

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ  
( ТУСУР )**

**Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники  
( СВЧ и КР )**

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

**2011**

**Министерство образования и науки РФ**

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ  
( ТУСУР )**

**Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники  
( СВЧ и КР )**

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ С. Н. Шарангович

**Методы математической физики**

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

*Методические указания к компьютерной лабораторной работе  
для студентов специальности  
210401 – Физика и техника оптической связи*

**Разработчик**  
профессор кафедры СВЧ и КР  
\_\_\_\_\_ Г. Г. Гошин  
**Программное обеспечение**  
студент гр. 43-в Д. А. Заев

**2011**

## Содержание

1. Введение.....	3
2. Цель работы.....	3
3. Основные теоретические сведения.....	3
3.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.....	3
3.2. Решение задачи для уравнения параболического типа.....	5
3.3. Решение задачи для уравнения гиперболического типа.....	6
3.4. Вид аналитических решений.....	8
4. Описание интерфейса и методика работы с программой.....	8
5. Задания и рекомендации по выполнению работы.....	9
5.1. Уравнение гиперболического типа.....	10
5.2. Уравнение параболического типа.....	10
5.3. Уравнение эллиптического типа.....	11
6. Рекомендации по оформлению отчета.....	11
7. Контрольные вопросы.....	12
8. Рекомендуемая литература.....	12

## 1. Введение

Решение задач математической физики на ЭВМ обычно сводится к составлению систем алгебраических уравнений той или иной структуры и их последующему решению [1] – [6]. При построении алгебраических уравнений необходимо знать, к какому классу функций принадлежит решение задачи, свойства операторов задачи, свойства входных данных и т.д. Свойства операторов дифференциальных уравнений должны быть, по возможности, сохранены при переходе от функций непрерывных аргументов к дискретным. Именно так, например, осуществляется переход от уравнений с частными производными к системе алгебраических уравнений в методе конечных разностей.

В лабораторной работе рассматриваются уравнения математической физики в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, которые решаются численно с помощью метода конечных разностей. Полученные результаты в частных случаях сравниваются с расчетами, выполненными по известным аналитическим формулам.

Впервые данная работа в ТУСУР была поставлена в 2000г. и тогда же были изданы к ней методические указания. В новое издание методических указаний внесены исправления и уточнения, учитывающие накопленный опыт проведения лабораторной работы.

## 2. Цель работы

Целью работы является: закрепление лекционного материала по краевым задачам математической физики, ознакомление с методом конечных разностей численного решения этих задач, а также развитие навыков физической интерпретации полученных результатов.

## 3. Основные теоретические сведения

### 3.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Необходимо найти непрерывную функцию  $U(x, y)$ , удовлетворяющую внутри прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

и принимающую на границе области  $\Omega$  заданные значения:

$$\begin{aligned} U(0, y) = f_1(y) \equiv 0, \quad y \in [0, b]; \quad U(a, y) = f_2(y) \equiv 0, \quad y \in [0, b]; \\ U(x, 0) = f_3(x) \equiv 0, \quad x \in [0, a]; \quad U(x, b) = f_4(x), \quad x \in [0, a], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f_4(x) = \begin{cases} U = const, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]. \end{cases}$

Функция  $U(x, y)$  описывает распределение электрического потенциала в прямоугольной области, являющейся поперечным сечением прямоугольной полости, стенки которой кроме верхней заземлены, а на верхней стенке расположен изолированный электрод с приложенным к нему постоянным напряжением.

Выбрав по обоим направлениям одинаковый шаг  $h$ , строим сетку  $x_i = i \cdot h$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $y_j = j \cdot h$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Вводя обозначения  $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$ , аппроксимируем частные производные в каждом внутреннем узле сетки центральными разностными производными второго порядка и заменим уравнение Лапласа системой конечно-разностных уравнений

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}). \quad (3)$$

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным составляет величину  $O(h^2)$ . При получении сеточных уравнений (3) была использована схема узлов, изображенная на рис.1 (шаблон типа “крест”). Система называется

