

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

О. И. Черепанов, Р. О. Черепанов, Р. А. Крехтулева

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ДИАГНОСТИКА СИСТЕМ

Учебное пособие

Томск
2016

УДК 681.51.015 + 681.518.54
ББК 32.965-01я73
Ч 467

Рецензенты:

А. В. Герасимов, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом
Научно-исследовательского института прикладной математики и механики ТГУ;
В. В. Кибиткин, канд. техн. наук, старший научный сотрудник
Института физики прочности и материаловедения СО РАН

Черепанов О. И.

Ч 467 Идентификация и диагностика систем : учебное пособие / О. И. Черепанов, Р. О. Черепанов, Р. А. Кректулева. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2016. – 138 с.

В пособии представлены основы теории параметрической идентификации систем с уравнением состояния в виде функциональной зависимости между входным и выходным сигналами и стационарных динамических систем, для которых закон функционирования описывается системой линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассматривается метод максимального правдоподобия, последовательной идентификации, а также метод квазилинеаризации.

Для студентов, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий по направлению подготовки 220400.62 – «Управление в технических системах».

© Черепанов О. И.,
Черепанов Р. О.,
Кректулева Р. А., 2016
© Оформление.
ФДО, ТУСУР, 2016

Оглавление

| | |
|---|----|
| Введение | 5 |
| 1 Метод максимального правдоподобия и последовательная идентификация | 10 |
| 1.1 Несколько общих замечаний..... | 10 |
| 1.2 Измерение скалярной физической величины..... | 12 |
| 1.3 Косвенные измерения нескольких величин | 14 |
| 1.4 Теорема Гаусса – Маркова | 20 |
| 1.5 Оптимальные планы экспериментов..... | 24 |
| 1.6 Полный факторный план типа 2^3 | 27 |
| 1.7 Метод последовательной идентификации..... | 35 |
| 1.7.1 Последовательная идентификация одномерной системы..... | 35 |
| 1.7.2 Последовательная идентификация многомерной системы..... | 38 |
| 1.8 Линеаризация моделей, нелинейных относительно оцениваемых параметров | 47 |
| 2 Идентификация линейных многомерных динамических систем | 51 |
| 2.1 Общие сведения..... | 51 |
| 2.1.1 Линейные преобразования | 52 |
| 2.1.2 Каноническое преобразование – процедура диагонализации | 55 |
| 2.1.3 Определение собственных векторов | 57 |
| 2.2 Управляемость и наблюдаемость | 62 |
| 2.2.1 Управляемость | 62 |
| 2.2.2 Наблюдаемость | 68 |
| 2.3 Идентификация линейных стационарных динамических систем с применением конечно-разностной аппроксимации производных .. | 71 |
| 2.3.1 Постановка задачи..... | 71 |
| 2.3.2 Дискретная модель системы..... | 72 |
| 2.3.3 Идентификация систем методом максимального правдоподобия..... | 76 |
| 2.3.4 Идентификация систем методом последовательной регрессии .. | 79 |
| 3 Идентификация параметров нелинейных стационарных динамических систем методом квазилинеаризации | 88 |
| 3.1 Постановка задачи идентификации параметров нелинейных стационарных динамических систем методом квазилинеаризации при известных начальных данных | 88 |

| | |
|---|-----|
| 3.2 Описание метода квазилинеаризации в задачах с известными начальными условиями | 91 |
| 3.3 Пример идентификации системы методом квазилинеаризации при известных начальных данных | 98 |
| 3.3.1 Уравнения модели | 98 |
| 3.3.2 Применение метода идентификации параметров при известных начальных данных для решения тестовой задачи | 101 |
| 3.4 Идентификация начального состояния и параметров нелинейных стационарных динамических систем методом квазилинеаризации..... | 109 |
| 3.4.1 Постановка задачи..... | 109 |
| 3.4.2 Описание алгоритма идентификации параметров и начального состояния нелинейных систем методом квазилинеаризации... .. | 111 |
| 3.5 Пример применения метода квазилинеаризации для решения задачи идентификации переменных состояния и параметров нелинейной системы | 119 |
| 3.5.1 Система нелинейных уравнений с известным аналитическим решением для тестирования метода | 119 |
| 3.5.2 Применение метода квазилинеаризации для идентификации параметров и начального состояния нелинейной системы: решение тестовой задачи | 119 |
| Заключение | 133 |
| Литература | 135 |
| Глоссарий | 137 |

Введение

В широком смысле слова задача идентификации реальных физических систем заключается в том, чтобы по результатам измерения входного и выходного сигналов установить закон, в соответствии с которым система осуществляет преобразование сигнала на входе в сигнал на выходе (рис. 1).

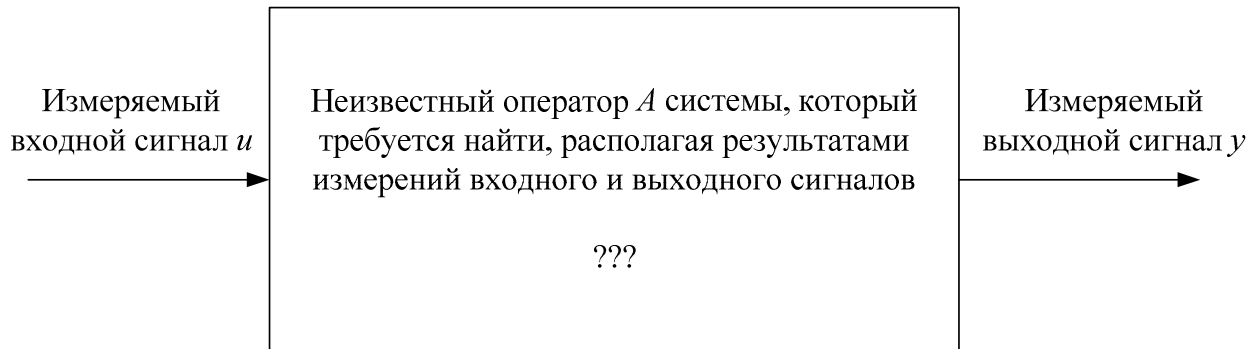


Рис. 1 – Схема к общей задаче идентификации

Таким образом, в общем случае изучаемый физический объект представляется в виде некоего «черного ящика», на вход которого поступает входной сигнал u , принадлежащий некоторому множеству входных сигналов U , а на выходе вырабатывается выходной сигнал y , принадлежащий множеству выходных сигналов Y . Задача идентификации состоит в том, чтобы восстановить по экспериментальным данным неизвестный оператор A системы, который преобразует множество U входных сигналов в множество Y выходных сигналов: $y = A(u)$. Принято говорить, что в такой постановке задача идентификации тождественна задаче познания вообще.

Задача идентификации в узком смысле заключается в том, чтобы по результатам измерений входного и выходного сигналов оценить параметры (коэффициенты) оператора A системы, т. е. предполагается, что вид этого оператора выбран экспериментатором на этапе предварительного изучения объекта, суждений, основанных на аналогии, знании и умении применять основные законы физики к реальным задачам.

Математическую модель изучаемого объекта обычно удается представить в виде системы из двух уравнений, первое из которых описывает изменение с течением времени t вектора переменных состояния системы $\vec{x}(t)$ под воздействием входного сигнала $\vec{u}(t)$ (уравнение состояния, закон функционирования) и уравнения выходов, в соответствии с которым система вырабатывает выход-

ной сигнал $\vec{y}(t)$, соответствующий состоянию системы $\vec{x}(t)$ в данный момент времени:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= A_1(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}), \\ \vec{y}(t) &= A_2(\vec{x}(t)).\end{aligned}\tag{1}$$

В этом случае по результатам измерений входного и выходного сигналов требуется оценить значения параметров (коэффициентов) $\vec{\theta}$ оператора A_1 в уравнении состояния, а оператор A_2 уравнения выходов обычно считается известным и характеризует, например, работу измерительного устройства.

Наиболее сложной задачей из тех, которые рассматриваются в данном пособии, является задача оценки параметров объекта, закон функционирования которого можно описать системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}(t)}{dt} &= \vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}), \quad t \in [0, T], \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}^{(0)},\end{aligned}\tag{2}$$

где $t \in [0, T]$ – независимая измеряемая переменная (время); $[0, T]$ – интервал моделирования; $\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ – вектор переменных состояния; $\vec{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ – вектор входного сигнала (управление); $\vec{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ – вектор оцениваемых параметров;

$\vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}) = \{f_1(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}), \dots, f_n(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})\}$ – известного вида функция всех своих аргументов, в общем случае нелинейная; $\vec{x}(0) = \vec{x}^{(0)}$ – вектор, который определяет начальное состояние системы.

Закон функционирования (2) дополняет алгебраическое уравнение выходов, которое представлено системой линейных уравнений вида:

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t),\tag{3}$$

где $\vec{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_k(t)\}$ – вектор измеряемого выходного сигнала; C – заданная прямоугольная матрица коэффициентов.

Наиболее эффективным методом идентификации таких систем является, по-видимому, метод квазилинеаризации, который рассматривается в пособии при обсуждении такого рода задач. Рассмотрены варианты применения метода квазилинеаризации при известных начальных условиях, когда по результатам измерений выходного сигнала системы с известным алгебраическим уравнени-

ем выходов оцениваются параметры $\vec{\theta}$, а также общий алгоритм, с помощью которого оцениваются как начальные условия $\vec{x}^{(0)}$, так и параметры уравнений.

Несколько более простой является задача идентификации линейных динамических систем, закон функционирования и уравнения выходов которых имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}(t)}{dt} &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Элементы матриц коэффициентов A, B образуют совокупность неизвестных параметров системы $\vec{\theta}$, которые требуется найти по результатам измерений входного и выходного сигналов. В этом случае также наиболее эффективным методом идентификации является метод квазилинеаризации, но возможно и применение методов, основанных на замене дифференциальных уравнений их дискретными (конечно-разностными) аналогами.

В ряде случаев связь входного и выходного сигналов системы удастся описать функциональной зависимостью вида:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{u}, \vec{\theta}), \quad (5)$$

где вектор $\vec{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ – входной сигнал системы, а вектор $\vec{f}(\vec{u}, \vec{\theta}) = \{f_1(\vec{u}, \vec{\theta}), \dots, f_k(\vec{u}, \vec{\theta})\}$ есть известного вида вектор – функция всех своих аргументов, вид которой также выбирается экспериментатором по результатам предварительного изучения системы.

В общем случае функции $f_1(\vec{u}, \vec{\theta}), \dots, f_k(\vec{u}, \vec{\theta})$ в уравнении вида (5) – нелинейные функции своих аргументов, поэтому при оценке параметров таких систем требуется предварительная линеаризация нелинейных уравнений задачи.

Простейшая линейная относительно неизвестных параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ изучаемой системы модель имеет вид:

$$y = (\vec{f}(\vec{u}), \vec{\theta}), \quad (6)$$

где y – скалярный измеряемый выходной сигнал, \vec{u} – измеряемый вектор входного сигнала, $\vec{f}(\vec{u}) = \{f_1(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})\}$ – вектор базисных функций модели, $(\vec{f}(\vec{u}), \vec{\theta})$ – скалярное произведение векторов.

Для идентификации параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ таких систем используются, в частности, такие методы, как метод максимального правдоподобия, метод последовательной регрессии и др.

С небольшими оговорками можно сказать, что ключом к пониманию проблем, с которыми приходится сталкиваться при решении задач параметрической идентификации, является метод максимального правдоподобия, с которого и начинается изложение основного материала пособия, которое подготовлено на основе известных монографий Д. Гропа [2] и Э. Сэйджа, Д. Мелсы [10]. Для более полного понимания основных идей теории и методов идентификации в пособие включены краткие сведения по теории моделирования систем и методам планирования эксперимента [1–19].

Пособие содержит примеры решения задач по основным темам. Разбор каждого примера решения задач разными методами позволяет оценить достоинства и недостатки того или иного метода в сравнении с другими, что может послужить базой накопления личного опыта по идентификации систем.

Соглашения, принятые в учебном пособии

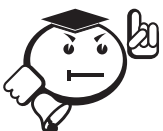
Для улучшения восприятия материала в данном учебном пособии используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



.....
Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



.....
 Эта пиктограмма означает «Внимание!». Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



.....
 В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.



Эта пиктограмма означает теорему.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Выводы

Эта пиктограмма означает выводы. Здесь автор подводит итоги, обобщает изложенный материал или проводит анализ.



Контрольные вопросы по главе

1 Метод максимального правдоподобия и последовательная идентификация

1.1 Несколько общих замечаний

Решение задачи идентификации любой реальной системы начинается с выполнения одного из самых ответственных этапов – выбора математической модели, которая должна описывать закон функционирования этой системы, т. е. выбора оператора, который описывает, каким образом реальный объект преобразует сигнал на входе в сигнал на выходе. По-видимому, нет стандартных и безотказных формальных подходов к решению этой задачи. На этом этапе широко используются суждения по аналогии, которые позволяют перенести опыт, приобретенный при изучении других объектов, на данный конкретный случай.



На этом этапе необходимо:

- 1) определить все входные сигналы системы, выделив из них те, которые относятся к управляющим и контролируемым переменным (вектор $\vec{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$), т. е. таким входным сигналам, выбором которых можно распорядиться при проведении целенаправленных экспериментов;
- 2) определить совокупность переменных $\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, которые с достаточной полнотой характеризуют состояние системы (переменные состояния);
- 3) записать закон функционирования системы вида $\dot{\vec{x}}(t) = A_1(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})$ (уравнение состояния), в соответствии с которым система изменяет свое состояние в зависимости от входного сигнала с течением времени, т. е. на основании знания основных законов природы, которым подчиняется изучаемый процесс, система, выбрать вид оператора $A_1(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})$, выделив при этом совокупность неизвестных коэффициентов $\vec{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, которые требуется определить по результатам измерений входного и выходного сигналов;
- 4) оценить количество выходных измеряемых переменных $\vec{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_k(t)\}$ и записать уравнение выходов

$\vec{y}(t) = A_2(\vec{x}(t))$, т. е. закон, в соответствии с которым система, текущее состояние которой описывается вектором переменных состояния $\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, вырабатывает выходной сигнал.

.....

Результатом этого этапа является формулировка математической модели изучаемого объекта, процесса.

Следующим этапом является этап постановки экспериментов и выполнения достаточно большой серии из N измерений входного и выходного сигналов. На этом этапе осуществляется выбор значений $\vec{u}^{(i)} = \vec{u}(t^{(i)}) = \{u_1(t^{(i)}), \dots, u_l(t^{(i)})\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ переменных, которые подаются на вход системы в каждом из опытов с номером (i) , и измеряются значения выходного сигнала $\vec{y}^{(i)} = \vec{y}(t^{(i)}) = \{y_1(t^{(i)}), \dots, y_k(t^{(i)})\}$.

Имея уравнения модели системы и располагая результатами измерений входного $\vec{u}^{(i)} = \vec{u}(t^{(i)}) = \{u_1(t^{(i)}), \dots, u_l(t^{(i)})\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ и выходного $\vec{y}^{(i)} = \vec{y}(t^{(i)}) = \{y_1(t^{(i)}), \dots, y_k(t^{(i)})\}$ сигналов системы, можно приступить к решению задачи параметрической идентификации, т. е. оценке неизвестных параметров модели $\vec{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$. Учитывая, что результаты измерений содержат по крайней мере случайные ошибки, эта задача не столь проста, как может показаться на первый взгляд. Основные особенности этой проблемы рассмотрим далее при обсуждении метода максимального правдоподобия.

.....



Крайне важным и необходимым этапом идентификации любой системы является оценка адекватности модели и границ её применимости, которая выполняется после получения оценки параметров и может потребовать пересмотра модели в целом, если эти результаты окажутся неудовлетворительными.

.....

Ряд проблем, связанных с оценкой параметров моделей систем по результатам измерений входного и выходного сигналов, рассмотрим на примере идентификации простейших систем методом максимального правдоподобия. Метод максимального правдоподобия является одним из основных методов

идентификации параметров моделей систем. Кроме того, знание этого метода важно для понимания многих других методов идентификации и зачастую является их составной частью.

Метод последовательной идентификации также рассматривается в этой главе, так как его можно рассматривать как модификацию метода максимального правдоподобия, позволяющую обойти проблему обращения информационной матрицы при оценке параметров модели, что несколько повышает скорость расчетов. Кроме того, при последовательной идентификации не требуется хранения всех результатов измерений входного и выходного сигналов, что дает экономию памяти при идентификации многомерных систем.

1.2 Измерение скалярной физической величины

Рассмотрим простейшую задачу – непосредственное измерение одной (скалярной) физической величины u (например, высоты двери, силы тока, напряжения и т. п.). Выполнив N измерений, каждое из которых связано по крайней мере со случайными погрешностями, получим набор значений $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}$ (верхний индекс в скобках – номер опыта) и будем вынуждены задаться вопросом, а что же считать истинным значением этой величины? В теории измерений принимается, что такое истинное значение существует. Обозначим его символом u_0 . Тогда ошибка измерений будет равна $\delta = u - u_0$.



.....

Далее примем основную гипотезу теории измерений, в соответствии с которой *случайные ошибки и результаты измерений искомой величины u распределены по нормальному закону (распределение Гаусса)*.

.....

Тогда плотность вероятности распределения величины u определяется формулой:

$$p(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.1)$$

с математическим ожиданием, равным истинному значению u_0 , дисперсией $D(u) = \sigma^2$, и измерения выполняются в одинаковых условиях со средней ошибкой σ , т. е. принимается гипотеза о равноточных измерениях. Среднее арифметическое совокупности измерений равно математическому ожиданию u_0 , то

есть истинному значению измеряемой величины. Ряд экспериментальных значений $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$ измеряемой величины u рассматривается как случайная выборка. Закономерен вопрос: как по этой выборке наиболее точно оценить истинное значение u_0 измеряемой величины и достоверность полученного результата? Ответ является итогом следующих рассуждений.

Результаты измерений можно рассматривать как взаимно независимые, поэтому плотность вероятности реализации в N экспериментах всей выборки $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$ равна произведению плотностей вероятностей появления каждого из значений $u^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$p(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}) = p(u^{(1)}) \dots p(u^{(N)}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (u^{(i)} - u_0)^2\right). \quad (1.2)$$

Этот результат замечателен тем, что позволяет четко определить то, что можно считать наилучшей оценкой измеряемой величины u . Очевидно, что цель измерений – оценить неизвестное истинное значение u_0 и при этом обеспечить минимальную ошибку, мерой которой является дисперсия $D(u) = \sigma^2$. На этом основании можно принять, что наибольшую точность оценки неизвестной величины u по выборке $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$ при минимальной погрешности σ может обеспечить выбор u_0 , при котором будут выполнены необходимые условия экстремума функции:

$$p(u_0, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (u^{(i)} - u_0)^2\right). \quad (1.3)$$

Необходимое условие экстремума функции двух переменных $p(u_0, \sigma)$ позволяет записать следующую систему уравнений относительно неизвестных величин u_0 , σ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{dp}{du_0} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (u^{(i)} - u_0) = 0, \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{d\sigma} &= -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N (u^{(i)} - u_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.4) следует, что выборке $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$, которая реализовалась в N опытах, будет поставлено в соответствие наибольшее значение

плотности вероятности $p(u_0, \sigma)$, если в качестве оценки измеряемой величины принять:

$$u_0 = u_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^{(i)} \quad (1.5)$$

при любом значении σ , а соответствующая оценка дисперсии дается формулой:

$$\sigma^2 = \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u^{(i)} - u_0)^2. \quad (1.6)$$

Итак, при нормальном законе распределения ошибок измерения наиболее вероятной оценкой измеряемой величины u_0 является среднее арифметическое выборки $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$, а наилучшей оценкой средней ошибки измерений является среднеквадратическое отклонение.

Метод, которым получены формулы (1.5)–(1.6), называют методом максимального правдоподобия.

1.3 Косвенные измерения нескольких величин

Рассмотрим формулы метода максимального правдоподобия для оценки параметров системы с одним выходным $y = y(\vec{u})$ и несколькими входными сигналами $\vec{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$, математическая модель которой имеет вид:

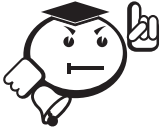
$$y = y(\vec{u}) = (\vec{f}(\vec{u}), \vec{\theta}) = \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}) \theta_j, \quad (1.7)$$

где вектор-функция $\vec{f}(\vec{u}) = \{f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})\}$ – известного вида функция своих аргументов, которая выбирается экспериментатором по результатам предварительного изучения системы, а вектор $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – вектор-столбец неизвестных параметров, которые требуется найти по результатам измерений входного и выходного сигналов, $(\vec{f}(\vec{u}), \vec{\theta})$ – скалярное произведение векторов.

Функции $f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})$ называются базисными функциями модели и выбираются экспериментатором на этапе предварительного изучения объекта исследования. Например, эти функции могут быть заданы в виде полинома, тригонометрической функции и т. п.

Важно отметить, что запись уравнения (1.7) является результатом очень ответственного этапа идентификации, на котором производится оценка количе-

ства выходных и входных, и при этом контролируемых, измеряемых переменных, выбор необходимого количества базисных функций, вида этих функций. Неудачный выбор этих функций в конечном итоге приводит к необходимости пересмотра первоначальной гипотезы.



Уравнение (1.7) представляет собой простейшую **линейную относительно неизвестных параметров** (коэффициентов) $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ математическую модель (пока – гипотетически) изучаемого объекта. Надо отметить, что модель называется линейной по виду зависимости от коэффициентов, тогда как базисные функции могут быть достаточно произвольного вида.

Следующим этапом идентификации параметров модели является постановка опытов, результатом которых являются набор значений вектора входных переменных $\vec{u}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N$ и соответствующие значения выходного сигнала системы $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}$ в серии из N измерений. Здесь верхний индекс, взятый в скобки, использован для указания номера опыта, а нижние индексы – для указания номера компоненты вектора.

Результаты измерений скалярного выходного сигнала системы в серии из N опытов удобно записывать в векторной форме, поэтому введем вектор результатов измерений выходного сигнала $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$.

Так как результаты измерений содержат, по крайней мере, случайную ошибку, вектор результатов измерений $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$ и значения вектора входного сигнала $\vec{u}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N$, в каждой экспериментальной точке будут связаны не точной зависимостью (1.7), а стохастической зависимостью:

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} + \mu^{(i)} = \left(\vec{f}(\vec{u}^{(i)}), \vec{\theta} \right) = \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)}) \theta_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.8)$$

где $y^{(i)}$ – измеренный в эксперименте с номером i выходной сигнал, $y_0^{(i)}$ – предполагаемое точное значение выходного сигнала, $\mu^{(i)}$ – случайная ошибка измерений этой величины в i -м эксперименте, $\vec{u}^{(i)} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}\}$ – измеренный входной сигнал.

Следует отметить, случайные ошибки $\mu^{(i)}$ выделены в этих уравнениях как отдельные слагаемые, чтобы подчеркнуть факт понимания их принципиального влияния на результаты расчетов, но их оценки – отдельная задача.

Систему уравнений (1.8) целесообразно записать в матричной форме. Для этого определим следующие матрицы:



.....
Матрица вида

$$U = \left(u_j^{(i)} \right) = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_l^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(N)} & \dots & u_l^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

которая содержит значения всех входных переменных во всех опытах называется **матрицей плана эксперимента**. Номер строки этой матрицы соответствует номеру опыта, а номер столбца – номеру компоненты вектора входного сигнала.

Матрица вида

$$F = \left(f_j(\vec{u}^{(i)}) \right) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{u}^{(1)}) & \dots & f_m(\vec{u}^{(1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(\vec{u}^{(N)}) & \dots & f_m(\vec{u}^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

которая содержит значения всех базисных функций модели во всех опытах называется **расширенной матрицей плана эксперимента**. Номер строки этой матрицы соответствует номеру опыта, а номер столбца – номеру базисной функции линейной модели (1.7).

.....
Систему уравнений (1.8) можно записать в матричной форме:

$$F\vec{\theta} = \vec{y}. \quad (1.11)$$



.....
Система уравнений (1.11) (и, что то же самое, (1.8)) является следствием уравнения модели (1.7) и записана по результатам измерений с учетом неизбежных случайных ошибок. Эта система называется **исходной системой уравнений для оценки параметров линейной модели**.

Нетрудно заметить, что для получения оценки параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ модели на основе решения этих уравнений, во-первых, необходимо, чтобы количество опытов N (и количество уравнений в системе (1.11) соответственно) было по крайней мере не меньше, чем количество неизвестных коэффициентов $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$, $N \geq m$, а во-вторых, надо ответить на вопрос, какую же оценку считать правильной, когда появление любого нового результата измерений с очевидностью будет давать другую оценку этих величин.



.....
 Так как (1.11) – это система линейных алгебраических уравнений, то её решение, которое дает оценку искомых коэффициентов модели (1.7), имеет вид:

$$\vec{\tilde{\theta}} = T\vec{y}, \quad (1.12)$$

где T – неизвестная пока матрица размера $m \times N$.

Оценка $\vec{\tilde{\theta}}$ называется **наилучшей линейной несмещенной оценкой**, если она имеет наименьшие дисперсии $D(\theta_i) = (\sigma^{(i)})^2$ среди всех возможных оценок вида (1.12).

.....

Таким образом, задача оценки коэффициентов модели (1.7) на основе решения исходной системы уравнений (1.11) сводится к поиску матрицы T в выражении (1.12), которая обеспечит минимальную дисперсию коэффициентов.

Для решения этой задачи системы уравнений (1.8), (1.11) запишем в виде:

$$\sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)}) \theta_j = y^{(i)}, \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (1.13)$$

Непосредственно разрешить эту систему относительно неизвестных θ_j , ($j=1, 2, \dots, m$) нельзя, так как вместо точных значений $y_0^{(i)}$ правые части содержат значения выходного сигнала $y^{(i)} = y_0^{(i)} + \mu^{(i)}$ со случайными ошибками измерений. Но если количество опытов N больше количества неизвестных m ($N > m$), то по результатам измерений $y^{(i)}$ и $\vec{u}^{(i)}$ на основании принципа наибольшего правдоподобия можно найти такую совокупность значений $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$, которая с наибольшей вероятностью удовлетворяет уравнениям (1.13). С этой примем допущение о том, что дисперсии во всех опытах одинаковы, $(\sigma^{(i)})^2 = (\sigma)^2$, а также основную гипотезу теории измерений, т. е. пред-

положение о нормальном распределении плотности вероятности случайных величин $y^{(i)}$:

$$p(y^{(i)}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y^{(i)} - y_0^{(i)})^2\right), \quad (i=1,2,\dots,N). \quad (1.14)$$

Тогда для плотности вероятности реализации случайной выборки значений $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$ имеет место формула:

$$\begin{aligned} p(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}) &= p(y^{(1)})p(y^{(2)})\dots p(y^{(N)}) = \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)})\theta_j\right)^2\right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Эту функцию будем рассматривать далее как функцию многих переменных θ_j , ($j=1,2,\dots,m$), σ :

$$p = p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m; \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)})\theta_j\right)^2\right). \quad (1.16)$$

Величина $p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m; \sigma)$ может достигать максимума при выполнении необходимых условий экстремума функции многих переменных, т. е. при условии одновременного обращения в нуль всех её частных производных по переменным θ_k , ($k=1,2,\dots,m$), σ . На этом основании приходим к следующим уравнениям для оценки величин θ_j , ($j=1,2,\dots,m$), σ :

$$-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \theta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)})\theta_j\right) f_k(\vec{u}^{(i)}) = 0, \quad (k=1,2,\dots,m). \quad (1.17)$$

$$-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3} \left(\sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)})\theta_j\right)^2 \right) = 0. \quad (1.18)$$

Уравнения (1.17) сводятся к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно оцениваемых параметров θ_j , ($j=1,2,\dots,m$) линейной модели (1.7):

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^N f_k(\vec{u}^{(i)}) f_j(\vec{u}^{(i)}) \right) \theta_j = \sum_{i=1}^N f_k(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)}. \quad (1.19)$$

В свою очередь эти уравнения принято записывать в матричной форме:

$$M\vec{\theta} = \vec{Y}. \quad (1.20)$$



Систему уравнений (1.20) принято называть **нормальной системой уравнений метода максимального правдоподобия**, а симметричная относительно главной диагонали матрица M в этих уравнениях называется **информационной матрицей**.

Элементы информационной матрицы и вектора правых частей уравнений (1.20) вычисляются по формулам:

$$M_{jk} = M_{kj} = \sum_{i=1}^N f_k(\vec{u}^{(i)}) f_j(\vec{u}^{(i)}) = \sum_{i=1}^N f_j(\vec{u}^{(i)}) f_k(\vec{u}^{(i)}),$$

$$Y_k = \sum_{i=1}^N f_k(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)}, \quad (j, k = 1, 2, \dots, m).$$
(1.21)

Решение уравнений (1.20), полученное каким-либо известным методом решения систем линейных алгебраических уравнений, дает *наилучшую линейную несмещенную оценку вектора $\tilde{\theta}$ коэффициентов модели*. Это решение принято записывать в виде:

$$\tilde{\theta} = M^{-1} \vec{Y},$$
(1.22)

где M^{-1} – матрица, обратная к информационной матрице.



Сравнивая формулы (1.10), (1.12), (1.19)–(1.22) нетрудно заметить, что матрица T в определении наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов имеет вид:

$$T = (F^T F)^{-1} F^T,$$
(1.23)

где F – расширенная матрица плана эксперимента, F^T – транспонированная матрица.

Уравнение (1.18) дает следующую оценку дисперсии σ для случая равноточных измерений:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)}) \tilde{\theta}_j \right)^2,$$
(1.24)

где $\tilde{\theta}_j, (j = 1, 2, \dots, m)$ – оценки параметров, найденные по формуле (1.22).

Учитывая практически очевидный факт, что нельзя получить сколь угодно достоверный результат, пока количество опытов N не превысит коли-

чество оцениваемых коэффициентов m (иначе в исходной системе (1.13) уравнений меньше, чем неизвестных), внесем в эту формулу соответствующую поправку и запишем её в виде:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)}) \tilde{\theta}_j \right)^2}{N - m}. \quad (1.25)$$

Метод максимального правдоподобия дает ответ на вопрос, как найти матрицу T и наилучшую линейную несмещенную оценку в случае гауссовского распределения случайных ошибок измерения. В свою очередь, теорема Гаусса – Маркова и её следствия позволяют утверждать, что метод максимального правдоподобия (см., например, [3–7]) дает наилучшую линейную оценку коэффициентов и для других законов распределения ошибок измерений.

Метод максимального правдоподобия дает результат, который минимизирует сумму квадратов ошибок:

$$\sum_{i=1}^N (\varepsilon^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)}) \tilde{\theta}_j \right)^2. \quad (1.26)$$

Поэтому второе название метода – *методом наименьших квадратов*.

1.4 Теорема Гаусса – Маркова

При обосновании метода максимального правдоподобия для получения наилучших оценок параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ модели вида (1.7), зависящих от случайных ошибок, на основании результатов N экспериментов по совокупности измерений выходного сигнала $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$ было принято предположение, что случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Однако доказано, что оценки по максимального правдоподобия имеют минимальную погрешность независимо от типа распределения. Доказательство этого факта и способ получения наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов линейной модели (1.7) дает теорема Гаусса – Маркова [3, 4].



.....
Теорема Гаусса – Маркова (1). Для линейной модели вида (1.7):

$$\begin{aligned} y^{(i)} &= \left(\vec{f}(\vec{u}^{(i)}), \vec{\theta} \right) + \mu^{(i)} = \\ &= \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u}^{(i)}) \theta_j + \mu^{(i)}, \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.27)$$

наилучшей линейной несмещенной оценкой является оценка:

$$\tilde{\theta} = M^{-1}\bar{Y}, \quad (1.28)$$

полученная в результате решения системы нормальных уравнений:

$$M\tilde{\theta} = \bar{Y}, \quad (1.29)$$

где M – квадратная матрица размера $m \times m$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$M_{kj} = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} f_k(\vec{u}^{(i)}) f_j(\vec{u}^{(i)}), \quad (j, k = 1, \dots, m), \quad \omega^{(i)} = \frac{1}{(\sigma^{(i)})^2}. \quad (1.30)$$

Предполагается, что M – неособенная матрица.

Компоненты вектора правых частей в (1.29) вычисляются по формуле:

$$Y_k = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} f_k(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)}, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (1.31)$$

Матрицу M называют *информационной матрицей*.

Матрица вариаций оценки $\tilde{\theta}$ равна:

$$V(\tilde{\theta}) = M^{-1}. \quad (1.32)$$

.....

Оценка (1.28) справедлива для случая, когда дисперсии $(\sigma^{(i)})^2$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ экспериментов заданы. Для случая, когда дисперсия неизвестна, имеет место следующая теорема [3, 4].



Теорема 2. Для линейной модели вида (1.7) с равными дисперсиями ошибок $(\sigma_i)^2 = \sigma^2$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ при $N > m$ наилучшей линейной несмещенной оценкой является оценка:

$$\tilde{\theta} = M^{-1}\bar{Y},$$

$$M = (M_{kj}), \quad M_{kj} = \sum_{i=1}^N f_k(\vec{u}^{(i)}) f_j(\vec{u}^{(i)}), \quad \det M \neq 0, \quad (1.33)$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, m), \quad \bar{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}, \quad Y_k = \sum_{i=1}^n f_k(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)}.$$

Несмещенной оценкой для дисперсии σ^2 будет следующая:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \left(\bar{f}(\bar{u}^{(i)}, \tilde{\theta}) \right) \right)^2}{N - m} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_j(\bar{u}^{(i)}) \tilde{\theta}_j \right)^2}{N - m}.\end{aligned}\tag{1.34}$$



Пример

По результатам предварительного изучения объекта с двумя входами $\bar{u} = \{u_1, u_2\}$ и одним выходным сигналом y экспериментатор принял предположение, что закон функционирования этого объекта можно описать уравнением:

$$f_1(\bar{u})\theta_1 + f_2(\bar{u})\theta_2 = y\tag{1.35}$$

с базисными функциями $f_1(\bar{u}) = u_1$, $f_2(\bar{u}) = (u_2)^2$.

В результате пяти измерений входного и выходного сигналов были получены следующие данные:

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(1)} &= \{1.0, 1.0\}, \bar{u}^{(2)} = \{1.0, -1.0\}, \bar{u}^{(3)} = \{-1.0, 2.0\}, \bar{u}^{(4)} = \{2.0, 2.0\}, \bar{u}^{(5)} = \{1.0, 3.0\}, \\ y^{(1)} &= 2.0, y^{(2)} = 1.5, y^{(3)} = 2.5, y^{(4)} = 5.5, y^{(5)} = 11.0.\end{aligned}$$

В соответствии с выражением (1.35) исходная система уравнений для оценки параметров имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(\bar{u}^{(1)})\theta_1 + f_2(\bar{u}^{(1)})\theta_2 = y^{(1)}, \\ f_1(\bar{u}^{(2)})\theta_1 + f_2(\bar{u}^{(2)})\theta_2 = y^{(2)}, \\ f_1(\bar{u}^{(3)})\theta_1 + f_2(\bar{u}^{(3)})\theta_2 = y^{(3)}, \\ f_1(\bar{u}^{(4)})\theta_1 + f_2(\bar{u}^{(4)})\theta_2 = y^{(4)}, \\ f_1(\bar{u}^{(5)})\theta_1 + f_2(\bar{u}^{(5)})\theta_2 = y^{(5)}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.0\theta_1 + 1.0\theta_2 = 2.0, \\ 1.0\theta_1 + 1.0\theta_2 = 1.5, \\ -1.0\theta_1 + 4.0\theta_2 = 2.5, \\ 2.0\theta_1 + 4.0\theta_2 = 5.5, \\ 1.0\theta_1 + 9.0\theta_2 = 11.0. \end{cases}\tag{1.36}$$

Чтобы записать систему нормальных уравнений, надо рассчитать коэффициенты информационной матрицы M_{jk} и компоненты вектора Y_k :

$$M_{11} = \sum_{i=1}^5 f_1(\bar{u}^{(i)}) f_1(\bar{u}^{(i)}) = (1.0)^2 + (1.0)^2 + (-1.0)^2 + (2.0)^2 + (1.0)^2 = 8.0,$$

$$M_{22} = \sum_{i=1}^5 f_2(\vec{u}^{(i)}) f_2(\vec{u}^{(i)}) = (1.0)^2 + (-1.0)^2 + (4.0)^2 + (4.0)^2 + (9.0)^2 = 115.0,$$

$$M_{12} = M_{21} = \sum_{i=1}^5 f_1(\vec{u}^{(i)}) f_2(\vec{u}^{(i)}) = \sum_{i=1}^5 f_2(\vec{u}^{(i)}) f_1(\vec{u}^{(i)}) =$$

$$= (1.0)(1.0) + (1.0)(1.0) + (-1.0)(4.0) + (2.0)(4.0) + (1.0)(9.0) = 15.0,$$

$$Y_1 = \sum_{i=1}^5 f_1(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)} =$$

$$= (1.0)(2.0) + (1.0)(1.5) + (-1.0)(2.5) + (2.0)(5.5) + (1.0)(11.0) = 23.0,$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^5 f_2(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)} =$$

$$= (1.0)(2.0) + (1.0)(1.5) + (4.0)(2.5) + (4.0)(5.5) + (9.0)(11.0) = 134.5.$$

Итак, система нормальных уравнений относительно θ_1, θ_2 имеет вид:

$$M\vec{\theta} = \vec{Y} \Leftrightarrow \begin{cases} 8.0\theta_1 + 15.0\theta_2 = 23.0, \\ 15.0\theta_1 + 115.0\theta_2 = 134.5. \end{cases} \quad (1.37)$$

Решение дает следующие округленные значения для наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов модели: $\theta_1 = 0.90, \theta_2 = 1.05$.

