

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

В. И. Тисленко

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Томск
2016

УДК 621.37:519.2(075.8)

ББК 32.84я73

Т 446

Рецензенты:

Красненко Н. П., д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института мониторинга климатических и экологических систем (ИМКЭС) СО РАН;

Шарыгин Г. С., д-р техн. наук, профессор кафедры радиотехнических систем ТУСУР

Тисленко В. И.

Т 446 Статистическая теория радиотехнических систем : учебное пособие / В. И. Тисленко. — Томск : ФДО, ТУСУР, 2016. — 160 с.

В пособии изложены основы теории статистического синтеза оптимальных систем обнаружения, различения, оценки параметров и разрешения полезных сигналов при наличии помехи в виде белого гауссовского шума. Показаны свойства радиосигнала как переносчика полезной информации в радиотехнических системах. Достаточно подробно рассмотрены классические методы оценки параметров сигналов, их взаимосвязь, а также вопросы рекурсивной оценки параметров линейной регрессии и алгоритм оптимальной линейной фильтрации Калмана.

Содержание пособия соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по учебной дисциплине «Статистическая теория радиотехнических систем». Для студентов радиотехнических специальностей.

УДК 621.37:519.2(075.8)

ББК 32.84я73

© Тисленко В. И., 2016
© Оформление.
ФДО, ТУСУР, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1 Сигналы и помехи в радиотехнических системах	8
1.1 Общее описание сигналов и помех	8
1.2 Классификация сообщений и сигналов	11
1.3 Свойства радиосигнала как переносчика сообщения	19
1.3.1 Функция различия сигналов	19
1.3.2 Частотно-временная корреляционная функция сигнала	23
1.3.3 Ширина функции неопределенности вдоль осей время — частота	26
1.3.4 Примеры функций неопределенности импульсных сигналов	30
1.4 Стационарная случайная помеха с гауссовым распределением вероятностей. Белый шум	38
2 Статистические модели сигналов в радиотехнических системах	45
2.1 Радиоканал и его свойства	45
2.2 Полезный сигнал на выходе радиоканала	49
2.2.1 Модель сигнала в однолучевом канале	50
2.2.2 Модель сигнала в многолучевом канале	51
2.3 Нормальная (гауссова) модель сигнала	53
2.3.1 Статистические свойства огибающей	54
2.3.2 Статистические свойства фазы	55
2.4 Корреляционные и спектральные свойства огибающей и фазы	56
3 Основы статистической теории обнаружения и различения сигналов при наличии помех	59
3.1 Краткая характеристика задач статистической теории	59
3.2 Согласованный линейный фильтр	63
3.3 Примеры построения согласованных фильтров	70
3.3.1 Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса	70
3.3.2 Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса с ФКМ	71
3.3.3 Согласованный фильтр для пачки M когерентных радиоимпульсов гауссовой формы	72
3.4 Обнаружение и различение сигналов при наличии помех	74
3.5 Другие критерии оптимальности обнаружения и различения	78

3.6	Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого гауссова шума. Структура оптимальных устройств	79
3.6.1	Статистические характеристики качества различения	82
3.6.2	Статистические характеристики качества обнаружения	84
3.6.3	Общие черты задач сыщика и оптимального обнаружителя	88
4	Основы статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала	91
4.1	Оценки параметров сигналов и их свойства	91
4.2	Основные способы формирования оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех	94
4.2.1	Байесовские оценки	94
4.2.2	Оценки максимального правдоподобия	98
4.2.3	Оценки неизвестных параметров методом наименьших квадратов (МНК)	100
4.3	Статистические свойства оценок МНК	102
4.4	Пример оценки неизвестного скалярного параметра	104
4.5	Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы	108
4.6	Оптимальная оценка амплитуды детерминированного сигнала при наличии белого гауссова шума	111
4.7	Статистические характеристики оценок максимума правдоподобия	113
4.8	Оптимальная оценка начальной фазы радиоимпульса	117
4.9	Информация по Фишеру. Неравенство Крамера — Рао	119
5	Рекурсивная фильтрация сообщений	125
5.1	Среднеквадратичная регрессия	125
5.2	Линейная среднеквадратичная регрессия	126
5.3	Рекурсивная оценка параметров линейной регрессии	129
5.4	Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана	132
6	Разрешение сигналов	140
6.1	Разрешение по времени запаздывания. Простые и сложные сигналы	141
6.2	Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частоте	145
	Заключение	151
	Литература	153
	Перечень основных обозначений	155
	Глоссарий	158

ВВЕДЕНИЕ

Сферы применения радиотехнических систем (РТС) в жизни современного общества весьма обширны. Радиовещание, телевидение, стационарная и мобильная радиосвязь, системы управления самолетами, ракетами, космическими объектами, системы космического мониторинга состояния земной поверхности. Это некоторые основные области их использования, без которых прогрессивное развитие промышленности, транспорта, медицины и других отраслей трудно себе представить. Основой наиболее эффективных средств организации и ведения военных действий в современной армии также являются РТС. Известно, например, что стоимость радиоэлектронного оборудования современного самолета составляет около половины стоимости самолета в целом.

Содержание задач, которые решают РТС в процессе выполнения возложенных на них функций, связано, как правило, с передачей, приемом и преобразованием информации, переносчиком которой является радиосигнал. По информационному назначению, независимо от области применения, РТС разделяют на три основных класса: передачи информации; извлечения информации; противодействия (передаче или извлечению информации). К первому классу относят РТС, предназначенные для передачи информации (сообщений) из одних пунктов пространства в другие. Это прежде всего системы радиосвязи, телевидения, а также радиотелеметрии.

Второй класс составляют РТС, основная функция которых состоит лишь в приеме (извлечении) полезной информации. Такая ситуация характерна для радиолокационных и радионавигационных (РЛ и РН) систем, а также для РТС, используемых в радиоастрономии, радиометеорологии. В данном случае, в отличие от систем, относящихся к первому классу, полезное сообщение появляется не в самой РТС, а как бы вне ее. Характер сообщения в РТС извлечения информации по существу обусловлен физическими закономерностями распространения радиоволн в среде (запаздывание, рефракция, рассеяние, отражение, эффект Доплера и др.). Последний класс образуют системы радиопротиводействия. Это несколько особый и важный класс систем. Особый, потому что используется обычно в РТС военного назначения, а важный, поскольку применение этих средств дает возможность парализовать работу других РТС, выполняющих функции передачи и извлечения информации.

Совершенствование радиолокационных (РЛ) и радионавигационных (РН) систем, систем радиосвязи и управления связано с повышением дальности их действия, точности и оперативности измерения параметров объектов, достоверности

и скорости передачи информации, надежности. Среди множества проблем, возникающих на пути создания РТС, обладающих (при прочих равных условиях) максимально возможными дальностью, точностью, быстродействием, скоростью и достоверностью передачи информации, существует одна, связанная непосредственно с предметом изучения в курсе «Статистическая теория радиотехнических систем».

Сущность этой проблемы состоит в том, что основным реально действующим и принципиально неустранимым фактором, препятствующим реализации желаемых (неограниченно высоких) значений указанных выше показателей РТС, является случайный характер сигналов на входе приемных устройств. Случайность (стохастичность) амплитуды, фазы и частоты входного сигнала обусловлена многими причинами. Это прежде всего тепловые флуктуации или хаотические движения носителей электрических зарядов в проводниках, шумы пространства (неба) окружающего антенну приемника, а также шумы, обусловленные дробовым эффектом в усилительных устройствах. При распространении радиоволн в реальных каналах также возникают случайные изменения амплитуды фазы и частоты радиосигнала, обусловленные пространственно — временными вариациями электрических параметров среды.

Проектирование РТС без анализа и грамотного учета влияния указанных факторов не позволяет оценить и при необходимости реализовать предельные возможности радиосистем по основным показателям, определяющим их эффективность.

В курсе «Статистическая теория РТС» изучаются основные методы и способы оптимального обнаружения, различения, оценки параметров и фильтрации полезных сигналов, а также их разрешения при наличии помехи в виде белого гауссовского шума. По существу это классика, знание которой минимально необходимо радиоинженеру для понимания принципов построения современных систем радиолокации, радиосвязи, радионавигации и др. Эти результаты составляют лишь малую часть того, чем располагает современная статистическая теория обработки сигналов. Ограниченный объем книги не позволил, в частности, в полной мере представить в ней материал по марковской теории фильтрации сообщений.

Автор выражает уверенность в том, что при самостоятельной работе над контрольными вопросами и выполнении компьютерных работ читатель овладеет основами статистической теории обработки сигналов в современных радиотехнических системах.

Содержание книги соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по данному курсу. Для его освоения необходимы знания теории вероятностей, теории цепей и сигналов, высшей математики и общей физики в объеме вузовских курсов для студентов радиотехнических специальностей.

Соглашения, принятые в книге

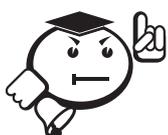
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



.....
 Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.



.....
 Эта пиктограмма означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



.....
 В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.



Выводы

.....
 Эта пиктограмма означает выводы. Здесь автор подводит итоги, обобщает изложенный материал или проводит анализ.



Контрольные вопросы по главе

Глава 1

СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1.1 Общее описание сигналов и помех

Радиотехнические системы относятся к классу информационных систем и поэтому все процессы в них целесообразно рассматривать с информационной точки зрения. Любые возмущения в РТС разделяют на три группы: *сообщения, сигналы и помехи*.



.....
К сообщениям относят процессы $\lambda(t)$ (функции времени) или поля $\lambda(t, x, y, z)$ — функции пространственных координат и времени, содержащие полезную для потребителя информацию, которая подлежит воспроизведению в системах передачи информации или извлечению в системах извлечения информации.
.....

Например, в системах связи это речь, музыка (функции времени); при передаче ТВ изображения — распределение яркости отраженного от объекта света (функция пространственных координат и времени). В РЛ и РН системах сообщениями обычно являются функции, определяющие изменение во времени дальности и угловых координат подвижного объекта в заданной системе координат. В общем случае сообщение может иметь векторный характер, т. е. $\lambda(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$.



.....
Сигналом называется процесс $s(t, \lambda(t), \beta)$ или поле $e(t, x, y, z, \lambda(t), \beta)$, которые выполняют функцию переносчика сообщения $\lambda(t)$.
.....

Важно отметить, что термин «сигнал» предполагает существование временно-го процесса, а термин «поле» определяет пространственно-временной процесс, т. е. x, y, z — пространственные координаты.

Наряду с полезным сообщением сигнал в ряде случаев содержит совокупность неинформативных параметров β . Эти параметры называют мешающими, все или часть из них могут быть неизвестны. В общем случае они также изменяются во времени и в пространстве. Сигналы (иногда используют термин *радиосигналы*) существуют в цепях приемника и передатчика РТС в виде высокочастотных токов и напряжений, например, на выходе приемной антенны. Когда используют термин *поле*, то имеют в виду электромагнитную волну, распространяющуюся в пространстве. Волна характеризуется векторами электрического и магнитного полей. Таким образом, скалярная функция $e(\odot)$ соответствует одной из проекций вектора электрической напряженности поля. Приемная антенна осуществляет преобразование электромагнитной волны в радиосигнал $s(t, \lambda(t), \beta)$. С информационной точки зрения волна и радиосигнал выполняют функцию переносчика информации. В большинстве своем ТТХ РТС зависят как от способа модуляции радиосигнала $s(t, \lambda(t), \beta)$ сообщением $\lambda(t)$, так и от характера самого сообщения $\lambda(t)$.

Следует отметить, что в системах передачи информации модуляция высокочастотного сигнала сообщением $\lambda(t)$ реализуется в передатчике РТС. Поэтому эти системы называют также системами с *внутренней модуляцией*. В радиолокационных, радионавигационных, а также других РТС, относящихся к классу систем извлечения информации, полезное сообщение $\lambda(t)$ не содержится в сигнале, который излучает передатчик. Этот сигнал принято называть *зондирующим*.

В РЛ и РН системах электромагнитная волна (переносчик информации) как бы *приобретает сообщение в процессе распространения на трассе «излучатель — объект» и отражения волны от объекта*. Действительно, сообщение о дальности до объекта в РЛ системах формируется вследствие задержки по времени сигнала на входе приемника по отношению к зондирующему. Сообщение о направлении на объект «вводится» в переносчик информации при приеме волны на пространственно протяженную антенную систему и, таким образом, зависит от способа построения самой антенны. В связи с отмеченными особенностями РТС извлечения информации называют также системами с *внешней модуляцией*.



.....
Помехами называют процессы или поля, мешающие достоверному воспроизведению (извлечению) сообщения $\lambda(t)$.

Характер взаимодействия сигнала $s(t, \lambda(t), \beta)$ и помехи $n(t)$ может быть различным. Он зависит от физической природы помехи. В общем виде результат их взаимодействия можно представить в виде сигнала $y(t, \lambda(t), \beta) = F[s(t, \lambda(t), \beta); n(t)]$, где $F[\cdot, \cdot]$ — оператор, определяющий способ комбинирования сигнала и помехи. Например, собственный шум приемно-усилительных устройств аддитивно взаимодействует с сигналом, т. е. суммируется с ним. Такая помеха называется *аддитивной* (от английского слова *addition* — сложение). Например, если сигналом является прямоугольный радиоимпульс, который находится на интервале $[0, T]$, то с учетом собственного шума колебание на входе приемника

$$y(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t),$$

где

$$s(t, \lambda, \beta) = \begin{cases} A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi], & 0 \leq \tau \leq t \leq \tau + \tau_n \leq T, \\ 0, & t < \tau, (\tau + \tau_n) \leq t. \end{cases}$$

В данном примере полезный сигнал зависит от пяти параметров: амплитуды A , частоты ω , начальной фазы φ , длительности импульса τ_n и момента его появления τ . В практических задачах часто информативными и неизвестными заранее могут быть: $\lambda_1 = \omega$; $\lambda_2 = \tau$; $\lambda_3 = \tau_n$, а мешающими — $\beta_1 = A$ и $\beta_2 = \varphi$.

При радиолокационном наблюдении объекта, находящегося в пространстве, содержащем случайные неоднородности, например самолет и дождевые облака на трассе распространения радиоволн или корабль и взволнованная поверхность моря, также возникает помеха в виде радиосигналов, отраженных от капель дождя или от случайно ориентированных участков поверхности моря. Однако в этом случае помеха не суммируется с сигналом от объекта, она модулирует полезный сигнал, т. е. влияет на него нелинейно. Такие помехи называют мультипликативными (от англ. слова *multiply* — умножать). Действительно, простое увеличение мощности излученного сигнала приведет к ослаблению влияния собственного шума, и оно не приведет к желаемому результату во втором случае, так как наряду с увеличением уровня сигнала, отраженного от объекта, возрастет и уровень помехи в виде отражений от облаков или моря.



.....
 Математическое описание помехи предполагает задание ее в виде случайной функции времени. В противном случае (при детерминированном описании) она оказывается полностью известной, и ее влияние можно было бы полностью исключить. Вопрос о том, является ли отдельно взятый процесс сигналом или помехой, решается в зависимости от того, что требуется получателю.

В этом плане математические способы описания сообщений, сигналов или помех одинаковы. Поэтому далее везде, где это удобно, будет использоваться единый термин «сигнал».



.....
 Важно отметить, что на вход приемника поступает результирующий сигнал $y(t, \lambda(t), \beta)$ и по своей физической природе в подавляющем большинстве практических задач это случайный процесс. Таким образом, амплитуда, фаза и частота высокочастотного (ВЧ) сигнала $y(t, \lambda(t), \beta)$ в любой момент времени являются случайными величинами.

Напомним, что определение случайной величины или случайного процесса как совокупности случайных величин предполагает задание некоторого множества возможных значений (выборочного пространства), из которого производится случайный выбор конкретных (наблюдаемых) *реализаций*. На этом множестве должны

быть определены вероятностные характеристики, которые показывают, как часто наблюдаются те или иные элементы выборочного пространства (реализации).



.....

Важным положением теории информации и теории связи является утверждение о том, что адекватная (полноценная или соответствующая природе явлений) постановка задачи анализа и синтеза РТС передачи или извлечения информации предполагает задание полезного сообщения $\lambda(t)$ как случайной функции или величины, если $\lambda(t) = \text{const}$.

.....

Действительно, предположение о том, что сообщение $\lambda(t)$ является детерминированной функцией, т. е. известной потребителю заранее, делает абсурдной задачу этого сообщения по каналу связи. Теряет смысл и задача измерения координат в РЛ и РН системах, если они заранее известны, т. е. являются детерминированными функциями, определяющие изменение самих координат.

Таким образом, общий подход к математическому описанию воздействий в РТС различного назначения, а следовательно и к решению задач анализа и синтеза систем и устройств обработки сигналов, связан с использованием аппарата статистической радиотехники. Тем не менее, отсюда не следует, что теряет смысл изучение свойств переносчика информации — сигнала $s(t, \lambda(t), \beta)$ при отсутствии помех. В частности, особый интерес представляет изучение влияния способа модуляции сигнала на возможность раздельного наблюдения двух сигналов, имеющих различные значения сообщений $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. Уверенность в целесообразности подобного рассмотрения основана на том, что свойства сигналов, справедливые при отсутствии помех, сохранятся на приемлемом уровне при достаточном превышении сигнала над помехой. Далее мы покажем, что это имеет место в задачах, где помехой является собственный шум приемника.

1.2 Классификация сообщений и сигналов

Рассматривая классификацию сообщений и сигналов, будем полагать, что они не являются функциями пространственных координат и в качестве аргумента могут иметь переменную t (время).



.....

Напомним, что по своей сути сообщение должно рассматриваться как категория, заранее неизвестная получателю. В этом смысле сообщение не может быть детерминированным, т. е. заведомо известным потребителю. Роль последнего в РТС передачи информации выполняет, например, абонент на приемном конце линии связи. В РТС извлечения информации это может быть оператор РЛС, получающий информацию о координатах целей в зоне обзора.

.....

Далее, если это не оговаривается, в формулах будем рассматривать сообщение как скалярную функцию и использовать обозначение $\lambda(t)$.

Классификация сообщений представлена на рисунке 1.1. В зависимости от характера изменения сообщение $\lambda(t)$ может быть функцией времени: *случайной или квазидетерминированной*, а также *постоянной неслучайной величиной*.



Сообщение является *случайной* функцией, если оно представляет собой последовательность случайных величин, т. е. в любой произвольный момент времени, где оно существует, его можно рассматривать как случайную величину.



Рис. 1.1 – Классификация типов сообщений $\lambda(t)$

Согласно [1], случайная функция — такой процесс, в котором «случайность рождается в каждый момент времени». Статистическое описание случайной функции в общем случае предполагает задание многомерной плотности распределения вероятностей (ПРВ) значений сообщения $\lambda(t)$ в n моментов времени t_1, \dots, t_n . Если ввести в рассмотрение n -мерный вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ с координатами $\lambda_i = \lambda(t_i)$, то следует задать функцию $W(\lambda; t_1, t_2, \dots, t_n) = W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, здесь множество моментов времени t_i играет роль параметров ПРВ. Если моменты времени t_1, \dots, t_n расположены равномерно через промежуток Δt в интервале $[0, T]$, на котором задан случайный процесс, то ПРВ $W(\lambda)$ при большом n можно приблизительно рассматривать как плотность вероятности для *реализации* случайного процесса. При $\Delta t \rightarrow 0$ число отсчетов $n \rightarrow \infty$ и n -мерная ПРВ в пределе (если он определен) переходит в *функционал* распределения вероятностей $W\{\lambda(t)\}$ случайного процесса $\lambda(t)$.

Во многих практических задачах оказывается достаточным знание одно- или двумерной ПРВ. Это позволяет задать математическое ожидание (среднее по ан-

самблю реализаций значение):

$$M[\lambda(t)] = \overline{\lambda(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda; t) d\lambda$$

и корреляционную функцию:

$$K_{\lambda}(t_1, t_2) = M[\lambda_1 \cdot \lambda_2] - \overline{\lambda_1} \cdot \overline{\lambda_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 W(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

В тех случаях, когда необходимо знание n -мерной плотности вероятности, часто в качестве моделей для описания случайных сигналов и помех используются процессы, у которых многомерная плотность может быть определена через одно- или двумерную плотность вероятности. В частности, если моменты времени t_i выбраны так, что соответствующие им значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ оказываются статистически независимыми, то n -мерная плотность выражается через произведение одномерных, т. е.

$$W_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = W_1(\lambda_1; t_1) \cdot W_1(\lambda_2; t_2) \cdot \dots \cdot W_1(\lambda_n; t_n).$$

В силу известной в теории вероятностей центральной предельной теоремы во многих задачах, связанных с анализом и синтезом устройств обработки сигналов, применяется вероятностная модель, соответствующая *нормальному (гауссовскому)* случайному процессу. Она удобна тем, что n -мерная ПРВ полностью определяется через двумерную плотность распределения вероятностей значений процесса $\lambda(t_1), \lambda(t_2)$ для произвольных t_1 и t_2 .

Широкое применение в теории РТС находят удобные и простые модели случайных сигналов, которые строятся на основе так называемых случайных *процессов без последствия*, или процессов Маркова.



.....
 Случайный процесс $\lambda(t)$ называется **марковским** (первого порядка), если условная плотность вероятности процесса λ_n в момент времени t_n по всем предыдущим значениям $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1$ зависит только от λ_{n-1} , т. е. $W(\lambda_n/\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1) = W(\lambda_n/\lambda_{n-1})$.

Для марковского процесса n -мерная плотность вероятности может быть записана в виде

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = W(\lambda_1) \cdot W(\lambda_2/\lambda_1) \cdot W(\lambda_3/\lambda_2) \cdot \dots \cdot W(\lambda_n/\lambda_{n-1}),$$

т. е. она определена, если известна ПРВ начального значения процесса $\lambda_1 = \lambda(t_1)$ и условная ПРВ $W(\lambda_i/\lambda_{i-1})$, называемая *плотностью вероятности перехода*.



.....
 Сообщение является *квазидетерминированным*, если его задание представляет известную функцию времени t , содержащую один или несколько случайных параметров: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Например, математическую модель изменения координаты цели, допустим дальности $D(t)$, на интервале времени $(0; T)$ определяют в виде полинома:

$$D(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

т. е. здесь $\lambda = \{a_0, a_1, a_2\}$. Очевидно, это допустимо, если возможно пренебречь случайными во времени вариациями дальности и считать ускорение постоянным на интервале наблюдения.

Ясно, что исчерпывающее описание ансамбля сообщений $\lambda(t)$ возможно теперь при задании совместной плотности вероятности $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.



.....
 Частным случаем квазидетерминированного сообщения является константа — *случайная величина*, которая постоянна на интервале наблюдения.

Такая модель сообщения определена заданием ПРВ $W(\lambda)$, она достаточно проста и удобна для описания реальных сообщений, которые «мало» и «медленно» изменяются на интервале наблюдения.



.....
 Достаточно часто в практических задачах рассматривают сообщения как *неизвестную постоянную и неслучайную величину* или систему неслучайных величин.

В задачах этого типа нет необходимости вводить в рассмотрение плотность распределения вероятностей $W(\lambda)$. Данный подход оправдан, когда есть уверенность в том, что априорное знание функции $W(\lambda)$, т. е. ее знание до получения сигнала $y(t; \lambda_0)$, содержащего информацию о конкретном истинном значении сообщения λ_0 , практически ничего не может дать потребителю. Он также оправдан и в том случае, когда сообщение по своей физической природе не может рассматриваться как случайное. Например, в качестве сообщения в измерительной РТС может выступать неизвестная физическая константа — скорость света. Ее предстоит измерить и она неслучайна.

В качестве второго признака классификации будем использовать характер множества значений функции $\lambda(t)$ и ее аргумента t .



.....
 В зависимости от того, непрерывно или дискретно множество значений функции $\lambda(t)$, различают *аналоговые и цифровые* сообщения. В каждом из этих вариантов множество значений переменной t может быть дискретным или непрерывным.

В итоге получаем четыре основных типа сообщений.

1. *Непрерывный случайный процесс* — процесс (сигнал), область значений и область определения которого — непрерывные множества. Реализация такого типа сообщения показана на рисунке 1.2, а.

2. *Непрерывный процесс с дискретным временем* — процесс, у которого область значений — непрерывное множество, а область определения — дискретное. Сообщения такого типа образуются в результате формирования временных выборок (дискретных отсчетов) из непрерывного случайного процесса (см. рис. 1.2, б).
3. *Дискретный случайный процесс* (дискретный процесс с непрерывным временем) — процесс, у которого область значений — дискретное множество, а область значений аргумента t — непрерывное множество. Этот процесс образуется в результате квантования непрерывного процесса только по уровню (см. рис. 1.2, в).
4. *Дискретная случайная последовательность* (дискретный процесс с дискретным временем) — процесс, у которого область значений сообщения и область определения аргумента t — дискретные множества (см. рис. 1.2, г). Сигналы подобного вида широко используются в современных РТС различного назначения, реализующих дискретные и цифровые методы обработки информации.