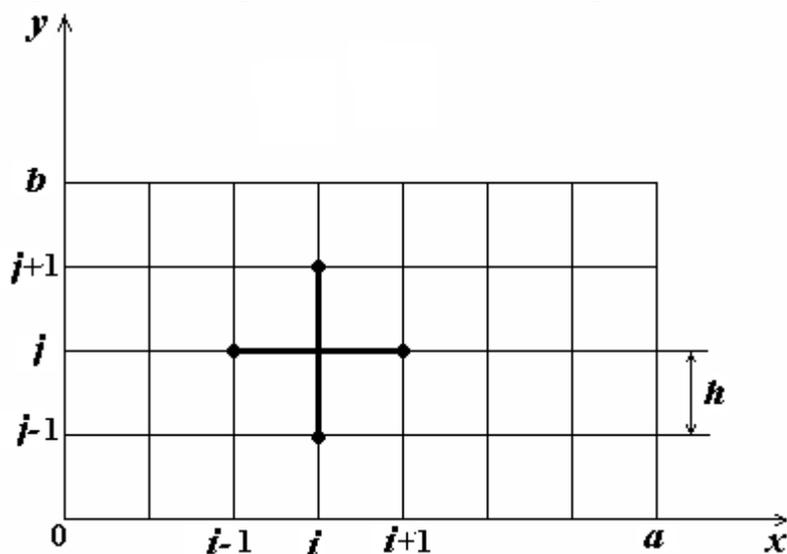


Рис. 1. Четырехточечная схема для уравнения Лапласа

неявной, так как не позволяет в явном виде выразить  $U_{i,j}$  через значения функции на предыдущих слоях.

Численное решение задачи Дирихле состоит в нахождении приближенных значений  $U_{i,j}$  искомой функции  $U(x, y)$  во внутренних узлах сетки. Для этого нужно решить систему линейных алгебраических уравнений (3). В данном случае система решается итерационным методом Гаусса-Зейделя [4], который состоит в построении последовательности вида:

$$U_{i,j}^{s+1} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{s+1} + U_{i+1,j}^s + U_{i,j+1}^s + U_{i,j-1}^s), \quad (4)$$

где верхним индексом  $s$  обозначен номер итерации. При  $s \rightarrow \infty$  последовательность  $U_{i,j}^s$  сходится к точному решению системы (3). В качестве условия окончания итерационного процесса можно принять

$$\max \left| \left( U_{i,j}^s - U_{i,j}^{s+1} \right) / U_{i,j}^s \right| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – заданная величина, на которую могут отличаться  $U_{i,j}^s$  и  $U_{i,j}^{s+1}$ .

Таким образом, погрешность решения численным методом задачи (1) складывается из двух погрешностей: погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным и погрешности из-за приближенного решения системы (3). Полученная разностная схема *обладает устойчивостью*, т.е. малые отклонения начальных данных приводят к малым изменениям решения задачи.

### 3.2. Решение задачи для уравнения параболического типа

Рассмотрим задачу для однородного уравнения теплопроводности. Задача состоит в отыскании функции  $U(x,t)$ , удовлетворяющей в области  $D = \{ (x,t) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T \}$  уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} - K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad K = \text{const} > 0, \quad (6)$$

начальному условию

$$U(x,0) = f(x) \quad (7)$$

и граничным условиям первого рода

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(L,t) = \mu_2(t), \quad (8)$$

где  $K = \sqrt{k/c\rho}$  – коэффициент температуропроводности,

$k$  – коэффициент внутренней теплопроводности,

$c$  – удельная теплоёмкость,

$\rho$  – плотность стержня.

К задаче (6) – (8) приводит, в частности, задача о распределении тепла в однородном стержне длиной  $L$ , на торцах которого заданы некоторые значения температуры; боковая поверхность стержня считается теплоизолированной. Построим в области  $D$  равномерную прямоугольную сетку с шагом  $h$  в направлении оси  $x$  и шагом  $\tau$  в направлении оси  $t$  (рис. 2).