Теперь надо оценить среднеквадратическое отклонение. Для этого рассчитывается теоретическая оценка значений выходного сигнала в точках $\vec{u}^{(1)} = \{1.0, 1.0\}, \vec{u}^{(2)} = \{1.0, -1.0\}, \vec{u}^{(3)} = \{-1.0, 2.0\}, \vec{u}^{(4)} = \{2.0, 2.0\}, \vec{u}^{(5)} = \{1.0, 3.0\}$:

$$\begin{cases} f_1(\vec{u}^{(1)})\tilde{\theta}_1 + f_2(\vec{u}^{(1)})\tilde{\theta}_2 = \tilde{y}^{(1)} = 1.95, \\ f_1(\vec{u}^{(2)})\tilde{\theta}_1 + f_2(\vec{u}^{(2)})\tilde{\theta}_2 = \tilde{y}^{(2)} = 1.95, \\ f_1(\vec{u}^{(3)})\tilde{\theta}_1 + f_2(\vec{u}^{(3)})\tilde{\theta}_2 = \tilde{y}^{(3)} = 3.3, \\ f_1(\vec{u}^{(4)})\tilde{\theta}_1 + f_2(\vec{u}^{(4)})\tilde{\theta}_2 = \tilde{y}^{(4)} = 6.0, \\ f_1(\vec{u}^{(5)})\tilde{\theta}_1 + f_2(\vec{u}^{(5)})\tilde{\theta}_2 = \tilde{y}^{(5)} = 10.35. \end{cases}$$

Оценка дисперсии в этом случае дает значение:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \left(\vec{f}(\vec{u}^{(i)}), \tilde{\theta} \right) \right)^2}{N - m} = \frac{\sum_{i=1}^5 \left(y^{(i)} - \tilde{y}^{(i)} \right)^2}{5 - 2} = 0.44 \Rightarrow \tilde{\sigma} = \pm 0.67.$$

.....

1.5 Оптимальные планы экспериментов

Теорема Гаусса – Маркова дает способ получения наилучших линейных несмещенных оценок при выбранном наборе значений входных контролируемых переменных $\vec{u}^{(i)} = \vec{u}(t^{(i)}) = \{u_1(t^{(i)}), \dots, u_l(t^{(i)})\}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Важно отметить, что точность оценки параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ модели зависит от свойств информационной матрицы M . В свою очередь свойства этой матрицы зависят от выбора базисных функций и значений контролируемых переменных в каждом опыте, т. е. определяются выбором множества точек $\vec{u}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Эти точки и определяют план эксперимента. При построении оптимальных планов эксперимента используются следующие определения.



Дискретным, или точечным, планом [4] эксперимента

$$\xi_N = \left\{ \begin{array}{cc} \vec{u}^{(1)}, \dots, & \vec{u}^{(N)} \\ p^{(1)}, \dots, & p^{(N)} \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

называют вероятностную меру, сосредоточенную в точках $\vec{u}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$) с весами $p^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$), где

$$p^{(i)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p^{(i)} = 1, \quad p^{(i)} = r^{(i)} / N, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.39)$$

$r^{(i)}$ – число повторных измерений в каждой точке $\vec{u}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$).

Так как точность оценки параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ зависит от выбора точек $\vec{u}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$), то естественна постановка задачи о выборе такого дискретного плана ξ_N , который бы обеспечивал оптимальные в каком-то смысле оценки этих параметров. Это приводит к задаче дискретной оптимизации, для которой точное решение получить сложно. Поэтому зачастую вместо дискретной задачи решается задача непрерывной оптимизации.



Непрерывным планом эксперимента называется план вида

$$\xi_N = \left\{ \begin{array}{cc} \vec{u}^{(1)}, \dots, & \vec{u}^{(N)} \\ p^{(1)}, \dots, & p^{(N)} \end{array} \right\}, \quad (1.40)$$

где $p^{(i)}$ – вероятность постановки опыта в i -й экспериментальной точке:

$$p^{(i)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p^{(i)} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.41)$$

Если на множестве непрерывных планов (1.40) удастся найти оптимальный план ξ^* , то для практического применения результатов он «округляется» до дискретного плана ξ_N^* . Обычно используют следующие критерии оптимальности плана.

.....

В соответствии с теоремой Гаусса – Маркова, для линейной модели

$$y = y(\bar{u}) = (\vec{f}(\bar{u}), \bar{\theta}) = \sum_{j=1}^m f_j(\bar{u}) \theta_j \quad (1.42)$$

информационная матрица планируемых экспериментов имеет вид:

$$M = M(\xi) = (M_{kj}) = \left(\sum_{i=1}^N p^{(i)} f_k(\bar{u}^{(i)}) f_j(\bar{u}^{(i)}) \omega^{(i)} \right), \quad (j, k = 1, \dots, m). \quad (1.43)$$

Относительно информационной матрицы (1.49) принимается допущение, что для всех рассматриваемых планов ξ определитель $\det(M(\xi)) \neq 0$. Величина $p^{(i)}$ здесь означает вероятность выполнения планируемых экспериментов в точке $\bar{u}^{(i)}$, которая необходима для обеспечения оптимальности плана. В выражениях для информационной матрицы реализованных экспериментов эта величина была равна единице для каждой конкретной экспериментальной точки. Для планируемого эксперимента эта величина должна быть найдена из условий оптимальности.

В соответствии с общими идеями теории решения задач оптимизации выбирается какой-либо функционал $\Phi(M(\xi))$, значение которого зависит от значений элементов информационной матрицы M . В качестве критерия оптимальности плана принимается условие достижения максимума этого функционала при всех допустимых значениях $\bar{u}^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, N$).

.....



Тогда план вида

$$\xi^* = \arg \max_{\xi} (\Phi(M(\xi))) \quad (1.44)$$

(т. е. набор значений $\vec{u}^{(i)}, (i=1,2,\dots,N)$ входных переменных, при которых достигается максимум функционала $\Phi(M(\xi))$) называется **Φ -оптимальным планом**.

.....

Существует много разновидностей критериев оптимальности, которые определяются конкретным видом функционала $\Phi(M(\xi))$. Чаще всего используют следующие критерии оптимальности.

.....



План

$$\xi^* = \arg \max_{\xi} (\det(M(\xi))) \quad (1.45)$$

называется **D -оптимальным**. При D -оптимальном планировании минимизируется объем области рассеяния наилучших линейных оценок параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ линейной модели.

План

$$\xi^* = \arg \min_{\xi} (tr(M^{-1}(\xi))), \quad (1.46)$$

т. е. план, при котором матрица, обратная к информационной, имеет минимальный след, называется **A -оптимальным**. Такой план обеспечивает минимальную дисперсию наилучших линейных оценок неизвестных параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$.

.....

Таким образом, чтобы построить оптимальный план эксперимента для линейной модели необходимо выбрать критерий оптимальности плана и решить задачу на экстремум функционала цели. Задача сложная, но для частных видов моделей она решена и можно воспользоваться уже имеющимися результатами для часто применяемых функций отклика, связывающих входной и выходной сигналы.

Тригонометрическая функция отклика на отрезке $[0, 2\pi]$. Во многих прикладных задачах связь выходного и входного сигналов хорошо описывается тригонометрической функцией порядка k :

$$y(u, \theta) = \theta_0 + \sum_{j=1}^k (\theta_j \cos(ju) + \omega_j \sin(ju)), \quad u \in [0, 2\pi], \quad (1.47)$$

где $\theta_0, \theta_j, \omega_j$ – параметры модели.

В случае равноточных измерений для этой функции на основе критерия (1.45) доказано, что D -оптимальным является план вида:

$$\xi^* = \left\{ \begin{array}{c} u^{(1)}, \dots, u^{(N)} \\ \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \end{array} \right\}, \quad (1.48)$$

$$u^{(i)} = 2\pi(i-1)/N, \quad N \geq m = 2k+1.$$

Полиномиальные базисные функции на отрезке $[-1,1]$. Очень часто в качестве базисных функций используют зависимости вида

$$f_i(u) = u^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.49)$$

С помощью таких функций можно с заданной точностью на заданном отрезке описать любую другую гладкую функцию. В этом случае непрерывный D -оптимальный план для полиномиальной функции (1.49) на отрезке $[-1,1]$ единственен и сосредоточен с равными весами $1/m$ в точках, которые являются корнями полинома:

$$(1-u^2) \frac{d}{du} P_m(u), \quad (1.50)$$

где $P_m(u) = 2^{-2} \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{(2m-2s)!}{s!(m-s)!(m-2s)!} u^{m-2s}$ – полином Лежандра степени m [3, 4].

Очень удобны ортогональные планы, к которым относится, в частности, план полнофакторного эксперимента типа 2^3 , сосредоточенный в вершинах единичного куба с равными весами 2^{-3} .



.....
Ортогональным планом эксперимента называется план с расширенной матрицей плана, все элементы которой равны ± 1 , и при этом столбцы её попарно ортогональны.

Для линейной модели наблюдений, когда множество планирования имеет вид $u_i \in [-1,1]$, $i = 1, 2, 3$, D -оптимальным планом является *ортогональный план*, который одновременно удовлетворяет и критерию A -оптимальности.

1.6 Полный факторный план типа 2^3

Факторное планирование применяют с целью построения экономичных планов для оценки неизвестных коэффициентов полиномиальных функций отклика [8]. Рассмотрим схему полнофакторного эксперимента типа 2^3 , в кото-

ром результаты измерений зависят от контролируемых переменных $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, которые при факторном планировании называют факторами. Каждый фактор может принимать значения ± 1 . Эти значения называют уровнями фактора. В качестве функции регрессии (отклика) рассматривают полином:

$$\begin{aligned} y(u_1, u_2, u_3) &= \sum_{j=1}^8 f_j(\vec{u})\theta_j = f_1(\vec{u})\theta_1 + f_2(\vec{u})\theta_2 + f_3(\vec{u})\theta_3 + f_4(\vec{u})\theta_4 + \\ &+ f_5(\vec{u})\theta_5 + f_6(\vec{u})\theta_6 + f_7(\vec{u})\theta_7 + f_8(\vec{u})\theta_8, \\ f_1(\vec{u}) &= 1, f_2(\vec{u}) = u_1, f_3(\vec{u}) = u_2, f_4(\vec{u}) = u_3, \\ f_5(\vec{u}) &= u_1u_2, f_6(\vec{u}) = u_2u_3, f_7(\vec{u}) = u_3u_1, f_8(\vec{u}) = u_1u_2u_3. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Параметр θ_1 называют общим средним, коэффициенты $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ называют главными эффектами, $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ – эффектами двухфакторного взаимодействия, θ_8 – эффект трехфакторных взаимодействий.

Факторный план называется полным факторным планом, если измерения производятся по одному для каждой комбинации уровней фактора.

При полнофакторном планировании экспериментов применяют *кодированные* (нормированные) переменные. Это позволяет записывать план эксперимента в виде таблиц, элементы которых (базисные функции $f_j(\vec{u}^{(i)})$) равны +1 или –1. При этом в таблицы принято записывать только знаки «+» или «–», которые соответствуют максимальным и минимальным уровням факторов. К кодированным переменным переходят в результате замены:

$$u_i = \frac{\check{u}_i - \check{u}_{0i}}{\Delta\check{u}_i}, \Delta\check{u}_i = \frac{\check{u}_{i\max} - \check{u}_{i\min}}{2}, \check{u}_{0i} = \frac{\check{u}_{i\max} + \check{u}_{i\min}}{2}, \quad (1.52)$$

где u_i – кодированная переменная (значение фактора), \check{u}_{0i} – значение основного уровня фактора в физических (натуральных) единицах, \check{u}_i – значение фактора в физических единицах, $\check{u}_{i\max}, \check{u}_{i\min}$ – максимальное и минимальное значения фактора в физических единицах.

Общее количество опытов для такого плана равно $N = 2^3$. После того как в реальной физической задаче такого типа выполнен переход к кодированным переменным, которые теперь могут принимать значения «+1» и «–1», условия экспериментов записывают в виде матрицы планирования, которая для трех факторов записана в виде таблицы 1.1 [8].

Таблица 1.1 – Факторный план типа 2^3

| Матрица планирования 2^3 | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------------|-----------|
| № опыта | Базисные функции | | | | | | | | Выходной сигнал | | |
| | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 | f_8 | $y^{(i),1}$ | $y^{(i),2}$ | $y^{(i)}$ |
| 1 | + | + | + | + | + | + | + | + | $y^{(1),1}$ | $y^{(1),2}$ | $y^{(1)}$ |
| 2 | + | - | + | + | - | + | - | - | $y^{(2),1}$ | $y^{(2),2}$ | $y^{(2)}$ |
| 3 | + | + | - | + | - | - | + | - | $y^{(3),1}$ | $y^{(3),2}$ | $y^{(3)}$ |
| 4 | + | - | - | + | + | - | - | + | $y^{(4),1}$ | $y^{(4),2}$ | $y^{(4)}$ |
| 5 | + | + | + | - | + | - | - | - | $y^{(5),1}$ | $y^{(5),2}$ | $y^{(5)}$ |
| 6 | + | - | + | - | - | - | + | + | $y^{(6),1}$ | $y^{(6),2}$ | $y^{(6)}$ |
| 7 | + | + | - | - | - | + | - | + | $y^{(7),1}$ | $y^{(7),2}$ | $y^{(7)}$ |
| 8 | + | - | - | - | + | + | + | - | $y^{(8),1}$ | $y^{(8),2}$ | $y^{(8)}$ |

Строки этой матрицы соответствуют номеру эксперимента, столбцы с первого по восьмой соответствуют расширенной матрице плана, второй, третий и четвертый столбцы дают план изменения контролируемых переменных. Столбцы для выходной переменной содержат результаты повторных (многократных) измерений выходного сигнала. Для обеспечения высокой достоверности результатов требуется значительное число повторений. В последний столбец записывают среднее значение выходного сигнала по группе повторных измерений в одной экспериментальной точке.

Полный факторный план относится к числу *ортогональных планов*, что сильно упрощает расчет коэффициентов модели. Для модели (1.51) с планом, приведенным в таблице 1.1, исходная система уравнений для оценки параметров θ_j , ($j = 1, 2, \dots, 8$) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 + 1 \cdot \theta_3 + 1 \cdot \theta_4 + 1 \cdot \theta_5 + 1 \cdot \theta_6 + 1 \cdot \theta_7 + 1 \cdot \theta_8 = y^{(1)}, \\ 1 \cdot \theta_1 - 1 \cdot \theta_2 + 1 \cdot \theta_3 + 1 \cdot \theta_4 - 1 \cdot \theta_5 + 1 \cdot \theta_6 - 1 \cdot \theta_7 - 1 \cdot \theta_8 = y^{(2)}, \\ 1 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 - 1 \cdot \theta_3 + 1 \cdot \theta_4 - 1 \cdot \theta_5 - 1 \cdot \theta_6 + 1 \cdot \theta_7 - 1 \cdot \theta_8 = y^{(3)}, \\ 1 \cdot \theta_1 - 1 \cdot \theta_2 - 1 \cdot \theta_3 + 1 \cdot \theta_4 + 1 \cdot \theta_5 - 1 \cdot \theta_6 - 1 \cdot \theta_7 + 1 \cdot \theta_8 = y^{(4)}, \\ 1 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 + 1 \cdot \theta_3 - 1 \cdot \theta_4 + 1 \cdot \theta_5 - 1 \cdot \theta_6 - 1 \cdot \theta_7 - 1 \cdot \theta_8 = y^{(5)}, \\ 1 \cdot \theta_1 - 1 \cdot \theta_2 + 1 \cdot \theta_3 - 1 \cdot \theta_4 - 1 \cdot \theta_5 - 1 \cdot \theta_6 + 1 \cdot \theta_7 + 1 \cdot \theta_8 = y^{(6)}, \\ 1 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 - 1 \cdot \theta_3 - 1 \cdot \theta_4 - 1 \cdot \theta_5 + 1 \cdot \theta_6 - 1 \cdot \theta_7 + 1 \cdot \theta_8 = y^{(7)}, \\ 1 \cdot \theta_1 - 1 \cdot \theta_2 - 1 \cdot \theta_3 - 1 \cdot \theta_4 + 1 \cdot \theta_5 + 1 \cdot \theta_6 + 1 \cdot \theta_7 - 1 \cdot \theta_8 = y^{(8)}, \end{array} \right. \quad (1.53)$$

$$y^{(i)} = \left(\sum_{p=1}^{r=2} y^{(i),p} \right) / r.$$

В силу ортогональности плана информационная матрица в системе нормальных уравнений есть диагональная матрица:

$$\sum_{k=1}^{m=8} M_{jk} \theta_k = \sum_{i=1}^{N=8} f_j(\bar{u}^{(i)}) y^{(i)}, \quad M_{jk} = \sum_{i=1}^{N=8} f_j(\bar{u}^{(i)}) f_k(\bar{u}^{(i)}) = \begin{cases} 8, & j = k. \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (1.54)$$

Решение системы нормальных уравнений дает следующие формулы для расчета коэффициентов регрессии:

$$\theta_j = \frac{\sum_{i=1}^{N=8} f_j(\bar{u}^{(i)}) y^{(i)}}{8}, \quad (1.55)$$

где j – номер базисной функции, $N = 8$ – количество опытных точек в плане, i – номер опытной точки в плане (номер строки). Величина $y^{(i)} = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^r y^{(i),p}$ – средний отклик (выходной сигнал) по числу повторенных измерений в точке с номером i (r – количество повторных опытов).

При варьировании каждого фактора на двух уровнях в пределах «+1», «−1» вычисления сводятся к тому, что элементы столбца для выходной переменной суммируются с учетом поправки на знак в столбце соответствующей базисной функции, а затем делятся на количество опытных точек в плане.

Далее необходимо выполнить следующие действия по проверке адекватности модели.

1. Для каждой из опытных точек определяются построчные дисперсии:

$$\left(\sigma^{(i)} \right)^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{p=1}^r \left(y^{(i),p} - y^{(i)} \right)^2. \quad (1.56)$$

2. Далее находится дисперсия воспроизводимости:

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sigma^{(i)} \right)^2 = \frac{1}{N(r-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^r \left(y^{(i),p} - y^{(i)} \right)^2. \quad (1.57)$$

3. По критерию Кочрена необходимо проверить однородность дисперсий. Для этого вычисляется отношение максимальной построчной дисперсии к сумме построчных дисперсий:

$$G = \left(\max \left(\sigma^{(i)} \right)^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^N \left(\sigma^{(i)} \right)^2 \right) = \left(\max \left(\sigma^{(i)} \right)^2 \right) / \left(NS^2(y) \right) - \quad (1.58)$$

и по таблицам определяют значение критерия Кочрена для степеней свободы $f_{i_{\max}} = r - 1$, $f_i = N$ для уровня значимости $\alpha = 5\%$. Если $G_{\text{tabl}} > G$, то гипотеза об однородности дисперсий принимается.

4. На следующем, очень важном шаге, по T -критерию Стьюдента проверяется значимость коэффициентов модели. Для этого находится дисперсия коэффициентов регрессии:

$$S^2(\theta_j) = \frac{1}{Nr} S^2(y) - \quad (1.59)$$

и по таблицам распределения случайных величин определяют критическое значение T_{cr} критерия Стьюдента для степеней свободы $f = N(r - 1)$ и уровня значимости $\alpha = 5\%$. По этому значению строится интервал длиной $r\Delta\theta_j$, $\Delta\theta_j = T_{cr}S(\theta_j)$, где $\Delta\theta_j$ – половина длины доверительного интервала. Если абсолютная величина коэффициента $|\theta_j| > \Delta\theta_j$, то коэффициент считается значащим (им нельзя пренебречь), в противном случае соответствующий коэффициент считается незначащим и далее в модели не учитывается.

Это очень важный шаг, т. к. если все коэффициенты модели оказываются значащими, то это означает, что количество опытов равно количеству значащих коэффициентов модели. Отсюда следует, что модель должна быть признана неадекватной, т. к. в соответствии с формулой для оценки дисперсии на основании теоремы Гаусса – Маркова дисперсия будет бесконечно велика, что проявляется на следующем шаге.

5. Формальная проверка *адекватности* модели выполняется на основе критерия Фишера. С этой целью вычисляют дисперсию адекватности:

$$S_{ad}^2 = \frac{r}{N - \tilde{m}} \sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \tilde{y}^{(i)})^2, \quad (1.60)$$

где \tilde{m} – количество *значащих* коэффициентов модели, а $\tilde{y}^{(i)}$ – значение выходного сигнала, вычисленное по принятому уравнению (1.51) модели после отбрасывания (приравнивания к нулю) незначащих коэффициентов. После этого вычисляют значение критерия Фишера: $F = S_{ad}^2 / S^2(y)$. Из таблиц находят критическое значение критерия Фишера F_{cr} для степеней свободы $F_{ad} = N - \tilde{m}$ и $f_k = N(r - 1)$ и за-

данного уровня значимости α . При выполнении условия $F < F_{cr}$ модель признается адекватной.

6. Вычисляют коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{N=8} (y^{(i)} - \tilde{y}^{(i)})^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^{N=8} (y^{(i)} - \bar{y})^2 \right)}, \quad (1.61)$$

где \bar{y} – среднее значение $y^{(i)}$. Значение этого коэффициента находится в пределах $0 \leq R \leq 1$. Если значения R близки к нулю, то коэффициенты модели не вносят вклада в изучаемую зависимость. Если же он близок к единице, то принятое уравнение полностью описывает результаты эксперимента.



Пример

Пусть требуется найти параметры модели:

$$y(u_1, u_2, u_3) = \sum_{j=1}^8 f_j(\vec{u}) \theta_j,$$

$$f_1(\vec{u}) = 1, f_2(\vec{u}) = u_1, f_3(\vec{u}) = u_2, f_4(\vec{u}) = u_3,$$

$$f_5(\vec{u}) = u_1 u_2, f_6(\vec{u}) = u_2 u_3, f_7(\vec{u}) = u_3 u_1, f_8(\vec{u}) = u_1 u_2 u_3,$$

для которой матрица плана и результаты измерений выходного сигнала приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Факторный план типа 2^3

| Матрица планирования 2^3 | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------------|-----------|
| № опыта | Базисные функции | | | | | | | | Выходной сигнал | | |
| | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 | f_8 | $y^{(i),1}$ | $y^{(i),2}$ | $y^{(i)}$ |
| 1 | + | + | + | + | + | + | + | + | -11.5 | -10.5 | 11 |
| 2 | + | - | + | + | - | + | - | - | -12.5 | -11.5 | 12 |
| 3 | + | + | - | + | - | - | + | - | -20.5 | -23.5 | 22 |
| 4 | + | - | - | + | + | - | - | + | -21.5 | -22.5 | 22 |
| 5 | + | + | + | - | + | - | - | - | -24.5 | -21.5 | 23 |
| 6 | + | - | + | - | - | - | + | + | -25.5 | -24.5 | 25 |
| 7 | + | + | - | - | - | + | - | + | -28.5 | -27.5 | 28 |
| 8 | + | - | - | - | + | + | + | - | -33.5 | -30.5 | 32 |

Находим среднее значение $y^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{r=2} y^{(i),p}$ выходного сигнала для каждой

экспериментальной точки по всем повторным измерениям и заносим эти значения в последний столбец таблицы 1.2.

Находим оценки параметров:

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{N=8} f_j(\bar{u}^{(i)}) y^{(i)} / 8 \Rightarrow$$

$$\tilde{\theta}_1 = (11 + 12 + 22 + 22 + 23 + 25 + 28 + 32) / 8 = 21.875,$$

$$\tilde{\theta}_2 = (11 - 12 + 22 - 22 + 23 - 25 + 28 - 32) / 8 = -0.875,$$

$$\tilde{\theta}_3 = (11 + 12 - 22 - 22 + 23 + 25 - 28 - 32) / 8 = -4.125,$$

$$\tilde{\theta}_4 = (11 + 12 + 22 + 22 - 23 - 25 - 28 - 32) / 8 = -5.125,$$

$$\tilde{\theta}_5 = (11 - 12 - 22 + 22 + 23 - 25 - 28 + 32) / 8 = 0.125,$$

$$\tilde{\theta}_6 = (11 + 12 - 22 - 22 - 23 - 25 + 28 + 32) / 8 = -1.125,$$

$$\tilde{\theta}_7 = (11 - 12 + 22 - 22 - 23 + 25 - 28 + 32) / 8 = 0.625,$$

$$\tilde{\theta}_8 = (11 - 12 - 22 + 22 - 23 + 25 + 28 - 32) / 8 = -0.375.$$

Находим построчные дисперсии и дисперсию воспроизводимости:

$$\left(\sigma^{(i)}\right)^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{p=1}^r \left(y^{(i),p} - y^{(i)}\right)^2 \Rightarrow \left(\sigma^{(1)}\right)^2 = 0.5, \left(\sigma^{(2)}\right)^2 = 0.5, \left(\sigma^{(3)}\right)^2 = 4.5,$$

$$\left(\sigma^{(4)}\right)^2 = 0.5, \left(\sigma^{(5)}\right)^2 = 4.5, \left(\sigma^{(6)}\right)^2 = 0.5, \left(\sigma^{(7)}\right)^2 = 0.5, \left(\sigma^{(8)}\right)^2 = 4.5,$$

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sigma^{(i)}\right)^2 = \frac{1}{N(r-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^r \left(y^{(i),p} - y^{(i)}\right)^2 = 2.$$

Проверяем однородность дисперсий по критерию Кочрена. Расчет отношения максимальной построчной дисперсии к дисперсии воспроизводимости дает:

$$G = \frac{\left(\max\left(\sigma^{(i)}\right)^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^N \left(\sigma^{(i)}\right)^2\right)} = \frac{4.5}{16} \cong 0.2813.$$

Для степеней свободы $f_{i_{\max}} = r - 1 = 1$, $f_i = N = 8$ критическое значение критерия Кочрена $G_{\text{tabl}} = 0.6798$ при уровне значимости $\alpha = 5\%$, $G_{\text{tabl}} > G$, дисперсии однородны.

Находим полуширину доверительного интервала:

$$S^2(\theta_j) = \frac{1}{Nr} S^2(y) = 1/8, T_{cr} = 2.306, \Delta\theta_j = T_{cr} S(\theta_j) = 0.815.$$

Проверка значимости коэффициентов по условию $|\theta_j| > \Delta\theta_j$ дает, что значащими являются 5 коэффициентов:

$$\tilde{\theta}_1 = 21.875, \tilde{\theta}_2 = -0.875, \tilde{\theta}_3 = -4.125, \tilde{\theta}_4 = -5.125, \tilde{\theta}_6 = -1.125.$$

Итак, уравнение модели с учетом только значащих коэффициентов имеет вид:

$$y = 21.875 f_1(\vec{u}) - 0.875 f_2(\vec{u}) - 4.125 f_3(\vec{u}) - 5.125 f_4(\vec{u}) - 1.125 f_6(\vec{u}).$$

По этому уравнению находим расчетные значения выходного сигнала в точках плана:

$$y = 21.875 f_1(\vec{u}) - 0.875 f_2(\vec{u}) - 4.125 f_3(\vec{u}) - 5.125 f_4(\vec{u}) - 1.125 f_6(\vec{u}) \Rightarrow$$

$$\tilde{y}^{(1)} = 21.875 - 0.875 - 4.125 - 5.125 - 1.125 = 10.625,$$

$$\tilde{y}^{(2)} = 21.875 + 0.875 - 4.125 - 5.125 - 1.125 = 12.375,$$

$$\tilde{y}^{(3)} = 21.875 - 0.875 + 4.125 - 5.125 + 1.125 = 21.125,$$

$$\tilde{y}^{(4)} = 21.875 + 0.875 + 4.125 - 5.125 + 1.125 = 22.875,$$

$$\tilde{y}^{(5)} = 21.875 - 0.875 - 4.125 + 5.125 + 1.125 = 23.125,$$

$$\tilde{y}^{(6)} = 21.875 + 0.875 - 4.125 + 5.125 + 1.125 = 24.875,$$

$$\tilde{y}^{(7)} = 21.875 - 0.875 + 4.125 + 5.125 - 1.125 = 29.125,$$

$$\tilde{y}^{(8)} = 21.875 + 0.875 + 4.125 + 5.125 - 1.125 = 30.875.$$

Находим дисперсию адекватности:

$$\begin{aligned} S_{ad}^2 &= \frac{r}{N - \tilde{m}} \sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \tilde{y}^{(i)})^2 = \\ &= \frac{2}{8 - 5} \left((0.375)^2 + (0.375)^2 + (0.875)^2 + (0.875)^2 + (0.125)^2 \right) + \\ &+ \left((0.125)^2 + (1.125)^2 + (1.125)^2 \right) = 2.92. \end{aligned}$$

Проверяем выполнение критерия Фишера:

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S^2(y)} = \frac{2.92}{2} = 1.46.$$

Так как $F_{cr} = 4.07 > F = 1.46$, то модель признается адекватной.

Необходимо отметить, что это формальная проверка адекватности, которая мало что дает в плане оценки правильности понимания физической сущности моделируемых процессов. Кроме того, область применимости полученной

модели ограничена интервалом изменения входных переменных $u_i \in [-1:1]$, возможность выхода за границы которого требует дополнительных исследований.

Коэффициент множественной корреляции в рассматриваемом примере равен:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{N=8} (y^{(i)} - \tilde{y}^{(i)})^2}{\sum_{i=1}^{N=8} (y^{(i)} - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{4.375}{366.875}} = 0.99,$$

следовательно, модель хорошо описывает экспериментальные данные.

.....

1.7 Метод последовательной идентификации

Рассмотрим метод последовательной идентификации линейных стационарных систем, который по точности дает такие же результаты, как и метод максимального правдоподобия, но требует меньших объемов компьютерной памяти и времени счета. Алгоритм последовательной идентификации частично снимает вычислительные проблемы, связанные с явным или неявным обращением информационной матрицы. Метод применим к процессам, которые можно считать стационарными не менее чем на m интервалах времени, в течение которых осуществляется идентификация m неизвестных параметров системы.

1.7.1 Последовательная идентификация одномерной системы

Одномерной системой называется система с одним входом и одним выходом. Рассмотрим простейшую скалярную линейную статическую одномерную систему (т. е. систему, для которой коэффициенты модели и состояние явно от времени не зависят), которая описывается уравнением:

$$y = u\theta. \quad (1.62)$$

В соответствии с принятым уравнением модели для каждой экспериментальной точки при выполнении серии измерений входного и выходного сигналов имеют место уравнения:

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} + \mu^{(i)} = u^{(i)}\theta, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.63)$$

где $y^{(i)}$ – измеряемый выходной сигнал, $y_0^{(i)}$ – предполагаемое точное значение выходного сигнала, $\mu^{(i)}$ – случайная ошибка измерений, $i = 1, 2, \dots, N$ – номер опыта.

Прежде всего, задача оценки неизвестного параметра θ системы может быть решена уже известным нам методом. Для этого запишем расчетные формулы, используя идеи метода наименьших квадратов.

Рассмотрим задачу минимизации среднеквадратического отклонения экспериментальных результатов $y^{(i)}$ и их расчетных значений $y^{(i)} = u^{(i)}\tilde{\theta}^N$, которые можно будет получить, если найти оценку параметра $\tilde{\theta}^N$ по результатам N измерений:

$$J_N = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \left(y^{(i)} - u^{(i)}\tilde{\theta}^N \right)^2. \quad (1.64)$$

Здесь, как и ранее, верхний индекс, взятый в скобки, – номер измерения, $\tilde{\theta}^N$ – оценка параметра θ , полученная в результате серии из N измерений, $\omega^{(i)}$ – весовой коэффициент, который может быть принят равным единице, а может быть использован для того, чтобы повысить или понизить влияние отдельных измерений на оценку $\tilde{\theta}^N$.

Из условия минимума функционала величины J_N следует, что наилучшая оценка должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{dJ_N}{d\tilde{\theta}^N} = -2 \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} u^{(i)} \left(y^{(i)} - u^{(i)}\tilde{\theta}^N \right) = 0. \quad (1.65)$$

Отсюда получаем оценку параметра $\tilde{\theta}^N$:

$$\tilde{\theta}^N = \frac{\sum_{i=1}^N \omega^{(i)} u^{(i)} y^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \left(u^{(i)} \right)^2}. \quad (1.66)$$

Теперь получим оценку $\tilde{\theta}^N$ коэффициента θ методом последовательной идентификации. При этом результат такой последовательной оценки величины θ после N измерений будет совпадать с оценкой (1.66). Рассмотрим соответствующий процесс последовательного уточнения такой оценки. Первое измерение дает в соответствии с формулой (1.66) оценку

$$\tilde{\theta}^1 = \frac{\omega^{(1)} u^{(1)} y^{(1)}}{\omega^{(1)} \left(u^{(1)} \right)^2}. \quad (1.67)$$

Серия из двух измерений дает следующую уточненную оценку по формуле (1.66):

$$\tilde{\theta}^2 = \frac{\omega^{(1)}u^{(1)}y^{(1)} + \omega^{(2)}u^{(2)}y^{(2)}}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2}. \quad (1.68)$$

Однако эту формулу можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^1 \frac{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2} + \frac{\omega^{(1)}u^{(1)}y^{(1)} + \omega^{(2)}u^{(2)}y^{(2)}}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2} = \\ &= \tilde{\theta}^1 + \frac{\omega^{(1)}u^{(1)}(y^{(1)} - u^{(1)}\tilde{\theta}^1) + \omega^{(2)}u^{(2)}(y^{(2)} - u^{(2)}\tilde{\theta}^1)}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Подстановка во второе слагаемое в формуле (1.69) выражения (1.67) для $\tilde{\theta}^1$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + \frac{\omega^{(1)}u^{(1)} \left(y^{(1)} - u^{(1)} \frac{\omega^{(1)}u^{(1)}y^{(1)}}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2} \right) + \omega^{(2)}u^{(2)}(y^{(2)} - u^{(2)}\tilde{\theta}^1)}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2} \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + \frac{\omega^{(2)}u^{(2)}(y^{(2)} - u^{(2)}\tilde{\theta}^1)}{\omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Продолжение этого процесса приводит к тому, что после измерения с номером r ($1 \leq r \leq N$) уточненная оценка коэффициента $\tilde{\theta}^r$ может быть получена в результате следующего итерационного процесса:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^r &= \tilde{\theta}^{r-1} + P^r \omega^{(r)}u^{(r)}(y^{(r)} - u^{(r)}\tilde{\theta}^{r-1}), \quad 1 \leq r \leq N, \\ \tilde{\theta}^0 &= 0, \\ \frac{1}{P^1} &= \omega^{(1)}(u^{(1)})^2, \\ \frac{1}{P^2} &= \omega^{(1)}(u^{(1)})^2 + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2 = \frac{1}{P^1} + \omega^{(2)}(u^{(2)})^2, \\ \frac{1}{P^r} &= \sum_{i=1}^r \omega^{(i)}(u^{(i)})^2 = \frac{1}{P^{r-1}} + \omega^{(r)}(u^{(r)})^2, \quad r = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Процесс последовательного уточнения (1.71) дает такое же значение оценки коэффициента модели $\tilde{\theta}^N$ по результатам N измерений, что и оценка (1.66) по методу наименьших квадратов, если не считать некоторой разницы в результате округления при компьютерных расчетах. С другой стороны, схема

(1.71) может быть признана предпочтительной, так как в этом случае расчеты ведутся по рекуррентным формулам и не требуется хранения всех предыдущих результатов измерений.

