МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Факультет систем управления (ФСУ)
Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А.А. Мицель

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов для специальности
09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

Уровень – магистратура

Томск-2016

Мицель А.А.
Методы оптимизации: методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов для специальности 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» / А.А. Мицель. – Томск: ТУСУР, 2016 (электр. ресурс). – 16с.

<u>Составитель:</u> д.т.н., профессор каф. АСУ А.А. Мицель

Методические указания утверждены на заседании кафедры автоматизированных систем управлениям 28 августа 2016 г., протокол № 1

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ И ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью дисциплины Целью курса является освоение основных идей методов, особенностей областей применения и методики использования их как готового инструмента практической работы при проектировании и разработке систем, математической обработке данных технических, организационных и экономических задач, построении алгоритмов и организации вычислительных процессов на ПК. Целью преподавания данной дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний, практических навыков по вопросам, касающимся принятия управленческих решений; освоение студентами современных математических методов анализа, научного прогнозирования поведения технических и экономических объектов, обучение студентов применению моделей и алгоритмов решения специальных задач оптимизации.

Основными задачами дисциплины являются:

- Изучение моделей квадратичного программирования.
- Изучение моделей динамического программирования.
- Изучение вариационного исчисления.
- Формирование у студентов знаний и умений, необходимых для эффективного управления техническими, организационными и экономическими системами.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Дисциплина относится к числу обязательных дисциплин базовой части учебного плана (Б1.Б.1).

Курс «Методы оптимизации» относится к числу дисциплин общенаучного цикла (базовая часть). Эта дисциплина нацелена на углубленное изучение специальных разделов оптимизационных задач, поэтому успешное овладение дисциплиной предполагает предварительные знания основных разделов дисциплины «Методы оптимизации», изучаемых в рамках бакалавриата. Практические и лабораторные работы выполняются с помощью пакета прикладных программ Mathcad.

Предшествующие дисциплины: нет.

Последующие дисциплины: дисциплина является базовой для проведения научно-исследовательской работы, написания ВКР.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Методы оптимизации» направлен на формирование следующих компетенций:

общепрофессиональные компетенции (ОПК):

- способностью воспринимать математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания, умением самостоятельно приобретать, развивать и применять их для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте (ОПК-1);

профессиональные компетенции (ПК):

- знанием методов оптимизации и умение применять их при решении задач профессиональной деятельности (ПК-3).

В результате изучения дисциплины студент должен:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать

- модели квадратичного программирования;
- двойственность задач нелинейного программирования;
- модели динамического программирования;
- основы вариационного исчисления;

Уметь

- создавать модели нелинейного программирования и проводить анализ моделей;
- решать задачи квадратичного программирования;
- создавать оптимизационные модели;
- создавать модели динамического программирования;
- творчески использовать теоретические знания на практике;
- использовать полученные знания для планирования функционирования и развития предприятия и в научных исследованиях.

Владеть

- методами решения задач квадратичного программирования;
- методами решения задач динамического программирования;
  методами решения задач вариационного исчисления;

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. **Квадратичное программирование.**

Задача квадратичного программирования (ЗКП). Условие Куна-Таккера для ЗКП. Метод решения ЗКП с помощью искусственного базиса. Метод решения ЗКП с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений. Задача о дополнительности. Метод решения задач о дополнительности (Д). Алгоритм решения задачи КП Мицеля-Хващевского.

Литература 1,2,6

Тема 2. Теория двойственности.

Формулировка двойственной задачи. Геометрическая интерпретация двойственной по Лагранжу задачи. Разрыв двойственности. Решение двойственной по Лагранжу задачи. Задачи линейного и квадратичного программирования

Литература 1,6

Тема 3. Модели динамического программирования

Общая постановка задачи динамического программирования, принцип оптимальности и уравнения Беллмана. Задача о распределении средств между предприятиями. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет.

Литература 1,4,6,10

Тема 4. Вариационное исчисление

Функционалы. Основные понятия. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функционалов. Вариационные задачи с закрепленными концами. Задачи со скользящими концами. Многомерный случай. Уравнения Эйлера-Пуассона

Литература 1,2,8

2.2 Практические занятия

Практические занятия предназначены для закрепления лекционного материала, разбора примеров и выполнения домашних и индивидуальных заданий.