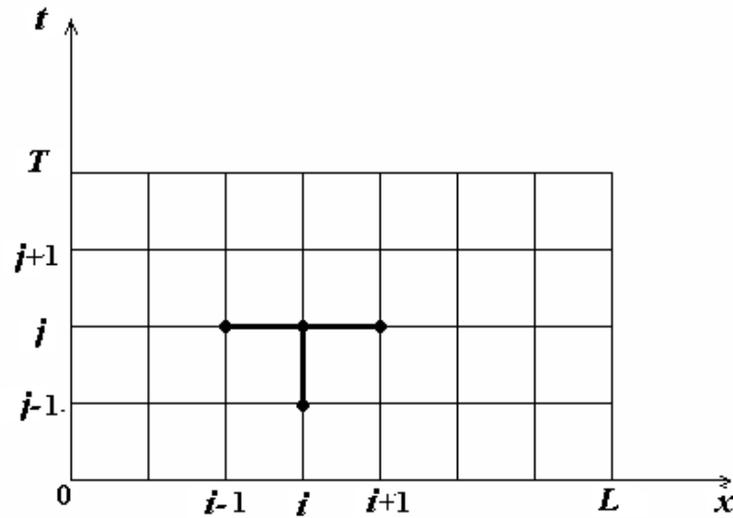


Рис. 2. Четырехточечная схема для уравнения теплопроводности

Обозначим узлы сетки через  $(x_1, t_1), \dots, (x_i, t_j), \dots$ , а приближенные значения функции  $U(x, t)$  в этих узлах как  $U_{i,j}$ . Тогда

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad h = L/n;$$

$$t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \tau = T/m.$$

Аппроксимируем уравнение (6) на четырехточечном шаблоне, который изображен на рис. 2 жирными линиями. В результате получим *явную* схему

$$\lambda U_{i+1,j} - (1 + 2\lambda)U_{i,j} + \lambda U_{i-1,j} = -U_{i,j-1}, \quad (9)$$

где  $\lambda = \tau K^2 / h^2$ .

Разностная схема (9) аппроксимирует уравнение (6) с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ . Число уравнений в (9) меньше числа неизвестных  $U_{i,j}$ . Недостающие уравнения получают из краевых условий

$$U_{0,j} = \mu_1(t_j), \quad U_{k,j} = \mu_2(t_j). \quad (10)$$

Для решения системы линейных уравнений (9) рациональнее всего применить метод прогонки [4]. Алгоритм численного решения задачи имеет следующий вид: на нулевом слое ( $j=0$ ) решение известно из начального условия  $U_{i,0} = f(x_i)$ ; на каждом последующем слое искомая функция определяется как решение системы (9), (10). Разностная схема (9) *устойчива* при любых значениях параметра

$$\lambda = \tau K^2 / h^2 > 0. \quad (11)$$

Схема обладает сходимостью. Это означает, что при  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$  решение дискретной задачи стремится к точному решению непрерывной задачи (6) – (8).

### 3.3. Решение задачи для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим задачу для однородного уравнения колебаний струны. Необходимо найти функцию  $U(x, t)$ , описывающую смещение точек струны и удовлетворяющую при  $\tau > 0$  уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

начальным условиям

$$U(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = V(x) \quad \text{при } t=0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (13)$$

и граничным условиям

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(L,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14)$$

где  $C = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$  – коэффициент, характеризующий скорость распространения колебательного процесса;

$T_0 = const$  – сила натяжения струны;

$\rho = const$  – плотность струны.

В (13) функции  $f(x)$  и  $V(x)$  описывают начальное воздействие на струну:  $f(x)$  определяет начальное положение точек струны относительно оси  $x$ , а  $V(x)$  – начальную скорость смещения точек струны, например в результате удара.

Для построения разностной схемы задачи (12) – (14) зададим в области  $D = \{(x,t) \mid 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T\}$  сетку

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+1; \quad L = h \cdot (n+1);$$

$$t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m; \quad T = m \cdot \tau$$

и аппроксимируем уравнение (12) в каждом внутреннем узле на шаблоне типа “крест” (рис. 3).

