Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное учреждение
высшего образования
**«Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники» (ТУСУР)**

Кафедра автоматизации обработки информации

Н.Ю. Салмина

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

2016

Салмина Н.Ю.

Моделирование социально-экономических систем и процессов. Учебное пособие. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2016. – 198 с.

Рассматриваются общие понятия экономического моделирования, а также некоторые модели экономических систем: модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции, модели функционирования производства. Обсуждаются некоторые вопросы макроэкономического прогнозирования и кооперативного принятия решений. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Государственное и муниципальное управление», а также студентов иных направлений и специальностей подготовки по направлению «Экономика и управление».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Современная экономическая теория как на микро-, так и на макроуровне, включает в качестве естественного, необходимого элемента математические модели и методы. Первая попытка создания систематизированной экономической теории была предпринята экономистом XVIII в. Адамом Смитом. В последующих трудах других экономистов постепенно раскрывались общие закономерности, лежащие в основе таких экономических явлений, как размещение ресурсов, производство, потребление, распределение дохода и накопление капитала. Эти явления по своей природе в той или иной мере наделены математическими чертами.

Экономическая действительность, однако, настолько сложна, что никакая отдельно взятая математическая модель не может достаточно правильно отобразить все присущие ей математические свойства. Тем не менее, если обращать особое внимание лишь на некоторые из этих свойств, можно рассчитывать на создание достаточно адекватных математических моделей и на успешное изучение этих моделей с помощью подходящих математических методов.

Использование математики в экономике позволяет [1]:

1) выделять и формально описывать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов;

2) из четко сформулированных исходных данных и соотношений получать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и сделанные предпосылки;

3) индуктивным путем получать новые знания об объекте — оценивать форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующих имеющимся наблюдениям;

4) точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы.

Для изучения различных экономических явлений и процессов в целях выявления основных взаимосвязей между ними экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые **экономическими моделями**. Любая экономическая модель в той или иной степени абстрактна, имеет ряд допущений и упрощений, что ограничивает область ее применения. В то же время именно на основе экономического моделирования можно получить достаточно полное представление о характере происходящих в экономике событий, сделать прогноз развития экономики, отдельной отрасли или предприятия, обосновать рекомендации по экономической политике.

Модель — это совокупность взаимосвязанных математических зависимостей между известными и неизвестными величинами. Модели включают в себя эндогенные (внутренние) переменные, величины которых устанавливаются в результате решения модели, и экзогенные (внешние) переменные, величина которых определяется вне данной модели.

В экономических моделях действие экзогенных параметров формализуется либо в виде некоторой постоянной (константы), либо в виде случайной (вероятностной) величины, в зависимости от характера их действия и проявления.

Экономист строит математическую модель экономической системы в более или менее агрегированной форме, выбор которой зависит от основной цели его исследования. Желая получить картину экономики в самых общих ее чертах, он обращается к предельно агрегированной модели, связывающей простыми соотношениями такие укрупненные величины, как национальный доход, общий уровень цен и т. п. Если же он хочет оперировать более тонкими структурными характеристиками экономической системы, то и соответствующая модель выбирается более детальной, дезагрегированной. На таком детальном уровне анализа экономика сводится к гигантской системе соотношений между громадным числом величин. Экономическая теория, излагаемая в терминах агрегированных величин, носит название ***макротеории***, а подход, связанный с явным исследованием поведения индивидуальных компонентов системы в дезагрегированном виде, принято относить к ***микротеории*** [2]. Все это многообразие экономических моделей может служить сферой применения современных математических методов.

В экономической системе, рассматриваемой на макроуровне, выделяются четыре субъекта экономики [3]:

1) домашние хозяйства — частные хозяйственные ячейки, деятельность которых направлена на удовлетворение собственных потребностей. Предполагается, что домашние хозяйства являются собственниками всех факторов производства;

2) фирма (предпринимательский сектор) — любая хозяйственная ячейка, деятельность которой направлена на извлечение прибыли;

3) государство — совокупность всех государственных учреждений и институтов. Задача государства — производство общественных благ, которые производятся в интересах всего общества и предоставляются бесплатно (безопасность, социальная защита, развитие науки и культуры и т. п.);

4) иностранный сектор — совокупность всех экономических субъектов, имеющих постоянное местонахождение за пределами страны. Здесь взаимодействие происходит на основе внешнеэкономических связей через взаимный обмен товаров и услуг, валютой и капиталом.

Экономические субъекты принимают решения под воздействием следующих оснований: в силу своих предпочтений, под влиянием экономической конъюнктуры и как ответ на действия других субъектов. В результате любая *экономическая модель* в своей сути *отражает процесс взаимодействия между экономическими субъектами*.

Особое значение анализ характера поведения экономических субъектов имеет при переходе от статических к динамическим моделям. Например, функции потребления и сбережения можно представить статически как результат решения экономического субъекта о распределении текущего дохода. Однако, если представить сбережение как отложенное потребление, то становится необходимым учет не только статических, но и динамических оснований, по которым субъект определяет свой выбор при принятии решений.

В зависимости от конкретных задач исследования применяются разные типы моделей. ***Типология экономического моделирования*** может быть приведена на основе различных критериев [4]:

1) по способу представления изучаемого процесса или явления модели разделяются на логические, графические и экономико-математические;

2) по продолжительности анализируемых процессов модели делятся на краткосрочные (процесс рассматривается в течение одного года), среднесрочные (5 лет) и долгосрочные (15–20 лет);

3) по количеству вовлеченных в анализ экономических субъектов модели делятся на простые (в которых представлены только домашние хозяйства и фирмы) и полные (с участием государства);

4) по степени охвата иностранного сектора модели разделяются на закрытые (представлена только национальная экономика) и открытые (учитывающие воздействия иностранного сектора на национальную экономику);

5) по характеру отражения фактора времени модели разделяются на статические (рассматривается один период времени, чаще всего — год), сравнительной статики (дихотомические) и динамические (учитывается динамика развития в течение нескольких лет);

6) по целевому назначению модели могут быть теоретико-аналитическими (предназначенными для научного исследования механизма протекания соответствующих процессов) либо прикладными (для решения задач конкретно-экономического анализа и планирования народного хозяйства);

7) по способу непосредственного отображения временного фактора и, соответственно, по характеру применяемого математического аппарата выделяются модели с непрерывным изменением переменных (применяется дифференциальное и интегральное исчисление) и модели с дискретным изменением переменных (используется аппарат разностных уравнений);

8) по характеру отображения причинно-следственных связей в развитии экономической системы модели можно разделить на детерминированные (параметры заданы достоверно) и стохастические (изменение параметров связано с воздействием случайных величин);

9) по характеру взаимосвязей между переменными модели могут быть линейными и нелинейными;

10) по характеру требований к результатам решения экономических задач модели могут быть балансовыми либо оптимизационными.

Построение экономических моделей предполагает учет четырех основных типов функциональных взаимосвязей [3]:

1) поведенческих, отражающих типичные предпочтения экономических субъектов (пример — функции потребления или инвестиционного спроса);

2) технологических, отражающих технологические и организационно-технологические зависимости (пример — производственная функция, отражающая связь реального выпуска и факторов производства);

3) дефиниционных, выражающих понятия, даваемые по определению (сюда можно отнести определения совокупного спроса, безработицы и т. д.);

4) институциональных, выражающих зависимости, вытекающие из институционально установленных в экономике норм и правил (к их числу можно отнести функцию налоговых поступлений как зависимость от размера установленной налоговой ставки).

Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и многие другие. При построении модели экономист выявляет существенные факторы, определяющие исследуемое явление, и отбрасывает детали, несущественные для решения поставленной проблемы. Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия воздействия на них и использовать такие оценки в управлении.

Основные этапы построения экономической модели состоят в следующем:

1) формулируются предмет и цели исследования;

2) в рассматриваемой экономической системе выделяются структурные или функциональные элементы, соответствующие данной цели, выявляются важные качественные характеристики этих элементов;

3) словесно на качественном уровне описываются взаимосвязи между элементами модели;

4) вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик экономического объекта и, насколько возможно, формализуются взаимосвязи между ними, тем самым формулируется математическая модель;

5) проводятся расчеты по математической модели и анализ полученного решения.

Экономические модели позволяют выявлять особенности функционирования экономического объекта и на основе этого предсказывать будущее поведение объекта при изменении каких-либо параметров. Предсказание будущих изменений, например, повышение обменного курса, ухудшение экономической конъюнктуры, падение прибыли, может опираться лишь на интуицию. Однако при этом могут быть упущены, неправильно определены или неверно оценены важные взаимосвязи экономических показателей, влияющие на рассматриваемую ситуацию. В модели все взаимосвязи переменных могут быть оценены количественно, что позволит получить более качественный и надежный прогноз.

Специалисты по макротеории обычно имеют дело с достаточно простыми моделями экономики, требующими лишь элементарных математических средств анализа. В противоположность этому модели промежуточного уровня агрегирования, и тем более полностью дезагрегированные модели, выдвигают многочисленные и интересные проблемы. В данном учебном пособии рассмотрены модели с разной степенью дезагрегирования.

В дисциплине «Экономическое моделирование» изучаются следующие важные классы экономических моделей: модель межотраслевого баланса, модели функционирования производства, модели макроэкономического прогнозирования и модели кооперативного принятия решений. Выбор перечисленных классов обусловлен стремлением рассмотреть модели, с одной стороны, достаточно часто применяемые на практике для решения различных экономических задач, а с другой стороны, достаточно сложных и интересных с точки зрения применения математики в экономике.

Модели межотраслевого баланса предназначены для увязки потребностей и ресурсов в масштабе государственной экономики, взаимной координации развития смежных отраслей и производств хозяйственного комплекса, обеспечения пропорциональности и сбалансированности элементов общественного производства.

Модели функционирования производства предназначены для построения эффективных хозяйственных механизмов (процедур планирования, законов стимулирования и т. д.) в условиях возможного искажения информации.

Модели прогнозирования служат для количественного и качественного анализа тенденций развития хозяйственного комплекса, вероятностного предвидения будущего развития экономики, позволяют получить оценку возможностей и последствий активного воздействия на предвидимые процессы и тенденции.

Модели кооперативного принятия решений представляют собой математизированное описание взаимодействий людей, основанных на соглашении, договоре, компромиссе. В данном пособии рассматриваются некоторые вопросы теории благосостояния и теории игр в приложении к экономическому моделированию.

1. МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС ПРОИЗВОДСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДУКЦИИ

1.1. Общие предпосылки возникновения межотраслевого баланса

Для эффективного управления современным хозяйственным комплексом, характеризующимся большим числом производственных ячеек и сложной структурой внутрипроизводственных взаимосвязей, необходимо устанавливать пропорции не только в виде самых общих, сводных показателей развития хозяйственного комплекса, но также и в разрезе весьма детальной системы показателей, которые отражают отдельные стороны и аспекты процесса общественного воспроизводства. ***Сущность балансового метода планирования*** состоит в увязке потребностей и ресурсов в масштабе государственной экономической системы, взаимной координации развития смежных отраслей и производств хозяйственного комплекса, обеспечении пропорциональности и сбалансированности всех элементов общественного производства в соответствии с объективными экономическими законами.

Первая попытка реализации балансового метода была предпринята при составлении баланса народного хозяйства СССР за 1923–1924 хозяйственный год. В схеме этого баланса был заложен прообраз модели межотраслевого баланса, используемой в настоящее время.

Схемы и методы составления материальных балансов различаются, в первую очередь, в зависимости от экономического назначения продукции. Типовая схема баланса представлена в табл. 1.1 [4].

Определение согласованных показателей производства и распределения продукции в плановом балансе обычно начинается с расчета показателей потребности в данном продукте, дифференцированных по различным направлениям его использования. Здесь используются следующие исходные показатели:

1) объемы производства продуктов, при изготовлении которых применяется данный вид продукции;

2) объемы потребления данного вида продукции для непроизводственных целей по различным каналам;

3) нормы расхода данного продукта для целей производственного и непроизводственного потребления.

Таблица 1.1

Принципиальная схема материального баланса

Баланс ________________________________ на годы ______

(указывается наименование продукции, единица измерения)

	Отчетный (базовый) год	Планируемый период (годы)
I. Ресурсы, всего		
в том числе:		
1) производство;		
2) импорт;		
3) прочие поступления;		
4) остатки на начало года, всего		
в том числе:		
у поставщиков;		
у потребителей.		
II. Распределение, всего		
в том числе:		
1) производственно-эксплуатационные нужды, всего		
из них:		
а) по основным направлениям и отраслям;		
б) ремонтно-эксплуатационные нужды;		
2) капитальное строительство;		
3) специальные расходы;		
4) рыночный фонд;		
5) экспорт;		
6) государственный резерв;		
7) резерв;		
8) остатки на конец года,		
в том числе:		
у поставщиков;		
у потребителей		

Таким образом, для определения показателей потребности в продукции данного вида необходимо знать объемы производства продукции других отраслей. На предварительной стадии планирования, когда начинается составление балансов, эти показатели еще неизвестны, поэтому они оцениваются приближенно.

Возникает необходимость во взаимной увязке и согласовании показателей отдельных балансов. Можно проводить эту работу путем последовательной корректировки тех разделов в балансах отдельных видов продукции, которые имеют взаимосвязанные показатели. Такие согласования просты, если разрабатывается небольшое число частных материальных балансов. В настоящее время только для согласования показателей по важнейшим видам продукции разрабатывается более 1,5 тыс. балансов. В связи с этим все более настоятельной становится потребность в разработке планового инструмента, который позволил бы облегчить и ускорить согласование частных балансов друг с другом. Необходимость создания такого планового инструмента является *первой предпосылкой возникновения и развития метода межотраслевого баланса производства и распределения продукции*.

Кроме частных материальных балансов, получили развитие методы составления баланса народного хозяйства для планирования наиболее общих пропорций расширенного воспроизводства. В систему баланса общегосударственного хозяйственного комплекса включаются:

1) баланс производства и распределения совокупного общественного продукта;

2) баланс производства, распределения и перераспределения национального дохода (финансовый баланс);

3) баланс трудовых ресурсов.

Эти балансы, как правило, дополняются балансами основных фондов, балансами денежных доходов и расходов населения и рядом других.

Главным соотношением баланса производства и потребления совокупного общественного продукта является равенство его объема производства за год и суммы текущего потребления и накопления, т. е. баланс производства и потребления совокупного общественного продукта отражает движение всей массы потребительных стоимостей, произведенных в сфере материального производства за год, в денежной оценке.

Возникает необходимость согласования частных материальных и общих пропорций хозяйственного комплекса в рамках единой системы, с тем чтобы, с одной стороны, можно было проследить влияние сдвигов в общих пропорциях хозяйственного комплекса на совокупность частных материальных балансов и, с другой стороны, иметь возможность анализировать влияние изменений тех или иных частных пропорций на сводные показатели развития хозяйственного комплекса. Потребность в таком согласовании является *второй исходной предпосылкой возникновения межотраслевого баланса.*

Необходимость рассмотрения показателей плана конечного потребления населения как отправного момента в расчете всей системы взаимосвязанных плановых показателей является *третьей предпосылкой разработки метода межотраслевого баланса производства.*

1.2. Модель Леонтьева

В 1930-х гг. В.В. Леонтьев (профессор Гарвардского университета США) начал изучение статистической структуры национальной экономики в ее частично разукрупненном, дезагрегированном виде. В результате Леонтьевым была разработана модель анализа структуры воспроизводства в разрезе детальной классификации отраслей (1936 г.). При этом подходе производственные процессы в экономике разукрупняются до уровня n секторов (отраслей) производства, и анализируется переток продуктов (товаров, услуг) между этими отраслями.

Схема модели «затраты – выпуск», предложенная Леонтьевым, близка по структуре схеме первого баланса народного хозяйства СССР за 1923–1924 гг. Однако в качестве исходного момента Леонтьев рассматривает схемы общего экономического равновесия, основанные на идее технологических коэффициентов затрат и предпосылке о независимости этих коэффициентов от объема выпуска продукции.

Основные предпосылки анализа состоят в следующем [2]:

а) в экономической системе производятся, продаются, покупаются, потребляются и инвестируются n типов продуктов, помечаемые индексами $i = 1, ..., n$;

б) каждая отрасль производит только один тип продукта (совместное производство различных типов продуктов исключается). Разные отрасли производят различные типы продуктов. Таким образом, n отраслей и n продуктов находятся во взаимно однозначном соответствии, и отрасль, производящую продукт i, также можно отметить индексом i;

в) под производственным процессом в каждой отрасли подразумевается преобразование некоторых (может быть всех) типов продуктов, взятых в определенных количествах, в некоторое количество продукта одного соответствующего типа. При этом соотношение затрачиваемых продуктов и выпускаемого предполагается постоянным. В модели Леонтьева это преобразование можно описать следующим образом: если для производства единицы j-го продукта в j-й отрасли нужно затратить a_{ij} единиц i-го продукта, то выпуск λ единиц j-го продукта требует затрат $\lambda \cdot a_{ij}$ единиц i-го продукта. Величины $\left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$ называются ***расходными (технологическими) коэффициентами*** и предполагаются постоянными. Здесь соблюдается *постоянство удельного выпуска* при постоянных пропорциях затрат независимо от масштабов производства.

Пусть x_i — выпуск i-го продукта в единицу времени (год). Эта величина x_i представляет собой ***валовый выпуск***. Часть валового выпуска потребляется в виде затрат, необходимых для производства. Соответствующий чистый выпуск получается вычитанием из валового выпуска полного количества продукта, потребленного в виде производственных затрат во всей экономической системе: $x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$.

Этот чистый выпуск приравнивается конечному спросу c_i на i-й продукт. Получаем систему уравнений

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = c_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1.1)$$

Система уравнений (1.1) — это модель Леонтьева, являющаяся основной в анализе межотраслевых связей методом, получившим название «затраты – выпуск». Здесь c_i состоит из конечного потребления (в непроизводственной сфере), экспорта и инвестиций (т.е. капиталообразования, под которым понимается производство нового производственного оборудования и строительство предприятий, а также создание новых запасов завершенной и незавершенной продукции). Величины c_i подразумеваются как экзогенные, заданные извне переменные. Решение модели $\{x_i\}_n$ определяет уровень интенсивностей отраслевых производств.

Сущность метода «затраты – выпуск» заключается в определении уровней валового выпуска по заданному внешнему конечному спросу в рамках данных технологических возможностей, воплощенных в расходных коэффициентах a_{ij}.

По очевидным экономическим соображениям должны выполняться условия неотрицательности коэффициентов и переменных в модели: $x_i \geq 0,\ c_i \geq 0,\ a_{ij} \geq 0,\ \ i, j = \overline{1, n}$. Отсюда возникает математический вопрос: каковы условия существования неотрицательного решения системы (1.1). С экономической точки зрения разрешимость системы (1.1) в неотрицательных величинах $x_i \geq 0$ означает работоспособность, или ***продуктивность*** модели Леонтьева.

Система, двойственная системе уравнения (1.1) представлена выражением

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i = v_j, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (1.2)$$

где p_j — цена j-го продукта;

v_j — добавленная стоимость, приходящаяся на единицу выпуска в j-й отрасли;

$\sum a_{ij} p_i$ — сумма издержек на единицу выпуска;

$p_i - \sum a_{ij} p_i$ — чистый доход от единичного выпуска в j-й отрасли.

Пример 1.1. Расчет объемов валовых выпусков по модели Леонтьева

Пусть в экономической системе производится 4 типа продуктов. В результате исследования функционирования системы в предыдущие периоды была получена матрица технологических коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Необходимо определить объемы валового выпуска по отраслям при заданном векторе конечного спроса: $C = (2, 4, 1, 5)$.

Для решения поставленной задачи составим систему линейных уравнений:

1) $X_1 = 0{,}1 \cdot X_2 + c_1$ или $X_1 = 0{,}1 \cdot X_2 + 2$;

2) $X_2 = 0{,}2 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot X_4 + c_2$ или $X_2 = 0{,}2 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot X_4 + 4$;

3) $X_3 = c_3$ или $X_3 = 1$;

4) $X_4 = 0{,}1 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot X_2 + 0{,}1 \cdot X_3 + c_4$ или $X_4 = 0{,}1 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot X_2 + 0{,}1 \cdot X_3 + 5$.

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$X_3 = 1;\ \ X_2 = 6{,}753;\ \ X_1 = 2{,}675;\ \ X_4 = 7{,}393..$$

Разрешимость системы (1.2) с экономической точки зрения означает ***прибыльность*** модели. Такая двойственность понятий продуктивности и прибыльности имеет не только качественный характер. Каждое из этих свойств влечет за собой другое: это обусловлено тесной математической связью между взаимно двойственными системами.

Простейший критерий продуктивности и прибыльности, известный под названием ***условия Брауэра-Солоу*** [2], формулируется в терминах сумм коэффициентов матрицы технологических коэффициентов $\mathrm{A} = (a_{ij})$ по строкам и столбцам.

Данный критерий формулируется следующим образом: каждое из двух представленных условий является достаточным для продуктивности и одновременно для прибыльности:

1) $1 > \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad \forall\, i = \overline{1,n};$

2) $1 > \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}, \ \forall\, j = \overline{1,n}.\cdot$

С экономической точки зрения интересно подсчитать национальный доход двумя способами: исходя из системы соотношений для выпусков (1.1) и для цен (1.2). Поскольку c_i представляет собой чистый выпуск *i*-го продукта, то $\sum c_i p_i$ есть совокупный национальный продукт. С другой стороны, $\sum v_j x_j$ — полный национальный доход (добавленная стоимость v_j на единицу выпуска в *j*-й отрасли распределяется между предпринимателями и работниками в виде прибылей и заработной платы и тем самым представляет полный доход в *j*-й отрасли на единицу продукта).

Совпадение национального продукта и национального дохода следует из (1.1) и (1.2):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i x_j (\delta_{ij} - a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_j,$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ i \neq j; \\ 1 \ \text{при} \ i = j. \end{cases}$

Необходимо отметить, что до появления ЭВМ исследования по методу «затраты – выпуск» сосредоточивались в основном на экономико-статистическом анализе межотраслевых связей. Это было связано с невозможностью решать вручную системы линейных уравнений большой размерности. С появлением ЭВМ метод получает широкое распространение во многих странах мира как инструмент анализа экономической структуры на базе использования современных методов и вычислительных средств.

1.3. Схема и математическая модель межотраслевого баланса

Межотраслевой баланс может быть разработан как в денежном, так и в натуральном выражении. Схема межотраслевого баланса представляет собой синтез двух таблиц, одна из которых характеризует детальную структуру затрат на производство в разрезе отдельных видов продукции, а другая — структуру распределения продукции в национальной экономике.

Схема межотраслевого баланса в натуральном выражении

Межотраслевой баланс в натуральном выражении (табл. 1.2) состоит из двух разделов. Первый раздел баланса характеризует источники формирования ресурсов продукции и описывается следующими соотношениями:

$$R_i = Q_i + S_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где R_i — ресурсы продукции вида i;

Q_i — объемы произведенной продукции вида i;

S_i — прочие ресурсы продукции вида i.

Второй раздел межотраслевого баланса характеризует направления использования ресурсов на текущее производственное потребление (в разрезе тех же видов продукции) и на конечное потребление и описывается следующими соотношениями:

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} + G_i = R_i, i = \overline{1,n},$$

где Q_{ij} — потребление продукции вида i на производство продукции вида j; G_i — конечное потребление продукции вида i.

Схема межотраслевого баланса в денежном выражении

Межотраслевой баланс в денежном выражении (табл. 1.3) состоит из четырех разделов. В первом разделе отражаются межотраслевые потоки продукции в процессе текущего производственного потребления. Этот раздел имеет одинаковую классификацию отраслей-производителей и отраслей-потребителей.

Таблица 1.2

Схема межотраслевого баланса в натуральном выражении

Наименование продукции (индекс)	Единицы измерения	Поступление ресурсов			Использование ресурсов								
		Всего	в том числе		На производство продукции — текущее производственное потребление							На конечное потребление**	Итого использовано ресурсов
			Произведено	Прочие*	1	2	…	j	…	n	Итого		
1		R_1	Q_1	S_1	Q_{11}	Q_{12}		Q_{1j}		Q_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} Q_{1j}$	G_1	R_1
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
i		R_i	Q_i	S_i	Q_{i1}	Q_{i2}	…	Q_{ij}	…	Q_{in}	$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}$	G_i	R_i
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
n		R_n	Q_n	S_n	Q_{n1}	Q_{n2}	…	Q_{nj}	…	Q_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} Q_{nj}$	G_n	R_n

* т. е. импорт, запасы и резервы на начало периода;

** т. е. накопление, выбытие и возмещение основных фондов, запасы и резервы на конец периода, личное и общественное потребление, экспорт, потери.

Таблица 1.3

Схема межотраслевого баланса в денежном выражении

		Текущее производственное потребление в отраслях (промежуточный продукт)							Конечный продукт					Всего валовой продукции
		1	2	…	j	…	n	Итого	Непроизводственное потребление	Фонд накопления	Возмещение выбытия основных фондов и возмещение потерь	Сальдо экспорта (+) и импорта (–)	Итого	
		Первый раздел							Второй раздел					
Текущие материальные затраты по видам продукции	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$					y_1	x_1
	⋮												⋮	⋮
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$					y_i	x_i
	⋮												⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$					y_n	x_n
		Третий раздел							Четвертый раздел					
Амортизация и чистая продукция		z_1	z_2	…	z_j	…	z_n	$\sum_{j=1}^{n} z_j$						
Всего валовой продукт		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	$\sum_{j=1}^{n} x_j$						

В составе отраслей-производителей и потребителей продукции выделяются все отрасли материального производства: промышленность, строительство, сельское и лесное хозяйство, транспорт и связь, материально-техническое снабжение и сбыт, заготовки сельскохозяйственной продукции, торговля, прочие отрасли материального производства. Промышленность, в свою очередь, подразделяется на черную металлургию, топливную промышленность, электро- и теплоэнергетику, машиностроение, химическую, лесную и деревообрабатывающую промышленность строительных материалов, стекольную и фарфорово-фаянсовую, легкую, пищевую и прочие. Каждая из отраслей, в свою очередь, подразделяется на подотрасли. Детализируются также показатели сельского хозяйства, строительства и транспорта.

В зависимости от целей исследования межотраслевой баланс может насчитывать от 20–30 до нескольких сотен позиций.

Общий итог первого раздела баланса выражает ***объем промежуточного продукта — части совокупного общественного продукта***, предназначенной для возмещения текущего производственного потребления предметов труда и производственных услуг. Промежуточный продукт отражает реальный оборот продукции в процессе материального производства, учет которого необходим для планирования материально-вещественных пропорций воспроизводственного процесса.

Второй раздел межотраслевого баланса характеризует материально-вещественную структуру ***элементов конечного продукта***. Конечный продукт составляет продукция отраслей производства, поступающая на цели личного и общественного непроизводственного потребления, на накопление основных оборотных фондов, на возмещение выбытия основных фондов, а также включает экспортно-импортное сальдо.

Конечный продукт превышает объем национального дохода, использованного на потребление и накопление, на величину возмещения выбытия основных фондов и экспортно-импортного сальдо.

Сумма конечного и промежуточного продуктов составляет общий объем совокупного общественного продукта, а для каждого отдельного вида продукции — общий ценностный объем произведенной продукции:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = x_i,\ i = \overline{1,n}, \qquad (1.3)$$

где x_{ij} — количество продукции i, израсходованное на производство продукции j (в денежном выражении);

y_i — ценностной объем продукции i, поступившей на формирование конечного продукта;

x_i — объем произведенной продукции i в денежном выражении.

Данные соотношения характеризуют структуру распределения совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе.

В третьем разделе баланса показывается стоимостной эквивалент конечного продукта — ***условно-чистая продукция***, произведенная в народном хозяйстве (созданный национальный доход плюс амортизационные отчисления в производственной сфере). Строки третьего раздела отражают показатели созданного национального дохода в разрезе таких позиций, как заработная плата и прочие денежные выплаты (командировочные, дотации, стипендии от предприятий и т. д.), начисления по социальному страхованию, прибыль государственных предприятий, налоги с оборота, чистый доход предприятий и т. д.

Материальные затраты предметов труда и условно-чистая продукция в сумме образуют ценностный объем совокупного общественного продукта, а для каждого отдельного вида продукции — стоимость произведенной продукции соответствующего наименования:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j,\ j = \overline{1,n}, \qquad (1.4)$$

где z_j — величина условно-чистой продукции в составе стоимости продукции j-го вида.

Четвертый раздел межотраслевого баланса отражает результаты частичного перераспределения вновь созданной стоимости (играет сугубо аналитическую роль и в плановых расчетах не используется).

Построение межотраслевого баланса обеспечивает соблюдение в нем ***основных балансовых соотношений***.

1. Общие итоги одноименных строк и столбцов равны между собой, т. е. при $i = j$

$$x_i = x_j. \tag{1.5}$$

Это значит, что стоимостной объем продукции (итог баланса по столбцу x_j) равен физическому объему ее распределения в денежном выражении (итог баланса по строке x_i).

Подставив в (1.5) значения x_i и x_j (при $i = j = k$) из (1.3) и (1.4), получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} + y_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} + z_k, \ k = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Просуммировав соотношения (1.6) для всех видов продукции, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{kj} + y_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ik} + z_k\right).$$

Отсюда следует второе важное соотношение, соблюдаемое в схеме межотраслевого баланса.

2. Общий итог второго раздела баланса равен общему итогу третьего раздела баланса, или общая величина конечного продукта равна общей величине условно-чистой продукции:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Необходимо отметить, что с точки зрения оценки продукции межотраслевой баланс может быть разработан по двум схемам: в ценах производителей и в ценах конечного потребления. Цена производителя включает только те элементы затрат, которые связаны с производством продукции, и не учитывает расходы по ее реализации или доставке до потребителя. Цена же конечного потребления включает также возмещение всех расходов, связанных с доставкой произведенной продукции до конечного потребителя.

При исчислении показателей затрат на производство в ценах производителей все расходы, связанные с транспортировкой и материально-техническим снабжением, относятся на потребителей материальных благ и учитываются особой статьей в составе их затрат. Если показатели затрат на производство учитываются в ценах конечного потребителя, то транспортно-торговые расходы уже включены в сумму затрат потребляемого сырья, материалов, топлива и т. п.

В табл. 1.4.[1] приведен в качестве примера межотраслевой баланс России за 1997 г. в ценах конечного потребления.

Общие предпосылки создания модели межотраслевого баланса

При построении экономико-математической модели межотраслевого баланса исходят из нижеприведенных предпосылок.

1. Объемы производственного потребления прямо пропорциональны объемам производства продукции потребляющих отраслей; коэффициентами пропорциональности являются коэффициенты прямых затрат, которые для межотраслевого баланса в натуральном выражении равны $a_{ij} = \dfrac{Q_{ij}}{Q_j}$, а для межотраслевого баланса в денежном выражении $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$;

[1] В таблице приняты следующие условные обозначения:

1 — промышленность; 2 — строительство; 3 — сельское и лесное хозяйство; 4 — транспорт и связь; 5 — сфера обращения; 6 — прочее производство; 7 — жилищно-коммунальное хозяйство; 8 — здравоохранение, образование, культура; 9 — наука; 10 — управление, финансы, кредит, страхование; 11 — всего (сумма по строкам/столбцам 1–10); 12 — зарплата; 13 — прибыль; 14 — смешанный доход; 15 — налоги на производство; 16 — субсидии на производство; 17 — услуги финансовых посредников (–); 18 — условно-чистая продукция (сумма по строкам 12–17); 19 — совокупный общественный продукт или валовый выпуск (сумма строк 11 + 18); С — потребление домашних хозяйств; *G* — государственные расходы; *I* — инвестиции; *E – Z* — чистый экспорт благ; *Y* — конечный продукт (сумма по столбцам *C*, *G*, *I*, *E – Z*), *X* — валовый выпуск; Δ — статистическая погрешность (разница между строкой 19 и столбцом *X*).

Здесь строки/столбцы 1–11 составляют первый раздел межотраслевого баланса и показывают межотраслевые потоки промежуточных продуктов.

Третий раздел баланса составляют строки 12–18.

Столбцы, показывающие структуру конечного продукта, составляют второй раздел межотраслевого баланса.

2. Один и тот же продукт производится только одной отраслью; каждая отрасль производит только один вид продукции. Здесь, как и в модели Леонтьева используется принцип «чистой» отрасли: устанавливается однозначное соответствие отрасль — продукция.

С помощью коэффициентов прямых затрат можно перейти от соотношений (1.3) к системе уравнений межотраслевого баланса. Поскольку $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, то получаем $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$, или в матричной форме $AX + Y = X$, где A — матрица коэффициентов прямых затрат; X — вектор-столбец объема производства продукции; Y — вектор-столбец конечного продукта.

После соответствующих преобразований система уравнений в матричной форме может быть записана как $(I - A)X = Y$, где I — единичная матрица n-го порядка.

При экзогенно заданном Y, решая систему уравнений, находим объемы валового выпуска X.

Необходимо помнить, что в силу смыслового содержания коэффициентов прямых затрат, должны выполняться условия их неотрицательности: $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$, если затраты i-го вида продукции на j-й имеют место; $a_{ij} = 0$, если продукт i не расходуется на продукт j).

Процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы затрачивалось большее количество продукта для собственного воспроизводства, чем создавалось, следовательно должно выполняться $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, или $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + a_{zj} = 1$, где a_{zj} — коэффициенты удельного веса условно-чистой продукции — определяются по формуле $a_{zj} = \frac{z_j}{x_j}$.

Таблица 1.4

Межотраслевой баланс России за 1997 г. (в ценах покупателей), трлн руб.

Код	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*C*	*G*	*I*	*E - Z*	*Y*	*X*	Δ
1	831,2	154,1	73,9	106,5	82,9	6,3	92,2	83,9	16,1	92,9	1539,9	755,4	0,6	192,2	107,6	1055,8	2595,6	969,2
2	6,7	1,4	1,1	2,7	7,2	0,2	7,6	5,8	0,9	6,4	39,9	9,2	0,0	344,8	–4,1	349,8	389,7	41,0
3	68,3	0,0	91,7	0,0	5,9	0,0	0,2	4,4	0,1	7,2	177,7	169,5	4,5	10,2	–7,8	176,4	354,1	31,5
4	25,1	7,5	4,8	14,3	32,5	1,0	2,3	9,5	2,1	31,1	130,3	91,3	4,5	0,0	6,3	102,1	232,4	–193,4
5	7,6	2,1	0,3	14,4	25,3	0,6	0,5	4,0	0,2	6,3	61,2	26,1	0,0	0,0	–6,5	19,6	80,8	–590,2
6	7,8	0,9	0,2	1,5	8,7	1,0	0,5	3,5	0,3	4,6	28,9	25,4	0,1	0,7	–17,8	8,4	37,4	8,2
7	2,4	1,1	0,6	2,5	6,8	0,2	3,4	28,9	0,7	29,2	75,7	105,2	7,7	0,0	0,2	113,1	188,8	–52,7
8	0,3	0,1	0,0	0,1	0,4	0,0	0,0	0,9	0,0	0,4	2,3	98,6	232,4	0,0	–0,7	330,3	332,6	–1,2
9	10,7	0,9	0,4	3,8	1,7	0,1	0,3	0,1	16,3	5,9	40,2	0,0	16,7	13,4	–1,7	28,4	68,5	3,0
10	3,6	0,6	0,2	1,9	4,1	0,1	0,5	0,7	0,1	16,1	27,9	69,0	272,6	0,0	–2,0	339,7	367,6	0,0
11	963,8	168,5	173,2	147,6	175,4	9,5	107,6	141,6	36,9	200,0	2124,1	1349,7	539,1	561,3	73,5	2523,5	4647,6	215,3
12	265,8	99,3	43,6	112,6	70,7	8,6	54,5	127,3	26,0	140,5	948,9							
13	299,7	52,2	–-3,6	127,2	317,2	10,1	67,9	55,6	1,4	17,3	945,0							
14	19,4	15,9	109,2	11,0	90,8	–	9,8	7,8	–	14,5	278,4							
15	82,6	12,9	3,2	27,5	16,9	1,0	1,8	1,5	1,2	2,7	151,4							
16	–4,9	—	–3,1	—	—	—	—	—	—	—	–8,0							
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	–7,4	–7,4							
18	662,7	180,2	149,3	278,2	495,6	19,7	134,0	192,3	28,7	167,6	2308,2							
19	1626,5	348,7	322,6	425,8	671,0	29,2	241,6	333,9	65,5	367,5	4432,3							

1.4. Предпосылки создания линейной модели межотраслевых производственных связей

Как и любая другая модель экономических процессов, межотраслевой баланс производства и распределения продукции отражает лишь некоторые, наиболее существенные аспекты реальной действительности, абстрагируясь от других аспектов или отображая их лишь весьма приближенно. В связи с этим необходимо рассмотреть исходные предпосылки моделирования межотраслевых производственных связей, без чего невозможно правильно использовать модель межотраслевого баланса.

Во всех экономико-математических моделях различных звеньев национальной экономики производственные структуры делятся на три основных типа (экономических объекта): продукт, технологический вариант производства и организационная форма деятельности.

Продукт — это различные виды производимых материальных благ и услуг, принимающих форму предметов труда, средств труда и предметов потребления.

Технологический вариант производства — специфический тип производственного процесса по изготовлению продуктов. В результате такого процесса может быть произведен один или несколько продуктов.

В экономико-математических моделях технологические варианты производства обычно описываются с помощью векторов выпуска продукции и затрат ресурсов A_s (s — индекс варианта), компоненты которого A_{is} показывают как производство продуктов (со знаком плюс), так и затраты ресурсов (со знаком минус).

Организационная форма деятельности — это производственное предприятие, объединение предприятий, отрасль, министерство и т. д.

Одни и те же объекты в разных задачах могут рассматриваться и как технологические варианты производства и как организационные формы деятельности.

В общем случае матрица структурных параметров организационной формы деятельности может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} +A_{11} & +A_{12} & \dots & +A_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ +A_{m1} & +A_{m2} & \dots & +A_{m+1,q} \\ -A_{m+1,1} & \dots & \dots & -A_{m+1,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{n,1} & \dots & \dots & -A_{nq} \end{bmatrix},$$

где A_{is} — объем выпуска (+) или затрат (–) продукта или ресурса при технологическом варианте производства s;

i — индекс продукта или ресурса ($i = \overline{1, n}$);

s — индекс технологического варианта производства ($s = \overline{1, q}$).

В отличие от такого описания структуры производства, которое широко используется при формулировании задач оптимального планирования, в модели межотраслевого баланса не разделяются понятия продукта, технологического варианта производства и организационной формы деятельности: они здесь рассматриваются как единое понятие. В этом случае матрица структурных параметров принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Данная матрица структурных параметров характеризует выполнение следующих условий:

а) каждая «организационная форма деятельности» — «технологический вариант производства» — выпускает только 1 продукт, а затрачивает в общем случае не более n продуктов (соответствующие векторы-столбцы в матрице содержат только по одному положительному элементу);

б) каждый «продукт» производится только в рамках одной «организационной формы деятельности» — «технологического варианта» (в каждой строке — один положительный элемент);

в) в качестве единицы интенсивности использования «организационной формы деятельности» — «технологического варианта производства» рассматривается единица выпуска продукта (или единица его стоимости);

г) в силу совпадения понятий «продукт», «организационная форма деятельности» «технологический вариант производства» матрица параметров является квадратной, а модель межотраслевого баланса может быть записана в виде системы линейных уравнений;

д) в модели не допускается замена одних «продуктов» другими (если реальный технологический вариант связан с производством нескольких видов продукции, то в модели они либо сводятся в один «продукт» (например «продукты нефтепереработки»), либо затраты на их производство в ходе единого процесса искусственно расчленяются между этими видами продукции.

В модели межотраслевого баланса рассматривается понятие «чистой» отрасли, в отличие от принятого в статистике и планировании понятия хозяйственной отрасли.

Хозяйственная отрасль различает понятие «продукт» и понятие «организационная форма деятельности — технологический вариант производства».

В качестве выпуска продукции чистой отрасли рассматривается выпуск только строго определенного вида продукции, в качестве выпуска хозяйственной отрасли рассматривается общий объем производства всех выпускаемых ею видов продукции, как профильных, так и непрофильных (аналогично с затратами).

Объем выпускаемой продукции хозяйственной отрасли p^k определяется по формуле

$$p^k = \sum_{j=1}^{k_j} x_j^k,$$

где x_j^k — объем выпуска j-го вида продукции хозяйственной отраслью k;

k_j — количество видов продукции, производимых отраслью k.

Объем затрат продукта i на производство продукции хозяйственной отрасли k определяется по формуле $p_i^k = \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij}^k$, где x_{ij}^k — затраты продукта i на производство продукта j хозяйственной отраслью k.

Показатели чистых отраслей на базе этой информации могут быть получены следующим образом:

$$x_j = \sum_{k=1}^{j_k} x_j^k; \quad x_{ij} = \sum_{k=1}^{j_k} x_{ij}^k,$$

где j_k — число хозяйственных отраслей, производящих продукт j.

Попытки избежать трудностей, связанных с определением показателей затрат в чистых отраслях, привели некоторых зарубежных исследователей к построению межотраслевого баланса по смешанной схеме: строки соответствуют различным видам продукции, а колонки — хозяйственным отраслям. Таким образом, в 1-ом разделе такого баланса вместо показателей x_{ij} будут содержаться показатели p_i^j. Использование такого подхода правомерно лишь в том случае, если объемы затрат продукта i на производство продукции хозяйственной и чистой отраслями примерно равны:

$$x_{ij} \approx p_i^j. \tag{1.7}$$

Каждая из этих величин может быть представлена в виде

$$p_i^j = x_{ij}^j + \sum_{l \neq j} x_{il}^j; \; x_{ij} = x_{ij}^j + \sum_{k \neq j} x_{ij}^k,$$

где x_{ij}^j — затраты продукта i на производство продукта j как продукции отраслевого профиля;

$\sum_{l \neq j} x_{il}^j$ — затраты продукта i на производство продукции неотраслевого профиля отрасли j;

$\sum_{k \neq j} x_{ij}^k$ — затраты продукта i во всех других хозяйственных отраслях, для которых он является непрофильным.