1.7.2 Последовательная идентификация многомерной системы

Рассмотрим линейную многомерную статическую систему с вектором входного сигнала $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_l\}$, скалярным выходным сигналом y и принятым по результатам предварительного изучения уравнением модели вида

$$y = (\vec{f}(\vec{u}), \vec{\theta}) = \sum_{j=1}^m f_j(\vec{u})\theta_j, \quad (1.72)$$

где $\vec{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ – вектор оцениваемых параметров; $\vec{f}(\vec{u}) = \{f_1(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})\}$ – вектор базисных функций модели (т. е. известного вида функций всех своих аргументов).

Результаты измерений входного и выходного сигналов в серии из $(i = 1, 2, \dots, N)$ измерений и уравнение (1.72) позволяют записать исходную систему уравнений для оценки параметров:

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} + \mu^{(i)} = f_1(\vec{u}^{(i)})\theta_1 + f_2(\vec{u}^{(i)})\theta_2 + \dots + f_m(\vec{u}^{(i)})\theta_m = (\vec{f}(\vec{u}^{(i)}), \vec{\theta}). \quad (1.73)$$

Как и ранее, здесь $y_0^{(i)}$ – предполагаемое точное значение выходного сигнала, $\mu^{(i)}$ – случайная ошибка (шум) измерений, $i = 1, 2, \dots, N$ – номер опыта.

Вновь воспользуемся идеями метода наименьших квадратов. Рассмотрим задачу минимизации среднеквадратического отклонения:

$$J_N = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \left(y^{(i)} - (\vec{f}(\vec{u}^{(i)}), \vec{\theta}^N) \right)^2. \quad (1.74)$$

Здесь вновь верхний индекс, взятый в скобки, – номер измерения, $\vec{\theta}^N$ – оценка вектора коэффициентов модели $\vec{\theta}$, полученная в результате серии из N измерений, $\omega^{(i)}$ – неотрицательные весовые коэффициенты, которые выбираются с целью повысить или понизить влияние отдельного опыта на итоговую оценку параметров либо просто принимаются равными единице.

Из условия минимума функционала J_N следует, что оценка $\vec{\theta}^N$ должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial J_N}{\partial \theta_j^N} = 0, \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) \otimes \left(y^{(i)} - (\vec{f}(\vec{u}^{(i)}), \vec{\theta}^N) \right) = 0. \quad (1.75)$$



Символом \otimes здесь обозначена операция внешнего умножения векторов, которая при умножении вектора $\vec{a} = \{a_1, \dots, a_s\}$ на вектор $\vec{b} = \{b_1, \dots, b_t\}$ дает матрицу размера $(s \times t)$:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = C, \quad C_{ij} = a_i b_j, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, t, \quad (1.76)$$

а если один из сомножителей скаляр – то эта операция означает обычное умножение вектора на число.

Уравнения (1.75) есть не что иное, как нормальная система уравнений, которую мы уже получали, рассматривая метод максимального правдоподобия, которое теперь запишем в виде:

$$(P^N)^{-1} \tilde{\theta}^N = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)}. \quad (1.77)$$

Здесь символом $(P^N)^{-1}$ обозначена информационная матрица:

$$M = (P^N)^{-1} = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(i)}). \quad (1.78)$$

Элементы, стоящие на пересечении строки k , ($k = 1, 2, \dots, m$) и столбца j , ($j = 1, 2, \dots, m$) этой матрицы вычисляются по формуле:

$$(P^N)^{-1}_{kj} = \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} f_k(\vec{u}^{(i)}) f_j(\vec{u}^{(i)}). \quad (1.79)$$

Решение уравнения (1.77) дает следующую оценку параметров модели по методу наименьших квадратов:

$$\tilde{\theta}^N = P^N \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)}. \quad (1.80)$$

Здесь, очевидно, матрица P^N есть матрица, обратная к информационной: $P^N = M^{-1}$.

Однако оценку параметров $\tilde{\theta}^N$ модели на основе уравнения (1.77) можно получить и последовательным методом, не прибегая к процедуре обращения информационной матрицы. С этой целью матричное уравнение (1.77) представим в виде:

$$(P^N)^{-1} \tilde{\theta}^N = \sum_{i=1}^{N-1} \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)} + \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) y^{(N)}. \quad (1.81)$$

Для первого слагаемого в правой части этого уравнения имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) y^{(i)} = (P^{N-1})^{-1} \tilde{\theta}^{N-1}. \quad (1.82)$$

Поэтому уравнение (1.81) можно преобразовать к виду:

$$(P^N)^{-1} \tilde{\theta}^N = (P^{N-1})^{-1} \tilde{\theta}^{N-1} + \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) y^{(N)}. \quad (1.83)$$

Это уравнение в свою очередь представим в виде:

$$\begin{aligned} (P^N)^{-1} \tilde{\theta}^N &= (P^{N-1})^{-1} \tilde{\theta}^{N-1} + \omega^{(N)} \left(\vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \right) \tilde{\theta}^{N-1} + \\ &+ \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \left(y^{(N)} - \left(\vec{f}(\vec{u}^{(N)}), \tilde{\theta}^{N-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Объединяя два первых слагаемых в правой части, получаем уравнение:

$$(P^N)^{-1} \tilde{\theta}^N = (P^N)^{-1} \tilde{\theta}^{N-1} + \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \left(y^{(N)} - \left(\vec{f}(\vec{u}^{(N)}), \tilde{\theta}^{N-1} \right) \right). \quad (1.85)$$

Из этого уравнения следует:

$$\tilde{\theta}^N = \tilde{\theta}^{N-1} + (P^N) \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \left(y^{(N)} - \left(\vec{f}(\vec{u}^{(N)}), \tilde{\theta}^{N-1} \right) \right). \quad (1.86)$$

Формула (1.86) представляет собой рекуррентную формулу вычисления коэффициентов модели $\tilde{\theta}^N$, но для её применения необходимо получить и рекуррентные формулы вычисления матрицы P^N , обратной к информационной матрице. Для получения этих формул воспользуемся леммой об обращении матриц [2]. С этой целью формулу (1.78), которая определяет информационную матрицу, представим в виде:

$$\begin{aligned} (P^N)^{-1} &= \sum_{i=1}^N \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \omega^{(i)} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) + \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \Rightarrow \\ (P^N)^{-1} &= (P^{N-1})^{-1} + \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(N)}). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Последнее слагаемое в этой формуле представим в виде:

$$\begin{aligned} \omega^{(N)} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) &= \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)} = \sqrt{\omega^{(N)}} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \otimes \sqrt{\omega^{(N)}} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}), \\ \left(\vec{H}^{(N)} = \sqrt{\omega^{(N)}} \vec{f}(\vec{u}^{(N)}) \right). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Теперь формулу для информационной матрицы можно записать в виде:

$$(P^N)^{-1} = (P^{N-1})^{-1} + \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)}. \quad (1.89)$$

Умножая обе части этого равенства слева на матрицу P^N , получим выражение:

$$E = P^N (P^{N-1})^{-1} + P^N \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)}, \quad (1.90)$$

где E – единичная матрица.

Это равенство умножим справа на матрицу P^{N-1} :

$$P^{N-1} = P^N + P^N \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)} P^{N-1}. \quad (1.91)$$

Умножим теперь это выражение справа на вектор $\vec{H}^{(N)}$:

$$\begin{aligned} P^{N-1} \vec{H}^{(N)} &= P^N \vec{H}^{(N)} + P^N \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)} = \\ &= P^N \vec{H}^{(N)} (1 + \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)}). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Теперь это последнее выражение умножим на величину:

$$(1 + \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)})^{-1} \vec{H}^{(N)} P^{N-1}.$$

В результате получим следующее выражение:

$$P^{N-1} \vec{H}^{(N)} \otimes (1 + \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)})^{-1} \vec{H}^{(N)} P^{N-1} = P^N \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)} P^{N-1}. \quad (1.93)$$

Подстановка в эту формулу выражения (1.91) для $P^N \vec{H}^{(N)} \otimes \vec{H}^{(N)} P^{N-1}$ дает:

$$P^{N-1} \vec{H}^{(N)} \otimes (1 + \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)})^{-1} \vec{H}^{(N)} P^{N-1} = P^{N-1} - P^N. \quad (1.94)$$

Таким образом, для вычисления матриц P^N также имеет место рекуррентная формула:

$$P^N = P^{N-1} - P^{N-1} \vec{H}^{(N)} \otimes (1 + \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)})^{-1} \vec{H}^{(N)} P^{N-1}. \quad (1.95)$$

Очень важно, что при вычислении матриц P^N по этой формуле не требуется выполнять обращения матриц (т. к. величина $(1 + \vec{H}^{(N)} P^{N-1} \vec{H}^{(N)})^{-1}$ – скаляр).

Для замыкания процедуры последовательной идентификации осталось определить матрицу P^0 и начальную оценку параметров $\tilde{\theta}^0$ для начала процесса. В качестве начальной оценки параметров $\tilde{\theta}^0$ принято, за неимением лучшего, принимать нулевую оценку $\tilde{\theta}^0 = 0$. Оценка матрицы P^0 может быть произвольной [2], но для улучшения сходимости принято выбирать в качестве P^0 матрицу:

$$P^0 = \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (P^0)^{-1} \rightarrow 0. \quad (1.96)$$



Таким образом, для вычисления на некотором шаге с номером $r=1,2,\dots,N$ процесса уточнения коэффициентов $\tilde{\theta}^r$ модели (1.72) имеют место рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^r &= \tilde{\theta}^{r-1} + P^r \omega^{(r)} \vec{f}(\vec{u}^{(r)}) \otimes \left(y^{(r)} - \left(\vec{f}(\vec{u}^{(r)}), \tilde{\theta}^{r-1} \right) \right), \\ P^r &= P^{r-1} - P^{r-1} \vec{H}^{(r)} \otimes \left(1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)} \right)^{-1} \vec{H}^{(r)} P^{r-1}, \\ \vec{H}^{(r)} &= \sqrt{\omega^{(r)}} \vec{f}(\vec{u}^{(r)}), \quad r=1,2,\dots,N, \\ P^0 &= \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \tilde{\theta}^0 = 0. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Значение ε выбирается обычно в интервале $10^{-7} \leq \varepsilon \leq 10$. Вычисления показывают, что выбор ε , за исключением оценок на начальных этапах итерационного процесса, слабо влияет на конечные оценки коэффициентов модели.



Пример

По результатам предварительного изучения объекта с двумя входами $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$ и одним выходным сигналом y экспериментатор принял предположение, что закон функционирования этого объекта можно описать уравнением

$$f_1(\vec{u})\theta_1 + f_2(\vec{u})\theta_2 = y,$$

с базисными функциями $f_1(\vec{u}) = u_1$, $f_2(\vec{u}) = (u_2)^2$.

В результате трех измерений входного и выходного сигналов были получены следующие данные:

$$\begin{aligned} \vec{u}^{(1)} &= \{1.0, 1.0\}, \quad \vec{u}^{(2)} = \{1.0, -1.0\}, \quad \vec{u}^{(3)} = \{-1.0, 2.0\}, \\ y^{(1)} &= 2.0, \quad y^{(2)} = 1.5, \quad y^{(3)} = 2.5. \end{aligned}$$

Решение методом максимального правдоподобия. Сначала решим задачу методом максимального правдоподобия, полагая $\omega^{(i)} = 1$, $i=1,2,3$. Исходная система уравнений имеет в этом случае вид:

$$\begin{cases} f_1(\vec{u}^{(1)})\theta_1 + f_2(\vec{u}^{(1)})\theta_2 = y^{(1)}, \\ f_1(\vec{u}^{(2)})\theta_1 + f_2(\vec{u}^{(2)})\theta_2 = y^{(2)}, \\ f_1(\vec{u}^{(3)})\theta_1 + f_2(\vec{u}^{(3)})\theta_2 = y^{(3)}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.0\theta_1 + 1.0\theta_2 = 2.0, \\ 1.0\theta_1 + 1.0\theta_2 = 1.5, \\ -1.0\theta_1 + 4.0\theta_2 = 2.5. \end{cases}$$

Для этого вычисляем информационную матрицу нормальной системы:

$$\begin{aligned} M &= (P^3)^{-1} = \sum_{i=1}^{N=3} \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) \otimes \vec{f}(\vec{u}^{(i)}) \Rightarrow (P^3)^{-1}_{kj} = \\ &= \sum_{i=1}^2 f_k(\vec{u}^{(i)}) f_j(\vec{u}^{(i)}) \Rightarrow (P^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор правых частей имеет вид:

$$Y_j = \sum_{i=1}^3 y^{(i)} f_j(u^{(i)}) \Rightarrow \vec{Y} = \{1, 13.5\}.$$

Нормальная система уравнений имеет вид:

$$(P^3)^{-1} \vec{\theta} = \vec{Y}.$$

Матрица, обратная к информационной матрице, равна:

$$P^3 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем оценку параметров модели по трем измерениям:

$$\tilde{\theta} = P^3 \vec{Y} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 13.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.04 \\ 0.04 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 13.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 \\ 0.85 \end{pmatrix}.$$

Решение методом последовательной идентификации. Теперь решим эту задачу методом последовательной идентификации в соответствии с расчетными формулами (1.97).

Определим векторы:

$$\vec{H}^{(N)} = \sqrt{\omega^{(N)}} \vec{f}(u^{(N)}) \Rightarrow \vec{H}^{(1)} = \{1, 1\}, \vec{H}^{(2)} = \{1, 1\}, \vec{H}^{(3)} = \{-1, 4\}.$$

Положим $\tilde{\theta}^0 = 0$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $P^0 = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Находим матрицу P^1 :

$$\begin{aligned} P^1 &= P^0 - P^0 \vec{H}^{(1)} \otimes (1 + \vec{H}^{(1)} P^0 \vec{H}^{(1)})^{-1} \vec{H}^{(1)} P^0 \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \{1, 1\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \{1, 1\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^1 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \{1,1\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^1 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\varepsilon+2} \right) \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^1 &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon+2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Находим первую уточненную оценку коэффициентов:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^1 &= \tilde{\theta}^0 + P^1 \omega^{(1)} \vec{f}^{(1)} \left(y^{(1)} - \left(\vec{f}^{(1)}, \tilde{\theta}^0 \right) \right) = \vec{0} + P^1 \vec{f}^{(1)} \left(y^{(1)} \right) \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^1 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \cdot 2 \approx \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Чтобы найти вторую оценку коэффициентов находим матрицу P^2 :

$$\begin{aligned} P^2 &= P^1 - P^1 \vec{H}^{(2)} \otimes \left(1 + \vec{H}^{(2)} P^1 \vec{H}^{(2)} \right)^{-1} \vec{H}^{(2)} P^1 \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \\ &\otimes \left(1 + \{1,1\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \{1,1\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+2} \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ -\frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon+2} \\ \frac{1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+4} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon+2} \\ \frac{1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} & -\frac{1}{\varepsilon+2} \\ \frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\varepsilon+4} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{1}{\varepsilon+2} \\ \frac{1}{\varepsilon+2} & \frac{1}{\varepsilon+2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+2} \left(\begin{pmatrix} \varepsilon+1 & -1 \\ -1 & \varepsilon+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\varepsilon+4} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon+4} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+4} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon+4} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+2} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon^2+4\varepsilon+4 & -4-2\varepsilon \\ -4-2\varepsilon & \varepsilon^2+4\varepsilon+4 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Теперь находим вторую оценку коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + P^2 \omega^{(2)} \tilde{f}^{(2)} \left(y^{(2)} - \left(\tilde{f}^{(2)}, \tilde{\theta}^1 \right) \right) \Rightarrow \\
\tilde{\theta}^2 &= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1.5 - 2.0) = \\
&= \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.875 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для следующего шага уточнения оценки параметров находим матрицу P^3 :

$$\begin{aligned}
P^3 &= P^2 - P^2 \vec{H}^{(3)} \otimes \left(1 + \vec{H}^{(3)} P^2 \vec{H}^{(3)} \right)^{-1} \vec{H}^{(3)} P^2 \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^3 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \\
&\otimes \left(1 + \{-1, 4\} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \{-1, 4\} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^3 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} -\varepsilon-10 \\ 4\varepsilon+10 \end{pmatrix} \otimes \\
&\otimes \left(1 + \{-1, 4\} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} -\varepsilon-10 \\ 4\varepsilon+10 \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} -\varepsilon-10 \\ 4\varepsilon+10 \end{pmatrix} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} -\varepsilon-10 \\ 4\varepsilon+10 \end{pmatrix} \otimes \\
& \otimes \left(1 + \frac{117\varepsilon+50}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \begin{pmatrix} -\varepsilon-10 \\ 4\varepsilon+10 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
& \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \left[\begin{pmatrix} \varepsilon+2 & -2 \\ -2 & \varepsilon+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{(\varepsilon+10)^2}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} & -\frac{(\varepsilon+10)(4\varepsilon+10)}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} \\ -\frac{(\varepsilon+10)(4\varepsilon+10)}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} & \frac{(4\varepsilon+10)^2}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \\
& \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon+4} \left[\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon(\varepsilon^2+22\varepsilon+72)}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} & \frac{\varepsilon(2\varepsilon+8)}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} \\ \frac{\varepsilon(2\varepsilon+8)}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} & \frac{\varepsilon(\varepsilon^2+7\varepsilon+12)}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \\
& \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^3 = \frac{1}{\varepsilon+4} \left[\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2+22\varepsilon+72}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} & \frac{2\varepsilon+8}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} \\ \frac{2\varepsilon+8}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} & \frac{\varepsilon^2+7\varepsilon+12}{\varepsilon^2+21\varepsilon+50} \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Устремляя к нулю в этом выражении параметр $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем матрицу P^3 , в точности совпадающую с той, что мы получили методом максимального правдоподобия для случая трех измерений в этом примере:

$$P^3 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим третью оценку коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^3 &= \tilde{\theta}^2 + P^3 \omega^{(3)} \vec{f}^{(3)} \left(y^{(3)} - \left(\vec{f}^{(3)}, \tilde{\theta}^2 \right) \right) \Rightarrow \\
\tilde{\theta}^3 &= \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.875 \end{pmatrix} + \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} (2.5 - 2.625) = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.875 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 \\ 0.85 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Как видим, третья итерация дает оценку параметров, которая совпадает с оценкой, полученной методом максимального правдоподобия.

.....

Этот пример показывает, в частности, что метод последовательной идентификации по точности не уступает методу максимального правдоподобия. При этом выбор параметра ε заметно влияет на результат только на первых шагах итерационного процесса оценки параметров, а с ростом количества итераций его влияние быстро убывает.

Следует отметить, что определенные трудности идентификации систем с нелинейными базисными функциями связаны с плохой обусловленностью информационных матриц. Кроме того, количество базисных функций зачастую больше количества входов, поэтому возрастает размерность информационной матрицы по сравнению со случаем линейных базисных функций.

1.8 Линеаризация моделей, нелинейных относительно оцениваемых параметров

Нередко задача идентификации сводится к определению параметров (коэффициентов) априорно заданной нелинейной модели процесса, предложенной на основании теоретических соображений. До сих пор мы рассматривали задачи идентификации моделей, *линейных относительно неизвестных параметров (коэффициентов)*, но с произвольными *базисными функциями*. В этой связи целесообразно уточнить, что под *нелинейной моделью* здесь будем подразумевать математическую модель, в которой выходной сигнал *нелинейным образом зависит от параметров*. В таких случаях для идентификации параметров может оказаться полезной линеаризация модели путем разложения описывающей процесс функции в ряд Тейлора. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие применение этого подхода в окрестности известного состояния.



Пример

Пусть на основе теоретических соображений предложена нелинейная относительно оцениваемых параметров модель процесса:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 \exp(a_2 u). \quad (1.98)$$

По результатам измерений входного $u^{(i)}$, ($i=1, \dots, N$) и выходного сигналов $\tilde{y}^{(i)}$ в серии опытов запишем исходную систему уравнений для оценки параметров этой модели:

$$\tilde{y}^{(i)} = a_0 + a_1 \exp(a_2 u^{(i)}). \quad (1.99)$$

Модель нелинейная относительно неизвестных параметров a_0, a_1, a_2 , поэтому для их оценки рассмотренными ранее методами требуется линеаризация модели. Предположим, что приращения Δu переменной u в окрестности некоторого исходного состояния $u^{(i)}$ малы. Выбирая значения контролируемых переменных на этапе планирования эксперимента, можно добиться малости этих

приращений, однако надо помнить, что линеаризация сужает диапазон применимости результатов идентификации.

Линеаризуя уравнения (1.99) путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точек $u^{(i)}$, приходим к системе:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{y}^{(i)} &= a_1 a_2 \exp(a_2 u^{(i)}) \Delta u^{(i)}, \\ \Delta \tilde{y}^{(i)} &= \tilde{y}^{(i+1)} - \tilde{y}^{(i)}, \Delta u^{(i)} = u^{(i+1)} - u^{(i)}, (i=1, \dots, N-1).\end{aligned}\quad (1.100)$$

Логарифмируя это выражение, приходим к уравнению:

$$\ln \left(\frac{\Delta y^{(i)}}{\Delta u^{(i)}} \right) = \ln(a_1 a_2) + a_2 u^{(i)}.\quad (1.101)$$

Введем следующие обозначения:

$$\ln \left(\frac{\Delta y^{(i)}}{\Delta u^{(i)}} \right) = y^{(i)}, \theta_1 = \ln(a_1 a_2), \theta_2 = a_2, f_1(u^{(i)}) = 1, f_{21}(u^{(i)}) = u^{(i)}.\quad (1.102)$$

В результате приходим к следующей системе линейных относительно неизвестных параметров θ_1, θ_2 уравнений:

$$\theta_1 f_1(u^{(i)}) + \theta_2 f_{21}(u^{(i)}) = y^{(i)}, (i=1, \dots, N-1).\quad (1.103)$$

Теперь параметры θ_1, θ_2 модели (1.103) могут быть найдены методом максимального правдоподобия или методом последовательной идентификации. После этого не составит труда найти коэффициенты a_1, a_2 :

$$\tilde{a}_2 = \tilde{\theta}_2, \tilde{a}_1 = \exp(\tilde{\theta}_1) / \tilde{\theta}_2.\quad (1.104)$$

После этого из уравнений (1.99) легко находится оценка коэффициента \tilde{a}_0 .



Контрольные вопросы по главе 1

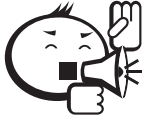
1. Сформулируйте основную гипотезу теории измерений.
2. Что называется вектором результатов измерений?
3. Дайте определение матрицы плана эксперимента.
4. Дайте определение расширенной матрицы плана эксперимента.
5. Какая система уравнений называется исходной системой для оценки параметров?

6. Что называется наилучшей линейной несмещенной оценкой?
7. Разъясните основные положения метода максимального правдоподобия.
8. Сформулируйте теорему Гаусса – Маркова и ее обобщения.
9. Запишите выражение информационной матрицы для модели, линейной относительно неизвестных коэффициентов (случай с равными дисперсиями), а также формулу несмещенной оценки для дисперсии.
10. Дайте определение дискретного плана эксперимента.
11. Какой план эксперимента называется Φ -оптимальным?
12. Какой план эксперимента называется D -оптимальным?
13. Какой план эксперимента называется A -оптимальным?
14. Как вводятся кодированные переменные?
15. Каков интервал изменения кодированных переменных?
16. Запишите уравнение модели полнофакторного эксперимента типа 2^3 .
17. Дайте определение ортогонального плана эксперимента.
18. Запишите матрицу плана полнофакторного эксперимента типа 2^3 .
19. Запишите информационную матрицу для полнофакторного эксперимента типа 2^3 .
20. Получите формулы для расчета коэффициентов модели полнофакторного эксперимента типа 2^3 , исходя из общих формул расчета коэффициентов линейной модели на основе метода максимального правдоподобия.
21. Докажите, что план полнофакторного эксперимента типа 2^3 является ортогональным.
22. Укажите интервал изменения коэффициента множественной корреляции.
23. Докажите, что информационная матрица симметрична относительно главной диагонали.
24. Сравните достоинства и недостатки метода максимального правдоподобия и метода последовательной идентификации.
25. Как выбирается матрица P^0 для начала процедуры последовательной идентификации?
26. Назовите основные факторы, которые определяют свойства информационной матрицы.
27. Как связаны между собой количество неизвестных параметров модели и количество опытных точек, необходимых для их определения?

28. С какой целью в методе последовательной идентификации используются весовые коэффициенты?
29. Запишите формулу разложения в ряд Тейлора функции одной переменной.
30. Запишите формулу разложения в ряд Тейлора функции многих переменных.
31. Как осуществляется линейризация при идентификации систем, нелинейных относительно неизвестных параметров?
32. Приведите пример линейризации системы, нелинейной относительно неизвестных параметров.
33. Опишите процесс последовательной идентификации системы с одним входом и одним выходом.
34. Опишите процесс последовательной идентификации многомерной системы с одним выходом и несколькими входами.

2 Идентификация линейных многомерных динамических систем

2.1 Общие сведения



При обсуждении методов идентификации динамических систем будем исходить из того, что динамическая система может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и алгебраическим уравнением выходов, которые имеют вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \quad (2.1)$$

$$\vec{y} = C\vec{x}(t), \quad (2.2)$$

где $\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ – n -мерный вектор переменных состояния; $\dot{\vec{x}}(t) = \left\{ \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right\}$; $\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)\}$ – l -мерный вектор входных сигналов; $\vec{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)\}$ – k -мерный вектор выходных сигналов; $t \in [t_0 : T]$ – независимая переменная (время) на заданном интервале моделирования; A, B, C – матрицы коэффициентов размерности $n \times n, n \times l, k \times n$ соответственно.

Под многомерной системой здесь подразумевается система, у которой суммарное количество входов и выходов больше двух. Под стационарной системой подразумевается система, параметры (матрицы коэффициентов A, B, C) которой не изменяются, по крайней мере в течение времени, необходимого для идентификации. Как известно, обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка можно преобразовать в систему из n дифференциальных уравнений первого порядка. Таким образом, существуют два эквивалентных способа описания систем: с помощью одного дифференциального уравнения n -го порядка или системы из n дифференциальных уравнений первого порядка.

Вектор $\vec{x}(t_0)$, т. е. вектор, определяющий состояние системы в момент времени t_0 , определяет начальные условия для системы (2.1).



Уравнение (2.1) в той или иной степени отражает физические законы, которым подчиняется поведение изучаемого объекта, и называется *уравнением состояния или законом функционирования* системы. Производные по времени в этих уравнениях определяют динамические свойства систем.

Алгебраическое уравнение (2.2) называется уравнением выходов. При этом предполагается, что выходной сигнал системы полностью определяется её состоянием в данный момент времени.

При решении задач идентификации динамических систем важно иметь ответы на вопросы об устойчивости, управляемости и наблюдаемости изучаемой системы или по крайней мере уметь оценивать эти свойства системы после решения задачи идентификации.

Поскольку уравнения (2.1), (2.2) в той или иной степени отражают законы природы, управляющие поведением системы, то при возможных формальных преобразованиях этих уравнений должны сохраняться их фундаментальные свойства. К таким преобразованиям относятся линейные преобразования [2] уравнений вида (2.1), (2.2).

2.1.1 Линейные преобразования

В качестве вектора, который характеризует состояние системы (вектора переменных состояния), можно рассматривать любой вектор, образованный различными комбинациями из n «исходных» переменных состояния. Для этого можно использовать линейное преобразование уравнения (2.1), когда «новый» вектор состояния $\vec{x}^*(t)$ является линейной комбинацией из n компонент вектора $\vec{x}(t)$:

$$\vec{x}^*(t) = \Psi^{-1}\vec{x}(t) \Leftrightarrow \vec{x}(t) = \Psi\vec{x}^*(t), \quad (2.3)$$

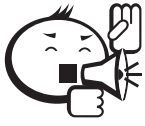
где Ψ, Ψ^{-1} взаимнообратные – матрицы преобразования, а $\vec{x}^*(t)$ – преобразованный вектор состояния.

Преобразование (2.3) приводит к тому, что исходное уравнение состояния (2.1) сводится к новому уравнению состояния:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^*(t) &= A^*\vec{x}^*(t) + B^*\vec{u}(t), \\ \vec{y} &= C^*\vec{x}^*(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$A^* = \psi^{-1}A\psi, B^* = \psi^{-1}B, C^* = C\psi. \quad (2.5)$$



.....

Понятно, что эти преобразования возможны только в том случае, когда существует обратная матрица ψ^{-1} . Поэтому в качестве матрицы линейного преобразования ψ можно выбирать любую квадратную матрицу соответствующей размерности $n \times n$, но с одним ограничением: для матрицы ψ должна быть определена (существовать) обратная матрица. Естественен вопрос о том, имеется ли среди множества матриц, пригодных для линейных преобразований системы (2.1), некая предпочтительная? Такая матрица существует. В качестве такой матрицы принято выбирать матрицу, составленную из собственных векторов матрицы A . Преимущества такого выбора мы рассмотрим далее.

.....

Собственные числа матрицы A в исходном уравнении (2.1) совпадают с собственными значениями матрицы A^* в уравнении (2.4). Важно помнить, что собственные числа в конечном счете определяют вид зависимости решения уравнений (2.1) от времени, поэтому совпадение собственных чисел этих матриц гарантирует, что при формальных преобразованиях не происходит подмены изучаемого объекта.

Действительно, пусть λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – собственное число матрицы A , т. е. для исходной системы (2.1) являются корнями характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (2.6)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение, решение которого должно дать собственные числа λ_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) для преобразованной системы (2.4):

$$\det(A^* - \lambda^* E) = 0. \quad (2.7)$$

Используя выражение (2.5) для матрицы $A^* = \psi^{-1}A\psi$, очевидное равенство $\psi^{-1}\psi = E$ (где E – единичная матрица), а также то, что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, уравнение (2.7) приводим к виду:

$$\begin{aligned} \det(\psi^{-1}A\psi - \lambda^*E) &= \det(\psi^{-1}A\psi - \lambda^*\psi^{-1}E\psi) = \\ &= \det(\psi^{-1})\det(A - \lambda^*E)\det(\psi) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как $\det(\psi^{-1}) \neq 0$, $\det(\psi) \neq 0$ в силу ограничений по выбору матрицы линейного преобразования ψ , собственные числа матрицы $A^* = \psi^{-1}A\psi$ являются корнями уравнения:

$$\det(A - \lambda^*E) = 0. \quad (2.9)$$

Следовательно, собственные числа матриц A и A^* совпадают:

$$\lambda_i^* = \lambda_i. \quad (2.10)$$



Пример

Рассмотрим систему:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, решая уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda_i = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = (5 \pm 1)/2 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.$$

Преобразуем исходную систему с помощью матрицы $\psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Обрат-

ная матрица имеет вид $\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда преобразованная система имеет вид:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = A^*\vec{x}^*(t), \quad A^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A^* :

$$\det(A^* - \lambda^*E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda^* & 0 \\ 2 & 2 - \lambda^* \end{vmatrix} = (3 - \lambda^*)(2 - \lambda^*) = \lambda^{*2} - 5\lambda^* + 6 = 0,$$

$$\lambda_i^* = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = (5 \pm 1)/2 \Rightarrow \lambda_1^* = 3, \lambda_2^* = 2.$$

Итак, собственные значения матриц A^* , A совпадают.

.....

2.1.2 Каноническое преобразование – процедура диагонализации

Как уже отмечалось, среди различных линейных преобразований уравнения (2.1) особую роль играет каноническое преобразование, когда в качестве матрицы преобразования применяется матрица собственных векторов V . Эту матрицу можно найти следующим образом. Рассмотрим систему уравнений (2.1) и соответствующую ей систему однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \\ \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Как известно, общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= V_{11}e^{\lambda_1 t} + V_{12}e^{\lambda_2 t} + \dots + V_{1n}e^{\lambda_n t}, \\ x_2(t) &= V_{21}e^{\lambda_1 t} + V_{22}e^{\lambda_2 t} + \dots + V_{2n}e^{\lambda_n t}, \\ &\dots, \\ x_n(t) &= V_{n1}e^{\lambda_1 t} + V_{n2}e^{\lambda_2 t} + \dots + V_{nn}e^{\lambda_n t}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – корни характеристического уравнения вида (2.6).

Это решение можно записать и в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{V}^1 e^{\lambda_1 t} + \vec{V}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \vec{V}^n e^{\lambda_n t} = V \{ e^{\lambda t} \}, \\ V &= \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^1 & \dots & V_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^1 & \dots & V_n^n \end{pmatrix} = \\ &= \{ \vec{V}^1, \vec{V}^2, \dots, \vec{V}^n \}, \{ e^{\lambda t} \} = \{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Столбцами матрицы V здесь являются собственные векторы $\vec{V}^1, \vec{V}^2, \dots, \vec{V}^n$ (верхний индекс – номер вектора, нижний индекс – номер компоненты вектора) матрицы A , которые должны удовлетворять уравнению:

$$(A - \lambda_i E) \vec{V}^i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.14)$$

Так как собственные числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы A удовлетворяют уравнению (2.6), т. е. определитель матрицы коэффициентов в уравнении (2.14) равен нулю, то существует нетривиальное решение этого уравнения. Отсюда

следует, что можно определить каждый из собственных векторов с точностью до некоторой произвольной постоянной. Обычно при решении уравнения (2.14) для каждого собственного вектора полагают, что первая или последняя его компонента равна единице, а остальные компоненты находят из оставшихся $(n-1)$ уравнений.

Рассмотрим, к каким последствиям приводит применение в качестве матрицы линейного преобразования матрицы V , столбцами которой являются собственные векторы $\vec{V}^1, \vec{V}^2, \dots, \vec{V}^n$ матрицы A . Если собственные векторы \vec{V}^i матрицы A найдены, то из (2.14) следуют равенства:

$$\vec{V}^i \lambda_i = A \vec{V}^i, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.15)$$

Из этих соотношений, в свою очередь, следует, что матрица канонического преобразования V и матрица A в системе (2.11) связаны соотношением

$$V\Lambda = AV, \quad (2.16)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (2.17)$$

Умножая равенство (2.16) слева на обратную матрицу V^{-1} . Получаем:

$$V^{-1}V\Lambda = V^{-1}AV \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV. \quad (2.18)$$

Итак, умножение матрицы A на матрицу канонического преобразования и обратную к ней матрицу приводит к диагонализации матрицы коэффициентов преобразованной системы при условии, что все собственные значения матрицы A различны.

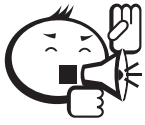
Обобщая полученный результат, используем матрицу V в качестве матрицы линейного преобразования системы уравнений (2.1), (2.2). С учетом формулы (2.18), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^* &= \Lambda \vec{x}^* + B^* \vec{u}, \\ \vec{y} &= C^* \vec{x}^*(t), \\ \Lambda &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = V^{-1}AV, \quad B^* = V^{-1}B, \quad C^* = CV. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В скалярной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = \lambda_1 x_1^* + B_{11}^* u_1 + B_{12}^* u_2 + \dots + B_{1l}^* u_l, \\ \dot{x}_2^* = \lambda_2 x_2^* + B_{21}^* u_1 + B_{22}^* u_2 + \dots + B_{2l}^* u_l, \\ \dots, \\ \dot{x}_n^* = \lambda_n x_n^* + B_{n1}^* u_1 + B_{n2}^* u_2 + \dots + B_{nl}^* u_l, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} y_1 = C_{11}^* x_1^* + \dots + C_{1n}^* x_n^*, \\ y_2 = C_{21}^* x_1^* + \dots + C_{2n}^* x_n^*, \\ \dots, \\ y_k = C_{k1}^* x_1^* + \dots + C_{kn}^* x_n^*. \end{cases}$$



.....

Таким образом, каноническое преобразование линейной системы приводит к системе уравнений состояния, в которой каждая производная по времени от канонической переменной зависит только от соответствующей канонической переменной состояния и входных сигналов.

.....

Диагонализация системы позволяет также относительно легко найти ответы на вопросы об устойчивости, управляемости и наблюдаемости изучаемой системы. Вместе с тем, для диагонализации линейной системы вида (2.11) необходимо найти собственные числа и собственные векторы матрицы коэффициентов A .

