt =$$

$$= \frac{\sin(4\pi f_0 T + \varphi)}{4\pi f_0 T} + \frac{\sin(4\pi f_d T + \varphi)}{4\pi f_d T} = \frac{\sin(2\pi k + \varphi)}{2\pi k} + \frac{\sin(2\pi m + \varphi)}{2\pi m} \quad (32)$$

где $k = 2f_0 T$, в рассматриваемом варианте $k = 8$. Интеграл для квадратуры Q получается дифференцированием (32) по фазе φ

$$r_Q = \frac{dr_I}{d\varphi} = \frac{\cos(2\pi k + \varphi)}{2\pi k} + \frac{\cos(2\pi m + \varphi)}{2\pi m} \quad (33)$$

При некогерентной демодуляции важна общая степень неортогональности, так как такой приёмник содержит устройство вычисления модуля квадратур

$$r = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \quad (34)$$

Мера неортогональности r в зависимости от индекса модуляции отражена на рис. 30. Параметру $k = 100$ соответствует 50 периодов центральной несущей частоты на символьном интервале.

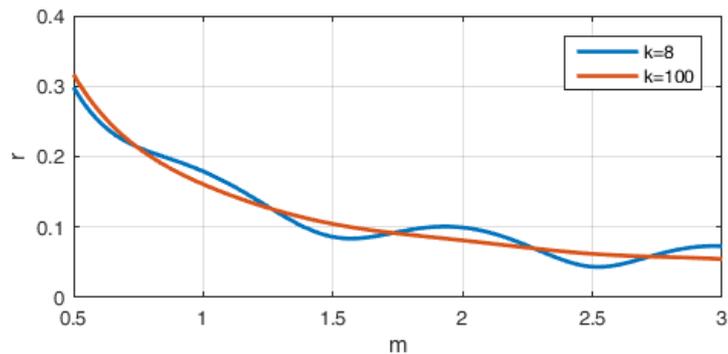


Рис. 30 Мера неортогональности двух ЧМ-сигналов в зависимости от индекса модуляции.

При индексе модуляции $m = 1$ средний спектр мощности ЧМ-сигнала

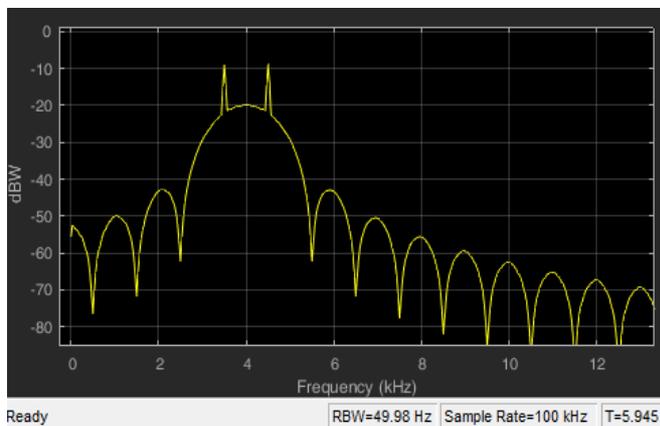


Рис. 31 Средний спектр мощности ЧМ-сигнала при индексе модуляции 1.

содержит особенности в виде игл на частотах модуляции (4500 и 3500 Гц, рис. 31). Это связано с формированием квадратур.

Набег фазы за длительность символа для $m = 1$ равен 180 градусам. Косинус-квадратура I при этом нечувствительна к знаку набег фазы, так как косинус — чётная функция, поэтому как бы биты ни

сочетались, косинус-квадратура никогда не будет иметь изломов — всегда останется гладкой. Синус-квадратура при смене бита будет иметь излом. Чистота косинус-квадратуры и даёт иглы (практическое наблюдение дельта-функции) в спектре на частотах 4500 и 3500 Гц.