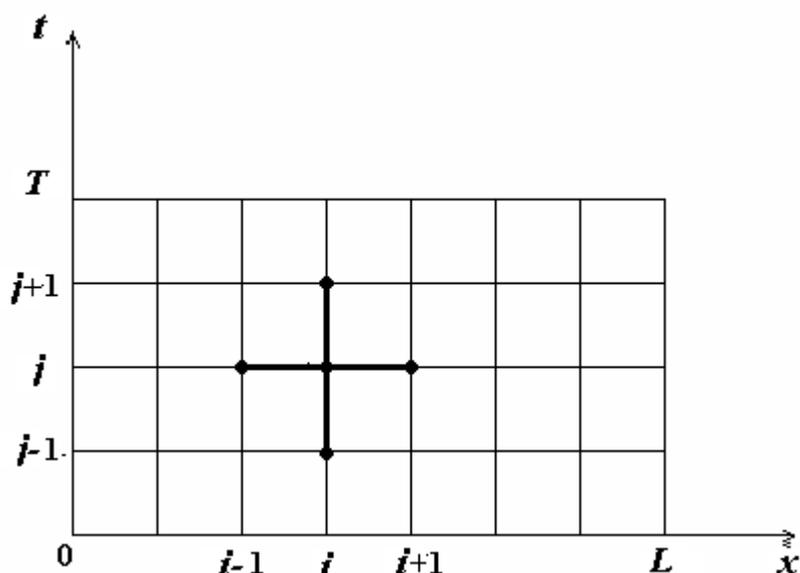


Рис. 3. Четырехточечная схема для уравнения колебаний струны

Используя для аппроксимации частных производных центральные разностные производные, приходим к уравнению

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\tau^2} = C^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (15)$$

где  $U_{i,j}$  – приближенное значение функции  $U(x,t)$  в узле  $(x_i, t_j)$ . Полагая  $\lambda = \tau \cdot C/h$ , получаем трехслойную разностную схему

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_{i,j} + \lambda^2(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

В данной работе выберем нулевые граничные условия, т.е. считаем, что концы струны закреплены и тогда  $\mu_1(t) \equiv 0$ ,  $\mu_2(t) \equiv 0$ . Это означает, что в (16)  $U_{0,j} = 0, U_{k,j} = 0$  для всех  $j$ . Разностная схема (16) *явная*, т.е. позволяет в явном виде выразить  $U_{i,j}$  через значения функции на предыдущих слоях. Описанная схема аппроксимирует непрерывную задачу (12) – (14) с точностью  $O(\tau + h^2)$ . Схема *устойчива*, если выполнено условие Куранта [4]

$$\tau \cdot C \leq h. \quad (17)$$

При выполнении этого условия малые погрешности, возникающие, например, при вычислении решения на первом слое, не будут неограниченно возрастать при переходе к каждому новому слою. Если выполняется условие Куранта, то схема обладает также *равномерной сходимостью*, т.е. при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  решение разностной задачи равномерно стремится к решению задачи (12) – (14). Как видно из (12) и (17),  $C$  имеет размерность скорости, т.е. описывает скорость распространения колебательного процесса.

### 3.4. Вид аналитических решений

Аналитические решения известны для весьма ограниченного круга задач. Обычно они находятся методом разделения переменных [6].

Решение задачи для уравнения Лапласа в случае, когда электрод занимает всю верхнюю стенку полости, имеет вид [5]

$$U(x, y) = \frac{4}{\pi} U_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\frac{\pi x}{a}] \cdot \text{sh}[(2n+1)\frac{\pi y}{a}]}{(2n+1)\text{sh}[(2n+1)\frac{\pi b}{a}]}, \quad (18)$$

где  $U_0 = \text{const}$  – напряжение на электроде.

Решение задачи о распространении тепла в стержне длиной  $L$ , на концах которого поддерживаются заданные постоянные значения температуры  $T_1$  и  $T_2$ , а начальная температура самого стержня  $T_0 = 0$ , имеет вид [6]

$$T(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n T_2 - T_1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (19)$$

Формула записана при  $K = 1$ .

Следует заметить, что выписанные формулы представляют собой ряды Фурье с бесконечными верхними пределами, область сходимости которых зависит от значений входящих в них параметров и переменных. Поэтому их суммирование также выполняется с некоторой погрешностью.