Очевидно, что равенство (1.7) выполняется лишь, если суммы $\sum_{l \neq j} x_{il}^{j}$ и $\sum_{k \neq j} x_{ij}^{k}$ малы по сравнению с x_{ij}^{j}. Но это условие в реальной действительности практически не соблюдается, следовательно, отступление от чистых отраслей может существенно исказить результаты расчета по модели.

1.5. Система коэффициентов межотраслевого баланса

1.5.1. Коэффициенты прямых и полных затрат

Межотраслевой баланс как система линейных уравнений в матричной форме записывается в виде $X = AX + Y$.

Общий вид решения этой системы относительно заданного значения вектора конечного продукта можно представить выражением $X = (I - A)^{-1} Y$.

Тогда система уравнений в развернутом виде запишется как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

или для отдельной i-ой отрасли как

$$x_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \dots + b_{in} y_n, \tag{1.9}$$

где b_{ij} — элемент матрицы $(I - A)^{-1}$;

I — единичная матрица n-го порядка.

Рассматриваемая система уравнений устанавливает взаимосвязь между экзогенно задаваемыми показателями конечного продукта и необходимыми для их производства величинами объемов производства продукции всех отраслей.

Рассмотрим экономический смысл коэффициентов b_{ij}. Пусть Y содержит только один отличный от нуля элемент, например j-й, равный единице. Таким образом, нам необходимо выяснить, какими должны быть объемы производства продукции всех отраслей для получения в экономической системе одной единицы конечного продукта j.

Решая систему соотношений $[x_i]=[b_{ij}]\begin{bmatrix}0\\ \ldots\\ 1\\ \ldots\\ 0\end{bmatrix}$, получаем, что $x_1=b_{1j}, x_2=b_{2j},\ x_i=b_{ij}, x_n=b_{nj}$.

Таким образом, коэффициент b_{ij} показывает потребность в валовом выпуске продукции отрасли i для производства единицы конечного продукта j-го вида.

Коэффициенты b_{ij} называются ***коэффициентами полных затрат.*** Они учитывают сложный комплекс цепных взаимосвязей отраслей в процессе материального производства.

Рассмотрим разложение матрицы $(I-A)^{-1}$ в сходящийся матричный ряд $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3+\ldots$. Тогда

$$X=(I+A+A^2+\ldots)Y=Y+AY+A(AY)+A(A^2Y)+\ldots$$

Данная система представляет вектор валовых выпусков как сумму векторов, характеризующих последовательное наращивание затрат продуктов всех отраслей, связанных с производством установленных количеств конечных продуктов. Первое слагаемое характеризует конечные продукты, являющиеся составными частями валовых выпусков соответствующих отраслей и служащие исходным моментом определения валовых выпусков. Но производство экзогенно заданных количеств конечных продуктов требует определенных затрат материальных ресурсов всех отраслей, потребность в которых определяется вторым слагаемым AY. В свою очередь, затраты на производство AY требует затрат новых ресурсов в объеме $A(AY)$ и т. д.

Дополнительные потребности в приращении материальных ресурсов становятся все меньшими с повышением степени n, в которую возводится матрица А. С ростом n A^n стремится к нулю.

Тогда расчет коэффициентов полных затрат будет осуществляться по формуле

$$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij} + \left[\sum_{R=1}^{n} a_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} a_{lj} \right) + \ldots \right], \quad 1.10)$$

или $$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lkj} \right) a_{kj} + \ldots \right], \quad (1.11)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j; \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$

Запишем эти уравнения короче, соответственно

$$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij} + u_{ij}, \text{или } b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij} + v_{ij},$$

где u_{ij} и v_{ij} равны выражениям, заключенным в квадратные скобки соответственно в (1.10) и (1.11).

Первые слагаемые для u_{ij} и v_{ij} одинаковы и характеризуют расход продукта i на производство всех видов материальных ресурсов, необходимых для получения единицы продукта j. В отличие от a_{ij} они характеризуют не прямой, а косвенный расход продукта i на производство продукта j через непосредственно потребляемые для его изготовления продукты k $(k = \overline{1, n})$:

$$a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \ldots + a_{in} a_{nj} = a_{ij}^{(1)}.$$

Величина $a_{ij}^{(1)}$ характеризует косвенные затраты первого порядка продукта i на продукт j. Последующие слагаемые u_{ij} и v_{ij} характеризуют косвенные затраты второго, третьего и последующих порядков и могут быть определены из реккурентных соотношений:

$${}_u a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}^{(1)}; \qquad {}_v a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj};$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$${}_u a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot {}_u a_{kj}^{(m-1)}; \qquad {}_v a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} {}_v a_{ik}^{(m-1)} \cdot a_{kj}.$$

Таким образом величины u_{ij} и v_{ij} характеризуют суммарный косвенный расход продукта i на продукт j с учетом косвенных затрат всех порядков:

$$u_{ij} = a_{ij}^{(1)} + {}_u a_{ij}^{(2)} + \ldots + {}_u a_{ij}^{(m)} + \ldots;$$

$$v_{ij} = a_{ij}^{(1)} + {}_v a_{ij}^{(2)} + \ldots + {}_v a_{ij}^{(m)} + \ldots$$

Коэффициент полных затрат примет вид

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + u_{ij} = a_{ij} + v_{ij} \quad (i \neq j); \\ 1 + a_{ii} + u_{ii} = 1 + a_{ii} + v_{ii} \quad (i = j). \end{cases}$$

Поскольку показатели косвенных затрат не могут принимать отрицательных значений, т. е. $u_{ij} = v_{ij} \geq 0,$ то будут выполняться следующие соотношения между коэффициентами прямых и полных затрат:

1) $a_{ij} \leq b_{ij}$ (коэффициент прямых затрат не может превышать коэффициента полных затрат);

2) $b_{ii} \geq 1$ (коэффициенты полных затрат, расположенные на главной диагонали матрицы $(\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1},$ не могут быть меньше единицы).

1.5.2. Прямые и полные коэффициенты трудоемкости и фондоемкости

Таблицы межотраслевого баланса, помимо сведений о межотраслевых потоках, структуре конечного продукта и условно-чистой продукции, как правило, дают возможность получить также сведения об использовании в процессе материального производства трудовых ресурсов и основных производственных фондов.

Эти показатели вносятся в специальные «забалансовые» строки, помещаемые обычно после итоговой строки объемов производства продукции (суммы столбцов показателей первого и третьего разделов баланса).

В отличие от потребления предметов труда, полностью используемых в течение одного производственного цикла, трудовые ресурсы и основные производственные фонды участвуют в процессе производства в течение длительного периода времени, причем их объем в течение этого периода в процессе производства изменяется. Поскольку межотраслевой баланс составляется за период времени (год), эти показатели отражаются в межотраслевом балансе в среднегодовом исчислении.

Таким образом, схема межотраслевого баланса дополняется показателями L_j, характеризующими среднегодовую численность работников, занятых в производстве продукции отраслей, и Φ_j, отражающими среднегодовой объем основных фондов, участвующих в производстве отраслей $(j = \overline{1,n})$.

Для этих величин могут быть установлены ***коэффициенты прямых затрат труда*** (коэффициенты прямой трудоемкости) t_j, характеризующие потребность в трудовых ресурсах для производства единицы продукции: $t_j = L_j / x_j$ и ***коэффициенты прямых затрат основных фондов*** f_j, характеризующие потребность в основных фондах для производства единицы продукции:

$$f_j = \Phi_j / x_j.$$

С помощью этих коэффициентов потребности в трудовых ресурсах и основных производственных фондах для сферы материального производства определяются следующим образом:

$$\widetilde{L} = \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot x_j; \quad \widetilde{\Phi} = \sum_{j=1}^{m} f_j \cdot x_j. \tag{1.12}$$

В межотраслевом балансе объемы выпуска продукции являются функциями экзогенно задаваемых величин конечных продуктов отраслей. В результате подстановки (1.9) в (1.12) получаем следующие соотношения:

$$\widetilde{L} = \sum_{j=1}^{n} t_j \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} y_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_j b_{jk} \right) y_k;$$

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{j=1}^{m} f_j \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} y_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j b_{jk} \right) y_k.$$

Здесь произведение $t_j b_{jk}$ показывает численность трудовых ресурсов отрасли j, необходимых для обеспечения продукцией этой отрасли выпуска единицы конечного продукта k-го вида. Произведение $f_j b_{jk}$ выражает аналогичную потребность в основных производственных фондах.

Следовательно, сумма $\sum_{j=1}^{n} t_j b_{jk}$ отражает потребность в трудовых ресурсах, которые должны быть заняты во всех отраслях материального производства для производства единицы конечного продукта k-го вида; $\sum_{j=1}^{n} f_j b_{jk}$ — аналогичная потребность в основных фондах.

Величины $\tau_k = \sum_{j=1}^{n} t_j b_{jk}$ и $\varphi_k = \sum_{j=1}^{n} f_j b_{jk}$ являются ***коэффициентами полных затрат труда*** и ***коэффициенты полных затрат основных производственных фондов.***

Тогда требуемые объемы трудовых ресурсов и основных производственных фондов могут быть определены как через коэффициенты прямых, так и через коэффициенты полных затрат:

$$\widetilde{L} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k y_k = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j; \quad \widetilde{\Phi} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k y_k = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j,$$

т. е. сумма прямых затрат ресурсов на производство валовых выпусков равна сумме полных затрат на производство конечного продукта.

Назовем косвенной фондоемкостью отношение коэффициентов полной фондоемкости к коэффициентам прямой фондоемкости. Для косвенной фондоемкости характерна общая тенденция возрастания при переходе от отраслей сырьевого характера к отраслям, ориентированным на выпуск продукции для конечного потребления. Удельный вес косвенных затрат весьма значителен для многих отраслей, что связано с существованием сложных и комплексных взаимозависимостей в структуре материального производства.

Показатели прямой трудоемкости и фондоемкости могут рассматриваться в дифференцированном виде. Например, трудоемкость может быть подразделена по отдельным категориям работников (рабочие, инженеры, служащие и т. д.) или по профессиональным группам. Фондоемкость может быть представлена в разрезе видов основных фондов (различные типы оборудования, зданий, сооружений). Тогда мы будем иметь матрицы коэффициентов $\left\| t_{\rho j} \right\|$ и $\left\| f_{qj} \right\|$, где ρ — индекс группы трудовых ресурсов, а q — индекс вида основных фондов. Им будут соответствовать следующие матрицы коэффициентов полной трудоемкости и фондоемкости:

$$(\tau_{\rho k}) = (t_{\rho j}) \cdot (I - A)^{-1}; \quad (\varphi_{qk}) = (b_{qj}) \cdot (I - A)^{-1}.$$

С помощью коэффициентов полной трудоемкости и фондоемкости можно проверять допустимость для планового периода того или иного варианта конечного продукта. Если для этого периода известны объем трудовых ресурсов L^*, которыми будет располагать сфера материального производства, а также объем основных производственных фондов Φ^*, то допустимым будет множество векторов конечного продукта Y:

$$Y = \{Y \big| (\tau)Y \le L^*\}; \qquad Y = \{Y \big| (\varphi)Y \le \Phi^*\},$$

где (τ) — вектор, если трудовые ресурсы не дифференцируются по группам, или матрица в противном случае; (φ) — вектор, если основные фонды не дифференцированы по видам, или матрица в противном случае.

Необходимо заметить, что такие оценки весьма приблизительны, так как они предполагает возможность свободного перераспределения трудовых ресурсов (основных фондов) между отраслями. В реальности возможности таких перемещений ограничены, поэтому сужается и множество Y.

Пример 1.2. Определение объемов трудовых ресурсов

Известно, что за прошлый год в результате расчета межотраслевого баланса были получены следующие данные:

а) объемы валовых выпусков: $X = (100;\ 50;\ 100)$;

б) объемы трудовых ресурсов: $L = (20;\ 10;\ 30)$;

в) коэффициенты полных затрат:

$$B = \begin{vmatrix} 1{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 1{,}2 \end{vmatrix}.$$

На планируемый период требуются следующие объемы конечного продукта: $Y = (20;\ 50;\ 50)$.

Определить на планируемый период:
а) объемы валовых выпусков;
б) прямые и полные коэффициенты трудоемкости;
в) объемы трудовых ресурсов.
Решение:

а) $X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot Y_j$, отсюда

$$X_1 = 1{,}5 \cdot 20 + 0{,}6 \cdot 50 + 0{,}4 \cdot 50 = 80;$$

$$X_2 = 0 \cdot 20 + 1 \cdot 50 + 0 \cdot 50 = 50;$$

$$X_3 = 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 + 1{,}2 \cdot 50 = 75;$$

б) для определения коэффициентов используются данные за прошлый год:

$$t_j = \frac{X_j}{L_j},\ \ t = (0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}3)\ ;\ \tau_j = \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot b_{kj},\ \ \tau = (0{,}45;\ 0{,}35;\ 0{,}44);$$

в) объемы трудовых ресурсов можно рассчитать как через прямые, так и через полные коэффициенты трудоемкости (объемы валовых выпусков берутся уже за рассматриваемый период):

$$L = \sum_j t_j X_j = 0{,}2 \cdot 80 + 0{,}2 \cdot 50 + 0{,}3 \cdot 50 = 48{,}5$$

или $L = \sum_i \tau_i \cdot Y_i = 0{,}45 \cdot 20 + 0{,}35 \cdot 50 + 0{,}44 \cdot 50 = 48{,}5.$

1.5.3. Прямые и полные коэффициенты условно-чистой продукции

Отражаемые в третьем разделе межотраслевого баланса показатели условно-чистой продукции также могут анализироваться с помощью коэффициентов прямых и полных затрат. В качестве составляющих условно-чистой продукции выступают амортизация, необходимый продукт (оплата труда всех видов, доход от личных подсобных хозяйств, отчисления на социальное страхование) и прибавочный продукт (прибыль, налог с оборота, чистый доход коопераций и пр.). Рассмотрим коэффициенты затрат для каждой составляющей: прямые коэффициенты амортизации υ_j продукции отрасли j: $a_{\upsilon_j} = \upsilon_j / x_j$; прямые коэффициенты необходимого продукта $\omega_j : a_{\omega_j} = \omega_j / x_j$; прямые коэффициенты прибавочного продукта $\pi_j : a_{\pi_j} = \pi_j / x_j$. Тогда прямые коэффициенты удельного веса условно-чистой продукции — $a_{zj} = \dfrac{z_j}{x_j} = a_{\upsilon_j} + a_{\omega_j} + a_{\pi_j}$.

Из уравнений третьего раздела межотраслевого баланса (1.4) следует, что сумма коэффициентов прямых затрат по столбцу и прямого коэффициента условно-чистой продукции равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + a_{zj} = 1, \text{ или } \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + a_{\upsilon_j} + a_{\omega_j} + a_{\pi_j} = 1.$$

Соответствующие полные коэффициенты амортизации необходимого и прибавочного продуктов определяются следующим образом:

$b_{\upsilon_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{\upsilon_j} \cdot b_{jk}$ (характеризует величину амортизации, начисленную во всех отраслях в связи с выпуском единицы конечного продукта k);

$$b_{\omega_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{\omega_j} \cdot b_{jk}$$ (характеризует величину полного необходимого продукта, создаваемую во всех отраслях в связи с выпуском единицы конечного продукта k);

$$b_{\pi_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{\pi_k} \cdot b_{jk}$$ (характеризует величину прибавочного продукта, создаваемую во всех отраслях в связи с выпуском единицы конечного продукта k).

1.5.4. Анализ степени важности коэффициентов затрат

Коэффициенты межотраслевого баланса — основа межотраслевой модели, связывающая воедино все ее показатели. Те или иные изменения в коэффициентах оказывают влияние на всю структуру модели. Но степень их влияния различна в зависимости от того, какой именно коэффициент изменяется и на какую величину. Конкретное выявление этого влияния необходимо для отбора коэффициентов, образующих основу всей системы, и для их корректировки при расчете планового баланса.

Для решения этой проблемы нужно ответить последовательно на два вопроса:

1) как влияет изменение коэффициента прямых затрат на коэффициенты полных затрат;

2) какое влияние измененные коэффициенты полных затрат оказывают на значения валовых выпусков отраслей при заданных величинах конечного продукта.

Рассмотрим ответы на эти вопросы.

1. Изменение одного элемента матрицы A оказывает влияние на все элементы матрицы B.

Пусть задана матрица $(I - A)$. Изменения элементов этой матрицы задаются матрицей UV:

$$UV = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \ v_2 \ldots v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \ldots & u_1 v_n \\ \ldots & u_i v_i & \ldots \\ u_n v_1 & \ldots & u_n v_n \end{pmatrix},$$

т.е. изменения коэффициентов прямых затрат строго пропорциональны друг другу по строкам и по столбцам.

Для таких условий доказано следующее соотношение:

$$(I - A - UV)^{-1} = B - \frac{1}{p} BUVB,$$

где $p = 1 + VBU$.

Поскольку мы рассматриваем матрицу структурных параметров межотраслевого баланса $(I - A)$, то увеличение элементов A означает уменьшение элементов $(I - A)$, и наоборот. Следовательно, изменение одного элемента a_{ij} матрицы A на величину Δa_{ij} приводит к обратному изменению элемента матрицы $(I - A)$.

Тогда $U = i \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ -\Delta a_{ij} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$, $V = (0;\ 0; \dots ; 1; \dots ; 0);$

$$UV = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & -\Delta a_{ij} & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad p = 1 + VBU = 1 - b_{ji} \Delta a_{ij}.$$

Тогда в результате изменения одного элемента a_{ij} матрицы $(I - A)$ на величину Δa_{ij} элементы матрицы коэффициентов полных затрат b_{kl} подвергнутся изменениям, величина которых будет определяться следующим образом: $\Delta b_{kl} = \dfrac{b_{ki} \Delta a_{ij} b_{jl}}{1 - \Delta a_{ij} b_{ji}}$.

2. Для ответа на второй вопрос необходимо рассмотреть общее решение системы уравнений межотраслевого баланса

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} y_l,$$

тогда при изменении b_{kl} изменяются и валовые выпуски отраслей: $\Delta x_k = \sum_{l=1}^{n} \Delta b_{kl} y_l$

Учитывая зависимость коэффициентов полных затрат от коэффициентов прямых затрат, получаем следующее выражение для исчисления изменения валового выпуска:

$$\Delta x_k = \frac{b_{ki} \Delta a_{ij}}{1 - \Delta a_{ij} \cdot b_{ji}} \sum_{l=1}^{n} b_{jl} y_l$$

или

$$\Delta x_k = \frac{b_{ki} \Delta a_{ij}}{1 - \Delta a_{ij} \cdot b_{ji}} \cdot x_j. \qquad (1.13)$$

Таким образом, изменение одного коэффициента прямых затрат будет оказывать влияние на изменение валового выпуска во всех отраслях материального производства. При перспективных плановых расчетах обычно требуется определить объем валового выпуска не в виде строго фиксированной величины, а в некоторых пределах, например, с точностью до 5 %: $x_k \pm \Delta \overline{x}_k$, $\Delta \overline{x}_k = 0{,}05 x_k$ или для общего случая $\Delta \overline{x}_k = \eta_k x_k$.

Здесь η_k — задаваемое отношение интервала $\Delta \overline{x}_k$ к планируемому объему производства x_k.

Если знать величины $\Delta \overline{x}_k$, то можно определить такое значение изменения коэффициента прямых затрат, которое приведет к изменению валового выпуска на всю величину допустимого интервала $(\Delta \overline{a}_{ij})$. Это означает, что при планировании коэффициента мы не можем ошибиться больше, чем на $\Delta \overline{a}_{ij}$, иначе величина валового выпуска может отклониться от действительной его величины больше, чем допускается η.

Такую предельно допустимую ошибку можно определить на основе (1.13):

$$\Delta\bar{a}_{ij} = \frac{\Delta\bar{x}_k}{b_{ki}x_j + b_{ji}\Delta\bar{x}_k}. \qquad (1.14)$$

Из этих уравнений следует, что коэффициент a_{ij} будет иметь столько оценок $\Delta\bar{a}_{ij}$, сколько отраслей в межотраслевом балансе. Достаточно найти минимальную из всех n оценок, поскольку уже в этом случае мы определим предельно допустимую ошибку в расчете величины коэффициента затрат, позволяющую не превысить заданный интервал, в котором должно находиться значение валового выпуска хотя бы для одной отрасли.

Предположим, минимум достигается при $k = q$, тогда выражение (1.14) примет вид $\min\limits_k \Delta\bar{a}_{ij} = \dfrac{\Delta\bar{x}_q}{b_{qi}x_j + b_{ji}\Delta\bar{x}_q}$, тогда при любом другом $\forall\ k = m \neq q$ должно выполняться неравенство

$$\frac{\Delta\bar{x}_m}{b_{mi}x_j + b_{ji}\Delta\bar{x}_m} - \frac{\Delta\bar{x}_q}{b_{qi}x_j + b_{ji}\Delta\bar{x}_q} > 0.$$

После приведения к общему знаменателю получаем следующее неравенство:

$$\Delta\bar{x}_m b_{qi} - \Delta\bar{x}_q b_{mi} > 0. \qquad (1.15)$$

Разделим обе части неравенства (1.15) на произведение коэффициентов $b_{qi} \cdot b_{mi}$. Тогда получим соотношение

$$\frac{\Delta\bar{x}_m}{b_{mi}} > \frac{\Delta\bar{x}_q}{b_{qi}}\ (b_{mi} > 0,\ b_{qi} > 0). \qquad (1.16)$$

Следовательно, если при $k = q$ значение $\Delta\bar{a}_{ij}$ достигает минимума из всех его возможных n значений, то частное от деления Δx_q на b_{qi} меньше всех других частных от деления $\Delta\bar{x}_k$ на соответствующие им элементы i-го столбца матрицы коэффициентов полных затрат. Это условие является критерием для отбора минимального $\Delta\bar{a}_{ij}$.

Опыт показал, что в подавляющем большинстве случаев $\min \Delta \overline{a}_{ij}$ достигается при $k = i$. Величины $\min \Delta \overline{a}_{ij}$ — это те пределы, в которых мы можем ошибиться при расчете коэффициентов затрат на плановый период, не исказив сверх установленной нормы искомых валовых выпусков. Очевидно, что вероятность такой ошибки тем больше, чем меньше отношение χ_{ij} :

$$\chi_{ij} = \frac{\min \Delta \overline{a}_{ij}}{a_{ij}}$$

или в общем виде, учитывая выражения (1.14) и (1.16), отношение χ_{ij} можно записать следующим образом:

$$\chi_{ij} = \frac{\min \left(\eta_k x_k / b_{ki}\right)}{\left(x_j + b_{ji} \min\limits_k \left(\eta_k x_k / b_{ki}\right)\right) \cdot a_{ij}}.$$

Отсюда следует, что чем меньше χ_{ij}, тем более тщательно нужно обосновывать изменение a_{ij} на плановый период, и наоборот. При достаточно большой оценке χ_{ij} $(\chi_{ij} \geq 1)$ базисный коэффициент a_{ij} ***можно оставить без изменения*** (это второстепенный коэффициент, который незначительно влияет на структуру модели).

Распространить изложенный метод на оценку степени важности сразу многих коэффициентов нельзя, поскольку данную величину $\Delta \overline{x}_k$ можно получить бесчисленным множеством сочетаний изменений самых разных коэффициентов.

Для расчетов χ_{ij} необходимо знать величины валовых выпусков отраслей материального производства. Оценки валовых выпусков на плановый период можно определить, если вектор планового конечного продукта умножить на матрицу отчетных коэффициентов полных затрат.

Пример 1.3. Определение допустимых изменений коэффициента прямых затрат

Дана матрица полных коэффициентов B и объемы валовых выпусков X:

$$B = \begin{vmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 1{,}1 \end{vmatrix}; \quad X = (100;\ 20;\ 60).$$

Определить допустимые изменения прямого коэффициента a_{32}, если известно, что объемы валовых выпусков могут быть скорректированы не более чем на 5 %.

Решение

Определим сначала допустимые изменения валовых выпусков: $\Delta X = 0{,}05 \cdot X$; $\Delta X = (5;\quad 1;\quad 3)$.

Далее мы должны определить, по какой отрасли k необходимо рассчитывать допустимые изменения коэффициента прямых затрат Δa_{32}. Для этого найдем соотношения (1.16) при $i = 3$:

$$\frac{5}{0{,}2} = 25; \ \frac{1}{0{,}7} = 1{,}43; \ \frac{3}{1{,}1} = 2{,}73.$$

Мы определили, что минимум достигается при $k = 2$, тогда

$$\Delta a_{32} = \frac{\Delta x_2}{b_{23} \cdot x_2 + \Delta x_2 \cdot b_{23}} \approx 0{,}07.$$

1.6. Развитие модели межотраслевого баланса

1.6.1. Возможность изменения исходных предпосылок создания модели межотраслевого баланса

Всю систему исходных предпосылок построения межотраслевых балансов можно подразделить на общие и специфические предпосылки. К общим следует отнести предпосылки о конечности множества рассматриваемых в модели видов продукции и о возможности предвидения на будущий период значений параметров модели.

Возможности модификации модели межотраслевого баланса связаны с изменением специфических предпосылок. Так, изменение предпосылки о характере зависимости затрат на производство приводит к возможности построения нелинейных межотраслевых моделей. К расширению системы уравнений межотраслевого баланса приводит учет в ней факторов, ограничивающих сверху множество допустимых значений валовых выпусков продукции. Вследствие учета этих факторов расширяется круг эндогенных переменных модели за счет рассматривавшихся ранее в качестве экзогенных переменных.

Другое направление модификаций связано с различным толкованием понятий «продукт», «технологический вариант производства» и «организационная форма деятельности». Так, для случая производства сопряженных видов продукции можно отказаться от предпосылки, что «технологический вариант производства — организационная форма деятельности» производит только один вид продукции. С другой стороны, можно рассматривать схему межотраслевой модели, в которой один и тот же вид продукции производится разными организационными формами деятельности.

1.6.2. Нелинейная функция затрат на производство

До сих пор в модели межотраслевого баланса мы предполагали линейную зависимость производственных затрат, которая определялась величиной прямых коэффициентов: $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$.

На практике зависимость между затратами на производство и валовым выпуском не всегда линейна. В качестве примера такой функции может рассматриваться квадратическая зависимость:

$$x_{ij} = \alpha_{ij} x_j^2 + \beta_{ij} x_j + \gamma_{ij},$$

где α_{ij} — параметр, учитывающий изменение удельного расхода продукта i на продукт j по мере увеличения выпуска продукта j;

β_{ij} — параметр, учитывающий пропорциональный выпуску продукта j удельный расход продукта i (аналогично a_{ij});

γ_{ij} — параметр, учитывающий условно-постоянные расходы продукта i на продукт j.

Могут рассматриваться и более сложные зависимости, например, полиномиальная — $x_{ij} = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} + \sum_{p=2}^{\omega} a_{ij}^{(p)} x_j^{\frac{p-1}{p}}$.

Применение в межотраслевой модели нелинейных функций затрат на производство проблематично в силу следующих обстоятельств:

1) при построении нелинейных функций предъявляются очень высокие требования к исходной информации. Так, для определения нелинейных зависимостей затрат продукта i на продукт j от объема выпуска продукта j необходимы либо динамические ряды за достаточно длительный промежуток времени, либо ряды данных о «технологическом варианте производства — организационных формах деятельности», потребляющих продукт i и производящих продукт j, которые характеризуются строгой однородностью выпускаемых продуктов или постоянными пропорциями выпуска продуктов в составе агрегированной «чистой» отрасли. Ни динамические ряды, ни данные по предприятиям для подавляющего большинства отраслей этим свойством не обладают. Исключение составляют производства весьма небольшой группы продуктов с установившейся технологией и имеющие преимущественно монопродуктовый характер (хлебопечение). Но, как правило, объемы производства этих продуктов меняются весьма незначительно, и зачастую исследование влияния изменения удельных затрат от изменения объема выпуска для них просто лишено смысла;

2) требуется значительно больший объем информации и более высокие затраты труда по сравнению с линейными моделями. При этом точность расчетов повышается незначительно;

3) нелинейные модели существенно усложняют расчеты и лишены некоторых преимуществ линейных моделей. Например, при использовании квадратичной функции аналог коэффициентов полных затрат (т. е. потребность в валовом выпуске для получения единицы конечного продукта) соответствует лишь каждому частному решению, а не общему, как в линейной модели.

Но для характеристики структуры затрат на производство некоторых видов продукции применение нелинейной функции позволит существенно улучшить точность решения (сельскохозяйственные продукты: зависимость объема выпуска от урожайности при одних и тех же затратах делает рассматриваемые взаимосвязи существенно нелинейными). Такие отрасли целесообразно рассматривать вне общей системы линейных межотраслевых взаимосвязей и включать их в модель особыми способами, которые зависят от видов нелинейных функций.

1.6.3. Включение факторов, ограничивающих множество допустимых значений валовых выпусков

До сих пор в модели межотраслевого баланса на объемы валовых выпусков отраслей накладывалось только одно ограничение: неотрицательность валовых выпусков (при $Y \geq 0$). В реальности бывает необходимо учитывать ограниченность выпусков сверху. Эта необходимость может быть вызвана рядом причин: невозможностью достижения требуемых объемов выпусков, недостаточной обеспеченностью наличными ресурсами (основными производственными фондами и трудовыми ресурсами). Анализ допустимости значений валовых выпусков тогда может быть осуществлен с помощью коэффициентов затрат ресурсов при наличии ограничений на объемы ресурсов, которыми может располагать производственная сфера.

В том случае, когда заранее известно, что объемы производства определенных видов продукции должны быть установлены на максимально допустимом при наличных ресурсах уровне, эти показатели могут рассматриваться в качестве экзогенных переменных, а соответствующие им конечные продукты — как искомые эндогенные величины. Предположим, что такие виды продукции, имеющие номера от 1 до m, составляют группу 1. Экзогенно задаваемые объемы их производства образуют $(m \times 1)$ вектор $\overline{Q}_1$, а искомые величины соответствующих конечных продуктов — $(m \times 1)$ вектор Y_1. Для остальных $(n-m)$ продуктов (группа 2), экзогенно задается вектор $\overline{Y}_2$, а искомым является вектор X_2. Тогда система уравнений межотраслевого баланса примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \overline{Q_1} \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{Q_1} \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ \overline{Y_2} \end{pmatrix}, \text{ или}$$

$$\overline{Q_1} = A_{11} \cdot \overline{Q_1} + A_{12} \cdot X_2 + Y_1;,$$

$$X_2 = A_{21} \cdot \overline{Q_1} + A_{22} \cdot X_2 + \overline{Y_2}.$$

Исходя из заданных $\overline{Q_1}$ и $\overline{Y_2}$, сначала могут быть определены валовые выпуски продуктов группы 2:

$$X_2 = (I_{n-m} - A_{22})^{-1}(A_{21}\overline{Q_1} + \overline{Y_2}), \qquad (1.17)$$

а затем найдены искомые величины конечных продуктов группы 1:

$$Y_1 = (I_m - A_{11})\overline{Q_1} - A_{12}X_2. \qquad (1.18)$$

Пример 1.4. Расчет балансовых соотношений при ограничениях на объемы валовых выпусков

Известно, что для некоторых отраслей объемы валовых выпусков ограничены сверху. Даны: матрица прямых коэффициентов затрат A, объемы валовых выпусков для 1-й и 4-й отраслей и объемы требуемых конечных продуктов для отраслей 2 и 3:

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \ x_1 = 10;\ x_4 = 20;\ y_2 = 10;\ y_3 = 5.$$

Необходимо найти объемы валовых выпусков по 2-й и 3-й отраслям и объемы конечных продуктов по отраслям 1 и 4.

Решение

Группу 1 составляют отрасли 1,4, тогда $Q_1 = (10,\ 20)$. Группу 2 составляют отрасли 2,3, тогда $\overline{Y_2} = (10,\ 5)$.

Сформируем матрицу прямых коэффициентов по группам:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{vmatrix};\ A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 \end{vmatrix};\ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{vmatrix};\ A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix};$$

Определим обратную матрицу:

$$(I_{n-m} - A_{22})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1{,}43 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем рассчитать объемы валовых выпусков по формуле (1.17). Распишем ее поэлементно для 2-й и 3-й отраслей:

$$x_2 = 1 \cdot (0 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 10) + 0 \cdot (0{,}1 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 20 + 5) = 10;$$

$$x_3 = 0 \cdot (0 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 10) + 1{,}43 \cdot (0{,}1 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 20 + 5) = 11{,}44.$$

На основе полученных значений валовых выпусков и формулы (1.18) рассчитаем объемы конечных продуктов для 1-й и 4-й отраслей:

$$y_1 = 0{,}9 \cdot 10 + 0 \cdot 20 - (0 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 11{,}44) = 6{,}72;$$

$$y_4 = 0 \cdot 10 + 0{,}8 \cdot 20 - (0 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 11{,}44) = 14{,}86.$$

Заметим, что в ситуации, когда на объемы валовых выпусков заданы чересчур жесткие ограничения сверху, по соответствующим отраслям могут получиться отрицательные объемы конечного продукта. Это объясняется тем, что заданных объемов валовых выпусков не будет хватать даже для обеспечения производственных затрат на выпуск продукции по другим отраслям. В такой ситуации необходимо пересматривать весь набор экзогенных переменных, чтобы обеспечить продуктивность модели.

1.6.4. Изменение предпосылки о способе рассмотрения структуры материального производства

В классической модели межотраслевого баланса понятия «продукт», «технологический вариант производства» и «организационная форма деятельности» тождественны, в связи с этим структура производственного процесса отражается в форме матрицы $(I - A)$. Отказ от тождественности в общем случае ведет к построению моделей оптимального программирования. Но и в рамках балансовых межотраслевых моделей возможно частичное отступление от принципа тождественности. Представим на рис. 1.1 общую классификацию различных типов межотраслевых моделей в зависимости от разных способов описания структуры материального производства.

Типы межотраслевых моделей

	1. Организационной форме деятельности соответствует один технологический вариант производства	2. Организационной форме деятельности соответствует несколько технологических вариантов производства
1. Технологический вариант производства выпускает только один продукт	1.1. Классическая модель межотраслевого баланса	1.2.1. Межотраслевой баланс с учетом технологических вариантов производства отдельных видов продукции. 1.2.2. Оптимальная межотраслевая модель, построенная по принципу «продукт-продукт», учитывающая различные технологические варианты производства
2. Технологический вариант производства выпускает несколько видов продукции	2.1.1. Межотраслевой баланс, учитывающий совокупные затраты на производство сопряженных продуктов $(m = n)$[2]. 2.1.2. Прямоугольная балансовая межотраслевая модель $(m \neq n)$. 2.1.3. Оптимальная межотраслевая модель, построенная по принципу «продукт — вид деятельности» $(m \neq n)$	2.2. Система моделей оптимального межотраслевого планирования

Рис. 1.1. Классификация межотраслевых моделей

[2] n — число продуктов; m — число технологических вариантов производства.

Из представленной классификации рассмотрим модель типа 2.1.1, т. е. межотраслевой баланс, в котором производство сопряженных продуктов рассматривается как единый процесс, поскольку такая модель наиболее близка к классической схеме межотраслевого баланса.

В классической схеме сопряженные продукты обычно либо входят в состав агрегированного продукта наряду с основным, либо затраты на их производство искусственно выделяют из затрат на основной продукт и переносятся в позиции соответствующих сопряженному видов продукции или обособляются как отдельный продукт, для чего в схему баланса вводится специальная «фиктивная» отрасль. В последнем случае при расчетах на будущий период может нарушиться реально существующая жесткая пропорция между объемами производства основного и сопряженного продуктов.

При использовании модели межотраслевого баланса, учитывающей совокупные затраты на производство сопряженных продуктов, указанный недостаток устраняется. Такая модель может содержать более чем один положительный элемент в некоторых столбцах (и соответственно в некоторых строках) матрицы структурных параметров.

Рассмотрим для примера пятиотраслевую модель межотраслевого баланса, причем наряду с основным производством 1-й продукт производится как сопряженный при производстве 4-го, а 3-й — при производстве 5-го.

Тогда матрица структурных параметров примет вид

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & +a_{14} & -a_{15} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} & -a_{34} & +a_{35} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 1-a_{44} & -a_{45} \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 1-a_{55} \end{vmatrix} \qquad (1.19)$$

Коэффициент a_{14} характеризует выпуск 1-го продукта, приходящийся на единицу выпуска продукции основного, 4-го продукта. Аналогичные рассуждения относятся и к коэффициенту a_{35}. С точки зрения классической межотраслевой модели коэффициенты a_{14} и a_{35} можно интерпретировать как «отрицательные затраты» на производство основных видов продукции.

Для того чтобы матрица структурных параметров соответствовала схеме межотраслевого баланса, необходимо, чтобы число сопряженных производств не превышало числа производимых продуктов. Каждое сопряженное производство при этом должно иметь определенный основной вид продукции, соответствующий одному и только одному продукту, причем для каждого сопряженного вида продукции основные продукты разные.

Система уравнений межотраслевого баланса в этом случае выглядит следующим образом:

$$X = A_b X + Y,$$

где A_b — матрица коэффициентов вида (1.19), содержащая коэффициенты «отрицательных затрат» побочных продуктов.

Этой системе соответствует матрица коэффициентов полных затрат $(I - A_b)^{-1}$, содержащая отрицательные элементы, которые имеют те же индексы, что и коэффициенты «отрицательных затрат» побочных продуктов. Такой подход не исключает возможности получения отрицательных выпусков, хотя это и маловероятно. Такая ситуация может возникнуть в том случае, когда «вынужденное» производство побочной продукции в жесткой пропорции к основной превзойдет потребность в ней хозяйственного комплекса.

Пример 1.5. Расчет межотраслевого баланса при наличии производства сопряженных продуктов

Структура производства определяется тремя основными отраслями. Известна матрица прямых коэффициентов, содержащая коэффициенты «отрицательных затрат» побочных продуктов:

$$A_b = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Необходимо определить объемы валовых выпусков для обеспечения вектора конечного продукта $Y = (10;\ 40;\ 45)$.

Определим сначала матрицу полных коэффициентов:

$$B = \left(I - A_b\right)^{-1} = \begin{vmatrix} 1{,}111 & 0{,}1 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 1{,}25 \end{vmatrix}.$$

Тогда искомые объемы валовых выпусков по отраслям примут значения:

$$X = \left(6{,}111;\ 40;\ 61{,}25\right).$$

Посмотрим, как изменятся результаты, если вектор конечного продукта примет вид

$$Y = \left(10;\ 40;\ 95\right).$$

В этом случае мы получим вектор валовых выпусков

$$X = \left(-3{,}89;\ 40;\ 123{,}75\right).$$

Отрицательный объем валового выпуска по первой отрасли объясняется здесь тем, что продукт первого вида выпускается как сопряженный третьей отраслью в объеме $0{,}2 \cdot 95 = 19$, в то время как потребности в этом продукте составляют всего $1{,}11 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 4 = 15{,}11$; т. е. третья отрасль выпускает продукции первого вида на 3,89 единиц больше, чем требуется.

1.7. Расширение модели межотраслевого баланса

1.7.1. Включение в модель зависимостей, характеризующих воспроизводство основных фондов

В расширенной модели межотраслевого баланса увязываются объемы производства с показателями ввода в действие основных производственных фондов в течение рассматриваемого периода. Последние включаются в состав эндогенных переменных модели.

Вектор конечного продукта расширенной схемы может быть представлен как $\overline{Y} = Y - \Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ — вектор-столбец ввода в действие основных производственных фондов (ОПФ). Причем он имеет ненулевые элементы только в позициях, соответствующих отраслям, которые производят средства труда.

Таким образом, конечный продукт расширенной схемы межотраслевого баланса характеризует ту часть общественного продукта, выходящую за пределы текущего производственного цикла, которая не связана с расширением производства в рассматриваемом периоде. В ее состав входят личное и общественное потребление, возмещение выбытия основных фондов, ввод основных непроизводственных фондов, сальдо экспорта и импорта, изменение запасов предметов труда и предметов потребления, изменение запасов средств труда.

Система уравнений распределения продукции расширенной схемы представляется следующим образом:

$$X = AX + \Delta\Phi + \overline{Y} \text{ или } (I - A)X - \Delta\Phi = \overline{Y}.$$

При этом она дополняется системой балансов ОПФ, устанавливающих равенство ресурсов и потребностей по каждому виду ОПФ в среднегодовом исчислении:

$$\Phi_s + \Delta\overline{\Phi}_s = \sum_{j=1}^{n} f_{sj} x_j + \overline{R}_s,$$

где Φ_s — наличие основных фондов s-го вида на начало года;

$\Delta\overline{\Phi}_s$ — среднегодовой ввод в действие основных фондов s-го вида;

f_{sj} — коэффициенты потребности в s-ом виде основных фондов для производства продукции отрасли j (коэффициенты фондоемкости);

$\overline{R}_s$ — среднегодовое выбытие фондов s-го вида.

Здесь $\Delta\overline{\Phi}_s = \lambda_s \Delta\Phi_s$, где λ_s — коэффициент, характеризующий сроки ввода в действие основных фондов.

Значение λ_s может изменяться в интервале от 1 (когда новые фонды вводятся сразу с 1-го января) до 0 (новые фонды не вводятся). Если новые фонды вводятся сразу в середине года или равномерно в течение года, то λ_s принимает значение 0,5. Поскольку на практике новые фонды, как правило, более интенсивно вводятся во второй половине года, то фактически коэффициенты λ_s обычно колеблются около значения 0,35.