Темы занятий	**Литература**
Тема №1. Динамическое программирование. Детерминированные управляемые процессы	3,5
Тема №2. Динамическое программирование. Управляемые Марковские процессы с доходами	3,5
Тема №3. Вариационное исчисление. Уравнения Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами.	3,5
Тема №3. Вариационное исчисление. Уравнения Эйлера для вариационных задач со скользящими концами.	3,5

2.3 Лабораторные работы

Лабораторные работы предназначены для закрепления практических занятий, разбора примеров и выполнения домашних и индивидуальных заданий.

Темы работ	Литература
Лабораторная работа №1. Квадратичное программирование. Оптимальный портфель ценных бумаг	11,12
Лабораторная работа №2. Динамическое программирование	11,12
Лабораторная работа №3. Вариационное исчисление	11,12

3. Темы рефератов

N п/п	Наименование темы	Литература
1	Методы штрафов решения задач нелинейного программирования	1,2,3,6
2	Редукция задачи динамического программирования с линейным критерием качества к задаче линейного программирования	1,10
3	Редукция задачи динамического программирования с квадратичным критерием качества к задаче квадратичного программирования.	1,10
4	Двойственная задача линейного программирования	6,10

4. Вопросы для контроля знаний

1. Запишите задачу квадратичного программирования (КП). Задача выбора портфеля ценных бумаг.
2. Условие Куна-Таккера для задач КП.
3. Решение задачи КП с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений
4. Решение задачи КП с помощью искусственного базиса
5. Задача о дополнительности.
6. Метод решения задач о дополнительности
7. Алгоритм решения задачи КП Мицеля-Хващевского.
8. Формулировка двойственной задачи
9. Геометрическая интерпретация двойственной по Лагранжу задачи
10. Разрыв двойственности
11. Решение двойственной по Лагранжу задачи. Алгоритм градиентного метода.
12. Задачи линейного и квадратичного программирования.
13. Общая постановка задачи динамического программирования
14. Принцип оптимальности и уравнения Беллмана
15. Задача о распределении средств между предприятиями
16. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет
17. Задача о замене оборудования
18. Вариационное исчисление. Понятие функционала.
19. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функционала.
20. Основная лемма вариационного исчисления.
21. Вариационные задачи с закрепленными концами
22. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (случаи 1, 2).
23. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (случаи 3, 4).

24. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (случаи 5)
25. Вариационные задачи с подвижными концами. Условие трансверсальности.
26. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (многомерный случай).
27. Уравнение Эйлера-Пуассона.

5. Банк примеров и задач

Тема 1. Динамическое программирование. Детерминированные управляемые процессы

1. Задача о путешественнике

На местности имеется сеть дорог, связывающих несколько населенных пунктов. Путешественник находится в пункте a_0, из которого, двигаясь по одной из трех дорог, можно попасть в пункты $a_1,\ a_2,\ a_3$. Из каждого пункта опять выходят ровно три дороги, ведущие в $a_4,\ a_5,\ a_6$. Из них – в $a_7,\ a_8,\ a_9$ и так далее, вплоть до конечных пунктов $b_1 = a_{3\cdot N-2},\ b_2 = a_{3\cdot N-1},\ b_3 = a_{3\cdot N}$. Длины всех дорог заданы. Найти наиболее короткий путь из a_0 в один из конечных пунктов. Решить задачу при $N = 5$. Оцените количество операций сложения и сравнения при ее решении по методу Беллмана, а также при полном переборе всех путей.

2. Задача о распределении инвестиций

Нужно распределить между N предприятиями сумму a , выделенную для их инвестирования. Известно, что вложение средств в размере u в k -ое предприятие обеспечивает прибыль в размере $J_k(u)$. Целью распределения является получение максимального суммарного дохода. Решить задачу при $N = 4$, $a = 300$ при условии, что суммы инвестиций всегда кратны 50, а функции $J_k(u)$ для $u = 50\cdot j$ ($j = 0, 1, \ldots, 6$) принимают значения, заданные в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Значения функции $J_k(u)$ для задачи 2.