#### 4. Описание интерфейса и методика работы с программой

Программа имеет стандартный интерфейс – есть главное меню и “быстрые кнопки” с подсказками. Размеры главного окна программы можно изменять, т.е. минимизировать или раскрыть на весь экран. Главное окно содержит “Рисунок” – компонент, в котором происходит построение всех графиков, и четыре таблицы. Границу между рисунком и таблицами можно передвигать влево или вправо, подведя курсор “мыши” к границе и нажав левую кнопку.

В первую таблицу заносятся результаты решения задач численным методом. В некоторых частных случаях известны аналитические решения задач. Расчеты по ним заносятся во вторую таблицу. Относительная погрешность, вычисленная по формуле

$$(f_a - f_u) / f_a, \quad (20)$$

вносится программой в третью таблицу, которая прежде должна быть активизирована соответствующей кнопкой. Четвертая таблица вспомогательная и служит для накопления любых данных с последующей возможностью построения по ним графика. Эти данные могут браться из предыдущих таблиц. В (20) индексы указывают на принадлежность к аналитическому или численному решению.

Если какая-либо таблица заполнена, то для того, чтобы построить график, нужно выбрать соответствующую строку в таблице параметров задачи, подвести курсор “мыши” к первой колонке и нажать левую кнопку. При этом в список параметров графика (находится справа от координатной сетки) помещается содержимое ячейки первой колонки для выбранной строки и строится график. Для быстрого просмотра графиков предназначена крайняя правая кнопка. Кнопка “Рисунок” дает возможность построения трехмерных (3D) графиков с возможностью выбора нужного ракурса. Если курсор “мыши” поставить на график, нажать левую кнопку и повести вниз, то можно просмотреть выделенную часть графика в увеличенном виде. Возвращение в исходное состояние – нажать левую кнопку и повести вверх.

Для того, чтобы очистить рисунок, нужно выбрать в главном меню “Вид/Очистить рисунок” или воспользоваться соответствующей кнопкой. Построенный график можно вывести на печать (команда главного меню “Вид/Вывести рисунок на печать”) или скопировать в буфер (“Вид/Копировать в буфер”) и затем вставить его в текст в редакторе Word. Для выполнения команд также можно воспользоваться “быстрыми кнопками”.

#### 5. Задания и рекомендации по выполнению работы

Варианты задания для каждого типа уравнений представлены в таблицах. В них содержатся значения параметров, входящих в уравнения, в граничные и начальные условия, а также размеры шагов сетки. Далее следуют сами задания.

Для того чтобы выполнить вариант задания, нужно:

- выбрать в главном меню "Уравнение" и соответствующий вид уравнения или воспользоваться кнопками;
- в появившемся окне задать необходимые параметры, соответствующие варианту задания; если указаний нет, то оставить по умолчанию;
- установить переключатели "Выполнить аналитическое решение", "Выполнить численное решение" в нужные положения и не требовать "Выполнить аналитическое решение", если оно отсутствует;
- нажать кнопку "ОК", если вы хотите провести расчет для введенных параметров. Нажать кнопку "Отмена", если нужно закрыть окно и не проводить вычисления;
- для построения графиков нажать в соответствующих таблицах кнопки с выбранными значениями параметров. С целью отбора графиков и получения информации о динамике процессов рекомендуется пользоваться кнопкой быстрого просмотра. Окончательное формирование графиков для представления в отчет следует проводить с использованием 3D-графики;
- выбрать в меню "Таблица/Вычислить относительную погрешность" или нажать соответствующую кнопку, если необходимо вычислить погрешность;
- повторить все предыдущие пункты для других типов уравнений.

### 5.1. Уравнение гиперболического типа

Таблица 1.

Параметры	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L$ , м	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5
$h_x$ , м	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05
$h_t$ , с	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05

Решение уравнения выполнять численным методом.

1. Выбрать  $T = 5$ ;  $C = 1$ ;  $A = 20$ . Последовательно задавая  $n = 1, 2, 3$ , описать процесс распространения волн отклонения вдоль струны.

2. Выбрать  $A = 20$ ;  $C = 1$ ;  $(x_2 - x_1) = 0,1)L$ . Последовательно задавая  $x_1 = (0; 0,1; 0,5)L$ , описать процесс распространения вдоль струны образующейся в результате удара волны импульса, в зависимости от трех указанных положений интервала воздействия (места удара). Время  $T$  выбрать достаточным для наблюдения и понимания физики процесса ( $T = 10 \dots 20$ ).