2.1.3 Определение собственных векторов

Как уже отмечалось, для определения собственных векторов матрицы A в системе линейных уравнений вида (2.11) необходимо вначале найти собственные числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) из уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (2.21)$$

и затем, решая уравнения:

$$(A - \lambda_i E) \vec{V}^i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.22)$$

найти собственные векторы \vec{V}^i .

Если все собственные числа различны, то можно применить алгоритм прямого определения собственных векторов. Каждый из собственных векторов можно найти с точностью до некоторой произвольной постоянной. Обычно при непосредственном решении уравнения (2.22) для каждого собственного вектора

полагают, что первая или последняя его компонента равна единице, а остальные компоненты находят из оставшихся $(n-1)$ уравнений.



Пример

Пусть матрица A многомерной системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Для определения собственных векторов сначала вычислим собственные значения матрицы A :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

Далее используем уравнение (2.22) для первого собственного вектора и собственного числа $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E) \vec{V}^1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0V_1^1 - 2V_2^1 = 0, \\ 0V_1^1 + 1V_2^1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что надо полагать $V_2^1 = 0$, а V_1^1 можно выбрать произвольно, например, положить $V_1^1 = 1$. Тогда получим:

$$\vec{V}^1 = \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Точно так же найдем второй собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 3$:

$$(A - \lambda_2 E) \vec{V}^2 = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1V_1^2 - 2V_2^2 = 0, \\ 0V_1^2 + 0V_2^2 = 0. \end{cases}$$

Выбираем произвольно одну из компонент, например, полагаем $V_2^2 = -1/2$, находим второй собственный вектор:

$$\vec{V}^2 = \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Сформируем матрицу собственных векторов, которая и является матрицей канонического преобразования исходной линейной системы управления:

$$V = (\vec{V}^1, \vec{V}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

.....

Более универсальный алгоритм определения собственных векторов дает метод Крылова. Этот метод применим в случае как различных, так и одинаковых собственных чисел. Рассмотрим этот метод.

Первый шаг метода также заключается в определении собственных значений матрицы A .

Второй шаг. Определяем коэффициенты c_i полинома:

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - c_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - c_0). \quad (2.23)$$

Третий шаг. Определяем произвольно вспомогательный n -мерный вектор \vec{d}^1 , например так, что

$$\vec{d}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Четвертый шаг. Определяем еще $(n-1)$ векторов \vec{d}^i по формулам:

$$\vec{d}^2 = A\vec{d}^1, \vec{d}^3 = A\vec{d}^2, \dots, \vec{d}^n = A\vec{d}^{n-1}. \quad (2.25)$$

Пятый шаг. Определяем элементы собственного вектора \vec{v}^i следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{v}^i &= \sum_{k=1}^n p_{ik} \vec{d}^{n-k+1}, \\ p_{i1} &= 1, \\ p_{i,j} &= \lambda_i p_{i,j-1} - c_{n-j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, n; \\ \lambda_i p_{in} - c_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Последнее равенство здесь используется как способ проверки вычислений.

Если матрица A имеет вид (коагулированная матрица):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 0 & E & & \\ 0 & & & \\ \hline \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_n \end{array} \right), \quad (2.27)$$

то очень быстрый алгоритм вычисления собственных векторов и матрицы канонического преобразования строится с помощью матрицы Вандермонда:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Нетрудно заметить, что обратная матрица V^{-1} существует только тогда, когда все собственные числа различны.



Пример

Рассмотрим применение метода Крылова на предыдущем примере. Пусть матрица A многомерной системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Находим собственные значения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

Определяем коэффициенты c_i :

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (-1)^2 (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (-1)^2 (\lambda^2 - c_1\lambda - c_0) \Rightarrow c_0 = -6, c_1 = 5.$$

Определяем вспомогательный вектор \vec{d}^1 размерности $n = 2$:

$$\vec{d}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определяем вектор \vec{d}^2 :

$$\vec{d}^2 = A\vec{d}^1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим коэффициенты $p_{i,j}$:

$$p_{11} = 1, p_{12} = 2p_{11} - c_1 = 2 - 5 = -3,$$

$$p_{21} = 1, p_{22} = 3p_{21} - c_1 = 3 - 5 = -2.$$

Находим собственные векторы:

$$\vec{V}^1 = p_{11}\vec{d}^2 + p_{12}\vec{d}^1 = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{V}^2 = p_{21}\vec{d}^2 + p_{22}\vec{d}^1 = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если нормализовать эти векторы так, чтобы первые компоненты равнялись единице (а это можно делать, так как собственные векторы в любом случае определяются с точностью до произвольной постоянной), то получим тот же результат, который мы уже получили в предыдущем примере:

$$\vec{V}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{V}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$



Пример

Рассмотрим пример диагонализации следующей системы:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В предыдущих примерах мы уже получили для такой матрицы A собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, собственные векторы и матрицу для выполнения канонического преобразования:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь обратную матрицу V^{-1} :

$$V^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим диагональную матрицу Λ :

$$\Lambda = V^{-1}AV = -2 \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что диагональная матрица действительно представляет собой матрицу, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы A :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу B^* :

$$B^* = V^{-1}B = -2 \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В результате приходим к диагонализированному уравнению системы:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \Lambda \vec{x}^*(t) + B^* \vec{u}(t),$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Управляемость и наблюдаемость

Понятия наблюдаемости и управляемости – двойственные понятия, которые были впервые введены Калманом в 1960 г. Оценка этих свойств системы очень важна при решении задач идентификации.

2.2.1 Управляемость



.....

*Система является **управляемой**, если из любого состояния $\vec{x}(t_0)$ она может быть переведена в любое другое желаемое состояние $\vec{x}(t_1)$ за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в результате приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\vec{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$.*

.....

Известные критерии управляемости и наблюдаемости систем основаны на анализе канонических уравнений состояния (критерий Гильберта) и на полиномиальном разложении матричной экспоненты e^{At} .

Для оценки управляемости на основании критерия Гильберта линейная система должна быть предварительно приведена к канонической форме. Как уже отмечалось, такая форма записи уравнений модели удобна тем, что взаимное влияние канонических переменных состояния в ней отсутствует: однородная система уравнений после диагонализации такова, что каждое уравнение может быть решено независимо от других.

Критерий управляемости Гильберта [2] формулируется следующим образом. Система, заданная каноническими уравнениями:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \Lambda \vec{x}^*(t) + B^* \vec{u}(t) - \tag{2.29}$$

управляема, если ни одна из строк матрицы B^* не является нулевой. Для управляемости в каждой строке системы (2.29) должен быть хотя бы один не равный нулю элемент. Если матрица B^* содержит хотя бы одну нулевую строку, то си-

стема неуправляема, т. к. в этом случае никакое управление не способно повлиять на соответствующую каноническую переменную.



Пример

Рассмотрим систему:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A равны:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

Собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 2 \\ 4 & 3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 2 \\ 4 & 3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица канонического преобразования $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица V^{-1} :

$$V^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица Λ :

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Находим B^* :

$$B^* = V^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Итак, после диагонализации систему уравнений имеет вид:

$$\dot{x}_1^*(t) = -x_1^*(t) + \frac{4}{3}u(t),$$

$$\dot{x}_2^*(t) = 5x_2^*(t) + \frac{5}{3}u(t).$$

Анализируя эти уравнения, приходим к выводу, что управление влияет на обе канонические переменные, следовательно, система управляема.

Оценка управляемости на основе приведения системы уравнений к канонической форме эффективна только в том случае, когда матрица A , исходная системы вида (2.11), имеет n различных собственных значений. Это ограничение можно отчасти снять, используя каноническое преобразование Жордана.

Приведение системы вида (2.11) к канонической форме (диагонализацию) нельзя осуществить в том случае, когда имеются кратные собственные значения матрицы A , т. е. не все её собственные значения различны [3]. В этом случае матрица A может быть преобразована к канонической жордановой форме, которая, например, в случае первого собственного значения кратности 3, имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 = \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 = \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_5 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Здесь верхняя диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ называется блоком

Жордана.

Матрица A неприводима к жордановой форме, если минимальный многочлен матрицы и характеристическое уравнение совпадают. Под минимальным многочленом подразумевается уравнение минимального порядка из уравнений вида:

$$A^q + \alpha_{q-1}A^{q-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0E = 0, \quad (2.31)$$

а характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0, \quad (2.32)$$

корни этого уравнения – собственные значения матрицы A .

Матрица J может содержать на главной диагонали столько блоков Жордана, сколько имеется кратных корней.

Для того чтобы система была управляемой, необходимо, чтобы хотя бы один элемент матрицы B в строке, которая соответствует нижней строке каждого блока Жордана, и хотя бы один элемент матрицы B в каждой другой строке был отличен от нуля.

Основной недостаток критериев управляемости, основанных на каноническом преобразовании системы, заключается в том, что требуется вычисление собственных значений и собственных векторов. Следствием этого является то, что с ростом размерности системы очень быстро нарастает объем вычислений для проверки управляемости.

Для оценки управляемости часто используется критерий, предложенный Калманом. К преимуществам этого критерия следует отнести то, что отпадает необходимость канонизации системы и определения собственных векторов, а также то, что критерий применим к системам с кратными собственными значениями матрицы A .

Для проверки управляемости Калман предложил использовать решение уравнения системы вида (2.11), которое дает следующее выражение вектора состояний в некоторый момент времени $t^{(1)}$:

$$\vec{x}(t^{(1)}) = e^{A(t^{(1)}-t^{(0)})}\vec{x}(t^{(0)}) + \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} e^{A(t^{(1)}-\tau)} B\vec{u}(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Изменив пределы интегрирования, на основании (2.33) можно записать выражение:

$$\vec{x}(t^{(0)}) = e^{A(t^{(0)}-t^{(1)})}\vec{x}(t^{(1)}) + \int_{t^{(1)}}^{t^{(0)}} e^{A(t^{(0)}-\tau)} B\vec{u}(\tau) d\tau. \quad (2.34)$$

Всегда можно или положить $\vec{x}(t^{(1)}) = 0$ и рассмотреть первое, или же рассматривать второе из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t^{(0)}) &= \int_{t^{(1)}}^{t^{(0)}} e^{A(t^{(0)}-\tau)} B\vec{u}(\tau) d\tau \text{ или } \vec{x}(t^{(0)}) - \\ &- e^{A(t^{(0)}-t^{(1)})}\vec{x}(t^{(1)}) = \int_{t^{(1)}}^{t^{(0)}} e^{A(t^{(0)}-\tau)} B\vec{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.35)$$

В соответствии с теоремой Кэли – Гамильтона любая квадратная матрица A размерности $n \times n$ удовлетворяет своему многочленному уравнению порядка n :

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i. \quad (2.36)$$

Поэтому любое многочленное матричное уравнение порядка $(n+r) > n$ можно представить в виде многочленного матричного уравнения порядка $(n+r-1) > n-1$, то есть на единицу меньшего порядка:

$$A^{n+r} = A^r A^n = A^r \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i = P_{n+r-1}(A). \quad (2.37)$$

Теперь заметим, что по определению матричной экспоненты имеет место формула:

$$e^{At} = E + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (2.38)$$

На основании теоремы Сильвестра этот результат справедлив и для бесконечных степенных рядов матрицы A . Поэтому матричную экспоненту можно представить в виде:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i. \quad (2.39)$$

Скалярные коэффициенты $\gamma_i(t)$ – конечные величины для любого конечного значения времени t и любой матрицы A .

Используя такое представление для матричной экспоненты в уравнениях (2.35), получим:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t^{(0)}) &= \int_{t^{(1)}}^{t^{(0)}} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t^{(0)} - \tau) A^i B \vec{u}(\tau) d\tau \text{ или} \\ \vec{x}(t^{(0)}) - e^{A(t^{(0)} - t^{(1)})} \vec{x}(t^{(1)}) &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_{t^{(1)}}^{t^{(0)}} \gamma_i(t^{(0)} - \tau) \vec{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Выражение (2.40) запишем в виде:

$$\vec{x}(t^{(0)}) = MW, \quad (2.41)$$

где M – «матрица» размерности $n \times (n \times l)$, \vec{w}_i – вектор размерности l , W – «вектор» размерности $(n \times l)$:

$$\begin{aligned} M &= [B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B]; \\ \vec{w}_i &= \int_{t^{(1)}}^{t^{(0)}} \gamma_i(t^{(0)} - \tau) \vec{u}(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \end{aligned}$$

$$W = \begin{bmatrix} \vec{w}_0 \\ \vec{w}_1 \\ \dots \\ \vec{w}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Анализ выражения (2.41) приводит к следующей формулировке критерия управляемости системы вида (2.11) на основе разложения матричной экспоненты: *линейная система управляема, если ранг матрицы M в уравнении (2.41) равен n .*

Если система управления имеет только один вход, то матрица B в (2.11) представляет собой вектор-столбец. В этом случае только что сформулированный критерий означает, что для управляемости должна существовать матрица M^{-1} , обратная к матрице M в выражении (2.41).



Пример

Оценим управляемость уже рассмотренной ранее системы на основе разложения матричной экспоненты. Пусть система $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ задана матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу M :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \end{pmatrix}, M = [B, AB] = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}, \det M \neq 0.$$

Ранг матрицы M равен $n = 2$, следовательно, система управляема.

Управляемость по выходу. Рассмотренные критерии относятся к критериям управляемости по состоянию. В теории управления выделяют также критерии управляемости системы по выходу. Для линейных систем уравнение выходов имеет вид:

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t),$$

где $\vec{y}(t)$ – k -мерный вектор выходных сигналов, C – матрица размерности $k \times n$, $k < n$.



.....

*Система является **управляемой по выходу**, если из любого состояния с выходом $\vec{y}(t^{(0)})$ она может быть переведена в любое другое желаемое состояние с выходом $\vec{y}(t^{(1)})$ за конечное время $\tau = t^{(1)} - t^{(0)}$ в результате приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\vec{u}(t)$, $t \in (t^{(0)}, t^{(1)})$.*

.....

Критерий управляемости по выходу аналогичен критерию управляемости по состоянию. Система управляема по выходу, если ранг матрицы

$$M^* = [CAB, CA^2B, \dots, CA^{n-1}B] \quad (2.42)$$

равен k , т. е. размерности вектора выходного сигнала $\vec{y}(t)$.

2.2.2 Наблюдаемость

Управляемость предполагает, что любая переменная состояния должна реагировать на входной управляющий сигнал. С другой стороны, наблюдаемость означает, что всякое изменение состояния системы будет сопровождаться изменением измеряемого на выходе сигнала.



.....

*Если все переменные состояния системы можно определить по вектору выходного сигнала, то эта **система наблюдаема**. Если же какая-то из переменных состояния не влияет на выходной сигнал, то это означает, что мы имеем дело с **ненаблюдаемой системой**.*

.....



.....

Ненаблюдаемая система не может быть полностью идентифицирована, так как невозможно определить параметры модели, соответствующие ненаблюдаемым состояниям.

.....

Критерии наблюдаемости систем также основаны на анализе канонических уравнений состояния (критерий Гильберта) и на полиномиальном разложении матричной экспоненты e^{At} .

Критерий наблюдаемости Гильберта может быть применен после приведения уравнений линейной системы управления к каноническому виду, т. е. после применения процедуры диагонализации. Подход аналогичен исследованию управляемости линейной системы.

Рассмотрим линейную систему, канонические уравнения которой имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}^*(t) &= \Lambda \bar{x}^*(t) + B^* \bar{u}(t), \quad \bar{y}(t) = C^* \bar{x}^*(t), \\ \Lambda &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = V^{-1} A V, \quad B^* = V^{-1} B, \quad C^* = C V,\end{aligned}\tag{2.43}$$

где V – матрица собственных векторов.

Критерий наблюдаемости Гильберта: система, заданная каноническими уравнениями, наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы C^* не является нулевым, т. е. на выходной сигнал влияют все компоненты вектора канонических переменных состояния $\bar{x}^*(t)$. Если матрица C^* содержит хотя бы один нулевой столбец, то система ненаблюдаема.



Пример

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A \vec{x}(t) + B \vec{u}(t), \quad \vec{y}(t) = C \vec{x}(t), \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (2, -1).\end{aligned}$$

Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, матрица преобразования $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Для проверки наблюдаемости находим матрицу C^* :

$$C^* = C V = (2, -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (3, 0).$$

Так как второй столбец матрицы C^* нулевой, то система ненаблюдаема.

Другой критерий наблюдаемости, критерий наблюдаемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At} , подобен критерию управляемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

Рассмотрим систему с уравнениями состояния и выходов обычного вида:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \vec{x}(t) + B \vec{u}(t), \quad \vec{y}(t) = C \vec{x}(t).\tag{2.44}$$

Будем считать, что вектор входных сигналов может быть измерен. Кроме того, если вектор управления равен нулю, то это не может повлиять на наблюдаемость системы. Поэтому в целях упрощения анализа положим $\vec{u}(t) = 0$. Используя представление решения уравнения состояния с помощью матричной экспоненты, можем на основании формулы (2.33) записать для выходного сигнала равенство:

$$\vec{y}(t) = C e^{A(t-t^{(0)})} \vec{x}(t^{(0)}). \quad (2.45)$$

Воспользуемся выражением (2.39) для матричной экспоненты в виде:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i.$$

С помощью этого равенства представим выходной сигнал в виде:

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t-t^{(0)}) C A^i \vec{x}(t^{(0)}). \quad (2.46)$$

Определим вектор (строку) $\vec{\Gamma} = \{\gamma_0(t-t^{(0)}), \gamma_1(t-t^{(0)}), \dots, \gamma_{n-1}(t-t^{(0)})\}$.

Кроме того, определим матрицу размера $n \times (k \times n)$:

$$L = (C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T).$$

С учетом этих обозначений уравнение выходов (2.46) можно представить в виде:

$$\vec{y}(t) = \vec{\Gamma} L^T \vec{x}(t^{(0)}). \quad (2.47)$$

Необходимо заметить, что вектор $\vec{\Gamma} = \{\gamma_0(t-t^{(0)}), \gamma_1(t-t^{(0)}), \dots, \gamma_{n-1}(t-t^{(0)})\}$ будет иметь различные значения в различные моменты времени t при одинаковом $t^{(0)}$. Отсюда следует, что для однозначного определения состояния системы в некоторый момент времени $t^{(0)}$ необходимо, чтобы матрица L имела ранг n .



Выводы

Итак, линейная система наблюдаема, если ранг матрицы L в уравнении (2.47) равен n .

2.3 Идентификация линейных стационарных динамических систем с применением конечно-разностной аппроксимации производных

2.3.1 Постановка задачи

Рассматривая примеры идентификации параметров стационарных систем методом максимального правдоподобия или методом последовательной регрессии, мы будем исходить из того, что моделируемый объект может быть описан системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В качестве независимой переменной рассматривается время t . Задача формулируется следующим образом: по результатам измерений входного (управляющего) сигнала $\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$ на интервале изменения независимой переменной (времени) $t \in [t^{(0)}, T]$ и компонент вектора переменных состояния $x_1(t), x_2(t)$ идентифицировать систему (найти параметры), которая в соответствии с принятой гипотезой описывается системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.



Примем, что уравнения, представляющие собой *математическое выражение априорно принятой гипотезы о внутреннем устройстве реальной системы*, имеют вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_{11}u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = A_{21}x_1(t) + \\ + A_{22}x_2(t) + B_{22}u_2(t), t \in [t^{(0)}, T]. \end{cases} \quad (2.48)$$

Эта запись является результатом предварительного этапа исследований, на котором экспериментатор в итоге наблюдений за реальной системой:

1. Оценил количество входов (два в нашем случае) и принял, что входное воздействие описывается измеряемой функцией $\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$.

2. Оценил количество измеряемых переменных состояния (две в этом примере), для которых принял обозначения $x_1(t)$, $x_2(t)$ соответственно.
 3. Принял предположение о том, что система стационарна, т. е. внутренние параметры (коэффициенты в системе уравнений) не изменяются по крайней мере в течение времени идентификации $T - t^{(0)}$.
 4. Принял допущение, что изучаемая система может быть описана системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.
-

2.3.2 Дискретная модель системы

Далее будем считать, при целенаправленной постановке опытов на следующем этапе идентификации выполнены измерения непосредственно компонент $x_1(t)$, $x_2(t)$ вектора переменных состояния и входного сигнала $\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$ в дискретном наборе равноотстоящих узлов на оси времени с постоянным шагом $\Delta t = (T - t^{(0)}) / (N - 1) = 0,1с$, причем шаг по времени Δt достаточно мал, что допускает переход от непрерывной модели (2.48) к её дискретному аналогу.



Пример

В качестве примера рассмотрим систему, для которой результаты измерений входного сигнала и вектора переменных состояния приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты измерений векторов входного сигнала и переменных состояния

| Номер шага | Время | $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $u_1(t)$ | $u_2(t)$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.0000E+00 | 0.1000E+01 | 0.0000E+00 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 |
| 2 | 0.1000E+00 | 0.1010E+01 | 0.1105E+00 | 0.1105E+01 | 0.1105E+01 |
| 3 | 0.2000E+00 | 0.1042E+01 | 0.2443E+00 | 0.1221E+01 | 0.1221E+01 |
| 4 | 0.3000E+00 | 0.1096E+01 | 0.4050E+00 | 0.1350E+01 | 0.1350E+01 |

| Номер шага | Время | $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $u_1(t)$ | $u_2(t)$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 5 | 0.4000E+00 | 0.1174E+01 | 0.5967E+00 | 0.1492E+01 | 0.1492E+01 |
| 6 | 0.5000E+00 | 0.1279E+01 | 0.8244E+00 | 0.1649E+01 | 0.1649E+01 |
| 7 | 0.6000E+00 | 0.1414E+01 | 0.1093E+01 | 0.1822E+01 | 0.1822E+01 |
| 8 | 0.7000E+00 | 0.1581E+01 | 0.1410E+01 | 0.2014E+01 | 0.2014E+01 |
| 9 | 0.8000E+00 | 0.1784E+01 | 0.1780E+01 | 0.2226E+01 | 0.2226E+01 |
| 10 | 0.9000E+00 | 0.2027E+01 | 0.2214E+01 | 0.2460E+01 | 0.2460E+01 |
| 11 | 0.1000E+01 | 0.2315E+01 | 0.2718E+01 | 0.2718E+01 | 0.2718E+01 |
| 12 | 0.1100E+01 | 0.2653E+01 | 0.3305E+01 | 0.3004E+01 | 0.3004E+01 |
| 13 | 0.1200E+01 | 0.3048E+01 | 0.3984E+01 | 0.3320E+01 | 0.3320E+01 |
| 14 | 0.1300E+01 | 0.3507E+01 | 0.4770E+01 | 0.3669E+01 | 0.3669E+01 |
| 15 | 0.1400E+01 | 0.4037E+01 | 0.5677E+01 | 0.4055E+01 | 0.4055E+01 |
| 16 | 0.1500E+01 | 0.4649E+01 | 0.6723E+01 | 0.4482E+01 | 0.4482E+01 |
| 17 | 0.1600E+01 | 0.5352E+01 | 0.7925E+01 | 0.4953E+01 | 0.4953E+01 |
| 18 | 0.1700E+01 | 0.6158E+01 | 0.9306E+01 | 0.5474E+01 | 0.5474E+01 |
| 19 | 0.1800E+01 | 0.7081E+01 | 0.1089E+02 | 0.6050E+01 | 0.6050E+01 |
| 20 | 0.1900E+01 | 0.8135E+01 | 0.1270E+02 | 0.6686E+01 | 0.6686E+01 |
| 21 | 0.2000E+01 | 0.9338E+01 | 0.1478E+02 | 0.7389E+01 | 0.7389E+01 |
| 22 | 0.2100E+01 | 0.1071E+02 | 0.1715E+02 | 0.8166E+01 | 0.8166E+01 |
| 23 | 0.2200E+01 | 0.1227E+02 | 0.1986E+02 | 0.9025E+01 | 0.9025E+01 |
| 24 | 0.2300E+01 | 0.1404E+02 | 0.2294E+02 | 0.9974E+01 | 0.9974E+01 |
| 25 | 0.2400E+01 | 0.1605E+02 | 0.2646E+02 | 0.1102E+02 | 0.1102E+02 |
| 26 | 0.2500E+01 | 0.1834E+02 | 0.3046E+02 | 0.1218E+02 | 0.1218E+02 |
| 27 | 0.2600E+01 | 0.2092E+02 | 0.3501E+02 | 0.1346E+02 | 0.1346E+02 |
| 28 | 0.2700E+01 | 0.2386E+02 | 0.4018E+02 | 0.1488E+02 | 0.1488E+02 |
| 29 | 0.2800E+01 | 0.2718E+02 | 0.4605E+02 | 0.1644E+02 | 0.1644E+02 |
| 30 | 0.2900E+01 | 0.3094E+02 | 0.5271E+02 | 0.1817E+02 | 0.1817E+02 |
| 31 | 0.3000E+01 | 0.3519E+02 | 0.6026E+02 | 0.2009E+02 | 0.2009E+02 |

С целью перехода от уравнений непрерывной модели к дискретной в системе уравнений (2.48) производные по времени заменяются их приближенными значениями, вычисляемыми по какой-либо формуле конечно-разностной аппроксимации [12, 15, 17]. Считая, что шаг по времени Δt достаточно мал, можно воспользоваться так называемой формулой правосторонних разностей:

$$\left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t^k} \approx \frac{\varphi(t^k + \Delta t) - \varphi(t^k)}{\Delta t} = \frac{\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}}{\Delta t}, \quad (2.49)$$

где под $\varphi^{(k)}$ подразумевается значение любой из функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, измеренной в момент времени $t^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$ – номер

момента времени). Для указания номера момента времени (он же – номер измерения) далее будем использовать верхний индекс, заключенный в скобки, а нижние индексы, как и ранее, будем использовать для указания номера компоненты вектора или элементов матриц.

Выполнив такой переход от непрерывной к дискретной модели системы, из уравнений (2.47) получим следующую систему *алгебраических* уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}}{\Delta t} = A_{11}x_1^{(k)} + A_{12}x_2^{(k)} + B_{11}u_1^{(k)}, \\ \frac{x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}}{\Delta t} = A_{21}x_1^{(k)} + A_{22}x_2^{(k)} + B_{22}u_2^{(k)}, \quad t^{(k)} \in [t^{(0)}, T]. \end{cases} \quad (2.50)$$

В этой системе уравнений выразим значения функций $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$ для момента времени $t^{(k+1)}$ через их значения в предыдущий момент времени $t^{(k)}$. В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1 + A_{11}\Delta t)x_1^{(k)} + (A_{12}\Delta t)x_2^{(k)} + (B_{11}\Delta t)u_1^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = (A_{21}\Delta t)x_1^{(k)} + (1 + A_{22}\Delta t)x_2^{(k)} + (B_{22}\Delta t)u_2^{(k)}, \quad t^{(k)} \in [t^{(0)}, T]. \end{cases} \quad (2.51)$$

Начиная с этого момента, будем считать, что величины $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$ слева от знака равенства в системе (2.51) – это известные (измеренные) значения компонент *вектора выходного сигнала*, величины $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ – известные (измеренные) значения компонент вектора входного сигнала, или, если использовать терминологию, принятую при описании метода максимального правдоподобия, значения *базисных функций*. Следуя этим представлениям, уравнения (2.51) запишем в виде двух уравнений, которые теперь можно рассматривать независимо:

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = \theta_{11}f_{11}^{(k)} + \theta_{12}f_{12}^{(k)} + \theta_{13}f_{13}^{(k)}, \\ y_1^{(k)} = x_1^{(k+1)}, \quad f_{11}^{(k)} = x_1^{(k)}, \quad f_{12}^{(k)} = x_2^{(k)}, \quad f_{13}^{(k)} = u_1^{(k)}, \\ \theta_{11} = 1 + A_{11}\Delta t, \quad \theta_{12} = A_{12}\Delta t, \quad \theta_{13} = B_{11}\Delta t, \\ A_{11} = (\theta_{11} - 1) / \Delta t, \quad A_{12} = \theta_{12} / \Delta t, \quad B_{11} = \theta_{13} / \Delta t. \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} y_2^{(k)} = \theta_{21}f_{21}^{(k)} + \theta_{22}f_{22}^{(k)} + \theta_{23}f_{23}^{(k)}, \\ y_2^{(k)} = x_2^{(k+1)}, \quad f_{21}^{(k)} = x_1^{(k)}, \quad f_{22}^{(k)} = x_2^{(k)}, \quad f_{23}^{(k)} = u_2^{(k)}, \\ \theta_{21} = A_{21}\Delta t, \quad \theta_{22} = 1 + A_{22}\Delta t, \quad \theta_{23} = B_{22}\Delta t, \\ A_{21} = \theta_{21} / \Delta t, \quad A_{22} = (\theta_{22} - 1) / \Delta t, \quad B_{22} = \theta_{23} / \Delta t. \end{cases} \quad (2.53)$$

В этих уравнениях введена система обозначений, которая довольно часто применяется в теории идентификации: введены **базисные функции** $f_{11}^{(k)} = f_{21}^{(k)} = x_1^{(k)}$, $f_{12}^{(k)} = f_{22}^{(k)} = x_2^{(k)}$, $f_{13}^{(k)} = u_1^{(k)}$, $f_{23}^{(k)} = u_2^{(k)}$ (подразумеваются значения каждой из четырех базисных функций, которые они принимает в опыте с номером (k)), неизвестные параметры модели θ_{11} , θ_{12} , θ_{13} и θ_{21} , θ_{22} , θ_{23} (здесь первый индекс соответствует номеру уравнения, а второй – номеру базисной функции), а также новые обозначения для компонент вектора выходного сигнала $y_1^{(k)} = x_1^{(k+1)}$, $y_2^{(k)} = x_2^{(k+1)}$. Как только будут найдены коэффициенты θ_{11} , θ_{12} , θ_{13} и θ_{21} , θ_{22} , θ_{23} можно будет найти элементы матриц коэффициентов исходной системы уравнений (2.48) по уже приведенным выше формулам:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (\theta_{11} - 1) / \Delta t, \quad A_{12} = \theta_{12} / \Delta t, \\ A_{21} &= \theta_{21} / \Delta t, \quad A_{22} = (\theta_{22} - 1) / \Delta t, \\ B_{11} &= \theta_{13} / \Delta t, \quad B_{22} = \theta_{13} / \Delta t. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Преобразования, результатом которых являются уравнения (2.52), (2.53), влекут за собой соответствующие изменения в записи первоначальных результатов измерений (табл. 2.1). Эти изменения зафиксированы в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Значения базисных функций и выходного сигнала

| № | Время | $f_{11}^{(k)} = x_1^{(k)}$ | $f_{12}^{(k)} = x_2^{(k)}$ | $f_{13}^{(k)} = u_1^{(k)}$ | $f_{23}^{(k)} = u_2^{(k)}$ | $y_1^{(k)} = x_1^{(k+1)}$ | $y_2^{(k)} = x_2^{(k+1)}$ |
|----|------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 | 0.0000E+00 | 0.1000E+01 | 0.0000E+00 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1010E+01 | 0.1105E+00 |
| 2 | 0.1000E+00 | 0.1010E+01 | 0.1105E+00 | 0.1105E+01 | 0.1105E+01 | 0.1042E+01 | 0.2443E+00 |
| 3 | 0.2000E+00 | 0.1042E+01 | 0.2443E+00 | 0.1221E+01 | 0.1221E+01 | 0.1096E+01 | 0.4050E+00 |
| 4 | 0.3000E+00 | 0.1096E+01 | 0.4050E+00 | 0.1350E+01 | 0.1350E+01 | 0.1174E+01 | 0.5967E+00 |
| 5 | 0.4000E+00 | 0.1174E+01 | 0.5967E+00 | 0.1492E+01 | 0.1492E+01 | 0.1279E+01 | 0.8244E+00 |
| 6 | 0.5000E+00 | 0.1279E+01 | 0.8244E+00 | 0.1649E+01 | 0.1649E+01 | 0.1414E+01 | 0.1093E+01 |
| 7 | 0.6000E+00 | 0.1414E+01 | 0.1093E+01 | 0.1822E+01 | 0.1822E+01 | 0.1581E+01 | 0.1410E+01 |
| 8 | 0.7000E+00 | 0.1581E+01 | 0.1410E+01 | 0.2014E+01 | 0.2014E+01 | 0.1784E+01 | 0.1780E+01 |
| 9 | 0.8000E+00 | 0.1784E+01 | 0.1780E+01 | 0.2226E+01 | 0.2226E+01 | 0.2027E+01 | 0.2214E+01 |
| 10 | 0.9000E+00 | 0.2027E+01 | 0.2214E+01 | 0.2460E+01 | 0.2460E+01 | 0.2315E+01 | 0.2718E+01 |
| 11 | 0.1000E+01 | 0.2315E+01 | 0.2718E+01 | 0.2718E+01 | 0.2718E+01 | 0.2653E+01 | 0.3305E+01 |
| 12 | 0.1100E+01 | 0.2653E+01 | 0.3305E+01 | 0.3004E+01 | 0.3004E+01 | 0.3048E+01 | 0.3984E+01 |
| 13 | 0.1200E+01 | 0.3048E+01 | 0.3984E+01 | 0.3320E+01 | 0.3320E+01 | 0.3507E+01 | 0.4770E+01 |
| 14 | 0.1300E+01 | 0.3507E+01 | 0.4770E+01 | 0.3669E+01 | 0.3669E+01 | 0.4037E+01 | 0.5677E+01 |
| 15 | 0.1400E+01 | 0.4037E+01 | 0.5677E+01 | 0.4055E+01 | 0.4055E+01 | 0.4649E+01 | 0.6723E+01 |
| 16 | 0.1500E+01 | 0.4649E+01 | 0.6723E+01 | 0.4482E+01 | 0.4482E+01 | 0.5352E+01 | 0.7925E+01 |
| 17 | 0.1600E+01 | 0.5352E+01 | 0.7925E+01 | 0.4953E+01 | 0.4953E+01 | 0.6158E+01 | 0.9306E+01 |
| 18 | 0.1700E+01 | 0.6158E+01 | 0.9306E+01 | 0.5474E+01 | 0.5474E+01 | 0.7081E+01 | 0.1089E+02 |
| 19 | 0.1800E+01 | 0.7081E+01 | 0.1089E+02 | 0.6050E+01 | 0.6050E+01 | 0.8135E+01 | 0.1270E+02 |
| 20 | 0.1900E+01 | 0.8135E+01 | 0.1270E+02 | 0.6686E+01 | 0.6686E+01 | 0.9338E+01 | 0.1478E+02 |

| № | Время | $f_{11}^{(k)} = x_1^{(k)}$ | $f_{12}^{(k)} = x_2^{(k)}$ | $f_{13}^{(k)} = u_1^{(k)}$ | $f_{23}^{(k)} = u_2^{(k)}$ | $y_1^{(k)} = x_1^{(k+1)}$ | $y_2^{(k)} = x_2^{(k+1)}$ |
|----|------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 21 | 0.2000E+01 | 0.9338E+01 | 0.1478E+02 | 0.7389E+01 | 0.7389E+01 | 0.1071E+02 | 0.1715E+02 |
| 22 | 0.2100E+01 | 0.1071E+02 | 0.1715E+02 | 0.8166E+01 | 0.8166E+01 | 0.1227E+02 | 0.1986E+02 |
| 23 | 0.2200E+01 | 0.1227E+02 | 0.1986E+02 | 0.9025E+01 | 0.9025E+01 | 0.1404E+02 | 0.2294E+02 |
| 24 | 0.2300E+01 | 0.1404E+02 | 0.2294E+02 | 0.9974E+01 | 0.9974E+01 | 0.1605E+02 | 0.2646E+02 |
| 25 | 0.2400E+01 | 0.1605E+02 | 0.2646E+02 | 0.1102E+02 | 0.1102E+02 | 0.1834E+02 | 0.3046E+02 |
| 26 | 0.2500E+01 | 0.1834E+02 | 0.3046E+02 | 0.1218E+02 | 0.1218E+02 | 0.2092E+02 | 0.3501E+02 |
| 27 | 0.2600E+01 | 0.2092E+02 | 0.3501E+02 | 0.1346E+02 | 0.1346E+02 | 0.2386E+02 | 0.4018E+02 |
| 28 | 0.2700E+01 | 0.2386E+02 | 0.4018E+02 | 0.1488E+02 | 0.1488E+02 | 0.2718E+02 | 0.4605E+02 |
| 29 | 0.2800E+01 | 0.2718E+02 | 0.4605E+02 | 0.1644E+02 | 0.1644E+02 | 0.3094E+02 | 0.5271E+02 |
| 30 | 0.2900E+01 | 0.3094E+02 | 0.5271E+02 | 0.1817E+02 | 0.1817E+02 | 0.3519E+02 | 0.6026E+02 |
| 31 | 0.3000E+01 | 0.3519E+02 | 0.6026E+02 | 0.2009E+02 | 0.2009E+02 | – | – |

Разумеется, нет никакой необходимости выполнять эти преобразования с записями результатов измерений явно, а тем более вручную, но технологию надо четко представлять, чтобы правильно оформить алгоритм расчета параметров модели.