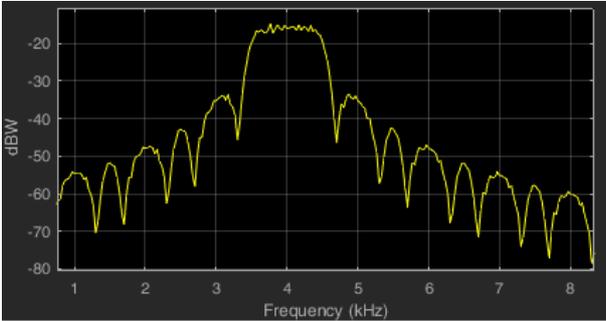


Рис. 32 Средний спектр ЧМ-сигнала при индексе модуляции 0,625.

Чтобы исключить такое доминирование частот, индекс модуляции в данной работе рекомендуется брать 0,625. В этом случае набег фазы за длительность символа равен $5/16$ от длины окружности (от 360 градусов), и даже при неизменных битах фаза последовательно примет все 16 значений (5 и 16 — взаимно простые числа) по закону

$$(5n) \bmod 16 = 0, 5, 10, 15, 4, 9, 14, 3, 8, 13, 2, 7, 12, 1, 6, 11, \dots,$$

что способствует прямоугольности среднего спектра (рис. 32). При этом уровень первого бокового лепестка 18 дБ, а скорость убывания — около 20 дБ/октаву. Пример квадратур показан на рис. 33.

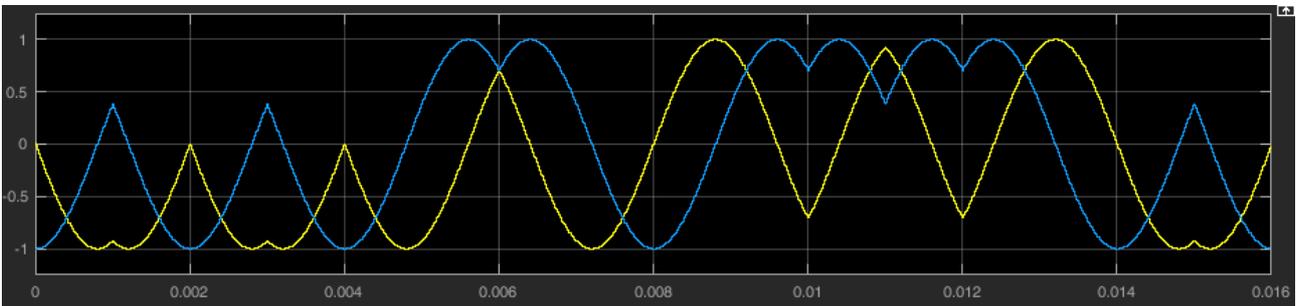


Рис. 33 Квадратуры ЧМ-сигнала с индексом модуляции 0,625. Для 16 символов.

Функциональная схема некогерентного ЧМ-демодулятора показана на рис. 34.

В программно реализованном макете (приложение Б) нет устройства восстановления фазы тактовых импульсов, так как для упрощения моделируется канал с заранее известной задержкой, определяемой постоянной задержкой в фильтрах (в частности, в согласованном фильтре). Фаза выставляется заранее в виде вычисленной константы. Также в макете после фильтра нижних частот (ФНЧ) идёт блок прореживания отсчётов (**downsampling**) для увеличения быстродействия. Отсчётное устройство в макете упрощено до блока прореживания отсчётов с шагом N и заданным смещением (**offset**). Параметр **offset** и есть фаза тактовых импульсов.