u	0	50	100	150	200	250	300
$J_1(u)$	0	50	120	140	150	200	250
$J_2(u)$	0	60	130	140	130	160	200
$J_3(u)$	0	30	60	100	130	200	250
$J_4(u)$	0	40	100	110	120	160	220

3. Задача о распределении механизмов

Имеется m видов земляных работ и $N > m$ однотипных механизмов, способных выполнять эти работы. Если назначить на i -й вид работы k механизмов, то их суммарная производительность определяется значением G_{ik} . Считая, что матрица G, составленная из таких значений, известна, найти оптимальное по суммарной производительности размещение механизмов по всем видам работ. Решить задачу, приняв $N = 4$, $m = 3$,

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 14 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \\ 6 & 10 & 13 & 15 \end{pmatrix}.$$

4. Задача о распределении ресурса

Пусть требуется распределить ограниченный ресурс a на доли $x_1, x_2, ..., x_N$ $(x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_N \ge 0,\ x_1 + x_2 + ... + x_N \le a)$ между N предприятиями, каждое из которых приносит доход $f_i(x_i) = c_i \cdot x_i^2$ $(c_i > 0)$. Найти оптимальное распределение ресурсов.

5. Решить предыдущую задачу при $f_i(x_i) = c_i \cdot \sqrt{x_i}$.

6. Задача о загрузке судна

Судно, имеющее грузоподъемность a , загружается предметами N типов. Один предмет i -го типа имеет стоимость u_i и вес z_i. Требуется найти вариант загрузки судна, при котором стоимость взятых на борт предметов максимальна.

Решить задачу для $N = 3$, $a = 200$, $u_1 = 25$, $u_2 = 40$, $u_3 = 80$; $z_1 = 40$, $z_2 = 50$, $z_3 = 70$.

7. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что хотя бы один предмет каждого типа должен быть погружен на борт судна.

8. Задача о надежности

Технологическая цепочка изготовления изделия включает N операций, выполняемых на автоматизированных участках конвейерной обработки. Устройство, выполняющее операции на i -ом участке, имеет вероятность работы без отказа p_i и стоимость c_i. Для повышения надежности на участке можно установить m_i дублеров, повысив надежность участка до значения

$P_i(m_i) = 1-(1-p_i)^{1+m_i}$. Средства, выделенные на установку устройств-дублеров, ограничены значением C. Решить задачу о выборе оптимального количества дублеров, приводящем к максимизации надежности всей технологической цепочки.

При решении принять $N = 3$, $C = 17$, $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}3$; $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$. Для упрощения расчетов принять приближенные значения функций $P_i(m)$ из табл. 1.4.

Таблица 1.4. Значения функции $P_i(m)$

m	0	1	2	3	4
$P_1(m)$	0,5	0,8	0,9	0,9	1
$P_2(m)$	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8
$P_3(m)$	0,4	0,6	0,9	0,9	1

9. Задача о замене оборудования

Частное предприятие планирует в течение N лет заниматься выпуском изделий, используя некоторое оборудование. В начале можно либо купить новое оборудование возраста $x_0 = 0$ лет и стоимостью p, либо подержанное оборудование возраста $x_0 > 0$ лет по его ликвидной стоимости $\varphi(x_0)$.

Показатели эксплуатации оборудования включают: $f(t)$ – стоимость произведенных за год изделий на оборудовании возраста t лет; $r(t)$ – затраты на эксплуатацию в течение года оборудования возраста t лет.

В процессе эксплуатации оборудование можно менять, продавая старое по ликвидной стоимости $\varphi(t)$ и покупая новое стоимостью p. В конце N –го года оборудование продается по ликвидной стоимости. Определить оптимальный возраст оборудования x_0 при начальной покупке и оптимальный график его замены. Выполнить расчеты при $N = 8$, $x_0 \in \{0,1,2\}$,

$$f(t) = 30 - t/2 \; r(t) = 13 + t/2, \; p = 17, \; \varphi(t) = \begin{cases} 6, & 0 \le t \le 6, \\ 2, & 7 \le t \le 10 \end{cases}.$$

10. Задача о выпуске товаров

Предприятие, выпускает товары, изготавливая их отдельными партиями. Чем больше размер этих партий, тем относительно дешевле обходится выпуск. Поэтому в отдельные месяцы выгодно выпускать больше изделий, чем это нужно для удовлетворения спроса, а излишки хранить на складе для их реализации в последующие месяцы. За хранение в течение месяца каждой тысячи штук изделий нужно платить α =1 усл.ед. Емкость склада ограничена величиной C = 4000 штук.