В таблице 2.2 седьмой столбец содержит значения выходного сигнала $y_1^{(k)} = x_1^{(k+1)}$, а третий, четвертый и пятый столбцы – значения базисных функций $f_{11}^{(k)} = x_1^{(k)}$, $f_{12}^{(k)} = x_2^{(k)}$, $f_{13}^{(k)} = u_1^{(k)}$, т. е. всю информацию, необходимую для идентификации параметров уравнения (2.52). Выбирая значения выходного сигнала $y_2^{(k)} = x_2^{(k+1)}$ из восьмого столбца этой таблицы и значения трех базисных функций $f_{21}^{(k)} = x_1^{(k)}$, $f_{22}^{(k)} = x_2^{(k)}$, $f_{23}^{(k)} = u_2^{(k)}$ из третьего, четвертого и шестого столбцов таблицы 2.2, мы получаем всю необходимую информацию для идентификации параметров уравнения (2.53).

Идентификация параметров системы (2.48) по результатам измерений теперь может быть выполнена методами максимального правдоподобия, последовательной регрессии, стохастической аппроксимации и другими.

2.3.3 Идентификация систем методом максимального правдоподобия

В соответствии с теорией метода максимального правдоподобия сформулируем задачи (2.52), (2.53) следующим образом. Целью измерений является определение $m=3$ (в нашем случае количество коэффициентов $m=3$) неизвестных параметров (коэффициентов) $\vec{\theta}_1 = \{\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1m}\}$ для уравнения (2.52) и $\vec{\theta}_2 = \{\theta_{21}, \theta_{22}, \dots, \theta_{2m}\}$ для уравнения (2.53). Эти параметры должны быть найдены по результатам измерений в $N=30$ опытах выходного сигнала

$\vec{y}_1 = \{y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(N)}\}$ для уравнения (2.52) и $\vec{y}_2 = \{y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \dots, y_2^{(N)}\}$ для уравнения (2.53).

В нашем случае $N = 30$, так как в последней строке таблицы 2.2 отсутствует результат измерения выходного сигнала. Вектору $\vec{y}_1 = \{y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(N)}\}$ соответствует седьмой столбец таблицы 2.2, а вектору $\vec{y}_2 = \{y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \dots, y_2^{(N)}\}$ – восьмой столбец этой таблицы. Величины $f_{11}^{(k)} = x_1^{(k)}$, $f_{12}^{(k)} = x_2^{(k)}$, $f_{13}^{(k)} = u_1^{(k)}$ будем рассматривать как компоненты векторной функции $\vec{f}_1^{(k)} = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_{13}^{(k)}\}$, ($k = 1, 2, \dots, N$), а величины $f_{21}^{(k)} = x_1^{(k)}$, $f_{22}^{(k)} = x_2^{(k)}$, $f_{23}^{(k)} = u_2^{(k)}$ – как значения компонент векторной функции $\vec{f}_2^{(k)} = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_{23}^{(k)}\}$, ($k = 1, 2, \dots, N$), которые измерены в эксперименте с номером (k). Эти компоненты образуют матрицы $(f_{1j}^{(k)})$, $(f_{2j}^{(k)})$ размера $N \times m$ следующего вида:

$$(f_{1j}^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_{13}^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_{13}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(N)} & f_2^{(N)} & f_{13}^{(N)} \end{pmatrix}, (f_{2j}^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_{23}^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_{23}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(N)} & f_2^{(N)} & f_{23}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Первые два столбца этих матриц соответствует третьему и четвертому столбцам таблицы 2.2, а третий – пятому или шестому столбцу этой таблицы соответственно. Напомним, что здесь индекс (k) означает номер эксперимента (и номер момента времени очередного измерения входного сигнала и вектора состояний), а индекс j соответствует номеру компоненты векторов параметров $\vec{\theta}_1 = \{\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1m}\}$ для уравнения (2.52) и $\vec{\theta}_2 = \{\theta_{21}, \theta_{22}, \dots, \theta_{2m}\}$ для уравнения (2.53) (и номеру компонент вектора базисных функций) соответственно.

Уравнения модели (2.52), (2.53) теперь запишем в виде:

$$\sum_{j=1}^m f_{1j}^{(k)} \theta_{1j} = y_1^{(k)}, \quad (2.56)$$

$$\sum_{j=1}^m f_{2j}^{(k)} \theta_{2j} = y_2^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Это не что иное, как исходная система уравнений для оценки параметров в методе максимального правдоподобия. В соответствии с теорией метода мак-

симального правдоподобия для получения наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ модели (2.52), (2.53) необходимо записать систему нормальных уравнений относительно этих коэффициентов. Найти их, решая непосредственно уравнения (2.56) нельзя, так как результаты содержат случайную ошибку измерений. Метод максимального правдоподобия позволяет найти параметры $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ гиперплоскостей в пространствах $Oy_1f_{11}f_{12}f_{13}$ и $Oy_2f_{21}f_{22}f_{23}$, для которых соответствующее среднеквадратическое отклонение, вычисленное по всем экспериментальным точкам, будет минимально.

Для исходных уравнений (2.56) нормальные уравнения имеют вид:

$$M_1 \tilde{\theta}_1 = \vec{Y}_1, \quad (M_1)_{ij} = \sum_{k=1}^N f_{1i}^{(k)} f_{1j}^{(k)}, \quad Y_{1i} = \sum_{k=1}^M f_{1i}^{(k)} y_1^{(k)}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (2.57)$$

$$M_2 \tilde{\theta}_2 = \vec{Y}_2, \quad (M_2)_{ij} = \sum_{k=1}^N f_{2i}^{(k)} f_{2j}^{(k)}, \quad Y_{2i} = \sum_{k=1}^N f_{2i}^{(k)} y_2^{(k)}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (2.58)$$

Таким образом, задача сведена к вычислению элементов информационных матриц M_1, M_2 и компонент векторов \vec{Y}_1, \vec{Y}_2 по заданным в таблице 2.2 значениям базисных функций и выходного сигнала, и затем – решению систем (2.57), (2.58). В рассматриваемом примере расчеты дают следующие значения интересующих нас величин:

$$M_1 = M_2 = \begin{pmatrix} 0.4120E+04 & 0.6837E+04 & 0.2708E+04 \\ 0.6837E+04 & 0.1138E+05 & 0.4463E+04 \\ 0.2708E+04 & 0.4463E+04 & 0.1817E+04 \end{pmatrix},$$

$$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 0.4698E+04 \\ 0.7796E+04 \\ 0.3089E+04 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} 0.7855E+04 \\ 0.1307E+05 \\ 0.5134E+04 \end{pmatrix}.$$

В этом случае решение уравнений (2.57), (2.58) дает следующие значения параметров $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$:

$$\tilde{\theta}_1 = M_1^{-1} \vec{Y}_1,$$

$$\tilde{\theta}_{11} = 0.9051E+00, \quad \tilde{\theta}_{12} = 0.1001E+00, \quad \tilde{\theta}_{13} = 0.1052E+00,$$

$$\tilde{\theta}_2 = M_2^{-1} \vec{Y}_2,$$

$$\tilde{\theta}_{21} = -0.5978E-03, \quad \tilde{\theta}_{22} = 0.1105E+01, \quad \tilde{\theta}_{23} = 0.1109E+00.$$

В заключение по формулам (2.54) находим значения коэффициентов в уравнениях модели (2.48):

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{11} &= \frac{(\tilde{\theta}_{11} - 1)}{\Delta t} = -0.9491\text{E}+00, \quad \tilde{A}_{12} = \frac{\tilde{\theta}_{12}}{\Delta t} = 0.1001\text{E}+01, \\ \tilde{A}_{21} &= \frac{\tilde{\theta}_{21}}{\Delta t} = -0.5978\text{E}-02, \quad \tilde{A}_{22} = \frac{(\tilde{\theta}_{22} - 1)}{\Delta t} = 0.1054\text{E}+01, \\ \tilde{B}_{11} &= \frac{\tilde{\theta}_{13}}{\Delta t} = 0.1052\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{22} = \frac{\tilde{\theta}_{13}}{\Delta t} = 0.1109\text{E}+01.\end{aligned}$$

2.3.4 Идентификация систем методом последовательной регрессии

Параметры модели (2.52), (2.53) могут быть оценены и методом последовательной идентификации (последовательной регрессии). Каждое из уравнений (2.52), (2.53) будем рассматривать как уравнения многомерных систем, каждая из которых имеет $m = 3$ входных сигналов $f_{11}^{(k)}, f_{12}^{(k)}, \dots, f_{1m}^{(k)}, f_{21}^{(k)}, f_{22}^{(k)}, \dots, f_{2m}^{(k)}$ и по одному выходному сигналу $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$. Эти уравнения запишем в виде:

$$\begin{aligned}y_i^{(k)} &= \theta_{i1}f_{i1}^{(k)} + \theta_{i2}f_{i2}^{(k)} + \dots + \theta_{im}f_{im}^{(k)} + \mu_i^{(k)}, \\ (i &= 1, 2; k = 1, 2, \dots, N; m = 3).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Здесь, как и ранее, $\bar{\theta}_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im}\}$, ($i = 1, 2$) – векторы параметров, которые требуется найти по результатам измерений, индекс $i = 1$ соответствует уравнению (2.52), $i = 2$ – соответствует уравнению (2.53), $y_i^{(k)}$ – скалярный выходной сигнал, полученный в результате измерения с номером (k), $f_{i1}^{(k)}, f_{i2}^{(k)}, \dots, f_{im}^{(k)}$ – значения базисных функций, полученные по результатам измерений, а $\mu_i^{(k)}$ – шум измерений. Величины $\mu_i^{(k)}$ добавлены в уравнения (2.59) как символ признания того факта, что в результатах измерений обязательно присутствует некоторая случайная погрешность. Конечно, величина этой погрешности, как правило, заранее неизвестна, поэтому явно выделить значения $\mu_i^{(k)}$ в уравнениях нельзя, погрешность «скрыта» в результатах измерений величин $y_i^{(k)}$ и $f_{i1}^{(k)}, f_{i2}^{(k)}, \dots, f_{im}^{(k)}$.

В векторной форме уравнение (2.59) имеет вид:

$$\begin{aligned}
y_i^{(k)} &= \left(\bar{\theta}_i, \bar{f}_i^{(k)} \right) + \mu_i^{(k)}, \\
\bar{\theta}_i &= \{ \theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im} \}, \\
\bar{f}_i^{(k)} &= \{ f_{i1}^{(k)}, f_{i2}^{(k)}, \dots, f_{im}^{(k)} \}, \\
&(i = 1, 2; k = 1, 2, \dots, N; m = 3).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Как и ранее, для получения расчетных формул метода последовательной регрессии воспользуемся идеями метода наименьших квадратов. Минимизируем величину среднеквадратического отклонения J_i^r , характеризующего разность между экспериментально измеренным выходным сигналом $y_i^{(k)}$ и его теоретическим (расчетным) значением $\tilde{y}_i^{(k)}$. Как только будет получена приближенная оценка коэффициентов $\tilde{\theta}_i^r$ модели, расчетное значение выходного сигнала $\tilde{y}_i^{(k)}$ можно вычислить по формуле:

$$\tilde{y}_i^{(k)} = \left(\tilde{\theta}_i^r, \bar{f}_i^{(k)} \right), \quad (i = 1, 2, \quad r = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, r). \tag{2.61}$$

Индекс $1 \leq r \leq N$ здесь и далее обозначает длину серии измерений, по которой на данном этапе оцениваются параметры модели, и, одновременно, определяет номер итерации, номер приближения в процедуре последовательного уточнения оценки параметров.

Для расчета среднеквадратического отклонения имеет место формула:

$$\begin{aligned}
J_i^r &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \omega^{(k)} \left(y_i^{(k)} - \left(\tilde{\theta}_i^r, \bar{f}_i^{(k)} \right) \right)^2, \\
&(i = 1, 2, \quad r = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, r).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Еще раз напомним смысл индексов, использованных в этой формуле. Верхний индекс (k) – номер измерения (он же – номер момента времени, когда выполнялись измерения); индекс r указывает на номер последнего результата в серии измерений, по которым проводится идентификация параметров (далее он же – номер итерации), $\tilde{\theta}_i^r$ – оценка вектора коэффициентов модели, полученная в результате серии из r измерений, N – общее количество измерений. Кроме того, по сравнению с предыдущими формулами, в формуле (2.62) введены весовые коэффициенты $\omega^{(k)}$ – неотрицательные величины. Можно положить $\omega^{(k)} = 1$. В общем же случае весовые коэффициенты искусственно вводятся экспериментатором на этапе обработки данных измерений для того, чтобы иметь возможность по собственному усмотрению ослабить или усилить влияние той

или иной группы данных из всей их совокупности на итоговую оценку параметров. Например, если появились сомнения в точности первых десяти измерений, то их влияние можно ослабить, задав $\omega^{(k)} < 1$, $k \leq 10$.

Из условия минимума среднеквадратического отклонения J_i^r следует, что оценка параметров $\tilde{\theta}^r$ должна удовлетворять уравнениям:

$$\frac{dJ_i^r}{d\tilde{\theta}_{is}^r} = 0, (i = 1, 2; r = 1, 2, \dots, N; s = 1, 2, \dots, m). \quad (2.63)$$

Дифференцируя выражение (2.62), уравнения (2.63) запишем в виде:

$$\sum_{k=1}^r \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} \otimes \left(y_i^{(k)} - \left(\tilde{\theta}_i^r, \vec{f}_i^{(k)} \right) \right) = 0, (i = 1, 2). \quad (2.64)$$

Символ \otimes здесь обозначает внешнее произведение векторов, так что для векторов \vec{a}, \vec{b} с компонентами a_i, b_j имеет место формула $\vec{a} \otimes \vec{b} = C$, $C_{ij} = a_i b_j$, т. е. в результате внешнего умножения векторов получается матрица соответствующей размерности. Если один из сомножителей скаляр, то этот символ означает обычное умножение вектора на скаляр.

Для упрощения последующих преобразований соотношения (2.64) представим в следующем виде:

$$\left(P_i^r \right)^{-1} \tilde{\theta}_i^r = \sum_{k=1}^r \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} y_i^{(k)}, (i = 1, 2). \quad (2.65)$$

В системах (их две: при $i = 1$ и при $i = 2$) линейных алгебраических уравнений (2.65) относительно неизвестных коэффициентов $\tilde{\theta}_i^r$ матрицы $\left(P_i^r \right)^{-1}$ есть не что иное, как уже известные нам информационные матрицы M_i , в выражениях (2.57), (2.58), которые вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \left(P_i^r \right)^{-1} &= \sum_{k=1}^r \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} \otimes \vec{f}_i^{(k)}, \\ \left(P_i^r \right)_{st}^{-1} &= \sum_{k=1}^r \omega^{(k)} f_{is}^{(k)} f_{it}^{(k)}, (s, t = 1, \dots, m; i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Правая часть в уравнениях (2.65) – это аналог векторов \vec{Y}_1, \vec{Y}_2 в уравнениях (2.57), (2.58), вычисленных с учетом весовых коэффициентов $\omega^{(k)}$.

Матричные уравнения (2.66) можно решить, например, умножая на предварительно найденную матрицу P_i^r , обратную к информационной матрице $\left(P_i^r \right)^{-1}$. Тогда решение уравнений (2.66) можно записать в виде:

$$\tilde{\theta}_i^r = P_i^r \sum_{k=1}^r \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} y_i^{(k)}, \quad (i=1,2). \quad (2.67)$$

В этом случае мы имели бы дело с «непоследовательной» идентификацией, то есть случаем, когда сначала выполняется вся серия измерений, а затем по их результатам методом максимального правдоподобия находится оценка параметров модели. Такое решение уже было получено выше.

Приступая непосредственно к обсуждению алгоритма последовательной идентификации в рассматриваемой задаче, матричные уравнения (2.66) запишем следующим образом:

$$\left(P_i^r\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^r = \sum_{k=1}^{r-1} \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} y_i^{(k)} + \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} y_i^{(r)}, \quad (i=1,2). \quad (2.68)$$

Для первого слагаемого в правой части этих уравнений имеют место равенства:

$$\sum_{k=1}^{r-1} \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} y_i^{(k)} = \left(P_i^{r-1}\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^{r-1}, \quad (i=1,2). \quad (2.69)$$

С учетом этого равенства из уравнений (2.68) следует:

$$\left(P_i^r\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^r = \left(P_i^{r-1}\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^{r-1} + \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} y_i^{(r)}, \quad (i=1,2). \quad (2.70)$$

Теперь эти уравнения представим в виде:

$$\begin{aligned} \left(P_i^r\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^r &= \left(P_i^{r-1}\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^{r-1} + \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \left(y_i^{(r)} - \left(\vec{f}_i^{(r)}, \tilde{\theta}_i^{r-1}\right)\right) + \\ &+ \omega^{(r)} \left(\vec{f}_i^{(r)} \otimes \vec{f}_i^{(r)}\right) \tilde{\theta}_i^{r-1} = \left(P_i^r\right)^{-1} \tilde{\theta}_i^{r-1} + \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \left(y_i^{(r)} - \left(\vec{f}_i^{(r)}, \tilde{\theta}_i^{r-1}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

$(i=1,2).$

В свою очередь, из этих уравнений следует:

$$\tilde{\theta}_i^r = \tilde{\theta}_i^{r-1} + P_i^r \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \left(y_i^{(r)} - \left(\vec{f}_i^{(r)}, \tilde{\theta}_i^{r-1}\right)\right), \quad (i=1,2). \quad (2.72)$$

Это достаточно важный результат: соотношения (2.72) представляют собой рекуррентные формулы для оценивания коэффициентов модели $\tilde{\theta}_i^r$.

Для расчета коэффициентов модели по формулам (2.72) необходимо получить и рекуррентные формулы вычисления матриц $\left(P_i^r\right)$. Как и ранее, с этой целью воспользуемся леммой об обращении матриц [2]. Формулу (2.66) для матрицы $\left(P_i^r\right)$ представим в виде:

$$\begin{aligned} (P_i^r)^{-1} &= \sum_{k=1}^r \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} \otimes \vec{f}_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{r-1} \omega^{(k)} \vec{f}_i^{(k)} \otimes \vec{f}_i^{(k)} + \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \vec{f}_i^{(r)} \Rightarrow \\ (P_i^r)^{-1} &= (P_i^{r-1})^{-1} + \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \vec{f}_i^{(r)}, \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Последнее слагаемое в этой формуле представим в виде:

$$\omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \vec{f}_i^{(r)} = \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)} = \sqrt{\omega^{(r)}} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \sqrt{\omega^{(r)}} \vec{f}_i^{(r)}, \quad \vec{H}_i^{(r)} = \sqrt{\omega^{(r)}} \vec{f}_i^{(r)}. \quad (2.74)$$

Тогда выражение (2.73) можно записать в виде:

$$(P_i^r)^{-1} = (P_i^{r-1})^{-1} + \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)}. \quad (2.75)$$

Умножая обе части этого равенства слева на матрицу P_i^r , получим следующий результат:

$$E = P_i^r (P_i^{r-1})^{-1} + P_i^r \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)}, \quad (2.76)$$

где E – единичная матрица.

Это последнее равенство умножим на матрицу P_i^{r-1} справа. В итоге получим выражение:

$$P_i^{r-1} = P_i^r + P_i^r \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1}. \quad (2.77)$$

Умножим теперь это выражение справа на вектор $\vec{H}_i^{(r)}$. В итоге получим:

$$\begin{aligned} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)} &= P_i^r \vec{H}_i^{(r)} + P_i^r \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)} = \\ &= P_i^r \vec{H}_i^{(r)} \otimes \left(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)}\right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Наконец, это последнее выражение умножим на величину

$$\left(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)}\right)^{-1} \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1}. \quad (2.79)$$

В результате получаем следующее выражение:

$$P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)} \otimes \left(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)}\right)^{-1} \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} = P_i^r \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1}. \quad (2.80)$$

Подстановка в эту формулу выражения (2.77) для $P_i^r \vec{H}_i^{(r)} \otimes \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1}$ дает:

$$P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)} \otimes \left(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)}\right)^{-1} \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} = P_i^{r-1} - P_i^r. \quad (2.81)$$

Таким образом, из выражения (2.81) вытекает следующая рекуррентная формула для вычисления матриц P_i^r :

$$P_i^r = P_i^{r-1} - P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)} \otimes \left(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)}\right)^{-1} \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1}. \quad (2.82)$$

Достаточно важно то, что при вычислении матриц P_i^r по этой формуле не требуется выполнение процедуры обращения матриц, так как величина $(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)})^{-1}$ – скаляр.

Для начала процедуры последовательной идентификации по рассмотренным формулам необходимо каким-то образом определить матрицы P_i^0 и начальные оценки коэффициентов модели $\tilde{\theta}_i^0$. Рекомендуется в качестве начальных приближений задавать матрицы P_i^0 в виде:

$$P_i^0 = \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon = 10^{-3} \div 10^{-8} \quad (i=1,2). \quad (2.83)$$

В качестве начальной оценки параметров модели $\tilde{\theta}_i^0$ за неимением лучшего выбирают оценку:

$$\tilde{\theta}_i^0 = 0, \quad (i=1,2). \quad (2.84)$$

Тогда для вычисления коэффициентов модели $\tilde{\theta}_i^r$ на очередной итерации с номером r и матриц P_i^r имеют место рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i^0 &= 0, \\ P_i^0 &= \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon = 10^{-3} \div 10^{-8}, \\ \vec{H}_i^{(r)} &= \sqrt{\omega^{(r)}} \vec{f}_i^{(r)}, \\ P_i^r &= P_i^{r-1} - P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)} \otimes \left(1 + \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1} \vec{H}_i^{(r)}\right)^{-1} \vec{H}_i^{(r)} P_i^{r-1}, \\ \tilde{\theta}_i^r &= \tilde{\theta}_i^{r-1} + P_i^r \omega^{(r)} \vec{f}_i^{(r)} \otimes \left(y_i^{(r)} - \left(\vec{f}_i^{(r)}, \tilde{\theta}_i^{r-1}\right)\right), \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Процедура вывода этих расчетных формул гарантирует, что получаемая таким образом последовательная оценка коэффициентов модели $\tilde{\theta}_i^r$ по точности практически полностью (за исключением возможных различий, обусловленных округлением результатов промежуточных вычислений) соответствует оценке по методу максимального правдоподобия, но не требует применения алгоритма обращения матриц.



Пример

В рассматриваемом примере (см. пп. 2.3.2, 2.3.3) для вычислений по формулам (2.85) необходимо задать начальное приближение и весовые коэффициенты, например:

$$\tilde{\theta}_1^0 = (0.0 \quad 0.0 \quad 0.0), \quad (i=1), \quad \tilde{\theta}_2^0 = (0.0 \quad 0.0 \quad 0.0), \quad (i=2),$$

$$\varepsilon = 0.1000\text{E}-04, \quad \omega^{(k)} = 1, \quad k=1,2,\dots,N=30,$$

$$P_i^0 = \frac{1}{0.1000\text{E}-04} \begin{pmatrix} 0.1000\text{E}+01 & 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 & 0.1000\text{E}+01 & 0.0000\text{E}+00 \\ 0.0000\text{E}+00 & 0.0000\text{E}+00 & 0.1000\text{E}+01 \end{pmatrix}.$$

Для первого приближения, сохраняя четыре знака после запятой, получаем следующий результат:

$$\tilde{A}_{11} = -0.4950\text{E}+01, \quad \tilde{A}_{12} = 0.0000\text{E}+00, \quad \tilde{B}_{11} = 0.5050\text{E}+01,$$

$$\tilde{A}_{21} = 0.5525\text{E}+00, \quad \tilde{A}_{22} = -0.1000\text{E}+02, \quad \tilde{B}_{22} = 0.5525\text{E}+00, \quad (r=1).$$

Здесь необходимо напомнить о том, что при идентификации параметров говорить о точности идентификации можно только тогда, когда количество измерений превышает количество идентифицируемых параметров (в нашем случае три для каждого из уравнений (2.57), (2.58)). Поэтому первые могут давать результат, очень далекий от правильной оценки.

Четвертая итерация (количество измерений превысило количество идентифицируемых параметров) дает следующую оценку:

$$\tilde{A}_{11} = -0.1326\text{E}+01, \quad \tilde{A}_{12} = 0.7592\text{E}+00, \quad \tilde{B}_{11} = 0.1425\text{E}+01,$$

$$\tilde{A}_{21} = 0.1254\text{E}+00, \quad \tilde{A}_{22} = 0.9717\text{E}+00, \quad \tilde{B}_{22} = 0.1229\text{E}+01, \quad (r=4).$$

На пятнадцатом шаге получаем:

$$\tilde{A}_{11} = -0.9489\text{E}+00, \quad \tilde{A}_{12} = 0.1001\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{11} = 0.1052\text{E}+01,$$

$$\tilde{A}_{21} = 0.6397\text{E}-02, \quad \tilde{A}_{22} = 0.1052\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{22} = 0.1100\text{E}+01, \quad (r=15).$$

Тридцатая итерация приводит к следующим уточненным оценкам, полученным методом последовательной идентификации (иногда говорят: *методом последовательной регрессии*):

$$\tilde{A}_{11} = -0.9491\text{E}+00, \quad \tilde{A}_{12} = 0.1001\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{11} = 0.1052\text{E}+01,$$

$$\tilde{A}_{21} = -0.5944\text{E}-02, \quad \tilde{A}_{22} = 0.1054\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{22} = 0.1109\text{E}+01, \quad (r=30).$$

Напомним, что метод максимального правдоподобия (*непоследовательная идентификация*) в данном случае привел к следующей оценке:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{11} &= -0.9491\text{E}+00, \quad \tilde{A}_{12} = 0.1001\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{11} = 0.1052\text{E}+01, \\ \tilde{A}_{21} &= -0.5978\text{E}-02, \quad \tilde{A}_{22} = 0.1054\text{E}+01, \quad \tilde{B}_{22} = 0.1109\text{E}+01.\end{aligned}$$

Сравнивая результаты, можно заметить, что два этих метода дают близкие по точности оценки коэффициентов, что и следовало ожидать в соответствии с теорией.

Таким образом, по результатам идентификации в соответствии с нашей гипотезой (2.48) мы можем записать полученные уравнения модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -0.95x_1(t) + 1.00x_2(t) + 1.05u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -0.01x_1(t) + 1.05x_2(t) + 1.11u_2(t), \quad t \in [0, 3]. \end{cases} \quad (2.86)$$



Контрольные вопросы по главе 2

1. Запишите в общем виде уравнение состояния линейной стационарной динамической системы.
2. Запишите уравнение выходов линейной стационарной динамической системы.
3. Дайте определение линейного преобразования динамической системы.
4. Какие ограничения накладываются на выбор матрицы линейного преобразования?
5. Запишите уравнение, решение которого дает собственные числа для линейной стационарной динамической системы.
6. Докажите, что линейное преобразование не изменяет собственных чисел линейной системы управления.
7. Дайте определение канонического преобразования линейной системы.
8. Опишите алгоритм прямого определения собственных векторов.
9. Опишите процедуру определения собственных векторов на основе метода Крылова.

10. К каким наиболее существенным изменениям приводит процедура диагонализации линейной системы?
11. Дайте определение управляемой системы.
12. Сформулируйте критерий управляемости Гильберта.
13. Сформулируйте критерий управляемости на основе разложения матричной экспоненты.
14. Дайте определение управляемости по выходу.
15. Сформулируйте критерий управляемости по выходу.
16. Дайте определение наблюдаемой системы.
17. Сформулируйте критерий наблюдаемости Гильберта.
18. Сформулируйте критерий наблюдаемости на основе разложения матричной экспоненты.
19. Как осуществляется переход от непрерывной модели линейной стационарной динамической системы к дискретной модели?
20. Запишите в общем виде уравнения дискретной модели для системы с двумя переменными состояниями, одним входным сигналом и двумя выходами.
21. Укажите рекомендуемый диапазон задания параметра ε в процедуре последовательной идентификации.

3 Идентификация параметров нелинейных стационарных динамических систем методом квазилинеаризации

Метод квазилинеаризации [2, 10, 11] предложили Р. Беллман и Р. Калаба. Этот метод основан на сведении нелинейной краевой задачи к линейной нестационарной задаче. При этом предполагается, что идентифицируемые параметры постоянны, по крайней мере на интервале моделирования системы. Кроме того, тип нелинейности, т. е. вид нелинейных уравнений идентифицируемой системы, также предполагается известным априорно. Если идентифицируемые параметры меняются относительно медленно по сравнению со скоростью сходимости алгоритма идентификации, то такая нестационарность параметров системы также может быть учтена. Как и для большинства методов линеаризации, не только скорость сходимости решения, но и успех решения задачи вообще существенно зависит от выбора начального приближения для идентифицируемых параметров. Метод квазилинеаризации применим как для идентификации параметров систем при известных начальных данных, так и для идентификации параметров (коэффициентов в уравнениях состояния) и начальных данных.

3.1 Постановка задачи идентификации параметров нелинейных стационарных динамических систем методом квазилинеаризации при известных начальных данных



Рассмотрим систему, закон функционирования которой описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), \quad t \in [t^{(0)}, T], \\ \bar{x}(t^{(0)}) &= \bar{x}^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $t \in [t^{(0)}, T]$ – контролируемая независимая переменная (например, время); $[t^{(0)}, T]$ – интервал моделирования; $\bar{x} = \bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ – вектор переменных состояния; $\bar{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ – вектор управления; $\bar{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ – вектор параметров;

$\vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}) = \{f_1(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}), \dots, f_n(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})\}$ – известного вида векторная функция всех своих аргументов, в общем случае нелинейная; $\vec{x}(t^{(0)}) = \vec{x}^{(0)}$ – заданный вектор, который определяет начальное состояние системы.

.....

Как и ранее, нижние индексы будем использовать для обозначения номеров компонент векторов или элементов матриц, а верхний индекс, взятый в скобки, – для указания точки на оси времени и номера измерения.

В общем случае система уравнений (3.1) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно неизвестных переменных состояния $\vec{x}(t)$ с неизвестными параметрами $\vec{\theta}$, однако предполагается, что уравнения записаны в форме, разрешенной относительно производной $\frac{d\vec{x}(t)}{dt}$.

Уравнение выходов моделируемой системы представлено системой линейных алгебраических уравнений вида

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t), \quad (3.2)$$

где $\vec{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_k(t)\}$ – вектор измеряемого выходного сигнала;

$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kn} \end{pmatrix}$ – заданная прямоугольная матрица коэффициентов.

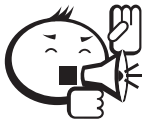
Далее будем исходить из того, что результатом наблюдений за функционированием системы являются измерения значений выходного сигнала $\vec{y}(t^{(j)}) = \vec{y}^{(j)}$ и вектора управления $\vec{u}(t^{(j)}) = \vec{u}^{(j)}$, выполненных в равноотстоящих узлах $t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1)$, ($j=1, 2, \dots, N$) на оси времени. Тогда для переменных состояния $\vec{x}(t)$ моделируемой системы в соответствии с алгебраическим уравнением выходов (3.2) можно записать следующую систему алгебраических уравнений:

$$C\vec{x}^{(j)} = \vec{y}^{(j)}, \quad t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1), \quad (j=1, 2, \dots, N), \quad (3.3)$$

где $\vec{y}^{(j)}$, ($j=1, 2, \dots, N$) – измеренное значение выходного сигнала в общей серии длиной N измерений, а верхний индекс, который указывает на номер момента

времени измерений, взят в скобки, чтобы отличать его от номера компонент вектора, а затем и от номера итерации.

Для упрощения здесь принято, что измерения выполняются в равноотстоящих узлах $t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1) \in [t^{(0)}, T]$, ($j=1, 2, \dots, N$) на оси времени, и при этом шаг Δt достаточно мал. Выполнение этого условия не обязательно, но если оно не выполняется, то в последующем может потребоваться дополнительная процедура совмещения узлов, в которых выполняются измерения выходного сигнала и методом квазилинеаризации находятся значения переменных состояния.



.....

Изучаемую систему будем считать стационарной, по крайней мере в течение времени, необходимого для идентификации параметров. На этом основании для идентифицируемых параметров можно записать следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = 0. \quad (3.4)$$

.....

Решение уравнений (3.1) должно удовлетворять заданным, известным, начальным условиям вида:

$$\vec{x}(t^{(0)}) = \vec{x}^{(0)}. \quad (3.5)$$

Задача идентификации параметров моделируемой системы заключается в том, чтобы найти векторы переменных состояния $\vec{x}(t)$ и коэффициентов модели $\vec{\theta}$, которые удовлетворяют системам дифференциальных уравнений (3.1), (3.4), начальным условиям (3.5), а также уравнению выходов (3.3). При этом предполагается, что при известных значениях параметров $\vec{\theta}$ начальных условиях (3.5) решение системы (3.1) единственно. Следует ещё раз подчеркнуть, в рассматриваемом случае начальное состояние системы считается известным, что несколько упрощает задачу.



.....

Приведенные уравнения представляют собой математическое выражение априорно принятой гипотезы о внутреннем устройстве реальной системы, которая является результатом первого этапа идентификации. На этом этапе установлено, что входное воздей-

ствие описывается измеряемой функцией $\bar{u}(t)$, состояние системы описывается вектором $\bar{x}(t)$, принято предположение о том, что система стационарна, по крайней мере в течение времени идентификации $T - t^{(0)}$, а также принято допущение, что изучаемая система (устройство) может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Результатом этого исследования и является математическое оформление гипотезы в виде уравнений (3.1)–(3.5).

Одним из методов решения задач идентификации таких систем является метод квазилинеаризации [2, 10, 11].

.....

3.2 Описание метода квазилинеаризации в задачах с известными начальными условиями

Решение задачи идентификации параметров нелинейных систем с законом функционирования вида (3.1) методом квазилинеаризации [2, 10, 11] сводится к реализации следующей итерационной процедуры.

Первый этап. На первом этапе решения должна быть каким-либо образом задана начальная оценка коэффициентов модели, в качестве которой зачастую (за неимением лучшего) берется нулевая оценка:

$$\bar{\theta}^0 = \bar{\theta}^{ln}, \quad (\bar{\theta}^0 = 0). \quad (3.6)$$

Точно так же должна быть задана (найдена) соответствующая этим значениям параметров $\bar{\theta}^0 = \bar{\theta}^{ln}$ начальная оценка вектора переменных состояния $\bar{x}^0(t)$, т. е. приближенное решение системы (3.1):

$$\bar{x}^0(t) = \bar{x}^{ln}(t), \quad (\bar{x}^0(t) = \bar{x}^{(0)}). \quad (3.7)$$

Здесь и далее верхний индекс без скобок означает номер итерации, а величины $\bar{\theta}^{ln}$, $\bar{x}^{ln}(t)$ – заданные векторы.

При выборе начальных оценок параметров $\bar{\theta}^0$ и вектора переменных состояния $\bar{x}^0(t)$ требуется учитывать, что сходимость метода существенно зависит от выбора начального приближения. Более того, неудачный выбор начальной оценки (например, $\bar{\theta}^0 = 0$) в конкретных задачах может привести к тому, что на первом же шаге задача сведется к системе линейно зависимых алгебраических уравнений. Однако такие варианты развития событий легко предугады-

ваются при приобретении минимального опыта решения конкретных задач. Выбор начальной оценки для вектора переменных состояния $\bar{x}^0(t)$ целесообразно осуществлять следующим образом. Если принята нулевая начальная оценка коэффициентов $\bar{\theta}^0 = 0$, то, как правило, легко находится соответствующее аналитическое решение $\bar{x}^{ln}(t)$ системы (3.1), которое и следует брать в качестве начальной оценки $\bar{x}^0(t)$ вектора переменных состояния. В простейшем случае можно в качестве начальной оценки вектора переменных состояния задавать известные по условиям задачи начальные значения $\bar{x}^0(t) = \bar{x}^{(0)}$.