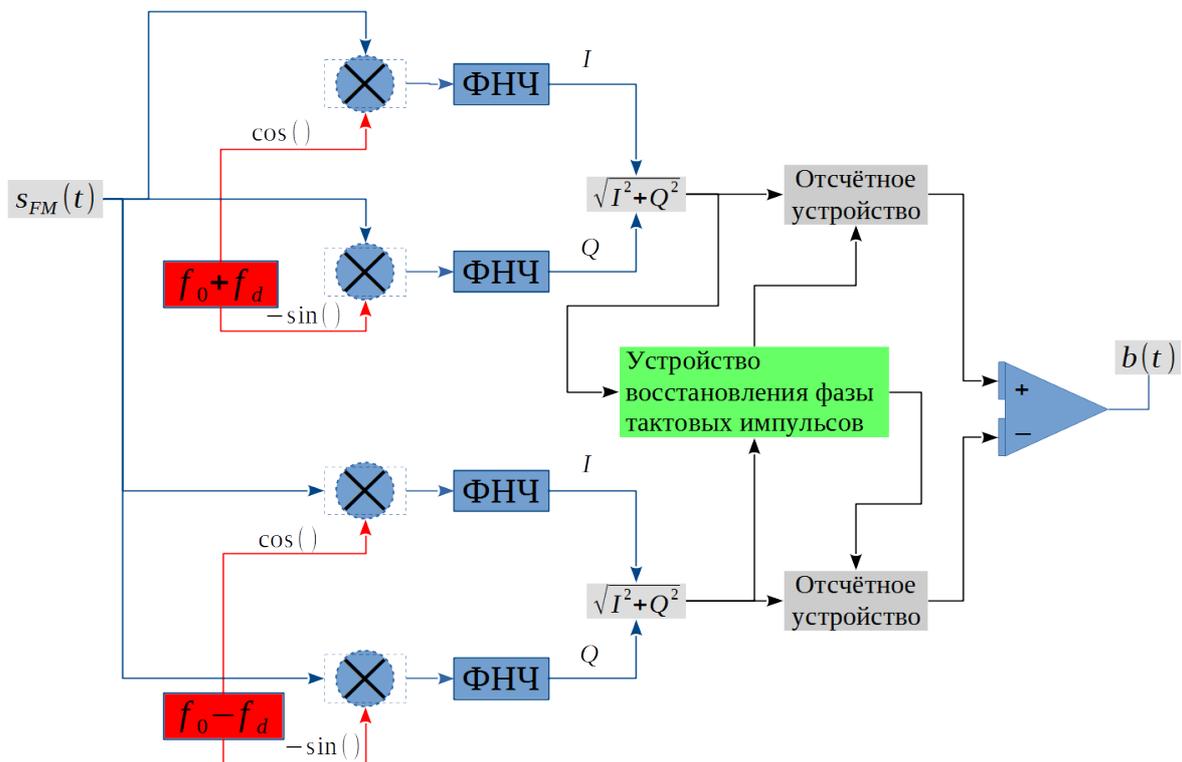


Рис. 34 Функциональная схема некогерентного демодулятора ЧМ-сигнала

ЧМ-сигнал $s_{FM}(t)$ поступает на четыре смесителя (умножителя), на вторые входы которых поступают гармонические опорные сигналы. Верхний канал, имеющий два смесителя, настроен на верхнюю частоту $f_0 + f_d$, нижний — на нижнюю $f_0 - f_d$. Начальные фазы опорных генераторов произвольные, но одинаковые. Сигналы с выхода смесителей поступают на ФНЧ, задача которого — подавить сигнал в окрестности суммарной частоты. После ФНЧ, по-хорошему, должен идти согласованный фильтр; в рассматриваемом варианте фильтр согласован с прямоугольным импульсом. Его задача — максимально ослабить действие теплового шума и сохранить при этом энергию полезного сигнала (максимизировать отношение сигнал-шум на выходе). Далее по квадратурам вычисляется модуль, который поступает на отсчётное устройство, выбирающее отсчёты в моменты времени, задаваемые тактовым генератором, закольцованным петлёй ФАПЧ (устройство восстановления фазы тактовых импульсов). Отсчётное устройство является интерполятором, на один вход которого подаётся отсчитываемый сигнал, а на другой — сигнал, определяющий момент взятия отсчёта относительно длительности символа (это и есть фаза тактовых импульсов). Далее выходы двух отсчётных устройств сравниваются компаратором и выставляется соответствующий бит (**0** или **1**).

ФНЧ в макете спроектирован в виде цифрового КИХ-фильтра с переходной полосой (2500...5000) Гц с подавлением 60 дБ и неравномерностью в полосе пропускания 1 дБ.

Согласованный фильтр, идущий после ФНЧ, является КИХ-фильтром с коэффициентами-константами (согласование с прямоугольным импульсом).