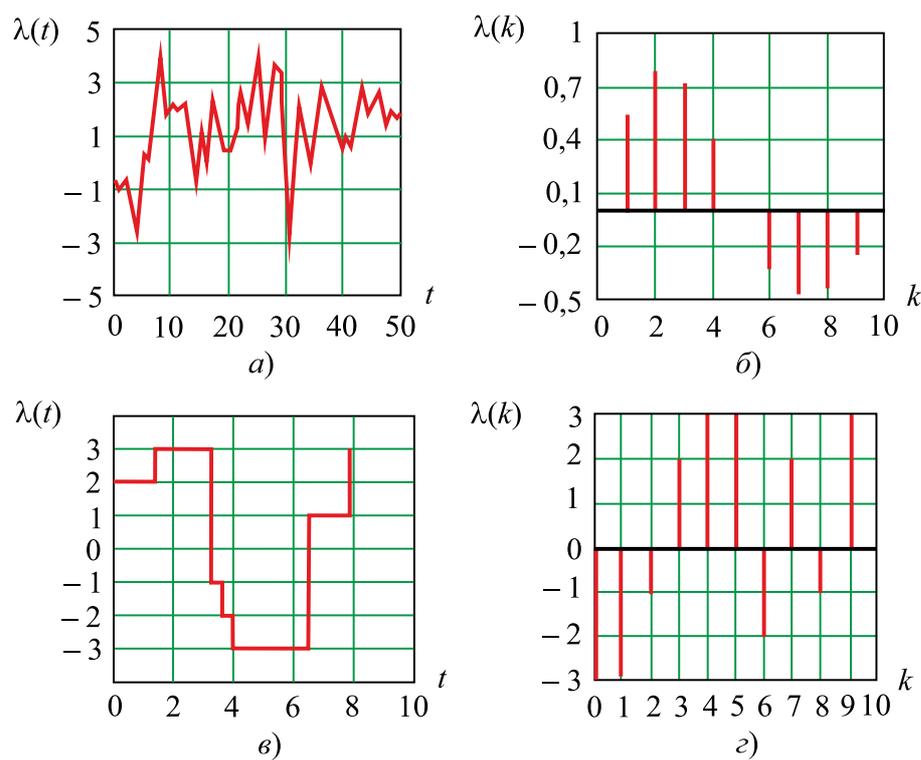


Рис. 1.2 – Одиночные реализации различных типов сообщений

Рассмотрим классификацию сигналов-переносчиков сообщений в РТС. Она показана на рисунке 1.3. Высокочастотный (ВЧ) сигнал, не содержащий сообщение $\lambda(t)$ — немодулированное гармоническое колебание (несущая без модуляции), имеет вид:

$$s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

где S_0 , ω_0 , φ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза колебания.

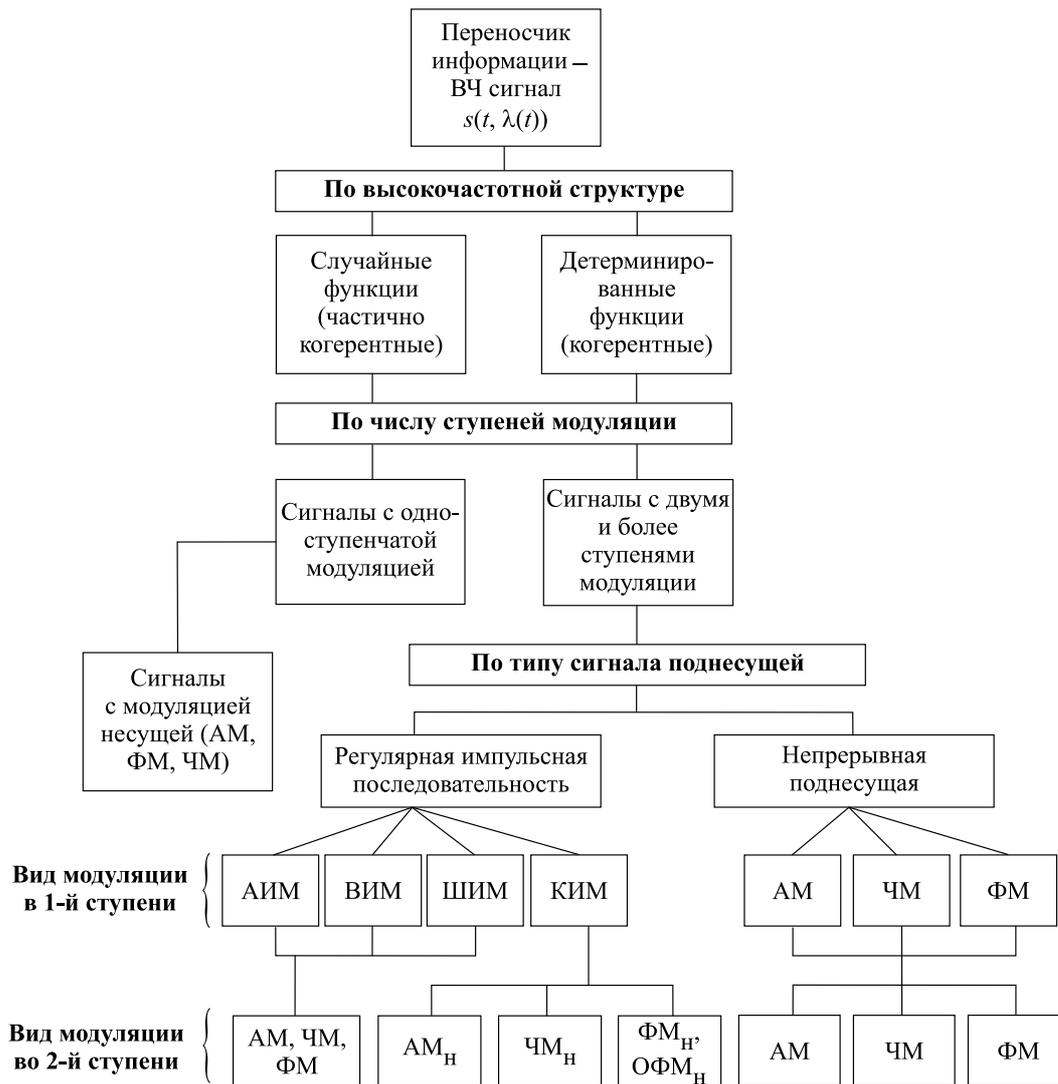


Рис. 1.3 – Классификация сигналов — переносчиков сообщений

Сигнал, содержащий сообщение, в общем случае можно записать в виде

$$s(t) = S(t, \lambda(t)) \cos(\omega_0 t + \Phi(t, \lambda(t)) + \varphi_0), \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

где $S(t, \lambda(t))$ и $\Phi(t, \lambda(t))$ — функции, определяющие амплитудную и фазовую модуляцию ВЧ сигнала сообщением $\lambda(t)$; T — длительность сигнала (время наблюдения), которая в реальных задачах конечна. Конкретный вид этих функций зависит от назначения РТС и способа ее построения.

При проектировании устройств обработки сигналов во всех типах РТС существенное значение имеет характер *высокочастотной структуры* сигнала $s(t, \lambda(t))$. По этому признаку все сигналы можно разделить на два типа: *когерентные* и *частично когерентные*, включая в них и полностью *некогерентные*. У когерентных сигналов изменение во времени их фазы полностью известно, т. е. описывается детерминированной функцией. Это позволяет, например, производить компенсацию нежелательных фазовых сдвигов и осуществлять, в частности, синфазное сложение нескольких ВЧ сигналов. В итоге можно увеличить мощность суммарного сигнала. Когерентное суммирование (накопление) часто используется в устройствах

оптимального приема сигналов при наличии помех. В случае частично когерентных сигналов, их ВЧ структура в определенной степени случайна. Таким образом, их сложение не приведет к аналогичному результату.

В зависимости от количества ступеней модуляции модулированные колебания $s(t, \lambda(t))$ могут быть двух типов: с одной ступенью модуляции и с двумя и более. На рисунке 1.4 показана структурная модель формирования переносчика сообщения $s(t, \lambda(t))$ для этих двух способов.

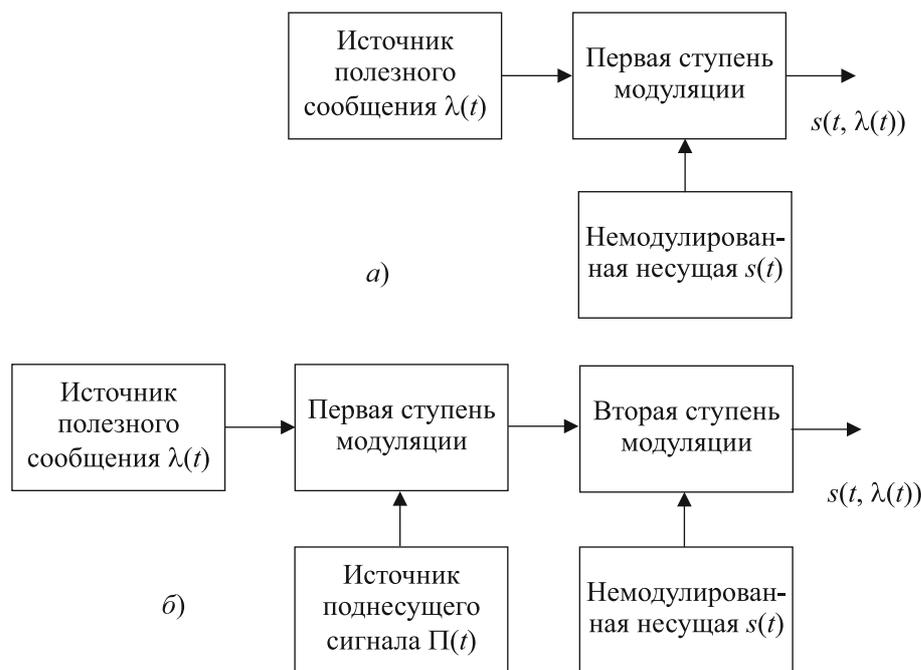


Рис. 1.4 – Структурная модель формирования сигнала — переносчика информации: а) одна ступень модуляции; б) две ступени модуляции

В случае одной ступени модуляции несущего колебания (1.1) сообщение $\lambda(t)$ непосредственно изменяет параметр радиосигнала. Различают амплитудную модуляцию (АМ), частотную модуляцию (ЧМ) и фазовую модуляцию (ФМ) (рис. 1.4, а). Например, сигнал в системах радиовещания с ЧМ можно представить в виде

$$s(t, \lambda(t)) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(\lambda(t)) + \varphi_0),$$

где скорость изменения полной фазы, т. е. мгновенная частота, должна быть равной $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}(\lambda(t)) = \omega_0 + k \cdot \lambda(t)$ при $k = \text{const}$. Образец подобного сигнала показан на рисунке 1.5, а. В РН системах наземный маяк с непрерывным излучением создает на входе подвижного бортового приемника сигнал $s(t, \lambda(t)) = k \cdot \cos[\omega_0(t - \lambda(t)/c) + \varphi_0]$, где k — коэффициент, учитывающий ослабление волны на трассе распространения; c — скорость света; $\lambda(t)$ — сообщение, совпадающее с изменением дальности $D(t)$ от передатчика (маяка) до подвижного объекта.

Сигналы с несколькими ступенями модуляции широко применяются в современных системах связи, радиолокации и радионавигации. Они имеют более сложную структуру. В частности, при 2-ступенчатой модуляции существуют два модулятора. В первой ступени происходит модуляция поднесущего сигнала $\Pi(t)$, во второй — модуляция несущего сигнала $s(t)$ (рис. 1.4, б).

ВЧ сигнал $s(t, \lambda(t))$ может иметь поднесущую $\Pi(t)$ двух типов:

- 1) регулярная последовательность импульсов;
- 2) непрерывная функция.

При использовании в качестве $\Pi(t)$ регулярной (периодической) последовательности импульсов определенной формы возможны четыре основных вида импульсной модуляции в первой ступени: амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) — сообщение $\lambda(t)$ изменяет амплитуду импульсов; время-импульсная модуляция (ВИМ) — сообщение $\lambda(t)$ изменяет временное положение импульсов относительно опорной (немодулированной) последовательности, широтно-импульсная модуляция (ШИМ), при которой сообщение управляет шириной (длительностью) импульсов, образующих поднесущую $\Pi(t)$ и кодово-импульсная модуляция (КИМ), при которой по существу не происходит (в привычном смысле) модуляции какого-либо параметра импульсной последовательности $\Pi(t)$. Поясним подробнее этот вид модуляции.

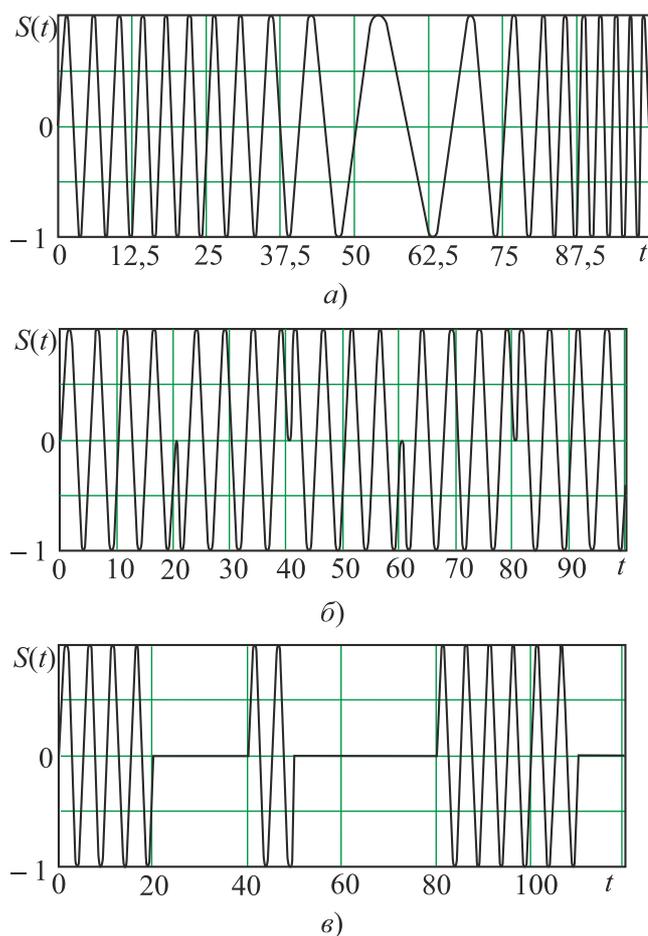


Рис. 1.5 – Виды модуляции

Применение сигнала с КИМ в системах передачи информации предполагает дискретизацию полезного сообщения $\lambda(t)$ как по времени, так и по уровню (рис. 1.2, з). Изменение характера сообщения выполняется в аналого-цифровом преобразователе. В итоге возможные значения сообщения образуют конечный набор (множество) величин.

В каждом периоде импульсной поднесущей $P(t)$ в заданные моменты времени формируется импульсный код, соответствующий значению сообщения в этот момент времени. В простейшем случае кодовые комбинации образуются в виде систематического двоичного кода. В современных цифровых системах передачи информации широко применяются псевдослучайные последовательности (ПСП) импульсов. Состояние ПСП (конкретная реализация) на некотором текущем интервале времени также зависит от значения сообщения. Количество различных состояний ПСП, т. е. число отличающихся друг от друга реализаций, счетно и конечно и должно обеспечить кодирование всех возможных значений сообщения $\lambda(t)$. Существуют различные типы ПСП. Широкое применение получили ПСП в виде M -последовательностей, что обусловлено простотой их формирования [2].

В случае, когда поднесущая $P(t)$ является непрерывной функцией, в первой степени обычно применяют один из трех основных видов модуляции: амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) или фазовую (ФМ).

Рассмотрим теперь виды модуляции во второй степени — при образовании непосредственно ВЧ сигнала $s(t, \lambda(t))$.

Во второй степени модуляции при формировании ВЧ сигнала $s(t, \lambda(t))$ с использованием импульсной поднесущей $P(t)$, имеющей любую из трех типов модуляции (АИМ, ВИМ, ШИМ), обычно применяют АМ, ЧМ или ФМ. В РТС ПИ, например, находят применение сигналы АИМ-ЧМ, ВИМ-АМ, ШИМ-ЧМ.

Формирование переносчика информации $s(t, \lambda(t))$ на основе поднесущей с КИМ осуществляется путем манипуляции (скачкообразного изменения) амплитуды, частоты или фазы несущего сигнала (1.1). При этом возможны сигналы с амплитудной манипуляцией ($АМ_n$), с частотной манипуляцией ($ЧМ_n$) или с фазовой манипуляцией ($ФМ_n$). Сигналы с $ФМ_n$ называют обычно сигналами с ФКМ (фазокодовой модуляцией). На рисунке 1.5, б показан ВЧ сигнал с КИМ и двухуровневой (0 или π) $ФМ_n$ несущей во второй степени модуляции (сигнал с ФКМ); на рисунке 1.5, в показан ВЧ сигнал с двумя степенями модуляции типа ШИМ-АМ.

Во второй степени модуляции в случае применения сигналов с непрерывной поднесущей $P(t)$ также, как правило, реализуют один из трех типов модуляции — АМ, ЧМ или ФМ. В частности, в РТС применяются комбинации ЧМ-ФМ, АМ-ЧМ и др.

При проектировании РТС передачи информации возникает задача выбора наиболее подходящего метода модуляции. В РТС извлечения информации, где процесс модуляции ВЧ сигнала сообщением происходит вне системы, данная задача сводится к выбору целесообразной формы излучаемого (*зондирующего*) сигнала. Ряд важнейших ТТХ РТС зависит от свойств сигнала $s(t, \lambda(t))$. Рассмотрим эти свойства.

1.3 Свойства радиосигнала как переносчика сообщения

1.3.1 Функция различия сигналов

При любых способах формирования ВЧ радиосигнала $s(t, \lambda)$, используемых в РТС различного назначения, предполагается, что сообщение $\lambda(t)$ содержится

в каком-либо параметре сигнала $x(t)$. Характер взаимосвязи $x(t) = f[\lambda(t)]$ зависит от типа РТС и способа ее построения. В системах связи вид этой функции определен способом модуляции и модуляционной характеристикой передатчика.

На приемной стороне канала распространения радиоволн (РРВ) принятый радиосигнал подлежит обработке — происходит измерение параметра $x(t)$ и в итоге определяется переданное сообщение $\lambda(t)$. В простейшем случае информативным является один параметр сигнала — амплитуда, частота, фаза, временное положение и т. д. Существуют и другие типы РТС, в которых информативными могут быть одновременно несколько параметров ВЧ сигнала.



.....
 Поскольку в канале РРВ или непосредственно в РТС возникают различного рода помехи, результат измерений всегда содержит ошибку, которая искажает сообщение. Степень искажения сообщения помехой зависит от уровня помехи и, что более важно, от способа модуляции ВЧ сигнала.

Рассмотрим с математической точки зрения вопрос сравнения двух радиосигналов по устойчивости передаваемых ими сообщений к искажению из-за помех. Пусть на вход приемного устройства РТС поступает искаженный помехой сигнал $y(t, x_0)$, где x_0 — постоянный во времени параметр, соответствующий сообщению λ_0 . Напомним, что в случае аддитивной помехи $y(t, \lambda_0) = s(t, \lambda_0) + n(t)$.

Очевидно, что возможность шума $n(t)$ внести искажение в сигнал $s(t; \lambda_0)$ будет тем меньше, чем сильнее отличаются образцы сигнала $s(t, x)$ друг от друга при двух различных значениях сообщения — λ_0 и произвольного λ . Таким образом, качество сигнала как переносчика информации определяется степенью различия функций $s(t, x_0)$ и $s(t, x)$.

По существу, необходимо ввести величину, которая определяет «расстояния» между двумя функциями по информативному параметру. Напомним, что в линейном n -мерном пространстве векторов в качестве меры различия векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} часто используют длину d разностного вектора $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Введем координатное представление векторов: $\mathbf{a} = \{a_i\}$, $\mathbf{b} = \{b_i\}$, $\mathbf{d} = \{d_i\}$, где нежирные буквы с индексами являются координатами соответствующего вектора. Длина вектора \mathbf{a} в n -мерном векторном пространстве определяется соотношением:

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.3)$$

Тогда мера различия d , равная длине вектора \mathbf{d} , имеет вид:

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}. \quad (1.4)$$

Введем аналогичное по содержанию понятие для сигналов. Будем рассматривать функции на конечном интервале времени $(0; T)$. Последовательность отсчетов функции $s(t_i, x) = s_i$, взятых в моменты времени t_i , с интервалом дискретизации $\Delta t = T/n$, где n — число отсчетов, можно рассматривать как n -мерный вектор

$s = \{s_i\}$. Таким образом, при дискретном представлении функций $s(t, x_0)$ и $s(t, x)$ в качестве меры их различия целесообразно использовать величину, равную

$$\sum_{i=1}^n [s(t_i, x_0) - s(t_i, x)]^2. \quad (1.5)$$

Очевидно, что величина (1.5) изменяется не только при различии форм сигналов, но и в том случае, когда они отличаются только масштабом, т. е. $s(t, x) = ks(t, x_0)$. Для исключения влияния масштабного множителя k на меру различия форм сигналов, пронормируем величину (1.5) на квадрат модуля одного из векторов. При этом полагаем, что изменение параметра x не оказывает влияния на длину вектора $s = \{s(t_i; x); i = 1, \dots, n\}$. В результате получим отношение следующего вида:

$$\frac{\sum_{i=1}^n [s(t_i, x_0) - s(t_i, x)]^2}{\sum_{i=1}^n s^2(t_i, x_0)}. \quad (1.6)$$

Запишем выражение (1.6) в непрерывной форме. Будем считать, что количество точек отсчета неограниченно растет, т. е. они сближаются. При этом соответствующие суммы переходят в интегралы. В итоге в качестве меры различия сигналов $s(t, x_0)$ и $s(t, x)$ получим величину:

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T [s(t, x_0) - s(t, x)]^2 dt, \quad (1.7)$$

где

$$E_s(x_0) = \int_0^T s^2(t, x_0) dt — \quad (1.8)$$

энергия сигнала при фиксированном значении информативного параметра x_0 , соответствующего сообщению λ_0 . Сравнивая выражения (1.3) и (1.8), видим, что длина вектора, изображающего сигнал, равна квадратному корню из его энергии. В практических задачах мера различия, определенная по (1.7), обычно является функцией разности $\Delta x = (x_0 - x)$.

Функция различия $\varepsilon(\Delta x)$ согласно (1.7) принимает только положительные значения, проходит при $\Delta x = 0$ через нуль и возрастает (иногда немонотонно) с увеличением абсолютного значения аргумента Δx . Быстрое возрастание $\varepsilon(\Delta x)$ от нуля с увеличением Δx показывает, что даже малое изменение параметра x в образце сигнала приводит к резкому увеличению меры различия ε . Следовательно, это различие легко обнаружить и труднее исказить помехой. Сигналы с быстро нарастающей функцией различия $\varepsilon(\Delta x)$ могут обеспечить передачу сообщений с меньшими искажениями. Таким образом, по виду этой функции можно судить о качестве используемого сигнала $s(t, x)$ как переносчика сообщения.



.....

По характеру влияния параметра x на величину энергии сигнала E_s все методы модуляции, используемые в РТС, можно отнести к двум группам. К первой (*неэнергетической*) относятся те методы, при которых энергия сигнала не зависит от величины модулируемого параметра x . В эту группу входит большая часть практически используемых радиосигналов, при формировании которых в последней ступени модуляции не используется АМ, а также ряд сигналов с АМ в последней ступени, например ВИМ-АМ. Ко второй группе (*энергетической*) относятся методы модуляции, при которых энергия сигнала E_s зависит от информативного параметра x . К таковым относятся сигналы АМ, АИМ-АМ, ШИМ-АМ и др.

.....

Поскольку при использовании неэнергетических методов модуляции энергия сигнала E_s и, соответственно, длина вектора сигнала в (1.8), не зависят от параметра x , то, очевидно, его изменение влечет только поворот вектора сигнала. Таким образом, в случае неэнергетических методов модуляции концы сигнальных векторов, соответствующих разным значениям параметра x , лежат на поверхности n -мерной сферы радиуса $\sqrt{E_s}$. В цифровых РСПИ дискретному множеству значений параметра x и связанному с ним сообщению λ соответствует конечное множество изолированных точек на сфере (сигнальных векторов).

Для неэнергетической модуляции выражение функции различия $\varepsilon(\Delta x)$ запишем в иной форме. Раскрывая квадрат в выражении (1.7), с учетом (1.8) получим:

$$\varepsilon(\Delta x) = 2[1 - q(\Delta x)], \quad (1.9)$$

где

$$q(\Delta x) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, x_0) \cdot s(t, x) dt. \quad (1.10)$$

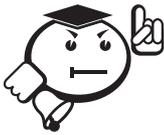


.....

Соотношение для $q(\Delta x)$ в теории РТС носит название **сигнальной функции**.

.....

Из (1.10) следует, что модуль сигнальной функции не превышает единицы, т. е. $|q(\Delta x)| \leq 1$. Быстрое спадание функции $q(\Delta x)$ с увеличением $\Delta x = x_0 - x$ обусловлено таким поворотом сигнального вектора $s = \{s_i\}$ при изменении параметра от значения x_0 к x , при котором резко увеличивается расстояние между сигналами. В этом случае приращение вектора сигнала вследствие добавления к нему вектора помехи приведет к меньшей ошибке при измерении параметра x .



.....

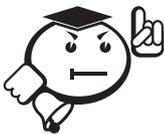
Существуют сигналы, для которых функция $q(\Delta x)$ уменьшается немонотонно и имеет выбросы, сравнимые с единицей. Это означает, что при некоторых значениях параметра x и, соответственно, сообщения λ концы сигнальных векторов, находящиеся на n -мерной сфере, сближаются в пространстве. Применение ВЧ сигналов, сигнальная функция которых обладает подобным свойством, связано с опасностью появления больших (аномальных) ошибок при действии даже сравнительно малых помех.

.....

В некоторых типах РТС радиосигнал содержит одновременно m различных сообщений, т. е. сообщение является векторной функцией $\lambda(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$. В этом случае возникает задача совместного измерения нескольких параметров радиосигнала. Очевидно, что при $m = 2$ сигнальная функция для неэнергетического способа модуляции принимает следующий вид:

$$q(x_0, \nu_0, x, \nu) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, x_0, \nu_0) s(t, x, \nu) dt, \quad (1.11)$$

где x_0, ν_0, x, ν — значения двух модулируемых параметров радиосигнала, соответствующие двум значениям векторного сообщения λ_0 и λ . Часто в практических задачах число переменных уменьшается до двух: $\Delta x = x_0 - x$ и $\Delta \nu = \nu_0 - \nu$, т. е. функция (1.11) зависит фактически от разности аргументов.