Второй этап. Теперь рассмотрим более общий случай, когда найдено некоторое приближение к решению $\bar{\theta}^s$ и $\bar{x}^s(t)$ с номером s . Напомним, что здесь и далее верхний индекс без скобок используется как указатель номера приближения (шага итерационного процесса) в процессе уточнения значения искомых величин.

Разлагая правую часть уравнения (3.1) в ряд Тейлора в окрестности этого состояния, от системы (3.1) приходим к системе уравнений:

$$\frac{d\bar{x}^{s+1}}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \bar{x}^{s+1} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \bar{\theta}^{s+1} + \bar{f}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \bar{x}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \bar{\theta}^s, \quad (3.8)$$

$(i, p = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m; s = 1, \dots, N_s).$

Чтобы не загромождать запись ненужными деталями, здесь опущены аргументы всех определенных ранее функций, а символом N_s обозначено максимальное количество итераций, которое обычно задается в качестве дополнительного критерия для прекращения процесса уточнения оценок во избежание «зацикливания».

Отметим, что все величины, отмеченные символом s , в уравнениях (3.8) известны, могут быть вычислены для любого момента времени в интервале моделирования, так как они определяются найденным на предыдущем шаге приближенным решением $\bar{\theta}^s$ и $\bar{x}^s(t)$ задачи.

В развернутой записи матрицы коэффициентов системы (3.8) имеют вид:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^s, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_m} \end{pmatrix}^s. \quad (3.9)$$

Начальные условия для системы (3.8) в соответствии с условиями (3.5) записываются в виде:

$$\vec{x}^{s+1}(t^{(0)}) = \vec{x}^{(0)}. \quad (3.10)$$

Уравнение выходов на каждом шаге итерационного процесса записывается в виде:

$$C\vec{x}^{s+1}(t^{(j)}) = \vec{y}^{(j)}, \quad t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1), \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.11)$$

Третий этап. Следующим шагом в реализации алгоритма расчета является то, что решение системы уравнений (3.8) по аналогии с методом вариации произвольных постоянных будем искать в виде:

$$\vec{x}^{s+1}(t) = \vec{x}^{s+1} = G(t)\vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(t), \quad (3.12)$$

где $G(t) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & \dots & G_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}(t) & \dots & G_{nm}(t) \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных пока функций-

коэффициентов, которая соответствует общему решению однородной системы:

$$\frac{d\vec{x}^{s+1}}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \vec{x}^{s+1} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \vec{\theta}^{s+1}, \quad (3.13)$$

а $\vec{D}(t) = \{D_1(t), \dots, D_n(t)\} = \vec{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ – вектор частного решения (тоже пока неизвестный) неоднородной системы уравнений (3.8).

Естественно, что теперь необходимо получить уравнения, из которых могут быть найдены матрица $G(t)$ и вектор $\vec{D}(t)$ на каждом шаге итерационного процесса, а значит и решение уравнений (3.8) в форме (3.12).

Подставляя с этой целью выражение (3.12) в уравнение (3.8), приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d(G(t)\vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(t))}{dt} &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s (G(t)\vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(t)) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \vec{\theta}^{s+1} + \\ &+ \vec{f}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \vec{x}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \vec{\theta}^s, \quad (3.14) \\ &(i, p = 1, 2, \dots, n, \quad q = 1, 2, \dots, m, \quad s = 0, \dots, N_s). \end{aligned}$$

Учитывая условие стационарности (3.4) системы, т. е. $\frac{d\vec{\theta}}{dt} = 0$, получаем

далее:

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} \bar{\theta}^{s+1} + \frac{d\bar{D}(t)}{dt} = & \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s G(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \right] \bar{\theta}^{s+1} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \bar{D}(t) + \\ & + \bar{f}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \bar{x}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \bar{\theta}^s. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Приравнивая в этих уравнениях коэффициенты при величинах $\bar{\theta}^{s+1}$ в первой степени и нулевой соответственно, получим систему уравнений относительно неизвестных элементов матрицы $G(t)$ и компонент вектора $\bar{D}(t)$:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s G(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s, \quad (3.16)$$

$$\frac{d\bar{D}(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \bar{D}(t) + \bar{f}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \bar{x}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \bar{\theta}^s. \quad (3.17)$$

Ещё раз подчеркнем, что все величины, отмеченные индексом s в этих уравнениях известны с предыдущего шага итерационного процесса.

Необходимые для решения уравнений (3.16), (3.17) начальные условия задаются следующим образом. В соответствии с начальными условиями (3.5) для очередной оценки вектора переменных состояния вида (3.12) должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{s+1}(t^{(0)}) = \bar{x}^{(0)}, \Rightarrow \\ \bar{x}^{s+1}(t^{(0)}) = G(t^{(0)}) \bar{\theta}^{s+1} + \bar{D}(t^{(0)}) = \bar{x}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что системы уравнений (3.16), (3.17) могут быть решены при начальных условиях вида:

$$G(t^{(0)}) = 0. \quad (3.19)$$

$$\bar{D}(t^{(0)}) = \bar{x}^{(0)}. \quad (3.20)$$

Решение уравнений (3.16), (3.17) при начальных условиях (3.19), (3.20) можно получить численными методами. В простейшем случае можно воспользоваться схемой Эйлера, схемой с пересчетом, схемами Рунге – Кутты повышенного порядка точности (см., например, [12, 15]).

Будем считать, что каким-либо из перечисленных методов найдено решение уравнений (3.14), (3.15) при начальных условиях (3.19), (3.20), и это решение найдено в тех же узлах $t^{(j)} \in [t^{(0)}, T]$, $t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1)$, $(j=1, 2, \dots, N)$, в ко-

торых выполнены измерения выходного сигнала. Это значит, что на очередном шаге итерационного процесса известны значения матрицы $G(t^{(j)})$ и вектора $\bar{D}(t^{(j)})$, $t^{(j)} \in [t^{(0)}, T]$, $t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1)$, $(j=1, 2, \dots, N)$. Это позволяет записать выражение (3.12) для вектора переменных состояния через оставшуюся пока неизвестной оценку коэффициентов $\bar{\theta}^{s+1}$ в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{s+1}(t^{(j)}) &= G(t^{(j)})\bar{\theta}^{s+1} + \bar{D}(t^{(j)}), \\ t^{(j)} &\in [t^{(0)}, T], \quad t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1), \quad (j=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Как уже отмечалось, здесь для упрощения принято, что величины $G(t^{(j)})$ и $\bar{D}(t^{(j)})$ найдены в равноотстоящих узлах $t^{(j)} \in [t^{(0)}, T]$, $t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1)$, $(j=1, 2, \dots, N)$ на оси времени, которые совпадают с моментами времени, в которые выполнялись измерения выходного сигнала. Выполнение этого условия не обязательно, но если это не так, то может потребоваться дополнительная процедура совмещения узлов, в которых выполняются измерения выходного сигнала и найдены значения $G(t^{(j)})$ и вектора $\bar{D}(t^{(j)})$.

По завершении этого этапа вычислений на очередном шаге итерационного процесса с номером $s+1$ в формуле (3.12) для оценки значений вектора переменных состояния в точках $t^{(j)}$ остается неизвестной только уточненная оценка параметров $\bar{\theta}^{s+1}$.

Четвертый этап. Следующим шагом решения задачи идентификации является подстановка выражения решения (3.21) в уравнения выходов (3.3), которая для каждой экспериментальной точки $t^{(j)}$ приводит к следующим системам линейных алгебраических уравнений относительно оцениваемых параметров $\bar{\theta}^{s+1}$:

$$\begin{aligned} C\bar{x}(t^{(j)}) &= \bar{y}^{(j)}, \quad (j=1, 2, \dots, N) \Rightarrow \\ (CG(t^{(j)}))\bar{\theta}^{s+1} &= \bar{y}^{(j)} - C\bar{D}(t^{(j)}) = \bar{Y}^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{Y}^{(j)} = \bar{y}^{(j)} - C\bar{D}(t^{(j)}) = \{Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, \dots, Y_k^{(j)}\}, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
F^{(j)} = CG(t^{(j)}) &= \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(t^{(j)}) & \dots & G_{1m}(t^{(j)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}(t^{(j)}) & \dots & G_{nm}(t^{(j)}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} F_{11}^{(j)} & \dots & F_{1m}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{k1}^{(j)} & \dots & F_{km}^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^n C_{1q} G_{q1}(t^{(j)}) & \dots & \sum_{q=1}^n C_{1q} G_{qm}(t^{(j)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{q=1}^n C_{kq} G_{q1}(t^{(j)}) & \dots & \sum_{q=1}^n C_{kq} G_{qm}(t^{(j)}) \end{pmatrix}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

С учетом этих обозначений уравнения (3.22) запишем в виде:

$$F^{(j)} \vec{\theta}^{s+1} = \vec{Y}^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \tag{3.25}$$

Здесь $F^{(j)}$, $\vec{Y}^{(j)}$ – известные матрицы коэффициентов вектор правых частей соответственно.

Таким образом, задача получения уточненной оценки коэффициентов модели $\vec{\theta}^{s+1}$ на очередном шаге итерационного процесса свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений (3.25) для каждой точки на оси времени, в которой выполнялись измерения выходного сигнала.

Пятый этап. Для получения этой оценки вновь воспользуемся идеями метода наименьших квадратов [2, 10, 11], т. е. рассмотрим задачу поиска минимума функционала вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\left(\vec{Y}^{(j)} - F^{(j)} \vec{\theta}^{s+1} \right), \left(\vec{Y}^{(j)} - F^{(j)} \vec{\theta}^{s+1} \right) \right) = \\
&= J(\vec{\theta}^{s+1}) \rightarrow \min \Rightarrow \delta J(\vec{\theta}^{s+1}) = 0. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Величина $J(\vec{\theta}^{s+1})$ представляет собой меру среднеквадратического отклонения между теоретической и экспериментальной оценками выходного сигнала по всей совокупности экспериментальных данных.

Необходимое условие экстремума этого функционала $\delta J(\vec{\theta}^{s+1}) = 0$ приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно искомой оценки $\vec{\theta}^{s+1}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \theta_r^{s+1}} \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) = 0, \quad (r = 1, \dots, m) \Rightarrow \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_r^{s+1}} \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) = 0 \Rightarrow \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_r^{s+1}} \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) = 0 \Rightarrow \tag{3.27} \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^m F_{pq}^{(j)} \theta_q^{s+1} \right) F_{pr}^{(j)} = 0 \Rightarrow \\
& \sum_{q=1}^m \left(\sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pq}^{(j)} F_{pr}^{(j)} \right) \theta_q^{s+1} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pr}^{(j)} Y_p^{(j)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений для получения наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов модели на очередном шаге итерационного процесса имеет в нашем случае следующий вид:

$$M \vec{\theta}^{s+1} = \vec{Y}, \tag{3.28}$$

где M – квадратная симметричная относительно главной диагонали матрица размера $m \times m$ (информационная матрица), $\vec{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ – вектор правых частей системы уравнений (3.28), которую в теории планирования экспериментов называют канонической системой.

Элементы информационной матрицы M и компоненты вектора \vec{Y} вычисляются по формулам:

$$M_{qr} = M_{rq} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pq}^{(j)} F_{pr}^{(j)}, \quad Y_r = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pr}^{(j)} Y_p^{(j)}, \quad (q, r = 1, 2, \dots, m). \tag{3.29}$$

Система уравнений (3.28) теперь может быть решена одним из известных методов решения такого рода уравнений, в частности методом последовательного исключения Гаусса, методом последовательной регрессии или каким-либо другим.

Запишем найденное каким-либо образом решение этой системы в виде:

$$\tilde{\theta}^{s+1} = M^{-1} \vec{Y}. \tag{3.30}$$

Здесь волна сверху указывает на тот факт, что полученная оценка, кроме всего прочего, является осредненной оценкой по результатам экспериментов, содержащих по крайней мере случайные погрешности измерений.

Шестой этап. Завершающий этап решения задачи идентификации рассматриваемым методом заключается в проверке условия достижения наперед

заданной точности решения. Оценивая разницу между двумя последовательными приближениями $\tilde{\theta}^s$ и $\tilde{\theta}^{s+1}$ значений коэффициентов, необходимо принять решение либо о продолжении итерационной процедуры уточнения, повторяя её со второго этапа, либо прекратить уточнение при достижении наперед заданной точности решения. В качестве критерия прекращения итераций можно использовать, например, выполнение условия:

$$\sqrt{\frac{\left(\left(\tilde{\theta}^{s+1} - \tilde{\theta}^s \right), \left(\tilde{\theta}^{s+1} - \tilde{\theta}^s \right) \right)}{\left(\tilde{\theta}^{s+1}, \tilde{\theta}^{s+1} \right)}} \leq \varepsilon, \quad (3.31)$$

где ε – наперед заданная характеристика точности решения.

Аналогичным образом целесообразно сравнивать между собой два ближайших приближения к оценке вектора переменных состояния по формуле (3.12), а также информационные матрицы (3.29).

Как уже отмечалось, кроме критерия вида (3.31) итерационные процедуры дополняют некоторыми «разумными» ограничениями:

$$s \leq N_s - \quad (3.32)$$

на максимальное число итераций N_s , превышение которого чаще всего означает, что при реализации метода допущена ошибка либо выбрано негодное начальное приближение.

При выполнении условия вида (3.31) можно принять, что рассматриваемая задача идентификации параметров и состояния нелинейной системы методом квазилинеаризации решена, а значит, построена нелинейная модель системы вида (3.1). Конечно, нельзя забывать, что эта модель должна ещё пройти проверку на адекватность, но это уже другая проблема.

3.3 Пример идентификации системы методом квазилинеаризации при известных начальных данных

Рассмотрим пример применения метода квазилинеаризации для оценки параметров системы с заданными начальными данными. С этой целью рассмотрим модель системы с заведомо известным решением.

3.3.1 Уравнения модели

В качестве заданной системы уравнений для проверки алгоритма идентификации методом квазилинеаризации рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) - x_2(t) + \cos t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = +0 \times x_1(t) + 1 \times x_2(t) + 0 \times u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -1 \times x_1(t) - 1 \times x_2(t) + 1 \times u(t). \end{cases} \quad (3.33)$$

Пусть начальные условия имеют вид:

$$x_1(t^{(0)}) = \frac{3}{2}, \quad x_2(t^{(0)}) = 1, \quad t^{(0)} = 0. \quad (3.34)$$

Рассмотрим случай, когда входной сигнал задан в виде:

$$u(t) = \cos t. \quad (3.35)$$

Соответствующее такому входному сигналу и начальным условиям решение уравнений (3.33) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{3}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \sin t, \\ x_2(t) &= -e^{-\frac{1}{2}t} \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \cos t. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Далее приведенную систему уравнений и её решение будем рассматривать как тестовый пример для изучения и отладки алгоритма идентификации систем методом квазилинеаризации. Будем считать, что по результатам измерений выходного сигнала требуется методом квазилинеаризации идентифицировать следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \theta_1 x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \theta_2 x_1(t) + \theta_3 x_2(t) + \cos(t). \end{cases} \quad (3.37)$$

Пусть измеряемый выходной сигнал системы связан с переменными состояния следующим уравнением выходов:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t), \\ \bar{y}(t) &= \{y_1(t), y_2(t)\}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Систему уравнений (3.37) запишем в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), \bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}, \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\ \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}) = \{f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), f_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta})\}, \\ \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}). \end{cases} \Rightarrow \quad (3.39)$$

Векторная функция $\bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta})$ в правой части системы (3.38), которая в общем случае является известного вида нелинейной функцией всех своих аргументов, в рассматриваемом примере определена формулами:

$$\begin{cases} f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}) = \theta_1 x_2(t), \\ f_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}) = \theta_2 x_1(t) + \theta_3 x_2(t) + \cos t. \end{cases} \quad (3.40)$$

Таким образом, рассматриваем систему уравнений (3.39), которая в соответствии с принятой нами гипотезой описывает закон функционирования изучаемого объекта, а уравнение выходов этой системы имеет вид (3.38).

Рассмотрим вариант решения задачи идентификации, когда измерения выходного сигнала проводились в равноотстоящих узлах на оси времени:

$$\begin{aligned} t^{(j)} \in [t^{(0)}, T], \quad t^{(0)} = 0, \quad t^{(N)} = T = \pi, \quad t^{(j)} = t^{(0)} + \Delta t(j-1), \\ \Delta t = \frac{T}{(N-1)}, \quad (j=1, \dots, N=31). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Напомним, что начальные условия вида (3.34) при идентификации системы считаем известными.

В соответствии с уравнением выходов формула для выходного сигнала имеет вид:

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t), \\ y_2(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ y_1(t) = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] + \sin t + 2 \cos t, \\ y_2(t) = 3e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + 2 \sin t + \cos t. \end{cases} \Rightarrow \quad (3.42)$$

Рассчитанные по этим формулам значения компонент вектора переменных состояния, выходного и управляющего сигналов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Значения компонент вектора переменных состояния и управляющего сигнала

| j | Время $t^{(j)}$ | $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $y_1(t)$ | $y_2(t)$ | $u(t)$ |
|-----|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.0000E+00 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 | 0.3500E+01 | 0.4000E+01 | 0.1000E+01 |
| 2 | 0.1047E+00 | 0.1597E+01 | 0.8457E+00 | 0.3288E+01 | 0.4039E+01 | 0.9945E+00 |
| 3 | 0.2094E+00 | 0.1677E+01 | 0.6968E+00 | 0.3071E+01 | 0.4051E+01 | 0.9781E+00 |
| 4 | 0.3142E+00 | 0.1743E+01 | 0.5533E+00 | 0.2849E+01 | 0.4039E+01 | 0.9511E+00 |
| 5 | 0.4189E+00 | 0.1793E+01 | 0.4151E+00 | 0.2623E+01 | 0.4002E+01 | 0.9135E+00 |
| 6 | 0.5236E+00 | 0.1830E+01 | 0.2820E+00 | 0.2394E+01 | 0.3942E+01 | 0.8660E+00 |
| 7 | 0.6283E+00 | 0.1853E+01 | 0.1541E+00 | 0.2161E+01 | 0.3859E+01 | 0.8090E+00 |
| 8 | 0.7330E+00 | 0.1862E+01 | 0.3116E-01 | 0.1925E+01 | 0.3756E+01 | 0.7431E+00 |
| 9 | 0.8378E+00 | 0.1859E+01 | -0.8683E-01 | 0.1686E+01 | 0.3632E+01 | 0.6691E+00 |
| 10 | 0.9425E+00 | 0.1844E+01 | -0.1999E+00 | 0.1444E+01 | 0.3489E+01 | 0.5878E+00 |
| 11 | 0.1047E+01 | 0.1818E+01 | -0.3081E+00 | 0.1201E+01 | 0.3327E+01 | 0.5000E+00 |
| 12 | 0.1152E+01 | 0.1780E+01 | -0.4113E+00 | 0.9572E+00 | 0.3148E+01 | 0.4067E+00 |
| 13 | 0.1257E+01 | 0.1732E+01 | -0.5095E+00 | 0.7126E+00 | 0.2954E+01 | 0.3090E+00 |
| 14 | 0.1361E+01 | 0.1673E+01 | -0.6025E+00 | 0.4683E+00 | 0.2744E+01 | 0.2079E+00 |
| 15 | 0.1466E+01 | 0.1606E+01 | -0.6902E+00 | 0.2253E+00 | 0.2521E+01 | 0.1045E+00 |
| 16 | 0.1571E+01 | 0.1529E+01 | -0.7723E+00 | -0.1556E-01 | 0.2286E+01 | 0.7550E-07 |
| 17 | 0.1676E+01 | 0.1444E+01 | -0.8486E+00 | -0.2531E+00 | 0.2040E+01 | -0.1045E+00 |
| 18 | 0.1780E+01 | 0.1351E+01 | -0.9188E+00 | -0.4861E+00 | 0.1784E+01 | -0.2079E+00 |
| 19 | 0.1885E+01 | 0.1252E+01 | -0.9826E+00 | -0.7134E+00 | 0.1521E+01 | -0.3090E+00 |
| 20 | 0.1990E+01 | 0.1146E+01 | -0.1040E+01 | -0.9337E+00 | 0.1252E+01 | -0.4067E+00 |
| 21 | 0.2094E+01 | 0.1034E+01 | -0.1090E+01 | -0.1146E+01 | 0.9787E+00 | -0.5000E+00 |
| 22 | 0.2199E+01 | 0.9179E+00 | -0.1133E+01 | -0.1348E+01 | 0.7030E+00 | -0.5878E+00 |
| 23 | 0.2304E+01 | 0.7974E+00 | -0.1168E+01 | -0.1539E+01 | 0.4268E+00 | -0.6691E+00 |
| 24 | 0.2409E+01 | 0.6736E+00 | -0.1195E+01 | -0.1717E+01 | 0.1519E+00 | -0.7431E+00 |
| 25 | 0.2513E+01 | 0.5473E+00 | -0.1214E+01 | -0.1881E+01 | -0.1196E+00 | -0.8090E+00 |
| 26 | 0.2618E+01 | 0.4195E+00 | -0.1225E+01 | -0.2030E+01 | -0.3858E+00 | -0.8660E+00 |
| 27 | 0.2723E+01 | 0.2911E+00 | -0.1227E+01 | -0.2163E+01 | -0.6447E+00 | -0.9135E+00 |
| 28 | 0.2827E+01 | 0.1629E+00 | -0.1220E+01 | -0.2278E+01 | -0.8944E+00 | -0.9511E+00 |
| 29 | 0.2932E+01 | 0.3584E-01 | -0.1205E+01 | -0.2373E+01 | -0.1133E+01 | -0.9781E+00 |
| 30 | 0.3037E+01 | -0.8911E-01 | -0.1180E+01 | -0.2450E+01 | -0.1358E+01 | -0.9945E+00 |
| 31 | 0.3142E+01 | -0.2110E+00 | -0.1147E+01 | -0.2505E+01 | -0.1569E+01 | -0.1000E+01 |

3.3.2 Применение метода идентификации параметров при известных начальных данных для решения тестовой задачи

Теперь рассмотрим следующую задачу. По результатам измерений входного $u(t^{(j)})$ и выходного сигналов $\vec{y}(t^{(j)})$, приведенным в таблице 3.1, найти методом квазилинеаризации неизвестные коэффициенты $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ уравнений (3.37) при заданном уравнении выходов (3.38) и начальных условиях (3.34). По этим данным требуется рассчитать значения переменных состояния для сравнения с известным точным решением, также приведенным в таблице 3.1.

Ясно, что точное решение задачи идентификации параметров системы (3.37) в этом примере имеет вид:

$$\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \{1, -1, -1\}. \quad (3.43)$$

Рассмотрим последовательность шагов по применению метода квазилинеаризации в этом примере.

Первый этап. На первом этапе решения задачи должна быть каким-либо образом задана начальная оценка коэффициентов модели. За неимением лучшего положим:

$$\vec{\theta}^0 = 0. \quad (3.44)$$

Не составит труда найти, что соответствующая этим значениям параметров начальная оценка вектора переменных состояния $\vec{x}^0(t)$, т. е. решение системы (3.37), удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^0(t^{(j)}) = 3/2, \\ x_2^0(t^{(j)}) = 1 + \sin(t^{(j)}), \end{cases} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.45)$$

Верхний индекс без скобок здесь и далее используется для указания номера итерации в процессе уточнения оценки коэффициентов модели. Верхний индекс, взятый в скобки, указывает номер момента времени (номер измерения).

Второй этап. Линеаризуем систему уравнений (3.37) в окрестности некоторого известного состояния с номером s , используя формулу разложения правых частей этих уравнений в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \vec{f}(t, \vec{x}^{s+1}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}^{s+1}) &= \vec{f}(t, \vec{x}^s(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}^s) + \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})}{\partial \vec{x}(t)} \right)^s (\vec{x}^{s+1}(t) - \vec{x}^s(t)) + \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}} \right)^s (\vec{\theta}^{s+1} - \vec{\theta}^s). \end{aligned} \quad (3.46)$$

В результате, опуская, чтобы не загромождать без необходимости запись, аргументы функций, и удерживая только линейные члены разложения, получаем следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dx_1^{s+1}}{dt} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^s x_1^{s+1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^s x_2^{s+1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right)^s \theta_1^{s+1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \right)^s \theta_2^{s+1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \right)^s \theta_3^{s+1} + \\
&+ (f_1)^s - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^s x_1^s - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^s x_2^s - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right)^s \theta_1^s - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \right)^s \theta_2^s - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \right)^s \theta_3^s, \\
\frac{dx_2^{s+1}}{dt} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^s x_1^{s+1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)^s x_2^{s+1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \right)^s \theta_1^{s+1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right)^s \theta_2^{s+1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \right)^s \theta_3^{s+1} + \\
&+ (f_2)^s - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^s x_1^s - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)^s x_2^s - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \right)^s \theta_1^s - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right)^s \theta_2^s - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \right)^s \theta_3^s.
\end{aligned} \right. \quad (3.47)$$

Учитывая выражения (3.40), уравнения (3.47) запишем в форме:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dx_1^{s+1}}{dt} &= (0)^s x_1^{s+1} + (\theta_1)^s x_2^{s+1} + (x_2)^s \theta_1^{s+1} + (0)^s \theta_2^{s+1} + (0)^s \theta_3^{s+1} + \\
&+ (\theta_1 x_2)^s - (0)^s x_1^s - (\theta_1)^s x_2^s - (x_2)^s \theta_1^s - (0)^s \theta_2^s - (0)^s \theta_3^s, \\
\frac{dx_2^{s+1}}{dt} &= (\theta_2)^s x_1^{s+1} + (\theta_3)^s x_2^{s+1} + (0)^s \theta_1^{s+1} + (x_1)^s \theta_2^{s+1} + (x_2)^s \theta_3^{s+1} + \\
&+ (\theta_2 x_1 + \theta_3 x_2)^s + \cos(t) - (\theta_2)^s x_1^s - (\theta_3)^s x_2^s - (0)^s \theta_1^s - \\
&- (x_1)^s \theta_2^s - (x_2)^s \theta_3^s.
\end{aligned} \right. \quad (3.48)$$

Эти уравнения можно записать и в матричной форме:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}^{s+1}}{dt} &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \vec{x}^{s+1} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \vec{\theta}^{s+1} + (\vec{f})^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s \vec{x}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s \vec{\theta}^s, \\
\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right)^s &= \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}^s, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q} \right)^s = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}^s, \\
(i, p = 1, 2; q = 1, 2, 3; s = 0, \dots, N_s); & \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$(f_1)^s = (\theta_1 x_2)^s, (f_2)^s = (\theta_2 x_1 + \theta_3 x_2)^s + \cos(t), \vec{x} = \{x_1, x_2\}, \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}.$$

Третий этап. Решение уравнений (3.49) на каждом шаге $s+1$ итерационного процесса будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{s+1}(t) &= G(t) \vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(t), \Rightarrow \\
\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}^{s+1} &= \begin{pmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) & G_{13}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) & G_{23}(t) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^{s+1} + \begin{Bmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Необходимо заметить, что матрица $G(t)$ и вектор $\vec{D}(t)$ также должны рассчитываться заново на каждом шаге итерационного процесса.

В соответствии с общими формулами метода квазилинеаризации подстановка выражений (3.50) в уравнения (3.49) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d(G(t)\vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(t))}{dt} &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s (G(t)\vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(t)) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q}\right)^s \vec{\theta}^{s+1} + \\ &+ (\vec{f})^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s \vec{x}^s(t) - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q}\right)^s \vec{\theta}^s, \quad (i, p = 1, 2; q = 1, 2, 3; s = 0, \dots, N_s) \Rightarrow \\ \frac{dG(t)}{dt} \vec{\theta}^{s+1} + \frac{d\vec{D}(t)}{dt} &= \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s G(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q}\right)^s \right] \vec{\theta}^{s+1} + \\ &+ (\vec{f})^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q}\right)^s \vec{\theta}^s + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s (\vec{D}(t) - \vec{x}^s(t)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Здесь использовано условие стационарности системы, в соответствии с которым имеет место уравнение:

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = 0. \quad (3.52)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях вектора параметров $(\vec{\theta}^{s+1})^1$, $(\vec{\theta}^{s+1})^0$, от уравнений (3.51) приходим к уравнениям:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s G(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q}\right)^s, \quad (3.53)$$

$$(i, p = 1, 2; q = 1, 2, 3; s = 0, \dots, N_s)$$

$$\frac{d\vec{D}(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s \vec{D}(t) + \left[(\vec{f})^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_q}\right)^s \vec{\theta}^s - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\right)^s \vec{x}^s(t) \right]. \quad (3.54)$$

В соответствии с соотношениями (3.34), (3.50), решение этих уравнений должно удовлетворять начальным условиям:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{s+1}(0) &= G(0)\vec{\theta}^{s+1} + \vec{D}(0) = \vec{x}(0), \\ \vec{x}(0) &= \{x_1(0), x_2(0)\}, \quad x_1(0) = \frac{3}{2}, \quad x_2(0) = 1, \end{aligned} \quad (3.55)$$

На этом основании при решении уравнений (3.53), (3.54) можно ставить соответственно граничные условия вида:

$$\begin{aligned} G(0) &= 0, \\ \bar{D}(0) &= \bar{x}(0). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Для решения уравнений (3.53), (3.54) с граничными условиями (3.56) при решении этого примера была использована схема Эйлера с пересчетом [12]. Результаты расчета переменных состояния по формуле (3.50) на разных этапах итерационного процесса приведены в таблице 3.2. Сравнивая результаты расчета вектора переменных состояния на пятом шаге итерационного процесса идентификации параметров и состояния системы (последние колонки табл. 3.2) с точным решением, приведенным в таблице 3.1, можно отметить хорошее совпадение при относительно малом количестве итераций.

Таблица 3.2 – Оценки вектора переменных состояния
в ходе итерационного процесса

| j | $s = 0$ | | $s + 1 = 1$ | | $s + 1 = 2$ | |
|-----|------------------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $x_1^s(t^{(j)})$ | $x_2^s(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ |
| 1 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 |
| 2 | 0.1500E+01 | 0.1104E+01 | 0.1480E+01 | 0.9067E+00 | 0.1474E+01 | 0.9023E+00 |
| 3 | 0.1500E+01 | 0.1208E+01 | 0.1457E+01 | 0.8247E+00 | 0.1450E+01 | 0.8188E+00 |
| 4 | 0.1500E+01 | 0.1309E+01 | 0.1433E+01 | 0.7525E+00 | 0.1428E+01 | 0.7461E+00 |
| 5 | 0.1500E+01 | 0.1406E+01 | 0.1407E+01 | 0.6888E+00 | 0.1408E+01 | 0.6808E+00 |
| 6 | 0.1500E+01 | 0.1500E+01 | 0.1378E+01 | 0.6321E+00 | 0.1390E+01 | 0.6196E+00 |
| 7 | 0.1500E+01 | 0.1587E+01 | 0.1349E+01 | 0.5806E+00 | 0.1374E+01 | 0.5594E+00 |
| 8 | 0.1500E+01 | 0.1669E+01 | 0.1317E+01 | 0.5328E+00 | 0.1359E+01 | 0.4971E+00 |
| 9 | 0.1500E+01 | 0.1742E+01 | 0.1284E+01 | 0.4870E+00 | 0.1345E+01 | 0.4303E+00 |
| 10 | 0.1500E+01 | 0.1808E+01 | 0.1250E+01 | 0.4413E+00 | 0.1334E+01 | 0.3562E+00 |
| 11 | 0.1500E+01 | 0.1865E+01 | 0.1214E+01 | 0.3941E+00 | 0.1324E+01 | 0.2729E+00 |
| 12 | 0.1500E+01 | 0.1913E+01 | 0.1178E+01 | 0.3436E+00 | 0.1317E+01 | 0.1786E+00 |
| 13 | 0.1500E+01 | 0.1950E+01 | 0.1140E+01 | 0.2883E+00 | 0.1311E+01 | 0.7169E-01 |
| 14 | 0.1500E+01 | 0.1977E+01 | 0.1102E+01 | 0.2263E+00 | 0.1309E+01 | -0.4877E-01 |
| 15 | 0.1500E+01 | 0.1994E+01 | 0.1064E+01 | 0.1562E+00 | 0.1310E+01 | -0.1834E+00 |
| 16 | 0.1500E+01 | 0.1999E+01 | 0.1025E+01 | 0.7659E-01 | 0.1314E+01 | -0.3324E+00 |
| 17 | 0.1500E+01 | 0.1994E+01 | 0.9865E+00 | -0.1401E-01 | 0.1321E+01 | -0.4954E+00 |
| 18 | 0.1500E+01 | 0.1977E+01 | 0.9480E+00 | -0.1168E+00 | 0.1333E+01 | -0.6716E+00 |
| 19 | 0.1500E+01 | 0.1950E+01 | 0.9100E+00 | -0.2329E+00 | 0.1349E+01 | -0.8596E+00 |
| 20 | 0.1500E+01 | 0.1913E+01 | 0.8726E+00 | -0.3632E+00 | 0.1370E+01 | -0.1057E+01 |
| 21 | 0.1500E+01 | 0.1865E+01 | 0.8361E+00 | -0.5086E+00 | 0.1396E+01 | -0.1262E+01 |
| 22 | 0.1500E+01 | 0.1808E+01 | 0.8005E+00 | -0.6697E+00 | 0.1428E+01 | -0.1472E+01 |
| 23 | 0.1500E+01 | 0.1742E+01 | 0.7662E+00 | -0.8470E+00 | 0.1465E+01 | -0.1681E+01 |
| 24 | 0.1500E+01 | 0.1669E+01 | 0.7331E+00 | -0.1041E+01 | 0.1507E+01 | -0.1886E+01 |
| 25 | 0.1500E+01 | 0.1587E+01 | 0.7016E+00 | -0.1251E+01 | 0.1555E+01 | -0.2081E+01 |
| 26 | 0.1500E+01 | 0.1500E+01 | 0.6717E+00 | -0.1478E+01 | 0.1609E+01 | -0.2261E+01 |
| 27 | 0.1500E+01 | 0.1406E+01 | 0.6436E+00 | -0.1721E+01 | 0.1668E+01 | -0.2418E+01 |
| 28 | 0.1500E+01 | 0.1309E+01 | 0.6173E+00 | -0.1980E+01 | 0.1731E+01 | -0.2544E+01 |
| 29 | 0.1500E+01 | 0.1208E+01 | 0.5930E+00 | -0.2254E+01 | 0.1800E+01 | -0.2631E+01 |
| 30 | 0.1500E+01 | 0.1104E+01 | 0.5706E+00 | -0.2543E+01 | 0.1871E+01 | -0.2668E+01 |

| j | $s = 0$ | | $s + 1 = 1$ | | $s + 1 = 2$ | |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $x_1^s(t^{(j)})$ | $x_2^s(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ |
| 31 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 | 0.5502E+00 | -0.2845E+01 | 0.1946E+01 | -0.2644E+01 |
| j | $s + 1 = 3$ | | $s + 1 = 4$ | | $s + 1 = 5$ | |
| | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ |
| 1 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 | 0.1500E+01 | 0.1000E+01 |
| 2 | 0.1542E+01 | 0.8110E+00 | 0.1585E+01 | 0.8489E+00 | 0.1596E+01 | 0.8460E+00 |
| 3 | 0.1582E+01 | 0.6455E+00 | 0.1655E+01 | 0.7014E+00 | 0.1677E+01 | 0.6974E+00 |
| 4 | 0.1621E+01 | 0.4994E+00 | 0.1710E+01 | 0.5581E+00 | 0.1742E+01 | 0.5540E+00 |
| 5 | 0.1659E+01 | 0.3692E+00 | 0.1753E+01 | 0.4195E+00 | 0.1793E+01 | 0.4159E+00 |
| 6 | 0.1696E+01 | 0.2516E+00 | 0.1784E+01 | 0.2858E+00 | 0.1829E+01 | 0.2829E+00 |
| 7 | 0.1732E+01 | 0.1439E+00 | 0.1803E+01 | 0.1570E+00 | 0.1852E+01 | 0.1549E+00 |
| 8 | 0.1766E+01 | 0.4351E-01 | 0.1812E+01 | 0.3319E-01 | 0.1862E+01 | 0.3191E-01 |
| 9 | 0.1799E+01 | -0.5168E-01 | 0.1810E+01 | -0.8562E-01 | 0.1859E+01 | -0.8619E-01 |
| 10 | 0.1829E+01 | -0.1436E+00 | 0.1799E+01 | -0.1995E+00 | 0.1844E+01 | -0.1994E+00 |
| 11 | 0.1856E+01 | -0.2339E+00 | 0.1779E+01 | -0.3084E+00 | 0.1817E+01 | -0.3077E+00 |
| 12 | 0.1880E+01 | -0.3240E+00 | 0.1749E+01 | -0.4123E+00 | 0.1779E+01 | -0.4110E+00 |
| 13 | 0.1899E+01 | -0.4151E+00 | 0.1711E+01 | -0.5113E+00 | 0.1731E+01 | -0.5093E+00 |
| 14 | 0.1913E+01 | -0.5081E+00 | 0.1664E+01 | -0.6052E+00 | 0.1673E+01 | -0.6024E+00 |
| 15 | 0.1920E+01 | -0.6039E+00 | 0.1608E+01 | -0.6939E+00 | 0.1605E+01 | -0.6901E+00 |
| 16 | 0.1920E+01 | -0.7029E+00 | 0.1544E+01 | -0.7772E+00 | 0.1529E+01 | -0.7722E+00 |
| 17 | 0.1912E+01 | -0.8056E+00 | 0.1471E+01 | -0.8548E+00 | 0.1444E+01 | -0.8485E+00 |
| 18 | 0.1895E+01 | -0.9122E+00 | 0.1390E+01 | -0.9264E+00 | 0.1351E+01 | -0.9187E+00 |
| 19 | 0.1868E+01 | -0.1023E+01 | 0.1300E+01 | -0.9916E+00 | 0.1251E+01 | -0.9825E+00 |
| 20 | 0.1831E+01 | -0.1137E+01 | 0.1202E+01 | -0.1050E+01 | 0.1146E+01 | -0.1040E+01 |
| 21 | 0.1783E+01 | -0.1254E+01 | 0.1096E+01 | -0.1101E+01 | 0.1034E+01 | -0.1090E+01 |
| 22 | 0.1723E+01 | -0.1374E+01 | 0.9813E+00 | -0.1145E+01 | 0.9175E+00 | -0.1132E+01 |
| 23 | 0.1653E+01 | -0.1497E+01 | 0.8592E+00 | -0.1180E+01 | 0.7969E+00 | -0.1167E+01 |
| 24 | 0.1571E+01 | -0.1620E+01 | 0.7295E+00 | -0.1207E+01 | 0.6732E+00 | -0.1195E+01 |
| 25 | 0.1479E+01 | -0.1743E+01 | 0.5926E+00 | -0.1224E+01 | 0.5470E+00 | -0.1214E+01 |
| 26 | 0.1377E+01 | -0.1866E+01 | 0.4489E+00 | -0.1231E+01 | 0.4192E+00 | -0.1224E+01 |
| 27 | 0.1267E+01 | -0.1985E+01 | 0.2990E+00 | -0.1228E+01 | 0.2909E+00 | -0.1226E+01 |
| 28 | 0.1150E+01 | -0.2101E+01 | 0.1435E+00 | -0.1215E+01 | 0.1628E+00 | -0.1220E+01 |
| 29 | 0.1029E+01 | -0.2210E+01 | -0.1693E-01 | -0.1189E+01 | 0.3600E-01 | -0.1205E+01 |
| 30 | 0.9059E+00 | -0.2311E+01 | -0.1814E+00 | -0.1152E+01 | -0.8865E-01 | -0.1181E+01 |
| 31 | 0.7854E+00 | -0.2401E+01 | -0.3488E+00 | -0.1103E+01 | -0.2102E+00 | -0.1149E+01 |