Частота дискретизации для ЧМ-сигнала в макете выбрана равной 100 кГц. После ФНЧ перед согласованным фильтром стоит блок **downsample** с коэффициентом 4, поэтому согласованный фильтр имеет порядок (длину импульсной характеристики КИХ-фильтра)

$$\frac{100 \text{ кГц}}{4 \cdot 1 \text{ кГц}} = 25 \text{ .}$$

Отсчётное устройство делает выборки через каждые 25 отсчётов, но начинает выборку с задаваемого момента времени (согласно фазе тактовых импульсов). Этот момент времени в макете зависит от задержки в ФНЧ, которая равна 44,5 отсчёта или 0,445 мс (рис. 35).

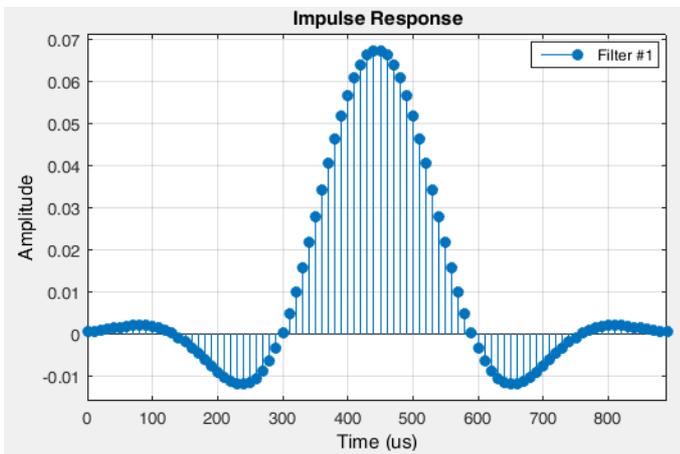


Рис. 35 Импульсная характеристика ФНЧ в некогерентном ЧМ-демодуляторе

В согласованном фильтре сигнал задерживается ровно на длительность символа, поэтому на фазу тактовых импульсов этот фильтр не повлияет. Единственно, это повлияет на процедуру сравнения битов, так как принятые биты будут запаздывать на один такт. Задержка в ФНЧ не кратна длительности символа, поэтому на фазу она повлияет. Так как после ФНЧ стоит блок **downsample**, то длительность символа равна 25 отсчётам,

значит фаза должна быть равна $25 \cdot 0,445 \approx 11$. Фаза округлена до целого числа, так как в макете отсчётное устройство не является интерполятором, определяющим отсчёт, задаваемый **дробным** тактом, по известным соседним отсчётам, находящимся в обычных целых тактах времени. В данном случае такой точности временной синхронизации хватает.

Послесловие

За рамками данного пособия остались схемы автоматической регулировки усиления в приёмнике. Без них работа систем радиосвязи (а тем более мобильных) невозможна, так как мощность принимаемого сигнала изменяется со временем. К этому эффекту приводит многолучевое распространение радиоволн (интерференция), а также прохождение радиоволн через непостоянные объекты, такие как дождь, снег, туман и т. п. Со схемами автоматического регулирования на начальном этапе можно ознакомиться в [2].

Также не рассматривалось влияние фазового шума генераторов и эквалайзеров, корректирующих частотную характеристику линии передачи сигнала (волновод, кабель) или трассы распространения радиоволн.

Качественное усвоения материала требует не только чтения пособия и других книг, но и понимания того, что читаешь. Помимо понимания, требуется самостоятельная работа: проверка формул на бумажке, проверка расчётов, единиц измерения. Особым комплексным эффектом обладает сборка исследуемой модели, например, в **Simulink** и наблюдение за работой модели: изменение параметров и анализ процессов в разных контрольных точках, чтение справки (**help**) к блокам модели, анализ готовых примеров (**examples**).

Важную роль при обучении играет технический английский язык, так как множество статей и справочных материалов дано на английском языке.

Побольше работайте с моделями **Simulink** и осваивайте английские термины!

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Новиков А.В. Демодуляция бинарных цифровых сигналов. Статистический подход: учебное пособие [Электронный ресурс]. —Томск: ТУСУР. —2016. 21 с.

<https://edu.tusur.ru/publications/6059>

2. Боев Н.М. Системы связи. Подвижные системы связи. Лекции: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. — Красноярск: Сиб. федер. Ун-т. —2013. 60 с.