.....

Для РТС передачи и извлечения информации важным является частный случай, когда полезное сообщение, являясь двумерным, содержится во временном положении сигнала и в сдвиге его частотного спектра. В РЛ и РН системах это соответствует режиму одновременного определения дальности и скорости объекта путем совместного измерения времени задержки и доплеровского смещения частоты радиосигнала в месте приема.

.....

В системах мобильной радиосвязи подобная задача связана с необходимостью временной синхронизации приемника с одновременным слежением за изменением несущей частоты радиосигнала, которое возникает при взаимном перемещении пунктов передачи и приема. Рассмотрим свойства сигнальной функции (1.10) в этом важном частном случае.

1.3.2 Частотно-временная корреляционная функция сигнала

Допустим, что немодулированный сообщением радиосигнал имеет вид (1.2) $s(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi_0)$ и является узкополосным. Напомним, что в этом случае функции амплитудной $S(t)$ и фазовой $\Phi(t)$ модуляции изменяются во времени значительно медленнее, чем $\cos(\omega_0 t)$. Для сигнала такого типа отношение $(\Delta\omega/\omega_0) \ll 1$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра сигнала. Обращаясь к выражению (1.11), будем считать, что параметр $x_0 = t_0$ и соответствует временному положению сигнала t_0 ; параметр $\nu_0 = \omega_0$, т. е. соответствует несущей частоте. Запишем измененные

значения параметров $x = t_0 + \tau$ и $\nu = \omega_0 - \Omega$. Величина t_0 зависит от начала отсчета времени. Не теряя общности дальнейших выводов, положим $t_0 = 0$. Отметим, что временное положение и частота узкополосного радиосигнала практически не влияют на его энергию. Получим в развернутой форме выражение функции (1.11).

Воспользуемся комплексным представлением сигнала в виде $s(t) = \text{Re}[\dot{S}(t)e^{i\omega_0 t}]$, где $\dot{S}(t) = S(t)e^{i\Phi(t)}$ — комплексная огибающая сигнала. Для записи сигнальной функции в комплексном виде используем соотношение: $\text{Re}(\dot{u}) \text{Re}(\dot{v}) = 0.5[\text{Re}(\dot{u}\dot{v}) + \text{Re}(\dot{u}\widehat{\dot{v}})]$, где $\widehat{\dot{v}}$ — комплексно сопряженная величина. В справедливости приведенного соотношения для любых комплексных величин можно убедиться непосредственной проверкой.

В рассматриваемом нами частном случае обозначим сигнальную функцию символом k . Используя формулу (1.11), представим выражение сигнальной функции в виде

$$\begin{aligned} k(\tau, \Omega) &= \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, \omega_0) s[(t - \tau); (\omega_0 - \Omega)] dt = \\ &= \frac{1}{2E_s} \int_0^T \text{Re}[S(t)e^{i\Phi(t)} e^{i\omega_0 t} S(t - \tau)e^{i\Phi(t-\tau)} e^{i(\omega_0 - \Omega)(t-\tau)}] dt + \\ &+ \frac{1}{2E_s} \int_0^T \text{Re}[S(t)e^{i\Phi(t)} e^{i\omega_0 t} S(t - \tau)e^{-i\Phi(t-\tau)} e^{-i(\omega_0 - \Omega)(t-\tau)}] dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

При объединении показателей степени в подынтегральном выражении первого слагаемого получим сумму вида $i[\Phi(t) + \Phi(t - \tau) + 2\omega_0 t - \Omega t - (\omega_0 - \Omega)\tau]$. Интегрирование по переменной t с учетом свойства узкополосности сигнала и быстроосциллирующих сомножителей $\cos(2\omega_0 t)$ и $\sin(2\omega_0 t)$ дает результат для первого слагаемого, близкий к нулю. Объединяя показатели степени во втором слагаемом, получим сумму: $i[\Phi(t) - \Phi(t - \tau) + \Omega t + (\omega_0 - \Omega)\tau]$. Видно, что подынтегральная функция второго слагаемого не содержит высокочастотных по аргументу t знакопеременных сомножителей. Можно полагать, что результат интегрирования в (1.12) фактически определяет второе слагаемое, и сигнальная функция имеет вид:

$$k(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E_s} \text{Re} \left\{ \left[\int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{i\Omega t} dt \right] \cdot e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}. \quad (1.13)$$

В координатах (τ, Ω) сигнальная функция (1.13) представляет некоторую поверхность, которая вдоль оси τ (при $\Omega = 0$) имеет характер частых затухающих колебаний с периодом $2\pi/\omega_0$.

Вычисление интеграла в (1.13) дает функцию двух переменных — τ и Ω , причем огибающая этой функции достаточно медленно изменяется по τ в сравнении с $\cos(\omega_0 t)$. Фактически выражение в квадратных скобках формулы (1.13) выполняет роль комплексной огибающей, и можно записать:

$$k(\tau, \Omega) = \text{Re} \{ \dot{K}(\tau, \Omega) \cdot e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \}, \quad (1.14)$$

где комплексная огибающая

$$\dot{K}(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E_s} \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{i\Omega t} dt = |\dot{K}(\tau, \Omega)| e^{i\Psi(\tau, \Omega)}. \quad (1.15)$$

Модуль $|\dot{K}(\tau, \Omega)| = K(\tau, \Omega)$ по существу есть *огибающая сигнальной функции* (1.14), соответственно, $\Psi(\tau, \Omega)$ — *фаза сигнальной функции*.



.....
 Отметим, что в рассмотренном здесь частном случае сигнальную функцию $k(\tau, \Omega)$ называют **частотно-временной корреляционной функцией** узкополосного сигнала (1.2). Сечение функции $k(\tau, \Omega = 0) = k(\tau)$ является **временной автокорреляционной функцией** (АКФ) узкополосного ВЧ сигнала. Другое главное сечение $k(\Omega) = k(\tau = 0, \Omega)$ определяет **частотную автокорреляционную функцию** ВЧ сигнала.

Термин «корреляция» определяет величину, которая позволяет соотнести (сравнить) между собой два сигнала, отличающихся значениями одного или нескольких параметров (τ, Ω) . Изменяя величину этих параметров, получем соответственно корреляционные функции $K(\tau)$, $K(\Omega)$, $K(\tau, \Omega)$.

Для временной АКФ из (1.12) получаем выражение:

$$k(\tau) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t) s(t - \tau) dt \quad (1.16)$$

или в комплексной форме с учетом (1.13)–(1.15):

$$k(\tau) = \frac{1}{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right] \cdot e^{i\omega_0 \tau} \right\} = \operatorname{Re} [\dot{K}(\tau) \cdot e^{i\omega_0 \tau}], \quad (1.17)$$

где $\dot{K}(\tau) = \frac{1}{2E_s} \left[\int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right]$ — *комплексная огибающая автокорреляционной функции сигнала*.



.....
 Огибающую $K(\tau, \Omega)$ функции (1.15) в литературе называют **функцией неопределенности** (ФН). Это название объясняется одним замечательным свойством данной функции, которое состоит в выполнении следующих равенств:

$$K(\tau = 0, \Omega = 0) = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau, \Omega) d\tau d\Omega = 1. \quad (1.18)$$

Первое равенство есть следствие нормировки ФН (см. (1.10) и (1.11)). Второе обусловлено тем, что переменные τ и Ω являются при преобразовании Фурье взаимосвязанными (сопряженными) переменными (доказательство данного свойства приведено, например, в [6]).

Напомним (см. п. 1.3.1), что *возможность* ВЧ сигнала обеспечить высокую точность измерения параметров (в данном случае это время задержки τ и частотный сдвиг Ω) при наличии помехи зависит от *крутизны спада* *сигнальной функции* (1.10) *вблизи точек* $\tau = 0$ и $\Omega = 0$. Однако условие (1.18) означает, что объем, ограниченный поверхностью $K^2(\tau, \Omega)$, равен 2π . Следовательно, произвольно сжимать функцию $K(\tau, \Omega)$ нельзя.



.....
 Другими словами, уменьшение ширины ФН по переменной τ с целью увеличения точности измерения времени задержки сигнала повлечет за собой ее расширение по переменной Ω и, как следствие, снижение точности измерения частоты сигнала. В этом состоит сущность известного *принципа неопределенности в радиолокации* [2, 6, 12].

Важно отметить, что аппаратная реализация возможности точного измерения параметров сигнала должна быть понята как *потенциальная возможность*. Ее достижение связано с применением особых (оптимальных) способов обработки сигналов, которые мы изучим в последующих главах. Рассмотрим теперь вопрос о том, какие параметры радиосигнала определяют характер функции $K(\tau, \Omega)$ в окрестности ее главного максимума.

1.3.3 Ширина функции неопределенности вдоль осей время — частота

В инженерной практике важными являются следующие параметры сигнала: *энергия, длительность и ширина частотного спектра*. В соответствии с выражениями (1.2) и (1.8) запишем выражение энергии узкополосного ВЧ сигнала конечной длительности:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos^2(\omega_0 t + \Phi(t)) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos[2(\omega_0 t + \Phi(t))] dt.$$

Второй интеграл для реальных сигналов оказывается близким к нулю, так как подынтегральное выражение содержит быстроосциллирующий (знакопеременный) множитель. Учтем, что действительная огибающая $S(t) = |\dot{S}(t)|$ и, согласно равенству Парсеваля [2],

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega,$$

где $\dot{G}(\omega)$ — спектральная функция (преобразование Фурье) комплексной огибающей $\dot{S}(t) = S(t)e^{i\Phi(t)}$ сигнала $s(t)$. Таким образом, энергия сигнала

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.19)$$

т. е. она зависит от вида функций $|\dot{S}(t)|^2$ и $|\dot{G}(\omega)|^2$. Физический смысл соотношений (1.19) состоит в том, что полная энергия E_s непрерывно распределена по времени или по частоте (в спектральной области). В бесконечно малом интервале dt в момент времени t ее величина $dE(t) = 0.5S^2(t) dt$; в бесконечно малой полосе частот $df = (1/2\pi)d\omega$ ее величина $dE(f) = 0.5|\dot{G}(f)|^2 df$. Умножение на 0.5 обусловлено использованием комплексного представления сигналов: мнимая и действительная составляющие комплексной амплитуды сигнала имеют равные энергии и, соответственно, равноправны положительные и отрицательные частоты при спектральном представлении действительного сигнала.

Введем два параметра, которые характеризуют функции $|\dot{S}(t)|^2$ и $|\dot{G}(\omega)|^2$: длительность сигнала ΔT и ширину полосы частотного спектра сигнала $\Delta\Omega$. Математические выкладки выполняются наиболее просто, если начало отсчета времени и частоты поместить в точки, соответствующие «центрам масс» фигур, образуемых нормированными функциями:

$$\frac{|\dot{S}(t)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt} \text{ и } \frac{|\dot{G}(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.20)$$

В этом случае величины ΔT^2 и $\Delta\Omega^2$ могут быть определены как меры рассеяния (дисперсии) соответствующих функций (1.20). В итоге получаем:

$$\Delta T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt} \text{ и } \Delta\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.21)$$



.....
*Параметры ΔT и $\Delta = 2\pi \cdot \Delta F$ характеризуют рассеяние ВЧ сигнала во времени и по частоте (относительно несущей ω_0). По аналогии с соответствующей величиной в теории вероятностей их называют **среднеквадратическими длительностью и полосой частот сигнала**. Эти параметры определяют помехоустойчивость и точность РТС различных типов при наличии помех.*

Заметим, что в энергетических расчетах чаще используют понятие *эффективной длительности* сигнала $\Delta T_{\text{э}}$, которое более наглядно. Величина $\Delta T_{\text{э}}$ определяет энергию $E_s = P \cdot \Delta T_{\text{э}}$, где P — средняя мощность сигнала. Физически реальные сигналы имеют конечную энергию, поэтому для функций $s(t)$ с конечной длительностью и, соответственно, с неограниченным по полосе частотным спектром, $\Delta T_{\text{э}}$ равно фактической длительности сигнала T_s .

Если функция $s(t)$ неограничена во времени и имеет конечную среднюю мощность, ее эффективную длительность определим иначе. Пронормируем функцию $s(t)$ и представим огибающую $S(t) = \sqrt{2P} \cdot S_0(t)$, где $S_0(t)$ — нормированная (не

имеющая размерности) огибающая, причем $\Delta T_{\Sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} S_0^2(t) dt$ и, очевидно, $E_S = 0.5 \times \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = P \cdot \Delta T_{\Sigma}$. Величину ΔT_{Σ} , имеющую размерность времени, иногда называют *интегральной шириной сигнала*. Смысл этой величины для импульса гауссовой формы поясняет рисунок 1.6, из которого следует, что $\Delta T_{\Sigma} = 2$ и равно основанию прямоугольника, площадь которого также равна 2. Конечно, величины ΔT_{Σ} и ΔT взаимосвязаны. Например, для радиоимпульса с прямоугольной огибающей, имеющей длительность $\Delta T_{\Sigma} = T_S$, среднеквадратическая длительность $\Delta T = \Delta T_{\Sigma}/2\sqrt{3}$; для радиоимпульса с гауссовой огибающей $\Delta T = \Delta T_{\Sigma}/\sqrt{2\pi}$ [8].

$$S_0^2(t) = \exp\left(\frac{-\pi}{2 \cdot T_3^2} \cdot t^2\right); \quad \Delta T_{\Sigma} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_0^2(t) dt \right] \rightarrow 2.$$

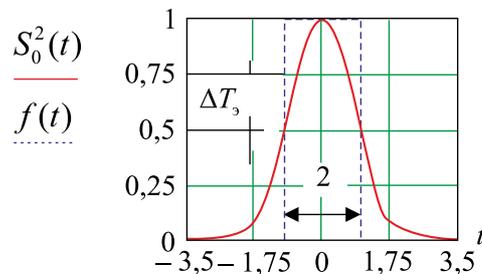


Рис. 1.6 – Интегральная ширина сигнала для импульса гауссовой формы



.....
 К числу основных характеристик сигнала относится величина **В-база сигнала**, равная произведению его среднеквадратичной длительности на среднеквадратичную ширину спектра:

$$B = \Delta T \cdot \Delta F = \frac{\Delta T \cdot \Delta \Omega}{2\pi}.$$

В теории сигналов показано, что минимальное значение базы $B \geq (1/4\pi)$ [6]. Неравенство $B \geq (1/4\pi)$ известно как **соотношение неопределенностей**.



.....
 В зависимости от величины базы сигналы бывают *простые* и *сложные*.

.....
 Для реальных сигналов с простой модуляцией B имеет порядок единицы и практически не зависит от способа определения их длительности и ширины спектра, у сложных — база $B \gg 1$. В отличие от минимального значения базы, ее максимальное значение теоретически не ограничено. Практические ограничения при использовании сигналов с большой базой связаны с аппаратной реализацией

устройств формирования сложных сигналов. В настоящее время в РТС используются ЧМ и ФМ сигналы с величиной базы до десятков тысяч.

Рассмотрим параметрическое описание ФН, радиосигнала, содержащего сообщение в виде задержки τ и частотного сдвига Ω , т.е. найдем ее представление через параметры сигнала ΔT и ΔF . Если функцию $|\dot{K}(\tau, F)|^2$ в окрестности точки ($\tau = 0, F = 0$) разложить в двойной ряд Тейлора и ограничиться членами не выше второго порядка (квадратичное приближение), то можно получить следующее соотношение [6, 8]:

$$|\dot{K}(\tau, F)|^2 \cong 1 - \Delta F^2 \cdot \tau^2 - 2\rho \cdot \tau F - \Delta T^2 \cdot F^2, \quad (1.22)$$

где $F = \Omega/2\pi$ и коэффициент частотно-временной связи

$$\rho = \frac{2\pi}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} t\Phi'(t)|\dot{S}(t)|^2 dt. \quad (1.23)$$

Из (1.23) следует: $\rho = 0$, если сигнал не имеет фазовой модуляции, т.е. $\Phi'(t) = 0$. Для определения параметров, характеризующих ширину пика ФН, приравняем левую часть (1.22) уровню c^2 . В итоге получим уравнение линии уровня. По форме оно совпадает с уравнением эллипса (см. далее рис. 1.12, б). Анализ показывает, что ширина эллипса вдоль оси временной задержки τ и, соответственно, ширина центрального пика функции неопределенности вдоль оси τ равна

$$\delta_\tau = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta F}, \text{ при } c^2 = 0.75; \quad \delta_\tau = \frac{1}{\Delta F}. \quad (1.24)$$

Ширина эллипса (и значит ширина пика ФН) вдоль оси частот F составляет

$$\delta_F = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta T}, \text{ при } c^2 = 0.75; \quad \delta_F = \frac{1}{\Delta T}. \quad (1.25)$$

Величины δ_τ и δ_F , определяя ширину главных сечений ФН, равны, соответственно, ширине огибающей временной и частотной АКФ сигнала. Эти два параметра играют важную роль при расчете потенциальных характеристик РТС.



Выводы

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. Уменьшение ширины главного пика ФН вдоль оси времени эквивалентно сужению огибающей временной автокорреляционной функции $K(\tau)$ и возможно при расширении частотного спектра ВЧ сигнала $s(t)$.
2. Для простых ВЧ сигналов, имеющих базу $B = \Delta T \cdot \Delta F \approx 1$, расширение частотного спектра связано с уменьшением их длительности, что ведет (при постоянной мощности P) к уменьшению энергии сигнала $E_S = P \cdot \Delta T_S$ и возрастанию (в соответствии с принципом неопределенности) ширины главного пика ФН по оси частот.

3. Применение сложных сигналов ($B \gg 1$) позволяет расширить частотный спектр сигнала при одновременном увеличении его длительности, что дает возможность повысить энергию сигнала $E_S = P \cdot T_S$ без увеличения его мощности и уменьшить ширину пика ФН по оси частот.
-

1.3.4 Примеры функций неопределенности импульсных сигналов

Рассмотрим ФН типичных импульсных радиосигналов.

1. *Радиоимпульс с прямоугольной огибающей и простой модуляцией.* Представим сигнал, имеющий амплитуду S_0 , начальную фазу φ_0 и длительность $T_S = \tau_n$ в виде

$$s(t) = \text{Re} [\dot{S}(t)e^{i\omega_0 t}],$$

где $\dot{S}(t) = (\sqrt{2}e^{i\varphi_0})/(\sqrt{\tau_n}) \cdot \text{rect}(t/\tau_n)$ и прямоугольная функция

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < 0.5, \\ 0, & |x| \geq 0.5. \end{cases}$$

Введенная нормировка ($S_0 = \sqrt{2}$) обеспечивает величину энергии

$$E_S = 0.5 \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} |\dot{S}(t)|^2 dt = 1.$$

Радиоимпульс $s(t)$ при $\varphi_0 = \pi$, $\tau_n = 1$ показан на рисунке 1.7. Подставляя в (1.15) выражение его комплексной огибающей и выполняя интегрирование, получим ФН прямоугольного радиоимпульса в виде [2, 6]

$$K(\tau, F) = |\dot{K}(\tau, F)| = \left| \left(\frac{\tau_n - |\tau|}{\tau_n} \right) \cdot \frac{\sin[\pi F \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n)]}{\pi F \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n)} \right|, \text{ при } |\tau| < \tau_n. \quad (1.26)$$

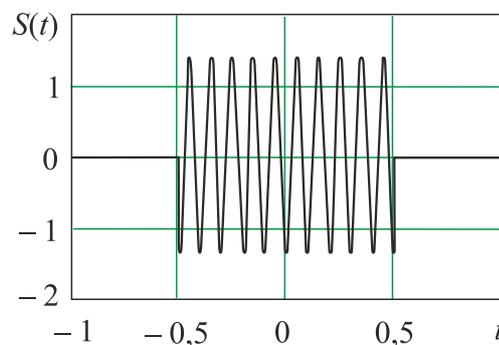


Рис. 1.7 – Прямоугольный радиоимпульс $s(t)$

На рисунке 1.8, а показана поверхность, соответствующая ФН (1.26). Вдоль оси временной задержки τ ФН имеет конечную протяженность, что следует из

способа образования корреляционной функции. Действительно, в (1.15) в подынтегральном выражении огибающая $S(t)$ умножается на свою копию, $S(t - \tau)$, сдвинутую по оси времени на τ , и при $|\tau| \geq \tau_n$ результат интегрирования равен нулю. На рисунке 1.8, б показаны проекции сечений $K(\tau, F) = \text{const}$ на плоскость (F, τ) — линии уровня. Видно, что в области высокой корреляции (0.6–0.7 и выше) линии уровня близки к окружностям.

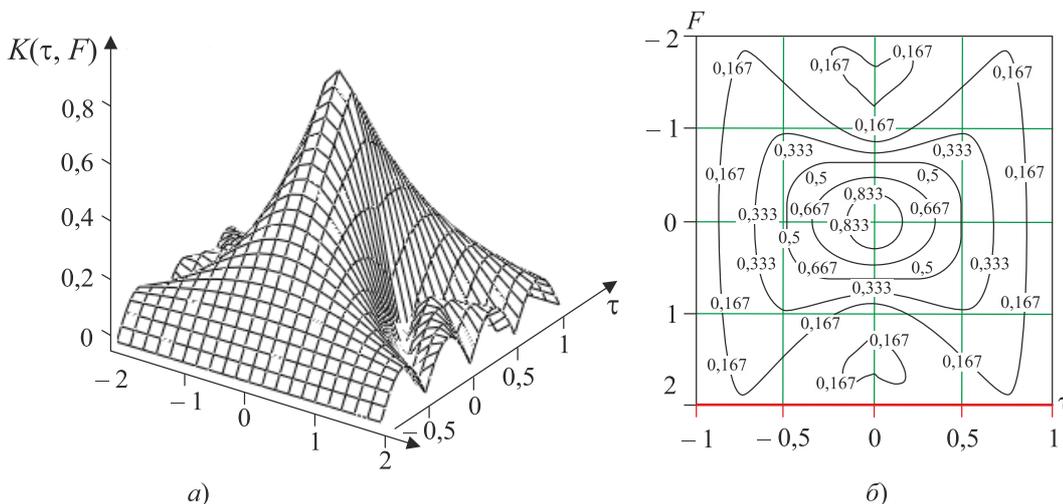


Рис. 1.8 – Функция неопределенности прямоугольного радиоимпульса:
 а) поверхность ФН (огибающая частотно-временной корреляционной функции);
 б) линии уровня функции неопределенности

На рисунке 1.9, а показаны сечения ФН: $K(\tau) = K(\tau, F = \text{const})$ — огибающая временной корреляционной функции при различных значениях доплеровского сдвига. При $F = 0$ получаем огибающую временной АКФ прямоугольного радиоимпульса, которая согласно (1.26) имеет вид:

$$K(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}, \text{ при } \tau \in (-\tau_n, \tau_n). \tag{1.27}$$

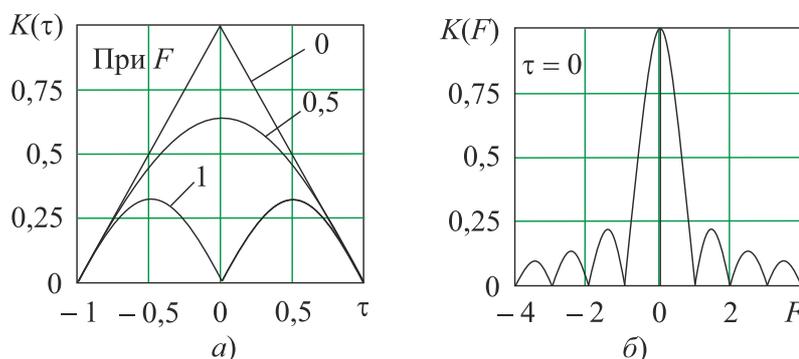


Рис. 1.9 – Сечения огибающей частотно-временной корреляционной функции радиоимпульса ($\tau_n = 1$)

На рисунке 1.9, б показано главное сечение ФН $K(\tau = 0, F) = K(F)$ — огибающая частотной автокорреляционной функции прямоугольного радиоимпульса

с простой модуляцией. Выражение для нее следует из (1.15) и имеет, согласно (1.26), вид:

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} |\dot{S}(t)|^2 e^{i2\pi Ft} dt \right| = \left| \frac{\sin(\pi F \tau_n)}{\pi F \tau_n} \right|, \quad F \in (-\infty, \infty). \quad (1.28)$$

Соотношение (1.28) — преобразование Фурье от квадрата огибающей сигнала.



Выводы

Таким образом, частотная АКФ сигнала не зависит от его фазовой структуры и определяется только формой огибающей радиоимпульса. Увеличение длительности сигнала ведет к уменьшению ширины пика частотной АКФ сигнала.

На рисунке 1.10 показана временная АКФ радиоимпульса, соответствующая выражениям (1.16), (1.17). Она является четной осциллирующей функцией с частотой сигнала ω_0 и имеет конечную длительность, вдвое превышающую длительность сигнала $s(t)$. Следует обратить внимание, что вблизи главного максимума функции $k(\tau)$ расположены близкие по величине локальные максимумы, следующие через интервалы, равные периоду ВЧ сигнала.

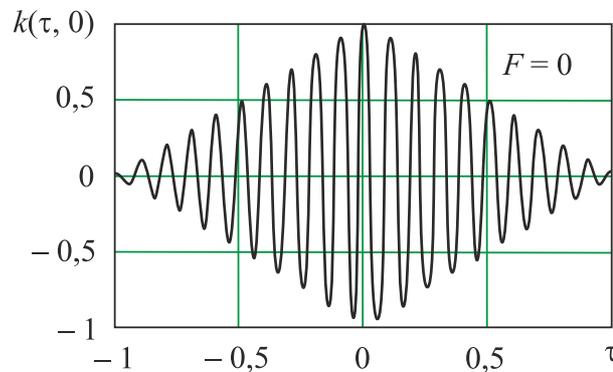


Рис. 1.10 – Корреляционная функция прямоугольного радиоимпульса $\tau_n = 1$

2. Гауссов радиоимпульс с внутримпульсной линейной ЧМ.