Четвертый этап. В соответствии с общим алгоритмом расчета на каждом шаге итерационного процесса рассчитываем компоненты векторов $\vec{Y}^{(j)}$:

$$\vec{Y}^{(j)} = \vec{y}^{(j)} - C\vec{D}(t^{(j)}) = \{Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}\}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Также на каждом итерационном шаге рассчитывается матрица $F^{(j)}$, которая аналогична расширенной матрице плана в теории планирования эксперимента:

$$F^{(j)} = CG(t^{(j)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(t^{(j)}) & G_{12}(t^{(j)}) & G_{13}(t^{(j)}) \\ G_{21}(t^{(j)}) & G_{22}(t^{(j)}) & G_{23}(t^{(j)}) \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Пятый этап. На следующем шаге формируется система уравнений:

$$M\vec{\theta}^{s+1} = \vec{Y}, \quad (3.59)$$

где элементы матрицы M и вектора \vec{Y} рассчитываются по формулам:

$$M_{rq} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pq}^{(j)} F_{pr}^{(j)}, \quad Y_r = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pr}^{(j)} Y_p^{(j)}, \quad (q, r = 1, 2, 3; k = 2; N = 31). \quad (3.60)$$

В рассматриваемой задаче, например, для $s = 0, 2, 4, 6$ эти уравнения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0.1445\text{E}+04 & 0.1038\text{E}+04 & 0.1156\text{E}+04 \\ 0.1038\text{E}+04 & 0.1166\text{E}+04 & 0.1297\text{E}+04 \\ 0.1156\text{E}+04 & 0.1297\text{E}+04 & 0.1445\text{E}+04 \end{pmatrix} \vec{\theta}^{s+1} = \begin{pmatrix} -0.1086\text{E}+04 \\ -0.1115\text{E}+04 \\ -0.1237\text{E}+04 \end{pmatrix}, \quad s = 0, \quad (3.61)$$

$$\begin{pmatrix} 0.7620\text{E}+02 & 0.4297\text{E}+01 & 0.3478\text{E}+02 \\ 0.4297\text{E}+01 & 0.5515\text{E}+02 & -0.1927\text{E}+02 \\ 0.3478\text{E}+02 & -0.1927\text{E}+02 & 0.4039\text{E}+02 \end{pmatrix} \vec{\theta}^{s+1} = \quad (3.62)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1019\text{E}+02 \\ -0.4927\text{E}+02 \\ -0.2433\text{E}+01 \end{pmatrix}, \quad s = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 0.4263\text{E}+02 & -0.8007\text{E}+02 & 0.3856\text{E}+02 \\ -0.8007\text{E}+02 & 0.3386\text{E}+03 & -0.7830\text{E}+02 \\ 0.3856\text{E}+02 & -0.7830\text{E}+02 & 0.7093\text{E}+02 \end{pmatrix} \vec{\theta}^{s+1} = \quad (3.63)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8421\text{E}+02 \\ -0.3405\text{E}+03 \\ 0.4611\text{E}+02 \end{pmatrix}, \quad s = 4,$$

$$\begin{pmatrix} 0.4175E+02 & -0.7846E+02 & 0.3949E+02 \\ -0.7846E+02 & 0.3404E+03 & -0.7576E+02 \\ 0.3949E+02 & -0.7576E+02 & 0.7004E+02 \end{pmatrix} \bar{\theta}^{s+1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8078E+02 \\ -0.3433E+03 \\ 0.4533E+02 \end{pmatrix}, s = 6. \quad (3.64)$$

Следует отметить, при решении этих уравнений может оказаться полезной процедура метода регуляризации, так как свойства информационной матрицы M существенно зависят как от выбора модели процесса (вида исходных уравнений модели), так и от выбора точек измерения на оси времени. При этом зачастую информационная матрица оказывается плохо обусловленной. В рассматриваемом примере эти уравнения относительно уточняемой на каждом шаге итерационного процесса оценки коэффициентов модели решались методом исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцам. Результаты последовательного уточнения оценки параметров (вектора коэффициентов) $\bar{\theta}^{s+1}$ модели методом квазилинеаризации сведены в таблице 3.3. Нетрудно заметить, что в данном случае метод квазилинеаризации обеспечивает практически точное решение задачи уже за 5÷6 итераций.

Таблица 3.3 – Оценки компонент вектора идентифицируемых параметров

| j | $\bar{\theta}^0$ | $s+1=1$ | $s+1=2$ | $s+1=3$ | $s+1=4$ | $s+1=5$ | $s+1=6$ |
|------------------|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| θ_1^{s+1} | 0.0 | -0.185E+00 | -0.265E+00 | 0.404E+00 | 0.889E+00 | 0.998E+00 | 0.999E+00 |
| θ_2^{s+1} | 0.0 | -0.206E+01 | -0.310E+00 | -0.128E+01 | -0.103E+01 | -0.100E+01 | -0.100E+01 |
| θ_3^{s+1} | 0.0 | -0.114E+01 | -0.154E+01 | -0.102E+01 | -0.918E+00 | -0.997E+00 | -0.998E+00 |

Следует отметить, что применение для решения этой задачи численного метода, основанного на дискретизации задачи путем замены производных их конечно-разностными аналогами (правосторонними производными) с последующим применением метода максимального правдоподобия дает в итоге следующий результат:

$$\tilde{\theta}_1 = 0.9504E+00, \quad \tilde{\theta}_2 = -0.9487E+00, \quad \tilde{\theta}_3 = -0.9398E+00.$$

Эта оценка по точности существенно уступает оценке, полученной методом квазилинеаризации.

Таким образом, рассмотренный вариант метода квазилинеаризации представляет собой достаточно универсальный метод идентификации параметров динамических систем с неплохими характеристиками сходимости.

3.4 Идентификация начального состояния и параметров нелинейных стационарных динамических систем методом квазилинеаризации

Наблюдения, а значит и измерения выходного сигнала динамической системы, как правило, производятся значительно позднее начала функционирования объекта. В результате возникает необходимость оценки по результатам измерений не только параметров (коэффициентов) уравнений модели, но и начальных условий, при которых система начала функционировать. Метод квазилинеаризации позволяет решать и такие задачи идентификации. Рассмотрим основные положения метода квазилинеаризации для идентификации параметров и начального состояния, описанные, например, в работах [2, 10, 11].

3.4.1 Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда закон функционирования изучаемого объекта (например, системы управления) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}), \quad t \in [t^{(0)}, T]. \quad (3.65)$$

Как и ранее, здесь

$$\vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}) = \{f_1(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}), \dots, f_n(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})\} -$$

нелинейная векторная функция заданного вида с неизвестными параметрами (то есть вид функции для каждой компоненты этого вектора известен), t – время, $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – вектор параметров системы, которые требуется идентифицировать, $\vec{x} = \vec{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ – вектор состояний системы, $\vec{u} = \vec{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ – измеряемый вектор входного сигнала (управления).

Кроме уравнения состояния (3.65) должно быть задано уравнение выходов. Обычно это система линейных алгебраических уравнений, которую запишем в виде:

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t), \quad (3.66)$$

где вектор $\vec{y} = \vec{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_k(t)\}$ – вектор измеряемого выходного сигнала,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kn} \end{pmatrix} - \text{заданная матрица коэффициентов.}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что для решения уравнений (3.65) необходимо задать соответствующие начальные условия. Однако задачи идентификации, в частности, отличаются тем, что начальные условия, вообще говоря, неизвестны, так как момент времени начала измерений с целью идентификации, не совпадает с моментом начала функционирования системы. Одной из очень привлекательных сторон метода квазилинеаризации является то, что вопрос о восстановлении начальных условий решается в соответствии с общим алгоритмом решения задачи идентификации.

В скалярной форме уравнение (3.65) имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), t \in [t^{(0)}, T], (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.67)$$

Еще m дополнительных ограничений получают из условия стационарности системы (идентифицируемые параметры не изменяются с течением времени), что дает следующие уравнения для ограничений:

$$\dot{\bar{\theta}} = 0, \quad (3.68)$$

или, в скалярной форме,

$$\dot{\theta}_i = 0, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.69)$$

Системы уравнений (3.65), (3.68) можно объединить и записать в виде:

$$\dot{\bar{z}}(t) = \bar{\psi}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) \quad (3.70)$$

Вектор $\bar{z}(t)$ в этом уравнении представляет собой объединение векторов $\bar{x} = \bar{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ и $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$:

$$\bar{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t), z_{n+1}, \dots, z_{n+m}\} = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \theta_1, \dots, \theta_m\}. \quad (3.71)$$

Аналогичным образом вектор $\bar{\psi}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t))$ в правой части уравнения (3.70) представляет собой объединение векторов правых частей систем уравнений (3.65), (3.68):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)) &= \{\psi_1(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)), \dots, \psi_n(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)), \psi_{n+1}, \dots, \psi_{n+m}\} = \\ &= \{f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), \dots, f_n(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), 0, \dots, 0\}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Уравнение выходов (3.66) теперь запишем в виде:

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{z}(t), \quad (3.73)$$

$$\text{где } \bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \dots & \bar{C}_{1(n+m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{C}_{k1} & \dots & \bar{C}_{k(n+m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \text{ заданная матрица коэф-}$$

фициентов.

Теперь рассмотрим следующую задачу. По результатам измерений в дискретном наборе точек на оси времени:

$$t^{(j)} = T^{(0)} + \Delta T(j-1), \quad \Delta T = \frac{T - T^{(0)}}{N-1}, \quad (j=1, 2, \dots, N) - \quad (3.74)$$

входного $\bar{u}(t^{(j)})$ и выходного $\bar{y}(t^{(j)})$ сигналов идентифицировать значения переменных состояния $\bar{x}(t^{(j)})$ (в том числе начальные условия $\bar{x}(t^{(0)})$) и неизвестные коэффициенты $\bar{\theta}$ для системы с нелинейным законом функционирования:

$$\dot{\bar{z}}(t) = \bar{\psi}(t, \bar{z}(t), \bar{u}(t)), \quad t \in [t^{(0)}, T] - \quad (3.75)$$

и линейным алгебраическим уравнением выходов:

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{z}(t). \quad (3.76)$$

Верхний индекс, взятый в скобки, как и ранее, используется для указания номера точки на оси времени. Одновременно его можно рассматривать и как номер измерения. Момент времени $T^{(0)} \in [t^{(0)}, T]$ здесь будем рассматривать как момент начала измерений, и этот момент времени отличается от момента начала функционирования системы $t^{(0)}$, когда задаются начальные условия.

3.4.2 Описание алгоритма идентификации параметров и начального состояния нелинейных систем методом квазилинеаризации

Рассмотрим последовательность шагов идентификации параметров и начального состояния с системы с математической моделью вида (3.75), (3.76) методом квазилинеаризации.

Первый этап. Будем считать, что на начальном этапе задана некоторая исходная оценка параметров модели и вектора переменных состояния, т. е. задано нулевое приближение для вектора $\bar{z}^0(t) = \bar{z}^{ln}(t)$, которые обозначим соответственно:

$$\begin{aligned}\bar{z}^0(t) &= \{z_1^0(t), \dots, z_n^0(t), z_{n+1}^0, \dots, z_{n+m}^0\} = \{x_1^0(t), \dots, x_n^0(t), \theta_1^0, \dots, \theta_m^0\} = \\ &= \{x_1^{In}(t), \dots, x_n^{In}(t), \theta_1^{In}, \dots, \theta_m^{In}\}.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Здесь и далее верхний индекс без скобок указывает номер итерации в процедуре последовательного уточнения переменных состояния и параметров модели.

За неимением лучшего в качестве исходной оценки вектора параметров зачастую выбирается нулевая оценка:

$$\bar{\theta}^0 = \{\theta_1^0, \dots, \theta_m^0\} = \{\theta_1^{In}, \dots, \theta_m^{In}\} = \{0, \dots, 0\} \quad (3.78)$$

Для вектора переменных состояния в этом случае начальная оценка также может быть получена относительно просто, т. к. если $\bar{\theta}^0 = 0$, то уравнения (3.65) легко интегрируются.

Второй этап. Теперь рассмотрим общий случай, считая, что известна некоторая оценка вектора $\bar{z}^s = \bar{z}^s(t)$ в некотором приближении с номером s . Тогда оценку этого вектора в следующем приближении $s+1$ можно получить, используя разложение правой части уравнения (3.75) в ряд Тейлора в окрестности известной оценки $\bar{z}^s = \bar{z}^s(t)$. Ограничиваясь только линейными членами ряда, от уравнения (3.75) приходим к следующему:

$$\dot{\bar{z}}^{s+1}(t) = \bar{\psi}(t, \bar{z}^{s+1}(t), \bar{u}(t)) = \bar{\psi}(t, \bar{z}^s(t), \bar{u}(t)) + \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}}\right)^s (\bar{z}^{s+1}(t) - \bar{z}^s(t)). \quad (3.79)$$

Здесь квадратная матрица $\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}}\right)^s$ имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}}\right)^s = \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}}\right)\Big|_{\bar{z}=\bar{z}^s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial z_{n+m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n+m}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n+m}}{\partial z_{n+m}} \end{pmatrix}\Big|_{\bar{z}=\bar{z}^s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial z_{n+m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial z_{n+m}} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Наряду с этой матрицей целесообразно определить следующую матрицу:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}}\right)^s &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_{n+m}} \end{pmatrix}_{\vec{z}=\vec{z}^s} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\theta}}\right)^s = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_m} \end{pmatrix}_{\substack{\vec{x}=\vec{x}^s \\ \vec{\theta}=\vec{\theta}^s}}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

С целью сокращения записи здесь опущены аргументы функций $\vec{\psi}(t, \vec{z}(t), \vec{u}(t))$ и $\vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta})$.

В результате этих преобразований произошло одно существенное изменение задачи: на каждом шаге итерационного процесса уравнение (3.79) линейно относительно уточненной оценки $\vec{z}^{s+1}(t)$ вектора $\vec{z}(t)$.

Теперь уравнение (3.79) теперь запишем в виде:

$$\dot{\vec{z}}^{s+1}(t) = \left(\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{z}}\right)^s \vec{z}^{s+1}(t) + \vec{V}^s(t). \tag{3.82}$$

Вектор $\vec{V}^s(t)$ в этом уравнении определен следующим образом:

$$\vec{V}^s(t) = \vec{\Psi}^s(t, \vec{z}^s(t), \vec{u}(t)) - \left(\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{z}}\right)^s \vec{z}^s(t) \tag{3.83}$$

и полностью определяется решением, найденным на предыдущем шаге с номером s итерационного процесса.

Третий этап. Теперь рассмотрим процедуру решения уравнений (3.82). Уравнения (3.82), в отличие от исходных уравнений (3.75), представляют собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Как известно, решение такой системы можно записать в виде:

$$\vec{z}^{s+1}(t) = \Phi^s(t, t^{(0)}) \vec{z}^{s+1}(t^{(0)}) + \vec{P}^s(t), \tag{3.84}$$

где $\Phi^s(t, t^{(0)})$ – матрица Коши, которая определяет общее решение однородной системы, соответствующей уравнениям (3.82), а $\vec{P}^s(t)$ – частное решение этой системы.

Вектор $\bar{z}^{s+1}(t^{(0)})$ определяет начальное состояние системы (начальные условия) и является неизвестной величиной в рассматриваемой задаче.

Как известно, матрица Коши для задачи (3.82) удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Phi}^s(t, t^{(0)}) = \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right)^s \Phi^s(t, t^{(0)}), \quad (3.85)$$

при начальных условиях

$$\Phi^s(t^{(0)}, t^{(0)}) = E, \quad (3.86)$$

где E – единичная матрица.

В свою очередь, частное решение $\bar{P}^s(t)$ уравнения (3.82) удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\bar{P}}^s(t) = \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{P}^s(t) + \left[\bar{\Psi}^s(t, \bar{z}^s(t), \bar{u}(t)) - \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{z}^s(t) \right], \quad (3.87)$$

при начальных условиях

$$\bar{P}^s(t^{(0)}) = 0. \quad (3.88)$$

Таким образом, на этом этапе задача идентификации свелась к поиску решения уравнений (3.82) в виде (3.84). Для этого требуется найти матрицу Коши $\Phi^s(t, t^{(0)})$ и частное решение $\bar{P}^s(t)$. В принципе эти решения могут быть найдены аналитическими методами. Однако это не слишком удобно, так как процедуру поиска аналитического решения придется повторять на каждом шаге итерационного процесса, причем вид решения может существенно меняться. Уравнения (3.85), (3.87) при заданных начальных условиях (3.86), (3.88) замечательны, в том числе тем, что на каждом шаге итерационного процесса при известном начальном приближении $\bar{z}^s(t)$ они могут быть относительно просто решены известными численными методами (см., например, [12, 15, 17]), в частности по схеме Эйлера с пересчетом. Решая эти задачи для дискретного набора равноотстоящих узлов на оси времени, на основании формулы (3.84) получим следующие формулы для расчета уточненной оценки вектора $\bar{z}^{s+1}(t^{(j)})$:

$$\bar{z}^{s+1}(t^{(j)}) = \Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \bar{z}^{s+1}(t^{(0)}) + \bar{P}^s(t^{(j)}). \quad (3.89)$$

При численном решении уравнений (3.85), (3.87) необходимо помнить, что измерения, как правило, проводятся позднее чем начинается функционирование системы, $t^{(0)} \leq T^{(0)}$. Поэтому потребуется выполнить расчет матриц

$\Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)})$ и вектора $\vec{P}^s(t^{(j)})$ во всех узлах интервала времени $[t^{(0)}, T^{(0)}]$, предшествовавших моменту $T^{(0)}$ начала измерений. Шаг Δt по времени при численном решении уравнений (3.85), (3.87) определяется условиями достижения заданной точности расчета, а значит, в общем случае не будет совпадать с шагом $\Delta T = (T - T^{(0)}) / (N - 1)$ выполнения измерений. Поэтому может потребоваться дополнительная процедура совмещения узлов на временной оси, в которых выполнялись измерения и узлов, для которых получается решение уравнений (3.85), (3.87). При записи формулы (3.89) принято, что эта чисто техническая проблема каким-то образом решена, так что точки на оси времени, для которых получено решение уравнений задачи, совпадают с точками, для которых выполнялись измерения входного и выходного сигналов.

Таким образом, основным результатом этого этапа является запись решения для уравнения состояния (3.79) в виде (3.89). При этом матрица Коши $\Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)})$ и вектор $\vec{P}^s(t^{(j)})$ в этой формуле известны, а неизвестной величиной остается уточненная оценка вектора $\vec{z}^{s+1}(t^{(0)})$ – начального состояния и параметров системы. Напомним, что матрица $\Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)})$ и вектор $\vec{P}^s(t^{(j)})$ по предположению найдены в те же моменты времени, когда выполнялись измерения выходного сигнала.

Следует также обратить внимание на то, что в матрице $\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \vec{z}}\right)^s$ элементы строк с номерами $i = n + 1, n + 2, \dots, n + m$ равны нулю (см. формулу (3.80)). Анализируя соответствующие уравнения в системах (3.85), (3.87), нетрудно увидеть, что в результате для компонент вектора $z_{n+1}^{s+1} = \theta_1^{s+1}, \dots, z_{n+m}^{s+1} = \theta_m^{s+1}$ формула (3.89) сводится к равенству:

$$z_i^{s+1}(t^{(j)}) = z_i^{s+1}(t^{(0)}), \quad (i = n + 1, \dots, n + m). \quad (3.90)$$

Это означает, что соответствующие строки матрицы Коши $\Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)})$ и элементы вектора $\vec{P}^s(t^{(j)})$ на данном этапе можно не рассматривать и упростить запись формул, необходимых для дальнейшего анализа задачи.

Введем матрицу $G^s(t^{(j)}, t^{(0)})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
G^s(t^{(j)}, t^{(0)}) = (G_{pq}^s) &= \begin{pmatrix} G_{11}^s(t^{(j)}) & \dots & G_{1n+m}^s(t^{(j)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}^s(t^{(j)}) & \dots & G_{nn+m}^s(t^{(j)}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \Phi_{11}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \dots & \Phi_{1n+m}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n1}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \dots & \Phi_{nn+m}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Подобным же образом введем вектор $\bar{D}^s(t^{(j)})$:

$$\bar{D}^s(t^{(j)}) = \{D_1^s(t^{(j)}), \dots, D_n^s(t^{(j)})\} = \{P_1^s(t^{(j)}), \dots, P_n^s(t^{(j)})\}. \tag{3.92}$$

С учетом этих обозначений для компонент вектора переменных состояния $\bar{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ формулу (3.89) можно записать в виде:

$$\bar{x}^{s+1}(t^{(j)}) = G^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \bar{z}^{s+1}(t^{(0)}) + \bar{D}^s(t^{(j)}). \tag{3.93}$$

Таким образом, основным результатом этого этапа решения задачи идентификации является формула решения вида (3.93), в которой неизвестным является вектор $\bar{z}^{s+1}(t^{(0)})$.

Четвертый этап. Теперь необходимо получить систему уравнений, которая позволяет найти вектор $\bar{z}^{s+1}(t^{(0)})$ по результатам измерений выходного сигнала. С этой целью подставим формулу (3.93) в алгебраическое уравнение выходов (3.66) и результат запишем в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$F^{(j)} \bar{z}^{s+1}(t^{(0)}) = \bar{Y}^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \tag{3.94}$$

Матрица $F^{(j)}$ в этой формуле определена выражением:

$$\begin{aligned}
F^{(j)} = CG^s(t^{(j)}, t^{(0)}) &= \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}^s(t^{(j)}) & \dots & G_{1n+m}^s(t^{(j)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}^s(t^{(j)}) & \dots & G_{nn+m}^s(t^{(j)}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} F_{11}^{(j)} & \dots & F_{1n+m}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{k1}^{(j)} & \dots & F_{kn+m}^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^n C_{1q} G_{q1}^s(t^{(j)}) & \dots & \sum_{q=1}^n C_{1q} G_{qn+m}^s(t^{(j)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{q=1}^n C_{kq} G_{q1}^s(t^{(j)}) & \dots & \sum_{q=1}^n C_{kq} G_{qn+m}^s(t^{(j)}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Вектор $\vec{Y}^{(j)}$ в системе (2.94) вычисляется по формуле:

$$\vec{Y}^{(j)} = \vec{y}(t^{(j)}) - C\bar{D}^s(t^{(j)}). \quad (3.96)$$

Таким образом, задача получения уточненной оценки начального состояния и параметров системы $\vec{z}^{s+1}(t^{(0)})$ свелась к необходимости удовлетворить множеству матричных уравнений вида (3.94) для каждой точки $t^{(j)}$ ($j=1,2,\dots,N$) на оси времени. Эти уравнения могут иметь множество решений. В таких условиях необходим критерий для выбора наилучшего решения задачи.

Пятый этап. Для получения в этих условия оценки величин $\vec{z}^{s+1}(t^{(0)})$ воспользуемся идеями метода наименьших квадратов [2, 4, 8, 11].

Рассмотрим задачу поиска минимума функционала:

$$\sum_{j=1}^N \left(\left(\vec{Y}^{(j)} - F^{(j)} \vec{\xi}^{s+1} \right), \left(\vec{Y}^{(j)} - F^{(j)} \vec{\xi}^{s+1} \right) \right) = J(\vec{\xi}^{s+1}) \rightarrow \min, \quad (3.97)$$

где для сокращения записи принято обозначение $\vec{\xi}^{s+1} = \vec{z}^{s+1}(t^{(0)})$.

В стационарной точке вариация этого функционала должна равняться нулю, т. е. необходимое условие экстремума функционала (3.97) имеет вид:

$$\delta J(\vec{\xi}^{s+1}) = 0. \quad (3.98)$$

В свою очередь, условие (3.98) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно искомой оценки вектора $\vec{\xi}^{s+1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_r^{s+1}} \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_r^{s+1}} \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_r^{s+1}} \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^k \left(Y_p^{(j)} - \sum_{q=1}^{n+m} F_{pq}^{(j)} \xi_q^{s+1} \right) F_{pr}^{(j)} = 0 \Rightarrow \\ & \sum_{q=1}^{n+m} \left(\sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pq}^{(j)} F_{pr}^{(j)} \right) \xi_q^{s+1} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pr}^{(j)} Y_p^{(j)}, \quad (r=1,2,\dots,n+m). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Эту систему уравнений для получения наилучшей линейной несмещенной оценки параметров и начального состояния $\vec{\xi}^{s+1}$ изучаемого объекта запишем в виде:

$$M\vec{\xi}^{s+1} = \vec{Y}, \quad (3.100)$$

где M – квадратная симметричная относительно главной диагонали матрица размера $(n+m) \times (n+m)$ (информационная матрица), $\vec{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+m}\}$ – вектор правых частей системы уравнений (3.99).

Элементы информационной матрицы M и компоненты вектора \vec{Y} вычисляются по формулам:

$$M_{qr} = M_{rq} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pq}^{(j)} F_{pr}^{(j)}, \quad (3.101)$$

$$Y_r = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pr}^{(j)} Y_p^{(j)}, \quad (q, r = 1, 2, \dots, n+m).$$

Система уравнений (3.100) теперь может быть решена одним из известных методов решения такого рода уравнений, в частности методом последовательного исключения Гаусса, методом последовательной регрессии или каким-либо другим.

Найденное каким-либо методом решение этой системы запишем в виде:

$$\vec{\xi}^{s+1} = M^{-1}\vec{Y}. \quad (3.102)$$

Полученная оценка является осредненной оценкой по результатам измерений, содержащих по крайней мере случайные погрешности.

Шестой этап. Заключительным этапом решения задачи идентификации является проверка выполнения условия достижения наперед заданной точности решения. Оценивая разность между двумя последовательными приближениями $\vec{\xi}^s$ и $\vec{\xi}^{s+1}$, необходимо принять решение либо о продолжении итерационной процедуры уточнения, либо об её прекращении. В качестве критерия для прекращения итераций можно использовать, например, условие:

$$\sqrt{\frac{\left((\vec{x}^{s+1} - \vec{x}^s), (\vec{x}^{s+1} - \vec{x}^s) \right)}{(\vec{x}^{s+1}, \vec{x}^{s+1})}} \leq \varepsilon, \quad (3.103)$$

где ε – наперед заданный параметр схемы, характеризующий точность решения.

Чтобы избежать «зацикливания», кроме критерия (3.103) принято использовать и некоторое разумное ограничение количества итераций.

3.5 Пример применения метода квазилинеаризации для решения задачи идентификации переменных состояния и параметров нелинейной системы

3.5.1 Система нелинейных уравнений с известным аналитическим решением для тестирования метода

Рассмотрим пример системы с нелинейным законом функционирования, который имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), & f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}) = \theta_1 \frac{x_1(t)}{t}, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}), & f_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\theta}) = \theta_2 \frac{x_1^2(t)}{t} + u(t), \end{cases} \quad (3.104)$$

$$\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}, u(t) = 2t, \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}.$$

Рассмотрим случай, когда параметры системы таковы:

$$\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\} = \{1, 2\}. \quad (3.105)$$

Начальные условия считаем заданными в виде:

$$\begin{cases} x_1(t^{(0)}) = 1, & t^{(0)} = 1, \\ x_2(t^{(0)}) = 1. \end{cases} \quad (3.106)$$

Пусть уравнение выходов имеет вид:

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t), \begin{cases} y_1(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t), \\ y_2(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Решение уравнений (3.104) с параметрами (3.105) при начальных условиях (3.106) имеет вид:

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = (2t^2 - 1). \quad (3.108)$$

На этом примере с известным заранее решением рассмотрим основные этапы применения метода квазилинеаризации для идентификации параметров и начального состояния системы.

3.5.2 Применение метода квазилинеаризации для идентификации параметров и начального состояния нелинейной системы: решение тестовой задачи

Итак, пусть задана система уравнений (3.104), которая в соответствии с принятой нами гипотезой описывает закон функционирования изучаемого объ-

екта, а также алгебраическое уравнение выходов (3.107). Пусть известно, что момент начала функционирования системы:

$$t^{(0)} = 1. \quad (3.109)$$

Пусть измерения входного и выходного сигналов проводились в точках:

$$t^{(j)} \in [T^{(0)}, T], \quad T^{(0)} = t^{(0)}, \quad (3.110)$$

$$T = T^{(0)} + 3, \quad t^{(j)} = T^{(0)} + \frac{(T - T^{(0)})}{(N - 1)}(j - 1), \quad (j = 1, 2, \dots, N = 31).$$

Требуется по результатам измерений входного $u(t^{(j)})$ и выходного сигналов $\bar{y}(t^{(j)}) = \{y_1(t^{(j)}), y_2(t^{(j)})\}$, приведенным в таблице 3.4, найти параметры модели $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, начальные значения вектора переменных состояния $\bar{x}(t^{(0)}) = \{x_1(t^{(0)}), x_2(t^{(0)})\}$, а также значения переменных состояния для моментов времени измерений.

В данном случае известно точное решение задачи, поэтому кроме входного и выходного сигналов таблице 3.4 приведены и соответствующие решению (3.108) значения переменных состояния, которые потребуются в дальнейшем для оценки точности идентификации.

Таблица 3.4 – Значения компонент вектора переменных состояния и выходного сигнала

| j | $t^{(j)}$ | $u(t^{(j)})$ | $x_1(t^{(j)})$ | $x_2(t^{(j)})$ | $y_1(t^{(j)})$ | $y_2(t^{(j)})$ |
|-----|------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 0.1000E+01 | 0.2000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.5000E+01 | 0.5000E+01 |
| 2 | 0.1100E+01 | 0.2200E+01 | 0.1100E+01 | 0.1420E+01 | 0.6140E+01 | 0.6460E+01 |
| 3 | 0.1200E+01 | 0.2400E+01 | 0.1200E+01 | 0.1880E+01 | 0.7360E+01 | 0.8040E+01 |
| 4 | 0.1300E+01 | 0.2600E+01 | 0.1300E+01 | 0.2380E+01 | 0.8660E+01 | 0.9740E+01 |
| 5 | 0.1400E+01 | 0.2800E+01 | 0.1400E+01 | 0.2920E+01 | 0.1004E+02 | 0.1156E+02 |
| 6 | 0.1500E+01 | 0.3000E+01 | 0.1500E+01 | 0.3500E+01 | 0.1150E+02 | 0.1350E+02 |
| 7 | 0.1600E+01 | 0.3200E+01 | 0.1600E+01 | 0.4120E+01 | 0.1304E+02 | 0.1556E+02 |
| 8 | 0.1700E+01 | 0.3400E+01 | 0.1700E+01 | 0.4780E+01 | 0.1466E+02 | 0.1774E+02 |
| 9 | 0.1800E+01 | 0.3600E+01 | 0.1800E+01 | 0.5480E+01 | 0.1636E+02 | 0.2004E+02 |
| 10 | 0.1900E+01 | 0.3800E+01 | 0.1900E+01 | 0.6220E+01 | 0.1814E+02 | 0.2246E+02 |
| 11 | 0.2000E+01 | 0.4000E+01 | 0.2000E+01 | 0.7000E+01 | 0.2000E+02 | 0.2500E+02 |
| 12 | 0.2100E+01 | 0.4200E+01 | 0.2100E+01 | 0.7820E+01 | 0.2194E+02 | 0.2766E+02 |
| 13 | 0.2200E+01 | 0.4400E+01 | 0.2200E+01 | 0.8680E+01 | 0.2396E+02 | 0.3044E+02 |
| 14 | 0.2300E+01 | 0.4600E+01 | 0.2300E+01 | 0.9580E+01 | 0.2606E+02 | 0.3334E+02 |
| 15 | 0.2400E+01 | 0.4800E+01 | 0.2400E+01 | 0.1052E+02 | 0.2824E+02 | 0.3636E+02 |
| 16 | 0.2500E+01 | 0.5000E+01 | 0.2500E+01 | 0.1150E+02 | 0.3050E+02 | 0.3950E+02 |
| 17 | 0.2600E+01 | 0.5200E+01 | 0.2600E+01 | 0.1252E+02 | 0.3284E+02 | 0.4276E+02 |
| 18 | 0.2700E+01 | 0.5400E+01 | 0.2700E+01 | 0.1358E+02 | 0.3526E+02 | 0.4614E+02 |

| j | $t^{(j)}$ | $u(t^{(j)})$ | $x_1(t^{(j)})$ | $x_2(t^{(j)})$ | $y_1(t^{(j)})$ | $y_2(t^{(j)})$ |
|-----|------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 19 | 0.2800E+01 | 0.5600E+01 | 0.2800E+01 | 0.1468E+02 | 0.3776E+02 | 0.4964E+02 |
| 20 | 0.2900E+01 | 0.5800E+01 | 0.2900E+01 | 0.1582E+02 | 0.4034E+02 | 0.5326E+02 |
| 21 | 0.3000E+01 | 0.6000E+01 | 0.3000E+01 | 0.1700E+02 | 0.4300E+02 | 0.5700E+02 |
| 22 | 0.3100E+01 | 0.6200E+01 | 0.3100E+01 | 0.1822E+02 | 0.4574E+02 | 0.6086E+02 |
| 23 | 0.3200E+01 | 0.6400E+01 | 0.3200E+01 | 0.1948E+02 | 0.4856E+02 | 0.6484E+02 |
| 24 | 0.3300E+01 | 0.6600E+01 | 0.3300E+01 | 0.2078E+02 | 0.5146E+02 | 0.6894E+02 |
| 25 | 0.3400E+01 | 0.6800E+01 | 0.3400E+01 | 0.2212E+02 | 0.5444E+02 | 0.7316E+02 |
| 26 | 0.3500E+01 | 0.7000E+01 | 0.3500E+01 | 0.2350E+02 | 0.5750E+02 | 0.7750E+02 |
| 27 | 0.3600E+01 | 0.7200E+01 | 0.3600E+01 | 0.2492E+02 | 0.6064E+02 | 0.8196E+02 |
| 28 | 0.3700E+01 | 0.7400E+01 | 0.3700E+01 | 0.2638E+02 | 0.6386E+02 | 0.8654E+02 |
| 29 | 0.3800E+01 | 0.7600E+01 | 0.3800E+01 | 0.2788E+02 | 0.6716E+02 | 0.9124E+02 |
| 30 | 0.3900E+01 | 0.7800E+01 | 0.3900E+01 | 0.2942E+02 | 0.7054E+02 | 0.9606E+02 |
| 31 | 0.4000E+01 | 0.8000E+01 | 0.4000E+01 | 0.3100E+02 | 0.7400E+02 | 0.1010E+03 |

Напомним, что точное решение этой задачи в данном случае таково:

$$\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\} = \{1, 2\}, \quad \bar{x}(t^{(0)}) = \{1, 1\}, \quad t^{(0)} = 1. \quad (3.111)$$

Теперь рассмотрим последовательность шагов по реализации метода квазилинеаризации в рассматриваемом примере.