С введением матричных значений для векторов $\Phi = (\Phi_s)$, $\overline{R} = (\overline{R}_s)$ и матриц

$$F = (f_{sj}), \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

система уравнений балансов ОПФ примет вид

$$\Phi + \boldsymbol{\lambda}\Delta\Phi = FX + \overline{R} \text{ или } \boldsymbol{\lambda}\Delta\Phi = FX - (\Phi - \overline{R}).$$

Здесь заданными показателями являются векторы наличия основных фондов на начало планового периода и их среднегодового выбытия, матрицы коэффициентов F и равномерности ввода основных фондов $\boldsymbol{\lambda}$, а искомыми неизвестными — векторы объемов производства продукции и ввода в действие основных фондов.

Системы уравнений распределения продукции и балансов основных фондов вместе образуют систему уравнений расширенной схемы межотраслевого баланса:

$$\begin{aligned} &(I - A)X - \Delta\Phi = \overline{Y} \\ &\boldsymbol{\lambda}\Delta\Phi = FX - S, \end{aligned} \qquad (1.20)$$

где $S = \Phi - \overline{R}$.

Расчеты взаимосбалансированных планов на основе расширенной схемы межотраслевых связей осуществляются несколькими способами. ***Первый способ*** представляет собой ***последовательную увязку*** решения уравнений распределения продукции и уравнений балансов основных производственных фондов. На 1-й итерации ввод основных фондов считается равным нулю и рассчитывается по формуле

$$X^{(0)} = (I - A)^{-1}\overline{Y}.$$

Полученное $X^{(0)}$ подставляется в уравнение балансов основных фондов, и определяется $\Delta\Phi$ в первом приближении:

$$\boldsymbol{\lambda}\Delta\Phi^{(0)} = F(X)^{(0)} - S \text{ или}$$

$$\Delta\Phi^{(0)} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}(FX^{(0)} - S).$$

На второй итерации определяются новые значения объемов производства с учетом ввода в действие основных фондов:

$$X^{(1)} = (I - A)^{-1}(\Delta\Phi^{(0)} + \overline{Y}),$$

а затем определяются новые значения $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi^{(1)} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}(FX^{(1)} - S).$$

На k-й итерации значение объемов производства и основных фондов определяются по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= (I - A)^{-1}(\Delta\Phi^{(k-1)} + \overline{Y}); \\ \Delta\Phi^{(k)} &= \boldsymbol{\lambda}^{-1}(FX^{(k)} - S). \end{aligned} \qquad (1.21)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока различия между значениями неизвестных после какой-либо итерации $X^{(m)}$ и $X^{(m+1)}$; $\Delta\Phi^{(m)}$ и $\Delta\Phi^{(m+1)}$ становятся настолько несущественными, что ими можно пренебречь, т. е. выполняется условие

$$\left|X^{(m)} - X^{(m+1)}\right| < \xi, \quad \left|\Delta\Phi^{(m)} - \Delta\Phi^{(m+1)}\right| < \xi \,,$$

где ξ — заданная точность вычислений.

Пример 1.6. Расчет балансов распределения продукции и основных фондов итеративным способом

Необходимо рассчитать межотраслевой баланс с учетом воспроизводства основных фондов, если известны следующие данные:

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{vmatrix}; \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{vmatrix} 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \ F = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$S = (5; \quad 6; \quad 0).$

Требуемые объемы конечного продукта, не связанного с расширением производства, составят: $\overline{Y} = (20; \quad 30; \quad 10).$

Решение

Воспользуемся итеративным способом расчета взаимосбалансированного плана по формулам (1.21).

В результате расчетов получим следующие данные по итерациям:

0-я итерация: $X^{(0)} = (30{,}2; \quad 41{,}69; \quad 22{,}51);$

$\Delta\Phi^{(0)} = (3{,}52; \quad 0{,}98; \quad 0).$

1-я итерация: $X^{(1)} = (34{,}83; \quad 43{,}41; \quad 23{,}02);$

$\Delta\Phi^{(1)} = (5{,}16; \quad 1{,}76; \quad 0;).$

2-я итерация: $X^{(2)} = (37{,}025; \quad 44{,}598; \quad 23{,}379);$

$\Delta\Phi^{(2)} = (6; \quad 2{,}2; \quad 0).$

Продолжая расчеты аналогичным образом, доходим до 9-й итерации.

8-я итерация: $X^{(8)} = (39{,}4; \quad 45{,}98; \quad 23{,}79);$

$\Delta\Phi^{(8)} = (6{,}94; \quad 2{,}69; \quad 0).$

9-я итерация: $X^{(9)} = (39{,}42; \quad 46; \quad 23{,}8);$

$\Delta\Phi^{(9)} = (6{,}948; \quad 2{,}697; \quad 0).$

Результаты вычислений на последних двух итерациях отличаются незначительно (не более чем на 2 сотых по валовым выпускам, и не более чем на 8 тысячных по основным фондам), поэтому в качестве окончательного решения можно взять данные 9-й итерации.

Второй способ расчетов взаимосбалансированных планов состоит ***в одновременном решении*** системы уравнений распределения продукции и системы уравнений балансов основных фондов. Для этого все отрасли в межотраслевом балансе разбиваются на две группы:

1) отрасли, производящие «чистые» предметы труда и «чистые» предметы потребления и не создающие элементов основных фондов;

2) отрасли, производящие наряду с предметами труда и предметами потребления также и средства труда, а также отрасли, производящие только средства труда. Тогда система уравнений примет вид

$$(I_{(1)} - A_{11})X_1 - A_{12}X_2 = \overline{Y}_1;$$

$$-A_{21}X_1 + (I_{(2)} - A_{22})X_2 = \Delta\Phi + \overline{Y}_2;$$

$$\boldsymbol{\lambda}\Delta\Phi = F_1X_1 + F_2X_2 - S$$

или

$$\begin{pmatrix} I_{(1)} - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & I_{(2)} - A_{22} & -I_{(2)} \\ -F_1 & -F_2 & +\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \Delta\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ -S \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \Delta\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(1)} - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & I_{(2)} - A_{22} & -I_{(2)} \\ -F_1 & -F_2 & +\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ -S \end{pmatrix}.$$

При этом для расчетов расширенной схемы межотраслевых связей по детальной классификации более удобно применять 1-й способ, а для расчетов укрупненных моделей — 2-й способ.

В процессе расчетов проверяются ограничения и по другим видам ресурсов. В частности, при использовании первого метода на каждой итерации проверяется соблюдение неравенства $(t_i)X^{(m)} \le L,$ где (t_i) — вектор коэффициентов трудоемкости продукции; L — максимально возможная величина трудовых ресурсов, которые могут быть заняты в производственной сфере.

1.7.2. Включение в модель зависимостей, характеризующих воспроизводство трудовых ресурсов

Система, аналогичная системе (1.20), может рассматриваться и в том случае, когда речь идет о воспроизводстве квалифицированных рабочих кадров. Здесь также налицо прямая и обратная связь системы подготовки кадров с системой текущего материального производства. С одной стороны, наличие квалифицированных кадров является фактором, определяющим размеры производства, а с другой стороны, процесс подготовки кадров требует определенных затрат, в том числе затрат продуктов отраслей материального производства.

Здесь вектор конечного продукта $\mathring{Y}$ будет отличаться от вектора конечного продукта обычной схемы на вектор затрат, связанных с подготовкой кадров:

$$\overset{\circ}{Y} = Y - D\Delta L,$$

где D — матрица коэффициентов затрат продуктов отраслей, связанных с подготовкой в течение рассматриваемого периода специалистов различных профессиональных групп размерностью $(n \times r)$;

ΔL — вектор величин подготовки специалистов различных профессиональных групп размерностью (r);

r — число профессиональных групп.

Балансы производства и распределения продукции в этом случае примут следующий вид:

$$(I - A)X - D\Delta L = \overset{\circ}{Y}.$$

Балансы трудовых ресурсов будут определяться по формуле

$$L + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\Delta L = \overset{\circ}{T}\,X + \widetilde{S},$$

где L — вектор наличия специалистов соответствующих профессиональных групп на начало года размерностью (r);

$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ — диагональная матрица коэффициентов перевода фактического поступления специалистов из системы подготовки кадров в среднегодовое поступление размерностью $(r \times r)$;

$\overset{\circ}{T}$ — матрица прямых коэффициентов трудоемкости в разрезе профессиональных групп размерностью $(r \times n)$;

$\widetilde{S}$ — вектор сальдо среднегодового межпрофессионального перераспределения трудовых ресурсов в процессе смены работниками занятий как внутри предприятий, так и при переходе на новое место работы, учитывающий также среднегодовое выбытие работников размерностью (r).

Определение элементов $\widetilde{S}$ — задача социологического характера, связанная в конечном счете с разработкой моделей движения населения и трудовых ресурсов.

1.7.3. Анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду

Выше рассмотрены методы использования расширенной схемы межотраслевого баланса во взаимосвязи материального производства с трудовыми ресурсами и основными фондами. Аналогичный подход может быть применен и для исследования взаимосвязей производственной системы с окружающей ее внешней средой. В качестве внешней среды может рассматриваться широкий класс социальных процессов, зависящих от системы производственных отношений и достигнутого уровня развития производительных сил, а также биосфера. Некоторые последствия производственной деятельности (уничтожение лесов, загрязнение воды и воздуха, разрушение структуры почвы и т. д.) может нарушить экологическую сбалансированность, что приводит к невозможности нормального протекания процессов жизнедеятельности человеческого общества. Следовательно, необходимы меры по ограничению производств, которые приводят к отрицательному воздействию на биосферу, и меры по очистке вредных отходов производства, загрязняющих окружающую среду.

Один из подходов к решению такого типа задач — разработка расширенной модели межотраслевого баланса соответствующего вида. Цель расчета по такой модели — определение производственной программы, соответствующей заданным объему и структуре конечного продукта, при условии, что объем выпускаемых во внешнюю среду загрязнений будет соответствовать некоторой допустимой норме (устанавливаемой экзогенно).

Пусть «чистым» отраслям в межотраслевом балансе соответствуют номера $1 \div m(i, j)$, а отдельным видам отходов и соответствующим им отраслям уничтожения отходов каждого вида — номера $(m+1) \div n \ (q, k)$. Соответственно, отрасли делятся на группы 1 и 2. Тогда расширенная модель межотраслевого баланса принимает вид

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ -Y_2 \end{pmatrix},$$

где X_1 — вектор валовых выпусков продуктов отраслей материального производства (m);

X_2 — вектор объемов ликвидации загрязнений различных видов $(n-m)$;

A_{11} — матрица коэффициентов прямых затрат предметов труда $a_{ij}(m \times m)$;

A_{21} — матрица коэффициентов a_{qj}, характеризующих выпуск отходов вида q при производстве единицы продукции отрасли j $\left((n-m) \times n\right)$;

A_{22} — матрица коэффициентов a_{qk}, характеризующих объем загрязнений q, возникающих при ликвидации единицы загрязнений k; $\left((n-m) \times (n-m)\right)$;

A_{12} — матрица коэффициентов a_{ik}, характеризующих затраты продуктов i для ликвидации единицы загрязнений вида k $\left(n \times (n-m)\right)$;

Y_1 — вектор конечного продукта (m);

Y_2 — вектор допустимых объемов загрязнений водного и воздушного бассейнов $(n-m)$.

Объем ликвидируемых загрязнений должен быть не выше допустимого уровня $Y_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 - X_2$.

Решение в общем виде может быть представлено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(1)} - A_{11} & -A_{12} \\ A_{21} & -I_{(2)} + A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Ценность и точность подобного рода расчетов возрастает по мере того, как мы переходим ко все более мелким территориальным единицам (загрязняются конкретные бассейны), но в то же время бассейны не имеют границ (национальных), поэтому необходимо проводить исследования и на международном уровне.

Как итог данного раздела рассмотрим пример полного расчета межотраслевого баланса.

Пример 1.7. Построение схемы межотраслевого баланса

За прошлый год в результате расчета межотраслевого баланса были получены следующие данные:

а) объемы валовых выпусков:

$$X = (100;\quad 20;\quad 30;\quad 10;\quad 80);$$

б) объемы затрат продукции на производство (X_{ij}):

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 6 & 2 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 12 & 0 & 8 \end{vmatrix};$$

в) объемы трудовых ресурсов:

$$L = (5;\quad 1;\quad 3;\quad 2;\quad 20);$$

г) объемы основных производственных фондов:

$$\Phi = (25;\quad 2;\quad 3;\quad 1;\quad 8).$$

На планируемый период требуются следующие объемы конечного продукта:

$$Y = (70;\quad 15;\quad 20;\quad 12;\quad 50).$$

При этом известно, что существуют ограничения на объемы:

а) трудовых ресурсов: $L^* = 35$;

б) основных производственных фондов: $\Phi^* = 42$;

в) валовых выпусков в третьей и пятой отраслях: $x_3^* = 40$; $x_5^* = 90$.

Рассчитать межотраслевой баланс на планируемый период с учетом заданных ограничений.

Решение

Сначала определим ограничения прямых коэффициентов по данным за прошлый год:

$$A = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0,05 \\ 0,01 & 0,15 & 0,1 & 0,2 & 0,075 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0 & 0,1 \end{vmatrix};$$

$t = (0,05 \quad 0,05 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,25);$

$f = (0,25 \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,1).$

Матрица полных коэффициентов затрат:

$$B = \begin{vmatrix} 1,19 & 0,18 & 0,4 & 0,32 & 0,3 \\ 0,04 & 1,01 & 0,04 & 0,02 & 0,07 \\ 0,04 & 0,18 & 1,17 & 0,24 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,28 & 0,12 & 0,61 & 0,18 & 1,23 \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем рассчитать объемы валовых выпусков, трудовых ресурсов и основных производственных фондов:

$X = (113,02 \quad 22,14 \quad 37,96 \quad 12 \quad 97,54).$

$L = (5,65 \quad 1,11 \quad 3,8 \quad 2,4 \quad 24,39);\ L_\Sigma = 37,34.$

$\Phi = (28,25 \quad 2,21 \quad 3,8 \quad 1,2 \quad 9,754);\ \Phi_\Sigma = 45,22.$

По заданным ограничениям мы превышаем x_5^*, L^*, Φ^*.

Сначала проведем изменения так, чтобы уложиться в заданные ограничения валового выпуска по 5-й отрасли. Для этого необходимо решить задачу по ограничению множества допустимых значений валовых выпусков (см. п. 1.6.3). Здесь $Q_1 = (x_5^*) = (90)$,

$\overline{Y}_2 = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4) = (70 \quad 15 \quad 20 \quad 12)$,

$A_{11} = |0,1|,\ A_{12} = |0,2 \quad 0 \quad 0,4 \quad 0|$,

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 0,2 \\ 0,05 \\ 0,075 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,02 & 0 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,15 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для облегчения дальнейших расчетов определим промежуточный вектор V:

$$V = A_{21} \cdot Q_1 + Y_2 + \begin{pmatrix} 0{,}2 \cdot 90 + 70 \\ 0{,}05 \cdot 90 + 15 \\ 0{,}075 \cdot 90 + 20 \\ 0 \cdot 90 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 19{,}5 \\ 26{,}75 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$X_2 = (I - A_{22})^{-1} \cdot V = (111{,}135 \quad 21{,}723 \quad 37{,}244 \quad 12).$

$y_5 = (I - A_{11}) \cdot Q_1 = A_{12} \cdot X_2 = 0{,}9 \cdot 90 - 0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}4 \cdot x_3 = 43{,}875.$

Получили следующие новые результаты:

$X = (111{,}135 \quad 21{,}723 \quad 37{,}244 \quad 12 \quad 90),$

$L = (5{,}557 \quad 1{,}086 \quad 3{,}724 \quad 2{,}4 \quad 22 \cdot 5), \ L_\Sigma = 35{,}267.$

$\Phi = (27{,}784 \quad 2{,}172 \quad 3{,}724 \quad 1{,}2 \quad 9), \ \Phi_\Sigma = 43{,}88.$

Мы все еще не укладываемся по ограничениям L^* и Φ^*.

Рассмотрим, по каким отраслям можно корректировать данные. Первая отрасль — самая фондоемкая. При этом объемы конечного продукта у нас самые большие в первой отрасли, значит снижение y_1 наименее «болезненно» отразится на этой отрасли. Если снизить y_1 до 68, то $L_\Sigma = 34{,}995$ (уже укладываемся в ограничение), но $\Phi_\Sigma = 43{,}213$. Если снизить y_1 до 64,3, то мы получим $L_\Sigma = 34{,}49$, $\Phi_\Sigma = 41{,}98$ — все ограничения соблюдены, при новых данных:

$$X = (104{,}4 \quad 21{,}5 \quad 37 \quad 12 \quad 88{,}4).$$

Примечание: при существенных ограничениях могут корректироваться объемы конечных продуктов не по одной, а по нескольким отраслям. При этом не забывайте, что после корректировки объемов конечного продукта даже по одной отрасли, необходимо пересчитывать объемы валовых выпусков по *всем* отраслям!

В результате проверенных расчетов получаем следующую схему межотраслевого баланса:

	Номер отрасли					Y	X
	1	2	3	4	5		
1	10,44	2,15	7,4	2,4	17,68	64,3	104,37
2	2,09	0	0	0	4,42	15	21,51
3	1,04	3,23	3,7	2,4	6,63	20	37
4	0	0	0	0	0	12	12
5	20,87	0	14,8	0	8,84	43,875	88,385
z	69,93	16,13	11,1	7,2	50,815		

X	104,37	21,51	37	12	88,385		
L	5,22	1,08	3,7	2,4	22,1		
Ф	26,09	2,15	3,7	1,2	8,84		

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите общие предпосылки возникновения межотраслевого баланса.

2. В чем заключается различие между коэффициентами прямых и полных затрат в модели межотраслевого баланса?

3. Что содержится в первом разделе схемы межотраслевого баланса?

4. Какие основные балансовые соотношения должны выполняться в схеме межотраслевого баланса?

5. Какие показатели выступают в качестве экзогенных переменных в модели межотраслевого баланса?

6. Как влияет изменение коэффициента прямых затрат на коэффициенты полных затрат?

7. С какими предпосылками связано развитие модели межотраслевого баланса?

8. Раскройте смысловое содержание коэффициентов полной трудоемкости и фондоемкости.

2. МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

2.1. Модель управления производством продукции

2.1.1. Описание модели

Совершенствование управления системами самого различного вида (предприятием, институтом, хозяйственным комплексом, государством) является одной из самых популярных и актуальных проблем сегодняшнего дня. Такие системы часто называют организационными, поскольку речь идет об организации деятельности коллектива людей для достижения определенных целей.

До сих пор управление организациями во многом остается более искусством, чем наукой. Дело в том, что поведение человека (коллектива) в организации определяется целым рядом факторов морального, материального, престижного, психологического характера, что приводит к значительным трудностям построения адекватных моделей. Присутствие человека приводит к определенной активности системы. Наиболее существенные проявления активности систем заключаются в сознательном искажении информации о своих возможностях, потребностях и целях, а также в снижении эффективности работы при отсутствии достаточных стимулов или выполнении совсем не той работы, которая предписана. Принятие заниженных планов, завышение сроков реализации проектов, затрат на их реализацию, невыполнение планов по внедрению новой техники — все это примеры активности экономических систем. Элементы таких систем называют «активными элементами». Активным называется элемент, имеющий цели (интересы), способный искажать информацию и работать с разной эффективностью (в соответствии со своими интересами).

Теория активных систем по своей содержательной направленности является теорией управления экономическими системами [5]. Главная задача, решаемая в теории активных систем, — построение эффективных хозяйственных механизмов (процедур планирования, законов стимулирования, принципов распределения премий и т. д.) и разработки рекомендаций по их совершенствованию.

Рассмотрим систему, состоящую из планирующего органа (центра) и n предприятий — производителей однородной продукции (элементов). Будем исследовать функционирование системы в дискретные периоды (месяц, год). В каждом периоде задача центра — назначить план каждому предприятию при условии, чтобы суммарный выпуск продукции был равен заданному количеству R, а суммарные затраты на производство продукции были минимальными. Пусть x_i — план выпуска продукции, z_i — затраты i-го предприятия на выпуск продукции в количестве x_i.

Естественно принять, что при заданном x_i существует минимальная величина $з_i(x_i)$ затрат. Однако реальные затраты могут быть значительно выше этой объективной величины (плохая организация производства, отсутствие заинтересованности к снижению затрат и т. д.); $з_i(x_i)$ — неубывающая функция (затраты растут с ростом плана). Для простоты пусть $з_i(x_i) = \frac{1}{2r_i} x_i^2$, где r_i — коэффициент эффективности производства. Итак, реальные затраты $z_i(x_i) \geq \frac{1}{2r_i} x_i^2$.

Суммарные затраты составят $\Phi(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i$. Задача центра состоит в том, чтобы минимизировать $\Phi(z)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} x_i = R$. Функцию $\Phi(z)$ будем называть ***целевой функцией центра*** в рассматриваемом периоде.

Рассмотрим мотивы, определяющие поведение предприятий. Интересы предприятия определяются целым рядом материальных, моральных, престижных и прочих факторов. Нас интересует выражение этих целей через x_i, z_i. Примем, что при выполнении плана предприятие получает определенный доход, возрастающий с ростом плана и уменьшением затрат: $f_i = \lambda x_i - z_i$. Например, f_i может определять величину фонда материального поощрения предприятия с точностью до положительного множителя. Если λ — цена продукции, то $(\lambda x_i - z_i)$ — величина прибыли. В рассматриваемом периоде функционирования будем называть f_i ***целевой функцией предприятия*** i.

Если бы центр знал коэффициенты эффективности $\{r_i\}$ всех предприятий, то задача оптимального функционирования системы была бы элементарной:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2r_i} x_i^2 \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = R. \end{cases}$$

Решая поставленную задачу, получаем оптимальный план: $\tilde{x}_i = \dfrac{r_i}{H} R,\ H = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i.$

Теперь центру достаточно назначить каждому предприятию соответствующий план x_i и обеспечить контроль за его выполнением. Поскольку при заданном x_i и цене λ прибыль предприятия максимальна при минимальных затратах, то предприятие заинтересовано реализовать план с минимальными затратами $\dfrac{1}{2r_i} \tilde{x}_i^2 = z_i$.

Затраты на выпуск всей продукции будут при этом также минимальными и составят: $\Phi_m = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{z}_i = \dfrac{1}{2H} R^2$.

Проблема возникает в том случае, если центр имеет ограниченную информацию о коэффициентах эффективности предприятий. Пусть центру известны только границы возможных значений $r_i : [d_i,\ D_i]$, где d_i — нижняя граница возможного r_i;

D_i — верхняя граница возможного значения r_i. Для r_i, d_i и D_i будут выполняться следующие соотношения: $0 < d_i \le r_i \le D_i < \infty$. В этом случае довольно распространенным является принцип максимального гарантированного результата, который в данном случае приводит к выбору плана, обеспечивающего минимальные затраты в наихудших условиях производства, т. е. при минимально возможных значениях коэффициентов эффективности $\{r_i\}$. Примем для упрощения одни и те же границы для всех предприятий: $[d, D]$. Решая задачу оптимального планирования при значениях $r_i = d$, получим план $x_i^{\text{o}} = R/n$ со значением целевой функции системы $\Phi_{\text{o}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2r_i} \cdot \frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}$, т. е. с точки зрения центра *все* предприятия находятся в равных условиях и плановое задание распределяется поровну. Относительное увеличение затрат в плане x^{o} по сравнению с оптимальным планом $\widetilde{x}$ определяется выражением

$$\frac{\Phi_m}{\Phi_{\text{o}}} = \frac{n^2}{\sum_i r_i \sum_i \frac{1}{r_i}}$$

и зависит от коэффициентов эффективности $\{r_i\}$, неизвестных центру. Чтобы получить оценку, не зависящую от r_i, возьмем минимум по всевозможным $d \le r_i \le D$. Этот минимум достигается при значениях r_i, равных либо d, либо D. Обозначим через k количество коэффициентов эффективности r_i, приравненных к верхней границе D, тогда $(n-k)$ количество коэффициентов эффективности r_i, приравненных к нижней границе d. Тогда

$$\sum_i r_i \sum_i \frac{1}{r_i} = \left(kD + (n-k)d\right)\left(\frac{k}{D} + \frac{n-k}{d}\right).$$

Вычисления показывают, что максимум достигается при $k = \frac{n}{2}$, если n — четно, и $k = \frac{n \pm 1}{2}$, если n — нечетно.

Обозначим через χ отношение нижней границы эффективности к верхней: $\chi = d/D$. Тогда эффективность управления можно определить через коэффициент $K_{\text{о}}$ следующим образом

$$K_{\text{о}} = \min_{\{r_i\}} \frac{\Phi_m}{\Phi_{\text{о}}} = \begin{cases} \dfrac{4\chi}{(\chi+1)^2}, n \text{ — четное;} \\ \dfrac{4\chi n^2}{(\chi+1)^2(n^2-1)+4\chi}, n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

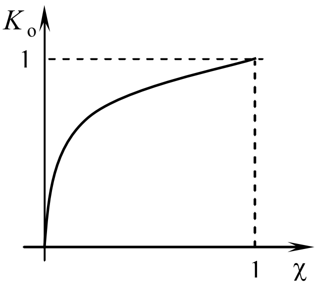


Рис. 2.1. График зависимости $K_{\text{о}}(\chi)$ при четных n

При малых χ эффективность планирования с использованием только имеющейся информации весьма низка (рис. 2.1). Так, при $\chi = 0{,}5\,(D = 2d)$ $K_{\text{о}} \approx 0{,}89$, а при $\chi = 0{,}1\,(D = 10d)$ $K_{\text{о}} = 0{,}33$.

Возникает вопрос: «Нельзя ли предложить более эффективную схему управления системой, учитывая то, что предприятия имеют более точную информацию о своих возможностях: знают достоверные значения r_i своих коэффициентов эффективности?». Например, можно обязать предприятия сообщать в центр оценки r_i или непосредственно планы x_i, которые центр корректирует так, чтобы $\sum_{i=1}^{n} x_i = R$. Центр может оценивать эффективность производства на основе известных планов и затрат на их реализацию в предыдущие периоды и планировать, опираясь на эти оценки. Предшествующий планированию этап получения дополнительной информации о предприятиях будем называть ***этапом формирования данных.*** Рассмотрим различные способы организации взаимоотношений между центром и предприятиями.

2.1.2. Принцип жесткой централизации

Если центр обязывает предприятия сообщать оценки коэффициентов эффективности, то способ формирования данных называется ***встречным***, поскольку информация движется «снизу вверх» (от предприятий к центру), а планы назначаются «сверху вниз» (от центра к предприятиям).

Пусть s_i — оценка коэффициента эффективности, сообщаемая i-м предприятием, $s = \{s_i\}$ — совокупность всех оценок. Центр на основе полученной информации назначает предприятиям планы $\{x_i(s)\}$ и устанавливает цену $\lambda(s)$ продукции. Процедура определения планов и цены, представленная выражением $\pi(s) = \{\lambda(s),\ x(s)\}$, называется ***законом управления***, где $x(s)$ — закон планирования, а $\lambda(s)$ — закон ценообразования.

Законы управления определяются на основе ***принципов управления. Принцип жесткой централизации*** (ЖЦ) характеризуется тем, что центр в первую очередь учитывает интересы системы. В нашем случае этот принцип соответствует решению центром задачи оптимального планирования

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2s_i} x_i^2 \to \min,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = R .$$

Ее оптимальное решение определяет закон планирования

$$x_i(s) = s_i \frac{R}{S}, \quad \text{где} \quad S = \sum_{j=1}^{n} s_j .$$

Выбор закона ценообразования в данном случае произволен. Его конкретизация определяет некоторый закон ЖЦ.

Рассмотрим простейший вариант, когда цена λ фиксирована. Подставляя $x_i(s)$ в целевую функцию предприятия, выразим ее как функцию сообщаемых оценок $\{s_i\}$:

$$f_i(s) = \lambda x_i(s) - \frac{1}{2r_i} x_i^2(s) = \frac{\lambda s_i}{S} R - \frac{s_i^2 R^2}{2r_i S^2}. \qquad (2.1)$$

Анализ показывает, что прибыль предприятия зависит не только от его оценки, но и от оценок всех других предприятий. Здесь мы имеем дело с типичной игрой n лиц (предприятий) с функциями выигрыша i-го игрока $f_i(s)$. Оценка s_i является стратегией i-го игрока, а отрезок $[d,\ D]$ — множеством возможных стратегий. Совокупность оценок $s = \{s_i\}$ определяет ситуацию игры. Под решением игры будем понимать ситуацию равновесия в смысле Нэша (s^*):

$$D_i(s^*) = \max_{d \le s_i \le D} D_i(s_i^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)..$$

Смысловая интерпретация ситуации равновесия такова: если все предприятия будут сообщать центру оценки коэффициентов эффективности из равновесной ситуации s^*, то для i-го предприятия единственным разумным поведением будет сообщение оценки эффективности также из ситуации равновесия s_i^*. При сообщении любой другой оценки i-е предприятие получит прибыль либо такую же, как в ситуации равновесия, либо меньше.

Найдем максимум целевой функции предприятия, описанной уравнением (2.1). Для этого возьмем производную целевой функции по x_i и приравняем ее нулю: $\lambda - \frac{1}{r_i} x_i = 0$, в результате чего получаем $x_i = \lambda r_i = v_i$.

Таким образом, предприятием запланирован выпуск продукцию в объеме v_i, при этом оно получает максимум прибыли

Кроме того, план предприятия $x_i(s) = s_i \frac{R}{S}$ является возрастающей функцией. Поэтому, если $x_i(s^*) < v_i$, то это означает, что предприятие должно сообщать максимально возможное значение эффективности $s_i^* = D$. Если $x_i(s^*) > v_i$, то $s_i^* = d$, а если $d < s_i^* < D$, то обязательно $x_i^* = x_i(s^*) = v_i$. Пусть предприятия упорядочены по возрастанию v_i : $v_1 \le v_2 \le \ldots \le v_n$.

Рассмотрим пять возможных случаев соотношения спроса и предложения:

1) $nv_1 \ge R, \sum_{i=1}^{n} v_i > R$ (предложения на выпуск продукции со стороны предприятий существенно превышают спрос R). Здесь единственная ситуация равновесия $s^* = D$. При этом $x_i^* = \frac{R}{n}$;

2) $nv_1 < R < \sum_{i=1}^{n} v_i$ (предложения на выпуск продукции со стороны предприятий превышают спрос). Определим минимальное $0 < k < n$ такое, что $R - \sum_{i=1}^{k} v_i \le (n-k)v_{k+1}$ (т. е. для оставшихся $(k+1) \div n$ предприятий $s_i^* = D$ аналогично первому случаю). Тогда равновесная ситуация будет определяться следующим образом:

$$s_i^* = \begin{cases} \dfrac{(n-k)D}{R - \sum\limits_{j=1}^{k} v_j} \lambda r_i, \ i = 1 \div k; \\ D, \ i = (k+1) \div n; \end{cases}$$

3) $\sum_i v_i = R$ (баланс спроса и предложения). Здесь равновесна любая ситуация $s^* = \gamma r$, так как $x^* = v$. Из условия $d \le s^* \le D \Rightarrow d/r_1 \le \gamma \le \frac{D}{r_n}$ (s_i^* не может быть больше D и не может быть меньше d). В этом случае можно взять просто $s^* = r$;

4) $\sum_{i=1}^{n} v_i < R < nv_n$ (спрос на продукцию превышает предложения со стороны предприятий). Определим максимальное k такое, что $R - \sum_{j=k+1}^{n} v_j \geq kv_k$. В данном случае единственная ситуация равновесия будет вычисляться по формуле

$$s_i^* = \begin{cases} d, \ i = 1 \div k; \\ \dfrac{kd}{R - \sum\limits_{j=k+1}^{n} v_j} \lambda r_i, \ i = (k+1) \div n; \end{cases}$$

5) $nv_n \leq R, \sum_i v_i < R$ (спрос на продукцию существенно превышает предложение со стороны предприятий). Единственная ситуация равновесия: $s^* = d, \ x^* = \dfrac{R}{n}$.

Пример 2.1. Функционирование производства в условиях ЖУ

Пусть у нас имеется пять предприятий, работает принцип ЖУ, $R = 40$, $\lambda = 2$, $r = (1, 2, 4, 8, 10)$, $d = 1$, $D = 15$.

Необходимо определить планы предприятий, затраты центра при ЖЦ и прибыли предприятий.

Предприятия «желали» бы выпускать продукцию в следующих объемах: $v = (2, 4, 8, 16, 20)$, $\sum v_i = 50$. Для заданных условий определим, какой из вышеперечисленных вариантов действует в нашем случае. Здесь $n \cdot v_1 = 10 < R = 40 < \sum v_i = 50$, т. е. предложение превышает спрос. Определим k:

$k = 1: 40 - 2 = 38 > 4 \cdot 4 = 16;$

$k = 2: 40 - 2 - 4 = 34 > 3 \cdot 8 = 24;$

$k = 3: 40 - 2 - 8 = 26 < 2 \cdot 16 = 32.$

$$s_i^* = \begin{cases} \frac{2 \cdot 15}{26} \cdot 2 \cdot r_i, \ i = 1 \div 3; \\ 15, \ i = 4 \div 5. \end{cases}$$

Тогда равновесная ситуация:

Оценки эффективности, сообщаемые предприятиями центру:

$s_1^* = 2{,}308; s_2^* = 4{,}615; s_3^* = 9{,}231; s_4^* = s_5^* = 15$. $S = 46{,}154$.

Тогда планы предприятий примут значения:

$X_1 = 2; X_2 = 4; X_3 = 8; X_4 = X_5 = 13 \quad (\sum X_i = 40)$.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2r_i} X_i^2 = 33{,}0125.$$

Затраты центра составят:

Прибыли предприятий: $f_1 = 2 \cdot 2 - 4/(2 \cdot 1) = 2;$

$f_2 = 2 \cdot 4 - 16/(2 \cdot 2) = 4;$

$f_3 = 2 \cdot 8 - 64/(2 \cdot 4) = 8;$

$f_4 = 2 \cdot 13 - 169/16 = 15{,}4375;$

$f_5 = 2 \cdot 13 - 169/20 = 17{,}55.$

Заметим, что для случаев 1 и 5 план в ситуации равновесия совпадает с полученным при использовании только имеющейся информации о границах $[d, D]$. Эти случаи являются самыми неблагоприятными режимами работы системы с точки зрения ее эффективности. Поэтому эффективность законов ЖЦ для этих случаев в точности равна K_0: дополнительная информация не дает эффекта.

Эффективность рассмотренного закона ЖЦ можно повысить, если ввести штрафы за искажение информации. Пусть на этапе реализации центр может оценить реальные затраты на выпуск продукции и тем самым реально достигнутое значение эффективности $a_i = \frac{x_i^2}{2z_i} \le r_i$. Это позволяет ввести в целевую функцию составляющую, соответствующую штрафу при отклонении a_i от сообщенной оценки s_i. Рассмотрим случай «сильных штрафов», когда единственной разумной стратегией предприятия является совпадение реальной a_i и планируемой s_i эффективности. Так как $a_i \le r_i$, то сообщаемая оценка в случае сильных штрафов также должна удовлетворять условию $s_i \le r_i$. При этом $z_i = \frac{x_i^2}{2a_i} = \frac{x_i^2}{2s_i}$, и целевая функция (2.1) примет вид

$$f_i(s) = \lambda x_i(s) - \frac{1}{2s_i} x_i^2(s) = \frac{s_i R}{S}\left(\lambda - \frac{R}{2S}\right).$$

Покажем, что если $\lambda \ge \frac{R}{2S}$, то $s^* = r$ — единственная ситуация равновесия: при $\lambda \ge \frac{R}{2S}$ оба сомножителя $\frac{s_i}{S}$ и $\lambda - \frac{R}{2S}$ являются возрастающими функциями s_i, следовательно $f_i(s)$ — возрастающая функция s_i. Поэтому максимальное значение $f_i(s)$ достигается на границе $s_i^* = r_i$. Таким образом, установив достаточно высокую цену продукции, центр может обеспечить оптимальное функционирование системы (в смысле минимизации затрат на производство продукции), тогда коэффициент эффективности управления $K_{\text{ЖЦ}}$ будет равен 1. Для этого достаточно взять $\lambda = \frac{R}{2nd}$. Однако цена продукции при малых значениях d может быть значительно больше, чем оптимальная цена $\tilde{\lambda} = \frac{R}{H}$. Если же взять $\lambda < \frac{R}{2nd}$, то возможен случай $\lambda = \frac{R}{2H}$, игровой анализ которого является более сложным: достоверность оценок и оптимальность планов удается обеспечить только при достаточно высокой λ. Рассмотрим ситуацию с заниженной ценой на примере

Пример 2.2. Жесткая централизация для случая сильных штрафов и низкой ценой

$n = 5;\ R = 100;\ \lambda = 1;\ d = 1;\ r_i = 5,\ i = 1 \div 5;\ H = 25.$

Действуют принцип ЖЦ и «сильные штрафы».

Имеем $\lambda = 1 < \frac{R}{2H} = 2$. Если все предприятия сообщают достоверные оценки, то $Д_i(s) = 20(1-2) = -20$. В этих условиях каждому предприятию выгодно сообщать минимальную оценку $s_i = 1$ (при условии, что все остальные сообщают достоверные оценки), т. е. ситуация $s^* = r$ не является точкой Нэша. Проанализируем ситуации, в которых k предприятий сообщают достоверные оценки, а остальные — минимальную оценку:

а) случай, при котором $k = 5$ уже рассмотрен;

б) $k = 4,\ S = 4 \cdot 5 + 1 = 21$. Прибыль (потери) для предприятия, сообщившего минимальную s_i, равна $\frac{100}{21}\left(1 - \frac{100}{42}\right) \approx -7$, для остальных — $5 \cdot (-7) = -35$;

в) $k = 3,\ S = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17.$ Потери предприятий с минимальной оценкой увеличатся и составят теперь $\frac{100}{17}\left(1 - \frac{100}{34}\right) \approx -12$, для остальных — $5 \cdot (-12) = -60;$

г) $k = 2,\ S = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$. Потери предприятий, сообщивших минимальные оценки, равны -22, для предприятий, сообщивших достоверные оценки: -110;

д) $k = 1,\ S = 9$. Потери предприятий, сообщивших минимальные оценки, равны -50, для предприятий, сообщивших достоверные оценки, равны -250;

е) $k = 0,\ S = 5$. Прибыль всех предприятий равна -180.

Здесь ситуация (е) является единственной равновесной ситуацией, но не «разумной». Действительно, существуют ситуации (а), (б) и (в) более предпочтительные для всех предприятий. Тем не менее для осуществления этих ситуаций часть предприятий, а именно ситуации (б) и (в), либо все предприятия, т. е. ситуация (а), должны договариваться. При этом всегда существует соблазн обмануть «товарищей по договору» и получить меньшие потери. Таким образом, при низких ценах выбор наилучшей ситуации с точки зрения всех участников (предприятий) остается весьма противоречивой задачей.

2.1.3. Принцип открытого управления

Причина низкой эффективности принципа ЖЦ (при фиксированной цене) заключается в определенном противоречии интересов центра и предприятий: центр планирует выпуск продукции в объеме R, а предприятия в сумме «желают» выпускать $V = \sum_i v_i = \lambda H$. Если спрос и предложение различны $R \neq \lambda H$, то цели центра и предприятий не совпадают. Отсюда и появляется желание предприятий исказить информацию о собственных возможностях, результатом чего и являются различия в оптимальных и фактических планах и затратах.

Возникает идея согласования интересов центра и предприятий. В качестве примера служит третий случай соотношения спроса и предложения, в котором спрос совпадает с предложением $\left(\sum_i v_i = R\right)$, поэтому у предприятий нет причин искажать данные, и можно принять, что они будут сообщать достоверные оценки, т. е. для разрешения конфликта достаточно установить цену $\lambda = \dfrac{R}{H}$. Трудность состоит в том, что центр не знает суммарную эффективность предприятий H, а знает только ее допустимые границы $nd \leq H \leq nD$. Однако центр имеет оценки $\{s_i\}$, полученные от предприятий, следовательно, он знает оценку $S = \sum s_i$ величины H, оценку целевой функции предприятия $\lambda x_i - \dfrac{1}{2s_i} x_i^2$ и оценку λs_i «выгодного» для предприятия плана $v_i = \lambda r_i$. Попытаемся устранить конфликт, опираясь на имеющуюся информацию. Для этого определим закон управления следующим образом:

$$\lambda(s) = \frac{R}{S},\ x_i(s) = \lambda(s) \cdot s_i = s_i \frac{R}{S} \qquad (2.2)$$

При таком определении цены $\lambda(s)$, план $x_i(s)$ обеспечивает максимум функции $\lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2$, отражающей представление центра об интересах предприятия. Будем называть ее ***функцией предпочтения*** предприятия. Таким образом, при законе (2.2) каждое предприятие получает план, обеспечивающий максимум его функции предпочтения. Такой план будем называть ***согласованным***. ***Принцип открытого управления*** (ОУ) — это принцип, при котором все предприятия получают согласованные планы. Принцип ОУ определяет единственный закон ОУ (2.2). Формально принцип ОУ можно записать в виде следующей задачи оптимизации, которая называется ***задачей согласованного планирования***: необходимо определить $x \geq 0,\ \lambda > 0$ такие, что

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2s_i} x_i^2 \to \min,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = R; \\ \lambda x_i - \frac{1}{2s_i} x_i^2 = \max_z \left(\lambda z - \frac{1}{2s_i} z^2 \right). \end{cases} \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется ***условием совершенного согласования***.