Представим радиоимпульс с гауссовой огибающей и ЛЧМ в виде

$$s(t) = S_m \cdot e^{-k^2 t^2} \cos(\omega_0 t + bt^2 + \varphi_0), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1.29)$$

где $S(t) = S_m \cdot \exp(-k^2 t^2)$ — огибающая радиоимпульса; S_m — значение огибающей в максимуме; k — параметр, определяющий длительность сигнала; b — параметр частотной модуляции. Мгновенная частота сигнала (1.29) изменяется по линейному закону $\omega(t) = \omega_0 + 2bt$, где $2b$ — скорость изменения частоты. При длительности импульса ΔT и девиации частоты $\Delta\omega_M$ скорость изменения частоты $2b = \Delta\omega_M / \Delta T$. Обычно ширина спектра сигнала с ЛЧМ равна девиации частоты, т. е. $\Delta\Omega = \Delta\omega_M$. Таким образом, база сигнала $B = \Delta F \cdot \Delta T = 2b \cdot \Delta T^2 / 2\pi$. На рисунке 1.11 показан

сигнал с ЛЧМ для значений $S_0 = 1.3$, $k = 2$ мкс⁻¹, $b = 20$ рад/мкс. Расчет длительности сигнала по формуле (1.21) дает величину $\Delta T = 1/2k = 0.25$ мкс., т.е. $B \simeq 0.4$. Конкретные величины параметров заданы исключительно для удобства восприятия рисунков.

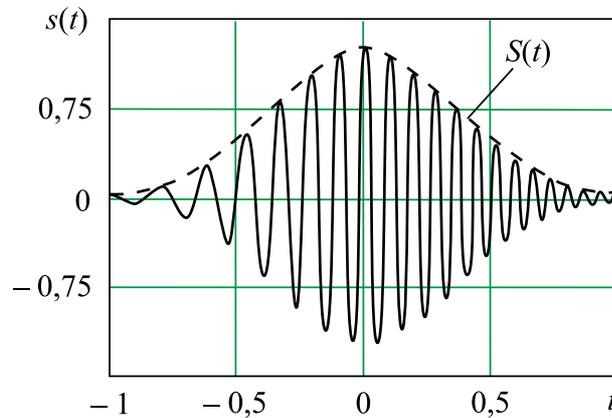


Рис. 1.11 – Радиоимпульс гауссовой формы с ЛЧМ

Подстановка в (1.15) комплексной амплитуды сигнала (1.29) дает выражение ФН в виде

$$K(\tau, F) = \exp \left\{ -0.5 \left[k^2 \tau^2 + \frac{\pi^2}{k^2} \left(F + \frac{b\tau}{\pi} \right)^2 \right] \right\}, \quad \tau, F \in (-\infty, \infty). \quad (1.30)$$

Уравнению (1.30) соответствует гауссова поверхность ФН, которая показана на рисунке 1.12, а. На рисунке 1.12, б показаны линии равного уровня. В данном случае их форма эллиптическая и это характерно для сигналов с ЛЧМ. Рассмотрим главные сечения ФН, поскольку они определяют ширину эллипсов вдоль главных осей τ и F . Из (1.30) при $F = 0$ получаем огибающую временной АКФ гауссова радиоимпульса:

$$K(\tau) = \exp \left[-0.5 \left(k^2 + \frac{b^2}{k^2} \right) \tau^2 \right]. \quad (1.31)$$

На рисунке 1.13 функция $K(\tau)$ показана в виде огибающей для АКФ $k(\tau)$ радиосигнала, которая, как и сам сигнал, является высокочастотной (см. (1.16)).



.....
 Необходимо отметить, что функция $k(\tau)$ в отличие от сигнала $s(t)$ не имеет фазовой модуляции.

Принципиально важным для построения оптимальных систем обработки сигналов является факт, состоящий в том, что огибающая $K(\tau)$ оказывается более узкой, чем огибающая $S(t)$ исходного радиоимпульса.

.....

Это видно из сравнения рисунков 1.11 и 1.13.

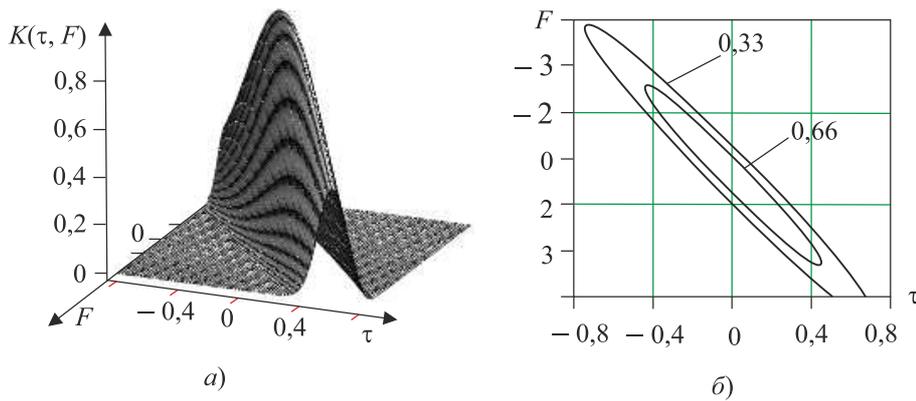


Рис. 1.12 – Функция неопределенности радиоимпульса с гауссовой огибающей: а) поверхность неопределенности (огибающая частотно-временной корреляционной функции); б) линии уровня функции неопределенности

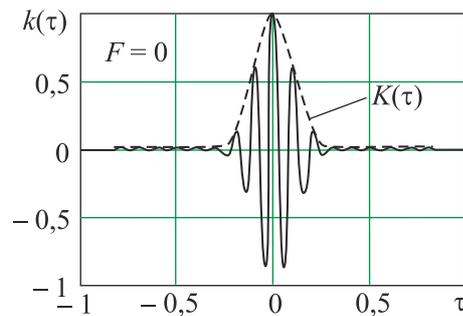


Рис. 1.13 – Временная АКФ сигнала $s(t)$ с ЛЧМ. $K(\tau)$ – огибающая АКФ



.....
 Определим величину сжатия по времени функции $K(\tau)$ по сравнению с $S(t)$ в виде отношения $k_{сж} = \Delta T / \Delta \tau$, где ΔT и $\Delta \tau$ – соответственно, среднеквадратические длительности функций $S(t)$ и $K(\tau)$. Как было указано выше, $\Delta T = 1/2k$. Вычисление длительности огибающей АКФ согласно (1.21) дает результат:

$$\Delta \tau = \frac{1}{k \sqrt{2 \left(1 + \frac{b^2}{k^4} \right)}} = \frac{1}{k \sqrt{2 (1 + 16\pi^2 B^2)}}. \quad (1.32)$$

В итоге коэффициент сжатия функции $K(\tau)$ равен

$$k_{сж} = \sqrt{0.5 + 8\pi^2 B^2}, \text{ при } B \gg 1; \quad k_{сж} \simeq 2\pi B \sqrt{2}, \quad (1.33)$$

т. е. он фактически зависит только от базы сигнала.

Для гауссова радиоимпульса с простой модуляцией база $B = \Delta T \cdot \Delta F = 1/4\pi$ [6]. Согласно (1.33), в этом случае $k_{сж} = 1$ (сжатие отсутствует). В нашем примере $B \simeq 0.4$ и $k_{сж} \simeq 3.6$. В РТС применяются сигналы с базой до десятков тысяч.

Второе главное сечение ФН, соответствующее огибающей частотной АКФ, получаем из (1.30). При $\tau = 0$ имеем

$$K(F) = |\dot{K}(\tau = 0, F)| = \exp\left(-0.5 \cdot \frac{\pi^2 F^2}{k^2}\right). \quad (1.34)$$



.....

Как и должно быть, ширина этой функции зависит только от длительности радиоимпульса (параметр k); наличие любой ЧМ не изменяет ее вид, поскольку $K(\Omega)$ связана взаимным Фурье-преобразованием с функцией $|\dot{S}(t)|^2$ (см. (1.28)), которая не учитывает фазовый множитель комплексной огибающей. Функция (1.34) имеет также гауссову форму и показана на рисунке 1.14. Средне-квадратичная ширина функции $K(\Omega)$, вычисленная по (1.21), дает результат:

$$\Delta_{\Omega} = k\sqrt{2}. \quad (1.35)$$

.....

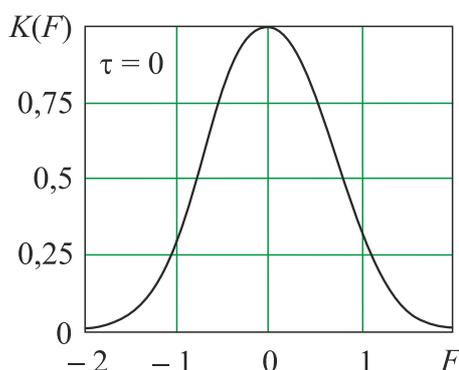


Рис. 1.14 – Огибающая частотной АКФ сигнала $s(t)$ с ЛЧМ

Из (1.35) следует, что чем протяженнее радиосигнал, тем уже главный пик ФН по оси доплеровского сдвига частоты.



Выводы

.....

Таким образом, ширина огибающей временной АКФ радиосигнала с ЛЧМ обратно пропорциональна величине бызы B ; ширина частотной АКФ этого сигнала обратно пропорциональна длительности радиосигнала.

.....

3. Прямоугольный радиоимпульс с фазокодовой модуляцией.

Расширение частотного спектра радиоимпульса при заданной длительности возможно с помощью как внутриимпульсной ЧМ, так и ФКМ. Относительная простота фазового кодирования сигналов и преимущества, связанные с постоянством амплитуды при генерации и усилении сигналов, обеспечили ФМ импульсам широкое применение. Радиоимпульс прямоугольной формы с ФКМ можно задать в виде

$$s(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \quad 0 \leq t \leq n\Delta, \quad (1.36)$$

где $n\Delta = \tau_n$ — длительность импульса, составленного из n парциальных импульсов, имеющих ширину Δ и начальную фазу φ_i ; функция

$$P_i(t) = \begin{cases} P[t - (i-1)\Delta] = 1, & (i-1)\Delta \leq t \leq i\Delta, \\ 0, & \text{при других } t. \end{cases} \quad (1.37)$$

Наибольшее применение получили ФКМ сигналы, фазы которых могут принимать только два значения: 0 или π (*бинарные коды*). Если в сигнале используется большее число значений фаз φ_i в пределах $0-2\pi$, то такие сигналы называются *многофазными*. Учитывая, что изменение фазы на π приводит к перемене знака ВЧ заполнения на противоположный, сигнал (1.36) с бинарным фазовым кодом имеет вид:

$$s(t) = \Pi(t) \sin(\omega_0 t), \quad (1.38)$$

где $\Pi(t)$ — последовательность (импульсно временной код), состоящая из n единичных положительных и отрицательных импульсов. На рисунке 1.15, *a* показан радиоимпульс с бинарным фазовым кодом Баркера ($n = 7$) и соответствующая ему модулирующая последовательность $\Pi(t)$. Кодовую последовательность символов можно условно записать в виде: +1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 (рис. 1.16).

Определим главное сечение ФН при $\Omega = 0$, т. е. функцию $K(\tau)$. Если согласно формуле (1.16) перемножить две сдвинутые по времени на разные τ функции вида (1.38) и выполнить интегрирование (рис. 1.16, *a*), то получим, как и в случае одиночного прямоугольного радиоимпульса (рис. 1.9, *a*), огибающую АКФ треугольного вида. Существенное отличие будет в том, что для сигнала с ФКМ функция $K(\tau)$ будет иметь 7 (по числу парциальных импульсов) максимумов (лепестков). Максимум главного лепестка ($\tau = 0$) при отсутствии в (1.16) нормировки, равен $nE_1 = 7E_1$, где E_1 — энергия парциального импульса длительностью Δ . Максимумы шести боковых лепестков одинаковы и равны E_1 . Эти лепестки получатся при сдвиге τ , кратном 2Δ , когда число совпадающих по фазе φ_i парциальных импульсов равно 1. В нормированном виде АКФ показана на рисунке 1.16, *б*. Ее протяженность в силу конечной длительности сигнала равна $2\tau_n$.

Сравним АКФ $K(\tau)$ (рис. 1.9, *a*) сигнала с простой модуляцией и прямоугольной огибающей с АКФ аналогичного по длительности, но сложного сигнала с ФКМ (рис. 1.16, *б*). Видно, что ширина (по первым нулям) второй из них равна $2\tau_n/n$, а первой — $2\tau_n$. Таким образом, АКФ $K(\tau)$ сигнала с ФКМ сжимается в $n = 7$ раз по сравнению с длительностью сигнала. Если учесть, что ширина спектра сложного сигнала с ФКМ $\Delta F \simeq 1/\Delta$ и его длительность $\Delta T \simeq n \cdot \Delta$, то база сигнала $B = \Delta F \cdot \Delta T \simeq n$, т. е. равна коэффициенту сжатия.

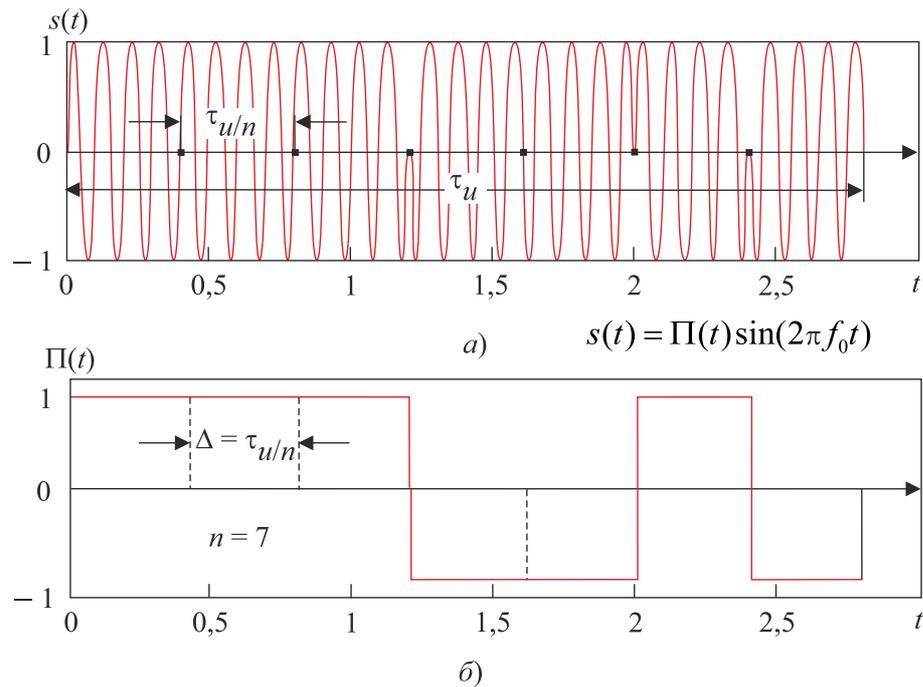


Рис. 1.15 – Радиоимпульс с ФКМ (а); $\Pi(t)$ — функция модуляции (манипуляции) фазы (б)

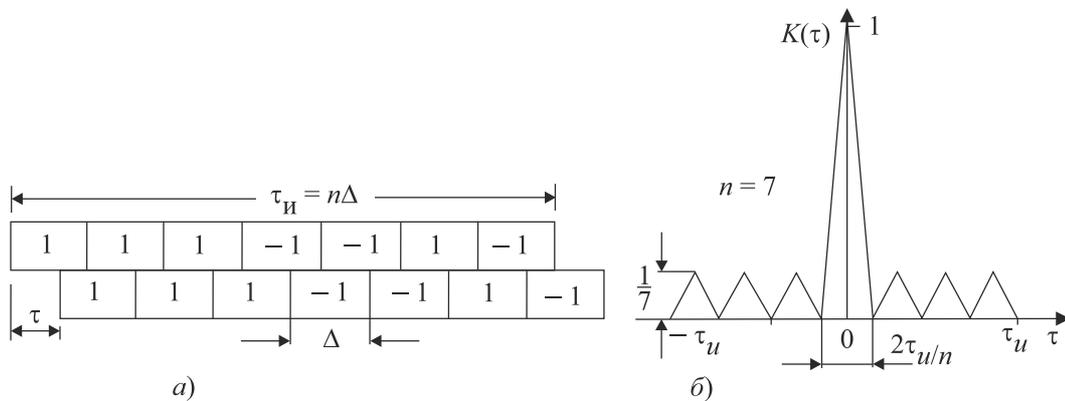


Рис. 1.16 – Главное сечение $K(\tau, \Omega = 0) = K(\tau)$ ФН радиоимпульса с ФКМ: а) условное изображение сигнала; б) огибающая временной АКФ сигнала

При практическом применении ФКМ сигналов важно обеспечить требуемый уровень боковых лепестков ФН. Как показано выше, он зависит от числа парциальных импульсов и равен $1/n$. Таким свойством обладают и другие коды Баркера [6]. Они могут быть построены только для $n \leq 13$. Для получения больших n применяют другие коды (в частности, M -последовательности), у которых ФН (главное сечение при $\Omega = 0$) в промежуточных точках не превышает $1/\sqrt{n}$. Известны M -последовательности, у которых число элементов несколько десятков тысяч.

При больших $n = \tau_{и}/\Delta$ ФКМ сигнал имеет высокую информативность и вместе с этим высокую надежность — малый уровень боковых лепестков, что позволяет однозначно различать сигналы, отличающиеся друг от друга большими сдвигами по времени.

Второе главное сечение ФН $K(\Omega)$ — огибающая частотной АКФ сигнала, как было показано выше, не зависит от фазовой структуры ВЧ сигнала и определяется как Фурье-преобразование от квадрата модуля комплексной огибающей радиосигнала (см. (1.28)). Таким образом, для сигнала с ФКМ и огибающей прямоугольной формы получаем:

$$K(F) = \left| \frac{\sin(\pi F \tau_n)}{\pi F \tau_n} \right|, \text{ при } F \in (-\infty, \infty).$$

Ширина этой функции по первым нулям равна $2/\tau_n$ [Гц] (рис. 1.9, б). Например, при $\tau_n = 10$ мс имеем $\Delta F_K = 200$ Гц, и если $n = 10^4$, то $\Delta = \tau_n/n = 2$ мкс; автокорреляционная функция $K(\tau)$ такого сигнала в 10^4 раз уже, чем АКФ, равно-го по длительности сигнала без ФКМ.



Выводы

ФН радиосигнала с ФКМ имеет следующие свойства:

1. Главное сечение по оси 0τ — временная АКФ $K(\tau)$ имеет протяженность ($2\tau_n$) и многопестковую структуру с числом пиков, равным количеству парциальных импульсов n .
2. Уровень главного пика равен полной энергии сигнала E_S , боковые пики ослаблены в n раз.
3. Ширина главного пика временной АКФ по нулевому уровню равна 2Δ , где $\Delta = \tau_n/n$.
4. Ширина главного пика частотной АКФ $K(F)$ зависит только от длительности радиоимпульса и равна по нулевому уровню ($2/\tau_n$).

Рассмотрим статистические свойства типовой случайной помехи, такой как собственный шум приемно-усилительных устройств.

1.4 Стационарная случайная помеха с гауссовым распределением вероятностей. Белый шум

Увеличению достоверности и скорости передачи информации в системах связи и точности измерения координат объектов в РЛ и РН системах препятствуют три фактора:

- 1) неизбежное наличие внешних и внутренних помех;
- 2) искажения сигналов при распространении радиоволн;
- 3) техническое несовершенство устройств.

Улучшение параметров радиоэлементов и применение цифровой техники существенно снизили влияние последнего фактора. Внешние помехи поступают на

вход приемника вместе с полезным сигналом. Они возникают как следствие естественных электромагнитных процессов, происходящих в атмосфере, ионосфере и космосе, а также в результате преднамеренных действий противника по созданию помех (пассивные отражатели и генераторы помех).

Наряду с внешними помехами имеются другие, внутренние, которые возникают в различных элементах передающих и приемных устройств. К ним относятся флуктуационные шумы ламп, полупроводниковых приборов и сопротивлений потерь, нестабильности напряжений питания, микрофонный эффект и др. Конкретный вид помех зависит от условий, в которых работает РТС. Однако общим и характерным является наличие собственного флуктуационного шума приемника и теплового шума пространства, окружающего приемную антенну. Эти шумы аддитивно смешиваются с полезным сигналом на входе приемника.

Полное статистическое описание случайной помехи $x(t)$ предполагает задание n -мерной совместной плотности распределения вероятностей (ПРВ) $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $x(t_i) = x_i (i = 1, \dots, n)$ — значение помехи в момент времени t_i .



.....
 Во многих практически важных случаях помеха может рассматриваться как *случайный стационарный процесс (ССП) с гауссовым распределением вероятностей*.

Напомним кратко вероятностный смысл этих понятий.

Свойство стационарности случайного процесса состоит в том, что вид функции ПРВ $W(\odot)$ не изменяется при произвольном переносе начала отсчета времени. Другими словами, ПРВ не изменится, если все моменты времени сместить на произвольную величину Δt . Это означает, что одномерная ПРВ $W(x_i; t_i) = W(x)$ не зависит от времени, т. е. в каждый отдельный момент времени случайный процесс $x(t)$ имеет одинаковые вероятностные свойства. Важными параметрами стационарной помехи являются средний по ансамблю реализаций уровень — математическое ожидание:

$$M[x(t)] = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x) dx = \text{const}$$

и средняя по ансамблю реализаций мощность:

$$M[x^2(t)] = \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx = \text{const}.$$

Эти величины постоянны во времени. Помеха, воздействующая на вход приемных устройств РТС, в большинстве случаев не имеет постоянной составляющей, т. е. ее среднее значение $\overline{x(t)} = 0$. Далее это условие будем считать выполненным.

Одномерная ПРВ не позволяет описать характер развития процесса во времени (скорость его изменения и, соответственно, спектральные свойства). Для этого необходимо привлечь хотя бы двумерную ПРВ, которая для СПП зависит не от двух моментов времени t_1 и t_2 , а от их разности $t_1 - t_2 = \tau$, причем знак τ не имеет значения. Таким образом, автокорреляционная функция (АКФ) стационарной

помехи со средним значением, равным нулю, есть

$$K_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1) \cdot x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = K_x(\tau). \quad (1.39)$$

Случайный процесс называют *гауссовым*, или *нормальным*, если ПРВ произвольного порядка имеет вид квадратичной экспоненты. Одномерная ПРВ в этом случае равна

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.40)$$

где σ — среднеквадратическое значение помехи (эффективное значение переменной составляющей процесса). Двумерная ПРВ представляет собой гауссову поверхность:

$$W(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-k_x^2(\tau)}} \exp[-0.5 \cdot Q(x_1, x_2; \tau)], \quad (1.41)$$

где $k_x(\tau) = K_x(\tau)/\sigma^2$ — нормированная автокорреляционная функция помехи; квадратичная форма в показателе экспоненты имеет вид:

$$Q(x_1, x_2; \tau) = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2k_x(\tau) + x_2^2}{\sigma^2[1-k_x^2(\tau)]}. \quad (1.42)$$

В n -мерном случае форма (1.42) имеет аналогичную структуру: содержит в числителе вторые степени всех переменных x_i , а также перекрестные слагаемые вида $a_{ij}x_ix_j$, где $a_{ij} = 2 \cdot k(t_j - t_i)$; знаменатель равен некоторой постоянной величине, определяемой конкретным выбором t_1, t_2, \dots, t_n .



.....
 Таким образом, для задания n -мерной ПРВ гауссовой помехи достаточно знания АКФ помехи $K_x(\tau)$. Знание этой функции позволяет определить любые корреляционные моменты $K_x(t_i, t_j) = K(\tau_{ij})$ и, следовательно, задать многомерную ПРВ $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Нормальный стационарный случайный процесс имеет несколько примечательных свойств:

1. Статистические свойства процесса полностью и однозначно определены заданием его АКФ, так как знание $K_x(\tau)$ позволяет записать n -мерную ПРВ.

2. Статистическая независимость совокупности отсчетов x_i гауссовского процесса в n моментов времени следует из соотношения $k_{ij} = k(t_j - t_i) = \overline{x_ix_j} = 0$ для $i, j = 1, \dots, n$. Для $n = 2$ этот вывод следует из сопоставления (1.40) и (1.41). Действительно, если при некотором τ функция $k_x(\tau) = 0$, то $W(x_1, x_2) = W(x_1) \cdot W(x_2)$, а это есть условие статистической независимости случайных величин x_1 и x_2 . Таким образом, совместная ПРВ системы n взаимно некоррелированных гауссовых случайных величин равна

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1) \cdot W(x_2) \cdot \dots \cdot W(x_n) = \prod_{i=1}^n W(x_i). \quad (1.43)$$

Подставляя в (1.43) выражение одномерной ПРВ из (1.40), получим:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]. \quad (1.44)$$

3. При линейном преобразовании гауссовского процесса свойство гауссовости сохраняется, изменяется только вид АКФ $K_x(\tau)$.

Особое место нормальных процессов в задачах синтеза и анализа РТС обусловлено тем, что реальные радиопомехи и, в частности, собственный шум приемно-усилительных устройств, образуются в результате суперпозиции большого числа случайных элементарных колебаний. В итоге вероятностные свойства суммарного процесса в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей удовлетворительно согласуются со свойствами гауссовского процесса. Напомним, что смысл упомянутой теоремы сводится к утверждению асимптотической нормальности суммы случайных слагаемых с произвольными ПРВ при увеличении их числа.