Первый этап. На первом этапе решения задачи идентификации выбираем следующую начальную оценку $\bar{\theta}^0$ параметров модели:

$$\bar{\theta}^0 = 0. \quad (3.112)$$

В качестве начальной оценки состояния $\bar{x}^0(t)$ выбираем оценку:

$$x_1^0(t) = 1, \quad x_2^0(t) = 1. \quad (3.113)$$

Вводим в рассмотрение вектор $\bar{z}(t)$, компоненты которого соответствуют переменным состояния и неизвестным коэффициентам модели:

$$\bar{z}(t) = \{z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \theta_1, \theta_2\}. \quad (3.114)$$

В соответствии с выражениями (3.112), (3.113) имеем следующую начальную оценку вектора $\bar{z}^0(t^{(0)}) = \bar{\xi}^0$:

$$\begin{aligned} \bar{z}^0(t^{(0)}) &= \{z_1^0(t^{(0)}), z_2^0(t^{(0)}), z_3^0(t^{(0)}), z_4^0(t^{(0)})\} = \\ &= \bar{\xi}^0 = \{x_1^0(t^{(0)}), x_2^0(t^{(0)}), \theta_1^0, \theta_2^0\} = \{1, 1, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Второй этап. Уравнения модели (3.104) и условия стационарности $\dot{\bar{\theta}} = 0$ записываем в виде объединенной системы уравнений:

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \vec{\psi}(t, \vec{z}(t), \vec{u}(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = \psi_1(t, \vec{z}(t), \vec{u}(t)) = z_3 \frac{z_1(t)}{t}, \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = \psi_2(t, \vec{z}(t), \vec{u}(t)) = z_4 \frac{z_1^2(t)}{t} + 2t, \\ \frac{dz_3}{dt} = \psi_3(t, \vec{z}(t), \vec{u}(t)) = 0, \\ \frac{dz_4}{dt} = \psi_4(t, \vec{z}(t), \vec{u}(t)) = 0. \end{cases} \quad (3.116)$$

Линеаризуем систему уравнений (3.116) в окрестности некоторого известного состояния с номером s , разлагая правые части этих уравнений в ряд Тейлора. В результате получаем уравнения:

$$\dot{\vec{z}}^{s+1}(t) = \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{z}} \right)^s \vec{z}^{s+1}(t) + \left[\vec{\psi}^s(t, \vec{z}^s(t), \vec{u}(t)) - \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{z}} \right)^s \vec{z}^s(t) \right]. \quad (3.117)$$

Здесь квадратная матрица $\left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{z}} \right)^s$ имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{z}} \right)^s = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial z_4} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_4}{\partial z_4} \end{pmatrix}_{\vec{z}=\vec{z}^s} = \begin{pmatrix} z_3 \frac{1}{t} & 0 & \frac{z_1}{t} & 0 \\ z_4 \frac{2z_1}{t} & 0 & 0 & \frac{z_1^2}{t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{z}=\vec{z}^s}. \quad (3.118)$$

Третий этап. Решение уравнений (3.117) будем искать в виде:

$$\vec{z}^{s+1}(t) = \Phi^s(t, t^{(0)}) \vec{z}^{s+1}(t^{(0)}) + \vec{P}^s(t), \quad (3.119)$$

где вектор $\vec{z}^{s+1}(t^{(0)})$ определяет начальное состояние системы и пока неизвестен, $\Phi^s(t, t^{(0)})$ – матрица Коши для уравнения (3.117), $\vec{P}^s(t)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Матрица Коши удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\Phi}^s(t, t^{(0)}) = \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{z}} \right)^s \Phi^s(t, t^{(0)}), \quad (3.120)$$

при начальных условиях

$$\Phi^s(t^{(0)}, t^{(0)}) = E, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

В рассматриваемом случае матрица Коши имеет вид:

$$\Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)}) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{12}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{13}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{14}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \\ \Phi_{21}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{22}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{23}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{24}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

т. е. только первые две строки коэффициентов неизвестны, а для остальных строк имеет место тривиальное решение.

На этом шаге итерационного процесса, имея оценку вектора $\bar{z}^s(t^{(j)})$, $t^{(j)} \in [T^{(0)}, T]$, по формуле (3.118) находим для этих моментов времени

$$\text{матрицы } \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s:$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s = \begin{pmatrix} \frac{z_3(t^{(j)})}{t^{(j)}} & 0 & \frac{z_1(t^{(j)})}{t^{(j)}} & 0 \\ z_4(t^{(j)}) \frac{2z_1(t^{(j)})}{t^{(j)}} & 0 & 0 & \frac{z_1^2(t^{(j)})}{t^{(j)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\bar{z}=\bar{z}^s}. \quad (3.123)$$

Здесь необходимо отметить, что, хотя в дальнейшем непосредственно будут нужны лишь результаты расчета вектора $\bar{z}^s(t^{(j)})$ и матрицы $\left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s$ на интервале $t^{(j)} \in [T^{(0)}, T]$, при численном решении уравнения (3.120) потребуются рассчитывать эти величины на всем интервале $t^{(j)} \in [t^{(0)}, T]$. Уравнение (3.120) с начальным условием (3.121) может быть решено по схеме Эйлера с пересчетом [12]. Расчетные формулы в этом случае можно записать в виде:

$$\tilde{\Phi}^s(t^{(j+1)}, t^{(0)}) = \Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)}) + \left[\left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \right] \Delta t,$$

$$\begin{aligned} \Phi^s(t^{(j+1)}, t^{(0)}) &= \Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \Phi^s(t^{(j)}, t^{(0)}) + \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j+1)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \tilde{\Phi}^s(t^{(j+1)}, t^{(0)}) \right] \Delta t, \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\Phi^s(t^{(0)}, t^{(0)}) = E, \quad t \in [t^{(0)}, T], \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Частное решение $\bar{P}^s(t)$ уравнения (3.117) удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\bar{P}}^s(t) = \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{P}^s(t) + \left[\bar{\Psi}^s(t, \bar{z}^s(t), \bar{u}(t)) - \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{z}^s(t) \right], \quad (3.125)$$

при начальных условиях

$$\bar{P}^s(t^{(0)}) = 0. \quad (3.126)$$

Вектор $\bar{P}^s(t)$ имеет вид:

$$\bar{P}^s(t) = \{P_1^s(t), P_2^s(t), 0, 0\}. \quad (3.127)$$

Решение дифференциального уравнения (3.125) также может быть найдено по схеме Эйлера с пересчетом. Расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{Q}^s(t^{(j)}) &= \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{P}^s(t^{(j)}) + \left[\bar{\Psi}^s(t^{(j)}) - \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{z}^s(t^{(j)}) \right], \\ \tilde{\bar{P}}^s(t^{(j+1)}) &= \bar{P}^s(t^{(j)}) + \bar{Q}^s(t^{(j)}) \Delta t, \\ \bar{Q}^s(t^{(j+1)}) &= \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j+1)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \tilde{\bar{P}}^s(t^{(j+1)}) + \left[\bar{\Psi}^s(t^{(j+1)}) - \left(\frac{\partial \bar{\Psi}(t^{(j+1)})}{\partial \bar{z}} \right)^s \bar{z}^s(t^{(j+1)}) \right], \\ \bar{P}^s(t^{(j+1)}) &= \bar{P}^s(t^{(j)}) + \frac{1}{2} [\bar{Q}^s(t^{(j)}) + \bar{Q}^s(t^{(j+1)})] \Delta t. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Выполнив эти расчеты, определяем матрицу $G^s(t^{(j)}, t^{(0)})$:

$$\begin{aligned} G^s(t^{(j)}, t^{(0)}) &= \begin{pmatrix} G_{11}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{12}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{13}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{14}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \\ G_{21}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{22}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{23}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{24}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \Phi_{11}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{12}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{13}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{14}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \\ \Phi_{21}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{22}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{23}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & \Phi_{24}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Подобным же образом введем вектор $\bar{D}^s(t^{(j)})$:

$$\bar{D}^s(t^{(j)}) = \{P_1^s(t^{(j)}), P_2^s(t^{(j)})\}. \quad (3.130)$$

Для компонент вектора $\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ формула (3.119) сводится к выражению:

$$\bar{x}^{s+1}(t^{(j)}) = G^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \bar{z}^{s+1}(t^{(0)}) + \bar{D}^s(t^{(j)}). \quad (3.131)$$

Четвертый этап. Подставляя выражение (3.131) в уравнение выходов (3.107), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\bar{z}^{s+1}(t^{(0)})$:

$$F^{(j)} \bar{z}^{s+1}(t^{(0)}) = \bar{Y}^{(j)}, \quad \bar{Y}^{(j)} = \{Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}\}, \quad (j=1, 2, \dots, N). \quad (3.132)$$

Компоненты векторов $\bar{Y}^{(j)}$ рассчитываются по формулам:

$$\bar{Y}^{(j)} = \bar{y}^{(j)} - C \bar{D}^s(t^{(j)}) = \{Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}\}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.133)$$

Расширенная матрица плана эксперимента $F^{(j)}$ рассчитывается по формулам:

$$F^{(j)} = C G^s(t^{(j)}, t^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{12}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{13}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{14}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \\ G_{21}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{22}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{23}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) & G_{24}^s(t^{(j)}, t^{(0)}) \end{pmatrix}. \quad (3.134)$$

Пятый этап. На следующем шаге формируется система уравнений:

$$M \bar{\xi}^{s+1} = \bar{Y}, \quad \bar{\xi}^{s+1} = \bar{z}^{s+1}(t^{(0)}), \quad (3.135)$$

где элементы матрицы M и вектора \bar{Y} рассчитываются по формулам:

$$M_{rq} = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pq}^{(j)} F_{pr}^{(j)}, \quad Y_r = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^N F_{pr}^{(j)} Y_p^{(j)}, \quad (q, r = 1, 2, \dots, n+m). \quad (3.136)$$

Решение уравнений (3.135) на каждом шаге итерационного процесса дает оценку неизвестных параметров модели и начального состояния. В рассматриваемом примере для случаев $s = 0, 1, 2, 3, 4$ уравнения (3.135) для расчета очередной оценки параметров имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0.403000E+03 & 0.372000E+03 & 0.340051E+03 & 0.313893E+03 \\ 0.372000E+03 & 0.403000E+03 & 0.313893E+03 & 0.340051E+03 \\ 0.340051E+03 & 0.313893E+03 & 0.350641E+03 & 0.323668E+03 \\ 0.313893E+03 & 0.340051E+03 & 0.323668E+03 & 0.350641E+03 \end{pmatrix} \zeta_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.363010E+04 \\ 0.377115E+04 \\ 0.383640E+04 \\ 0.399727E+04 \end{pmatrix}; \quad (3.137)$$

$$\begin{pmatrix} 0.271228E+08 & 0.765561E+05 & 0.141591E+08 & 0.407660E+06 \\ 0.765561E+05 & 0.403000E+03 & 0.376648E+05 & 0.126403E+04 \\ 0.141591E+08 & 0.376648E+05 & 0.743801E+07 & 0.210332E+06 \\ 0.407660E+06 & 0.126403E+04 & 0.210332E+06 & 0.626252E+04 \end{pmatrix} \zeta_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.411973E+08 \\ 0.114314E+06 \\ 0.215452E+08 \\ 0.617151E+06 \end{pmatrix}; \quad (3.138)$$

$$\begin{pmatrix} 0.141848E+07 & 0.190472E+05 & 0.844841E+06 & 0.517121E+05 \\ 0.190472E+05 & 0.403000E+03 & 0.104002E+05 & 0.705867E+03 \\ 0.844841E+06 & 0.104002E+05 & 0.512689E+06 & 0.306538E+05 \\ 0.844841E+06 & 0.104002E+05 & 0.512689E+06 & 0.306538E+05 \end{pmatrix} \zeta_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.213606E+07 \\ 0.280001E+05 \\ 0.127959E+07 \\ 0.777549E+05 \end{pmatrix}; \quad (3.139)$$

$$\begin{pmatrix} 0.369512E+05 & -0.296984E+04 & 0.308907E+05 & -0.148672E+05 \\ -0.296984E+04 & 0.403000E+03 & -0.223314E+04 & 0.126165E+04 \\ 0.308907E+05 & -0.223314E+04 & 0.268168E+05 & -0.123031E+05 \\ -0.148672E+05 & 0.126165E+04 & -0.123031E+05 & 0.604966E+04 \end{pmatrix} \zeta_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.363059E+05 \\ -0.242280E+04 \\ 0.316925E+05 \\ -0.143016E+05 \end{pmatrix}; \quad (3.140)$$

$$\begin{pmatrix} 0.109690E+06 & 0.556304E+04 & 0.105672E+06 & 0.265687E+05 \\ 0.556304E+04 & 0.403000E+03 & 0.486049E+04 & 0.131631E+04 \\ 0.105672E+06 & 0.486049E+04 & 0.104766E+06 & 0.257350E+05 \\ 0.265687E+05 & 0.131631E+04 & 0.257350E+05 & 0.646495E+04 \end{pmatrix} \zeta_5 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.273429E+06 \\ 0.134315E+05 \\ 0.266133E+06 \\ 0.663951E+05 \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

В таблице 3.5 представлены результаты расчета переменных состояния по формуле (3.131) на разных этапах итерационного процесса. Сравнивая эти оценки переменных состояния с точным решением, приведенным в таблице 3.4, можно отметить хорошую точность получаемых оценок уже после первых 5÷6 итераций.

Таблица 3.5 – Оценки переменных состояния в ходе итерационного процесса

| j | $s = 0$ | | $s + 1 = 1$ | | $s + 1 = 2$ | |
|-----|------------------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $x_1^s(t^{(j)})$ | $x_2^s(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ |
| 1 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.6325E+00 | -0.2023E+01 | 0.7386E+00 | 0.3240E+00 |
| 2 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.8438E+00 | -0.7870E+00 | 0.8389E+00 | 0.1012E+01 |
| 3 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1037E+01 | 0.3799E+00 | 0.9325E+00 | 0.1745E+01 |
| 4 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1214E+01 | 0.1491E+01 | 0.1021E+01 | 0.2497E+01 |
| 5 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1378E+01 | 0.2559E+01 | 0.1104E+01 | 0.3257E+01 |
| 6 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1531E+01 | 0.3592E+01 | 0.1184E+01 | 0.4018E+01 |
| 7 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1674E+01 | 0.4596E+01 | 0.1261E+01 | 0.4779E+01 |
| 8 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1808E+01 | 0.5578E+01 | 0.1336E+01 | 0.5542E+01 |
| 9 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.1935E+01 | 0.6543E+01 | 0.1408E+01 | 0.6308E+01 |
| 10 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2054E+01 | 0.7495E+01 | 0.1479E+01 | 0.7083E+01 |
| 11 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2168E+01 | 0.8437E+01 | 0.1548E+01 | 0.7869E+01 |
| 12 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2276E+01 | 0.9372E+01 | 0.1617E+01 | 0.8673E+01 |
| 13 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2379E+01 | 0.1030E+02 | 0.1684E+01 | 0.9497E+01 |
| 14 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2477E+01 | 0.1123E+02 | 0.1751E+01 | 0.1035E+02 |
| 15 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2572E+01 | 0.1216E+02 | 0.1818E+01 | 0.1123E+02 |
| 16 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2662E+01 | 0.1309E+02 | 0.1884E+01 | 0.1215E+02 |
| 17 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2749E+01 | 0.1402E+02 | 0.1950E+01 | 0.1310E+02 |
| 18 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2832E+01 | 0.1495E+02 | 0.2016E+01 | 0.1410E+02 |
| 19 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2913E+01 | 0.1590E+02 | 0.2082E+01 | 0.1515E+02 |
| 20 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.2991E+01 | 0.1684E+02 | 0.2149E+01 | 0.1625E+02 |
| 21 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3066E+01 | 0.1780E+02 | 0.2215E+01 | 0.1740E+02 |
| 22 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3138E+01 | 0.1876E+02 | 0.2282E+01 | 0.1862E+02 |
| 23 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3208E+01 | 0.1973E+02 | 0.2350E+01 | 0.1989E+02 |
| 24 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3277E+01 | 0.2071E+02 | 0.2418E+01 | 0.2123E+02 |
| 25 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3343E+01 | 0.2170E+02 | 0.2486E+01 | 0.2263E+02 |
| 26 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3407E+01 | 0.2271E+02 | 0.2555E+01 | 0.2411E+02 |
| 27 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3469E+01 | 0.2372E+02 | 0.2625E+01 | 0.2566E+02 |
| 28 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3530E+01 | 0.2474E+02 | 0.2696E+01 | 0.2728E+02 |
| 29 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3589E+01 | 0.2578E+02 | 0.2767E+01 | 0.2899E+02 |
| 30 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3646E+01 | 0.2683E+02 | 0.2840E+01 | 0.3077E+02 |
| 31 | 0.1000E+01 | 0.1000E+01 | 0.3702E+01 | 0.2789E+02 | 0.2913E+01 | 0.3264E+02 |

| j | $s + 1 = 3$ | | $s + 1 = 4$ | | $s + 1 = 5$ | |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_1^{s+1}(t^{(j)})$ | $x_2^{s+1}(t^{(j)})$ |
| 1 | 0.1063E+01 | 0.8243E+00 | 0.1139E+01 | 0.8469E+00 | 0.9994E+00 | 0.1011E+01 |
| 2 | 0.1164E+01 | 0.1314E+01 | 0.1238E+01 | 0.1271E+01 | 0.1100E+01 | 0.1426E+01 |
| 3 | 0.1265E+01 | 0.1823E+01 | 0.1336E+01 | 0.1737E+01 | 0.1201E+01 | 0.1882E+01 |
| 4 | 0.1364E+01 | 0.2355E+01 | 0.1433E+01 | 0.2245E+01 | 0.1302E+01 | 0.2379E+01 |
| 5 | 0.1462E+01 | 0.2913E+01 | 0.1530E+01 | 0.2793E+01 | 0.1402E+01 | 0.2916E+01 |
| 6 | 0.1560E+01 | 0.3501E+01 | 0.1625E+01 | 0.3381E+01 | 0.1503E+01 | 0.3494E+01 |
| 7 | 0.1657E+01 | 0.4121E+01 | 0.1720E+01 | 0.4010E+01 | 0.1603E+01 | 0.4112E+01 |
| 8 | 0.1754E+01 | 0.4777E+01 | 0.1814E+01 | 0.4679E+01 | 0.1704E+01 | 0.4771E+01 |
| 9 | 0.1850E+01 | 0.5469E+01 | 0.1907E+01 | 0.5388E+01 | 0.1804E+01 | 0.5471E+01 |
| 10 | 0.1946E+01 | 0.6200E+01 | 0.2000E+01 | 0.6136E+01 | 0.1904E+01 | 0.6211E+01 |
| 11 | 0.2042E+01 | 0.6972E+01 | 0.2092E+01 | 0.6925E+01 | 0.2004E+01 | 0.6991E+01 |
| 12 | 0.2137E+01 | 0.7784E+01 | 0.2184E+01 | 0.7754E+01 | 0.2104E+01 | 0.7812E+01 |
| 13 | 0.2232E+01 | 0.8638E+01 | 0.2275E+01 | 0.8623E+01 | 0.2204E+01 | 0.8673E+01 |
| 14 | 0.2327E+01 | 0.9534E+01 | 0.2365E+01 | 0.9532E+01 | 0.2304E+01 | 0.9574E+01 |
| 15 | 0.2422E+01 | 0.1047E+02 | 0.2455E+01 | 0.1048E+02 | 0.2404E+01 | 0.1051E+02 |
| 16 | 0.2517E+01 | 0.1145E+02 | 0.2545E+01 | 0.1147E+02 | 0.2504E+01 | 0.1150E+02 |
| 17 | 0.2612E+01 | 0.1248E+02 | 0.2634E+01 | 0.1250E+02 | 0.2603E+01 | 0.1252E+02 |
| 18 | 0.2706E+01 | 0.1354E+02 | 0.2723E+01 | 0.1357E+02 | 0.2703E+01 | 0.1358E+02 |
| 19 | 0.2801E+01 | 0.1465E+02 | 0.2812E+01 | 0.1468E+02 | 0.2802E+01 | 0.1468E+02 |
| 20 | 0.2895E+01 | 0.1580E+02 | 0.2900E+01 | 0.1583E+02 | 0.2902E+01 | 0.1582E+02 |
| 21 | 0.2989E+01 | 0.1700E+02 | 0.2987E+01 | 0.1702E+02 | 0.3001E+01 | 0.1700E+02 |
| 22 | 0.3083E+01 | 0.1823E+02 | 0.3075E+01 | 0.1825E+02 | 0.3101E+01 | 0.1822E+02 |
| 23 | 0.3177E+01 | 0.1950E+02 | 0.3162E+01 | 0.1952E+02 | 0.3200E+01 | 0.1948E+02 |
| 24 | 0.3271E+01 | 0.2082E+02 | 0.3249E+01 | 0.2083E+02 | 0.3299E+01 | 0.2079E+02 |
| 25 | 0.3364E+01 | 0.2217E+02 | 0.3335E+01 | 0.2218E+02 | 0.3398E+01 | 0.2213E+02 |
| 26 | 0.3457E+01 | 0.2356E+02 | 0.3421E+01 | 0.2357E+02 | 0.3497E+01 | 0.2351E+02 |
| 27 | 0.3551E+01 | 0.2499E+02 | 0.3507E+01 | 0.2500E+02 | 0.3596E+01 | 0.2493E+02 |
| 28 | 0.3644E+01 | 0.2645E+02 | 0.3593E+01 | 0.2647E+02 | 0.3695E+01 | 0.2638E+02 |
| 29 | 0.3737E+01 | 0.2795E+02 | 0.3678E+01 | 0.2798E+02 | 0.3794E+01 | 0.2788E+02 |
| 30 | 0.3829E+01 | 0.2949E+02 | 0.3763E+01 | 0.2954E+02 | 0.3893E+01 | 0.2942E+02 |
| 31 | 0.3922E+01 | 0.3105E+02 | 0.3848E+01 | 0.3113E+02 | 0.3992E+01 | 0.3100E+02 |

В рассматриваемом примере эти уравнения решались методом исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцам. Результаты оценки параметров $\vec{\xi}^{s+1} = \vec{z}^{s+1}(t^{(0)}) = \{x_1^{s+1}(t^{(0)}), x_2^{s+1}(t^{(0)}), \theta_1^{s+1}, \theta_2^{s+1}\}$ модели методом квазилинеаризации приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Оценки компонент вектора идентифицируемых параметров

| j | $\bar{\theta}^0$ | $s+1=1$ | $s+1=2$ | $s+1=3$ | $s+1=4$ | $s+1=5$ | $s+1=6$ |
|----------------------|------------------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|
| $x_1^{s+1}(t^{(0)})$ | 1.0 | 0.633E+00 | 0.739E+00 | 0.106E+01 | 0.114E+01 | 0.999E+00 | 0.100E+01 |
| $x_2^{s+1}(t^{(0)})$ | 1.0 | -0.202E+01 | 0.324E+00 | 0.824E+00 | 0.847E+00 | 0.101E+01 | 0.100E+01 |
| θ_1^{s+1} | 0.0 | 0.223E+01 | 0.127E+01 | 0.831E+00 | 0.879E+00 | 0.994E+00 | 0.100E+01 |
| θ_2^{s+1} | 0.0 | 0.108E+02 | 0.782E+01 | -0.172E+01 | 0.205E+01 | 0.200E+01 | 0.200E+01 |

Видно, что в этом примере метод квазилинеаризации обеспечивает практически точное решение задачи за 5÷6 итераций.



Контрольные вопросы по главе 3

1. Приведите в общем виде уравнения многомерной нелинейной системы управления.
2. Какие параметры системы идентифицируются методом квазилинеаризации?
3. Как выбирается начальное приближение к оценке параметров и переменных состояния при идентификации нелинейных систем методом квазилинеаризации?
4. Применение метода квазилинеаризации к уравнению нелинейной модели $\dot{x}(t) = \theta_1(x(t))^3 + \theta_2 u(t)$, ($u(t)$ – измеряемый входной сигнал, $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}$ – вектор идентифицируемых параметров) приводит к уравнению $\dot{\bar{z}}^{\mu+1}(t) = A^\mu \bar{z}^{\mu+1}(t) + \bar{V}^\mu(t)$, $\bar{z} = \{x, \theta_1, \theta_2\}$, решение которого имеет вид $\bar{z}^{\mu+1}(t) = \Phi(t, t_0) \bar{z}^{\mu+1}(t_0) + \bar{q}^{\mu+1}(t)$. Запишите систему дифференциальных уравнений, которым в этом примере должна удовлетворять переходная матрица $\Phi(t, t_0)$.
5. Для идентификации неизвестного начального состояния и параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1 x_2, & \bar{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = -2x_2 + \theta_3 x_1 x_2, & \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \end{cases} \quad \bar{y} = C\bar{x}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

6. Для идентификации неизвестного начального состояния и параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \sin(\theta_1 x_1) + \cos(\theta_2 x_2), \vec{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_3 x_2 - \sin(x_1), \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \end{cases} \quad \vec{y} = C\vec{x}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

7. Для идентификации неизвестного начального состояния и параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_1 x_1 - \frac{1}{800} x_1 x_2, \vec{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1 x_2, \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \end{cases} \quad \vec{y} = C\vec{x}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

8. Для идентификации неизвестного начального состояния и параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_1 \frac{x_1}{x_2}, \vec{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_2 x_2^2 + \theta_3 \sin(x_1) + t, \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \end{cases}$$

$$\vec{y} = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

9. Для идентификации неизвестного начального состояния и параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_1 t x_1 x_2, \vec{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_2 x_2^2 + \sin(\theta_3 x_1) + t, \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \end{cases}$$

$$\vec{y} = C\vec{x}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

10. Для идентификации в случае известного начального состояния параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \frac{\theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_2^2}{t^2 + x_1 x_2}, \bar{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_3 \frac{x_1(x_2 + t)}{t^2 + x_1 x_2}, \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\ x_1(t^{(0)}) = -1.0, \\ x_2(t^{(0)}) = -1.0, \end{cases} \bar{y} = C\bar{x}, C = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

11. Для идентификации в случае известного начального состояния параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \frac{\theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_1 x_2}{t^2 - x_1 x_2}, \bar{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_3 \frac{x_2(x_1 + t)}{t^2 - x_1 x_2}, \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\ x_1(t^{(0)}) = -1.0, \\ x_2(t^{(0)}) = 1.0, \end{cases} \bar{y} = C\bar{x}, C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

12. Для идентификации в случае известного начального состояния параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_1 x_1^2 + \theta_2 \frac{x_1}{x_2}, \bar{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_3 \frac{x_2(x_1 + t)}{t^2 + 1}, \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\ x_1(t^{(0)}) = 0.1, \\ x_2(t^{(0)}) = 0.1, \end{cases} \bar{y} = C\bar{x}, C = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

13. Для идентификации в случае известного начального состояния параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_1 \frac{x_1^2}{x_2}, \bar{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}) = \theta_2 \frac{x_2^2}{x_1}, \bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t^{(0)}) = \frac{1.0}{7.0}, \\ x_2(t^{(0)}) = \frac{1.0}{3.0}, \end{cases} \quad \vec{y} = C\vec{x}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} -$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

14. Для идентификации в случае известного начального состояния параметров модели:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_1 \frac{x_2^2}{x_1}, \quad \vec{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \theta_2 \frac{x_1^2}{x_2}, \quad \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}, \\ \begin{cases} x_1(t^{(0)}) = \sqrt{5.0}, \\ x_2(t^{(0)}) = \sqrt{3.0}, \end{cases} \quad \vec{y} = C\vec{x}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} - \end{cases}$$

записать основные уравнения метода квазилинеаризации.

15. Применение метода квазилинеаризации к уравнению нелинейной модели $\dot{x}(t) = \theta_1 (x(t))^3 + \theta_2 u(t)$, $t \in (t_0, T)$, $x(t_0) = x^{(0)}$ ($u(t)$ – измеряемый входной сигнал, $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}$ – вектор идентифицируемых параметров) приводит к уравнению $\dot{\vec{z}}^{\mu+1}(t) = A^\mu \vec{z}^{\mu+1}(t) + \vec{V}^\mu(t)$, $\vec{z} = \{x, \theta_1, \theta_2\}$, решение которого имеет вид: $\vec{z}^{\mu+1}(t) = \Phi(t, t_0) \vec{z}^{\mu+1}(t_0) + \vec{q}^{\mu+1}(t)$. Запишите систему дифференциальных уравнений, которым в этом примере должен удовлетворять вектор $\vec{q}^{\mu+1}(t)$.

Заключение

Пособие содержит более трехсот формул, которые описывают алгоритм применения методов максимального правдоподобия, последовательной регрессии и метода квазилинеаризации для идентификации статических и динамических систем. Можно ли и, главное, нужно ли их запоминать? Знать, понять и запомнить надо *основные идеи*, на основе которых эти формулы получены, тогда их вывод становится делом техники и математической грамотности. При внимательном анализе выясняется, что таких идей, на основе которых получены расчетные формулы рассмотренных методов, немного.

Прежде всего, на основе предварительного изучения системы выбирается вид модели, которая должна описывать связь входного и выходного сигналов системы.

Для метода максимального правдоподобия отправной точкой является постановка задачи минимизации среднеквадратического отклонения между реальным, экспериментально измеренным выходным сигналом, и сигналом, который рассчитывается по гипотетически принятому уравнению модели. В результате задача сводится к исследованию функций (либо среднеквадратического отклонения, либо плотности вероятности реализации экспериментальной выборки) на экстремум. Запись необходимых условий экстремума этих функций позволяет свести задачу оценки параметров линейной модели к решению системы линейных алгебраических (нормальных) уравнений относительно этих параметров.

Метод последовательной идентификации можно рассматривать как логическое следствие метода максимального правдоподобия, модифицированного благодаря применению леммы об обращении матриц, что позволяет заменить алгоритм «прямого» решения системы нормальных уравнений итерационной процедурой уточнения оценки параметров.

Первый шаг метода квазилинеаризации для оценки параметров динамических систем основан на возможности разложения нелинейных функций (правых частей системы нелинейных дифференциальных уравнений) в ряд Тейлора. Линеаризация уравнений системы дает возможность воспользоваться результатами теории решения систем линейных дифференциальных уравнений и выразить решение через матрицу Коши.

Матрица Коши (переходная матрица), в свою очередь, может быть найдена аналитически или одним из известных методов численного решения систем дифференциальных уравнений.

Завершающий этап идентификации параметров динамических систем вновь сводится к применению метода максимального правдоподобия или метода последовательной идентификации.

Знание этих основных идей и их «математического оформления» делает вывод всех необходимых промежуточных формул делом техники.

Литература

1. Пантелеев А. В. Теория управления в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Бортаковский. – М. : Высш. шк., 2003. – 583 с.
2. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 302 с.
3. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – 2-е изд., стереотип. – Киев : Техніка, 1977. – 768 с.
4. Харин Ю. С. Основы имитационного и статистического моделирования : учеб. пособие / Ю. С. Харин, В. Н. Малюгин, В. П. Кирлица, В. И. Лобач, Г. А. Хацкевич. – Минск : Дизайн ПРО, 1997. – 288 с.
5. Советов Б. Я. Моделирование систем : учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 2001. – 343 с.
6. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента / В. В. Федоров. – М. : Наука, 1971. – 312 с.
7. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
8. Пляскин И. И. Оптимизация технических решений в машиностроении / И. И. Пляскин. – М. : Машиностроение, 1982. – 176 с.
9. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 520 с.
10. Сэйдж Э. П. Идентификация систем управления / Э. П. Сэйдж, Д. Л. Мелса. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 248 с.
11. Бабе Г. Д. Идентификация моделей гидравлики / Г. Д. Бабе, Э. А. Бондарев, А. Ф. Воеводин, М. А. Каниболотский. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1980. – 160 с.
12. Зельдович Я. Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 592 с.
13. Берман Г. И. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. И. Берман. – 22-е изд., перераб. – СПб. : Профессия, 2003. – 432 с.
14. Креер Л. И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям / Л. И. Креер. – М. : Гос. уч.-пед. изд-во Наркомпроса РСФСР, 1940. – 160 с.

15. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи : пер. с англ. / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1990. – 512 с.
16. Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления : учебник для вузов / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Высш. шк., 2003. – 614 с.
17. Годунов С. К. Разностные схемы. (Введение в теорию) : учеб. пособие / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 400 с.
18. Черепанов О. И. Идентификация нелинейных динамических систем методом квазилинеаризации : учеб. пособие и задания на вычислительный практикум / О. И. Черепанов, Р. О. Черепанов. – Томск : Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2012. – 124 с.
19. Черепанов О. И. Основы теории идентификации систем : учеб. пособие / О. И. Черепанов, Р. О. Черепанов. – Томск : Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2013. – 288 с.

Глоссарий

Базисные функции – известного вида функции входного сигнала, которые выбираются экспериментатором на основе предварительного изучения объекта исследования.

Идентификация параметрическая – оценка параметров (коэффициентов) априорно принятых уравнений модели изучаемого объекта по результатам измерений входного и выходного сигналов.

Информационная матрица – матрица коэффициентов нормальной системы уравнений.

Исходная система уравнений для оценки параметров – система алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров, которая записывается в соответствии с принятым уравнением модели по результатам измерений входного и выходного сигналов изучаемого объекта.

Квазилинеаризация – переход от нелинейной модели динамической системы к модели, линейно зависящей от оцениваемых параметров.

Линеаризация – переход от нелинейной модели к линейной.

Матрица плана эксперимента – матрица, которая содержит значения компонент вектора входного сигнала во всех опытах.

Метод последовательной идентификации (регрессии) – итерационная процедура уточнения оценки параметров модели по мере накопления экспериментальных данных, не требующая обращения информационной матрицы.

Нелинейная модель системы – модель, нелинейно зависящая как от оцениваемых параметров, так и от входного сигнала.

Нормальная система уравнений – система алгебраических уравнений для оценки параметров, решение которой минимизирует среднеквадратическое отклонение между экспериментальными и теоретическими значениями выходного сигнала.

Оптимальный план эксперимента – план, который определяет набор значений входных переменных и частоту измерений, обеспечивая некоторые заданные свойства информационной матрицы в соответствии с наперед заданной функцией цели и критерием оптимальности для выбранной модели системы.

Расширенная матрица плана эксперимента – матрица, которая содержит значения компонент вектора базисных функций модели во всех опытах.

Стационарная система – система, параметры (коэффициенты) уравнений состояния которой не изменяются, по крайней мере в течение времени идентификации.