Проведем анализ полученного закона ОУ (определим точки Нэша). Подставим (2.2) в целевые функции предприятий:

$$f_i(s) = \lambda(s) x_i(s) - \frac{1}{2r_i} x_i^2(s) = s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right) \frac{R^2}{S^2}.$$

Определим ситуацию равновесия. Для определения максимума приравниваем первую производную нулю:

$$f_i' = \left(1 - \frac{s_i}{r_i}\right) \frac{R^2}{S^2} - \frac{2R^2}{S^3} s_i \left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right) = 0.$$

Учитывая, что $S = s_i + \sum_{j \neq i} s_j$, и обозначив $S_i = \sum_{j \neq i} s_j$, получим:

$$1-\frac{s_i}{r_i}-\frac{2s}{S_i+s}\left(1-\frac{s}{2r_i}\right)=\frac{r_i-s_i}{r_i}-\frac{2s_i-\dfrac{s_i^2}{r_i}}{S_i+s_i}=$$

$$=\frac{r_iS_i+r_is_i-Vs-s_i^2-2r_is_i+s_i^2}{r_i(S_i+s_i)}=0,$$

отсюда $r_iS_i = s_i(S_i + r_i)$. В результате получаем следующее выражение для оценок эффективности:

$$s_i^* = r_i\frac{S_i^*}{r_i+S_i^*}, \text{ где } S_i^* = S^* - s_i^* = \sum_{j\neq i} s_j^*. \qquad (2.4)$$

Если решение этой системы $d \le s^* \le D$, то s^* — ситуация равновесия.

Если для некоторого множества Q^* предприятий $s_i^* < d$, то ситуация равновесия определяется из условий:

$$\begin{cases} s_i^* = d,\ i\in Q; \\ s_i^* = r_i\dfrac{S_i^*}{r_i+S_i^*},\ i\notin Q. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Единственная ситуация равновесия:

при $n=1$: $s_1^* = d\,(S_1^* = 0, s_1^* = 0)$;

при $n=2$: $s_1 = s_2\dfrac{r_1}{r_1+s_2} < s_2$ и одновременно $s_2 = s_1\dfrac{r_2}{r_2+s_1} < s_1$.

Следовательно, единственное решение системы (2.4) $s_1 = s_2 = 0$ и ситуация равновесия $s_1^* = s_2^* = d$.

При $n > 2$ всегда имеется единственное решение.

Так как на практике решение системы нелинейных уравнений (2.5) представляет значительные трудности, оценки коэффициентов при ОУ можно рассчитывать итерационным методом. Расчет оценок производится за несколько шагов (итераций):

0-я итерация. В качестве первоначального приближения значения оценок коэффициентов принимаются равными нижнему граничному значению d: $\forall\ i\ s_i^{(0)} = d$;

1-я итерация. Значения оценок определяются через оценки, рассчитанные на 0-й итерации:

$$\forall\ i \quad s_i^{(1)} = r_i \frac{\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} s_j^{(0)}}{r_i + \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} s_j^{(0)}};$$

k-я итерация. Значения оценок определяются через оценки, рассчитанные на (k–1)-й итерации:

$$\forall\ i \quad s_i^{(k)} = r_i \frac{\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} s_j^{(k-1)}}{r_i + \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} s_j^{(k-1)}}.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока для всех i не выполняться условия: $\left| s_i^{(k)} - s_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$, где ε — заданная точность вычислений.

Отклонение точки Нэша s^* от достоверного значения r будем оценивать величиной степени достоверности информации:

$$J(n, \chi) = \max_i \left| \frac{r_i - s_i^*}{r_i} \right| = \max_i \frac{r_i}{S_i^* + r_i}.$$

Учитывая, что $S_i^* \geq (n-1)d,\ r_i \leq D$, получается

$$0 \leq J(n, \chi) \leq \frac{D}{(n-1)d + D} = \frac{1}{1 + (n-1)\chi},\ 0 < \chi \leq 1.$$

Итак, ***ситуация равновесия существует и она единственная***. Оценим эффективность закона ОУ.

Во-первых, $\lim\limits_{n\to\infty} J(n, \chi) = 0$, следовательно, $s_i^* \approx r_i$ при достаточно большом количестве предприятий. Тогда $x_i^* \approx \widetilde{x}_i$ и

$K_{\text{ОУ}} \approx 1$. Таким образом, при достаточно большом числе предприятий закон ОУ является квазиоптимальным законом управления, т. е. обеспечивает близость равновесного плана к оптимальному. Дополнительное свойство: близость сообщаемых оценок к достоверным. Цена продукции в этой ситуации — $\lambda^* \approx \dfrac{R}{H} = \tilde{\lambda}$.

Рассмотрим ситуацию, когда в системе имеется одно предприятие, коэффициент эффективности которого значительно выше суммарной эффективности остальных. Такое предприятие называют монополистом. Предположим, это первое предприятие.

Тогда при достаточно большом числе предприятий n имеем:

$$r_1 >> H_1,\ r_1 > \frac{1}{2}H;$$

$$s_i^* \approx r_i,\ i = 2 \div n;\ s_1^* \approx r_1 \frac{H_1}{H} = r_1 \frac{H_1}{r_1 + H_1} \approx H_1, \text{ где } H_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i;$$

$$S^* \approx \sum_{j=2}^{n} r_j + H_1 = 2H_1;$$

$$x_1^* \approx \frac{1}{2}R,\ x_i^* \approx \frac{r_i}{2H_1}R,\ i = 2 \div n.$$

Таким образом, монополист в ситуации равновесия выпускает почти половину всей продукции, в то время как в оптимальном плане — почти всю продукцию. Сообщая заниженную оценку коэффициента эффективности ($s_1^* \approx H_1 << r_1$) монополист добивается повышенной цены продукции:

$$\lambda^* = \frac{R}{S^*} \approx \frac{R}{2H_1} >> \frac{R}{H_1 + r_1} = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda},$$

где $\tilde{\lambda}$ — цена, устанавливаемая центром при достоверной информации, и следовательно, получает «сверхприбыль»:

$$\lambda^* x_1^* - \frac{1}{2r_1} x_1^{*2} \approx \frac{R^2}{4H_1} - \frac{R^2}{8r_1} \approx \frac{R^2}{4H_1} >> \frac{R^2}{2r_1} \cdot \frac{r_1^2}{(H_1 + r_1)^2} \approx \frac{R^2}{2r_1}.$$

Таким образом, закон ОУ эффективнее закона ЖЦ. Но при малом числе предприятий, а особенно при наличии монополиста в системе, эффективность закона ОУ может быть весьма низкой. Дальше мы покажем, что в условии централизованного планирования можно предложить законы управления достаточно эффективные и при наличии монопольной организации.

Пример 2.3. Функционирование производства в случае ОУ

Рассматривается принцип открытого управления. Имеется 40 предприятий со следующими характеристиками:

$$N = 40,\ r_1 = 400,\ r_i = 2\ (i = \overline{2,40}),\ d = 2,\ D = 500,\ R = 100.$$

Необходимо найти:

оценки эффективности, сообщаемые предприятиями центру;

цену продукции и планы предприятий, назначаемые центром.

В нашем случае присутствует явный монополист — первое предприятие. При большом количестве предприятий с малой эффективностью, все они будут сообщать примерно реальные коэффициенты эффективности: $s_i^* \approx r_i = 2\ (i = \overline{2,40})$.

Для предприятия-монополиста можно воспользоваться приближенной формулой определения сообщаемой оценки: $s_1^* \approx H_1 = 39 \cdot 2 = 78$.

Тогда цена на продукцию будет

$$\lambda \approx \frac{R}{2H_1} = \frac{100}{156} = 0{,}641.$$

Планы, которые получат предприятия:

$$x_1 = s_1^* \frac{R}{2H_1} = 78 \cdot \frac{100}{156} = 50;$$

$$\forall i = \overline{2,40} \quad x_i = 2 \cdot \frac{100}{156} = 1{,}282.$$

Недостатком закона ОУ является искажение сообщаемой предприятиями информации о коэффициентах эффективности. Это искажение тем более значительно, чем больше разница между сообщаемыми оценками s_i и реальными коэффициентами эффективности r_i.

Попытаемся устранить указанный недостаток введением дополнительных механизмов воздействия на предприятие.

Рассмотрим следующие виды открытого управления:

- дифференцированные цены;
- штрафы;
- адаптивный способ формирования данных;
- нормирование целевых функций.

Дифференцированные цены

Введем индивидуальные цены для каждого предприятия:

$$\lambda_i = \frac{R}{S_i + a_i}, \text{ где } a_i = \frac{x_i^2}{2z_i},\ z_i \geq \frac{x_i^2}{2r_i}. \qquad (2.6)$$

Центр не может определить λ_i на этапе планирования, поскольку цена зависит от реальной эффективности a_i, с которой работает i-е предприятие. Центр вычисляет норматив S_i (из сообщаемых оценок эффективности предприятий) и сообщает предприятию i. Цену λ_i предприятие определяет самостоятельно на этапе реализации по формуле (2.6). Подставляя закон планирования $x_i(s) = \frac{s_i}{S} R$ и закон ценообразования (2.6) в целевую функцию предприятия, получим

$$f_i(s) = \lambda_i x_i - \frac{1}{2a_i} x_i^2 = \frac{s_i R^2}{S(S_i + a_i)} - \frac{s_i^2 R^2}{2a_i S^2}. \qquad (2.7)$$

Заметим, что из $r_i \geq \frac{1}{2z_i} x_i^2$ следует, что $0 < a_i \leq r_i$. Эти ограничения a_i означают, что предприятие не может работать с эффективностью, превышающей r_i.

Дифференцируя по s_i, получаем уравнение для равновесной стратегии

$$f_i'(s) = \frac{R^2}{S(S_i + a_i)} - \frac{s_i R^2}{a_i S^2} - \frac{s_i R^2}{S^2(S_i + a_i)} + \frac{s_i^2 R^2}{a_i S^3} = 0.$$

Его единственное решение $s_i^* = a_i$ (т. е. единственной разумной стратегией поведения для любого предприятия является работа с такой же эффективностью, о которой предприятие сообщает центру). Подставляя решение в формулу (2.7), получаем

$$\lambda_i^* x_i^* - \frac{1}{2a_i} x_i^{*2} = \frac{R^2 a_i}{2A^2}, \text{ где } A = \sum_{j=1}^{n} a_j . \qquad (2.8)$$

Определим теперь оптимальные затраты z_i i-го предприятия или реальный коэффициент эффективности производства: $a_i = \frac{x_i^2}{2z_i} \le r_i$. Дифференцируя (2.8) по a_i, получаем

$$\frac{R^2}{2A^2} - \frac{R^2 a_i}{A^3} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{A - 2a_i}{A^3}.$$

Приравнивая производную нулю, получаем $a_i^* = \frac{A}{2}$ или, учитывая, что $s_i^* = a_i$, можно записать: $s_i^* = \frac{S}{2}$. Отсюда следует, что если $r_i \le \frac{H}{2}$ для любого предприятия, то применение дифференцированных цен дает $s^* = a = r$, т. е. ***план в ситуации равновесия совпадает с оптимальным***.

Однако, если для i-го предприятия $r_i > 0{,}5H$, то $s_i^* = 0{,}5S = H_i$, $x_i^* = 0{,}5R < \frac{r_i}{H} R = \tilde{x}_i$, и план в ситуации равновесия не является оптимальным. Тем не менее эффективность закона управления и в этом случае повышается. Так, при $r_1 = 0{,}5H$ план в ситуации равновесия является оптимальным. В то же время для закона ОУ при $r_1 = 0{,}5H$ имеем $x_i^* = \frac{r_1}{H + r_1} R = \frac{1}{3} R \ne \tilde{x}_1 = \frac{r_i}{H} R = \frac{1}{2} R$. И только в случае монополиста $(r_1 >> 0{,}5H)$ применение дифференциальных цен практически не дает эффекта по сравнению с законом ОУ. При $n = 2$ любая ситуация $s_2^* = a$, где $d \le a \le \min(r_1,\ r_2)$ является ситуацией равновесия.

Штрафы

Пусть центр планирует не только количество выпускаемой продукции, но и затраты на производство (либо другое: себестоимость, прибыль и т. д.). Обозначим через w_i планируемую величину затрат, которая определяется на основе s_i, а именно: $w_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$.

При любом отклонении реальных затрат z_i от планируемых w_i предприятие штрафуется. Пусть функция штрафа:

$$\theta_i = \begin{cases} \alpha(z_i - w_i),\ z_i \ge w_i; \\ \beta(w_i - z_i),\ z_i \le w_i, \end{cases}$$

где α, β — коэффициенты штрафа за занижение и завышение оценок затрат по сравнению с реальными $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

В этом случае целевая функция предприятия примет вид

$$f_i(\lambda,\ x_i,\ z_i,\ w_i) = \lambda x_i - z_i - \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} (z_i - w_i).$$

Поскольку в системе без штрафов $s_i^* \le r_i$, а значит $w_i^* = \frac{1}{2s_i^*} x_i^2 > \frac{1}{2r_i} x_i^2$, то достаточно провести анализ ситуации $w_i \ge z_i$. В этом случае целевая функция предприятия будет выглядеть следующим образом:

$$f_i = \lambda x_i - (1-\beta) z_i - \beta w_i = \lambda x_i - z_i + \beta(z_i - w_i).$$

Рассмотрим два случая штрафов:

1) случай слабых штрафов — $s_i \le r_i,\ 0 \le \beta \le 1$. Здесь прибыль — убывающая функция z_i. Подставим $z_i = \frac{1}{2r_i} x_i^2$ в целевую функцию:

$$f_i = \lambda x_i - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta}{r_i} + \frac{\beta}{s_i}\right)x_i^2 = \lambda^2 s_i\left(1 - \frac{\beta}{2} - \frac{(1-\beta)s_i}{2r_i}\right).$$

Дифференцируя функцию по s_i и учитывая, что $\lambda = \dfrac{R}{S}$, получаем

$$s_i^* = \begin{cases} r_i \dfrac{S_i^*}{r_i + \rho S_i^*}, \ (1-\rho)S_i^* < r_i; \\ r_i, \ (1-\rho)S_i^* \ge r_i \ (\text{иначе } s_i^* > r_i), \end{cases} \tag{2.9}$$

где $\rho = 1 - \dfrac{\beta}{2-\beta}$;

2) случай сильных штрафов — $\beta > 1$: прибыль — возрастающая функция z_i. В такой ситуации единственное разумное поведение предприятий — максимизировать реальные затраты и установить их равными плановым затратам: $z_i = w_i$ (так как $z_i \le w_i$). Тогда сообщаемые оценки будут равны реальным коэффициентам эффективности предприятий: $s_i^* = r_i$.

Пусть $\beta = 1$, тогда $\rho = 0$, в этом случае мы получаем следующую ситуацию равновесия: $s_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{2} S^*, \ S^* < 2r_i; \\ r_i, \ S^* \ge 2r_i. \end{cases}$

Ситуация равновесия для случая сильных штрафов совпадает с ситуацией равновесия для случая дифференцирования цен. Эффективность закона ОУ также совпадает. Так, например, при наличии в системе монополиста применение даже сильных штрафов практически не дает эффекта.

Заметим, что даже в случае слабых штрафов может сложиться ситуация, когда все предприятия будут сообщать свои реальные оценки эффективности. Минимальное β, при котором $s^* = r$, определяется из условия $1 \ge \beta \ge \dfrac{2}{H}\max_i r_i$.

Пример 2.4. Открытое управление в случае слабых штрафов

Дано: $n = 5, R = 40, r = (1, 2, 4, 5, 8), d = 1, D = 10, H = 20.$

Действует принцип открытого управления, причем центр ввел штрафы на отклонение от планируемых затрат: $\beta = 0{,}7$.

Минимально возможное $S_i^* = 4$ (из $d = 1$), тогда

$$\min(1-\rho)\cdot S_i^* = 2{,}154 > r_1 \text{ и } > r_2,$$

следовательно, $S_1^* = r_1 = 1,\ S_2^* = r_2 = 2.$

Для остальных предприятий расчет сообщаемых оценок эффективности проводится итерационным методом по формуле (2.9). Рассчитывая S_i^* для остальных предприятий, получаем: $S_3^* = 4,\ \ S_4^* = 5,$ $S_5^* = 7{,}091$.

Адаптивный способ формирования данных

При адаптивном способе формирования данных оценка s_i определяется центром не путем опроса предприятий, а на основе известных планов, затрат и оценок в предыдущие периоды функционирования. Примем, что $s_{ik} = \max\left(\dfrac{x_{ik-1}^2}{2z_{ik-1}},\ d\right)$, где x_{ik-1}, z_{ik-1} — план и затраты в периоде $(k-1)$; s_{ik} — оценка коэффициента эффективности производства в периоде k.

В этом случае выбор предприятием конкретной величины затрат в данном периоде функционирования повлияет на план и цену продукции в будущем. Одним из свойств активности организаций является учет последствий принимаемых «сегодня» решений. Для формализации этого свойства примем, что интересы предприятия в рассматриваемом периоде (нулевом) определяются стремлением к максимуму взвешенной суммы прибылей в данном и будущих периодах:

$$\lambda_0 x_{i0} - z_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_i^k \left[\lambda_k x_{ik} - z_{ik}\right], \tag{2.10}$$

где δ_i^k — дисконтирующий множитель ($0 \le \delta_i^k < 1$, будущие прибыли учитываются с меньшим весом).

Выражение (2.10) будем называть критерием эффективности с учетом будущих периодов. Выбор z_{i0}, по существу, эквивалентен выбору достигнутого коэффициента эффективности $a_{i0} = \dfrac{x_{i0}^2}{2z_{i0}} \le r_i$, который и принимается за оценку s_{i1} следующего периода. Выбор a_i мы будем считать стратегией i-го предприятия в рассматриваемом периоде $(d \le a_i \le r_i)$. Для упрощения примем следующую гипотезу поведения: предприятие предполагает, что достигнутая эффективность a_i остается неизменной в будущие периоды, следовательно, и оценка s_{ik} будет равна a_i для любого $k \ge 1$. Тогда критерий эффективности примет вид:

$$\lambda_0 x_{i0} - \frac{1}{2a_i} x_{i0}^2 + N_i \left(\lambda(a) x_i(a) - \frac{1}{2a_i} x_i^2(a) \right), \qquad (2.11)$$

где $N_i = \dfrac{\delta_i}{1-\delta_i}$ — ***степень дальновидности предприятия***.

Подставляя закон ОУ (2.2) в выражение (2.11) и учитывая, что $s_i = a_i$, $S = A$, получаем следующий вид критерия эффективности:

$$\lambda_0 x_{i0} - \frac{1}{2a_i} x_{i0}^2 + \frac{1}{2} N_i \frac{R^2 a_i}{A^2}. \qquad (2.12)$$

Ситуацию равновесия a^* будем называть устойчивой по периодам функционирования, если $x_i(a^*) = x_{i0}$, $i = 1 \div n$. Для ее определения дифференцируем критерий эффективности (2.12) по a_i:

$$+\frac{x_{i0}^2}{2a_i^2} + \frac{N_i R^2}{2A^2} - \frac{N_i R^2 a_i}{A^3} = \frac{x_{i0}^2}{2a_i^2} + \frac{N_i R^2 (A - 2a_i)}{2A^3} = 0\,. \qquad (2.13)$$

Подставляя $x_{i0} = x_i(a^*) = a_i^* \dfrac{R}{A^*}$ в (2.13), получаем

$$\frac{R^2 A^* + N_i R^2 (A^* - 2a_i^*)}{(A^*)^3} = 0 \ \text{ или } \ \frac{A^*(1+N_i) - 2a_i^* N_i}{(A^*)^3} = 0.$$

Окончательное уравнение для ситуации равновесия примет следующий вид:

$$a_i^* = \begin{cases} \dfrac{N_i+1}{2N_i} A^*, & \dfrac{N_i+1}{2N_i} A^* < r_i; \\ r_i, & \dfrac{N_i+1}{2N_i} A^* \geq r_i. \end{cases}$$

Результаты анализа во многом аналогичны случаю сильных штрафов: при $\delta_1 = 1$ имеем $N_i = \infty$ и $a_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{2} A^*, \ r_i > \dfrac{H}{2}; \\ r_i, \ r_i \leq \dfrac{H}{2}. \end{cases}$

Заметим, что при адаптивном способе формирования данных предприятие имеет возможность искажать свою оценку эффективности только при одновременном выполнении следующих условий. Во-первых, предприятие должно иметь высокую эффективность по сравнению с суммарной эффективностью остальных предприятий (быть монополистом). Ведь, даже при $\delta_1 = 1$ должно выполняться условие $r_i > \dfrac{H}{2}$. Во-вторых, предприятие должно обладать высокой степенью дальновидности со следующими значениями: т. е. $N_i > 1$ или $\delta_i > 0{,}5$, иначе не выполнится условие $\dfrac{N_i+1}{2N_i} A^* < r_i$. Таким образом, если предприятие не является монополистом с высокой степенью дальновидности, оно будет вынуждено сообщить свою реальную оценку эффективности.

Учитывая, что чем меньше N_k, тем ближе a_k^* к r_k, можно сделать вывод о большей эффективности закона ОУ при адаптивном способе формирования данных по сравнению с законом ОУ в случае сильных штрафов, если $0 \le \delta_k < 1$ $(N_k < \infty)$. Следует, однако, отметить, что определение устойчивой по периодам функционирования ситуации равновесия потребовало дополнительных гипотез о поведении предприятий в будущие периоды и представляется поэтому менее естественным, чем определение точки Нэша при встречном способе формирования данных.

Пример 2.5. Оценки эффективности при адаптивном способе формирования данных

Пусть $n = 5, R = 40, r = (1, 2, 4, 5, 20), \delta = 0{,}85$.

Все предприятия, кроме пятого, сообщат свои реальные коэффициенты эффективности $a_i = S_i^* = r_i$ (для них $r_i < \frac{H}{2}$). Для пятого предприятия $N_5 = \frac{0{,}85}{1-0{,}85} = \frac{17}{3}$, $a_5^* = \frac{N_5+1}{2N_5}A^* = \frac{20\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 17}(12 + a_5^*)$,

$a_5^* = \frac{120}{7} = 17{,}143$.

Нормирование целевых функций

Примем допущение, что предприятия получают только часть прибыли, а остальная часть идет в бюджет. Пусть остающаяся у предприятий i-я часть прибыли равна $\gamma(\lambda x_i - z_i)$, где γ определяется из условия нормировки $\gamma\sum\limits_i(\lambda x_i - z_i) = M$, $M > 0$. Тогда целевая функция i-го предприятия выглядит следующим образом:

$$f_i^H = \frac{\lambda x_i - z_i}{\sum\limits_j(\lambda x_j - z_j)}M. \qquad (2.14)$$

Подставляя затраты $z_i = \frac{x_i^2}{2r_i}$ и закон ОУ $\left(\lambda = \frac{R}{S},\ x_i = \lambda s_i\right)$ в (2.14), получаем

$$f_i^H(s) = \frac{s_i\left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right)}{\sum_j s_j\left(1 - \frac{s_j}{2r_j}\right)} \cdot M \ .$$

Здесь $f_i^H(s)$ — возрастающая функция величины $s_i\left(1 - \frac{s_i}{2r_i}\right)$, которая достигает максимума при $s_i = r_i$, следовательно, при любом $n \geq 2$ единственная ситуация равновесия будет $s^* = r$ и эффективность закона ОУ при нормировании целевых функций равна единице: $K_{\text{ОУ}} = 1$. Часть прибыли, отчисляемая предприятию центром в ситуации равновесия, составит $f_i^H(s^*) = \frac{r_i}{H} M$.

Анализ показывает, что закон ОУ является эффективным при большом количестве предприятий n. При малом n применение штрафов, адаптивного способа формирования данных, дифференцированных цен и нормирования целевых функций предоставляет центру достаточный арсенал средств, чтобы обеспечить эффективное функционирование системы даже при наличии предприятия-монополиста.

2.1.4. Принцип согласованного управления

Рассмотренные принципы жесткой централизации и открытого управления отражают крайние точки зрения. Так, принцип ЖЦ, в первую очередь, выдвигает требование минимизации суммарных затрат на выпуск продукции (интересы центра). В основе принципа ОУ лежит требование назначения элементам только «предпочтительных» планов (в первую очередь учитываются интересы элементов). Сравнение показало определенные преимущества ПОУ. Однако интересы центра и предприятий в нашей задаче во многом совпадают. Рассмотрим сумму целевых функций предприятий: $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i - z_i) = \lambda R - \Phi(z) \to \max$.

Вторая составляющая этой суммы $(-\Phi(z))$ есть не что иное, как целевая функция центра. Близость интересов центра и предприятий выражается и в том, что существует цена $\tilde{\lambda} = R/H$, при которой планы $\tilde{x}_i = \tilde{\lambda} r_i$, обеспечивающие максимальную прибыль предприятий, определяют в то же время и оптимальный план с позиций центра. В общем случае такой близости интересов центра и предприятий может и не быть. Например, пусть целевая функция центра описывается следующим уравнением:

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{n} p_i z_i,\ p_i > 0\,. \qquad (2.15)$$

Такой вид целевой функции отражает неэквивалентность затрат различных предприятий с позиций центра. Например, если предприятие i использует дефицитное сырье, то центр может придать большой вес p_i затратам этого предприятия или, если продукция предприятия i имеет повышенное качество, то для увеличения «веса» этой продукции центр может учитывать с меньшим весом p_i затраты предприятия. Оптимальный план производства в случае целевой функции (2.15):

$$x_i^0 = \frac{r_i}{p_i H(p)} R,\ H(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{p_j}\,.$$

Если коэффициенты p_i не все равны между собой, то уже не существует цены λ, при которой план $\{x_i^0\}$ обеспечивал бы максимум прибыли для всех предприятий (таким планом является единственный план $\tilde{x}$). Как было показано выше, для закона ОУ при достаточно большом n план x^* в ситуации равновесия близок к плану $\tilde{x}$, который в данном случае не является оптимальным планом.

Рассмотрим следующий закон ЖЦ:

$$x_i(s) = \frac{s_i}{p_i}\lambda(s),\ \lambda(s) = \frac{R}{S(p)},\ S(p) = \sum_j \frac{s_j}{p_j}. \qquad (2.16)$$

Обозначим $\tau_i(s_i) = \frac{s_i}{p_i}, T(s) = \sum_{i=1}^{n}\tau_i(s_i) = S(p)$ и подставим (2.16) в целевую функцию предприятия:

$$\lambda x_i - \frac{1}{2r_i}x_i^2 = \frac{R^2}{T^2(s)}\tau_i(s_i)\left[1 - \frac{\tau_i(s_i)}{2r_i}\right].$$

Определим ситуацию равновесия:

$$f_i' = \frac{R^2}{T^2}\left(1 - \frac{\tau_i}{r_i}\right) - \frac{2R^2}{T^3}\tau_i\left(1 - \frac{\tau_i}{2r_i}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_i^* = r_i\frac{T_i^*}{r_i + T_i^*},\ T_i^* = T^* - \tau_i^*.$$

Система совпадает с (2.4), следовательно, при достаточно большом количестве предприятий отношения $\tau_i(s_i) = \frac{s_i}{p_i}$ будут приблизительно совпадать с реальными коэффициентами эффективности: $\tau^* \approx r$. Следовательно, планы и цена в этой ситуации будут близки к оптимальным: $x^* \approx \tilde{x},\ \lambda^* \approx \tilde{\lambda}$.

Закон ЖЦ и закон ОУ эквивалентны в том смысле, что план и цена в соответствующих ситуациях равновесия совпадают. Это справедливо для любого закона вида

$$x_i(s) = \frac{\tau_i(s_i)}{T(s)}R,\ \lambda(s) = \frac{R}{T(s)}, \qquad (2.17)$$

где $\tau_i(s_i)$ — строго монотонная, непрерывно дифференцируемая функция s_i.

Заметим, что закон (2.17) можно получить как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{2s_i} x_i^2 \to \min, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = R, \\ \lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2 = \max_z \left(\lambda z - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} z^2 \right). \end{cases} \tag{2.18}$$

При $\tau_i(s_i) = s_i$ получаем закон ОУ, а при $\tau_i(s_i) = \frac{s_i}{p_i}$ получаем рассмотренный закон ЖЦ. Функцию $\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2$ будем называть функцией предпочтения, а задачу (2.18) — задачей согласованного планирования.

Принцип формирования законов управления, состоящий в решении некоторой задачи согласованного планирования, будем называть принципом согласованного управления (СУ).

Конкретные законы СУ получаются при выборе конкретных функций предпочтения для всех предприятий и процедуры выбора решения (если решение не единственное). Множество законов СУ достаточно обширно: в него входят и законы ЖЦ (если функция предпочтения не зависит от плана), и законы ОУ (если функция предпочтения является оценкой целевой функции предприятия).

Эквивалентность законов вида (2.17) можно сформулировать как свойство инвариантности законов СУ с функциями предпочтения $\lambda x_i - \frac{1}{2\tau_i(s_i)} x_i^2$ (инвариантность понимается в смысле независимости равновесных планов x^* и цены λ^* от вида функции $\tau_i(s_i)$). Отмеченное свойство в определенном смысле имеет место и для более общих законов управления и для более общих моделей. Рассмотрим эти вопросы.

2.1.5. Гипотеза слабого влияния

Ранее показано, что для законов СУ при достаточно большом числе предприятий равновесный план близок к оптимальному. Разберемся, в чем причина такой ситуации. Запишем условия равновесия для произвольного закона $\pi(s) = \{\lambda(s),\ x(s)\}$, предполагая, что равновесие достигается внутри области возможных ситуаций, т. е. $s^* \in (d,\ D)$. В этой ситуации будет выполняться следующее условие:

$$\text{если } f_i(s) = \lambda x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2, \text{ то } \frac{f_i(s)}{ds_i} = \left(\lambda - \frac{x_i}{r_i}\right)\frac{dx_i}{ds_i} + x_i\ \frac{d\lambda}{ds_i} = 0$$

$$\text{или при } \frac{dx_i}{ds_i} \neq 0, \lambda > 0 \quad 1 - \frac{x_i}{\lambda r_i} = -\frac{x_i\, d\lambda / ds_i}{\lambda\, dx_i / ds_i}.$$

Если с увеличением числа предприятий правые части этих уравнений стремятся к нулю, тогда $x_i^* \approx \lambda^* r_i$, а так как $\sum x_i^* = R$, то $\lambda^* \approx \dfrac{R}{H} = \widetilde{\lambda}$, и следовательно $x_i^* \approx \widetilde{x}_i$. Уменьшение же правых частей связано с уменьшением влияния отдельного предприятия на цену продукции при увеличении числа предприятий, что выражается условием

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds_i}\right| = 0 \left(\text{при } \lambda > 0\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{d\lambda}{ds_i}\right| = 0\right).$$

Приведенное условие называется условием слабого влияния.

Рассмотрим выполнение условия слабого влияния на примере закона ОУ:

$$\text{здесь } \lambda = \frac{R}{S}, \text{ тогда } \frac{d\lambda}{ds_i} = -\frac{R}{S^2} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds_i}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nd} = 0.$$

Факт слабого влияния отдельного предприятия на цену продукции при достаточно большом числе предприятий (и отсутствии монополиста) хорошо известен в реальных экономических системах. В этом случае разумной представляется следующая гипотеза поведения предприятий: при сообщении информации предприятие не учитывает влияния этой информации на цену. Действительно, в условиях реального производства с его неопределенностью и случайными возмущениями учет «слабых эффектов» не имеет практического смысла. Вышеприведенную гипотезу о поведении предприятий на этапе формирования данных будем называть гипотезой слабого влияния (СВ). При гипотезе СВ уравнение для определения ситуации равновесия примет вид

$$\left(\lambda^* - \frac{x_i^*}{r_i}\right)\frac{dx_i^*}{ds_i} = 0.,$$

Учитывая, что $\dfrac{dx_i^*}{ds_i} \neq 0$, приравняем нулю выражение в скобках $\lambda^* - \dfrac{x_i^*}{r_i} = 0$, из которого вытекает, что $x_i^* = \lambda^* r_i$. Учитывая, что $\sum_i x_i^* = R$, получаем:

$$x_i^* = \frac{r_i}{H}R = \tilde{x}_i \;\text{ и }\; \lambda^* = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}.. \qquad (2.19)$$

Таким образом, любому закону управления $\pi(s)$ с условиями

$$\sum_i x_i(s) = R,\;\; \frac{dx_i}{ds_i} \neq 0$$

в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния соответствует один и тот же план $\tilde{x}$ и цена $\tilde{\lambda}$. Закон ОУ обладает дополнительным свойством: в ситуации равновесия при гипотезе СВ все предприятия сообщают достоверные оценки коэффициентов эффективности производства. Это следует из условия (2.19) и закона управления (2.2):

$$x_i^* = \lambda^* r_i = \lambda^* s_i^* \Rightarrow s_i^* = r_i\,.$$

Достоверность сообщаемой информации выгодно отличает закон ОУ от других инвариантных законов управления. Это свойство становится особенно важным, если целевая функция системы $\Phi(z, w)$ зависит не только от затрат z_i, но и от планируемых затрат $w_i = \frac{1}{2s_i} x_i^2$. Действительно, при отклонении планируемых затрат w_i от реальных z_i система несет дополнительные потери, т. е. $\Phi(z, w) < \Phi(z, z)$. В этих условиях оптимальным будет закон, обеспечивающий достоверность сообщаемой информации, т. е. закон ОУ.

2.2. Централизация и децентрализация в модели управления производством продукции

2.2.1. Степень централизации

Функционирование системы определяется заданием способа формирования данных, системы стимулирования (целевых функций элементов) и процедур планирования и ценообразования (закон управления). Совокупность этих трех составляющих называют механизмом функционирования системы [5].

Одна из составляющих системы стимулирования — степень централизации: степень ответственности предприятия за выполнение планируемых показателей.

Например, отсутствие санкций за отклонение реальных затрат от планируемых соответствует децентрализации планирования затрат. Сильные штрафы соответствуют крайней степени централизации планирования затрат, так как в этом случае реальные затраты совпадают с планируемыми.

Пусть, например, целевая функция предприятия представляется уравнением

$$f_i = \lambda x_i - z_i - \beta |w_i - z_i|,$$

где ситуация $\beta = 0$ соответствует полной децентрализации планирования затрат, а $\beta = \infty$ — полной централизации.

Можно пойти дальше в децентрализации, позволив предприятиям выпускать продукцию в произвольном количестве $y_i \neq x_i (>, <)$. Целевая функция предприятия с учетом штрафов за отклонение выпуска от плана примет вид

$$f_i = \lambda y_i - z_i - \alpha |x_i - y_i| - \beta |w_i - z_i|.$$

Полная децентрализация планирования достигается при $\alpha = \beta = 0$: $f_i = \lambda y_i - z_i$.

Можно ввести и децентрализацию управления, позволив предприятиям самим устанавливать цену продукции со штрафами при отклонении цены от установленной центром. В этом случае целевая функция предприятия примет вид

$$f_i = \mu_i y_i - z_i - \gamma(\lambda - \mu_i)^2 - \alpha|x_i - y_i| - \beta|z_i - w_i|. \qquad (2.20)$$

Полная децентрализация управления имеет место при $\alpha = \beta = \gamma = 0$. При этом $f_i = \mu_i y_i - z_i$.

Будем называть случай полной децентрализации управления рыночной системой: предприятие само устанавливает цену, объем выпуска и затраты.

Совокупность $f = \{f_i\}$ целевых функций предприятий назовем системой стимулирования. Рассмотрим две системы f^1 и f^2 вида (2.20), и пусть $(\gamma_1, \alpha_1, \beta_1) \le (\gamma_2, \alpha_2, \beta_2)$. В этом случае система f^2 имеет большую степень централизации, чем f^1: $f^2 \succ f^1$.

Если $f^2 \succ f^1$ и $f^1 \prec f^2$, то системы имеют одинаковую степень централизации. Если $f^1 \not\succ f^2$ и $f^2 \not\succ f^1$, то системы несравнимы по степени централизации.

2.2.2. Анализ рыночной системы

В условиях рыночной системы не исключено, что $\sum_{i=1}^{n} y_i < R$ или $\sum_{i=1}^{n} y_i > R$. В первом случае центр ничего не может поделать, во втором случае он может не принимать избыток продукции.

Например, роль центра могут играть потребители, которые в первую очередь будут брать продукцию, предлагаемую по минимальной цене. Упорядочим предприятия по возрастанию цены: $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$. Пусть предприятие k такое, что $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i r_i < R \le \sum_{i=1}^{k} \mu_i r_i$.

Тогда последние (n – k) предприятий вынуждены снижать цену, а первые $(k-1)$ будут повышать цены (их прибыль будет расти). Следовательно, в равновесии установится единая рыночная цена продукции, т. е. $\mu_i = \lambda^*$. Пусть y_i^* — выпуск i-го предприятия при цене λ^* (очевидно, $y_i^* \le \lambda^* r_i$). Если $y_i^* < \lambda^* r_i$, то, установив цену $\mu_i = \lambda^* - \varepsilon$ (ε— малое положительное число), предприятие i сможет реализовать продукцию в количестве $\min(R, \lambda^* r_i)$ и получить дополнительную прибыль. Поэтому в равновесии $y_i^* = \lambda^* r_i$ и из условия $\sum_{i=1}^{n} y_i = R$ находим

$$\lambda^* = \frac{R}{H} = \widetilde{\lambda},\ y_i^* = \lambda^* r_i = \frac{r_i}{H} R = \widetilde{x}_i .$$

Заметим, что ситуация (λ^*, y^*) не является равновесием Нэша, поскольку любое предприятие может, установив цену $\mu_i > \lambda^*$ при сохранении выпуска $\lambda^* r_i$, увеличить свою прибыль. Однако при этом остальные предприятия могут увеличить выпуск продукции, установив цены $\lambda^* < \mu_j < \mu_i$, что может привести к тому, что продукция предприятия i не найдет сбыта. Поэтому при достаточно большом числе предприятий повышение цены сверх λ^* нецелесообразно. В этом смысле ситуация (λ^*, y^*) является равновесной. Таким образом, в равновесии выпуски продукции являются оптимальными.

Учтем влияние отдельной фирмы на рыночную цену. Пусть фирма i установила цену $\lambda > \lambda^*$. Тогда остальные фирмы, устанавливая цены $\lambda - \varepsilon$ (ε — малое положительное число), смогут реализовать продукцию в количествах $(\lambda - \varepsilon) r_j \approx \lambda r_j,\ j \ne i$, а фирма i только продукцию в объеме $R - \sum_{j \ne i} \lambda r_j = R - \lambda H_i$, получая прибыль $\lambda(R - \lambda H_i) - \frac{1}{2r_i}(R - \lambda H_i)^2$.

Определяя максимум прибыли по λ, возьмем производную от целевой функции предприятия и приравняем ее нулю:

$$f_i' = R - 2\lambda H_i + \frac{1}{r_i} R H_i - \frac{1}{r_i}\lambda H_i^2 = 0.$$

Отсюда получаем оптимальную цену для предприятия:

$$\lambda' = \frac{R}{H_i}\frac{1+H_i/r_i}{2+H_i/r_i}.$$

Заметим, что полученная цена λ' больше оптимальной $\tilde{\lambda}$, что видно из следующих преобразований:

$$\lambda' - \tilde{\lambda} = \frac{r_i + H_i}{H_i(2r_i + H_i)} - \frac{1}{r_i + H_i} == \frac{r_i^2 + 2r_i H_i + H_i^2 - 2r_i H_i - H_i^2}{H_i(2r_i + H_i)(r_i + H_i)} > 0.$$

В случае наличия фирмы-монополиста $(r_i >> H_i)$ устанавливается монопольная цена $\lambda_M \approx \frac{R}{2H_i}$, $y_i^* \approx R - \lambda_M H_i \approx \frac{R}{2}$ (эта ситуация совпадает с наличием монополиста при принципе ОУ).

Но до сих пор мы не учли, что спрос на продукцию падает при увеличении цены λ. Пусть, например, спрос — линейная функция цены $R(\lambda) = R_m - \alpha\lambda$, где $R_m = R\left(1 + \frac{\alpha}{H}\right)$, что обеспечивает $R(\lambda) = R$ при $\lambda = \tilde{\lambda} = \frac{R}{H}$. Найдем цену λ' из условия максимума:

$$\lambda\left(R(\lambda) - \lambda H_i\right) - \frac{1}{2r_i}\left(R(\lambda) - \lambda H_i\right)^2;$$

$$f_i' = R(\lambda) - 2\lambda H_i - \alpha\lambda + \frac{1}{r_i}\left(R(\lambda) - \lambda H_i\right)\left(\alpha + H_i\right) = 0;$$

отсюда $\lambda' = \dfrac{R_m(\alpha + H)}{(\alpha + H_i)(\alpha + H + r_i)}$.

Пусть коэффициенты эффективности всех предприятий равны между собой: $r_i = r = \frac{H}{n}$. Тогда

$$\lambda' = \frac{R_m(\alpha + H)}{(\alpha + \frac{n-1}{n}H)(\alpha + H + \frac{H}{n})} = \frac{R_m n^2(\alpha + H)}{n^2(\alpha + H)^2 - H^2}.$$

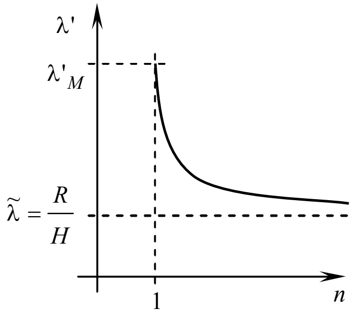


Рис. 2.2. График зависимости λ' от n

График зависимости λ' от n приведен на рис. 2.2.

Цену в случае одного предприятия $\lambda'(1)$ назовем монопольной ценой λ'_M:

$$\lambda'_M = \frac{R_m(\alpha + H)}{\alpha(\alpha + 2H)} = \frac{R(\alpha + H)^2}{\alpha H(\alpha + 2H)}.$$

Пример 2.6. Функционирование предприятий в условиях рыночной системы

В условиях рыночной системы действуют пять предприятий со следующими коэффициентами эффективности: $r = (1, 2, 3, 4, 5)$. Пусть $R = 90$. Определить объемы выпусков и прибыли предприятий:

1) в ситуации равновесия;

2) если 5-е предприятие установит собственную цену на продукцию:

а) при независимости спроса от цены;

б) если спрос падает при увеличении цены и $\alpha = 3$.

1. $H = 15$, $\tilde{\lambda} = 90/15 = 5$, $y_i^* = \tilde{\lambda} r_i$ и $y^* = (6, 12, 18, 24, 30)$.