Спектральные методы анализа воздействия помех на характеристики РТС основаны на известной теореме Винера — Хинчина, в соответствии с которой для АКФ стационарного случайного процесса справедлива пара преобразований Фурье:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \text{и} \quad G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (1.45)$$

где $G_x(\omega)$ — спектральная плотность мощности помехи. Размерность этой функции можно установить, записав соотношение для средней мощности помехи

$$K_x(0) = \sigma^2 \text{ [Вт]}. \quad \text{Из (1.45) получаем } K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega, \text{ т. е. подынтегральное}$$

выражение $G_x(f) df$ имеет смысл средней бесконечно малой мощности в полосе df вблизи частоты f .



.....
 Следовательно, размерность $[G_x(f)] = \text{Вт/Гц} = \text{Дж}$, поэтому функцию $G_x(\omega)$ называют также **энергетическим спектром помехи** или, коротко, **спектром помехи**.

Физический смысл этого понятия следует из того, что ССП $x(t)$ состоит из непрерывного множества гармонических составляющих со случайными амплитудами и фазами, их средняя мощность в полосе df вблизи частоты f равна $G_x(f) df$.

Рассмотрим стационарную помеху, спектр которой можно считать почти постоянным вплоть до некоторой верхней частоты $\omega_B = 2\pi f_B$ вблизи которой спектр падает до нуля. Зададим такой спектр соотношениями:

$$G_x(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad |\omega| \leq \omega_B; \quad G_x(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_B, \quad (1.46)$$

где N_0 — спектральная плотность помехи. С помощью (1.45) найдем АКФ:

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N_0 \omega_B}{2\pi} \left[\frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau} \right]; \quad K_x(0) = \sigma^2 = \frac{N_0 \omega_B}{2\pi}. \quad (1.47)$$

На рисунках 1.17, 1.18 представлены спектр и АКФ помехи для следующих значений параметров: $N_0 = 10^{-8}$ Дж; $f_b = 100$ МГц.

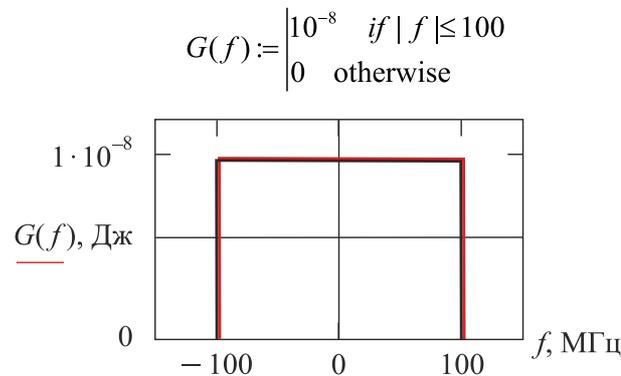


Рис. 1.17 – Энергетический спектр шума с ограниченной полосой частот

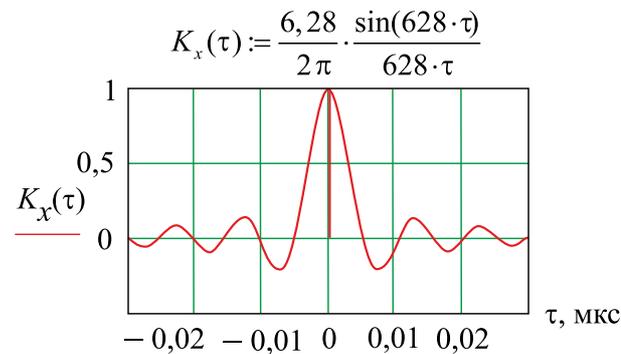


Рис. 1.18 – Автокорреляционная функция шума с ограниченной полосой частот

Корреляционная функция при $\tau = 0$ имеет пик, величина которого равна средней мощности помехи. Функция $K_x(\tau)$ осциллирует и ее огибающая уменьшается, ориентировочно как τ^{-1} . Из формулы (1.47), и это подтверждает рисунок 1.18, следует, что случайные отчеты помехи $x(t_i) = x_i$; ($i = 1, \dots, n$), соответствующие моментам времени t_i , которые разделены промежутками, кратными $\Delta t = \pi/\omega_b$, строго некоррелированы. В приведенном примере $\Delta t = 1/(2f_b) = 0.005$ мкс.

В инженерных расчетах особое значение имеет предельный случай, когда $f_b \rightarrow \infty$. Практически эта ситуация возникает, когда верхняя частота помехи f_b много больше частот сигналов, на которые рассчитана РТС. Для предельного случая АКФ помехи

$$K_x(\tau) = \lim_{\omega_b \rightarrow \infty} \left[\frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{i\omega\tau} d\omega \right] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (1.48)$$

где $\delta(\tau)$ – δ – функция Дирака.



.....
 Помеха, имеющая АКФ вида (1.48), называется **белым шумом**.
 Временная АКФ этого шума есть дельта-функция $\frac{N_0}{2} \delta(\tau)$, и шум
 имеет бесконечную полосу частот.

Таким образом, у белого гауссова шума любые два сколь угодно близких по времени значения некоррелированы и, следовательно, статистически независимы.

В приемных устройствах на частотах выше 30–50 МГц собственный шум превышает уровень внешних естественных помех. Его мощность

$$P_{\text{ш}} = \sigma^2 = kT \cdot \Delta F_3 k_{\text{ш}},$$

где k — постоянная Больцмана, равная $1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T — температура в кельвинах; $k_{\text{ш}}$ — коэффициент шума приемника; ΔF_3 — эффективная полоса пропускания приемника. Допустим, в РЛС используется импульсный сигнал со сложной модуляцией: база $B = 10^4$; $\tau_{\text{и}} = 1$ мс; $k_{\text{ш}} = 3$. Тогда полоса ΔF_3 составит 10 МГц и мощность шума на входе приемника $P_{\text{ш}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7 \cdot 300 \cdot 3 \approx 12.5 \cdot 10^{-14}$ Вт.



Контрольные вопросы по главе 1

1. В чем принципиальное отличие сигнала и помехи?
2. Почему РТС извлечения информации относят к системам с внешней модуляцией, а РТС передачи информации — к системам с внутренней модуляцией?
3. В чем отличие аддитивной помехи от мультипликативной?
4. В чем различие детерминированного и статистического подходов к решению задач анализа и синтеза РТС? Почему детерминированный подход не состоятелен?
5. Перечислите функции и параметры, задание которых связано с понятием «статистическое описание» случайной функции.
6. В чем отличие детерминированной, квазидетерминированной и случайной функций?
7. В чем отличие аналогового и цифрового сообщений?
8. Запишите общее выражение сигнала — переносчика сообщения.
9. В чем отличие сигналов с одноступенчатой и двухступенчатой модуляцией? Приведите примеры осциллограмм.
10. Что есть функция различия сигналов и каков ее смысл?
11. Запишите выражение функции различия двух сигналов по одному информативному параметру x , когда он не является энергетическим. По двум параметрам.
12. Запишите в общем виде частотно-временную корреляционную функцию узкополосного радиосигнала.
13. Запишите выражение временной автокорреляционной функции (АКФ) узкополосного радиосигнала в действительной и комплексной форме.

14. Запишите выражение комплексной огибающей временной АКФ узкополосного радиосигнала и обоснуйте тот факт, что это медленная (в сравнении с $\cos(\omega_0 t)$) функция времени.
15. Что есть функция неопределенности (ФН) радиосигнала и каковы ее свойства?
16. В чем сущность принципа неопределенности в радиолокации?
17. Какие параметры радиосигнала определяют ширину ФН вдоль осей время – частота? Как влияет энергия сигнала на ФН?
18. Что есть база радиосигнала и в чем различие сигналов с простой и сложной модуляцией?
19. Почему для сигнала с простой модуляцией уменьшение ширины пика ФН по оси времени непременно приводит (при постоянной мощности) к снижению энергии этого сигнала?
20. Почему для сигнала со сложной модуляцией уменьшение ширины пика ФН по оси времени не приводит (при постоянной мощности) к снижению энергии этого сигнала?
21. В каком случае ширина огибающей радиосигнала и ширина огибающей временной АКФ этого сигнала примерно одинаковы? Когда они могут различаться на несколько порядков?
22. Изобразите графически временную АКФ одиночного радиоимпульса с прямоугольной огибающей и простой модуляцией.
23. Изобразите графически временную АКФ одиночного ФКМ радиоимпульса с прямоугольной огибающей. Какова величина боковых максимумов этой функции по сравнению с главным пиком?
24. Почему для полноты вероятностного описания случайного сигнала необходимо привлечение плотностей распределения вероятностей более чем 1-го порядка?
25. Какая функция определяет спектральные свойства случайного стационарного процесса, поясните ее вероятностный смысл и физическую единицу измерения?
26. Какой случайный процесс называют нормальным и каковы его особенности?
27. Что означает тот факт, что шум белый?
28. Что означает тот факт, что шум стационарный и гауссов?
29. Какое влияние оказывает фазовая (или частотная) модуляция сигнала на вид частотной автокорреляционной функции сигнала и почему?

Глава 2

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

2.1 Радиоканал и его свойства



.....
Условия функционирования любой РТС предполагают наличие радиоканала или среды распространения радиоволн (РРВ). Средой распространения радиоволн могут быть атмосфера, моря и океаны, а также недра Земли. Характер и условия РРВ в канале существенно зависят от частотного диапазона и физических свойств среды.
.....

Например, радиосвязь на больших расстояниях между объектами, находящимися под водой, осуществляется в сверхдлинном диапазоне волн ($\lambda \geq 10$ км), что связано с их малым затуханием в канале. Это приводит к ряду ограничений на возможность достижения требуемых тактико-технических характеристик радиосистем в этом диапазоне. В частности, снижается скорость передачи информации. Невозможно применение остронаправленных антенн и, следовательно, определение координат объектов из одного пункта.

Широкий класс РТС используют радиоканал «Земля — космос». Это системы передачи данных на борт космических аппаратов, РЛС измерения параметров орбиты, спутниковые системы, обеспечивающие навигацию объектов на Земле, системы обзора (мониторинга) земной поверхности, работающие в оптическом, тепловом и радиодиапазоне волн. Среда РРВ для этого класса РТС включает тропосферу, стратосферу, ионосферу и часть космического пространства.

Электрофизические свойства среды РРВ не остаются постоянными, они изменяются в пространстве и во времени. Известно, что диэлектрическая и магнитная проницаемость тропосферы и ионосферы зависят от активности Солн-

ца и погодных условий. В итоге параметры радиоволны на выходе радиоканала, ее амплитуда, фаза, частота, состояние поляризации испытывают случайные пространственно-временные изменения (вариации). Причем эти изменения заведомо вычислить и полностью исключить невозможно, поскольку они имеют случайный характер.

В тропосферных радиоканалах типа «земля—земля» или «земля—воздух» свойства волны в месте приема зависят от подстилающей поверхности (суши или моря), профиль и параметры которой также случайны. Отражения от поверхности существенно осложняют работу корабельных и самолетных РТС связи и локации, использующих УКВ ($1 \text{ см} \leq \lambda \leq 10 \text{ м}$). Проблема обнаружения и измерения координат объектов с малой отражательной способностью на фоне мешающих отражений от земли, моря или облаков является актуальной задачей теории и практики разработки бортовых РЛС. Свойства подстилающей поверхности оказывают также влияние на точность и дальность действия РТС связи и навигации, использующих длинные, средние и короткие волны.

На рисунке 2.1 в качестве примера схематически показаны два типа радиоканалов — канал, характерный для РТС передачи информации, и — для измерительных РЛ и РН систем (РТС извлечения информации), когда передатчик и приемник совмещены в одном пункте. В последнем случае сам объект РЛ наблюдения также входит в состав канала. Данный пример не исчерпывает всего разнообразия типов радиоканалов.



Рис. 2.1 – Структура типичных радиоканалов: *а)* для РТС передачи информации; *б)* для измерительных РТС. ПРД — передатчик; ПРМ — приемник

Характер и степень искажения радиоволн при распространении в каналах зависят как от свойств сигнала (частоты, длительности, ширины спектра), так и от типа канала РРВ. При всем многообразии типов радиоканалов и физических явлений, происходящих в них при РРВ, следует обратить особое внимание на возможную зависимость (в некоторых средах) показателя преломления от частоты. В канале, обладающем таким свойством, возникает *дисперсия волн*. Ее суть в том, что скорость распространения фазового фронта *монохроматической волны* (фазовая скорость) оказывается зависящей от частоты. В итоге различные спектральные составляющие волнового пакета (импульса) при распространении в пространстве получают фазовые сдвиги, которые нелинейно зависят от их частоты. В этом случае скорость переноса энергии — *групповая скорость* — не равна фазовой и происходит искаже-

ние огибающей пакета — закона модуляции сигнала. Степень искажений возрастает при увеличении ширины спектра сигнала и длины трассы РРВ. Ионосфера, водная среда, различные виды грунтов являются *диспергирующими* каналами РРВ.

С точки зрения достижения наилучшей помехоустойчивости и достоверности передачи информации в системах связи, а также точности измерения координат объектов РЛ и РН системами важно знать статистические свойства сигнала на входе приемника и правильно их учесть при построении РТС. Рассмотрим в самом общем виде подход к обоснованию вероятностной модели радиоканала.

В наших рассуждениях будем иметь в виду каналы РРВ, в которых явление дисперсии практически отсутствует. К таковым относится, в частности, тропосферный канал, который используется различными по назначению типами РТС.

Реальная тропосфера представляет собой радиоканал со случайными неоднородностями, в качестве которых выступают, например, неоднородности индекса коэффициента преломления воздуха.



.....
 При обосновании математических моделей сигналов на выходе каналов часто применяется феноменологический подход, к задаче распространения волн, базирующийся на лучевых представлениях. Наличие неоднородностей в среде вызывает рассеяние волн. Каждый отдельный луч соответствует пути, по которому волна распространяется и достигает приемной антенны.

Если каждый луч, прежде чем попасть в область приема, испытывает более чем одно взаимодействие с неоднородностью, то происходит *многократное рассеяние*.

.....

Вероятностные характеристики параметров волны на входе приемной антенны и сигнала на ее выходе можно получить, если представить модель канала в виде конечного набора пространственно-временных фильтров со случайными комплексными коэффициентами передачи $\dot{K}_i(t, \omega, \mathbf{r})$, где i — номер парциального фильтра; аргумент t означает зависимость коэффициента передачи от времени; наличие аргумента ω означает неравномерность частотной характеристики фильтра, т. е. в общем случае его импульсная реакция не является δ -функцией. Зависимость $\dot{K}_i(t, \omega, \mathbf{r})$ от вектора пространственных координат \mathbf{r} означает, что коэффициент передачи «вдоль i -го луча» зависит от ориентации луча в пространстве и, следовательно, от положения точки приема. В некоторых случаях можно не учитывать эффекты многократного рассеяния.



.....
 Однократному рассеянию соответствует модель параллельного распространения волн.

.....

Структура модели радиоканала для этого случая показана на рисунке 2.2. При многократном рассеянии волн механизм образования поля в месте приема более сложный. Структура модели канала показана на рисунке 2.3. В общем случае существует последовательно-параллельный механизм формирования поля в месте при-

ема. В частном случае, например в оптических каналах связи и локации, можно допустить, что атмосфера проявляет себя как последовательность линз со случайно меняющимися свойствами. Очевидно, и это подтверждают эксперименты, что модель с последовательным механизмом (рис. 2.3, а) в этом случае более оправдана.

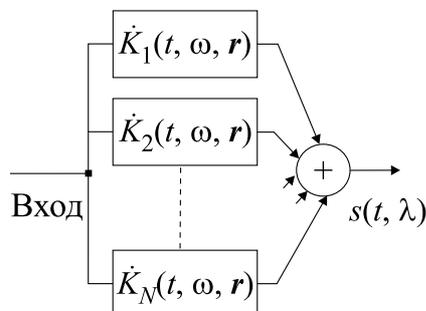


Рис. 2.2 – Структура многолучевого радиоканала с однократным рассеянием

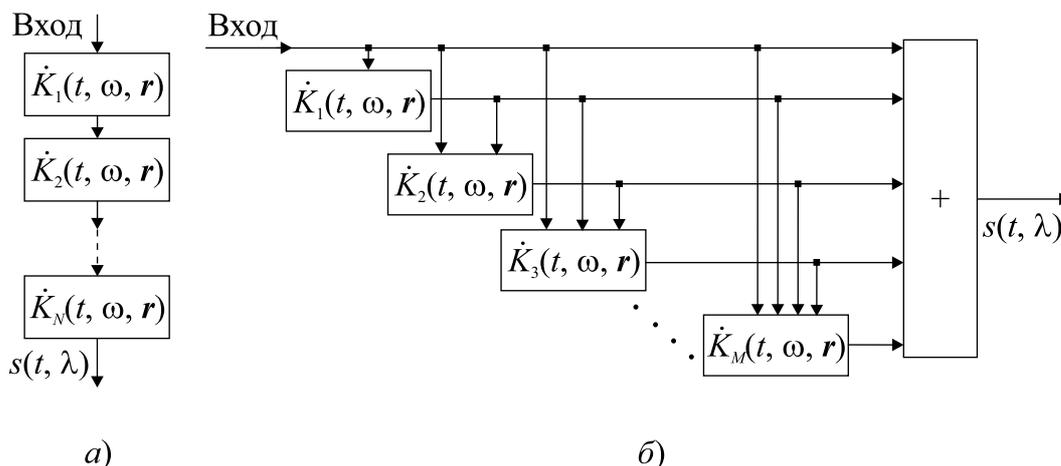


Рис. 2.3 – Модель многолучевого радиоканала с многократным рассеянием: а) канал с последовательным механизмом распространения передаваемых сигналов; б) с последовательно-параллельным механизмом

В инженерных задачах обычно ограничиваются заданием вероятностной модели канала в виде одномерных распределений вероятностей и корреляционных свойств сигнала $s(t, \lambda)$ на входе приемника. При обосновании вероятностной модели полагают, что число рассеивателей N , формирующих суммарный сигнал велико. Для модели с однократным рассеянием (рис. 2.2) общий коэффициент передачи канала:

$$\dot{K}_{\Sigma}(t, \omega, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \dot{K}_i(t, \omega, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N K_{xi}(t, \omega, \mathbf{r}) + i \sum_{i=1}^N K_{yi}(t, \omega, \mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где два слагаемых являются действительной и мнимой составляющими (квадратурами) комплексного коэффициента передачи канала. При однократном рассеянии лучи на приеме могут рассматриваться как независимые и примерно равные по своему вкладу в общий сигнал.



.....
 Тогда при достаточно большом N выполняются условия центральной предельной теоремы, согласно которой *совместное распределение квадратурных составляющих комплексного коэффициента передачи является гауссовым*.

При многократном рассеянии и структуре модели канала, соответствующей рисунку 2.3, *a*, представим коэффициент передачи l -го парциального фильтра в виде $\dot{K}_l = \gamma_l \cdot e^{i\theta_l} = e^{\mu_l} \cdot e^{i\theta_l}$, т. е. $\mu_l = \ln(\gamma_l)$, где γ_l — коэффициент передачи парциального фильтра по амплитуде; θ_l — сдвиг фазы в l -м фильтре. Тогда общий коэффициент передачи канала:

$$\dot{K}_\Sigma(t, \omega, \mathbf{r}) = \prod_{l=1}^N \dot{K}_l(t, \omega, \mathbf{r}) = e^{\sum_{l=1}^N \mu_l} \cdot e^{i \sum_{l=1}^N \theta_l} = \gamma e^{i\theta}, \quad (2.2)$$

где $\ln(\gamma) = \sum_{l=1}^N \mu_l$ — логарифм модуля коэффициента передачи канала; $\theta = \sum_{l=1}^N \theta_l$ — общий сдвиг фазы в канале. Как и ранее, при $N \rightarrow \infty$ можно ожидать выполнения условий центральной предельной теоремы. Таким образом, случайные величины $\ln(\gamma)$ и θ должны иметь гауссово распределение вероятностей. Экспериментальные исследования в ряде случаев достаточно хорошо подтверждают эти предположения.

2.2 Полезный сигнал на выходе радиоканала

Комплексный коэффициент передачи канала $\dot{K}(t, \omega, \mathbf{r})$, являясь случайной функцией частоты, времени и пространства, определяет характер и степень искажений электромагнитного поля в месте приема и, соответственно, радиосигнала на выходе приемной антенны. Большое значение для определения искажений временной и частотной структуры сигнала имеют корреляционные свойства радиоканала. Их удобно характеризовать интервалами корреляции канала по частоте $\Delta F_{\text{корр}}$, по времени $\Delta \tau_{\text{корр}}$ и по пространству $\Delta \rho_{\text{корр}}$.

В общем случае в многолучевом канале искажения сигнала бывают двух типов. Во-первых, происходит *рассеяние импульсного сигнала во времени* — длительность импульса увеличивается. Причина этого явления связана с конечной полосой частот $\Delta F_{\text{к}}$ и нелинейностью фазочастотной характеристики. Память канала, как и обычного линейного фильтра, равна примерно $\Delta T_{\text{кан}} \approx 1/\Delta F_{\text{корр}}$. Таким образом, при длительности сигнала на входе канала ΔT его длительность на выходе составит $\Delta T_{\text{вых}} \approx \sqrt{\Delta T^2 + \Delta T_{\text{кан}}^2}$. Во-вторых, вследствие перемещения неоднородностей во времени происходит модуляция сигнала и значит расширение его спектра (*рассеяние сигнала по частоте*). Величина расширения спектра $\Delta f_{\text{кан}} \approx 1/\Delta \tau_{\text{корр}}$, т. е. чем больше интервал временной корреляции, тем медленнее вариации амплитуды и фазы и тем менее выражено расширение частотного спектра. Таким образом, при ширине спектра сигнала на входе канала ΔF , его ширина на выходе составит $\Delta F_{\text{вых}} \approx \sqrt{\Delta F^2 + \Delta f_{\text{кан}}^2}$. Рассмотрим несколько типичных моделей сигнала на входе приемника РТС.

2.2.1 Модель сигнала в однолучевом канале

Рассмотрим условия, при которых радиоканал можно рассматривать как однолучевой [10].

1. При выполнении условий $\Delta T \gg \Delta T_{\text{кан}}$, т. е. $\Delta T \cdot \Delta F_{\text{корр}} \gg 1$, и $\Delta F \gg \Delta f_{\text{кан}}$, что равносильно $\Delta F \cdot \Delta \tau_{\text{корр}} \gg 1$, частотная и временная структура сигнала остаются неизменными и, следовательно, в модели канала РРВ (2.1) или (2.2) фактически существует только один луч, что и соответствует *однолучевой модели канала*. Таким образом, полезный сигнал на входе приемника $s(t, \lambda)$ отличается от излученного тем, что получает ослабление при распространении и временную задержку, т. е.

$$s(t) = \gamma S(t - \tau) \cos[\omega_0(t - \tau) + \Phi(t - \tau)], \quad (2.3)$$

где γ — коэффициент затухания; τ — задержка. Искажения формы сигнала при этом отсутствуют.

Модель сигнала (2.3) соответствует неискажающему (идеальному) каналу, который характерен для РТС, работающих в условиях, близких к свободному пространству (трассы прямой видимости, космос).

2. При достаточно продолжительном наблюдении необходимо учитывать вариации затухания $\gamma(t)$ и времени задержки $\tau(t)$. В этом случае

$$s(t) = \gamma(t) S[t - \tau(t)] \cos\{\omega_0(t - \tau(t)) + \Phi[t - \tau(t)]\}. \quad (2.4)$$

Отметим существенную особенность, связанную с изменением задержки $\tau(t)$. Этот процесс относительно медленный. Поэтому его можно приближенно представить в виде $\tau(t) \simeq \tau_n + \beta t$, где τ_n — начальная задержка и β — скорость изменения задержки. Изменение задержки за счет слагаемого βt на интервале наблюдения, равном длительности сигнала, как правило, мало и не оказывает существенного влияния на комплексную огибающую сигнала. Поэтому можно положить $\dot{S}(t - \tau_n - \beta t) \simeq \dot{S}(t - \tau_n)$.

Введем некоторое номинальное или среднее время задержки τ_0 и представим $\tau_n = \tau_0 + \theta/\omega_0$, где θ — изменение фазы ВЧ сигнала в интервале $(-\pi; \pi)$; малые изменения задержки, соответствующие вариациям фазы в интервале $\pm\pi$, оказывают существенное влияние в (2.4) только на аргумент $\omega_0(t - \tau(t))$. Искажения комплексной огибающей по-прежнему малы, т. е. $\dot{S}(t - \tau_n) \simeq \dot{S}(t - \tau_0)$. Действительно, допустим, на несущей частоте $f_0 = 1000$ МГц изменению фазы ВЧ сигнала на $\pm\pi$ соответствуют вариации задержки, равные половине периода колебаний, т. е. 0.0005 мкс. При распространении волны в пространстве такое изменение фазы происходит на пути, равном половине длины волны (в данном примере это 15 см).

С учетом указанных выше допущений принимаемый сигнал (2.4) имеет вид:

$$s(t, \lambda) = \text{Re} \left\{ \gamma(t) \dot{S}(t - \tau_0) \exp [i((\omega_0 - \Omega)t - \omega_0 \tau_0 - \theta)] \right\}, \quad (2.5)$$

где $\Omega = \beta \cdot \omega_0$ — доплеровское смещение частоты.

В радиоканалах, типичных для РЛ и РН систем, изменение задержки $\tau(t) = 2D(t)/c$, где $D(t) = D_0 + V_r \cdot t + \Delta D(t)$ — расстояние до подвижного объекта; V_r — радиальная скорость движения цели; $\Delta D(t)$ — случайные изменения длины трассы, обусловленные блужданием эффективного центра отражения по дальности (дальномерный шум), и изменения длины трассы за счет рефракции радиоволн в неоднородной тропосфере. Очевидно, что $\Omega = 2\pi \cdot 2V_r f_0/c$.