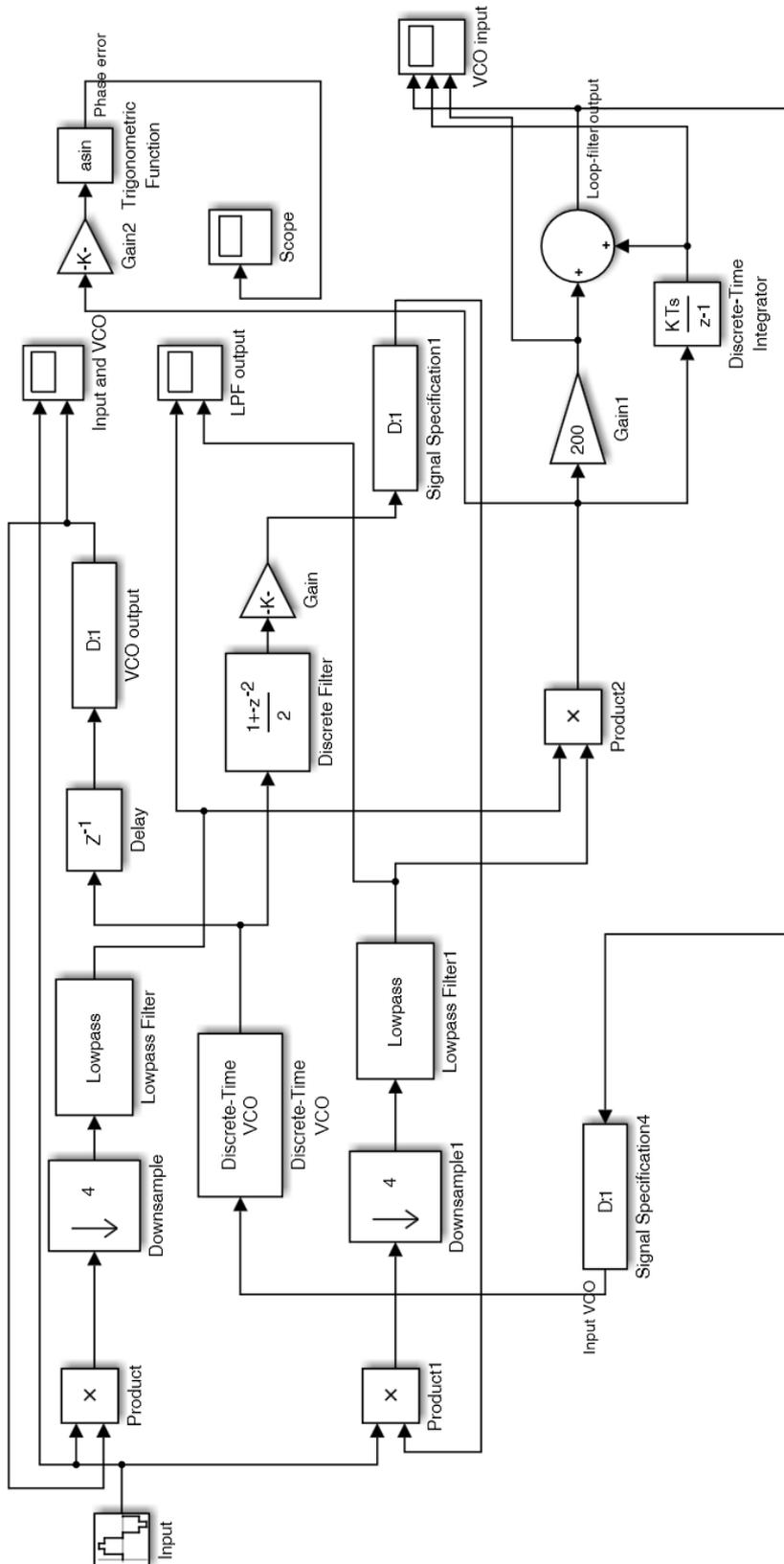
http://radio-systems.org/sites/default/files/files/guidance/Boev-Digital_communications_lectures_2013.pdf

3. Mervi Berner. Timing and carrier recovery. [Электронный ресурс]. — 2005.

http://www.comlab.hut.fi/opetus/333/2004_2005_slides/CarrierTimingRecovery.pdf

4. Michael Rice. Digital Communications. A Discrete-Time Approach. — 2009. (имеется в Интернет в формате pdf на английском языке).