Прибыли предприятий: $f = (18, 36, 54, 72, 90)$.

2. Для случая а: цена, установленная пятым предприятием:

$$\lambda' = \frac{90}{10} \cdot \frac{1 + 10/5}{2 + 10/5} = 6{,}75;$$

$y_i^* = \lambda' r_i (i = 1 \div 4)$; $y_1^* = 6{,}75$; $y_2^* = 13{,}5$; $y_3^* = 20{,}25$; $y_4^* = 27$;

$y_5^* + R - \lambda' \sum_{i=1}^{4} r_i = 22{,}5.$

$f = (22{,}78;\ 45{,}56;\ 68{,}34;\ 91{,}125;\ 101{,}25)$.

Для случая б: $R_m = 90\left(1 + \frac{3}{15}\right) = 108;$

$\lambda' = \frac{108 \cdot 18}{13 \cdot 23} = 6{,}5;$ тогда $R(\lambda) = 108 - 3 \cdot 6{,}5 = 88{,}5;$

$y_i^* = \lambda' r_i (1 \div 4);\ y_1^* = 6{,}5;\ y_2^* = 13;\ y_3^* = 19{,}5;\ y_4^* = 26;$

$y_5^* = R(\lambda) - \sum_{i=1}^{4} y_i^* = 23{,}5.$ $f = (21{,}125;\ 42{,}25;\ 63{,}375;\ 84{,}5;\ 97{,}525).$

При данных условиях пятому предприятию выгодно устанавливать свою цену, даже если при этом падает спрос на продукцию.

2.2.3. Полная децентрализация планирования

При децентрализованном планировании предприятия не могут самостоятельно устанавливать цену продукции, но могут выпускать ее в любом количестве. Для простоты примем, что центр принимает от предприятий всю произведенную продукцию, однако при отклонении общего количества от R в системе возникают потери, с учетом которых целевая функция центра принимает вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2r_i} y_i^2 + M \left| \sum_{i=1}^{n} y_i - R \right|,$$

где $M > 0$ — достаточно большое число.

Как правило, цена в системах с полной децентрализацией планирования определяется на основе адаптивного способа формирования данных. Простейшим является «управление по отклонению». Если в периоде k суммарный выпуск продукции меньше спроса $\sum_{i=1}^{n} y_{ik} < R$, то цена в следующем периоде увеличивается, а если суммарный выпуск продукции превышает спрос $\sum_{i=1}^{n} y_{ik} > R$, то цена уменьшается. Пусть, например, цена в $(k+1)$-ом периоде определяется по формуле

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha\left(R - \sum_{i=1}^{n} y_{ik}\right) = \lambda_k + \alpha\Delta_k,\ \alpha > 0, \qquad (2.21)$$

где Δ_k — дефицит продукции в периоде k (отрицательный дефицит означает избыток продукции).

Равновесие при гипотезе СВ определяется соотношениями:

$$\sum_i y_i^* = R,\ y^* = \lambda^* r \text{ или } y_i^* = \frac{r_i}{H} R = \tilde{x}_i,\ \lambda^* = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda}.$$

Пусть λ_0 — цена в периоде $k = 0$. Исследуем вопрос о сходимости последовательности цен $\{\lambda_k\}$ к равновесию $\tilde{\lambda}$, считая, что в периоде k предприятие i выпускает продукцию в количестве $\lambda_k \cdot r_i$. В этом случае формула (2.21) примет вид

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha(R - \lambda_k H) = \lambda_k(1 - \alpha H) + \alpha R.$$

Выразив λ_k через λ_0, получаем:

$$\lambda_{k+1} = \alpha R \frac{1-\beta^{k+1}}{1-\beta} + \beta^{k+1}\lambda_0, \text{ где } \beta = 1 - \alpha H.$$

Заметим, что если выполняется ограничение $|\beta| < 1 \left(\alpha < \frac{2}{nD}\right)$, то $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \frac{\alpha R}{1-\beta} = \frac{R}{H} = \tilde{\lambda},\ \lim_{k\to\infty} y_{ik} = \tilde{\lambda} r_i$. Таким образом, последовательность $\{y_{ik}\}$ сходится к оптимальному выпуску $\{\tilde{x}_i\}$, а последовательность цен $\{\lambda_k\}$ — к цене $\tilde{\lambda}$. Следовательно, чтобы гарантировать сходимость, достаточно установить $\alpha < \frac{2}{nD}$.

Ситуация немного сложнее, если не учитывать гипотезу СВ, т. е. если y_{ik} влияет на цену λ_{k+1}. В этом случае целевая функция предприятия выглядит следующим образом:

$$f_i = \lambda_0 y_{i0} - \frac{1}{2r_i} y_{i0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_i^k \left[\lambda_k y_{ik} - \frac{1}{2r_i} y_{ik}^2 \right], \qquad (2.22)$$

где $0 < \delta_i < 1$.

Необходимо однозначно определить y_{i0}.

Пусть предприятие принимает цену λ_0 за равновесную и в соответствии с этим определяет равновесный выпуск y_{i0} (простейшая гипотеза). Будем считать пару $\{\lambda_0, y_0\}$ равновесием, если $\sum_i y_{i0} = R$ и последовательность $\{y_{ik} = y_{i0},\ k \geq 0\}$ обеспечивает максимум целевой функции (2.22) на множестве всех последовательностей вида $\{y_{i0} = y_i,\ y_{ik} = y_{i0},\ k \geq 1\}$. Для таких последовательностей целевая функция (2.22) примет вид:

$$f_i = \lambda_0 y_i - \frac{1}{2r_i} y_i^2 + N_i \left(\lambda y_{i0} - \frac{1}{2r_i} y_{i0}^2 \right),$$

где $N_i = \dfrac{\delta_i}{(1 - \delta_i)}$ — степень дальновидности предприятия;

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha \left(R - \sum_{j \neq i} y_{j0} - y_i \right) = \lambda_0 - \alpha (y_i - y_{i0}).$$

Дифференцируя по y_i получаем

$$f_i' = \lambda_0 - \frac{1}{r_i} y_i + N_i (-\alpha y_{i0}) = 0,\ y_i = (\lambda_0 - \alpha N_i y_{i0}) r_i,$$

так как y_{i0} — выпуск в ситуации равновесия, то $y_i = y_{i0}$ и получаем

$$y_{i0} = \frac{\lambda_0}{\alpha N_i + \dfrac{1}{r_i}}.$$

Таким образом, выпуск y_{i0} однозначно определяется ценой λ_0 в данном периоде. Рассмотрим последовательность

$$y_{ik} = \frac{\lambda_k}{\alpha N_i + \frac{1}{r_i}},\ k \ge 0. \qquad (2.23)$$

Подставляя (2.23) в формулу (2.21), получаем:

$$\Delta_k = R - \sum_{i=1}^{n} y_{ik} = R - \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k \left[1 - \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1} \right] + \alpha R.$$

Обозначим $W = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1}$, тогда $\lambda_{k+1} = \lambda_k (1 - \alpha W) + \alpha R$.

Если $\alpha W < 2$, то для $\forall\ \lambda_0 \ge 0$ $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k \frac{R}{W} = \lambda^* = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha N_i + \frac{1}{r_i} \right)^{-1}}$,

следовательно, $y_i^* = \frac{\lambda^*}{\alpha N_i + \frac{1}{r_i}}$.

Так как W — убывающая функция N_i и возрастающая функция r_i, то $W \le nD$: достаточное условие сходимости $\alpha < \frac{2}{nD}$ $(\alpha W < 2)$ совпадает с условием сходимости при гипотезе СВ.

Проанализируем ситуацию равновесия:

1) цена в ситуации равновесия превышает оптимальную цену: $\lambda^* > \tilde{\lambda}$, так как $N_i > 0$ хотя бы для одного предприятия;

2) выпуски $\{y_i^*\}$ могут быть далеки от оптимальных. Например, если все предприятия являются «очень дальновидными»: $\alpha N_i r_i >> 1$, то $y_i^* \sim \frac{1}{N_i}$ и вообще не зависят от r_i. Более того,

если $N_i \sim r_i$ (более эффективное предприятие является и более дальновидным), то $y_i^* \sim \dfrac{1}{r_i}$ — объем выпускаемой продукции y_i^* обратно пропорционален r_i, а не прямо пропорционален, как при $\tilde{y}_i$;

3) если P — некоторое множество предприятий «очень дальновидных» $\left(\alpha N_i r_i >> 1,\ i \in P\right)$, а остальные предприятия — недальновидные $(\alpha N_i r_i << 1,\ i \in P)$, то

$$\lambda^* \approx \frac{R}{\dfrac{1}{\alpha N_Э} + H - H_Э},\ N_Э = \left(\sum_{i \in P} \frac{1}{N_i}\right)^{-1},\ H_Э = \sum_{i \in P} r_i\ .$$

Если $\alpha N_Э (H - H_Э) >> 1$, то $\lambda^* \approx \dfrac{R}{H - H_Э}$.

Парадокс дальновидности. Пусть $\alpha N_n r_n >> 1,\ \alpha N_n H_n >> R,$ $\alpha N_i r_i << 1,\ i = 1 \div (n-1)$ (n — «очень дальновидное» предприятие). Тогда $\lambda^* = \dfrac{R}{H_n},\ y_n^* = \dfrac{\lambda^*}{\alpha N_n + \dfrac{1}{r_n}} \approx \dfrac{\lambda^*}{\alpha N_n} \approx 0,$

$$y_i^* = \frac{\lambda^*}{\alpha N_i + \dfrac{1}{r_i}} \approx \lambda^* r_i.$$

Таким образом, дальновидное предприятие фактически не выпускает продукцию и его прибыль равна нулю, а недальновидные получают вполне реальную прибыль $\dfrac{r_i (\lambda^*)^2}{2}$ в каждом периоде функционирования. Этот парадокс показывает, что «отказывать себе сегодня во всем» столь же неразумно, как и «жить только сегодняшним днем».

Можно предложить и другие способы установления цены. Пусть, например, центр предполагает, что предприятия действуют в периоде k, исходя из гипотезы СВ. Тогда $y_{ik} = \lambda_k r_i$, и центр может определить оценки эффективности предприятий на следующий период по формуле

$$s_{i,\ k+1} = \frac{y_{ik}}{\lambda_k}.$$

Тогда цена продукции в следующем периоде будет определяться как

$$\lambda_{k+1} = \frac{R}{\sum\limits_i s_{i,\ k+1}} = \frac{R}{\sum\limits_i y_{ik}} \lambda_k. \qquad (2.24)$$

Закон ценообразования (2.24) интересен тем, что если предприятия действительно придерживаются гипотезы СВ, то сходимость в ситуацию равновесия $\lambda^* = \tilde{\lambda}$ обеспечивается за один период независимо от начальной цены λ_0. Проведем анализ ситуации равновесия. Считаем, что предприятия выбирают величину y_{i0}, предполагая цену λ_0 равновесной. Получаем

$$f_i = \lambda_0 y_i - \frac{1}{2r_i} y_i^2 + N_i\left(\frac{\lambda_0 R}{R + (y_i - y_{i0})} y_{i0} - \frac{1}{2r_i} y_{i0}^2\right), \left(\sum y_{i0} = R\right).$$

Дифференцируя по y_i, получаем

$$f_i' = \lambda_0 - \frac{y_i}{r_i} - \frac{N_i y_{i0} \lambda_0 R}{\left(R + (y_i - y_{i0})\right)^2} = 0 \quad .$$

Из условия $y_i = y_{i0}$ получаем

$$y_{i0} = \frac{\lambda_0}{\frac{1}{r_i} + \frac{\lambda_0 N_i}{R}}.$$

Тогда цена определяется выражением

$$\lambda_{k+1} = \frac{R}{\sum_i \frac{1}{\frac{1}{r_i} + \frac{\lambda_k N_i}{R}}} = \left(\sum_i \frac{1}{\frac{R}{r_i} + \lambda_k N_i} \right)^{-1}.$$

Сходимость обеспечивается, если $\sum_i \frac{1}{N_i} > 1$. При $r_i = r$, $N_i = N \quad \forall i$ (все предприятия одинаковы), имеем

$$\lambda_{k+1} = \frac{R}{r_n} + \lambda_k \frac{N}{n}.$$

Равновесная цена:

$$\lambda^* = \frac{R}{rn\left(1 - \frac{N}{n}\right)} = \frac{R}{r(n-N)} = \tilde{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{N}{n}} > \tilde{\lambda} (n > N).$$

Вопросы для самопроверки

1. Какой информацией обладает центр в модели управления производством продукции?
2. Сформулируйте задачу центра.
3. Перечислите различные способы организации взаимоотношений между центром и предприятиями.
4. В чем заключается принцип жесткой централизации?
5. В чем заключается принцип открытого управления?
6. Сформулируйте гипотезу слабого влияния.
7. Как зависит эффективность открытого управления от количества предприятий?
8. Какими показателями характеризуется степень централизации управления?
9. Что такое «рыночная система»?

3. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ

3.1. Предмет и структура прогноза развития экономики

Важный класс экономических моделей — это модели прогнозирования. Прогнозирование опирается на достижения общественных, естественных и точных наук в раскрытии закономерностей развития природы и общества с учетом тенденций социально-экономического и научно-технического прогресса. Прогнозирование призвано формировать научные предпосылки принятия плановых, управляющих решений.

Основными функциями прогнозирования являются [6]:

1) количественный и качественный анализ тенденций развития экономики, сложившихся проблем и новых явлений;

2) вероятностное, альтернативное предвидение будущего развития экономики, учитывающее как сложившиеся тенденции, так и поставленные цели;

3) оценка возможностей и последствий активного воздействия на предвидимые процессы и тенденции, обоснование главных направлений социально-экономической и научно-технической политики.

Макроэкономический прогноз включает [6]:

- прогноз национального дохода (или конечного общественного продукта) и его распределения;
- прогноз занятого населения, его распределения между производственной и непроизводственной сферами, а внутри производственной сферы — между промышленностью, строительством, сельским хозяйством, производственной инфраструктурой;
- прогноз производительности труда в масштабах материального производства и по его крупным секторам;
- прогноз производственных основных и оборотных фондов и производственных капиталовложений с выделением крупных секторов;
- прогноз фондоотдачи и удельных капитальных затрат по всей сфере материального производства и в разрезе крупных секторов;

- прогноз текущего потребления населения, непроизводственных основных фондов и капитальных вложений;
- прогноз основных финансовых потоков (первичных доходов государства, предприятий и населения и их использования).

Основное содержание прогнозирования — качественный и количественный анализ реальных экономических процессов, выявление объективных условий, факторов и тенденций развития.

Принципами прогнозирования являются:

- системность;
- адекватность;
- альтернативность.

Системность означает, что, с одной стороны, экономика рассматривается как единый объект, а с другой — как совокупность относительно самостоятельных направлений (блоков) прогнозирования. Комплексный прогноз на основе принципа системности предполагает создание методов и моделей, которые соответствовали бы содержанию каждого отдельного блока и одновременно позволяли бы построить целостную картину возможного развития экономики. Такое требование создает некоторые трудности: с одной стороны, целостность требует унификации моделей, что отражает стремление к построению «супермодели» прогнозирования; с другой стороны, специфика отдельных объектов может быть адекватно отражена лишь при максимальном приближении к частным методам.

Для реализации системности целесообразно использовать «блочный» метод. При этом должны быть выделены показатели, являющиеся экзогенными для всего прогноза экономики в целом, определена последовательность проведения прогнозных расчетов и соответствие этой последовательности входных и выходных (для каждого блока) показателей. Принцип системности означает также согласование выходных показателей экономического прогноза с системой сводных показателей планирования.

Адекватность предполагает, что методы и модели разработки прогнозов рассчитаны на выявление и количественное измерение устойчивых закономерностей и взаимосвязей в развитии экономики, создание на этой основе теоретического аналога реальных экономических процессов. Адекватность означает максимальное приближение теоретической модели к устойчивым, существенным закономерностям и тенденциям развития; предполагает учет вероятностного, стохастического характера реальных процессов. Проверка адекватности проводится на существующих данных.

Альтернативность связана с возможностью развития экономики и ее отдельных звеньев по разным траекториям, при разных взаимосвязях и структурных соотношениях исходя из предположения о возможности качественно различных вариантов развития. Здесь главная проблема — разделение реализуемых и параллельных вариантов. Главным методом проверки реалистичности отдельных альтернатив развития экономики является проверка их сбалансированности по всем основным аспектам с учетом ограничений на ресурсы и структурных ограничений.

В разнообразии существующих методов и моделей прогнозирования могут быть выделены ***два универсальных подхода***:

1) ***генетический*** подход, отражающий наличие в прогнозируемом процессе устойчивых тенденций, придающих развитию экономики инерционный характер. Данный подход учитывает тот факт, что будущее связано с прошлым, формируется из уже известных элементов, хотя и в иных соотношениях, в новых связях;

2) ***нормативный*** подход, отражающий управляемый характер прогнозируемых процессов, зависимость от целей развития, которые могут быть зафиксированы в форме какого-то нормативного состояния и в виде желательной траектории перехода от сложившегося состояния к нормативному.

Эти *подходы взаимно дополняют друг друга*, поскольку будущие экономические процессы обусловлены как уже сложившимися связями и тенденциями, так и предвидимыми целями и потребностями: если выдвигается цель, не связанная с существующими закономерностями, то не могут быть обоснованы пути ее достижения; если же предвидение отражает лишь сложившиеся тенденции, то исчезает возможность их оценки и игнорируется существующая управляемость экономических процессов. Одновременное использование генетического и нормативного подходов обусловлено ***необходимостью согласования целей и тенденций экономического развития.***

Генетический подход реализуется через систему экономико-математических моделей, основанных на обработке относящейся к прошлому статистической информации, а также оценке отдельных переменных и их параметров.

Различают три типа эконометрических моделей:

1) ***факторные модели***, подразделяющиеся на однофакторные (временные функции) и многофакторные, учитывающие одновременные воздействия нескольких факторов на уровень и динамику отклика. Обычно факторные модели описываются моделями регрессионного типа. Здесь принцип построения исходит из предположения неизменности сложившихся тенденций. Данный тип моделей хорош для краткосрочных и среднесрочных прогнозов;

2) ***структурные модели***, отражающие соотношения между отдельными элементами системы. Здесь в качестве объекта анализа выступает вектор, описывающий изменение структуры системы во времени;

3) ***факторно-структурные модели***, включающие в себя элементы и факторных и структурных моделей. Примером является модель межотраслевого баланса, включающая отраслевые производственные функции, отражающие не только текущие затраты, но и взаимосвязи затрат труда и основных фондов.

К числу общих принципов нормативного прогнозирования относится определение перспективных проблем, решение которых является обязательным условием сбалансированного и эффективного развития всей экономики или ее части. Сама проблема может быть выявлена как разрыв между нормативным состоянием и господствующей тенденцией: чем больше разрыв, тем больше проблема.

Рассмотрим некоторые методы разработки и согласования отдельных разделов (блоков) макроэкономического прогноза.

3.2. Прогноз темпов и факторов экономического роста

Прогноз темпов и факторов экономического роста состоит в прогнозе динамики национального дохода (конечного продукта), производственных ресурсов, определяющих эту динамику (основных производственных фондов и трудовых ресурсов) и распределения используемого национального дохода на основные функциональные элементы.

Первый шаг в составлении макроэкономического прогноза — выявление временных тенденций (трендов) в движении национального дохода и получение экстраполяционных среднесрочных оценок на этой основе. К числу практически приемлемых временных функций, проверенных практическими расчетами, можно отнести:

$$Y_t = ae^{bt};$$

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3;$$

$$Y_t = (a + bt)\exp\left(\int_0^t y(\tau)d\tau\right), \text{ при } y(\tau) = a + b\tau$$

$$\text{или } y(\tau) = a + b\tau + c\tau^2,$$

где Y_t — прогнозируемый показатель объема производства;

$y(\tau)$ — темп прироста объема производства;

t — время;

a, b, c — параметры.

При наличии экзогенного прогноза факторов производства — физического объема основных производственных фондов K_t и физического объема затрат труда в сфере материального производства L_t — могут быть использованы модификации однофакторных и многофакторных макроэкономических производственных функций. Такие модели являются вторым шагом в составлении макроэкономического прогноза.

В качестве однофакторных макроэкономических производственных функций могут быть использованы:

$$Y_t = a \cdot Z_t;$$
$$Y_t = a(t) \cdot Z_t;$$
$$Y_t = a(t) \cdot Z_t^{\alpha},$$
$$Y_t = a(t) \cdot Z_t^{\alpha(\Delta Z_t \cdot t)},$$

где Z_t — величина экзогенно задаваемого фактора производства;

a, α — параметры (постоянные или функции времени t).

В качестве многофакторных макроэкономических производственных функций могут быть использованы:

$$Y_t = a(t) \cdot (K_t)^{\alpha} \cdot (L_t)^{\beta};$$
$$Y_t = a \cdot (K_t)^{\mu} \cdot (L_t)^{1-\mu} \cdot \exp(\lambda t);$$
$$Y_t = a \cdot (K_t)^{\alpha[(k-l),t]} \cdot (L_t)^{\beta[(k-l),t]} \cdot \exp(\lambda t),$$

где k и l — среднегодовые темпы прироста основных производственных фондов и затрат труда в сфере материального производства, а параметры α и β описываются функциями.

Многофакторные производственные функции могут использоваться в основном на среднесрочный период при предварительном определении динамики факторов производства.

На следующем шаге макроэкономического прогноза необходимо учитывать предварительные оценки результатов сельскохозяйственного производства. Это обусловлено тем, что воздействие сельскохозяйственного производства независимо от его погодных колебаний оказывает доминирующее воздействие на темпы роста фонда потребления, поэтому в прогнозе необходимо представить меру эластичности макроэкономических показателей на изменение среднегодовых темпов прироста данной отрасли.

В силу того что взаимосвязь между ростом продукции и капиталовложениями в сельское хозяйство носит распределенный во времени характер, возникает потребность в оценке такой производственной функции, в которой эффективность производственных капиталовложений имеет наглядное выражение. Поэтому в среднесрочном прогнозе можно использовать, например, следующее уравнение:

$$\Delta Y_t = at + \alpha_1 I_t + \alpha_2 \Delta L_t + \alpha_3 \Delta X_t,$$

где ΔY_t — прирост конечного общественного продукта;

I_t — производственные капиталовложения (за вычетом вложений в сельское хозяйство);

ΔL_t — прирост занятости в материальном производстве (за вычетом занятых в сельском хозяйстве);

ΔX_t — прирост ресурсов сельскохозяйственной продукции.

Прогноз темпов и факторов экономического роста, в особенности долгосрочный, может быть основан на иной последовательности, чем описанные выше шаги (построение трендовых, факторных моделей и моделей, учитывающих сельскохозяйственное производство). В этом случае возможна следующая последовательность действий в составлении прогноза:

1) на основе обобщения результатов научно-технического прогнозирования определяется возможное изменение эффективности производственных капиталовложений и затрат живого труда;

2) нормативным методом определяется объем ресурсов, необходимый для решения социальных задач;

3) рассчитывается объем производственных капиталовложений и трудовых ресурсов и соответствующий им рост конечного продукта, который исходит из определенных выше показателей.

Прогноз проводится на основе следующей системы уравнений:

$$Y_T = Y_0 + \xi_T \sum_t I_t; \quad Y_T = \left(C_T + I_T\right) \cdot b_T; \quad Y_T = p_T L_T,$$

где $t = 0$ — последний год отчетного периода;

$t = T$ — последний год прогнозируемого периода;

I_t — объем производственных капиталовложений;

C_T — величина ресурсов, направляемых на решение социальных задач, в расчете на последний год прогнозируемого периода;

ξ_T, p_T — показатели эффективности, определяемые на основе обобщения результатов научно-технического прогнозирования.

Суть расчетов состоит в том, что на основе получаемых из научно-технических прогнозов показателей ξ_T и p_T, нормативно заданного C_t и известных I_0 и $b_T = b_0 = (Y_0 - C_0)/I_0$ находятся такие I_t, $\sum_t I_t$ и L_t, которые удовлетворяют приведенной системе уравнений. При этом предполагается, что все показатели изменяются во времени экспоненциально.

Прогноз распределения конечного общественного продукта на функциональные элементы представляет собой следующую стадию макроэкономического прогноза и является переходной ступенью к прогнозу структуры производства.

Рассмотрим систему расчетов, в которой помимо производственных капитальных вложений рассчитываются: производственный капитальный ремонт; накопление в оборотных фондах, запасах и резервах; экспорт; импорт. Суммарные ресурсы потребления, корректируемые в связи с выделением главных элементов производственных потребностей, распределяются на фонд личного потребления, фонд общественного потребления, непроизводственные капитальные вложения и капитальный ремонт.

Производственный капитальный ремонт R_t. Главным фактором, определяющим динамику вложений в производственный капитальный ремонт, является рост объема основных производственных фондов K_t. На данный фактор также оказывают влияние L_t (отражает обеспечение производства трудовыми ресурсами) и I_t (для осуществления производственного капитального ремонта используются те же материальные ресурсы, что и для производственных капитальных вложений).

Для расчетов используются следующие уравнения:

$$R_t = a + bK_t + cL_t + dt; \quad R_t = a + bK_t + cI_t.$$

Накопление в оборотных фондах и резервах и прочие расходы S_t определяются динамикой конечного общественного продукта Y_t и могут быть описаны следующими уравнениями:

$S_t = a + bY_t + ct$; $S_t / Y_t = a + bt$.

Экспорт E_t. Его динамика определяется ростом конечного общественного продукта Y_t, а определенным ограничением для роста экспорта является уровень производственных капитальных вложений I_t. Указанные зависимости могут быть представлены следующим уравнением:

$$E_t = a + bY_t + cI_t + dt.$$

Импорт M_t. Потребность в нем определяется величиной конечного общественного продукта Y_t, лимитирующим фактором является динамика экспорта E_t как основного источника валютных ресурсов. Тогда функциональная зависимость между указанными факторами может быть описана следующим образом:

$$M_t = a + bY_t + cE_t.$$

Ресурсы потребления C_t определяются балансовым способом: $C_t = Y_t - I_t - R_t - E_t + M_t - S_t$.

Непроизводственные капитальные вложения I_t^n определяются общей величиной ресурсов потребления C_t, ограничением роста для них является уровень производственных капитальных вложений и ремонта $I_t + R_t$. Для расчетов используются уравнения: $I_t^n = a + bC_t + ct$; $I_t^n = a + bC_t + c(I_t + R_t)$.

Непроизводственный капитальный ремонт R_t^n определяется общей величиной ресурсов потребления C_t:

$$R_t^n = a + bC_t + ct.$$

Фонд общественного потребления G_t. Такой фонд представляет собой текущие материальные затраты в отраслях непроизводственной сферы и зависит от величины ресурсов потребления C_t и численности занятых в непроизводственной сфере L_t^n, что отражается в функциональной зависимости

$$G_t = a + bC_t + cL_t^n.$$

Фонд личного потребления C_t^p рассчитывается в зависимости от динамики конечного общественного продукта Y_t, лимитирующим фактором является величина производственных капитальных вложений I_t, инерционность в динамике фонда личного потребления выражается с помощью зависимости C_t^p от достигнутого в прошлом уровня C_{t-1}^p или с помощью временного тренда:

$$C_t^p = a + bY_t + cI_t;$$

$$C_t^p = a + bY_t + ct.$$

Система уравнений модели распределения конечного продукта в самом общем виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
R = \alpha + \beta_1 K + \beta_2 L^{-agr} + \gamma t, & I^n = \alpha + \beta C + \gamma t, \\
E = \alpha + \beta_1 Y + \beta_2 I + \gamma t, & R^n = \alpha + \beta C + \gamma t, \\
M = \alpha + \beta_1 Y + \beta_2 E + \gamma t, & G = \alpha + \beta_1 C + \beta_2 L^n + \gamma t, \\
\Delta S = \alpha + \beta Y + \gamma t, & C^p = C - \left(I^n + R^n + G\right), \\
C = Y - \left(R + E - M + \Delta S\right), &
\end{array}$$

где Y — объем конечного общественного продукта; I — производственные капитальные вложения; R — производственный капитальный ремонт; K — объем среднегодовых основных производственных фондов; L^{-agr} — численность занятых в материальном производстве без сельского хозяйства; L^n — численность занятых в непроизводственной сфере; E — экспорт; M — импорт; ΔS — накопление в материальных оборотных фондах, запасах и резервах и прочие расходы; C — ресурсы потребления; I^n — непроизводственные капитальные вложения; R^n — непроизводственный капитальный ремонт; G — фонд общественного потребления; C^p — фонд личного потребления; t — время, $t = 1, 2, \dots$

Данный подход целесообразно использовать для сильно агрегированных балансовых моделей. Его недостатки: изолированность оценок отдельных уравнений; недостаточно четкая взаимосвязь динамики отдельных элементов; некоторые функциональные элементы приходится определять балансовым методом.

Преодолеть эти недостатки можно путем использования системы одновременных уравнений, в которых здесь одна и та же переменная может выступать как в качестве независимой, так и в качестве зависимой величины. Причем каждая из эндогенных переменных должна встретиться в системе и в качестве объясняющей хотя бы один раз. Экономическое содержание подобной структуры модели заключается в непосредственном учете обратных взаимосвязей между макроэкономическими величинами.

3.3. Прогноз трудовых ресурсов

Прогноз трудовых ресурсов позволяет оценить как ограничения будущего экономического развития, так и требования к направлениям научно-технического прогресса и социальной политики. Рациональное использование трудовых ресурсов зависит, в первую очередь, от повышения производительности труда. Вместе с тем особенности и закономерности воспроизводства трудовых ресурсов в значительной мере сами определяют задачи и основное содержание проблем рационализации занятости населения.

Комплексный прогноз трудовых ресурсов опирается на следующие частные прогнозы:

- демографический (прогноз численности и структуры населения);
- прогноз численности и структуры трудовых ресурсов;

- прогноз численности занятого населения и его распределения по сферам и отраслям народного хозяйства;
- прогноз образовательного и профессионально-квалификационного уровня занятых (относится к задачам прогнозирования научно-технического прогресса).

Прогноз численности и структуры населения

Методы прогноза численности населения могут быть разбиты на четыре класса:

1) экстраполяционные модели;
2) регрессионные модели динамики населения;
3) имитационные модели;
4) перспективные расчеты методом «проекций населения» или компонентный метод.

Экстраполяционное (трендовое) прогнозирование основано на подборе функции, позволяющей по значениям динамического ряда установить общую закономерность движения населения. Обычно модели прогноза общей численности населения основываются на использовании линейной, экспоненциальной, линейно-логарифмической, показательной и параболической кривых, например:

$$Y = a_0 + a_1 t; \quad Y = a_0 t^{a_1}; \quad Y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ..$$

Практическое применение экстраполяционных моделей в демографии ограничено. Это связано с двумя основными причинами. Во-первых, они используются для оценки перспективной динамики численности населения в целом, без его качественных характеристик (пол, возраст и т. п.). Во-вторых, они переносят ранее действующие тенденции в область изменившихся условий и не учитывают социально-экономические, психологические и другие факторы общественного развития. Однако экстраполяция на основе трендовых моделей вполне оправдывается при краткосрочном прогнозировании, когда особенности роста населения обусловлены преимущественно уже сформировавшимися закономерностями.

Регрессионные модели динамики населения исходят из признания зависимости демографических процессов от изменений социально-экономических условий. Здесь в качестве экзогенных переменных чаще всего выступают занятость и доходы на душу населения.

Хорошие результаты были получены по модели

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5,$$

где Y — специальный коэффициент рождаемости; x_1 — средний доход семьи; x_2 — обеспеченность населения жильем; x_3 — доля городского населения в общей численности; x_4 — уровень занятости женщин в общественном производстве; x_5 — уровень образования женщин.

Положительная зависимость отмечается между рождаемостью, с одной стороны, и уровнем жизни семьи и жилищной обеспеченностью — с другой; отрицательная — между рождаемостью и остальными факторами (занятостью женщин в общественном производстве, долей городского населения, уровнем образования женщин).

При построении моделей для прогнозирования коэффициента смертности выявлены следующие ключевые факторы: x_1 — уровень урбанизации; x_2 — доля трудоспособного населения в общей численности; x_3 — уровень развития здравоохранения; x_4 — калорийность питания; x_5 — потребление протеина; x_6 — потребление алкоголя.

Экспериментальные расчеты показали, что эти модели могут служить эффективным инструментом прогнозирования динамики основных параметров режима воспроизводства населения. В то же время регрессионные модели упрощают причинно-следственную взаимосвязь демографического роста и социально-экономических факторов, а включение большого числа переменных может затушевать картину множественных связей. Необходимо иметь прогноз каждого из факторов, входящих в уравнение. Кроме того, многие связи социально-экономических параметров и демографических процессов пока не поддаются формализации.

Имитационные модели — это демографические модели вероятностного типа. Математическим аппаратом данных моделей является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), позволяющий моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы. Данный тип моделей предназначен для исследований микроуровня — индивидов и семей.

Принцип построения моделей состоит в том, что все население представляется в виде системы взаимодействующих элементов, рассматриваемых как совокупность малых промежутков времени (шагов), в течение которых с ними может произойти то или иное демографическое событие (вступление в брак, рождение детей, смерть и т. д.). Все события случайны и независимы. Процесс решения задачи состоит из нескольких этапов: сначала определяются последовательность возможных событий и состояние индивида, а затем задаются числовые значения вероятностей наступления того или иного события для данного состояния. Таким образом, вся система описывается совокупностью элементов и множеством характеристик поведения каждого элемента. Разыграв множество реализаций случайного процесса и получив искусственную «статистику», можно найти приближенно интересующие нас вероятности.

Имитационные модели могут использоваться при прогнозировании состава семей, миграционных процессов, т. е. там, где налицо массовые явления, состоящие из элементов, носящих случайный характер. Данный метод моделирования в настоящее время носит ограниченный характер. Основными препятствиями для его развития являются громоздкость и трудоемкость вычислений и отсутствие социологических данных, которые позволили бы наполнить модель необходимой информацией.

Когортный метод, или метод «передвижки возрастов», получил наиболее широкое распространение. Сущность метода заключается в передвижении во времени возрастных когорт начального периода на несколько лет вперед (сдвиг в будущее). Отдельные возрастные группы в результате смертности постоянно сокращаются, что восполняется вновь родившимися. Способ расчетов по когортному методу синтезирует взаимосвязанные прогнозы важнейших составляющих, из которых складываются демографические процессы рождаемости и смертности. Используется несколько видов расчетов:

1) прогнозирование смертности;

2) определение числа людей, доживающих до определенного возраста;

3) оценка численности рождаемости;

4) определение миграции.

В формализованном виде метод прогноза численности населения на основе передвижки возрастов с учетом изменений режима воспроизводства населения и регионального фактора (миграции) включает в себя три вида уравнений.

1. Уравнение расчета численности половозрастных групп с учетом типа поселения на начало года $t+1$ исходя из их численности на начало года t:

$$P_{i+1,t+1}^{\alpha\beta} = P_{it}^{\alpha\beta} Q_{it}^{\alpha\beta} + H_{it}^{\alpha\beta},$$

где α — индекс типа поселения (город, село); β — индекс пола (1 — мужчины, 2 — женщины); i — возраст; $Q_i^{\alpha\beta}$ — коэффициент дожития по соответствующей группе населения; $H_i^{\alpha\beta}$ — сальдо миграции по соответствующей группе населения.

2. Уравнение расчета численности родившихся в году t и доживших до года $t+1$:

$$P_{0,t+1}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} Q_{-1}^{\alpha\beta} \sum_{i=15}^{49} F_i^{\alpha} \left(P_{it}^{\alpha 2} + P_{i-1,t}^{\alpha 2} \cdot Q_{i-1,t}^{\alpha 2} \right) \xi_t^{\beta},$$

где $Q_{-1}^{\alpha\beta}$ — коэффициент дожития новорожденных до конца года; F_i^{α} — специальный возрастной коэффициент рождаемости; ξ^{β} — доли мальчиков и девочек в общем числе новорожденных.

3. Уравнение расчета общей численности населения на начало года $t+1$: $P_{t+1} = \sum_i \sum_\alpha \sum_\beta P_{i,t+1}^{\alpha\beta}$.

Поскольку данный метод позволяет найти распределение численности населения по полу и возрасту, он одновременно решает задачу перспективных расчетов основных контингентов населения: школьного, трудоспособного, пенсионного и т. д.

Модель может быть представлена в матричной форме. Основу модели составляет матрица, включающая систему показателей, образующих режим воспроизводства населения. Предполагается, что для некоторого начального момента задан ряд численностей населения по одногодичным возрастам:

$$P^0 = P_0,\ P_1, ...,\ P_x, ..., P_w,$$

Для каждого возраста известны вероятности дожития до следующего возраста $Q_0, Q_1, ..., Q_x, ..., Q_w$, а также число рожденных девочек и мальчиков $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_x, ..., \varphi_w$.

Вектор-строка P_0 состоит из женской части населения $P_0, ..., P_{99}$ и мужской $P_{100}, ..., P_{199}$. Тогда воспроизводство населения может быть описано матрицей следующего вида:

$$Q = \begin{vmatrix}
\varphi_0^{ж} & Q_0^{ж} & 0 & \dots & 0 & \varphi_0^{м} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\varphi_1^{ж} & 0 & Q_1^{ж} & \dots & 0 & \varphi_1^{м} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\varphi_w^{ж} & 0 & 0 & \dots & Q_w^{ж} & \varphi_w^{м} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Q_0^{м} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & Q_1^{м} & \dots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{w-1}^{м} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_w^{м}
\end{vmatrix}$$

Умножив матрицу воспроизводства Q на вектор-строку численности населения, получим распределенную по одногодичным возрастным интервалам численность в следующем году. Если прогноз основан на гипотезе сохранения существующего режима воспроизводства населения, то для года, отстоящего от исходного на t лет, имеем $P^t = P^0 \cdot Q^t$.

Путем возведения матрицы Q в соответствующую степень можно получить матрицу для перехода от начального населения к численности и структуре населения в любом году прогнозного периода. Если же характеристики режима воспроизводства меняются, то прогноз осуществляется по формуле

$$P^t = P^0 \cdot Q_0 \cdot Q_1 ... Q_{t-1}.$$

Таким образом, основная трудность состоит в правильном определении наиболее вероятной гипотезы относительно характера изменения матрицы Q_t. Решение этой проблемы заключается в изучении социально-демографических процессов, исследовании факторов, воздействующих на показатели режима воспроизводства.

Конечным результатом демографического прогноза является перспективная оценка численности населения трудоспособного возраста и его структуры по полу и возрасту, по экономическим районам с разбивкой на город и село.

Прогноз численности и структуры трудовых ресурсов включает следующие стадии:

1) определение числа неработающих инвалидов трудоспособного возраста;

2) обоснование уровня и динамики занятости пенсионеров и подростков;

3) определение общего объема трудовых ресурсов;

4) расчет численности учащихся трудоспособного возраста, обучающихся с отрывом от производства;

5) нахождение границ снижения доли трудоспособного населения, занятого в домашнем хозяйстве;

6) балансовый расчет занятости в общественном хозяйстве.

Модель баланса трудовых ресурсов в формализованном виде может быть представлена в виде следующих уравнений:

$$P_R = P_T - P_u - P_L + P_p; \quad \alpha = P_R - P_F - P_z,$$

где P_R — общая численность трудовых ресурсов; P_T — численность населения в трудоспособном возрасте; P_u — численность неработающих инвалидов трудоспособного возраста; P_L — численность неработающих лиц трудоспособного возраста, получающих пенсию по льготам; P_p — численность работающих пенсионеров и подростков до 16-ти лет; α — численность трудовых ресурсов, занятых в общественном хозяйстве; P_F — численность лиц трудоспособного возраста, обучающихся с отрывом от производства; P_z — численность лиц трудоспособного возраста, занятых в домашнем и личном подсобном хозяйстве.

Данная модель служит для выявления потенциальных ресурсов и используется только на предварительной стадии расчетов.

Прогноз отраслевого распределения рабочей силы осуществляется в соответствии со следующими предпосылками:

- приоритет отрасли (ее место в общественном разделении труда) определяет уровень расхождений между отраслевой потребностью в ресурсах и фактической ее реализацией;
- каждому классу (группе отраслей) могут соответствовать свои показатели ресурсных ограничений;
- взаимосогласованность в динамике используемых отраслью ресурсов является результатом взаимодействия факторов производства, что выражается в показателях взаимозаменяемости и дополняемости между ними.

Моделирование потенциального спроса на рабочую силу осуществляется с помощью следующих функций:

$$L_i = ax_i^{a_1} k_i^{a_2} l^{a_0 t},$$

или в темпах прироста

$$l_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 k_i,$$

где k и l — среднегодовые темпы прироста основных производственных фондов и затрат труда, соответственно, x — валовый выпуск продукции.

В приведенных уравнениях коэффициент a_1 характеризует величину дополнительного спроса на рабочую силу при увеличении валовой продукции, что определяется изменениями в объеме и структуре производимой продукции. Коэффициент a_2 характеризует роль основных производственных фондов в формировании занятости. При этом можно выделить отрасли, в которых основные фонды дополняются трудом ($a_2 > 0$), и отрасли, в которых живой труд вытесняется фондами ($a_2 < 0$).

Можно сгруппировать отрасли промышленности в зависимости от величины a_1.

I группа — отрасли, для которых изменения в динамике валовой продукции существенным образом определяют динамику численности занятых трудовых ресурсов ($a_1 > 0{,}6$). К этой группе относится трудоемкая угольная промышленность.

II группа — отрасли со средним влиянием объемов валовой продукции на динамику занятости ($0{,}2 < a_1 < 0{,}6$). Прежде всего, это относительно трудоемкие отрасли с давно сложившейся технологией и режимом формирования дополнительной потребности в рабочей силе при расширении производства: машиностроение и металлообработка ($a_1 = 0{,}31$), легкая промышленность ($a_1 = 0{,}31$), пищевая промышленность ($a_1 = 0{,}28$), лесная промышленность ($a_1 = 0{,}23$), черная металлургия ($a_1 = 0{,}35$).