Отметим два частных случая модели (2.5), которые встречаются в практических задачах.

1. Пусть параметры Ω , τ_0 и $\gamma(t) = \gamma$ постоянны, причем γ и θ заранее неизвестны и являются случайными неинформативными величинами. В этом случае принятый сигнал имеет вид:

$$s(t) = \gamma S(t - \tau_0) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0 \tau_0 - \theta]. \quad (2.6)$$

Модель сигнала (2.6), в которой *амплитуда и фаза — случайные величины*, используется при рассмотрении некогерентных линий радиосвязи на трассах прямой видимости, а также в РЛ и РН системах при анализе их работы в условиях прямой видимости цели на достаточно коротких интервалах времени, не превышающих, как правило, нескольких десятков миллисекунд.

2. Пусть множитель $\gamma(t)$ является случайной функцией времени. Тогда получаем сигнал

$$s(t) = \gamma(t) S(t - \tau_0) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0 \tau_0 - \theta]. \quad (2.7)$$

Случайная функция $\gamma(t)$ является мультипликативной помехой. Ее статистические свойства обычно определяют заданием одномерной ПРВ и корреляционной функцией. В РЛ и РН системах модель вида (2.7) со случайной амплитудой и фазой удовлетворительно описывает свойства отраженного от цели сигнала на интервалах времени до десятков секунд. Необходимо, чтобы объект находился в дальней зоне антенны. Это позволяет считать его «точечным» и не учитывать многолучевой характер отражений от различных участков поверхности объекта. Вариации уровня и фазы сигнала, существующие реально вследствие случайных смещений объекта в пространстве, при этом остаются, и модель их учитывает.

2.2.2 Модель сигнала в многолучевом канале

В соответствии с моделью сигнала вида (2.7) в однолучевом канале представим случайный сигнал на выходе приемной антенны при многолучевом РРВ в виде суммы:

$$\begin{aligned} s_{\text{сл}}(t, \lambda) &= \text{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N \gamma_l(t) \cdot \dot{S}(t - \tau_{0l}) \exp[i((\omega_0 - \Omega_l)t - \omega_0 \tau_{0l} - \theta_l)] \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N v_l(t) \cdot \exp[\omega_0 t + \theta_l(t)] \right\} = \text{Re} \{ V(t) e^{i\varphi(t)} \cdot e^{i\omega_0 t} \}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $v_l(t)$ и $\theta_l(t)$ случайные амплитуда и полная фаза l -го парциального сигнала на выходе приемной антенны; $\dot{S}(t)$ — комплексная амплитуда излученного полезного сигнала; $V(t) = V(t) e^{i\varphi(t)}$ — комплексная амплитуда ($V(t)$ — огибающая и $\varphi(t)$ — фаза) сигнала на входе приемника при многолучевом механизме РРВ в канале. Формирование огибающей и фазы в многолучевом канале показано на рисунке 2.4.

Для изучения статистических свойств случайного сигнала (2.8) представим его в виде

$$s_{\text{сл}}(t, \lambda) = \text{Re} \{ [V_x(t) + iV_y(t)] e^{i\omega_0 t} \}, \quad (2.9)$$

где

$$V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t) = \sum_{l=1}^N v_l(t) \cos[\theta_l(t)] \quad \text{и} \quad (2.10)$$

$$V_y(t) = V(t) \sin[\varphi(t)] = \sum_{l=1}^N v_l(t) \sin[\theta_l(t)] \quad \text{—} \quad (2.11)$$

квадратурные составляющие (компоненты) ВЧ сигнала на входе приемника. Обычно полагают, что случайные величины $v_l(t)$ и $\theta_l(t)$ статистически независимы, причем фаза $\theta_l(t)$ имеет равномерную ПРВ в интервале $(-\pi; \pi)$.

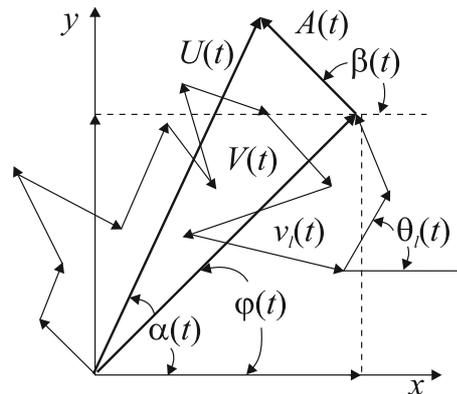


Рис. 2.4 – Формирование огибающей и фазы сигнала в многолучевом канале

Для многих реальных каналов с многолучевым механизмом РРВ можно допустить, что случайные парциальные сигналы $s_l(t, \lambda)$, соответствующие различным лучам, имеют примерно равную интенсивность, статистически независимы и их число велико (в среднем $N \gg 10^3$). В этих условиях согласно центральной предельной теореме теории вероятностей случайные процессы (2.10) и (2.11), определяющие свойства сигнала (2.9), являются совместно гауссовыми.

Поскольку сигнал на входе канала РРВ является узкополосным (см. пп. 1.3.2), то $V_x(t)$ и $V_y(t)$ — медленные в сравнении с $\cos(\omega_0 t)$ функции. Сигнал вида (2.9) называют *гауссовским узкополосным случайным процессом*.



Выводы

Таким образом, каждое слагаемое в (2.10) и (2.11) имеет среднее, равное нулю. В итоге и квадратурные составляющие $V_x(t)$ и $V_y(t)$ являются случайными процессами с нулевым средним. Они имеют совместное гауссовское распределение вероятностей. Радиосигналы на выходе многолучевого канала относятся к классу гауссовских узкополосных случайных процессов.

В РТС применяются сигналы с различными видами модуляции (АМ, ЧМ, ФМ и др.). В приемных устройствах систем осуществляются линейные и нелинейные преобразования амплитуды, частоты и фазы сигнала. В связи с этим при проектировании РТС необходимо знать ПРВ огибающей, фазы или частоты сигнала на

входе приемника, а также их корреляционные свойства. Рассмотрим некоторые из этих характеристик.

2.3 Нормальная (гауссова) модель сигнала



.....
 Полезный сигнал на входе приемника, рассматриваемый нами на некотором интервале времени $(0; T)$, наряду со случайной компонентой (2.9) содержит (в общем случае) также *регулярный* ВЧ сигнал, параметры которого *не являются случайными на интервале наблюдения*.

Физические причины этого различны, они связаны с характером канала РРВ. В частности, для тропосферных каналов в диапазоне УКВ с длиной трассы, превышающей дальность радиогоризонта, характерно наличие в месте приема сигнала, обусловленного явлением дифракции при РРВ над сферической поверхностью Земли, и (или) сигнала, который появился в результате отражения волны от крупномасштабных и слоистых неоднородностей диэлектрической проницаемости среды.

В итоге принятый сигнал (рис. 2.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} s(t, \lambda) &= A(t) \cos [\omega_0 t + \beta(t)] + V(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= [A_x(t) + V_x(t)] \cos \omega_0 t + [A_y(t) + V_y(t)] \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (2.12)$$

или

$$s(t) = U_x(t) \cos \omega_0 t + U_y(t) \sin \omega_0 t = U(t) \cos [\omega_0 t + \alpha(t)], \quad (2.13)$$

где $A(t)$ и $\beta(t)$ — огибающая и фаза регулярного сигнала; $A_x(t)$ и $A_y(t)$ — его квадратурные составляющие; $U_x(t)$ и $U_y(t)$ — квадратурные компоненты суммарного сигнала на входе приемника; $U(t)$ и $\alpha(t)$ — огибающая и фаза этого сигнала.

Для удобства записи выражений введем следующие обозначения: $U_x(t) \triangleq x$ и $U_y(t) \triangleq y$. Из (2.12) видно, что регулярный сигнал определяет величины математических ожиданий процессов $U_x(t)$ и $U_y(t)$. Обозначим $M[U_x(t)] = A(t) \cos \beta(t) \triangleq m_x(t)$ и $M[U_y(t)] = A(t) \sin \beta(t) \triangleq m_y(t)$.

Рассмотрим совместную (2-мерную) ПРВ гауссовых процессов $U_x(t)$ и $U_y(t)$ в *один момент времени*. Она отличается от (1.41), (1.42) наличием не нулевых средних значений и имеет вид:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-k^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-k^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2k(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсии (средние мощности) процессов $V_x(t)$ и $V_y(t)$; $k = [1/\sigma_x\sigma_y] \times M[(x-m_x)(y-m_y)]$ — нормированный корреляционный момент процессов $U_x(t)$

и $U_y(t)$ в совпадающий момент времени. Заметим, что в целях упрощения записи зависимость средних m_x и m_y от времени в (2.14) не указана.

Перейдем к рассмотрению ПРВ огибающей и фазы суммы регулярного и случайного ВЧ сигналов.

2.3.1 Статистические свойства огибающей

Известно несколько вариантов гауссовой модели (2.14). Рассмотрим наиболее простой из них (в плане математических преобразований). Положим $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и $k = 0$ и определим совместную ПРВ огибающей U и фазы α . С этой целью перейдем в полярную систему координат, т. е. подставим в (2.14) $x = U \cos \alpha$; $m_x = A \cos \beta$ и $y = U \sin \alpha$; $m_y = A \sin \beta$. Далее раскроем квадраты выражений в показателях экспонент и проведем группирование членов. Учтем, что якобиан преобразования декартовых координат в полярные равен U . Перепишем (2.14) в виде:

$$W(U, \alpha) = \frac{U}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{U^2 + A^2 - 2UA \cos(\alpha - \beta)}{2\sigma^2} \right]. \quad (2.15)$$

В этом выражении $U \in (0; \infty)$ и $\alpha \in (-\pi; \pi)$. Выполнив интегрирование в (2.15) по α , получим ПРВ огибающей:

$$W(U) = \int_{-\pi}^{\pi} W(U, \alpha) d\alpha = \frac{U}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{U^2 + A^2}{2\sigma^2} \right] \cdot I_0 \left(\frac{UA}{\sigma^2} \right), \quad (2.16)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, которая получается здесь в результате вычисления интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{UA}{\sigma^2} \cos(\alpha - \beta)} d\alpha = 2\pi \cdot I_0 \left(\frac{UA}{\sigma^2} \right). \quad (2.17)$$

В предельном случае $(A/\sigma) \ll 1$ (сильные вариации случайной составляющей сигнала по сравнению с уровнем регулярной) можно считать, что $I_0(UA/\sigma^2) \approx 1$ при этом (2.16) переходит в распределение:

$$W(U) = \frac{U}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}; \quad U \geq 0. \quad (2.18)$$



.....
 Распределение огибающей (2.18) называется **распределением Рэлея**, а распределение (2.16) — **обобщенным распределением Рэлея** или **распределением Райса**.

Определим математическое ожидание $M[U] = m_U$ и дисперсию $M[(U - m_U)^2] = \sigma_U^2$ огибающей. В соответствии с правилами теории вероятностей имеем:

$$m_U = \int_0^{\infty} UW(U) dU \quad \text{и} \quad \sigma_U^2 = \int_0^{\infty} (U - m_U)^2 W(U) dU. \quad (2.19)$$

Подстановка в (2.19) ПРВ (2.16) и вычисление интегралов приводят к следующему результату [11]:

$$m_U \simeq \sigma \left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ и } \sigma_U \simeq \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{4}\right), \text{ при } a < 1,$$

$$m_U \simeq A \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}} \simeq A; \quad \sigma_U \simeq \sigma, \text{ при } a > 3. \quad (2.20)$$



.....
 Величина $\alpha = A/\sigma$, определяющая характеристики огибающей, называется **параметр когерентности**. Чем больше параметр когерентности, тем ближе временная структура сигнала на входе приемника к структуре регулярного сигнала.

На рисунке 2.5 показаны кривые ПРВ нормированной на σ огибающей при разных величинах параметра когерентности. Видно, что при $a \geq 3$ ширина кривой плотности практически неизменна и близка по форме к гауссовой кривой.

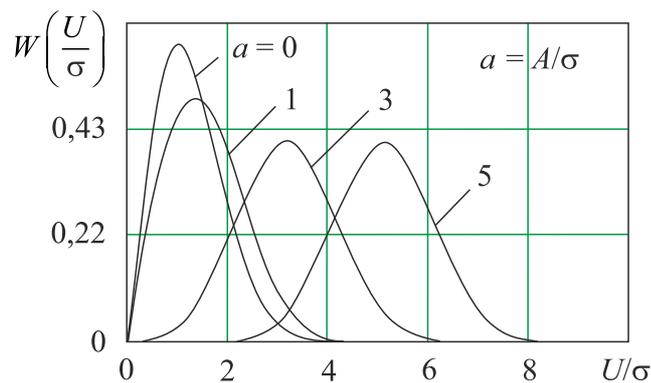


Рис. 2.5 – Плотность распределения вероятностей нормированной огибающей сигнала

2.3.2 Статистические свойства фазы

Определим ПРВ фазы путем интегрирования совместного распределения (2.15) по переменной U . Опуская подробности, приведем конечный результат [11]:

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} \pi \cdot e^{-\alpha^2/2} \cdot \left[1 + e^{a^2 \cos(\alpha-\beta)/2} \Phi \left[a \cos(\alpha - \beta) \right] \sqrt{2\pi} a \cos(\alpha - \beta) \right], \quad (2.21)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$. Видно, что аргументом

функции $W(\cdot)$ фактически является разность $(\alpha - \beta)$, по отношению к ней это четная функция и ее вид определяется параметром когерентности. На рисунке 2.5 показаны кривые ПРВ фазы для разных величин a . Видно, что по мере увеличения

уровня регулярного сигнала (его фаза равна β) фаза α суммарного сигнала в меньшей степени изменяется относительно величины β . Распределение вероятностей при этом сужается, поскольку происходит уменьшение дисперсии вариаций фазы α . При отсутствии регулярного сигнала ($a = 0$) из (2.21) следует, что ПРВ фазы является равномерной. Таким образом, любые значения фазы α в интервале $\pm\pi$ равновероятны. Можно показать, что при больших уровнях регулярного сигнала ($a \geq 3$) ПРВ фазы приближается к гауссовой с параметрами $m_\alpha = \beta$ и $\sigma_\alpha = 1/a$. Например, при $a = 5$ СКО фазы $\sigma_\alpha = 0.2$ рад $\approx 11.5^\circ$.

2.4 Корреляционные и спектральные свойства огибающей и фазы

Из соотношений (2.12), (2.13) следует, что статистические свойства гауссова сигнала $s(t, \lambda)$ определяются свойствами его квадратурных составляющих $U_x(t)$ и $U_y(t)$, для которых функции $A_x(t)$, $A_y(t)$ (квадратуры регулярного сигнала) в любой момент времени t выполняют роль средних значений. Таким образом, корреляционные свойства сигнала $s(t, \lambda)$ зависят от корреляционных свойств случайной компоненты (2.9). Эти свойства определены, если заданы автокорреляционные и взаимно корреляционные функции (АКФ и ВКФ) квадратурных составляющих $V_x(t)$ и $V_y(t)$.

Можно показать [11], что случайная компонента (2.9) является стационарным процессом в том случае, если квадратурные процессы $V_x(t)$ и $V_y(t)$ стационарны и их АКФ и ВКФ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \overline{V_x(t) \cdot V_x(t+\tau)} &= \overline{V_y(t) \cdot V_y(t+\tau)} = \sigma^2(\lambda)p(\tau; \lambda); \\ \overline{V_x(t) \cdot V_y(t+\tau)} &= -\overline{V_x(t+\tau) \cdot V_y(t)} = \sigma^2(\lambda)q(\tau; \lambda), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $p(\tau; \lambda)$ — нормированная АКФ квадратурных процессов; $q(\tau; \lambda)$ — нормированная ВКФ квадратурных процессов. Высокочастотный сигнал $s_{\text{сл}}(t, \lambda)$ имеет при этом АКФ вида

$$K_{\text{сл}}(\tau; \lambda) = \sigma^2(\lambda)k(\tau; \lambda) \cos[\omega_0\tau + \psi(\tau; \lambda)], \quad (2.23)$$

где $k(\tau; \lambda) = \sqrt{p^2(\tau; \lambda) + q^2(\tau; \lambda)}$ — модуль (огибающая) нормированной АКФ; $\psi(\tau; \lambda) = \arctg[q(\tau; \lambda)/p(\tau; \lambda)]$ — фаза АКФ. Отметим, что в (2.22) и (2.23) показана зависимость от сообщения λ . Это обусловлено тем, что случайный сигнал на входе приемника появился в результате преобразования в канале РРВ полезного сигнала, содержащего сообщение $\lambda(t)$.

Вычисление АКФ огибающей $K_U(\tau; \lambda)$ и фазы $K_\alpha(\tau; \lambda)$ сигнала (2.12), (2.13) связано с выполнением довольно трудоемких преобразований. Эти результаты составляют основу теории случайных узкополосных гауссовых сигналов. В систематическом виде они приводятся, например, в [11]. Изложим в общем виде порядок получения функций $K_U(\tau; \lambda)$ и $K_\alpha(\tau; \lambda)$.

1. Необходимо записать в явном виде 2-мерную (для двух моментов времени) совместную гауссову ПРВ значений квадратурных составляющих $U_x(t_1)$, $U_x(t_2)$, $U_y(t_1)$, $U_y(t_2)$; обозначим ее $W[U_{x1}, U_{x2}, U_{y1}, U_{y2}; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)]$, где $\tau = t_2 - t_1$.

- Преобразовать, указанную выше ПРВ, в 2-мерную совместную ПРВ огибающей и фазы, т. е. выполнить переход от декартовой системы координат к полярной. В итоге получим плотность $W[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)]$.
- Вычислить 2-мерные ПРВ огибающей и фазы, выполнив интегрирование по соответствующим переменным:

$$W[U_1, U_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$W[\alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] dU_1 dU_2.$$

- Вычислить АКФ огибающей

$$K_U(\tau; \lambda) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} U_1 U_2 W[U_1, U_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] dU_1 dU_2 - m_{U_1} m_{U_2}$$

и АКФ фазы

$$K_\alpha(\tau; \lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_1 \alpha_2 W[\alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] d\alpha_1 d\alpha_2 - m_{\alpha_1} m_{\alpha_2}.$$

Энергетические спектры огибающей $G_U(\omega)$ и фазы $G_\alpha(\omega)$ вычисляются согласно (1.45) как преобразования Фурье от соответствующих АКФ.

После изучения теоретического материала гл. 1 и 2 следует перед выполнением контрольных работ ответить на нижеследующие вопросы.



Контрольные вопросы по главе 2

- Что есть радиоканал для радиосистем и каковы механизмы его влияния на свойства сигнала на входе приемного устройства РТС? Приведите примеры.
- В чем отличие моделей однолучевого и многолучевого радиоканалов?
- Поясните графически формирование квадратурных составляющих высокочастотного сигнала в многолучевом радиоканале.
- Покажите взаимосвязь квадратурных составляющих с огибающей и фазой радиосигнала.
- Запишите выражение для одномерной ПРВ огибающей и назовите параметры, которые определяют вид этой функции.

6. Какой параметр характеризует величину СКО огибающей (или фазы) смеси регулярного и случайного сигналов относительно их средних значений? Запишите соотношения, определяющие средние и среднеквадратические значения огибающей и фазы сигнала при значении параметра когерентности $a > 3$.
7. Сделайте эскиз ПРВ фазы смеси регулярного и случайного сигналов для двух значений параметра когерентности $a_1 > a_2$.
8. Изобразите предполагаемую осциллограмму огибающей смеси регулярного сигнала и шума для двух значений параметра когерентности: случаев $a_1 = 0$ и $a_2 \gg 0$.

Глава 3

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

3.1 Краткая характеристика задач статистической теории

Современные РТС решают достаточно сложные задачи, связанные с передачей, извлечением и разрушением полезной информации при наличии помех. Основой разработки перспективных РТС являются методы теории статистического синтеза, которые позволяют найти оптимальную систему обработки сигналов. Можно выделить несколько специфических этапов разработки РТС: структурный, логический, схмотехнический, конструкторский и технологический. Наиболее важным из них является этап структурного синтеза РТС. Его результат состоит в разработке структурной схемы РТС, определяющей облик будущей системы и требования к основным параметрам подсистем и устройств. Особенность этапа в том, что многие задачи, которые должны быть решены, трудно поддаются формализации, в отличие от таковых на прочих этапах, где успешно используются системы автоматизации проектирования.



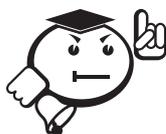
.....
Задача синтеза РТС, в общем случае, предусматривает *выбор типа сигналов $s(t, \lambda(t))$ и оптимизацию способа их обработки.*
.....

Для пассивных РТС тип сигнала определен объектом наблюдения. Для активных РТС (РЛС, РНС, РСПИ и др.) выбор типа сигнала имеет принципиальное значение, так как от способа модуляции ВЧ сигнала зависят его свойства и, соответственно, многие показатели качества РТС. В частности, изменяются параметры функции неопределенности радиосигнала (см. гл. 1), определяющие возможность различения сигналов по времени задержки и частоте.

Следует отметить особенность РТС извлечения информации, в которых, как отмечалось ранее, модуляция электромагнитного поля в месте приема полезным сообщением $\lambda(t)$ происходит при электродинамическом взаимодействии волны с объектом, последующем распространении ее в радиоканале и преобразовании поля в радиосигнал на выходе антенной системы приемника.

В частности, если сообщение $\lambda(t)$ — угловая координата объекта, то вид модуляции этим сообщением сигнала $s(t; \lambda(t))$ на входе приемника угломерной системы зависит от пространственной структуры антенной системы. Это может быть одиночная направленная антенна, у которой уровень радиосигнала на выходе зависит от направления на объект или система слабонаправленных антенн, которые формируют несколько радиосигналов, при этом соотношение их фаз связано с угловой координатой объекта. Таким образом, оптимизация типа сигнала(ов) в РЛ и РН системах в определенной мере связана с выбором пространственной структуры РТС — количества пунктов приема и типа антенн. Задачи данного типа являются предметом теории пространственно-временного синтеза РТС.

Аналитические методы синтеза формы сигнала, учитывающие реальные ограничения на систему, разработаны недостаточно полно. Тем не менее, возможен, например, синтез сигнала с оптимальной (в смысле минимума боковых лепестков) автокорреляционной функцией. В сложных случаях на практике часто используется обычный метод перебора.



.....
 Оптимизация способа обработки (приема) сигнала предполагает определение *алгоритма и структуры* устройства, обеспечивающих, при заданных условиях работы РТС, наилучший (в смысле заданного критерия) результат решения некоторой функциональной задачи.

Математическая формулировка задачи статистического синтеза оптимальной системы обработки включает следующее:

- 1) *разработку и обоснование статистической модели полезных сигналов и помех, воздействующих на систему в выбранном «сечении».* Это могут быть воздействия на выходе антенной системы заданного типа или на выходе каких-либо устройств НЧ тракта РТС. В общем случае необходимо определить статистическую модель электромагнитного поля в месте расположения РТС. Конкретная форма соотношений, определяющих модель, зависит от условий работы РТС (характер канала РРВ, диапазон радиоволн, тип помех и др.), степени априорной информации о свойствах сигнала и помех и их функциональном взаимодействии;
- 2) *формулировку критерия оптимальности системы обработки.* Критерий оптимальности должен соответствовать той цели, ради которой создается конкретная РТС;
- 3) *математическую формулировку задачи оптимизации.* Это предполагает аналитическую запись выражений, определяющих величину критерия и формулировку ограничений, если таковые имеются.

Следует отметить, что все РТС в процессе нормальной работы выполняют ряд функциональных задач. Успешное выполнение каждой из них, как правило, безусловно необходимо для нормальной работы системы. Например, для РЛ и РН систем характерны такие функциональные задачи:

- поиск, обнаружение и различение объектов в зоне обзора;
- захват и сопровождение объекта по дальности, скорости, угловым координатам;
- передача данных о текущих параметрах объектов в пункт обработки данных для принятия решения.

Очевидно, что критерий оптимальности (эффективности), определяющий качество работы РТС, должен учитывать результат выполнения каждой из перечисленных задач. В этом смысле критерий должен быть *обобщенным (комплексным)*. В действительности положение еще сложнее, так как следует учитывать также стоимость производства РТС, ее надежность, сложность эксплуатации и ремонта, массо-габаритные параметры и др. Задача анализа (сравнения) известных систем по совокупности показателей качества может быть решена, а вот математической теории синтеза оптимальных (в смысле обобщенного критерия) систем не существует.

Рассмотрим кратко содержание основных задач. Для определенности будем полагать, что сигнал на входе приемника (наблюдаемый сигнал) $y(t) = s(t, \lambda) + n(t)$, $0 \leq t \leq T$.

1. *Задача обнаружения.* Пусть неизвестным является только сам факт наличия или отсутствия сигнала $s(t, \lambda)$ в наблюдаемом сигнале $y(t)$. В этом случае представим $y(t)$ в виде

$$y(t) = \theta s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

где θ — параметр обнаружения — случайная величина, которая принимает одно из двух значений: $\theta = 0$ (сигнал отсутствует); $\theta = 1$ (сигнал присутствует). Необходимо по принятой реализации $y(t)$ на интервале $[0; T]$ наилучшим способом принять решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \lambda)$ в смеси (3.1). В результате решения задачи должны быть определены: оптимальный алгоритм принятия решения о величине параметра θ ; структурная схема обнаружителя и его качественные характеристики. Подобные задачи типичны для РЛ и РН систем.