Составить оптимальный план производства на N = 4 месяцев, при котором общая сумма затрат на производство и хранение была минимальной, а спрос на изделия – всегда удовлетворен. Объемы спроса по месяцам составляют m_i (i =1,.., N) изделий (при решении принять: 2000, 3000, 3000 и 2000). Начальные запасы готовых изделий составляют $C_0 = 2000$. Размер производимых партий не может превышать p = 4000 изделий. Затраты, связанные с выпуском парий изделий объемом v_i (i = 1,.., N) штук (принять: 1000, 2000, 3000 и 4000), определяются величинами z_i (i = 1,..,N) (соответственно 13, 15, 17 и 19 усл.ед.).

Тема №2. Динамическое программирование. Управляемые марковские процессы с доходами

1. Задача об экзаменационной сессии

Студент уже сдал один экзамен на 4, но ему предстоит сдать еще три экзамена. При подготовке к экзаменам он из-за недостатка времени может выбрать одну из следующих двух стратегий: либо выучить часть материала довольно хорошо, либо пройтись быстро по всему материалу. Определить оптимальную в смысле набранных баллов стратегию поведения студента на оставшиеся три экзамена, если матрицы вероятностей получения оценок 5, 4, 3, 2 в зависимости от предыдущей оценки для двух стратегий имеют вид:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Задача об экзаменационной сессии

Решить предыдущую задачу №1 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

3. Задача об экзаменационной сессии

Решить предыдущую задачу №1 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

4. Задача об экзаменационной сессии

Решить предыдущую задачу №1 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

5. Задача о погоне

Догоняющий находится в i -той клетке из 5 клеток, образующих круг. За один такт он с вероятностью $p = 1/2$ перемещается по часовой стрелке в соседнюю клетку, с вероятностью $q = 1/3$ перемещается против часовой стрелки в соседнюю клетку, с вероятностью $r = 1/6$ остается на месте. Убегающий находится в j -той клетке и на каждом такте может выбрать одну из трех стратегий поведения: (a) переместиться по часовой стрелке в соседнюю клетку; (b) остаться на месте; (c) переместиться против часовой стрелки в соседнюю клетку. Расстояние между догоняющим и убегающим определяется по формуле $d = |i - j|$. Определить стратегию убегающего на три такта вперед, максимизирующую сумму расстояний между догоняющим и убегающим.

6. Задача о погоне

Решить задачу №5 при следующих исходных данных

$p = 1/3$, $q = 1/3$, $r = 1/3$.

7. Задача о погоне

Решить задачу №5 при следующих исходных данных

$p = 1/6$, $q = 1/3$, $r = 1/2$.

8. Стохастическая задача о фермере

Состояние продуктивности земли, используемой фермером, может быть (a) хорошим, (b) удовлетворительным, (c) плохим. Вероятности перехода продуктивности земли из одного состояния в другое без проведения агротехнических мероприятий за один сезон заданы матрицей $P^{(1)}$. Однако фермер может провести комплекс агротехнических мероприятий, и тогда вероятности перехода продуктивности земли из одного состояния в другое за один сезон будут заданы матрицей $P^{(2)}$. Матрицы доходов для двух стратегий поведения: $D^{(1)}$, $D^{(2)}$. Найти оптимальную стратегию фермера на 4 сезона.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Стохастическая задача о фермере

Решить задачу №8 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Стохастическая задача о фермере

Решить задачу №8 для следующих исходных данных

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тема №3. Вариационное исчисление

1. **Задача о брахистохроне** (линии наибыстрейшего ската). В вертикальной

плоскости даны точки A и B. Определить путь, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки A, достигнет точку B в кратчайшее время.

2. **Задача о минимальной поверхности вращения**. Найти плоскую кривую, соединяющую две заданные точки плоскости и лежащую выше оси x , которая при вращении вокруг этой оси образует поверхность наименьшей площади.

3. **Задача о цепной линии**. Найти форму тяжелой однородной нерастяжимой нити, подвешенной за концы.