3. В случае волн отклонения при  $n = 2$  выявить зависимость амплитуды колебательного процесса от параметра  $C$ , принимающего значения  $C = 0,2; 0,5; 1,0; 1,2$ . Определить критические значения  $C_{кр} > C$ , начиная с которых наблюдаются "аномалии". Объяснить их.

## 5.2. Уравнение параболического типа

Таблица 2.

Параметры	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L, \text{ м}$	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
$T_1, ^\circ\text{C}$	10	10	10	-10	-10	-10	10	10	5	-5
$T_2, ^\circ\text{C}$	-10	-5	0	10	5	0	5	-10	10	-10

1. Для  $K = 1$  и разных моментов времени на одном рисунке построить графики распределения температуры вдоль стержня, включая установившийся режим.

2. Задать  $h_x = 0,1$ . Оценить время установления ожидаемого линейного распределения температуры в стержне в зависимости от параметра  $K$ , принимающего значения  $K = 0,2; 0,6; 1,0; 1,5; 2,0$ . Построить график.

3. Построить и сравнить графики, полученные численным методом, и выполненными программой расчетами по формуле (19), описывающей аналитическое решение при  $K = 1$  и  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . Сделать выводы о характере зависимостей. Объяснить их поведение, анализируя распределения температуры для численного и аналитического решений.

## 5.3. Уравнение эллиптического типа

Таблица 3.

Параметры	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, \text{ м}$	1	1,5	2	1	1	2	1,5	2	1	1
$b, \text{ м}$	1	1	1	1,5	2	2	1	1	1,5	2
$U, \text{ В}$	10	10	10	10	10	50	50	50	50	50

1. В окне метода Гаусса-Зейделя установить погрешность  $10^{-3}$ .

2. Построить и сравнить графики, полученные численным методом, и выполненными программой расчетами по формуле (18), описывающей аналитическое решение при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a$ . Сделать выводы о характере зависимостей. Объяснить их поведение, анализируя распределения потенциала для численного и аналитического решений.

3. В случае численного решения при заданных в таблице параметрах для двух случаев  $h_x = 0,05$ ,  $x_1 = 0,1a$ ,  $x_2 = 0,2a$  и  $h_x = 0,05$ ,  $x_1 = 0,5a$ ,  $x_2 = 0,8a$  занести в “Рисунок” пошаговые графики распределения потенциала. Объяснить получающуюся асимметрию распределения.

## 6. Рекомендации по оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен иметь титульный лист и содержать следующие данные:

- номера вариантов задания и выбранные параметры;
- результаты решения задач в графическом виде, характеризующие рассматриваемые процессы;
- сравнение в частных случаях численного решения с решением аналитическим;
- пример неустойчивого решения уравнения гиперболического типа;
- физическая интерпретация результатов с описанием влияния параметров на характеристики процессов;
- выводы по существу проделанной работы, а не перечисление выполненных операций.

Отчет должен быть представлен в виде распечатки и текстового файла.

## 7. Контрольные вопросы

1. Запишите основные типы уравнений в частных производных второго порядка и назовите процессы, описываемые этими уравнениями.

2. В чем заключается постановка краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка?

3. Каким образом происходит переход от функций непрерывных аргументов к функциям дискретных аргументов?

4. Дайте определение явной и неявной разностных схем.

5. Дайте определение устойчивой и неустойчивой разностных схем. Запишите условие Куранта.

6. Ваши суждения по поводу ожидаемого поведения решений, описывающих исследуемые процессы: распределение электрического потенциала в прямоугольной области, установление температурного режима в стержне, колебания струн при двух возможных видах воздействия.

## 8. Рекомендуемая литература

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: ВШ, 2002. – 840 с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2005. – 288с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432с.
4. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике. – М.: ВШ, 1983. – 208с.
5. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ. – Томск: Раско, 1991. – 272с.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б. и др. Уравнения математической физики в частных производных. – М.: ВШ, 1970. – 712с.