Приложение А. Один из примеров модели петли Костаса в Simulink.



Приложение Б Скрипт примера некогерентной частотной демодуляции на языке GNU Octave

```

Fs = 100000; % sampling frequency, Hz
Tsym = 1.0e-3; % symbol time, s
f0 = 4000; % central frequency, Hz
m = 0.625; % modulation index

% Input bit sequence
inputBits = [1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0];
Nbit = length(inputBits);
% the energy per bit to noise power spectral density ratio
EbNo = 10; % dB

% if less than '2' then random generator is 'off' and use inputBits
Nstat = 10000; % number of statistical tests
% if '1' then 10 bits would be transmitted
% if '2' then 20 bits would be transmitted etc.

% must be true equality 'samplesPerSymbol = downsampleFactor * K';
downsampleFactor = 4; % for example, '100=4*25';

% load the impulse response of the LPF
load('h_lpf.mat');
% see the frequency response by run freqz(h);

% frequency deviation
fd = 0.5*m/Tsym;

samplesPerSymbol = round(Fs*Tsym);
dt = 1/Fs;

K = round(samplesPerSymbol/downsampleFactor);

if (Nstat < 2)
    input = inputBits;
else
    input = (rand(1,Nbit) > 0.5);
end

```

```

% impulse response of the matched filter
h_matched = ones(1, round(samplesPerSymbol/downsampleFactor));
% if matched filter is 'off', then use it
% h_matched = [1];

cpfskRe = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);
cpfskIm = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);
ncoRe = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);
ncoIm = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);
noise = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);

nco0Re = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);
nco0Im = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);

nco1Re = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);
nco1Im = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit);

psdFM = zeros(1, samplesPerSymbol*Nbit/2);

countError = 0;
for stat = 1:Nstat
    phaseOffsetNcoReceiver = rand(1)*2*pi;
    prevPhase = 0;
    prevPhaseNco = 0;
    prevPhaseNco0 = phaseOffsetNcoReceiver;
    prevPhaseNco1 = phaseOffsetNcoReceiver;
    % unipolar or bipolar converter
    input -= 0.5;
    input *= 2.0;

    % CPFSK modulator (baseband)
    time_ = ((1:samplesPerSymbol)-1)*dt;
    for sym=1:Nbit
        phase_ = 2*pi*fd*input(sym)*time_ + prevPhase;
        selectIndex = ((1+(sym-1)*samplesPerSymbol):(sym*samplesPerSymbol));
        cpfskRe(selectIndex) = cos(phase_);
        cpfskIm(selectIndex) = sin(phase_);
        prevPhase = phase_(end);
    if (sym < Nbit)

```

```

    prevPhase += 2*pi*fd*input(sym+1)*dt;
end

phaseNco = 2*pi*f0*time_ + prevPhaseNco;
phaseNco = mod(phaseNco, 2*pi);
ncoRe(selectIndex) = cos(phaseNco);
ncoIm(selectIndex) = -sin(phaseNco);
prevPhaseNco = phaseNco(end) + 2*pi*f0*dt;
end

% IQ-modulator, IF f0
s_FM = cpfskRe.*ncoRe + cpfskIm.*ncoIm;

Ps = var(s_FM); % Power of the FM-signal
varianceNoise = 0.5*Ps*Tsym*Fs*power(10.0, -0.1*EbNo);
noise = randn(1,samplesPerSymbol*Nbit);
noise *= sqrt(varianceNoise);

s_FM += noise;

% FM-demodulator, non-coherent
f_0 = f0 - fd;
f_1 = f0 + fd;
timeReceiver = ((1:samplesPerSymbol*Nbit)-1)*dt;

phaseNco0 = 2*pi*f_0*timeReceiver + prevPhaseNco0;
nco0Re = cos(phaseNco0);
nco0Im = -sin(phaseNco0);
prevPhaseNco0 = phaseNco0(end) + 2*pi*f_0*dt;

phaseNco1 = 2*pi*f_1*timeReceiver + prevPhaseNco1;
nco1Re = cos(phaseNco1);
nco1Im = -sin(phaseNco1);
prevPhaseNco1 = phaseNco1(end) + 2*pi*f_1*dt;

% mixer
mix0Re = nco0Re.*s_FM;
mix0Im = nco0Im.*s_FM;
mix1Re = nco1Re.*s_FM;
mix1Im = nco1Im.*s_FM;