В отраслях I и II групп влияние динамики фондов на численность занятых выражается в вытеснении живого труда овеществленным.

III группа отраслей отличается слабой реакцией численности занятых на колебания в темпах прироста валовой продукции. В отраслях этой группы значительную роль в формировании численности занятых играет динамика основных фондов и других производственных факторов. Дополняемость в приросте основных фондов и затрат живого труда характерна для всех отраслей этой группы (т. е. здесь $a_2 > 0$). К ним относятся нефтяная промышленность ($a_1 = 0{,}1$) и химическая промышленность ($a_1 = 0{,}16$). Самый высокий коэффициент дополняемости в нефтяной промышленности ($a_2 = 0{,}88$).

Прогнозные расчеты отраслевого распределения рабочей силы проводятся на основе альтернативных эконометрических моделей, каждая из которых предназначена главным образом для конкретного временного интервала (средне-, долго- и краткосрочные модели) и ориентирована на прогноз усредненной динамики факторов производства либо на выявление отклонений в инерционном процессе воспроизводства ресурсов.

3.4. Прогноз формирования и функционирования основных фондов

Задачи прогноза воспроизводства основных фондов определяются их ролью в процессе расширенного общественного воспроизводства. Прогноз основных фондов дает возможность получить количественную характеристику состояния и динамики объема средств труда, их отраслевой и технологической структуры, обновления, износа. Тем самым выявляются и конкретизируются многие существенные пропорции воспроизводства в соответствии с уровнем развития производительных сил. Прогноз динамики основных фондов связан с прогнозом народнохозяйственного баланса производства, потребления и накопления общественного продукта. Изменения в объеме и структуре средств производства непосредственно отражаются не только на масштабе годового совокупного продукта, но и на его составных частях: фондах возмещения, потребления, накопления.

Для расчета баланса формирования основных фондов могут быть использованы два подхода, первый из которых описывается уравнением

$$K_t = K_{t-1} + V_t - W_t, \qquad (3.1)$$

где K_t — объем основных фондов в году t, V_t — ввод в действие основных фондов в году t (строительство, обновление), W_t — выбытие основных производственных фондов в году t. Здесь объем основных фондов рассматривается как функция ввода в действие основных фондов, т. е. исходной точкой прогнозного расчета являются ресурсы капитальных вложений. В зависимости от направления расчетов в прогнозировании ввод в действие основных фондов может быть определен, исходя из необходимого общего объема основных фондов. Это второй подход к расчету баланса формирования основных фондов. В этом случае используется уравнение

$$V_t = K_t - K_{t-1} + W_t. \qquad (3.2)$$

Первый подход характерен для отраслей, находящихся в нижней части шкалы приоритетов распределения капитальных вложений и зависящих от общего объема ресурсов капитальных вложений (при расчете объемов исходим из того, какие ресурсы есть в наличии). Здесь ввод в действие основных фондов связывают с капитальными вложениями этого года и предшествующих лет (строительство объектов обычно продолжается несколько лет) и рассчитывают по формуле

$$V_t = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_i I_{t-i} + u_t,$$

где I_{t-i} — капитальные вложения в ($t-i$)-ом году; α_i — доля общего объема капитальных вложений года $t-i$, овеществленная в основных фондах, введенных в действие в году t; u_t — погрешность, вызванная отклонением структуры капитальных вложений от постоянной под воздействием случайных причин.

Уравнение (3.2) характерно для высокоприоритетных отраслей, капитальные вложения в которые определяются их потребностями в общем объеме основных фондов (исходим из того, что должно быть сделано, и рассчитываем требуемые ресурсы). Здесь капитальные вложения года t связывают с вводом в действие основных фондов в году t и последующих лет:

$$I_t = \sum_{i=0}^{t-1} \beta_i V_{t+i} + v_t.$$

Основная проблема прогнозирования основных производственных фондов заключается в обосновании сроков службы основных фондов и связанных с ними выбытий.

Проблема обновления и возмещения основных фондов включает в себя решение проблемы амортизации. Общая сумма амортизации за срок службы капитального объекта должна быть достаточной для его реновации. Сроки службы, положенные в основу норм амортизации, представляют собой норматив, на котором базируется теория возмещения. Несмотря на известную условность, они не только отражают тенденции фактических сроков службы, но и влияют на них через нормативы на капитальный ремонт.

Простой подход заключается в использовании для прогнозирования выбытий метода экстраполяции. В общем случае могут быть использованы следующие модели:

$$W_t = a_0 + a_1 K_{t-1} \text{ либо}$$

$$W_t = a_0 + (a_1 + a_2 t) K_{t-1}.$$

Существенной проблемой прогнозных расчетов выбытий является занижение истинных размеров выбытий в базисном периоде вследствие постоянного удорожания вводимых в действие основных фондов.

Учет влияния ценностного фактора при прогнозе может быть проведен в следующей последовательности:

1) рассчитываются коэффициенты выбытия основных фондов по всем отраслям по стоимостной статистике наличия и движения основных фондов в базисном периоде;

2) рассчитываются коэффициенты выбытия оборудования в промышленности в целом и в отдельных отраслях по стоимостной статистике основных фондов («стоимостные» коэффициенты выбытия оборудования) и по статистике о наличии и движении оборудования в единицах («физические» коэффициенты выбытия оборудования);

3) находятся корректировочные индексы по отношениям:

$$\frac{\text{физические коэффициенты выбытия оборудования}}{\text{стоимостные коэффициенты выбытия оборудования}}$$

для всего промышленного оборудования и отдельных отраслей промышленности. Полученные индексы равны по своим значениям соотношениям

$$\frac{\text{стоимость единицы действующего оборудования}}{\text{стоимость единицы ликвидируемого оборудования}}$$

и отражают влияние роста стоимости оборудования на уровень стоимостных коэффициентов выбытия;

4) корректируются стоимостные коэффициенты выбытия основных фондов в промышленности и отраслях в базисном периоде: стоимостные коэффициенты выбытия основных фондов умножаются на индексы, определенные для оборудования соответствующих отраслей.

На объем выбытия существенное влияние оказывают факторы преимущественно отраслевого характера: природный фактор, доля передвижных машин в общем объеме основных фондов и единичная мощность или стоимость агрегатов. Влияние этих факторов находит отражение не только в нормативных сроках службы (коэффициенты выбытия в нефтяной и угольной промышленности в несколько раз превышают коэффициенты выбытия в машиностроении, легкой и пищевой промышленности), но и в отклонении фактических объемов выбытия от нормативных. Рост единичной мощности агрегатов приводит к существенному превышению нормативных коэффициентов выбытия над фактическими, значительная доля передвижных машин в их общей массе ведет к превышению фактических коэффициентов выбытия над нормативными. Наиболее высоки коэффициенты выбытия в строительстве, сельском хозяйстве, легкой промышленности, промышленности строительных материалов, т. е. в тех отраслях, где преобладает передвижное самоходное и прицепное оборудование. Наоборот, в черной металлургии, несмотря на влияние природного фактора, фактическое выбытие основных фондов незначительно и существенно ниже нормативного вследствие большой единичной мощности используемых агрегатов.

Влияние отраслевых факторов на объем выбытия выражается в величинах коэффициентов регрессии. Однако если можно предполагать, что в прогнозном периоде это влияние существенно изменится, то соответствующие факторы должны быть введены в уравнения в явном виде.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите функции прогнозирования.
2. Какие принципы прогнозирования вам известны?
3. Какие прогнозы относятся к макроэкономическим?
4. Перечислите частные прогнозы трудовых ресурсов.
5. Какие основные факторы влияют на темпы роста национального дохода?
6. Какие два основных подхода используются при прогнозе формирования основных фондов?

4. КООПЕРАТИВНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ

4.1. Теория благосостояния

4.1.1. Общие понятия теории благосостояния

Многие решения общественной значимости не могут приниматься на основе рыночных механизмов, поскольку кооперативные возможности не будут эффективно использованы при децентрализованных действиях агентов. Для того чтобы исправить недостатки рыночных механизмов, связанные с производством общественных продуктов, ценообразованием в естественной монополии и пр., приверженцы экономики благосостояния предлагают множество нормативных решений.

Теоретическое основание этих нормативных положений является аксиоматическим. Каждая задача может иметь более одного подходящего решения. Аксиоматический метод может помочь выбору, во-первых, за счет сокращения количества обоснованных и допустимых решений и, во-вторых, за счет предложения специальной аксиоматической характеризации каждого из этих обоснованных решений.

В XVIII в. возникло философское учение, которое назвали ути-литаризмом. В рамках этого подхода суждение о коллективном действии производится на основе уровней полезности, которые достаются индивидуальным агентам как результат принятого решения, и только на основе этих уровней. Считается, что с целью повышения индивидуальной полезности агенты могут кооперироваться или объединяться в любые коалиции. Такой подход оказался особенно благотворным в экономической теории и других общественных науках.

Для утилитариста общественная кооперация хороша лишь настолько, насколько она увеличивает благосостояние отдельных членов общества. Способы кооперации не наделяются какой-либо этической ценностью. Они рассматриваются только как технические механизмы для повышения индивидуального благосостояния всех членов общества.

Аксиоматическая теория благосостояния представляет задачу принятия коллективного решения на основе сопоставления каждой допустимой альтернативе (каждому допустимому решению) вектора $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ индивидуальных уровней полезности, где u_i — полезность агента i. Вся необходимая информация заключена во множестве этих допустимых векторов полезностей.

Здесь коллективное решение является результатом математического детерминированного правила, которое выделяет один вектор в качестве выбора сообщества. Отметим, что единственный бесспорный принцип, на котором может развиваться рациональный анализ благосостояния, — это принцип единогласия, или принцип оптимальности по Парето. Суть принципа заключается в следующем: если для всех агентов решение x лучше решения y, то решение y не должно быть принято. В этом случае говорят, что решение x доминирует по Парето решение y. Или (через вектора полезности) говорят, что вектор u доминирует вектор v по Парето, если $\forall i \;\; u_i \geq v_i$.

Оптимальное по Парето решение называется также эффективным решением. Множество эффективных решений называется множеством Парето, внутри этого множества никакие решения не доминируют друг друга: если решения x и z являются оптимальными по Парето, то если кто-то (хотя бы один агент) считает, что z лучше x, то найдется хотя бы один агент, для которого x лучше z.

Рассмотрим один небольшой пример. Пусть множество допустимых решений содержит следующие три вектора полезности: $u = (1, 3, 5)$, $v = (4, 2, 3)$ и $w = (2, 2, 2)$. Здесь вектор v доминирует по Парето вектор w: $4 > 2, 2 = 2, 3 > 2$. Вектора u и v не доминируют друг друга и оба являются оптимальными по Парето.

Принцип единогласия является самым главным принципом экономики благосостояния. Любое разумное решение должно приводить, прежде всего, к оптимальности по Парето. Проблема заключается в том, что оптимальность по Парето приводит, как правило, к множеству векторов, среди которых необходимо выбрать единственное решение.

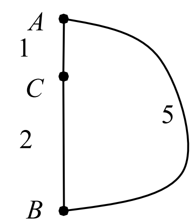
Рассмотрим два основных правила, которые поддерживаются утилитаристами: эгалитаризм (стремление уравнять индивидуальные полезности) и классический утилитаризм (максимизация суммы индивидуальных полезностей).

4.1.2. Эгалитаризм

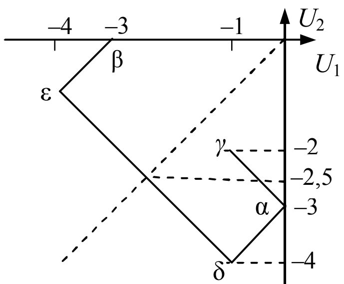
Эгалитаризм основывается на принципе справедливости: к равноправным агентам должно быть равное отношение. Примене-ние этого принципа приводит к выравниванию индивидуальных полезностей. Интересным фактом является то, что принципы единогласия и равенства могут быть несовместными, при этом возникает известная ***дилемма равенство-эффективность***.

Пример 4.1. Размещение объекта

Администрацией двух городов, равных по численности населения, выбирается место расположения совместного предприятия сферы обслуживания (финансируемого извне). Города A и B соединены двумя дорогами. Протяженность длинной дороги составляет 5 км, а короткой — 3 км. Обозначим через C точку, находящуюся на короткой дороге на расстоянии 1 км от A. Дорога на участке от C до B проходит в горах, что не позволяет построить там данное предприятие. Таким образом, приходится выбирать место расположения предприятия либо на длинной дороге, либо между A и C на короткой дороге, что показано на рисунке.



Размещение городов на дорогах



Множество допустимых векторов полезностей

Население каждого города заинтересовано в том, чтобы предприятие располагалось поближе к нему, поэтому полезность измеряется расстоянием до предприятия со знаком минус. Если расположить предприятие в пункте C, то $(u_1, u_2) = (-1, -2)$. На рисунке показано множество допустимых векторов полезностей.

Отрезок $\beta\varepsilon$ соответствует расположению предприятия на длинной дороге на расстоянии не более 1 км от города B; отрезок $\varepsilon\delta$ — размещению на длинной дороге на расстоянии не менее 1 км от обоих городов. Отрезок $\delta\alpha$ соответствует расположению предприятия на длинной дороге на расстоянии не более 1 км от города A. Отрезок $\alpha\gamma$ соответствует расположению предприятия на короткой дороге между A и C.

Эффективным решением является размещение предприятия в городе B или на короткой дороге между пунктами A и C (оптимальное по Парето решение всегда располагается на северо-восточной границе множества допустимых решений). Равенство полезностей достигается только в одной точке — на середине длинной дороги. Получающийся вектор полезностей $(-2{,}5; -2{,}5)$ доминируется по Парето вектором $(-1, -2)$, соответствующим расположению предприятия в пункте C. Возникает дилемма: мы можем выбрать размещение либо оптимальным по Парето, либо выравнивающим полезности, но не одновременно.

В примере в качестве решения выбирается размещение C: оно является наиболее эгалитарным среди всех возможных эффективных размещений. С другой стороны, в точке C уровень полезности наименее удачливого агента (т. е. уровень $\min(u_1, u_2)$) является наибольшим среди всех возможных векторов полезностей:

$$\min(-1,-2) = -2 \geq \min(u_1, u_2) \text{ для всех допустимых } (u_1, u_2).$$

Здесь два подхода выделили один и тот же исход C, однако, так бывает не всегда. Пусть множество достижимости содержит только два вектора: $u = (1, 2)$ и $u' = (4; 1{,}5)$. Оба являются эффективными, но вектор u минимизирует $|u_1 - u_2|$, а вектор u' максимизирует $\min\{u_1, u_2\}$. Если настаивать на симметричности агентов, то более предпочтительным следует признать вектор u' (из принципа анонимности, т. е. равенства агентов, следует, что векторы $u = (1, 2)$ и $u'' = (2, 1)$ равнозначны, однако последний доминируется по Парето вектором u').

Максимизация коллективной функции полезности

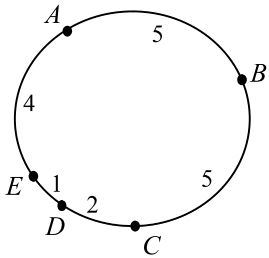
$$W_e(u_1, \ldots, u_2) = \min_{1 \leq i \leq n} \{u_i\}$$

на множестве достижимых векторов полезностей (максиминная процедура) состоит в выборе решения, которое бы максимизировало полезность наименее удачливого агента. Приняв уровень полезности наименее удачливого агента за индекс коллективной полезности, мы можем выполнить эгалитарную программу, не нарушив принципа анонимности. В дальнейшем функцию W_e будем называть эгалитарной функцией коллективной полезности.

Корректная формулировка принципа эгалитарности не сводится к максимизации эгалитарной функции W_e. Функция W_e совпадает с уровнем полезности наименее удачливого агента. Если этот уровень достиг своего максимума, то можно к оставшимся агентам применить принцип эгалитарности.

Пример 4.2. Размещение объекта на кольцевой дороге

Пять городов A, B, C, D, E, соединенные кольцевой дорогой, выбирают место размещения совместного предприятия (см. рисунок).



Размещение городов на кольцевой дороге

Полезность снова измеряется расстоянием до предприятия со знаком минус. Предприятие можно расположить в любом месте на кольцевой дороге. Найдем наибольшие интервалы между парами городов и возьмем точки, диаметрально противоположные их серединам. Это и будут эгалитарные размещения. Таким образом, максиминная задача имеет два решения: в точке x на расстоянии 1 км от города A на дороге AE и в точке y на полпути между городами C и D. Соответствующие вектора полезностей имеют вид:

$$u(x) = (-1,-6,-6,-4,-3) \quad \Rightarrow \quad W_e(x) = -6;$$

$$u(y) = (-6,-6,-1,-1,-2) \quad \Rightarrow \quad W_e(y) = -6.$$

Сравним решения x и y с позиции эгалитаризма. В обоих случаях имеется два города с полезностью -6; следующий из наименее удачливых агентов в случае x получает -4, а соответствующий агент в случае y получает -2, поэтому при сравнении решений выбираем y. Заметим, что y не доминирует по Парето x, но после упорядочения полезностей по возрастанию получаем вектор $u^*(y^*) = (-6,-6,-2,-1,-1)$, который доминирует по Парето упорядоченный вектор полезностей $u^*(x^*) = (-6,-6,-4,-3,-1)$.

Лексиминное упорядочение коллективного благосостояния задает полный порядок на множестве допустимых векторов полезностей. Оно уточняет эгалитарную функцию коллективной полезности W_e, когда имеется несколько допустимых векторов с одинаковым значением этой функции. Дадим строгое определение лексиминного порядка.

Определение. Пусть даны векторы u, v. Обозначим через u^*, v^* векторы u, v, упорядоченные по возрастанию. Векторы u и v являются эквивалентными ***в смысле лексиминного порядка***, если выполнено равенство $u^* = v^*$. Будем говорить, что ***вектор*** u ***предпочти-тельнее вектора*** v в смысле лексиминного порядка, если существует целое число $k = 0, 1, \dots, n-1$, для которого выполнены условия $u_i^* = v_i^* \quad \forall i = \overline{1, k}, \quad u_{k+1}^* > v_{k+1}^*$

В частности, если $W_e(u) > W_e(v)$ (т. е. $u_1^* > v_1^*$), то вектор u лексикографически предпочтительнее v.

Лексиминный порядок «работает» следующим образом: сначала сравниваются полезности «наиболее бедных» агентов в обоих распределениях, если же они совпадают, то сравниваются полезности «следующих по бедности» агентов и т. д.

Эгалитаризм достаточно сильно цементирует общество: когда все агенты делят поровну доход от кооперации, не может быть зависти или разочарования. Однако эгалитарный принцип перераспределения иногда трудно принять: увеличение на единицу полезности одного агента может привести к значительной потере суммарной полезности всех агентов. Рассмотрим распределение медицинской помощи между пациентами, застрахованными на равных условиях. Пусть объявлена цель обеспечения по возможности равного уровня здоровья пациентов. Это может означать, что мы должны постоянно отказываться от аспирина и антибиотиков для всех агентов, кроме одного, для того чтобы платить за дорогостоящее оборудование, которое продлит его жизнь хотя бы еще на один день. Вряд ли большинство людей согласится с подобным распределением.

4.1.3. Классический утилитаризм

Кооперация уязвима, по крайней мере, в двух направлениях. Во-первых, каждый агент должен осознавать, что в отношении него поступают справедливо, т. е. что он получает справедливую долю кооперативной прибыли. Это гарантирует консенсус кооперирующих агентов: если кто-то не признает правило дележа, то консенсус разрушится. Следовательно, необходима внутренняя устойчивость. Во-вторых, угроза устойчивости кооперации — это низкие доходы: если прибыль от кооперации по сравнению с ситуацией без кооперации слишком мала, то вряд ли кто-то сочтет кооперацию разумной. Будем называть внешней устойчивостью то, что является следствием достаточно высоких доходов от кооперации.

Эгалитаризм дает внутреннюю устойчивость: ведь прибыль поровну делится между равными агентами. Но при этом не учитывается внешняя устойчивость: для уравнивания долей прибыли эгалитарист готов уменьшить долю каждого до такой степени, что от кооперативной прибыли почти ничего не останется.

Классический утилитарист наоборот — максимизирует суммарный доход от кооперации, гарантируя внешнюю устойчивость, но полностью игнорируя внутреннюю устойчивость.

Рассмотрим задачу размещения объекта совместного пользования. Предположим, город вытянут в линию (отрезок [0,1]). Плотность населения описывается непрерывной функцией $f(x),\ 0 \le x \le 1$. Все население города составляет $\int_0^1 f(x)dx$. Пусть полезность агента, расположенного в точке x, равна расстоянию от точки x до объекта со знаком минус. Эгалитарный посредник, используя функцию коллективной полезности W_e, порекомендует разместить объект в точке $1/2$. Это гарантирует для каждого агента расстояние до объекта не более $1/2$. Утилитарный посредник выберет размещение a из решения следующей задачи: $\min\limits_{0 \le a \le 1} \int_0^1 |x-a| f(x)dx$. Здесь решением будет медиана a^*

функции $f(x)$: половина населения живет левее a^*, а половина — правее.

Здесь эгалитарное решение совершенно не зависит от плотности населения в предположении, что какие-то агенты живут на обоих концах города. Утилитарное же решение вплотную зависит от плотности. Какое решение лучше — зависит от контекста. Так, утилитарный выбор, минимизирующий транспортные затраты, вполне удовлетворителен, если объектом является, например, театр. С другой стороны, если объект есть пункт скорой медицинской помощи, то размещение в точке $1/2$ более привлекательно, поскольку минимизирует наибольший риск.

Классическую утилитарную функцию полезности будем обозначать W_*: $W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Утилитарная программа состоит в максимизации функции W_* на множестве допустимых векторов полезностей. Она согласуется с принципом единогласия: любой вектор полезностей, максимизирующий W_* на допустимом множестве, будет оптимальным по Парето.

Пример 4.3. Дележ пирога

Два брата должны поделить между собой единицу бесконечно делимого однородного пирога. Брат 1 вдвое более голоден, чем брат 2: один и тот же кусок пирога x приносит брату 1 вдвое большую полезность $u_1(x) = 2u_2(x)$. Пусть функции u_1, u_2 имеют следующий вид:

$$u_1(x) = 4x_1 - 2x_1^2,\ u_2(x) = 2x_2 - x_2^2,$$

где x_1, x_2 — часть пирога, которую получает, соответственно, первый и второй брат. Тогда $x_2 = 1 - x_1$ и $u_2(x) = 1 - x_1^2$.

Утилитарное решение находим, максимизируя сумму полезностей: $\max\limits_{0 \le x \le 1} \{u_1(x) + u_2(x)\} = \max\limits_{0 \le x \le 1} \{1 + 4x_1 - 3x_1^2\}$.

Вогнутая функция имеет единственный максимум, который находится из условий первого порядка: $u_1'(x)+u_2'(x)=0$, имеем

$$\left(1+4x_1-3x_1^2\right)'=4-6x_1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{2}{3},\ x_2=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, классический утилитаризм отдает больший кусок более голодному брату, который вносит больший вклад в общественное благосостояние.

В противоположность утилитаризму эгалитарная программа компенсирует брату 2 пониженный аппетит, наделяя его большим куском пирога:

$$u_1(\bar{x})=u_2(\bar{x}) \Rightarrow 4x_1-2x_1^2=1-x_1^2 \Rightarrow 4x_1-x_1^2-1=0 .$$

Решая квадратное уравнения, и учитывая, что $0\le x_1\le 1$, получаем: $x_1=2-\sqrt{3}\approx 0{,}268,\ x_2=0{,}732$.

Необходимо отметить, что в некоторых случаях как эгалитарная, так и утилитарная программы могут приводить к неадекватным исходам (например, задача дележа пирога). Ключевое различие эгалитаризма и утилитаризма состоит в соизмеримости и возможности обмена добавочной полезностью между агентами. При этих предположениях утилитаризм является жизненным и осмысленным принципом. В определенных социальных ситуациях мы должны рассматривать агентов именно таким образом.

Рассмотрим историю о двух автомобилях, загоревшихся в результате катастрофы. В первой машине — четыре пассажира, во второй — только один. Все пятеро без сознания. У единственного свидетеля есть время спасти только одну машину. Выбирая для спасения первую машину, как вероятно сделает большинство людей, он невольно становится утилитаристом: целью является максимизация ожидаемого числа спасенных. Эгалитарный свидетель в противоположность этому для выбора машины бросит монету с тем, чтобы дать каждому пятидесятипроцентный шанс на выживание.

Другие ситуации явно предполагают эгалитарный подход, например, при распределении таких первичных благ, как элементарная медицинская помощь или образование.

В обществе благосостояния, когда окончательный уровень благосостояния каждого агента является хорошо определенной и наблюдаемой величиной, только эгалитарная программа (максиминная полезность или лексиминный порядок) гарантирует консенсус индивидуалистически настроенных агентов. Действительно, агент i с наименьшим благосостоянием, знает, что существующее неравенство ему же на пользу: при меньшем уровне неравенства либо он будет иметь меньший уровень благосостояния, либо кто-то другой. В противоположность этому, при утилитарной программе агенты с наименьшим благосостоянием не имеют никаких видимых причин соглашаться с выбранным решением. Эксперименты подтверждают разумность эгалитаризма там, где полезности выражают объективные одинаковые потребности.

4.1.4. Порядки коллективного благосостояния

Обозначим через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ фиксированное множество участвующих агентов. Множество всех допустимых векторов полезностей обозначим E^N.

Определение. Порядком коллективного благосостояния (ПКБ) называется упорядочение R в E^N. Пусть P — его строгая компонента, а I — соответствующее отношение безразличия:

$$u\,P\,v \Leftrightarrow \{u\,R\,v, \quad \textit{но} \quad \textit{не} \quad v\,R\,u\},$$

$$u\,I\,v \Leftrightarrow \{u\,R\,v \quad \textit{и} \quad v\,R\,u\}.$$

Предполагается, что ПКБ удовлетворяет двум дополнительным свойствам:

1) ***анонимности*** (симметрия по агентам). Если u получено из v перестановкой координат, то u и v одинаковы по предпочтительности: $u\,I\,v$;

2) ***единогласия.*** Если $u, v \in E^N$ таковы, что $u_i \geq v_i$ для всех $i \in N$ (обозначается $u \geq v$), то $u\,R\,v$. Более того, если $u_i > v_i \ \forall i \in N$ (обозначается $u >> v$), то u строго лучше v: $u\,P\,v$.

Например, лексиминный порядок является ПКБ.

Для того чтобы бинарное отношение было ПКБ, необходимо, чтобы его строгая компонента P и отношение безразличия I были транзитивны.

Определение. Функцией коллективной полезности (ФКП) называется действительная функция W, определенная на E^N и удовлетворяющая следующим двум свойствам:

1) ***анонимности.*** W симметрична по переменным $u_1, ..., u_n$;

2) ***единогласия.*** Если $u, v \in E^N$ таковы, что $u \geq v$ $(u >> v)$, то $W(u) \geq W(v)$ $\left[W(u) > W(v)\right]$.

Два примера нам известны: эгалитарная ФКП $W_e(u) = \min u_i$ и утилитарная ФКП $W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Произвольная ФКП однозначно порождает ПКБ, определенный следующим образом: $u\,R\,v \quad \Leftrightarrow_{def} \quad W(u) \geq W(v)$.

Будем говорить, что W представляет R. Но не все ПКБ могут быть представлены ФКП. Простейший пример — лексиминный порядок коллективного благосостояния не представляется ФКП.

Различные ПКБ и ФКП могут обладать рядом свойств, таких как независимость от нуля, независимость от масштаба, независимость от общей шкалы полезности и сепарабельность. Рассмотрим подробнее перечисленные свойства.

Независимость от нуля

Утилитарная ФКП не зависит от индивидуальных нулей полезности. Рассмотрим задачу о размещении объекта (см. примеры 4.1, 4.2). Пусть объект — новая почта, заменяющая старую, расположенную в точке x_0. Естественный нуль полезности соответствует расстоянию от города t_i до исходной позиции x_0. Если мы разместим новый объект в точке x, то изменение полезности для города t_i описывается $d(t_i, x_0) - d(t_i, x)$. Это более правильный индекс благосостояния для i, чем $-d(t_i, x)$, поскольку реальное решение состоит в перемещении почты из точки x_0 в точку x. Вектор полезностей, связанный с решением x, есть

$$u(x)=(d(t_1,x_0)-d(t_1,x),...,d(t_n,x_0)-d(t_n,x)),$$

а не $v(x)=(-d(t_1,x),...,-d(t_n,x))$ как рассматривалось ранее в примерах 4.1 и 4.2. Этот пересчет индивидуальных полезностей меняет решение для большинства ПКБ (по сравнению с решением о первоначальном размещении объекта), но не оказывает влияния на предложение по утилитарной ФКП. Для вектора $u(x)$ имеем утилитарную ФКП:

$$W(u(x))=\sum_{i=1}^{n}\left[d(t_i,x_0)-d(t_i,x)\right]=\sum_{i=1}^{n}d(t_i,x_0)-\sum_{i=1}^{n}d(t_i,x)=$$
$$=-W(v(x_0))+W(v(x)).$$

При изменении индивидуальных нулей полезности просто прибавляется некоторая величина, а значит максимизация коллективной полезности даст те же решения.

Определение. ПКБ R ***не зависит от нуля***, если он удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств:

1) для $\forall u,v,w\in E^N$: $u\,R\,v \Leftrightarrow (u+w)R(v+w)$;

2) для $\forall u,v\in E^N : u\,R\,v \Leftrightarrow (u-v)R\,0$.

Другими словами, если мы перенесли точку отсчета, с точки зрения утилитарной ФКП предпочтения на E^N не меняются. Приведем теорему, определяющую независимость утилитарного решения от нуля (здесь и далее приводятся только формулировки теорем; их доказательство приведено в [7]).

Теорема. Утилитарная ФКП W_* не зависит от нуля. Существует единственный независимый от нуля и непрерывный ПКБ, который представляется утилитарной ФКП.

Покажем на примере выполнение данного свойства. Пусть имеются три агента и два допустимых вектора полезности: $u=(2,3,4)$, $v=(1,5,2)$. Здесь и с точки зрения эгалитаризма и с точки зрения утилитаризма более предпочтительным является вектор u : $\min u_i=2\ >\ \min v_i=1$ и $\sum u_i=9\ >\ \sum v_i=8$.

Предположим, что, перед тем как выбирать наилучшее решение, агентам выдали премию в размере 5 для первого и третьего и 1 для второго. Вектор премиальных выплат: $w=(5,1,5)$. В этом случае векторы полезности примут следующий вид: $u' = (7, 4, 9)$, $v' = (6, 6, 7)$. С точки зрения эгалитаризма предпочтения сменились: теперь лучшим является решение v': $6 > 4$. Для утилитариста тем не менее решение не изменилось, так как в обоих случаях общая полезность просто увеличилась на 11 единиц.

Независимость от масштаба

Определение. Рассмотрим ПКБ R, определенный на положительном ортанте E_{++}^N $(u_i > 0 \;\; \forall i)$. Скажем, что R ***не зависит от масштаба***, если он обладает одним из двух эквивалентных свойств:

1) $\forall u, v, w \in E^N : u\,R\,v \Leftrightarrow (u \cdot w)R(v \cdot w)$,

2) $\forall u, v \in E^N : u\,R\,v \Leftrightarrow (u : v)R\,e$,

где $u \cdot v = (u_1 v_1, \ldots, u_n v_n)$, $u : v = (u_1 : v_1, \ldots, u_n : v_n)$, $e = (1, \ldots, 1)$.

Теорема. ФКП Нэша W_N (определенная на E_{++}^N)

$$W_N(u) = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$$

не зависит от масштаба. Существует единственный ПКБ на E_{++}^N, независимый от масштаба и непрерывный. Он представляется ФКП Нэша.

Пример 4.4. Дележ продуктов

Два брата получают общий подарок, состоящий из 4 кг печенья и 2 кг конфет. Необходимо поделить подарок между ними. Пусть братья имеют следующие предпочтения:

$$u_1 = 2a_1 + b_1, \quad u_2 = a_2 + 2b_2,$$

где a_1, a_2 — количество печенья, которое достанется первому и второму братьям, соответственно, а b_1, b_2 — количество конфет. Нуль полезности мы выбрали здесь в соответствии с нулевым распределением.

Множество допустимых распределений пары продуктов на неотрицательные количества определяется следующим образом:

$$a_i, b_i \geq 0, \quad a_1 + a_2 = 4, \quad b_1 + b_2 = 2.$$

Максимизируя ФКП Нэша, мы выбираем эффективное распределение. Оптимальное распределение определяется как решение задачи

$$\max_{\substack{0 \le a_1 \le 4 \\ 0 \le b_1 \le 2}} (2a_1 + b_1)((4 - a_1) + 2(2 - b_1)) .$$

Преобразуя выражение, получаем

$$16a_1 + 8b_1 - 5a_1b_1 - 2a_1^2 - 2b_1^2 \to \max .$$

Максимум вогнутой функции находим, как и раньше, путем приравнивания первой производной нулю. Так как у нас функция зависит от двух переменных, то возьмем сначала производную по a_1:

$$16 - 5b_1 - 4a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 4 - 1{,}25b_1 .$$

Подставив найденное a_1 в исходное выражение, находим:

$$32 - 12b_1 + 1{,}125b_1^2 \to \max .$$

Теперь получилась выпуклая функция, имеющая единственный минимум, а значит, достигающая максимума либо при $b_1 = 0$, либо при $b_1 = 2$. Максимум данной функции равен 32 и достигается при $b_1 = 0$. Отсюда $a_1 = 4 - 1{,}25 \cdot 0 = 4$.

Таким образом, решение по Нэшу предлагает первому брату отдать все печенье, а второму брату — отдать все конфеты, при этом получаем следующий вектор полезности: $u = (8, 4)$.

Если изменить масштаб предпочтений для первого брата, увеличив, например, его функцию полезности в два раза, то это приведет просто к увеличению в два раза максимизируемой функции. Это никак не повлияет на процесс решения, и мы получим тот же результат.

Из приведенных выше теорем следует, что не существует ПКБ, который бы не зависел одновременно как от нуля, так и от масштаба. Следовательно, любой ПКБ зависит от индивидуальных нулей и/или от индивидуальных масштабов. Открывается возможность для двух похожих способов манипулирования, связанных с искусственным увеличением или уменьшением масштаба или нуля индивидуальной полезности. Рассмотрим задачу о дележе пирога. Если правило дележа является эгалитарным, то агенту выгодно производить впечатление менее голодного (уменьшать масштаб полезности). Например, если брат 1 сможет убедить судью, что он в два раза менее голоден, чем есть на самом деле, то он получит половину пирога (поскольку окажется, что у обоих братьев одинаковые функции полезности: $u_1 = u_2$) и тем самым увеличит свою долю. Напротив, если используется утилитарное правило, то агенту выгодно увеличивать масштаб полезности.

Независимость от общей шкалы полезности

Эгалитарная ФКП и лексиминный ПКБ не зависят от общей шкалы полезности.

Допустим, мы желаем сравнить распределения доходов. Нам известно распределение облагаемых налогом доходов $(i_1,...,i_n)$, но мы не знаем, какая схема налогообложения будет использоваться. Достаточно ли информации, чтобы сравнить благосостояние агентов, определяемое как доход за вычетом налога? Пусть налоговая схема является возрастающей функцией $r = f(i)$, которая выражает доход после уплаты налога как функцию от дохода до уплаты налога. Большинство ФКП будет приводить к различным результатам до и после уплаты налогов. Для эгалитарной ФКП это не так. Она отдает предпочтение вектору u по сравнению с v, если беднейший агент при u богаче беднейшего агента при v. После уплаты налогов относительное положение доходов останется неизменным, поэтому $f(u)$ по-прежнему предпочтительнее, чем $f(v)$.

Определение. ПКБ R ***не зависит от общей шкалы полезности***, если выполняется одно из следующих двух эквивалентных условий:

1) для любой возрастающей функции f и для любых $u,v \in E^N$ выполняется $u\,R\,v \Leftrightarrow f(u)\,R\,f(v)$, где $f(u) = (f(u_1),..., f(u_n))$;

2) для любых $u,u',v,v' \in E^N$ выполняется

$$\left[\forall i, j \in N \;\; u_i \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \end{Bmatrix} v_j \Leftrightarrow u_i' \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \end{Bmatrix} v_j'\right] \Rightarrow \left[u\,R\,v \Leftrightarrow u'\,R\,v'\right].$$

ПКБ, не зависящий от общей шкалы полезности, является порядковым: для него имеют значения только парные сравнения $u_i \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \end{Bmatrix} v_j$, а не интенсивность сравнения $u_i - v_j$.

К ПКБ, не зависимым от общей шкалы полезности, относятся: лексиминный ПКБ, эгалитарная ФКП, а также обобщающее их понятие рангового диктаторства.

Рассмотрим понятие рангового диктаторства. Для вектора полезностей u из множества всех допустимых векторов полезностей E^N обозначим k-й (начиная с наименьшего) уровень полезности через u_k^*. Определим ***диктаторскую ФКП*** W_k ранга k: $W_k(u) = u_k^* \quad \forall u \in E^N$. Здесь W_1 — это эгалитарная ФКП, а $W_n(u) = \max\limits_{1 \le i \le n} u_i$ — ФКП, интересующаяся благосостоянием только наиболее удачливого агента (диктат богатых). Еще одна интересная ФКП рангового диктаторства — диктат середины при $k = n/2$.

Теорема. Диктаторская ФКП ранга k не зависит от общей шкалы полезности для любого $k = \overline{1, n}$. Если R — независимый от общей шкалы полезности ПКБ, то существует такое целое $k = \overline{1, n}$, что W_k слабо представляет R.

Сепарабельность

Пусть в заданном сообществе $N = \{1, 2, 3, 4\}$ перераспределение благосостояния касается только для 1-го и 2-го агентов. Можно ли судить о благосостоянии (в целом для сообщества), не зная фиксированных уровней благосостояния 3-го и 4-го агентов? Например, можем ли мы выбрать наилучшее решение из двух векторов $u = (1, 4, x, y)$ и $v = (3, 2, x, y)$, если неизвестно, чему равны x и y?

Ответ на этот вопрос существует, если выбранный ПКБ обладает свойством сепарабельности.

Определение. Для заданных сообщества N и ПКБ R на E^N говорят, что порядок R является ***сепарабельным***, если для любого собственного непустого подмножества T множества N и для любых $u, v, u', v' \in E^N$ выполнено $\{(u_i = u_i', v_i = v_i' \quad \forall i \in T)$ и

$(u_j = v_j, u_j' = v_j' \quad \forall j \in N \setminus T)\} \Rightarrow \{uRv \Leftrightarrow u'Rv'\}$ или более компактно: $(u_T u_{N \setminus T}) R (v_T u_{N \setminus T}) \Leftrightarrow (u_T v_{N \setminus T}) R (v_T v_{N \setminus T})$.

Сепарабельность означает информационную децентрализацию: ПКБ может быть успешно ограничен на любые подмножества сообщества *N*. Сепарабельные ПКБ получаются из сепарабельно аддитивных ФКП. Сепарабельно аддитивная ФКП может быть записана в виде

$$W(u) = \sum_{i=1}^{N} f(u_i),$$

где f — возрастающая действительная функция. Например, ПКБ, представленный ФКП Нэша, сепарабелен, поскольку его представляет также сепарабельно аддитивная ФКП $W(u) = \sum_{i=1}^{N} \log(u_i)$. Утилитарная ФКП также сепарабельна. Эгалитарная ФКП не сепарабельна. Например, $W_e(2,3,4) < W_e(3,3,4)$, но $W_e(2,3,1) = W_e(3,3,1)$. Лексиминный ПКБ сепарабелен.

При некоторых дополнительных слабых свойствах независимости согласно аксиоме сепарабельности выделяется небольшое подмножество ФКП.

Определение. Рассмотрим ПКБ R на множестве допустимых векторов полезности E^N. Говорят, что R ***не зависит от общего нуля полезности***, если для любых $u, v \in E^N$ и для любого действительного числа λ выполнено $u R v \Leftrightarrow (u + \lambda e) R (v + \lambda e)$, где $e = (1,1,\ldots,1)$.

Определение. Рассмотрим ПКБ R на положительном ортанте E_{++}^N. Говорят, что R ***не зависит от общего масштаба полезности***, если для любых $u, v \in E_{++}^N$ и для любого $\lambda > 0$ выполнено $u R v \Leftrightarrow (\lambda u) R (\lambda v)$.

При независимости от общего масштаба полезности не имеет значения, измеряется ли доход в долларах или рублях, лишь бы единица измерения для всех агентов была общая. Если ПКБ не зависит от общего нуля полезности, то можно одинаковым образом сравнивать распределения доходов и их части при условии отсчета от некоторого единого прожиточного минимума. И утилитарная ФКП, и лексиминный ПКБ не зависят ни от общего нуля, ни от общего масштаба.

Сокращение неравенства

Эгалитарная программа осуществляет перераспределение благосостояния от богатого к бедному и не рассматривает суммарную полезность агентов. Утилитарная программа, напротив, безразлична к перераспределениям. Между этими крайними случаями имеется обширный класс ПКБ, каждый из которых обращает внимание в какой-то степени и на перераспределение от богатого к бедному и стремится поднять общую сумму полезностей.

Согласно принципу передачи Пигу-Дальтона передача полезности от одного агента другому, которая не увеличивает разрыв в их благосостоянии, не может уменьшить коллективного благосостояния. Говорят, что ***порядок*** R ***удовлетворяет принципу Пигу-Дальтона***, если для любых i, j и для любых $u, v \in E^N$ выполнено $\{u_k = v_k \quad \forall k \neq i, j, \ u_i + u_j = v_i + v_j, \ |v_i - v_j| < |u_i - u_j|\} \Rightarrow v R u.$

Строгий принцип Пигу-Дальтона требует, чтобы вектор v был строго предпочтительнее u при тех же предположениях. Если ПКБ удовлетворяет принципу Пигу-Дальтона (строгому принципу Пигу-Дальтона), то говорят, что он ***не увеличивает (сокращает) неравенство.***

Лексиминный ПКБ сокращает неравенство. Эгалитарная и утилитарная ФКП его не увеличивают.