2. *Задача различения сигналов.* В простейшей задаче различения наблюдаемый процесс $y(t)$ на входе приемника имеет вид:

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda_2) + n(t), \quad t \in [0; T], \quad (3.2)$$

где θ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения одно из двух значений: $\theta = 0$ ($y(t)$ содержит сигнал $s_2(t, \lambda_2)$) и $\theta = 1$ ($y(t)$ содержит сигнал $s_1(t, \lambda_1)$). Результатом решения задачи является *наилучшее* правило (алгоритм) обработки сигнала (3.2) и структура устройства, которые обеспечивают принятие решения о том, какой из двух сигналов присутствует на входе. В частном случае, при $s_2(t, \lambda_2) = 0$ задача различения сводится к задаче обнаружения. Задача различения двух сигналов характерна для цифровых двоичных систем связи, в которых сигналы $s_1(t, \lambda_1)$ и $s_2(t, \lambda_2)$ соответствуют передаче 0 и 1. В общем случае наблюдаемый сигнал $y(t)$ может содержать один из m возможных сигналов: $s_1(t, \lambda_1), s_2(t, \lambda_2), \dots, s_m(t, \lambda_m)$.

3. *Задача оценки параметров сигнала.* Предположим, что какой-либо параметр λ_i сигнала $s(t, \lambda)$ является случайной величиной с априорной ПРВ $W(\lambda_i)$. Конкретное значение этого параметра на интервале наблюдения постоянно и неизвестно. Задача оценки состоит в том, чтобы определить *наилучший* способ (алгоритм) обработки наблюдаемого сигнала $y(t)$ и в итоге получить оценку $\hat{\lambda}$ неизвестного параметра λ . Мера близости оценки к истинному значению параметра определяется выбором критерия оптимальности. Необходимо также определить структуру устройства обработки (измерителя) и предельную точность оценки $\hat{\lambda}$. Данная задача типична для измерительных РТС — локационных, навигационных и др.

В общем случае полезный сигнал зависит от нескольких неизвестных параметров λ и задача сводится к их совместной оценке. Например, в РЛ системах сигнал, отраженный от объекта содержит информацию о дальности (время задержки), скорости (доплеровский сдвиг частоты) и угловых координатах. Задачей измерителя является получение *наилучших* оценок этих величин.

4. *Задача фильтрации сообщений.* Термин «фильтрация» означает здесь выделение. В задачах данного типа информативный параметр $\lambda(t)$ полезного сигнала $s(t, \lambda(t))$ является функцией времени с известными статистическими характеристиками. Решение задачи состоит в определении алгоритма и устройства обработки сигнала $y(t)$, которые обеспечивают получение *наилучшей* оценки $\hat{\lambda}_i(t)$. Задача сводится к оценке параметра, если за время наблюдения T сообщение изменяется пренебрежимо мало. Фильтрация сообщений реализуется в системах радиосвязи и телеметрии (выделение речевого сигнала или сигналов о состоянии физических объектов), а также в РЛ и РН системах, где необходимо непрерывно получать информацию об изменяющихся во времени координатах кораблей самолетов, космических объектов.

5. *Задача разрешения сигналов.* В данном случае наблюдаемый сигнал на входе приемника $y(t)$ представляет собой сумму помехи и минимум двух возможно налагающихся во времени сигналов $s_1(t, \lambda_1)$, и $s_2(t, \lambda_2)$. По смыслу параметры λ_1 и λ_2 идентичны. Допустим, $\lambda_1 = \{\tau_1, \Omega_1\}$, $\lambda_2 = \{\tau_2, \Omega_2\}$ и сигналы отличаются друг от друга только информативными параметрами (одним или более), т. е. $\lambda_1 - \lambda_2 = \delta_\lambda$. Наблюдаемый сигнал $y(t) = \theta_1 s_1(t, \lambda_1) + \theta_2 s_2(t, \lambda_2) + n(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, где случайные величины θ_1 и θ_2 независимы и могут принимать значения 0 и 1.

Допустим $y(t)$ содержит оба сигнала, тогда возникает задача оценки параметров сигнала $s_1(t, \lambda_1)$ в присутствии $s_2(t, \lambda_2)$. Если качество оценок $\hat{\lambda}_1$ остается при этом выше допустимого, то первый сигнал разрешается в смысле оценки параметра (одного или двух). При необходимости раздельного обнаружения сигналов говорят о задаче взаимного разрешения сигналов в смысле обнаружения.

6. *Задача распознавания образов.* Этот класс задач связан с разработкой алгоритмов и устройств, позволяющих по наблюдаемому сигналу $y(t)$ после обнаружения полезных сигналов (одного или нескольких) определить их принадлежность к соответствующим объектам — источникам полезных сигналов. В зависимости от характера сигналов и априорной информации об объектах задачи распознавания весьма разнообразны. В частности, это распознавание речи, где 32 различных объекта (буквы русского алфавита) или в РЛ системах задачи распознавания типа самолетов, кораблей, головных частей баллистических ракет и др.

Следует отметить, что для всех задач важное значение имеет характер полезного сигнала $s(t, \lambda)$. Это может быть детерминированный сигнал, который содержит один или несколько неизвестных параметров. В более сложном случае это случайный полезный сигнал (см. гл. 2).



Выводы

В заключение отметим два обстоятельства.

1. В силу наличия помех в наблюдаемом сигнале $y(t)$ исчерпывающий подход для решения всех функциональных задач, которые возникают в РТС, состоит в использовании методов статистической теории решений при наличии помех.
2. Качество РТС при решении задачи можно обнаружить только в длинном ряду испытаний, выполнив статистическое усреднение по ансамблю случайных возмущений (помех и др.), т. е. критерий эффективности РТС должен иметь также статистический смысл.

3.2 Согласованный линейный фильтр

Рассмотрим задачу оптимизации характеристик линейного фильтра по критерию отношения мощностей сигнала и шума на его выходе при подаче на вход аддитивной смеси полезного сигнала и шума.

Пусть на вход линейного фильтра поступает сигнал $y(t) = s(t) + n(t)$ в виде суммы детерминированного сигнала $s(t)$ и стационарного белого гауссова шума $n(t)$, двухсторонняя спектральная плотность которого $G_n(\omega) = N_0/2$ [Вт/Гц] для $\omega \in (-\infty, \infty)$. Введем следующие обозначения: $\dot{k}(\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ — комплексный коэффициент передачи фильтра, где $K(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра и $\varphi(\omega)$ — фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра; $\dot{g}(\omega) = g(\omega)e^{i\gamma(\omega)}$ — комплексный частотный спектр полезного сигнала, где $g(\omega)$ — амплитудно-частотный спектр и $\gamma(\omega)$ — фазочастотный спектр. Временные и спектральные функции связаны взаимными преобразованиями Фурье:

$$\dot{k}(\omega) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}} h(\tau); \quad s(t) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}} \dot{g}(\omega), \quad (3.3)$$

где $h(\tau)$ — импульсная реакция фильтра; символ $\underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}}$ обозначает прямое и обратное Фурье-преобразование между функциями. Полезный сигнал на выходе фильтра $s_{\text{вых}}(t) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}} [\dot{k}(\omega) \cdot \dot{g}(\omega)]$, его величина в момент времени t_0 :

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega) \cdot \dot{g}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega. \quad (3.4)$$

Средняя мощность шума на выходе фильтра на частоте f в полосе df равна $dP_{n\text{ВЫХ}}(f) = (N_0/2) \cdot |\dot{k}(\omega)|^2 \cdot df$. Соответственно, полная мощность шума на выходе фильтра:

$$\sigma_{n\text{ВЫХ}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dP_{n\text{ВЫХ}}(f) = \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{k}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.5)$$

Определим величину q^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе фильтра в момент t_0 :

$$q^2(t_0) = \frac{s_{\text{ВЫХ}}^2(t_0)}{\sigma_{n\text{ВЫХ}}^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega) \dot{g}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right|^2}{\pi N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{k}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такую функцию $\dot{k}_{opt}(\omega)$, при которой отношение (3.6) достигает максимума. Эту задачу можно решить, используя неравенство Шварца — Буняковского.

Неравенство Шварца — Буняковского утверждает, что если имеются две в общем случае комплексные функции $\dot{u}(x)$ и $\dot{v}(x)$, то выполняется соотношение [13]:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^*(x) \dot{v}(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(x)|^2 dx, \quad (3.7)$$

причем знак равенства достигается только тогда, когда

$$\dot{v}(x) = c \cdot \dot{u}(x), \quad (3.8)$$

где c — некоторая постоянная; $\dot{u}^*(x)$ — функция, комплексно сопряженная $\dot{u}(x)$. Для нашего случая перепишем неравенство (3.7) в следующем виде:

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^*(\omega) \cdot \dot{v}(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.9)$$

Сопоставляя выражения (3.6) и (3.9) с учетом (3.8), получаем, что максимальное значение $q_{\text{max}}(t_0)$ достигается на выходе оптимального фильтра с комплексным коэффициентом передачи:

$$\dot{k}_{opt}(\omega) = c \cdot \dot{g}^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = c \cdot g(\omega) e^{-i\gamma(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (3.10)$$

Вычислим величину $q_{\text{max}}(t_0)$. Для этого подставим (3.10) в (3.6) и в итоге получим:

$$q_{\text{max}}^2(t_0) = q_0^2 = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что комплексная частотная характеристика оптимального линейного фильтра полностью определяется частотным спектром полезного сигнала. Причем АЧХ этого фильтра $K_{opt}(\omega) = |k_{opt}(\omega)| = c \cdot g(\omega)$, т. е. она пропорциональна амплитудному спектру полезного сигнала. ФЧХ фильтра имеет вид: $\varphi_{opt}(\omega) = -\gamma(\omega) - \omega t_0$. Оптимальный фильтр, имеющий эти характеристики, называют согласованным линейным фильтром.



.....

Совпадение формы АЧХ фильтра с амплитудно-частотным спектром сигнала обеспечивает наилучшее выделение тех участков спектра сигнала, на которых отношение уровней сигнала к шуму выше. Форма сигнала на выходе фильтра при этом искажается. Однако это не имеет значения, поскольку критерий оптимальности состоит не в точном воспроизведении формы сигнала, а в формировании наибольшего пика выходного сигнала на фоне шума. Важную роль в связи с этим играет ФЧХ фильтра $\varphi_{opt}(\omega)$. Поясним эту роль.

.....

Подставим в (3.4) коэффициент передачи (3.10) и запишем выражение сигнала на выходе согласованного фильтра (СФ):

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{g}(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\omega) \cos[\omega(t-t_0)] d\omega. \quad (3.12)$$

Второе равенство в (3.12) получается из первого, так как $|\dot{g}(\omega)|^2$ есть коэффициент передачи фильтра по мощности, т. е. это четная функция аргумента ω и в преобразовании Фурье остается только действительная часть. Из (3.12) следует, что форма сигнала на выходе согласованного фильтра является четной функцией аргумента $(t-t_0)$, зависит только от амплитудно-частотного спектра входного сигнала и не зависит от его фазочастотного спектра.



.....

Эта любопытная ситуация объясняется тем, что взаимные фазовые сдвиги спектральных составляющих входного сигнала, определяемые функцией $\gamma(\omega)$, компенсируются ФЧХ СФ. Поэтому все гармонические составляющие выходного сигнала в момент времени t_0 одновременно достигают амплитудных значений и, суммируясь (фильтр линейный) дают пик выходного сигнала, равный, согласно (3.12):

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{g}(\omega)|^2 d\omega = c \cdot E_s. \quad (3.13)$$

.....

Если бы ФЧХ фильтра не компенсировала фазовых сдвигов спектральных составляющих входного сигнала, то максимумы различных гармоник сигнала на вы-

ходе не совпали бы во времени. В этом случае пик выходного сигнала оказался бы меньше и, возможно, был бы не один.

Определим импульсную реакцию согласованного фильтра (3.10):

$$\begin{aligned} h_{opt}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}_{opt}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}^*(\omega) e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}^*(-\omega) e^{i\omega(t_0-t)} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) e^{i\omega(t_0-t)} d\omega. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая, что входной сигнал

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

получим:

$$h_{opt}(t) = c \cdot s(t_0 - t). \quad (3.15)$$



Выводы

Таким образом, импульсная характеристика согласованного фильтра полностью определяется формой сигнала (она «согласована» с сигналом). Комплексная частотная характеристика согласованного фильтра является функцией комплексно сопряженной спектру сигнала (см. (3.10)).

Чтобы представить себе функцию $h_{opt}(t)$, обратимся к рисунку 3.1. На нем изображены импульсный сигнал $s(t)$, возникший в момент времени $t_0 = 2$, а также сигнал $s(t + t_0)$ (при $t_0 = 8$ он появляется раньше) и его зеркальное отображение $s(t_0 - t) = h_{opt}(t)$, т. е. константа $c = 1$.

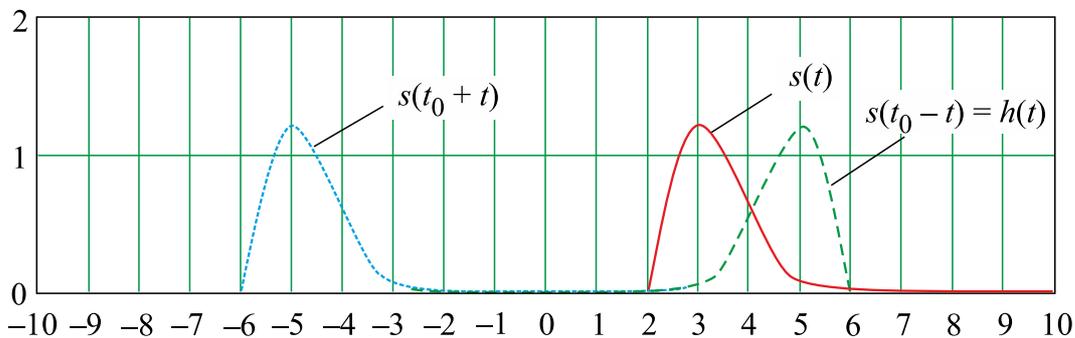


Рис. 3.1 – Формирование импульсной реакции СФ

Рассмотрим структуру отклика согласованного фильтра (СФ), когда на его вход воздействует колебание:

$$y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.16)$$

где λ_0 — значение информативного параметра в полезном сигнале на входе фильтра. В общем случае λ_0 не является временной задержкой.

Допустим, что импульсная характеристика СФ согласована с полезным сигналом с точностью до информативного параметра, т. е. его значение для функции $h_{opt}(t)$ отлично от λ_0 и равно λ .

Напряжение на выходе СФ с учетом (3.15), (3.16) представим в виде

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(t - \tau)y(\tau) d\tau = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t; \lambda)y(\tau) d\tau = \\ &= \frac{c \cdot N_0}{2} q_{\text{вых}}(t, \lambda) = \frac{c \cdot N_0}{2} [Z_s(t, \lambda) + Z_n(t, \lambda)], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $Z_s(t, \lambda)$ и $Z_n(t, \lambda)$ — *сигнальная и шумовая функции*.

$$\begin{aligned} Z_s(t, \lambda) &= \frac{2}{N_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t; \lambda) \cdot s(\tau, \lambda_0) d\tau, \\ Z_n(t, \lambda) &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t; \lambda) \cdot n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сравнение выражение (1.16) для АКФ сигнала с (3.17) и (3.18) позволяет сделать важный вывод.



Выводы

Выходной сигнал СФ с точностью до константы c соответствует взаимной временной корреляционной функции между принятым колебанием $y(t)$ и полезным сигналом $s(t, \lambda)$. Сигнальная же функция $q_{\text{вых}s}(t, \lambda)$ с точностью до константы совпадает (при условии $\lambda = \lambda_0$) с автокорреляционной функцией полезного сигнала.

Максимальное значение сигнальная функция имеет в точке $t = t_0, \lambda = \lambda_0$. В соответствии с (3.18) оно равно

$$Z_s(t_0, \lambda_0) = Z_{s\text{max}} = \frac{2}{N_0} \cdot E_s. \quad (3.19)$$

В важном для практики случае, когда информативный параметр λ является временным положением сигнала, выражение для сигнальной функции имеет вид:

$$Z_s(t; \tau_0; \tau_\phi) = Z_s(t; \Delta_\tau) = \frac{2}{N_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t - \tau_\phi) \cdot s(\tau - \tau_0) d\tau, \quad (3.20)$$

где τ_0 и τ_ϕ — соответственно временной сдвиг входного сигнала и значение сдвига, на который «настроен» СФ; $\Delta_\tau = \tau_0 - \tau_\phi$ — рассогласование временных сдвигов.

Определим момент времени, когда (3.20) имеет максимум. Поскольку функция $q_{\text{ВЫХ}}(t; \Delta\tau) \sim k(t)$, т.е. пропорциональна АКФ сигнала, то положение максимума совпадает с тем временем, при котором разность аргументов у двух копий сигналов в (3.20) равна нулю. Видно, что разность аргументов равна $[t_0 + (\tau_0 - \tau_\Phi) - t]$ и обращается в ноль, когда $t = t_0 + \Delta\tau$. Таким образом, положение максимума просто сдвинется во времени, величина же его останется неизменной, равной (3.19). Отметим, что если бы параметр λ имел смысл частотного сдвига Ω или какой-либо другой, то уровень максимума сигнала на выходе СФ оказался бы зависящим от $(\lambda_0 - \lambda_\Phi)$.

Поскольку форма сигнала на выходе СФ повторяет АКФ $k(\tau)$, то при подаче на его вход прямоугольного радиоимпульса выходной сигнал соответствует рисунку 1.10. При подаче на вход радиоимпульса с ЛЧМ и гауссовой огибающей сигнал на выходе СФ «теряет» ЧМ и сжимается в B раз (см. рис. 1.13). Огибающая сигнала на выходе СФ, которая может быть выделена с помощью линейного детектора, очевидно, повторяет функцию $K(\tau)$, т.е. имеет треугольную форму для прямоугольного радиоимпульса (рис. 1.9) и сжатую в B раз по длительности гауссоиду для гауссова радиоимпульса (рис. 1.13).

Определим дисперсию (мощность) шума на выходе СФ. Из (3.18) следует, что $\overline{Z_n(t, \lambda)} = 0$, так как $\overline{n(t)} = 0$. Для дисперсии имеем выражение:

$$\begin{aligned} D[Z_n(t, \lambda)] &= \overline{Z_n^2(t, \lambda)} = \frac{4}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) s(t_0 + \tau_1 - t, \lambda) \overline{n(\tau)n(\tau_1)} d\tau d\tau_1 = \\ &= \frac{4}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) \cdot s(t_0 + \tau_1 - t, \lambda) K_n(\tau_1 - \tau) d\tau d\tau_1. \end{aligned}$$

Подставляя в него АКФ белого шума (1.48) и выполняя интегрирование с учетом свойств δ -функции, получим:

$$D_{Z_n}(t, \lambda) = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t_0 + \tau - t, \lambda) d\tau.$$

В момент времени $t = t_0$ для неэнергетического параметра λ мощность шумовой функции равна:

$$D_{Z_n} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (3.21)$$

Для задач в инженерной практике важно знать отношение максимального значения сигнала к среднеквадратическому значению шума. Это отношение на выходе СФ определим на основе (3.19) и (3.21). В итоге получим:

$$\frac{Z_{S \max}}{\sqrt{D_{Z_n}}} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} = q_0 = \sqrt{\frac{P_{S \text{ Вых}}(t_0)}{\sigma_{n \text{ Вых}}^2}}. \quad (3.22)$$

Как и следовало ожидать, полученный результат совпадает с (3.11) для $q_{\max}(t_0)$.

Обсудим вопрос о том, какое значение может принимать момент отсчета t_0 , когда достигается наибольшее превышение сигнала над шумом. Если сигнал $s(t)$,

на который «настроен» СФ, возникает в момент времени τ_0 и заканчивается при $t = \tau_0 + \tau_n$ (на рис. 3.1 $\tau_0 = 2$ и $\tau_n \approx 3.5$), то с учетом условия физической реализуемости фильтра ($h(t) = 0$ при $t \leq 0$), момент достижения максимального отношения сигнал/шум может быть при $t_0 \geq \tau_0 + \tau_n$. Физически это означает, что только в этом случае для формирования максимального пика сигнала на выходе может быть использована вся энергия входного сигнала $s(t)$ — фильтр как бы «накапливает сигнал». Увеличение t_0 свыше $(\tau_0 + \tau_n)$ не изменяет величину пика. Он лишь позже появится на выходе; это, как правило, нежелательно.

При проектировании РТС удобно использовать отношение сигнал/шум, пересчитанное ко входу системы. Выполним это для СФ. Пусть ΔF_3 — эффективная полоса пропускания СФ, равная эффективной ширине спектра сигнала $s(t)$. Мощность шума на входе в эффективной полосе пропускания СФ равна $P_n = N_0 \Delta F_3$, а мощность сигнала на входе СФ равна $P_s = E_s / \Delta T_3$, где ΔT_3 — эффективная длительность сигнала. Подставляя эти величины в формулу (3.21), получим:

$$q_{\max}(t_0) = \frac{Z_s^{\max}}{\sqrt{D_{Z_n}}} = \sqrt{2\Delta F_3 \cdot \Delta T_3 \cdot \left(\frac{P_s}{P_n}\right)} \quad \text{или}$$

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{q_{\max}^2(t_0)}{2B}, \quad (3.23)$$

где $B = \Delta F_3 \cdot \Delta T_3$ — база сигнала; P_s/P_n и $q_{\max}^2(t_0)$ — отношение мощностей с/ш, соответственно, на входе и выходе СФ. Из соотношения (3.23) следует, что при заданной энергии сигнала E_s и равномерной спектральной плотности мощности шума, равной N_0 , увеличение ΔF_3 и ΔT_3 порознь не влияет на отношение с/ш на выходе СФ. Это отношение можно увеличить за счет увеличения базы сигнала.



Выводы

Таким образом, использование сложных сигналов в РТС и применение СФ обеспечивает работоспособность систем при отношении с/ш на входе в $2B$ раз меньших, чем требуемое на выходе системы. Эти выводы справедливы, если помеха (шум) является *аддитивной гауссовой и белой*, а форма полезного сигнала *полностью известна*.

В заключение отметим одно важное обстоятельство. Сравнение выражения (1.10) для сигнальной функции $q(\Delta x)$, определяющей функцию различия сигналов $\varepsilon(\Delta x)$ по параметру x или по сообщению λ , связанному с ним, с сигнальной функцией $Z_s(t, \lambda)$, формируемой на выходе СФ, показывает:

1. Среднее напряжение на выходе СФ в момент отсчета $t = t_0$ пропорционально величине сигнальной функции $q(\Delta \lambda)$, определяющей степень различия двух сигналов $s(t, \lambda)$ и $s(t, \lambda_0)$, где $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ (параметр временного положения).
2. Формирование сигнальной функции $q(\Delta \lambda)$ с использованием СФ предполагает «развертывание» напряжения на выходе фильтра по λ , что, в общем случае, связано с применением совокупности СФ, настроенных на различные значения параметра λ .

3. Сигнальная составляющая напряжения на выходе СФ повторяет по форме временную АКФ сигнала $s(t)$.
4. Величина q_0^2 максимального отношения с/ш на выходе согласованного фильтра не зависит от формы полезного сигнала и определяется только его энергией и спектральной плотностью шума на входе. Это, в частности, означает, что q_0^2 может быть увеличена только путем увеличения длительности сигнала на входе с СФ.

3.3 Примеры построения согласованных фильтров

3.3.1 Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

На рисунке 3.2 показана структурная схема устройства, реализующего функции СФ, когда на его входе воздействует сигнал вида $s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t)$ при $t \in [0, \tau_{\text{и}}]$. Оно состоит из усилителя, линии задержки на время $\tau_{\text{и}}$, вычитающего устройства и колебательного контура с достаточно малым затуханием. Предполагается, что $\tau_{\text{и}}$ равно целому числу периодов ВЧ сигнала.

При воздействии на вход прямоугольного радиоимпульса на контуре высокой добротности происходит линейное нарастание амплитуды напряжения в течение длительности импульса сигнала и весьма медленное затухание колебаний после его окончания. В результате вычитания двух переходных процессов на выходе получается треугольный импульс (рис. 3.2), повторяющий по форме АКФ сигнала. При этом максимальное значение импульса в момент $t \geq \tau_{\text{и}}$ равно энергии $E_s = c^2(S_0^2/2) \cdot \tau_{\text{и}}$.

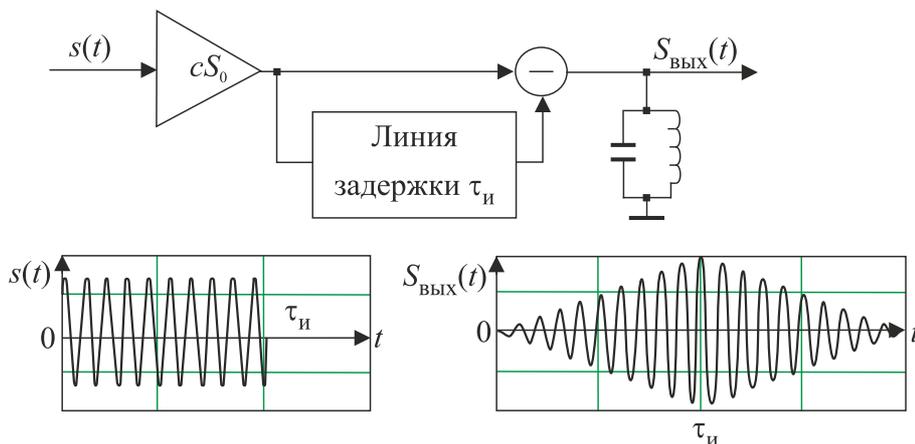


Рис. 3.2 – Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

В инженерной практике часто используют приближенно оптимальные фильтры (квазиоптимальные); их реализация оказывается проще. В частности, для прямоугольного радиоимпульса можно использовать полосовой фильтр с АЧХ, близкой к прямоугольной форме, и линейной ФЧХ в полосе пропускания. Полосовой фильтр близок к СФ, если его полоса $\Delta F_{\text{пр}} = 1.37/\tau_{\text{и}}$. Проигрыш в отношении с/ш по мощности для такого фильтра составляет около 1.2 раза.