```

```

% LPF
[Lpf0Re, SF1] = filter(h,1,mix0Re);
Lpf0Re = [Lpf0Re, SF1'];
[Lpf0Im, SF2] = filter(h,1,mix0Im);
Lpf0Im = [Lpf0Im, SF2'];
[Lpf1Re, SF3] = filter(h,1,mix1Re);
Lpf1Re = [Lpf1Re, SF3'];
[Lpf1Im, SF4] = filter(h,1,mix1Im);
Lpf1Im = [Lpf1Im, SF4'];

% downsample, downsampleFactor
Lpf0ReDown = Lpf0Re(1:downsampleFactor:end);
Lpf0ImDown = Lpf0Im(1:downsampleFactor:end);
Lpf1ReDown = Lpf1Re(1:downsampleFactor:end);
Lpf1ImDown = Lpf1Im(1:downsampleFactor:end);

% matched filter
[I0, SF5] = filter(h_matched,1, Lpf0ReDown);
I0 = [I0, SF5'];
[Q0, SF6] = filter(h_matched,1, Lpf0ImDown);
Q0 = [Q0, SF6'];
[I1, SF7] = filter(h_matched,1, Lpf1ReDown);
I1 = [I1, SF7'];
[Q1, SF8] = filter(h_matched,1, Lpf1ImDown);
Q1 = [Q1, SF8'];

out0 = hypot(I0, Q0);
out1 = hypot(I1, Q1);

% downsample with offset, 25
[mm, ii] = max(h);
offset = mod(round(K*(ii-1)*dt/Tsym), K);
Detector0 = out0((offset+1):K:end);
Detector1 = out1((offset+1):K:end);

demodulatedBits = logical(Detector1 > Detector0); % hard demodulator
bitsDelay = floor( length(h_matched)/K + (ii-1)*dt/Tsym );
demodulatedBits = demodulatedBits((bitsDelay+1):end);
demodulatedBits = demodulatedBits(1:Nbit);

```

```

error = xor(demodulatedBits, logical(input > 0));
countError += sum(error);

% PSD estimation of the FM-signal
tmpPsd = ifft(s_FM.*hann(length(s_FM))); % use Hanning window
%tmpPsd = ifft(s_FM);
tmpPsd = tmpPsd(1:end/2);
tmpPsd = tmpPsd.*conj(tmpPsd);
psdFM += real(tmpPsd);

fontSize = 12;
if (Nstat < 2)
    tt_ = ((1:length(s_FM))-1)*dt/Tsym;
    h1 = figure(1);
    plot(tt_, cpfskRe, 'linewidth',2, tt_, cpfskIm, 'linewidth',2);
    title(['Quadratures of the FM-signal, modulation index m = ', num2str(m)], 'FontSize',fontSize);
    legend('I','Q');
    xlabel('Time, in Symbol Time T_s','FontSize',fontSize);
    grid on;
    set(gca,'FontSize',fontSize);
    set(gca, 'xtick',[0:max(tt_)]);
    h2 = figure(2);
    plot(tt_, s_FM);
    title(['FM-signal, E_b / N_0 = ', num2str(EbNo), ' dB'], 'FontSize',fontSize);
    xlabel('Time, in Symbol Time T_s','FontSize',fontSize);
    grid on;
    set(gca,'FontSize',fontSize);
    set(gca, 'xtick',[0:max(tt_)]);
    ff_ = ((1:length(s_FM))-1)*(1/(dt*Nbit*samplesPerSymbol));
    ff_ = ff_(1:length(psdFM))*1e-3;
    h3 = figure(3);
    plot(ff_, 10*log10(psdFM), 'linewidth',1.5);
    title(['PSD of the FM-signal; Nstat=', num2str(Nstat)], 'FontSize',fontSize);
    xlabel('Frequency, kHz','FontSize',fontSize);
    ylabel('dB','FontSize',fontSize);
    grid on;
    set(gca,'FontSize',fontSize);
end
% for next iteration