Рассмотрим один из главных способов характеризации принципа Пигу-Дальтона, который связан с частичным порядком на перераспределениях полезности, более слабым, чем порядок Парето.

Определение. Для вектора полезностей $u \in E^N$ определим ***кривую Лоренса***, а именно вектор

$$L(u) = (u_1^*, u_1^* + u_2^*, \ldots, u_1^* + u_2^* + \ldots + u_n^*)$$

или $[L(u)]_k = \sum_{i=1}^{k} u_i^* \quad \forall k = \overline{1, n}$.

Таким образом, k-я координата кривой Лоренса дает суммарную полезность k беднейших агентов.

Как влияет перераспределение полезностей, описанное принципом Пигу-Дальтона, на кривую Лоренса? Рассмотрим пример такого перераспределения и построим кривые Лоренса для обоих векторов полезностей (до и после перераспределения). Пусть u^* — упорядоченный по возрастанию вектор полезности до перераспределения, а v — вектор полезности, полученный из u^* путем передачи четырех единиц полезности от седьмого второму агенту:

$$u^* = (2,6,8,9,11,14,16,18) \quad \Rightarrow \quad L(u) = (2,8,16,25,36,50,66,84),$$
$$v = (2,10,8,9,11,14,12,18) \quad \Rightarrow \quad L(v) = (2,10,19,29,40,52,66,84).$$

После перераспределения каждая координата кривой Лоренса либо поднимается, либо остается неизменной. Это свойство общее: любая передача Пигу-Дальтона поднимает кривую Лоренса.

Лемма. Скажем, что вектор u ***доминирует по Лоренсу*** вектор v, если его кривая Лоренса $L(u)$ превосходит (по Парето) кривую Лоренса $L(v)$:

$$L(u) > L(v) \Leftrightarrow \{\forall k \ \sum_{i=1}^{k} u_i^* \geq \sum_{i=1}^{k} v_i^*, \ \exists k \ \sum_{i=1}^{k} u_i^* > \sum_{i=1}^{k} v_i^*\}$$

Если вектор u доминирует по Парето v или u получен из v передачей Пигу-Дальтона, то u доминирует по Лоренсу v. И наоборот, если u доминирует по Лоренсу v, то можно подобрать последовательность передач Пигу-Дальтона и улучшений Парето, позволяющую из v получить u.

Таким образом, ПКБ R не увеличивает (сокращает) неравенство тогда и только тогда, когда он согласован с доминированием по Лоренсу: для любых u, v таких, что $L(u) > L(v) \Rightarrow u R v \ (u P v)$.

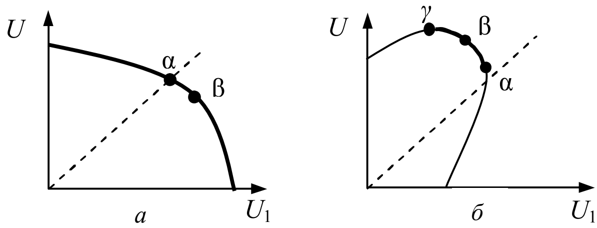
Последовательность, упомянутая в лемме, для каждого сокращающего неравенство ПКБ приведет к оптимальному по Лоренсу элементу, т. е. к вектору, который не доминируется по Лоренсу никаким другим допустимым вектором для любого множества допустимых векторов полезностей. Оптимумы Лоренса составляют подмножество множества Парето.

Пример 4.5. Нахождение оптимумов Лоренса при двух агентах

Для двух агентов кривая Лоренса примет вид

$$L(u_1, u_2) = (\min\{u_1, u_2\}, u_1 + u_2).$$

Следовательно, вектор полезностей оптимален по Лоренсу тогда и только тогда, когда он не может быть улучшен по утилитарной ФКП без ухудшения по эгалитарной ФКП (и наоборот). На рисунке показаны типичные конфигурации для выпуклого множества допустимых векторов полезности и соответствующие оптимумы Лоренса и Парето.



Оптимумы Лоренса при двух агентах:
а — без дилеммы равенство-эффективность;
б — с дилеммой равенство-эффективность

Оптимумы Лоренса расположены между α (эгалитарным решением) и β (утилитарным решением). Оптимумы Парето помечены на рисунке жирными линиями и находятся в случае (*а*) на границе множества допустимых векторов полезности, а в случае (*б*) между точками γ и α.

Пример 4.6. Нахождение оптимумов Лоренса в задаче размещения

Пять городов расположены на отрезке [0; 1] в точках 0; 0,25; 0,7; 0,75; 1. Каждое размещение на отрезке допустимо и оптимально по Парето. Эгалитарное размещение есть точка 0,5; утилитарное — точка 0,7. оптимумы Лоренса располагаются на отрезке между точками 0,5 и 0,7. Любое размещение на отрезке [0; 0,5] доминируется эгалитарным решением, любое размещение на отрезке [0,7; 1] доминируется утилитарным решением. Никакое размещение на отрезке [0,5; 0,7] не доминируется по Лоренсу: эгалитарная ФКП уменьшается, когда мы сдвигаемся вправо, а утилитарная ФКП уменьшается, когда мы сдвигаемся влево.

Рассмотрим для примера четыре следующих размещения:

1) в точках 0,3;

2) 0,5 (эгалитарное решение);

3) 0,7 (утилитарное решение);

4) 0,75.

Векторы полезности и кривые Лоренса для соответствующих размещений:

$u(0{,}3) = (-0{,}3;-0{,}05;-0{,}4;-0{,}45;-0{,}7)$, $L(0{,}3) = (-0{,}7;-1{,}15;-1{,}55;-1{,}85;-1{,}9)$

$u(0{,}5) = (-0{,}5;-0{,}25;-0{,}2;-0{,}25;-0{,}5)$, $L(0{,}5) = (-0{,}5;-1;-1{,}25;-1{,}5;-1{,}7)$

$u(0{,}7) = (-0{,}7;-0{,}45;-0;-0{,}05;-0{,}3)$, $L(0{,}7) = (-0{,}7;-1{,}15;-1{,}45;-1{,}5;-1{,}5)$

$u(0{,}75) = (-0{,}75;-0{,}5;-0{,}05;0;-0{,}25)$, $L(0{,}75) = (-0{,}75;-1{,}25;-1{,}5;-1{,}55;-1{,}55)$

Размещение в точке 0,3 доминируется по Лоренсу эгалитарным решением, размещение в точке 0,75 — по Лоренсу утилитарным решением.

Заметим, что результаты приведенных примеров не являются общими: оптимумы Лоренса не всегда расположены между эгалитарным и утилитарным решениями.

4.2. Кооперативные игры

4.2.1. Общие понятия кооперативных игр

В теории кооперативных игр в отличие от теории благосостояния принято агентов называть игроками, а поведение игроков — стратегиями. **Игрой** называется математическая модель конфликтной ситуации:

$$\Gamma = < X_i, J_i, i \in N >,$$

где X_i — множество стратегий i-го игрока;

J_i — функция выигрыша i-го игрока;

N — множество игроков.

Игровой смысл модели заключается в том, что функция выигрыша i-го игрока зависит не только от стратегии X_i этого игрока, но и от стратегий всех остальных игроков:

$$J_i = J_i(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n).$$

Целью каждого игрока является максимизация собственного выигрыша (или минимизация проигрыша). В кооперативных играх игроки могут вступать в сговор между собой и образовывать коалиции. Любое подмножество S множества N называется **коалицией**. Коалиция может состоять из одного игрока или быть пустой. Множество всех возможных коалиций равно 2^N. Здесь стратегии выбираются игроками коалиции так, чтобы максимизировать общий доход. Основной вопрос заключается в том, как разделить общий доход между игроками.

Будем считать, что выигрыши являются трансферабельными: т. е. игроки могут передавать часть своих доходов другим игрокам (делать побочные платежи). В этом случае игра называется **кооперативной игрой с трансферабельными выигрышами.**

Величина, оценивающая возможности коалиции, называется ***характеристической функцией*** (х.ф.) ***коалиции***. Х.ф. показывает максимальную величину выигрыша, которую коалиция может себе гарантировать независимо от действий всех остальных игроков. Х.ф. коалиции S обозначим $v(S)$. Принято считать, что $v(\varnothing) = 0$, где $\varnothing$ — пустая коалиция. Х.ф. является функцией, зависящей от множества как от аргумента. Если функция множества v обладает свойством

$$v(S \bigcup R) \geq v(S) + v(R),\ \ \forall S \bigcap R = \varnothing,$$

то говорят, что она супераддитивна. Другими словами, объединив свои усилия, две не имеющие общих членов коалиции смогут получить не меньше, чем оставаясь разделенными. Супераддитивность является определяющим условием образования больших коалиций, в том числе и коалиции N.

Определение. Характеристической функцией кооперативной игры с трансферабельными выигрышами называется функция v, определенная на множестве 2^N, ставящая в соответствие любой коалиции $S \in 2^N$ ее наибольший, уверенно получаемый выигрыш в данной игре и обладающая свойствами:

$$v(\varnothing) = 0;\ v(S \bigcup R) \geq v(S) + v(R),\ \forall S \bigcap R = \varnothing.$$

Это общее определение х.ф. В зависимости от условий конкретной игры ее можно задать по-разному. Рассмотрим один из распространенных способов.

Пусть в игре образовалась коалиция $S < N$. Совместное взаимодействие игроков из коалиции S означает, что стратегиями этой коалиции являются всевозможные стратегии входящих в нее игроков, которые составляют множество их совместных чистых стратегий (т. е. чистых стратегий, которые игроки обязуются использовать совместно). Пусть X_S — совместная чистая стратегия коалиции S. Целью коалиции S является достижение максимального выигрыша путем оптимального выбора собственной стратегии X_S. Выигрыш коалиции определяется как сумма выигрышей всех входящих в нее игроков:

$$J_S(X_1,...,X_n) = \sum_{i \in S} J_i(X_1,...,X_n).$$

Поскольку этот выигрыш зависит и от поведения других игроков из множества $N \backslash S$, то при определении х.ф. коалиции S необходимо учитывать все возможные варианты поведения игроков. Наихудшим вариантом протекания игры для коалиции S будет ситуация, когда остальные игроки объединятся в одну общую коалицию $N \backslash S$ и будут играть против S. Тогда х.ф. коалиции S можно определить следующим образом:

$$v(S) = val\Gamma_{S/N \backslash S},$$

где $val\Gamma_{S/N \backslash S}$ — есть значение антагонистической игры, в которой функцией выигрыша первого игрока S, выступающего как максимизирующий игрок, является J_S; выигрышем второго игрока $N \backslash S$, выступающего как минимизирующий игрок, является $-J_S$. Если игра имеет решение в чистых стратегиях, ее значение определяется следующим образом[1]:

$$val\Gamma_{S/N \backslash S} = \max_{X_S} \min_{X_{N \backslash S}} J_S(X_S, X_{N \backslash S}) = \min_{X_{N \backslash S}} \max_{X_S} J_S(X_S, X_{N \backslash S}).$$

Дальнейшее исследование игры связано только с ее х.ф., поэтому в последующем изложении материала не рассматрива-

[1] Если игра не имеет решения в чистых стратегиях, решение ищется аналогично в смешанных стратегиях. Решение антагонистических игр в смешанных стратегиях в данном пособии не рассматривается. При желании эти вопросы можно изучить самостоятельно (решение антагонистических игр рассматривается в любой книге, посвященной вопросам теории игр, например в [8]).

ются стратегии и функции выигрышей игроков. Основное внимание уделяется только характеристическим функциям коалиций и вопросам дележа прибыли.

4.2.2. С-ядро игры

Рассмотрим кооперативную игру. Поскольку х.ф. супераддитивна, то следует ожидать объединения всех игроков в одну большую коалицию N. Возникает вопрос: при каких условиях игрок становится членом коалиции N. Естественно, при разделе общего дохода $v(N)$ ни один игрок не согласится получить меньше того дохода, который он может себе обеспечить, действуя в одиночку (максиминный критерий). Долю игрока i при разделе суммы $v(N)$ обозначим x_i.

Определение. Вектор $X = (x_1, ..., x_n)$ называется дележом в кооперативной игре с трансферабельными выигрышами, если его компоненты удовлетворяют следующим условиям:

1) $x_i \geq v\{i\}$ для всех $i \in N$;
2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ (не так важно, как 1, но желательно).

Множество всех дележей в игре обозначим $E(v)$, которое в общем случае является бесконечным. Множество $E(v)$ состоит из разных дележей, следовательно, у игроков имеется возможность выбора. Для того чтобы иметь возможность сравнивать различные дележи, введем на $E(v)$ отношение предпочтения.

Определение. Пусть $x, y \in E(v)$. Говорят, что x ***доминирует*** y ***по коалиции*** S $(x \succ_s y)$, если выполняются следующие два условия:

1) $x_i > y_i \quad \forall\, i \in S$,
2) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Говорят, что x ***доминирует*** y $(x \succ y)$, если существует хотя бы одна коалиция $S \subset N$, что $(x \succ_s y)$.

Первое свойство показывает, что все члены коалиции S строго предпочитают x; второе свойство показывает, что коалиция может предпочитать только тот дележ, соответствующие компоненты которого она в силах гарантировать своим членам.

Замечание. Доминирование невозможно по следующим коалициям: из одного игрока (нарушается первое свойство дележа); из N игроков (нарушается второе свойство дележа — см. определение дележа).

Пример 4.7. Сравнение дележей в кооперативной игре

Кооперативная игра трех лиц задана следующей х.ф.:

$$v(1) = 0, v(2) = v(3) = 1, v(12) = 3, v(23) = 4, v(13) = 1, v(123) = 6 .$$

Рассмотрим несколько произвольных дележей:

$$x = (2 ,2 ,2), y = (1, 1, 4), z = (4, 1, 1), w = (1{,}5;\ 3;\ 1{,}5) .$$

Так как доминирование по одиночным и по максимальной коалициям невозможно, будем рассматривать возможность доминирования только по двойным коалициям.

Сравним дележи x и y. Здесь первое условие доминирования выполняется по коалиции $\{1, 2\}$: $2 > 1$ и $2 > 1$, но при этом не выполняется второе условие: $x_1 + x_2 = 4 > v(12) = 3$. Значит, дележи x и y не доминируют друг друга.

Теперь сравним дележи x и z. Здесь по коалиции $\{2, 3\}$ выполняется и первое и второе условие доминирования: $2 > 1$, $2 > 1$ и $x_2 + x_3 = 4 = v(23)$. Таким образом, дележ x доминирует дележ z по коалиции $\{2, 3\}$: $x \succ_{\{2,\,3\}} z$.

Больше в данном списке ни один дележ не доминирует другой, так как не выполняются либо первое, либо второе условие доминирования.

Отношение доминирования по коалиции упорядочивает множество дележей относительно этой коалиции. Значит, для каждой коалиции существует свой порядок дележей по предпочтению. Какой дележ должен стать решением?

Самое простое — взять дележ, доминирующий все остальные дележи по всем коалициям. Однако такого дележа не бывает.

Пусть x доминирует все дележи из множества $E(v) \setminus x$. Тогда для $\forall\, y \in E(v) \setminus x$ будут выполняться следующие два условия:

1) $x_i > y_i \ \ \forall\, i \in S$ и $\forall\, S \in 2^N$,

2) $\sum\limits_{i \in S} x_i \le v(S) \ \ \forall\, S \in 2^N$.

Из условия 1 следует, что $x_i > y_i, \forall i \in N \Rightarrow \sum\limits_{i \in N} x_i > \sum\limits_{i \in N} y_i = v(N)$, а это противоречит второму условию. Тогда решением может быть недоминируемый дележ. Таких дележей может быть много.

Определение. Множество недоминируемых дележей называется ***с-ядром игры***.

Так как любой дележ из с-ядра недоминируем, то ни у одного из игроков (также и коалиций) не будет возражений против реализации этого дележа (хотя могут быть споры по выбору дележа из с-ядра).

Пример 4.8. Дележи из с-ядра

Рассмотрим игру трех рабочих A, B, C. Пусть за одну смену рабочий A может заработать 10 единиц, B — 9 единиц, C — 3 единицы. Разрешено образование любой бригады из 2-х или 3-х человек. Пусть заработки бригад: AB — 22, BC —15, AC — 17, ABC — 28 единиц.

Как должны действовать рабочие, чтобы получить наибольшие заработки, и каковы размеры этих заработков?

Вектор заработков обозначим через $X = (x_1, x_2, x_3)$. Если игроки придут к согласию и создадут коалицию ABC, то они получат наибольший суммарный доход 28 единиц. Его можно разделить между рабочими различными способами, например (12, 11, 5). Очевидно, что против такого раздела не будет возражений ни со стороны отдельных игроков: A: 12>10, B: 11>9, C: 5>3, так и со стороны бригад: AB: 12+11>22, BC:12+5 $\ge$ 17. В этом смысле вектор X является устойчивым (он принадлежит с-ядру игры). Но можно предложить такое разделение: (13, 11, 4), что является лучшим для A и худшим для C. Это распределение также принадлежит с-ядру.

Рассмотрим условия принадлежности дележа с-ядру игры.

Теорема. Для того чтобы дележ $X \in E(v)$ принадлежал с-ядру, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции $S \in 2^N$ выполнялось одно из следующих двух эквивалентных условий:

1) для всех $S \subset N$: $v(S) \le \sum_{i \in S} x_i$,
2) для всех $S \subset N$: $\sum_{i \in S} x_i \le v(N) - v(N \setminus S)$.

Первое условие называется ***принципом отделения*** и гласит, что коалиция никогда не согласится получить прибыль меньше, чем она может заработать самостоятельно.

Второе условие называется ***принципом отсутствия субсидий*** и суть его в том, что никакая коалиция не должна получить больше, чем ее вклад в общую прибыль.

Следствие. С-ядро любой кооперативной игры с трансферабельными выигрышами является замкнутым выпуклым многогранником. Из-за жесткости условия, определяющего с-ядро, оно часто бывает пустым.

Поэтому важной проблемой является существование ядра. При каких условиях в данной кооперативной игре с-ядро не пусто? Необходимым условием непустоты ядра в игре $< N, v >$ является свойство супераддитивности, т. е. должно выполняться условие $\sum_{k=1}^{K} v(S_k) \le v(N)$, где $S_1, \ldots, S_k$ — непересекающиеся коалиции, а $\bigcup_{k=1}^{K} S_k = N$. В самом деле, если это условие не выполняется, то, складывая неравенства $\sum_{i \in S_k} x_i \ge v(S_k)$, получаем $\sum_{i \in N} x_i > v(N)$, что невозможно из определения дележа, следовательно, с-ядро пусто.

Но свойство супераддитивности не является достаточным.

Пример 4.9. Распределение затрат на объект

Соседними муниципалитетами ведется строительство совместной системы водоснабжения. Пусть у нас есть три города, которые при строительстве могут понести следующие затраты:

город A отдельно — 120; город B — 140; город C — 120;

коалиция $\{A, B\}$ — 170; коалиция $\{B, C\}$ — 190; коалиция $\{A, C\}$ — 160; три города вместе — 265.

Здесь х.ф. игры задана в виде затрат, а не прибыли. Будем обозначать х.ф. по затратам $c(S)$. В данном примере $c(S)$ представляет собой минимальные затраты на обслуживание S наиболее эффективным способом.

Рассмотрим сначала объединение двух городов A и B. Экономия затрат от совместного производства составит

$$c(\{A\}) + c(\{B\}) - c(\{AB\}) = 90.$$

Равное распределение этой экономии (эгалитарное решение) приводит к следующим затратам:

$$x_A = 120 - \frac{1}{2} \cdot 90 = 75,\ x_B = 140 - \frac{1}{2} \cdot 90 = 95.$$

Если участвуют все три города, общая экономия составит

$$c(\{A\}) + c(\{B\}) + c(\{C\}) - c(\{ABC\}) = 115.$$

Распределим экономию равным образом между игроками:

$$x_A = 120 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 81{,}7,\ x_B = 140 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 101{,}7,$$

$$x_C = 120 - \frac{1}{3} \cdot 115 = 81{,}7.$$

Приемлемость такого распределения затрат проблематична. Общие затраты, получающиеся для коалиции AB, превосходят их затраты без города C: $81{,}7 + 101{,}7 > 170 = c(\{AB\})$, а значит такое распределение не устроит коалицию AB.

Таким образом, дележ $(81{,}7;\ 101{,}7;\ 81{,}7)$ не принадлежит с-ядру. А существует ли в этой игре с-ядро? Для существования ядра необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$x_1 + x_2 + x_3 = 265;$

$x_1 \le 120, x_2 \le 140, x_3 \le 120;$

$x_1 + x_2 \le 170;$

$x_2 + x_3 \le 190;$

$x_1 + x_3 \le 160.$

При этих ограничениях игра не имеет решения (хотя свойство супераддитивности выполняется). Следовательно, необходимо усилить свойство супераддитивности.

Примечание. Если в игре указаны не прибыли игроков, а их затраты, то при проверке условий меняются знаки сравнения. Так, принадлежность дележа с-ядру в этом случае будет определяться неравенством $c(S) \ge \sum_{i \in S} x_i$.

Будем называть коалицию собственной, если она не совпадает с максимальной коалицией N.

Определение. Для данного сообщества игроков N ***сбалансированное покрытие*** есть такое отображение δ из $2^N \setminus \{N\}$ (множества собственных коалиций) в множество действительных чисел на интервале [0, 1], что $\sum_{S: i \in S} \delta_S = 1$ для всех игроков i, где суммирование ведется по всем собственным коалициям, содержащим игрока i.

Теорема. С-ядро игр с трансферабельными выигрышами не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия δ выполняется условие

$$\sum_{\substack{S \subset N \\ S \ne N}} \delta_S \cdot v(S) \le v(N), \qquad (4.1)$$

если говорим о затратах $c(S)$, то неравенство выглядит следующим образом:

$$\sum_{\substack{S \subset N \\ S \ne N}} \delta_S \cdot c(S) \ge c(N).$$

Данное условие означает, что кооперативная прибыль $v(S)$ собственных коалиций не должна быть слишком большой по сравнению с прибылью $v(N)$.

Сбалансированные покрытия образуют выпуклый многогранник. Поэтому условие (4.1) достаточно проверить для крайних точек этого многогранника. Если найти данные точки, то свойство сбалансированности может быть записано как конечная система линейных неравенств на v.

Рассмотрим игры с тремя игроками: $N = \{1, 2, 3\}$. Здесь сбалансированные покрытия образуют многогранник с пятью крайними точками:

1) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0;$

2) $\delta_{12} = \delta_3 = 1,\ \delta_1 = \delta_2 = \delta_{13} = \delta_{23} = 0;$

3) $\delta_1 = \delta_{23} = 1,\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_{13} = \delta_{12} = 0;$

4) $\delta_2 = \delta_{13} = 1,\ \delta_1 = \delta_3 = \delta_{12} = \delta_{23} = 0;$

5) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,\ \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \frac{1}{2}.$

Игра $< N, v >$ с тремя игроками имеет непустое с-ядро тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$v(1) + v(2) + v(3) \le v(N);$$
$$v(1) + v(23) \le v(N);$$
$$v(2) + v(13) \le v(N);$$
$$v(3) + v(12) \le v(N);$$
$$\frac{1}{2}\big(v(12) + v(23) + v(13) \le v(N)\big).$$

Для кооперативной игры с четырьмя игроками с-ядро непусто тогда и только тогда, когда игра супераддитивна и выполняются семь дополнительных неравенств:

1) $\frac{1}{3}\big(v(123) + v(234) + v(134) + v(124)\big) \le v(N);$

2) $\frac{1}{2}\big(v(123) + v(234) + v(14)\big) \le v(N);$

3) $\frac{1}{2}\big(v(134) + v(234) + v(12)\big) \le v(N);$

4) $\frac{1}{2}\big(v(124) + v(234) + v(13)\big) \le v(N);$

5) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(134)+v(24)\right)\le v(N)$;

6) $\frac{1}{2}\left(v(123)+v(124)+v(34)\right)\le v(N)$;

7) $\frac{1}{2}\left(v(124)+v(134)+v(23)\right)\le v(N)$.

Вернемся к **примеру 4.9.** Проверим задачу на наличие с-ядра:

$120+140+120=380>265$;

$120+190=310>265$;

$140+160=300>265$;

$120+170=290>265$,

$\frac{1}{2}(170+190+160)=260<265$.

Последнее условие не выполняется, следовательно с-ядра не существует.

Пусть $c(ABC)=255$, тогда игра имеет с-ядро. Найдем с-ядро игры. Заменим переменные x_i (затраты) на экономию затрат: $y_i=c(i)-x_i$, тогда

$y_1+y_2+y_3=125,\ y_i\ge 0,\ i=1,2,3$;

$y_1+y_2\ge 90$;

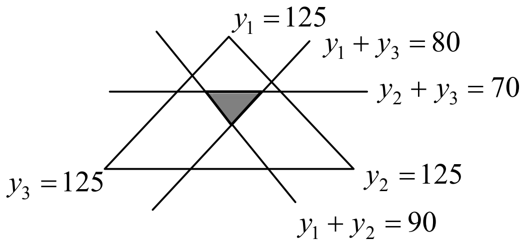
$y_2+y_3\ge 70$;

$y_1+y_3\ge 80$.

На нижеприведенном рисунке изображен симплекс

$$\{y_i\ge 0,\ y_1+y_2+y_3=125\},$$

внутри которого три дополнительных ограничения выделяют треугольник (заштрихованная область) — с-ядро игры.



Графическое изображение с-ядра игры

С-ядро игры — множество точек треугольника с вершинами $(55, 45, 25)$, $(45, 45, 35)$, $(55, 35, 35)$. Переходя к затратам, получаем: $(65, 95, 95)$, $(75, 95, 85)$, $(65, 105, 85)$.

Распределение затрат в центре ядра представляется дележом

$$X^* = (68,3; 98,3; 88,3).$$

Примечание: с-ядро игры не всегда представляет собой треугольник. В зависимости от того, как проходят ограничения внутри симплекс-треугольника, с-ядро может быть точкой (крайняя ситуация, когда все три ограничения пересекаются в одной точке), отрезком, треугольником, четырехугольником, пятиугольником или шестиугольником. При построении ограничений необходимо учитывать, что максимальное значение y_i принимает в соответствующей вершине, уменьшается в направлении основания симплекс-треугольника и на стороне, противоположной вершине y_i, принимает значение, равное нулю. Если в процессе нахождения с-ядра получается точка с отрицательной координатой, то это означает, что данная точка на самом деле находится за пределами симплекс-треугольника.

4.2.3. Значение кооперативных игр

Заветная цель кооперативной теории игр состоит в построении универсальной концепции решения, выбирающей для каждой кооперативной игры единственное распределение полезностей. Конечно, единственной концепции решения не появилось, но тем не менее было открыто два известных значения, которые доказали свою применимость для широкого круга экономических моделей. Такими значениями являются вектор Шепли и N-ядро, которые и рассматриваются в данном разделе.

Вектор Шепли

Назовем величину $sc_i = c(N) - c(N \setminus i)$ сепарабельными затратами игрока i, которые представляют собой маргинальные затраты на обслуживание игрока i при условии, что все остальные игроки уже обслужены.

Вектор Шепли реализует идею распределения затрат (прибыли), основанную на маргинальных вкладах. Таким образом, доля затрат (доля прибыли) игрока вычисляется как средние маргинальные затраты (прибыль), добавляемые игроком к каждой коалиции остальных игроков.

Для того чтобы получить соответствующую формулу, представим, что игроки из N случайно упорядочены в очередь $(i_1, i_2, ..., i_n)$, причем вероятность каждого упорядочения одинакова. Игроку i вектор Шепли приписывает среднее его маргинальной прибыли $v\big(S \cup \{i\}\big) - v(S)$, взятое по всем коалициям $S \subset N \setminus i$, включая пустое множество. Вес коалиции S соответствует вероятности того, что в случайной очереди $(i_1, ..., i_n)$ перед игроком i стоят в точности игроки из S. Непосредственное вычисление этой вероятности дает величину $s!(n-s-1)!/n!$, где s есть размер S (количество игроков, входящих в данную коалицию).

Определение. Для кооперативной игры с трансферабельными выигрышами ***вектор Шепли*** δ распределяет прибыль $v(N)$ максимальной коалиции следующим образом:

$$\forall\, i \;\; \delta_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{\mathrm{s!(n-s-1)!}}{\mathrm{n!}} \sum_{\substack{S \subset N \setminus i \\ |S| = s}} \big(v(S \cup \{i\}) - v(S)\big).$$

Очевидно, что для игр с распределением затрат вектор Шепли получается на основе аналогичной формулы, где v заменяется на c. Так как вектор Шепли является дележом, то $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = v(N)$.

Пример 4.10. Определение вектора Шепли в игре трех лиц

Найдем вектор Шепли для игроков из примера 4.9.

$$\delta_1 = \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{6}\left[\left(v(12) - v(2)\right) + \left(v(13) - v(3)\right)\right] + \frac{1}{3}\left(v(N) - v(23)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 120 + \frac{1}{6}\left[(170-140) + (160-120)\right] + \frac{1}{3}(255-190) = 73{,}3;$$

$$\delta_2 = 98{,}3;$$

$$\delta_3 = 83{,}3.$$

Заметим, что данный дележ лежит вне с-ядра $(\delta_1 + \delta_2 > 170)$.

Если игра супераддитивна, то вектор Шепли является индивидуально рациональным, т. е. игрок i получает, по крайней мере, доступную ему прибыль $v(i)$. Таким образом, при использовании вектора Шепли один игрок не может отделиться и высказать возражения. Тем не менее, промежуточные коалиции могут иметь такую возможность, как было показано в примере 4.10.

Пример 4.11. Экономика производства кукурузы в имении

Имеется $n+1$ игрок. Игроку 0 (землевладельцу) принадлежит земля, а игроки $1, 2, \ldots, n$ — это n одинаковых рабочих, которым принадлежит только их рабочая сила. Производственная функция показывает для каждого числа рабочих s количество кукурузы $f(s)$, которое они произведут, работая в имении. Функция f не убывает и $f(0) = 0$. Без участия игрока 0 коалиция бесполезна, при его участии количество произведенной продукции определяется числом рабочих:

$$v(S) = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 \notin S, \\ f(s), \text{ при } 0 \in S, |S| = s+1. \end{cases}$$

Вектор Шепли отдает землевладельцу прибыль, определяемую следующим образом:

$$\delta_o = \frac{1}{n+1} f(n) + \frac{1}{(n+1)\cdot n} \cdot f(n-1)\cdot n + \frac{2}{(n+1)n(n-1)} \cdot$$

$$\cdot f(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \ldots = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} f(i),$$

так как его маргинальный вклад равен $f(i)$, где i — число рабочих.

Поскольку все рабочие одинаковы, то они получают одинаковые доли:

$$\delta_i = \frac{1}{n}\left(f(n) - \delta_0\right) = \frac{1}{n}\left[f(n) - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(i)\right].$$

Пример 4.10 показывает, что вектор Шепли не удовлетворяет принципу отделения: существуют игры с непустым с-ядром, в которых вектор Шепли лежит вне ядра.

Выпуклые игры представляют собой важный класс игр, в которых с-ядро не пусто и содержит вектор Шепли. Более того, вектор расположен в центре ядра выпуклой игры. Игра является выпуклой, если имеет место возрастание доходов от кооперации: чем больше коалиция, к которой присоединяется игрок i, тем больше его маргинальный вклад.

Определение. Кооперативная игра является ***выпуклой***, если она удовлетворяет одному из двух эквивалентных свойств:

1) $\forall\, i \in N,\ \forall\, S, T \subset N \setminus \{i\}$:

$\{S \subset T\} \Rightarrow \{v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T)\}$,

2) $\forall\, S, T \subset N : v(S) + v(T) \le v(S \cup T) + v(S \cap T)$, где по соглашению $v(\varnothing) = 0$.

N-ядро

Вектор Шепли не всегда принадлежит с-ядру. Желательно иметь решение, которое бы принадлежало ядру, если с-ядро не пусто. N-ядро является таким значением кооперативной игры. Оно занимает центральное положение внутри с-ядра и основывается на понятии лексиминного порядка (см. п. 4.1.2) для сверхдоходов коалиций.

Определение. Даны кооперативная игра и множество дележей $x \in E(v)$. Любому дележу x поставим в соответствие вектор $e(X) \in E^{2^N \setminus N}$: для всех собственных коалиций

$$S \subset N : e(x;S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S).$$

На множестве $E(v)$ существует единственное распределение γ такое, что для любого $x \in E(v)$ вектор $e(\gamma)$ предпочтительнее в смысле лексиминного порядка вектора $e(x)$. Дележ γ называют N-ядром игры.

При определении N-ядра благосостояние коалиции S измеряют с помощью эксцесса $e(x,S)$, который по сути есть сверхдоход коалиции S по сравнению с ее собственным возможным результатом. Эксцессы различных коалиций сравниваются следующим образом. В первую очередь рассматривается минимальная прибыль, которая максимизируется:

$$\min_{S \subset N} e(\gamma, S) \geq \min_{S \subset N} e(x,S) \quad \forall\, x \in E(v) \quad \Leftrightarrow$$

$$\min_{S \subset N}\left[\sum_{i \in S}\gamma_i - v(S)\right] = \max_{X \in E(v)}\left\{\min_{S \subset N}\left[\sum_{i \in S} x_i - v(S)\right]\right\}.$$

Затем из полученного множества решений N-ядро выбирает такое распределение, при котором максимального значения достигает вторая по минимальности коалиционная прибыль. В конечном итоге такой процесс приводит к единственному распределению, которое и является N-ядром.

Если с-ядро пусто, то для супераддитивной игры N-ядро дает индивидуальную рациональность $(\gamma_i \geq v(i),\ \forall\, i)$.

Пример 4.12. Экономика производства кукурузы в имении

Возьмем игру из примера 4.11. Рассмотрим конкретный случай функции f для трех рабочих: $f(1) = 2,\ f(2) = 5,\ f(3) = 9$.

Отметим, что N-ядро дает равные доли прибыли для всех рабочих, поскольку все рабочие одинаковы. Следовательно, оно имеет вид

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = a;\ \gamma_0 = b = f(n) - na = 9 - 3a.$$

Указанное выше распределение принадлежит с-ядру в том и только том случае, когда выполнено условие $0 \le a \le f(n)/3 = 3$.

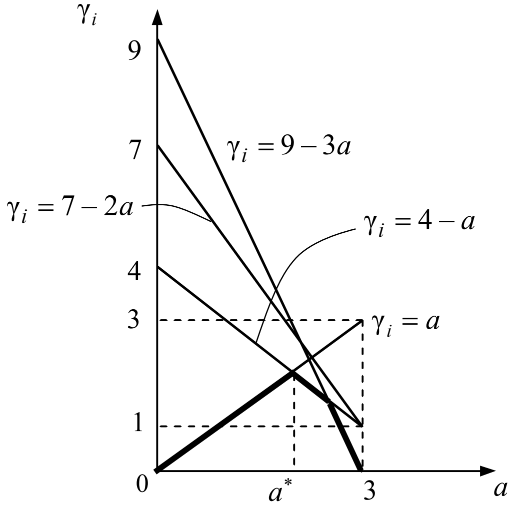
Действительно, ни один рабочий не получает отрицательную прибыль. Если же свести прибыль землевладельца к минимуму (нулевая прибыль), то максимально каждый рабочий может получить треть общих доходов. Тогда задача нахождения N-ядра сводится к следующей:

$$\max_{0 \le a \le 3} \min\{a, b, a+b-2, 2a+b-5\}.$$

Учитывая, что $b = 9 - 3a$, получаем

$$\max_{0 \le a \le 3} \min\{a, 9-3a, 7-2a, 4-a\}.$$

На рисунке показан график всех четырех функций.



Графическое представление задачи нахождения N-ядра

Все возможные минимумы показаны на графике жирной ломаной линией. Максимум среди минимумов достигается в точке пересечения прямых a и $4-a$. Тогда $a = 4 - a$, отсюда $a^* = 2$; N-ядро: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2$, $\gamma_0 = 9 - 3 \cdot 2 = 3$, или $\gamma = (3, 2, 2, 2)$.

Селекторы N-ядра

Заметим, что N-ядро демонстрирует эгалитарный подход к эксцессам различных коалиций и не учитывает размер коалиции, которой достается прибыль. Одна единица прибыли для отдельного агента расценивается так же, как и одна единица для коалиции $N-1$. Можно учитывать ***средний эксцесс*** (в расчете на одного члена коалиции):

$$\bar{e}(x,S)=\frac{1}{|S|}e(x,S).$$

Такой подход дает пропорциональное N-ядро, которое принадлежит c-ядру, если последнее не пусто.

Серьезный недостаток N-ядра — немонотонность по отношению к доходу максимальной коалиции. Может случиться так, что прибыль $v(N)$, доступная максимальной коалиции, возрастет при сохранении прибыли всех остальных коалиций, а доля прибыли некоторых агентов при этом уменьшится. Если какие-то игроки страдают в результате улучшений, то они могут отказаться от участия и тем самым сделать невозможным улучшение ситуации.

Лемма. Если N состоит из девяти или более агентов, то можно найти две такие игры $<N,v>$ и $<N,w>$, что

$$v(N)<w(N) \quad и \quad v(S)=w(S) \quad \text{для всех } S\subset N,$$

и тем не менее, если мы обозначим через γ и μ соответственно их N-ядра, то для некоторого агента i возможно неравенство $\mu_i<\gamma_i$.

Эта трудность устраняется, если мы используем пропорциональное N-ядро. Другими словами, N-ядро со средним эксцессом монотонно относительно дохода максимальной коалиции. Хотя заметим, что и для него не выполняется коалиционная монотонность (если увеличивается прибыль $v(S)$, то это не приводит к увеличению доли прибыли для каждого $i\in S$ при $N\geq 5$, что было бы желательно).

4.3. Механизмы коллективного принятия решений

4.3.1. Равный или пропорциональный дележ

Рассмотрим две простейшие задачи — задачу дележа прибыли и задачу распределения затрат. При рассмотрении задачи распределения затрат лучше всего иметь в виду производство неделимого общественного продукта, например, строительство объекта коллективного пользования. Проблема заключается в распределении затрат на строительство между агентами. В качестве исходных данных выступают общие затраты на строительство и доходы, которые каждый агент извлекает из этого объекта.

Задача дележа прибыли заключается в том, что нужно поделить выручку от неделимого кооперативного предприятия между несколькими партнерами. Здесь в качестве исходных данных выступают общая прибыль от кооперации и индивидуальные затраты агентов, которые они несут при создании/работе кооперативного предприятия.

Общей чертой этих двух задач является предельная простота входных данных и, следовательно, их широкая применимость.

Обе эти задачи не имеют однозначного решения. В данном разделе предлагаются к рассмотрению следующие решения: эгалитарное и пропорциональное. Кроме того, для задачи распределения затрат возможно применение еще двух решений: вектора Шепли и N-ядра.

Рассмотрим модели, используемые для решения указанных двух задач.

Модель дележа прибыли

Задача: n агентов получают от кооперации доход $r > 0$. Полные затраты агента i составляют $c_i > 0$. Пусть кооперация приносит прибыль, т. е. $\sum_{i=1}^{n} c_i \le r$. Как она должна быть поделена?

Первый принцип распределения дохода r — индивидуальная рациональность. Каждый агент должен получить не меньше своих полных затрат, иначе он не будет участвовать в кооперации. После того как произведены приоритетные платежи по возмещению каждому агенту его затрат c_i, останется прибыль

$s = r - \sum_{i=1}^{n} c_i$. Поскольку какую-то прибыль дает кооперация всех агентов, то все они имеют равные права на нее. Следовательно, разумным выглядит эгалитарное решение, при котором доля агента i составляет: $s/n + c_i$.

Данную задачу можно рассмотреть с точки зрения кооперативных игр. Здесь прибыль максимальной коалиции $v(N)$ равна r, а для коалиции из одного игрока $v(i) = c_i$. Поскольку нам ничего не известно о значении $v(S)$ для промежуточных коалиций, предположим, что коалиции не способны создавать кооперативной прибыли, в этом случае х.ф. промежуточных коалиций будет определяться выражением: $v(S) = \sum_{i \in S} c_i$. Тогда и вектор Шепли, и N-ядро поделят $v(N)$ так же, как и при эгалитарном решении.

Агент, у которого полные затраты превышают средний уровень, может не согласиться с таким решением. Он может возразить, что неправомерно считать несущественными промежуточные коалиции $\left(v(S) = \sum_{i \in S} c_i \right)$. В этом случае можно рассматривать полные затраты агентов как факторы производства, в котором доход является выходом. Этому процессу соответствуют постоянные доходы на масштаб, и каждый агент должен получить $r \cdot \left(c_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} c_j \right)$. Такое решение называется ***пропорциональным*** — здесь отдача на единицу индивидуальных затрат для всех одинакова.

Пример 4.13. Задача дележа прибыли

Стеклодувы Джон и Питер ведут дело совместно. Их работа является взаимно дополняющей, и они оба абсолютно необходимы друг другу. Но при этом Джон работает пять дней в неделю, а Питер — только четыре. Джон имеет чистый доход 500000 в год, а Питер получает 400000. В конце года их торговая выручка составила 990000. Таким образом, их общая прибыль составляет 90000. Как должна быть распределена прибыль между ними?

В соответствии с эгалитарным решением прибыль предлагается разделить прибыль поровну (45 и 45), а согласно пропорциональному решению дележ прибыли составит: 50 и 40.

Модель распределения затрат

***Задача*:** ассигнование на производство неделимого общественного продукта. Такой коллективный объект (например, мост) стоит $c > 0$ и приносит доход каждому из его пользователей $b_i \geq 0$, $i = 1,\dots,n$. Предполагаем, что сооружение объекта эффективно: $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq c$. Как должны быть распределены затраты?