4. **Задача о мыльной пленке.** Найти форму мыльной пленки, натянутой на каркас, состоящий из двух параллельных дисков радиусов r и R, центры которых соединены осью длины
L, ортогональной дискам.

5. **Задача Дидоны**. Найти кривую заданной длины L, проходящую через точки A и B оси x ($AB < L$) , ограничивающую вместе с осью x наибольшую площадь.

6. **Задача о материальной точке.** Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой $y = y(x)$,
соединяющей точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, со скоростью $v = k \cdot y'$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки M_0 в точку M_1 будет минимальным.

Найти экстремали следующих функционалов (7-20).

7. $J = \int_{-1}^{0} \left(12xy - y'^2\right) dx,\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0$.

8. $J = \int_{0}^{\pi/4} \left(4y^2 - y'^2\right) dx,\ y(0) = 1,\ y(\pi/4) = 0$.

9. $J = \int_{0}^{\pi/2} \left(6y \cdot \sin 2x + y^2 - y'^2\right) dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0$.

10. $J = \int_{0}^{1} \left(x^2 y'^2 + 12x^2\right) dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = 1$.

11. $J = \int_{0}^{1} \left(x^2 y - y'^2\right) dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$.

12. $J=\int\limits_{0}^{L}\left(y-xy'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(L)=2$.

13. $J=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2+yy'+12xy\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0$.

14. $J=\int\limits_{0}^{1}\left(4y\cdot\sin x-y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=0$.

15. $J=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2+y^2+4y\cdot ch(x)\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=0$.

16. $J=\int\limits_{-1}^{2}y'\left(1+x^2y'\right)dx,\ y(-1)=1,\ y(2)=1$.

17. $J=\int\limits_{1}^{L}\left(xy'^2+yy'\right)dx,\ y(0)=0,\ y(L)=1$.

18. $J=\int\limits_{a}^{b}\left(2xy+(x^2+e^y)y'\right)dx,\ y(a)=A,\ y(b)=B$.

19. $J=\int\limits_{0}^{1}\left(e^y+xy'\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=a$.

20. Найти расстояние между: (a) точкой $(0,0)$ и кривой $y=1/x^2$; (b) параболой $y=x^2$ и прямой $y=x-5$; (c) окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

6.1. Основная литература

1. Черепанов О.И. Методы оптимизации: Учебное пособие. – Томск : ТУСУР, 2007. - 203с. (15 экз)
2. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011. – 352с. (электр. ресурс). – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/1552/

6.2. Дополнительная литература

3. Методы оптимизации в примерах и задачах / Авторы: Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Григорьева С.А., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 101 с.
4. Есипов Б.А. Методы исследования операций: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 256с. (электр. ресурс). – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/10250/
5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах : Учебное пособие для втузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - 2-е изд., испр. . - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с. (71 экз)

6. Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации: Учеб. пособие – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2004. – 256 с. (7 экз)
7. Методы оптимизации. Лабораторный практикум: Учеб. пособие / Мицель А.А., Шелестов А.А., Романенко В.В., Клыков В.В. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2004. – 80 с. (6 экз)
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. /Вуколов и др.; под ред. А.В.Ефимова. - М.: Наука, 1990. – 302 с. (42 экз)
9. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления : Учебное пособие для вузов / И. Г. Черноруцкий . - СПб. : Питер, 2004. – 255 с. (40 экз)
10. Рубан А.И. Методы оптимизации : Учебное пособие для вузов / А. И. Рубан ; Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники. - Томск : Издательство Томского университета, 1976. - 319 с. (80 экз)

6.3. Перечень методических указаний по проведению практических учебных занятий

1. Мицель А.А. Методы оптимизации: методические указания по выполнению практических работ для студентов направления подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника (магистратура). − Томск: ТУСУР, 2016. − 28 с. [Электронный ресурс].– Режим доступа: http://asu.tusur.ru/learning/090401e/d01/090401e-d01-pract.doc
2. Мицель А.А. Методы оптимизации: методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направления подготовки 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника (магистратура). − Томск: ТУСУР, 2016. − 33 с. [Электронный ресурс].– Режим доступа: http://asu.tusur.ru/learning/090401e/d01/090401e-d01-labs.doc