```

```

if ((Nstat > 1)&&(stat<Nstat))
    input = (rand(1,Nbit) > 0.5);
end
end

bitErrorRate = countError / Nstat / Nbit;

disp('Symbol Error Rate = '), disp(bitErrorRate);

if (Nstat > 1)
    tt_ = ((1:length(s_FM))-1)*dt/Tsym;
    h1 = figure(1);
    plot(tt_, cpfskRe, 'linewidth',2, tt_, cpfskIm, 'linewidth',2);
    title(['Quadratures of the FM-signal, modulation index m = ', num2str(m)],'FontSize',fontSize);
    legend('I','Q');
    xlabel('Time, in Symbol Time T_s','FontSize',fontSize);
    grid on;
    set(gca,'FontSize',fontSize);
    set(gca, 'xtick',[0:max(tt_)]);
    h2 = figure(2);
    plot(tt_, s_FM);
    title(['FM-signal, E_b / N_0 = ', num2str(EbNo), ' dB'],'FontSize',fontSize);
    xlabel('Time, in Symbol Time T_s','FontSize',fontSize);
    grid on;
    set(gca,'FontSize',fontSize);
    set(gca, 'xtick',[0:max(tt_)]);
    psdFM /= (Nstat-1);
    ff_ = ((1:length(s_FM))-1)*(1/(dt*Nbit*samplesPerSymbol));
    ff_ = ff_(1:length(psdFM))*1e-3;
    h3 = figure(3);
    plot(ff_, 10*log10(psdFM), 'linewidth',1.5);
    title(['PSD of the FM-signal; Nstat=',num2str(Nstat)],'FontSize',fontSize);
    xlabel('Frequency, kHz','FontSize',fontSize);
    ylabel('dB','FontSize',fontSize);
    grid on;
    set(gca,'FontSize',fontSize);
end

```

Коэффициенты ФНЧ из файла **h_lpf.mat** должны быть следующими:

0,000766856116713593

0,000661070054618256

0,000904909412053124

0,00117013265847672

0,00144182277604072

0,00170104187379724

0,00192363026053967

0,00208468184622688

0,00215349541655162

0,00210327298619024

0,00190595134749001

0,00153726989923733

0,000980566437216669

0,000225981926117974

-0,000726103030308810

-0,00186354404540249

-0,00315979935851711

-0,00457512925660501

-0,00605622597334895

-0,00753571777791833

-0,00893480200828234

-0,0101652801753399

-0,0111332096519105

-0,0117423993209303

-0,0118988444927155

-0,0115153136630337

-0,0105159260990790

-0,00884158690121110

-0,00645370119847934

-0,00333760310574041

0,000494652259998839

0,00500250232971594

0,0101163997222943

0,0157390263610447
0,0217472855841932
0,0279960637849049
0,0343230291676966
0,0405542207349905
0,0465105349633376
0,0520145142453871
0,0568974885487292
0,0610064145881110
0,0642103606946089
0,0664060868887907
0,0675221974041872
0,0675221974041872
0,0664060868887907
0,0642103606946089
0,0610064145881110
0,0568974885487292
0,0520145142453871
0,0465105349633376
0,0405542207349905
0,0343230291676966
0,0279960637849049
0,0217472855841932
0,0157390263610447
0,0101163997222943
0,00500250232971594
0,000494652259998839
-0,00333760310574041
-0,00645370119847934
-0,00884158690121110
-0,0105159260990790
-0,0115153136630337
-0,0118988444927155
-0,0117423993209303

-0,0111332096519105
-0,0101652801753399
-0,00893480200828234
-0,00753571777791833
-0,00605622597334895
-0,00457512925660501
-0,00315979935851711
-0,00186354404540249
-0,000726103030308810
0,000225981926117974
0,000980566437216669
0,00153726989923733
0,00190595134749001
0,00210327298619024
0,00215349541655162
0,00208468184622688
0,00192363026053967
0,00170104187379724
0,00144182277604072
0,00117013265847672
0,000904909412053124
0,000661070054618256
0,000766856116713593