В соответствии ***с пропорциональным решением*** затраты подсчитываются пропорционально доходам, значит, агент i платит $x_i = c \cdot \left(b_i \middle/ \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$. Заметим, что в этом случае доля затрат x_i неотрицательна (никто не получает субсидий за потребление продукта) и ограничена сверху величиной b_i (никто не платит больше своего основного дохода).

Эгалитарная идея может применяться двумя способами: уравнивание долей затрат и уравнивание чистой экономии на затратах. В случае ***решения с равномерным распределением затрат*** для каждого агента затраты определяются следующим образом: $x_i = c/n$. При выборе ***решения с равной прибылью*** каждому агенту i определяются затраты в размере $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)\big/ n$ (т. е. $b_i - x_i = b_j - x_j$ для всех i, j). Недостаток равномерного распределения затрат состоит в том, что какой-то агент, возможно, будет вынужден заплатить больше своего полного дохода $(b_i < x_i = c/n)$, либо, при равной прибыли кто-то может получить субсидию за потребление продукта, т. е. за него будут платить другие агенты: $b_i < \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j - c\right)\bigg/ n$ или $x_i < 0$.

Необходимость установления ограничений на доли затрат соответствует понятию с-ядра в кооперативной игре, описывающей полные затраты коалиций. Здесь коалиция может получить некоторую прибыль за счет строительства объекта и покрытия полных затрат на него. Тогда прибыль коалиции S будет определяться следующим образом:

$$v(S) = \left(\sum_{i \in S} b_i - c\right)^+ \text{ при обозначении } z^+ = \max(z, 0). \quad (4.2)$$

Предположим, что суммарные доходы агентов превышают стоимость коллективного объекта: $\sum_{i=1}^{n} b_i > c.$ Вектор затрат $(x_1, ..., x_n)$ проходит тест на отделение тогда и только тогда, когда вектор прибылей $(b_1 - x_1, ..., b_n - x_n)$ принадлежит с-ядру игры, определяемой х.ф. по (4.2):

$\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ и для всех $S \subset N$:

$$\sum_{i \in S} (b_i - x_i) \geq \left[\sum_{i \in S} b_i - c\right]^+ \Leftrightarrow \sum_{i \in S} x_i \leq \min\left\{c, \sum_{i \in S} b_i\right\},$$

отсюда $x_i \leq b_i$, $x_i \geq 0$.

Другими словами, вектор затрат $(x_1, ..., x_n)$ принадлежит с-ядру игры (4.2) тогда и только тогда, когда $\forall i \;\; 0 \leq x_i \leq b_i$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = c.$

Заметим, что пропорциональное решение принадлежит с-ядру.

Уровневый налог и подушный налог

Два варианта эгалитарного решения могут оказаться вне ядра за счет нарушения ограничений $0 \leq x_i$, $x_i \leq b_i$. Если рассматривать неравенства $0 \leq x_i \leq b_i$ в качестве ограничений, то это приведет к двум решениям из ядра, называемым уровневым и подушным налогом.

Определение. Дана задача распределения затрат при $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq c.$

Уровневый налог есть распределение затрат $(x_1, ..., x_n)$, являющееся решением задачи

$$(x_1,...,x_n) \in A = \left\{ (y_1,...,y_n) \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = c \text{ и } 0 \le y_i \le b_i \ \forall i \right\},$$

$$(b_1 - x_1,...,b_n - x_n) R_* (b_1 - y_1,...,b_n - y_n) \ \forall y \in A,$$

где R_* — лексиминный порядок на E^n.

Подушный налог есть распределение затрат $(x_1,...,x_n)$, являющееся решением задачи

$$(x_1,...,x_n) \in A, \ (x_1,...,x_n) R_* (y_1,...,y_n) \forall y \in A.$$

Уровневый налог уравнивает прибыли при ограничениях $0 \le x_i \le b_i$, в то время как подушный налог уравнивает затраты при тех же ограничениях.

Можно проинтерпретировать неделимый общественный продукт как услуги, оказываемые сборщиком налогов. Доход агента i до уплаты налога равен b_i, а его доход после уплаты налога равен $b_i - x_i$. Таким образом, c — общая необходимая сумма налогов.

Приведем более формальное представление нахождения уровневого и подушного налогов.

Лемма. Для данной задачи $(b_1,...,b_n;c)$ подушный налог может быть вычислен из решения следующего уравнения относительно неизвестного $\lambda \ge 0$: $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c \Rightarrow x_i = \min\{\lambda, b_i\}$.

Уровневый налог может быть вычислен из решения следующего уравнения относительно неизвестного $\lambda \ge 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\{\lambda, b_i\}.$$

Пример 4.14. Распределение затрат между пятью агентами

Имеется пять агентов с доходами

$$b_1 = 4, b_2 = 12, b_3 = 20, b_4 = 24, b_5 = 30.$$

Общий доход равен $\sum_{i=1}^{n} b_i = 90.$ Затраты на строительство коллективного
объекта составляют: $c = 30.$ Необходимо определить, каким образом распределить затраты между агентами. Рассмотрим три варианта решения: пропорциональное (пропорциональный налог), эгалитарное по затратам (подушный налог) и эгалитарное по прибыли (уровневый налог).

Подушный налог. При равномерном распределении затрат доля каждого агента равна 6. Первый агент может заплатить только $x_1 = 4$, на долю остальных агентов остается $(30-4) = 26$. Поделив поровну оставшуюся сумму, получаем: $x_i = 6{,}5; i = \overline{2{,}5}.$

Уровневый налог. Поделив прибыль, равную $60\,(90-30),$ поровну, получаем отрицательные затраты для первого агента: $x_1 = b_1 - 60/5 < 0$. Тогда устанавливаем $x_1 = 0$ (его прибыль, соответственно, равна 4). Поделив оставшуюся прибыль поровну, получаем отрицательные затраты для второго агента: $x_2 = b_2 - (86-30)/4 < 0$, отсюда $x_2 = 0$ (прибыль равна 12). Прибыль оставшихся агентов составит $(74-30)/3 = 14\,{}^2\!/_3$, а затраты, соответственно, $x_3 = 5\,{}^1\!/_3$, $x_4 = 9\,{}^1\!/_3$, $x_5 = 15\,{}^1\!/_3$.

Пропорциональный налог. Здесь затраты агентов равны $x_i = c \cdot \frac{b_i}{90} = \frac{b_i}{3}$, соответственно $x_1 = 1\frac{1}{3}, x_2 = 4, x_3 = 6\frac{2}{3}, x_4 = 8, x_5 = 10.$

Рассмотрим эту же задачу для больших затрат: $c = 66.$

Подушный налог. Теперь первые два агента не получают никакой прибыли, их затраты, соответственно равны $x_1 = 4, x_2 = 12.$ Для остальных агентов затраты распределяются равномерно и равны

$$x_i = (66-16)/3 = 16\,{}^2\!/_3,\; i = \overline{3{,}5}..$$

Уровневый налог. Затраты первого агента равны нулю (прибыль — четырем). Прибыль для остальных агентов: $(90-4-66)/4 = 5$; а затраты, соответственно: $x_2 = 7,\; x_3 = 15,\; x_4 = 19,\; x_5 = 25.$

При *пропорциональном распределении затрат* агенты должны заплатить $x_1 = 2.9, x_2 = 8.8, x_3 = 14.7, x_4 = 17.6, x_5 = 22$.

Вектор Шепли и N-ядро при распределении затрат

Построим еще два решения задачи распределения затрат, основанные на векторе Шепли и N-ядре игры.

Рассмотрим сначала случай, когда затраты на общественный продукт настолько малы, что каждый отдельный агент мог бы произвести его за свой счет: $0 \le c \le \min_i b_i$. Тогда игра с затратами записывается в виде $v(S) = \sum_{i \in S} b_i - c \ \ \forall S \subseteq N$. В этом случае ее значение соответствует равномерному распределению затрат (соответствует подушному налогу) $x_i = c/n \ \ \forall i$. Это же решение дают вектор Шепли и N-ядро.

Пусть теперь затраты настолько велики, что производство общественного продукта является эффективным только в том случае, если его потребляют все агенты: $\forall i \ \ \sum_{j \ne i} b_j \le c \le \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Тогда характеристическая функция игры будет следующей: $v(S) = 0 \ \ \forall S \subset N, \ v(N) = \sum_N b_i - c$. Таким образом, любое решение будет уравнивать доли прибыли $v(N)$ согласно методу равной прибыли: $b_i - x_i = b_j - x_j$ для всех $i, j,$ что соответствует уровневому налогу.

Эти два крайних поведения — равномерное распределение затрат, если затраты достаточно малы, и равная прибыль, если затраты достаточно велики, — имеют хороший содержательный смысл. Пусть b_i — заявка кредитора на некоторое наследство, равное e, $e < \sum_{i=1}^{n} b_i$. Если суммарные затраты кредиторов превышают величину наследства, то возникнет дефицит: $c = \sum b_i - e.$ Здесь дефицит представляет собой затраты, сумма которых распределяется между кредиторами по договоренности перед ликвидацией наследства. Если дефицит очень мал (относительно каждой заявки), то каждый знает, что его заявка будет почти выполнена, и его внимание сфокусируется на дефиците, что приведет к уравниванию затрат. С другой стороны, если стоимость наследства очень мала (меньше любой заявки), то часть заявки сверх e становится бессмысленной, что ставит всех агентов в равные условия, предполагая равномерное распределение e, т. е. равную прибыль.

В нижеприведенной лемме приводится явная формула N-ядра для случая трех и более агентов в играх с распределением затрат.

Лемма. N-ядро игры $v(S) = \left[\sum_{i \in S} b_i - c \right]^+$ соответствует следующим долям затрат:

если $c \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i$, то

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \min\left\{ \lambda, \frac{b_i}{2} \right\} = c \right\} \Rightarrow \left\{ x_i = \min\left\{ \lambda, \frac{b_i}{2} \right\} \ \forall i \right\},$$

если $c \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i$, то

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \min\left\{ \lambda, \frac{b_i}{2} \right\} = \sum_{i=1}^n b_i - c \right\} \Rightarrow \left\{ x_i = b_i - \min\left\{ \lambda, \frac{b_i}{2} \right\} \ \forall i \right\}.$$

Пример 4.15. Задача распределения наследства

Умирает человек, у него остается три жены, претензии которых на наследство мужа составляют, соответственно, 100, 200 и 300. Рассмотрим несколько вариантов суммы наследства e:

а) $e = 100$. Общие затраты $c = b_1 + b_2 + b_3 - e = 500 > \frac{1}{2} 600$.

В данном случае наследство делится поровну, и доля каждой жены составит 33,3;

б) $e = 200$. Здесь затраты также превышают половину возможных доходов. Равное распределение прибыли дает 66,6 каждой жене, что превышает половину ожидаемых доходов первой жены. Тогда первая жена получит 50 $\left(\min\left({}^{200}\!/_{3}, 50 \right) = 50 \right)$, а оставшиеся две — по 75 $\left(\min\left({}^{150}\!/_{2}, 100 \right) = 75 \right)$;

в) $e = 400$. В данном случае затраты составляют меньше половины возможных доходов и должны быть распределены поровну. Но равное распределение дает 66,6 каждой жене, что превышает половину ожидаемых затрат первой жены. С учетом ограничений $\left(x_i \le \frac{b_i}{2}\right)$ получаем следующее распределение затрат: $x_1 = 50, x_2 = x_3 = 75$. Доли наследства соответственно составят 50, 125 и 225.

Вектор Шепли в играх с затратами не имеет такой простой формулы, как *N*-ядро. Тем не менее его обычная интерпретация как среднего маргинальных вкладов приводит к следующей ситуации. Агенты пытаются скрыться от сборщика налогов. Он «ловит» их одного за другим в случайном порядке (все порядки равновероятны), пытаясь набрать требуемую сумму налогов (затрат — в терминах нашей задачи). «Пойманные» агенты платят налоги в размере полной суммы своих доходов, до тех пор пока затраты не будут покрыты. В интерпретации с банкротством получается симметричная история: агенты «бегут» в банк и получают наследство в размере своих претензий в соответствии с заявкой (по принципу «кто первый пришел, тот первый и обслуживается»), пока наследство полностью не исчерпается.

Покажем это на примере 4.15. Пусть $e = 200$, следовательно, $c = 400$. Тогда агент произведет выплаты в размере от своего дохода, если он будет «пойман» первым или вторым, и ничего не заплатит, если будет «пойман» последним. Таким образом, его доля затрат равна:

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot 100 + \frac{1}{6}(100 + 100) = 66{,}67.$$

Далее, агент 2 должен заплатить 200, если «пойман» первым, 200 или 100 (третья жена покроет 300 единиц расходов) с равной вероятностью, если «пойман» вторым, и ничего, если «пойман» последним. Значит, его доля равна: $x_2 = \frac{1}{3} \cdot 200 + \frac{1}{6}(200 + 100) = 116{,}67.$

Доля затрат третьего агента определяется аналогично: он должен заплатить 300, если будет «пойман» первым, 300 или 200 с равной вероятностью, если «пойман» вторым, и 100, если «пойман» третьим (в его случае первые два агента все еще не покрывают требуемую сумму затрат). Тогда его доля затрат получается следующей:

$$x_3 = \frac{1}{3}\cdot 300 + \frac{1}{6}(300+200) + \frac{1}{3}\cdot 100 = 216{,}67.$$

Следовательно, наследство (претензии каждой жены минус ее затраты) делится так: $\left(33\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}\right)$.

Аналогично можно рассчитать вектор Шепли по прибыли (проведите расчеты самостоятельно — Вы должны получить тот же самый результат).

4.3.2. Регулируемая монополия

Две модели производства

Модель 1. Производство общественного продукта

В рассматриваемом производстве общественного продукта выделяется два объекта: собственно общественный продукт, потребляемый всеми агентами, и деньги, являющиеся личной собственностью каждого агента. Затраты на производство y единиц общественного продукта составляют $c(y)$ единиц денег. Функция c не убывает, и $c(0)=0$.

Имеется n агентов. Вначале запас агента i составляет w_i единиц денег, и никакого общественного продукта не производится $(y=0)$. Конечное распределение соответствует некоторым вкладам денег (например, агент i внес x_i денег) и производству y единиц общественного продукта. Здесь $\sum_{i=1}^{n} x_i = c(y)$. Предпочтения агента i описываются функцией полезности $u_i(w_i - x_i, y)$.

Модель 2. Производство продукта личного пользования

В рассматриваемом производстве продукта личного пользования выделяются два объекта: труд и продукт, который производится с использованием некоторого количества труда. Производство y единиц личного продукта требует $x = c(y)$ единиц труда. Имеется n агентов. Сначала агент i имеет w_i свободного времени, а $y = 0$. При конечном распределении у него остается свободного времени $(w_i - x_i)$ и он потребляет y_i единиц личного продукта. Его предпочтения описываются функцией полезности $u_i(w_i - x_i, y_i)$. При этом

$$\forall i \;\; 0 \le x_i \le w_i, 0 \le y_i \text{ и } \sum_{i=1}^{n} x_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Заметим, что в модели с общественным продуктом агенты могут свободно обмениваться деньгами. В допустимом распределении затрат на производство общественного продукта $(x_1,...,x_n;y)$ может быть $x_i < 0$ (агент i получает платеж в размере x_i) или $x_i > w_i$ (его доля затрат превышает начальный запас). В противоположность этому в модели с продуктом личного пользования затраты нетрансферабельны между агентами. Агент i не может остаться с большим количеством свободного времени, чем у него было вначале, он не может позаимствовать свободное время у кого-то другого.

Какие распределения являются оптимальными по Парето? Предполагая дифференцируемость функции полезности, можно получить необходимые условия оптимальности по Парето в модели производства общественного продукта: $\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{iy}}{u_{ix}} = c'(y)$, где u_{iy} — частная производная u_i по общественному (y) продукту, а u_{ix} — частная производная u_i по личному продукту $(w_i - x_i)$.

В модели производства продукта личного пользования рассмотрим внутренние распределения $(0 < x_i < w_i,\; 0 < y_i)$. Для оптимальности по Парето такого распределения необходимо выполнение следующих условий:

$$\forall i = 1,...,n; \quad \frac{u_{iy}}{u_{ix}} = c'\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right).$$

Ядро в задаче производства общественного продукта

Предположим, что все агенты совместно владеют технологией производства. Это означает, что любая коалиция может распоряжаться технологией по своему усмотрению, т. е. производить любое количество продукта при условии, что полностью покрыты расходы.

Характеристическая функция коалиции здесь определяется через нахождение максимума прибыли при условии ее неотрицательности. Так, в случае квазилинейных полезностей, которые описываются уравнением $u_i = b_i(y) + (w_i - x_i)$, где $b_i(y)$ — денежный эквивалент y единиц общественного продукта, х.ф. коалиции будет описана следующим образом:

$$v(S) = \max\left\{\max_y \sum_{i\in S}\left(b_i(y) + w_i\right) - c(y)\,,\, 0\right\}, \text{ где } c(y) = \sum_{i\in S} x_i\,.$$

Таким образом, в квазилинейной модели с общественным продуктом оптимальность по Парето эквивалентна максимизации прибыли.

С-ядро игры определяется, как и раньше: распределение $(x_1, ..., x_n; y)$ принадлежит ядру, если никакая коалиция S не может отделиться и улучшить благосостояние своих членов. При этом должны выполняться следующие два условия: $\forall i\ x_i > 0$ (иначе коалиция $N \setminus \{i\}$ предпочтет обойтись без агента i и сэкономить x_i денег и $u_i(w_i - x_i, y) > u_i(w_i, 0)$ (иначе агент i предпочтет отделиться и не производить общественный продукт).

Пример 4.16. Модель производства общественного продукта с квазилинейными предпочтениями

Технология производства имеет при всех y вид $c(y) = {}^3\!/_2\, y$. Есть два агента с квазилинейными предпочтениями $u_i = b_i(y) - x_i$ (будем считать начальный запас денег нулевым), где

$$b_1(y) = \ln(1 + y); \quad b_2(y) = 2\sqrt{y}.$$

При определении характеристических функций коалиций необходимо учитывать, что предложенные функции прибыли коалиций строго вогнуты и их единственные максимумы находятся через первые производные. В результате получаем следующую характеристическую функцию игры:

$$v(1)=\max_{y\geq 0}\left(\ln(1+y)-\frac{3}{2}y\right)=0 \quad (\text{при } y=0);$$

$$v(2)=\max_{y\geq 0}\left(2\sqrt{y}-\frac{3}{2}y\right)=0{,}67 \quad (\text{при } y=0{,}4(4));$$

$$v(12)=\max_{y\geq 0}\left(\ln(1+y)+2\sqrt{y}-\frac{3}{2}y\right)=1{,}19 \quad (\text{при } y^*=1).$$

Распределения из ядра произвольным образом делят кооперативную прибыль $v(12)-v(1)-v(2)=0{,}53$ между двумя агентами.

При $y^*=1$ общие затраты составят $c(y^*)=1{,}5$.

В одной крайней точке с-ядра вся кооперативная прибыль достается агенту 1, что приводит к следующим прибылям u_1, u_2 и долям затрат x_1, x_2:

$$u_1=b_1(y^*)-x_1=0{,}53 \quad \Rightarrow \quad x_1=0{,}16;$$
$$u_2=b_2(y^*)-x_2=0{,}67 \quad \Rightarrow \quad x_2=1{,}34\,.$$

В другой крайней точке вся кооперативная прибыль достается агенту 2 со следующими прибылями u'_1, u'_2 и долями затрат x'_1, x'_2:

$$u'_1=b_1(y^*)-x'_1=0 \quad \Rightarrow \quad x'_1=0{,}69;$$
$$u'_2=b_2(y^*)-x'_2=1{,}19 \quad \Rightarrow \quad x'_2=0{,}81\,.$$

Таким образом, с-ядро игры составит:

по прибыли $(0{,}53;\,0{,}67)$, $(0;\,1{,}19)$;

по затратам: $(0{,}16;\,1{,}34)$, $(0{,}69;\,0{,}81)$.

Ядро в задаче производства продукта личного пользования

Здесь рассматривается игра с нетрансферабельными выигрышами, а соответственно вместо дележей выступают вектора полезностей $(u_i)_{i\in S}$. Допустимость вектора полезностей для коалиции S $(u_S\in v(S))$ определяется в условиях следующих ограничений: для всех $i\in S$ $y_i\geq 0$, $0\leq x_i\leq w_i$, $u_i(w_i-x_i,y_i)\geq u_i(w_i,0)$, где

$\sum_{i \in S} x_i = c\left(\sum_{i \in S} y_i\right)$. Непустота ядра этой игры зависит от изменения доходов на масштаб рассматриваемой технологии.

Рассмотрим сначала случай производственной функции с постоянным доходом на масштаб (ПДМ): $c(y) = c \cdot y$, где фиксированное число c — цена одной единицы производимого личного продукта в часах труда. Каждый агент может использовать производственный процесс, никак не влияя на возможности других агентов. Здесь справедливый исход состоит в выборе наилучшего плана для каждого агента индивидуально. Это приводит к необходимости решить n децентрализованных задач:

$$\max_{0 \le x_i \le w_i} u_i\left(w_i - x_i, \frac{x_i}{c}\right).$$

В случае ПДМ кооперация бессмысленна — каждый игрок независимо решает, какое именно количество продукта он хочет произвести, расходуя соответствующие ресурсы.

Следующий рассматриваемый вариант — производственная функция с уменьшающимся доходом на масштаб (УДМ): средние затраты $c(y)/y$ увеличиваются по y. В этом случае кооперация невыгодна, здесь игра даже не супераддитивна: если каждый агент имеет индивидуальный свободный доступ к технологии, то у них нет побудительных мотивов к кооперации.

В случае технологии производства при возрастающем доходе на масштаб (ВДМ) средние затраты $c(y)/y$ уменьшаются по y. Это приводит к естественной монополии: совместное использование данной технологии дает положительное взаимное влияние, и ядро игры непусто.

Пример 4.17. Задача производства продукта личного пользования с ВДМ

Имеются два агента с функциями полезности $u_1 = (1 - x_1)y_1$ и $u_2 = (2 - x_2)y_2$. Функция затрат: $c(y) = 2\sqrt{y}$.

Здесь рассматривается производственная функция с возрастаю-

щим доходом на масштаб (средние затраты уменьшаются по y):
$c(y)/y = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

Построим игру, соответствующую данной задаче. Определим сначала характеристические функции одиночных коалиций (максимумы соответствующих функций находятся через первую производную):

$$v(1) = \max\left(1 - 2\sqrt{y_1}\right)\cdot y_1 = \frac{1}{27} = 0{,}037, \text{ при } y_1 = \frac{1}{9};$$

$$v(2) = \max\left(2 - 2\sqrt{y_2}\right)\cdot y_2 = \frac{8}{27} = 0{,}296, \text{ при } y_2 = \frac{4}{9}.$$

Множество $v(12)$ определяется из оптимальных по Парето распределений. Условия эффективности приводят здесь к равенствам

$$\frac{1-x_1}{y_1} = \frac{2-x_2}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

где $y = y_1 + y_2$.

Отсюда:

$$(1-x_1)\cdot\sqrt{y} = y_1,\ (2-x_2)\cdot\sqrt{y} = y_2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{y}\left(3-(x_1+x_2)\right) = y.$$

Принимая во внимание, что $x_1 + x_2 = 2\sqrt{y}$, получаем

$$\sqrt{y}\left(3 - 2\sqrt{y}\right) = y \quad\Rightarrow\quad 3\sqrt{y} = 3y \quad\Rightarrow\quad y^* = 1.$$

Таким образом, для коалиции $\{1,2\}$ наиболее оптимальным является выпуск одной единицы продукции. Учитывая, что $(1-x_1) = \dfrac{y_1}{\sqrt{y}}$ и $(2-x_2) = \dfrac{y_2}{\sqrt{y}}$, получаем $u_1 = \dfrac{y_1^2}{\sqrt{y^*}} = y_1^2$, $u_2 = y_2^2$.

Определим теперь с-ядро игры.

Если вся прибыль от кооперации достается второму агенту, то прибыль первого устанавливается равной его характеристической функции: $u_1 = 0{,}037$, отсюда $y_1 = \sqrt{u_1} = 0{,}1924$. Учитывая, что $y = y_1 + y_2$, получаем $y_2 = 0{,}80755 \quad\Rightarrow\quad u_2 = 0{,}652$.

Первая точка с-ядра: $(0{,}037;\ 0{,}652)$.

Если вся прибыль от кооперации отдается первому агенту, второй получает минимальную прибыль: $u_2 = 0{,}296 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0{,}544$. Отсюда $y_1 = 0{,}456 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0{,}2076$.

Вторая точка с-ядра: $(0{,}2076;\ 0{,}296)$.

4.3.3. Неманипулируемые механизмы

Предположим, что принимающий общественное решение (посредник) столкнулся с конкретной задачей распределения затрат или дележа прибыли и пришел к некоторому мнению о справедливом исходе. Для того чтобы реализовать этот исход, он должен выяснить предпочтения отдельных агентов (в данном случае — это индивидуальные доходы b_i от потребления общественного продукта). Проблема заключается в том, что агент может фальсифицировать свои предпочтения (занижая или завышая доходы) и тем самым оказывать влияние на реализацию исхода. Конечно, агент будет манипулировать сообщаемой информацией только таким образом, чтобы это соответствовало его интересам.

Здесь главная задача — найти неманипулируемый механизм, при котором любой агент независимо от имеющихся у него предпочтений имел бы все основания сообщать достоверную информацию. Теория игр не дает стратегических предсказаний в большинстве игровых ситуаций. Мы рассмотрим только несколько примеров в качестве иллюстрации разнообразия таких манипуляций. Никакого общего вывода мы не получим.

Пример 4.18. Пропорциональное распределение затрат

Рассматривается распределение затрат на неделимый общественный продукт при величине затрат $c = 1$ и двух агентах. Каждого агента просят сообщить его доход b_i, $i = \overline{1,2}$. Общественный продукт производится только в том случае, если $b_1 + b_2 \geq 1$ и затраты на него распределяются пропорционально: $x_i = b_i / (b_1 + b_2)$.

Предположим, что истинные доходы равны $b_1 = 2$, $b_2 = 0{,}4$. Доходы, сообщаемые агентами, могут отличаться от истинных b_i. Будем обозначать сообщаемые доходы через a_i. Здесь сообщение истинных доходов не дает некооперативного равновесия в игре с манипулированием. Действительно, если сообщение агента 1 правдиво, то агент 2 может снизить свою долю затрат до нуля, сообщая вместо реального дохода $a_2 = 0$, при этом общественный продукт по-прежнему будет произведен. Аналогично, если агент 2 является искренним, то первый агент может сообщить, что его доход составляет $a_1 = 0{,}6$ и при сохранении эффективного решения уменьшить свою долю затрат:

$$0{,}6/(0{,}6 + 0{,}4) = 0{,}6 \ \le \ b_1/(b_1 + b_2) = 0{,}83\,.$$

Какие пары сообщений (a_1, a_2) являются возможными некооперативными исходами? Во-первых, должно выполняться условие $a_1 + a_2 = 1$ (иначе общественный продукт не будет производиться, а соответственно, не будет и выигрыша), а чистые полезности каждого агента должны быть неотрицательными:

$$2 - a_1/(a_1 + a_2) \ge 0, \quad 0{,}4 - a_2/(a_1 + a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 \ge 0{,}6,\ a_2 \ge 0\,.$$

Соответствующие доли затрат (x_1, x_2) удовлетворяют условиям

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \le 1, \quad x_2 \le 0{,}4\,.$$

Здесь поведение агентов крайне неопределенное. Так, если агенты знают истинные доходы друг друга, то имеет место ситуация «борьбы за первый ход»: агент 1 желает объявить $a_1 = 0{,}61$, с тем чтобы вынудить агента 2 сообщить $a_2 = 0{,}39$, при этом агент 1 забирает почти всю прибыль (1,39). Аналогично, агент 2 старается объявить $a_2 = 0$ и «бесплатно прокатиться» за счет первого агента. Заметим, что такая ситуация справедлива для любой задачи подобного типа.

Пример 4.19. Простая компенсация

Дано конечное множество общественных решений A, n агентов могут без всяких затрат выбрать одно из них. Здесь денежные платежи служат компенсацией «проигравшим», т. е. агентам, которым не нравиться эффективное для сообщества решение.

В качестве примера общественных решений рассмотрим две возможности размещения общественной службы. Пусть у нас есть четыре города, два из которых получат доход при размещении службы в точке a и понесут потери при размещении в точке b. Остальные два города имеют противоположные предпочтения:

Номер города	1	2	3	4
Размещение в a	20	15	–10	0
Размещение в b	–10	–5	12	4

В вышеприведенной таблице приведены полезности городов при двух возможных размещениях. Даны квазилинейные предпочтения, измеряющие разницу в полезности между двумя размещениями: агент 1 готов заплатить 30, чтобы переключиться с размещения в b на размещение в a; в то же время агент 4 готов заплатить 4, чтобы поменять размещение в a на размещение в b. Без потери общности можно произвольно выбрать нули индивидуальных полезностей. Удобно выбрать их так, чтобы $u_i(a)+u_i(b)=0$. Тогда профили предпочтений примут вид:

Номер города	1	2	3	4
Размещение в a	15	10	–11	–2
Размещение в b	–15	–10	11	2

Эта нормализация позволяет явно поделить множество агентов на тех, кто предпочитает a и тех, кто предпочитает b. За нуль полезности взята величина $\frac{1}{2}\left(u_i(a)+u_i(b)\right)$, при которой решение принимается случайно с равной вероятностью.

Эффективное решение максимизирует общую полезность. В нашем примере суммарные предпочтения агентов в точке a больше суммарных предпочтений в точке b: $\sum_i u_i(a)=12 > -12=\sum_i u_i(b)$.

Рассмотрим ***механизм невмешательства***, который выбирает эффективное решение и не предполагает никаких платежей. Это простейший механизм для решения задачи простой компенсации, но он весьма подвержен манипуляциям. Скажем, что агент i проигрывает, если он предпочитает неэффективное решение. Проигрывающему агенту выгодно завысить неприятие эффективного решения (в примере 4.19 агент 3 может сообщить $v_3(a)-v_3(b)=-50$). Здесь сообщение истинных предпочтений не является рациональным ни для одного из агентов. Если агенты дают сообщение с инфляцией, то результирующее решение вполне может оказаться неэффективным, что приведет к общественным потерям.

Теперь рассмотрим ***эгалитарный механизм***, при котором общая прибыль сверх нулевого уровня полезности (средней полезности по всем исходам) распределяется между агентами.

В примере 4.19 прибыль составляет $\sum_i u_i(a) = 12$, так что каждый агент приходит к уровню полезности +3 на основе платежей $t_1 = -12$, $t_2 = -7, t_3 = +14$, $t_4 = +5$. Манипуляции эгалитарного механизма в значительной степени такие же, как и в примере 4.17. Агент минимизирует свое удовлетворение эффективным решением, но так, чтобы оно не стало неэффективным. Так, если агенты 2, 3 и 4 сообщают правду, то агент 1 может сократить свой платеж почти до нуля при сообщении $v_i(a) = 3 + \varepsilon$, $v_i(b) = -3 - \varepsilon$, которое сохраняет эффективность решения a.

Стратегию того же типа будет использовать любой манипулирующий игрок, таким образом, некооперативные манипуляции эгалитарного механизма не ведут к общественным потерям.

Механизм общественного принятия решений является ***неманипулируемым***, если при всех возможных предпочтениях каждый агент посылает сообщение, которое является наилучшим с некооперативной точки зрения, независимо от сообщений других агентов. Таким образом, у каждого агента имеется доминирующая стратегия.

Прямым механизмом называется такой, в котором каждый агент должен сообщить свое индивидуальное предпочтение. Прямой механизм защищен от манипулирования, если правдивое сообщение является доминирующей стратегией для каждого игрока.

Рассмотрим теперь ***механизм ключевых агентов*** в задаче простой компенсации.

Вернемся к примеру 4.18. Поскольку он предполагает только два решения, и решение a — эффективно, то мы будем называть победителями тех агентов, которые предпочитают a решению b. Механизм ключевых агентов выбирает эффективное решение и не дает компенсации проигравшим, но ***некоторые*** победители облагаются налогом, а именно те, кому a нравится больше чем b, причем если такого агента отбросить, то эффективным станет решение b. Слабость механизма заключается в бюджетном избытке, который возникает вследствие введенного на победителей налога и не перераспределяется.

Агент i является ***ключевым***, если эффективное решение для агентов из $N \setminus \{i\}$ отличается от эффективного решения всех агентов. В нашем случае агент 1 является ключевым, поскольку для сообщества $\{2, 3, 4\}$ эффективным является решение b. Других ключевых агентов нет: для коалиций $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$ и $\{1, 2, 4\}$ эффективным решением является a. Механизм ключевых агентов облагает агента 1 налогом, равным потерям суммарной полезности для коалиции $\{2, 3, 4\}$ при переключении с решения b на решение a:

$$x_1 = (-10 + 11 + 2) - (10 - 11 - 2) = 6.$$

Неключевые агенты налогом не облагаются: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Любое сообщение агента 1, которое не меняет эффективного решения, не приносит ни выгоды, ни убытков, поскольку налог агента не меняется. Если сообщение агента 2 перенесет эффективное решение в b, то его налог отменится, но при этом агент понесет убытки, равные 30. Далее рассмотрим агента 3. Если он преувеличит свою неприязнь к a (например, сообщая $v_3(a) = -25$, $v_3(b) = 25$) так, чтобы размещение в b выглядело эффективным, то он становится ключевым и облагается налогом: $x_3 = (15 + 10 - 2) - (-15 - 10 + 2) = 46$. Такой большой налог обесценит доход от потребления, равный +22, при решении b Аналогичным образом можно провести рассуждения по агентам 2 и 4.

Для точной формулировки механизма ключевых агентов приведем некоторые определения.

Определение. Дана задача компенсации с n агентами, которые совместно выбирают общественное решение из конечного множества A. ***Исходом*** является пара (a, t), где $a \in A$ и $t = (t_i)_N$ — вектор денежных платежей. Предпочтения агента i описываются вектором u_i из E^A, поэтому полезность исхода (a,t) для него равна $u_i(a)+t_i$.

Определение. Для данных конечных (N,A) ***механизмом*** называется отображение, ставящее в соответствие каждому профилю полезностей $u=(u_i)_N, u_i \in E^A$ исход $\big(a(u), t(u)\big)$, причем это отображение не зависит от индивидуального нуля полезности: $\forall i \in N$ и $\forall u,v,$ таких, что $v_i = u_i + a \cdot 1$ для некоторого действительного числа a, единичного вектора $1 \in E^N$ и $v_j = u_j \quad \forall j \neq i$ имеем: $a(u)=a(v),\ t(u)=t(v)$.

Независимость от индивидуального нуля полезности можно показать на примере 4.19. Если мы рассмотрим первоначальную таблицу из примера 4.19 с предпочтениями городов и применим к ней механизм ключевых агентов, то для ключевого агента 1 величина налога остается неизменной: $(-5+12+4)-(15-10-0)=6$.

Механизм ***эффективен***, если он выбирает эффективное общественное решение для всех профилей:

$$\sum_{i \in N} u_i(a) = \max_{b \in A} \left\{ \sum_{i \in N} u_i(b) \right\},$$

где $a(u)$ — эффективное общественное решение.

Механизм является ***допустимым***, если вектор денежных платежей $t(u)$ не приводит к дефициту: $\forall u \quad \sum_{i \in N} t_i(u) \le 0$.

Заметим, что эффективный и допустимый общественный механизм может приводить к бюджетному избытку и потому к потере первоначальной оптимальности по Парето. С точки зрения агентов бюджетный избыток есть цена, которую они должны заплатить за согласование интересов.

Определение. Механизм (a,t) ***защищен от манипулирования***, если для каждого профиля $u=\left(u_j\right)_{j \in N}$, любого агента i и функции полезности $v_i \in E^A$ агент i не выигрывает от сообщения v_i вместо истинной u_i, т. е. выполняется неравенство:

$$u_i\big(a(u)\big)+t_i(u) \ \geq \ u_i\big(a(v_i,u_{-i})\big)+t_i(v_i,u_{-i}).$$

Определение. Механизм ключевых агентов — это такой механизм, который для каждого профиля u выбирает эффективное решение $a(u)$ и следующие платежи:

$$t_i(u)=\sum_{j\neq i}u_j\big(a(u)\big)-\max_{b\in A}\left\{\sum_{j\neq i}u_j(b)\right\}=u_{N\setminus i}\big(a(u)\big)-\max_A u_{N\setminus i}. \quad (4.3)$$

Этот механизм является эффективным, допустимым и защищенным от манипулирования.

Главный недостаток механизма ключевых агентов состоит в бюджетном избытке, который он порождает для всех профилей, при которых хотя бы один агент является ключевым. Тем не менее, если все коалиции из $n-1$ агентов согласны с одним и тем же эффективным решением, то никакой агент не будет ключевым, и механизм порождает полностью эффективный исход.

Определение. Эгалитарный механизм выбирает для каждого профиля эффективное решение и следующие платежи: $t_i(u)=-u_i\big(a(u)\big)+\dfrac{1}{n}\sigma$, где σ — общая прибыль по сравнению со «средней» полезностью: $\sigma=\max\limits_A u_N-\dfrac{1}{|A|}\sum\limits_{a\in A}u_N(a)$.

Как уже отмечалось, эгалитарный механизм не защищен от манипулирования. Однако, если прибыль σ мала, то эгалитарный механизм хорошо препятствует манипуляции. С другой стороны, если прибыль σ очень мала, то почти каждый агент может оказаться ключевым, и поэтому механизм ключевых агентов становится весьма расточительным. В противоположность этому, если прибыль σ велика настолько, что все индивидуальные агенты согласны с некоторым наилучшим решением, то механизм ключевых агентов является полностью эффективным, зато манипуляции эгалитарного механизма приводят к непредсказуемым результатам.

Другое сравнение этих двух механизмов основано на ***гарантированном уровне полезности***. При эгалитарном механизме гарантированный уровень полезности агента i равен в точности

$(1/|A|)\sum_{a\in A} u_i(a)$. При механизме ключевых агентов он равен только $\min_{a\in A} u_i(a)$.

Неманипулируемое распределение затрат

Рассмотрим задачу распределения затрат при производстве неделимого общественного продукта, для которой легко можно адаптировать механизм ключевых агентов.

Пример 4.20. Распределение затрат на неделимый общественный продукт

Пусть у нас есть неделимый общественный продукт с затратами c и доходами агентов $b_1,\ldots,b_n$. Рассмотрим эту ситуацию как задачу компенсации с двумя решениями: решение $a = 0$ — не производить продукт, решение $a = 1$ — продукт произвести, и затраты поделить поровну между n агентами, т. е. $u_i(0) = 0$ и $u_i(1) = b_i - c/n$. Здесь механизм ключевых агентов выглядит так.

Каждый агент сообщает свой доход b_i.

а) если общий доход всех агентов не превышает затраты $\left(\sum_{i\in N} b_i \le c\right)$, то продукт не производится.

Агент i ничего не платит, если $\sum_{j\ne i} b_j \le \frac{n-1}{n}\cdot c$; в противном случае, он платит $|t_i| = \sum_{j\ne i} b_j - \frac{n-1}{n}\cdot c$. Это полностью соответствует формуле (4.3): из условия $b_N \le c$ следует, что

$$a(u) = 0,\ t_i(u) = 0 - \max\left\{b_{N\setminus i} - \frac{n-1}{n}\cdot c, 0\right\};$$

б) если $\sum_{i\in N} b_i > c$, то продукт производится.

Агент i платит $\frac{c}{n}$, если $\sum_{j \neq i} b_j \geq \frac{n-1}{n} \cdot c$, иначе он платит $|t_i| = \frac{c}{n} + \left(\frac{n-1}{n} \cdot c - \sum_{j \neq i} b_j \right)$. Полученный результат также согласуется с формулой (4.3): из условия $b_N > c$ следует, что

$$a(u) = 1,\ t_i(u) = b_{N \setminus i} - \frac{n-1}{n} c - \max\left\{ b_{N \setminus i} - \frac{n-1}{n} \cdot c, 0 \right\}.$$

Здесь механизм ключевых агентов предлагает равномерное распределение затрат и устанавливает дополнительный налог на каждого ключевого агента (отсутствие которого привело бы к другому решению). Бюджетный избыток измеряет отступление от оптимальности по Парето (при малом n эта величина может быть значительной).

Таким образом, главный недостаток рассмотренного механизма состоит в том, что его платежи не являются бюджетно сбалансированными. Это общее свойство подобного рода механизмов: ***полностью эффективный механизм не может быть защищен от манипулирования***.

Вопросы для самопроверки

1. Какой принцип оптимальности является единственно бесспорным в теории благосостояния?

2. В чем различие между эгалитаризмом и утилитаризмом?

3. Что такое ПКБ и ФКП?

4. Перечислите основные свойства порядков коллективного благосостояния.

5. Что такое кооперативная игра?

6. Как можно определить принадлежность дележа с-ядру игры?

7. Какие решения кооперативных игр вам известны?

8. Чем отличаются уровневый и подушный налоги в задаче распределения затрат?

9. Что такое с-ядро игры?

10. Всегда ли вектор Шепли принадлежит с-ядру игры?

Литература

1. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, Ю.А. Черемных, А.В. Толстопятенко. — М., 1999.

2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. — М., 1972.

3. Луссе А. Макроэкономика: краткий курс: учеб. пособие / А. Луссе. — СПб., 1999.

4. Моделирование народно-хозяйственных процессов; под ред. В.С. Дадаяна. — М., 1973.

5. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем / В.Н. Бурков. — М., 1977.

6. Методы народнохозяйственного прогнозирования; под ред. Федоренко Н.П., Анчишкина А.И., Яременко Ю.В. — М., 1985.

7. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Э. Мулен. — М., 1991.

8. Петросян Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. — М., 1998.