3.3.2 Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса с ФКМ

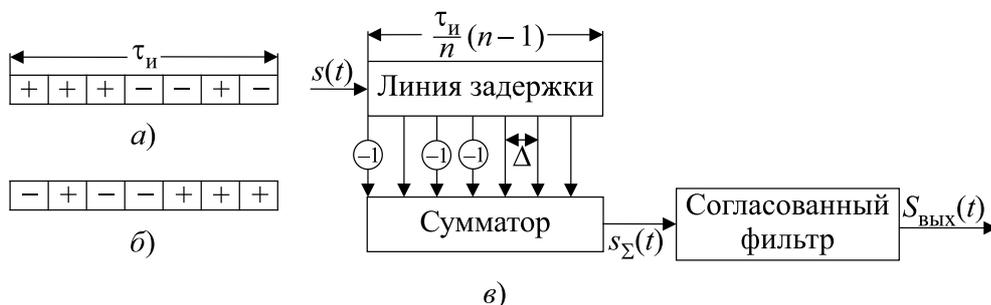


Рис. 3.3 – Обработка ФКМ радиоимпульса в согласованном фильтре: а) модулирующая функция ФКМ сигнала; б) модулирующая функция импульсной реакции СФ; в) СФ для радиоимпульса с ФКМ

Определим структурную схему СФ для ФКМ импульса с семипозиционным кодом Баркера (рис. 1.15, а). На рисунке 3.3, а показано условное обозначение этого сигнала. Используя его и выражение (3.15), получаем импульсную реакцию СФ (рис. 3.3, б).

Устройство, оптимальной обработки ФКМ сигнала представлено на рисунке 3.3, в. Оно состоит из широкополосной линии задержки с семью равноотстоящими отводами (с интервалом задержки Δ), общего сумматора, к которому часть отводов подключена через инверсные каскады, а остальные — непосредственно, и линейного фильтра, согласованного с парциальным радиоимпульсом длительностью $\Delta = \tau_n/7$.

Работу СФ поясняет рисунок 3.4, на котором показаны этапы формирования радиоимпульса $s_{\text{вых}}(t)$.

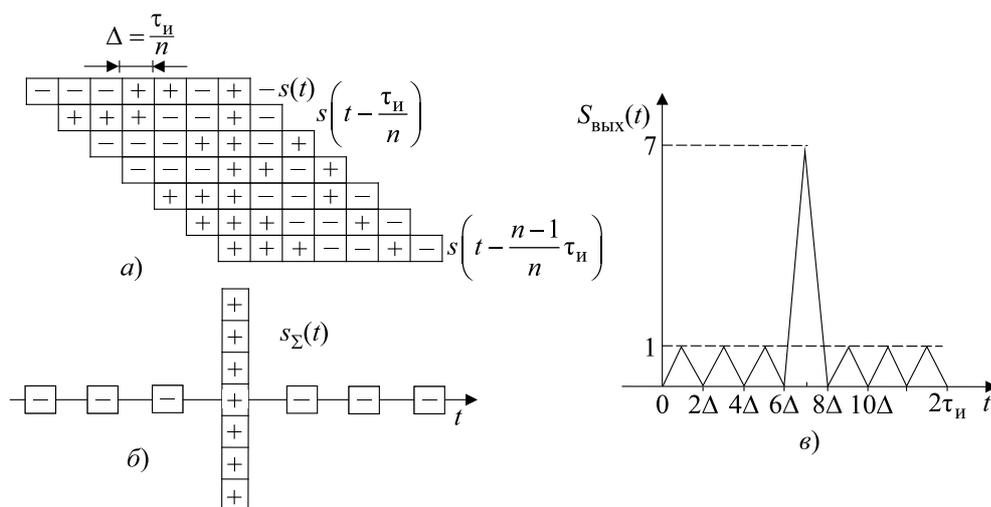


Рис. 3.4 – Формирование сигнала на выходе СФ: а) копии ФКМ импульса на выходах линии задержки; б) ФКМ сигнал на выходе сумматора; в) огибающая ФКМ радиосигнала на выходе СФ

На рисунке 3.4, а схематически показаны (с учетом инверсных каскадов) радиоимпульсы с ФКМ на входе сумматора. Результат их суммирования представлен

на рисунке 3.4, б, а огибающая выходного сигнала СФ — на рисунке 3.4, в. Максимум сигнала $s_{\text{вых}}(t)$ равен $7E_1$, где E_1 — энергия парциального импульса.

3.3.3 Согласованный фильтр для пачки M когерентных радиоимпульсов гауссовой формы

Представим входной сигнал, состоящий из M периодически следующих когерентных радиоимпульсов (рис. 3.5, а), в виде

$$s(t) = \sum_{n=0}^{M-1} s_1(t - nT), \quad 0 \leq t \leq MT, \quad (3.24)$$

где $s_1(t)$ — одиночный радиоимпульс заданной формы с энергией E_1 и длительностью τ_n ; T — период следования импульсов. Спектр сигнала (3.24) равен

$$\begin{aligned} \dot{g}(\omega) &= \int_0^{MT} s(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=0}^{M-1} \int_{nT}^{(n+1)T} s_1(t - nT) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_0^T s_1(x) e^{-i\omega(x+nT)} dx = \dot{g}_1(\omega) \cdot \sum_{n=0}^{M-1} e^{-i\omega nT}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\dot{g}_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$ — спектр одиночного импульса. Подставим в (3.10) общую длительность пачки $t_0 = \tau_n + (M-1)T$ и с учетом спектра пачки (3.25) найдем коэффициент передачи оптимального фильтра в виде

$$\dot{k}_{opt}(\omega) = c \dot{k}_1(\omega) \cdot \dot{k}_2(\omega), \quad (3.26)$$

$$\dot{k}_1(\omega) = \dot{g}_1^*(\omega) e^{-i\omega \tau_n}, \quad \dot{k}_2(\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-i\omega mT} = \frac{1 - \exp(-i\omega MT)}{1 - \exp(-i\omega T)}. \quad (3.27)$$

Первый множитель в (3.26) $\dot{k}_1(\omega)$ есть коэффициент передачи СФ для одиночного радиоимпульса. Каждое слагаемое второго множителя соответствует коэффициенту передачи звена, обеспечивающего задержку сигнала на время mT . Суммирование слагаемых по формуле суммы конечного числа элементов геометрической прогрессии дает выражение (3.27). Таким образом, $\dot{k}_2(\omega)$ есть коэффициент передачи многоотводной линии задержки с суммированием задержанных сигналов. Общее время задержки в линии $(M-1)T$. Структурная схема СФ для пачки радиоимпульсов, соответствующая формуле (3.26), показана на рисунке 3.5, б. При подаче на вход СФ δ -импульса на выходе сумматора получается последовательность M (по числу отводов) радиоимпульсов, каждый из которых по форме повторяет импульсную реакцию фильтра, согласованного с одиночным импульсом пачки. На рисунке 3.5, в условно показан процесс оптимальной фильтрации пачки из $M = 4$ импульсов с симметричной огибающей гауссовой формы. Огибающая пачки радиоимпульсов на выходе сумматора $S_{\text{вых opt}}(t)$ имеет треугольную форму, длительность по нулям $2MT$ и число импульсов $(2M-1)$.

Рассмотрим частотную интерпретацию работы СФ пачки. Определив из (3.27) модуль $|\dot{k}_2(\omega)|$, найдем АЧХ второго звена СФ в виде

$$K_2(f) = \left| \frac{\sin(\pi f MT)}{\sin(\pi f T)} \right|. \quad (3.28)$$

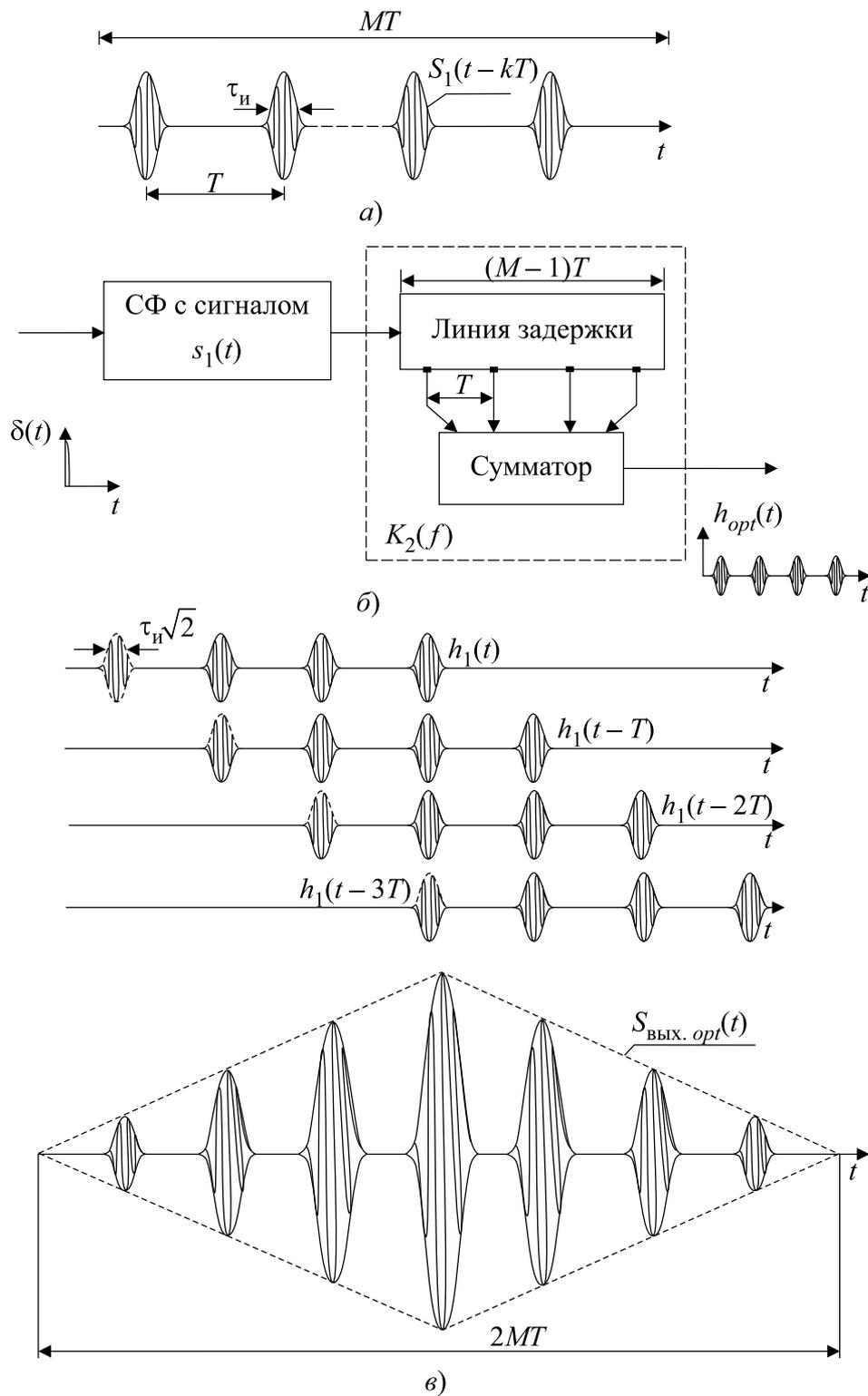


Рис. 3.5 – Пачка когерентных радиоимпульсов гауссовой формы (а), согласованный фильтр для пачки (б) и процесс фильтрации пачки (в)

Частотная характеристика (3.28) является гребенчатой (рис. 3.6, а) с периодически повторяющимися через интервал $1/T$ зубцами, ширина которых по нулям $2/(MT)$. В случае идеальной линии задержки АЧХ (3.28) существует на всей оси частот. Результирующая АЧХ $K(f) = K_1(f) \cdot K_2(f)$ практически ограничена по

спектру колокольной (гауссовой) характеристикой $K_1(f)$ фильтра, согласованного с одиночным импульсом пачки. Очевидно, что отношение с/ш по мощности в момент максимума сигнала на выходе СФ равно

$$\frac{2E_s M}{N_0} = \frac{2E_{\text{пачки}}}{N_0}, \quad (3.29)$$

что соответствует результатам п. 3.2. Напомним, что выигрыш в отношении с/ш получается за счет синфазного суммирования импульсных колебаний сигнала в определенный момент времени. Спектральные составляющие шума суммируются со случайными фазами.

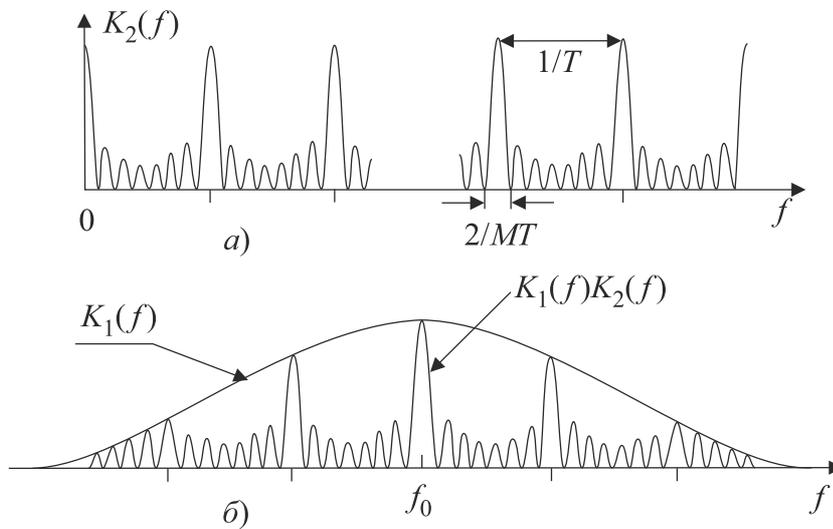


Рис. 3.6 – Гребенчатая АЧХ схемы оптимального суммирования (а) и результирующая АЧХ (б) согласованного фильтра для когерентной пачки радиоимпульсов



.....
 Гребенчатая структура АЧХ СФ, совпадающая со структурой амплитудно-частотного спектра когерентной пачки импульсов, обеспечивает прохождение через СФ только части спектральных составляющих помехи.

Наименьшее усиление СФ имеет на тех участках спектра, где уровень сигнальных составляющих мал.

3.4 Обнаружение и различение сигналов при наличии помех

Статистическая теория принятия решений при наличии помех включает два основных раздела: *первый* — статистическая теория проверки гипотез и *второй* — статистическая теория оценок неизвестных параметров. Для решения задач оптимального обнаружения, различения и классификации сигналов обычно приме-

няют аппарат теории проверки гипотез. Рассмотрим две наиболее простые задачи: различения и обнаружения сигналов в бинарном случае.

Задача различения двух сигналов (байесов метод)

Постановка задачи. Наблюдаемый сигнал на входе приемника представим в виде

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_0(t, \lambda_0) + n(t); \quad t \in [0, T], \quad (3.30)$$

где θ — случайная величина с двумя значениями 0 и 1. Априорные вероятности значений известны: $P(\theta = 0) = p_0$ и $P(\theta = 1) = p_1$. Статистические свойства помехи и сигналов предполагаются также заданными. Таким образом, при дискретном отборе данных на интервале $[0, T]$ могут быть определены n -мерные условные ПРВ (см. п. 1.4):

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n/H_0) = W(\mathbf{y}/H_0) \text{ и } W(y_1, y_2, \dots, y_n/H_1) = W(\mathbf{y}/H_1), \quad (3.31)$$

где H_0 и H_1 — две случайные гипотезы (события), соответствующие двум возможным состояниям наблюдаемого сигнала: $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Оптимальный различитель на основе обработки сигнала $y(t)$ должен лучшим способом принять *решение* о том, какая из двух гипотез реализовалась в конкретном наблюдении. Фактические данные наблюдений в статистике называют *выборкой*; в нашем случае это n -мерный вектор $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, где $y_i = y(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Данная задача относится к статистической теории проверки гипотез. Рассмотрим далее байесов метод ее решения.

Решение задачи. Очевидно система различения может из-за влияния помех случайно «попасть» в одну из четырех ситуаций:

1. Состояние на входе — верна гипотеза H_1 .
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_1 .
2. Состояние на входе — верна гипотеза H_1 .
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_2 .
3. Состояние на входе — верна гипотеза H_2 .
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_2 .
4. Состояние на входе — верна гипотеза H_2 .
Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_1 .

Видно, что ситуации 1 и 3 соответствуют правильному различению сигналов, а 2 и 4 — ошибочному.

Для определения *количественного критерия эффективности различения* назовем «плату» за результат работы системы, которая зависит от состояния на входе и выходе и определяется риском, который несет «лицо», использующее результаты различения сигналов. Введем платежную матрицу $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$, где $i, j = 0, 1$; первый индекс определяют принятую гипотезу на выходе (решение), второй — гипотезу на входе. Без потери общности рассуждений будем полагать плату за ошибки положительной, т. е. $C_{10}, C_{01} > 0$ и за верные решения $C_{00}, C_{11} \leq 0$. Элементы C_{ij} записаны в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Элементы C_{ij}

Вход \ Выход	H_0	H_1
	\hat{H}_0	C_{00}
\hat{H}_1	C_{10}	C_{11}

Критерий оптимальности различителя. В качестве критерия используем величину средней «платы», т. е. ее математическое ожидание потерь. В теории принятия решений эту величину называют *средним риском* R . По правилу вычисления среднего дискретной случайной величины C получим:

$$R = M[C] = C_{00}P(H_0 \cdot \hat{H}_0) + C_{11}P(H_1 \cdot \hat{H}_1) + C_{01}P(H_1 \cdot \hat{H}_0) + C_{10}P(H_0 \cdot \hat{H}_1), \quad (3.32)$$

где $P(H_i \cdot \hat{H}_j) = P(H_i) \cdot P(\hat{H}_j|H_i)$ – вероятность совместного появления событий H_i и \hat{H}_j ; $P(\hat{H}_j|H_i)$ – условная вероятность принять решение \hat{H}_j в предположении, что на входе верна гипотеза H_i .

Для наглядности дальнейших рассуждений используем геометрическую интерпретацию задачи. На рисунке 3.7 условно показано n -мерное евклидово пространство с осями координат $0v_i (i = 1 \div n)$. Множество возможных выборочных значений y обозначим Y (иногда его называют *пространством наблюдений*). Любому выборочному вектору $y \in Y$ соответствует точка с координатами $(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$. Одна из них y_i показана на рисунке.

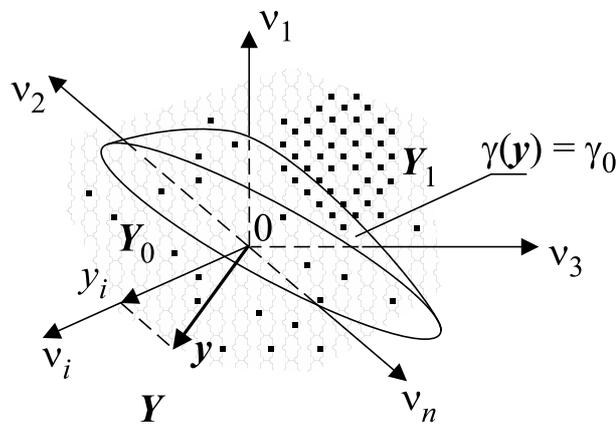


Рис. 3.7 – Пространство наблюдений

Очевидно, что решающее правило в бинарном случае сводится к тому, чтобы найти способ разбиения множества Y на сумму двух непересекающихся подмножеств Y_0 и Y_1 , т. е. $Y = Y_0 \cup Y_1$. И далее, если $y \in Y_0$, то принимается решение \hat{H}_0 ; если $y \in Y_1$, то принимается решение \hat{H}_1 . Конкретное разбиение в n -мерном пространстве определено заданием уравнения поверхности, которое, в общем случае, имеет вид $\gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = \gamma_0$, где $\gamma_0 = \text{const}$. Таким образом, для всех $y \in Y_0$ выполняется неравенство $\gamma(y) < \gamma_0$ и для $y \in Y_1$, соответственно, $\gamma(y) > \gamma_0$. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное решающее правило: функцию $\gamma_{opt}(y)$ и ее поро-

говое значение — величину γ_0 . Заметим, что любое преобразование наблюдаемых данных в статистических задачах называют *статистикой*.

Важно отметить, что статистика $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ осуществляет *редукцию исходных данных*: на входе «наблюдатель» располагает n -мерным вектором \mathbf{y} , который содержит информацию о переданном сигнале; на выходе после обработки получена скалярная величина γ . Очевидно, что при таком взаимно неоднозначном преобразовании первичная информация, в общем случае, может быть частично утрачена.



Удивительно, однако, то, что существуют такие *статистики* (их называют *достаточными*), которые, *несмотря на редукцию первичных данных*, не ведут к потере полезной информации, содержащейся в них. Интуитивно понятно, что оптимальное решающее правило должно бы обладать этим замечательным свойством.

Оптимальное решающее правило найдем из условия *минимума среднего риска* (МСР) (3.32). Запишем выражения для условных вероятностей в виде интегралов от соответствующих n -мерных условных ПРВ по области \mathbf{Y}_0 :

$$\begin{aligned} P(\widehat{H}_0/H_0) &= \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n/H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \\ P(\widehat{H}_1/H_0) &= 1 - \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n/H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \\ P(\widehat{H}_0/H_1) &= \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n/H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n, \\ P(\widehat{H}_1/H_1) &= 1 - \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n/H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Подставив выражения (3.33) в формулу (3.32), после группирования слагаемых с учетом того, что $P(H_0) = p_0$ и $P(H_1) = p_1$, получим:

$$\begin{aligned} R &= p_0 C_{10} + p_1 C_{11} + \\ &+ \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int [p_1(C_{01} - C_{11})W(\mathbf{y}/H_1) - p_0(C_{10} - C_{00})W(\mathbf{y}/H_0)] d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Первые два слагаемых постоянны и от выборки \mathbf{y} не зависят. Подынтегральное выражение при любых \mathbf{y} есть разность положительных величин, поскольку $C_{01} > C_{11}$, $C_{10} > C_{00}$ и условные функции ПРВ $W(\mathbf{y}/H_i) \geq 0$. Таким образом, минимум среднего риска (3.34) можно обеспечить, если для всех $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0$ выполняется условие:

$$[p_1(C_{01} - C_{11})W(\mathbf{y}/H_1) - p_0(C_{10} - C_{00})W(\mathbf{y}/H_0)] < 0. \quad (3.35)$$

Преобразуя неравенство (3.35) так, чтобы в правой части оказались постоянные величины, получим правило принятия решения \widehat{H}_0 :

$$\gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} < \frac{p_0(C_{10} - C_{00})}{p_1(C_{01} - C_{11})}. \quad (3.36)$$

Таким образом, оптимальный различитель двух сигналов обрабатывает наблюдаемый сигнал \mathbf{y} и формирует на выходе решение:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} > \gamma_0; \\ \hat{H}_0, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} < \gamma_0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где оптимальный порог $\gamma_0 = p_0(C_{10} - C_{00})/p_1(C_{01} - C_{11})$.



.....
 Смысл отношения условных ПРВ в (3.37) состоит в том, что оно пропорционально отношению соответствующих вероятностей. Вычислив его для конкретной выборки \mathbf{y} , различитель «может судить» о том, какая из двух гипотез более правдоподобна. По этой причине функцию $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ в специальной литературе называют *отношением правдоподобия* и обозначают, как правило, $L(\mathbf{y})$, что связано с английским словом *likelihood* — правдоподобие.

Структура устройства, которое реализует оптимальный алгоритм различения сигналов, определяется конкретным видом условных ПРВ.

3.5 Другие критерии оптимальности обнаружения и различения

Можно предположить, что в зависимости от критерия оптимальности может измениться правило принятия решения, т. е. способ обработки входного сигнала. Во всяком случае, повседневный опыт это подтверждает. Например, от критерия оценки работы сотрудника зависит стратегия его поведения. Покажем, что байесов критерий (МСП) является вполне общим, т. е. к нему сводятся другие не менее целесообразные критерии. Предварительно представим (3.32) для величины R в виде

$$R = C_{00}p_0P(\hat{H}_0/H_0) + C_{11}p_1P(\hat{H}_1/H_1) + C_{01}p_1P(\hat{H}_0/H_1) + C_{10}p_0P(\hat{H}_1/H_0). \quad (3.38)$$

1. *Критерий минимума взвешенной вероятности ошибки.* Выше отмечалось, что в бинарной задаче проверки гипотез возможны 4 исхода, из которых два ошибочных и два верных. В теории проверки гипотез *ошибкой 1-го рода* называют случайное событие, состоящее в том, что система принимает решение \hat{H}_1 в пользу гипотезы H_1 в то время как верна гипотеза H_0 . Вероятность этой ошибки $P(\hat{H}_1/H_0)$. *Ошибка 2-го рода* состоит в появлении события \hat{H}_0 при условии, что верна гипотеза H_1 . Вероятность этой ошибки $P(\hat{H}_0/H_1)$. Очевидно, что вполне разумной является стратегия минимизации взвешенной вероятности ошибочных решений. Критерий, очевидно, определяется величиной

$$K_{\text{ош}} = k_1 \cdot P(\hat{H}_1/H_0) + k_2 \cdot P(\hat{H}_0/H_1), \quad (3.39)$$

где k_1 и k_2 — весовые коэффициенты, зависящие от потерь, которые возникают вследствие допущенных ошибок. Сравнивая (3.38) и (3.39), видим, что величи-

на $K_{\text{ош}} = R$, если $C_{11} = C_{00} = 0$ и $k_1 = p_0 C_{10}$, $k_2 = p_1 C_{01}$. Следовательно, данный критерий есть частный случай критерия МСР.

2. *Критерий идеального наблюдателя.* Критерий состоит в том, что в системе принятия решений необходимо обеспечить минимум полной вероятности ошибочных ситуаций. В соответствии с формулой полной вероятности имеем:

$$P_{\text{ош}} = p_0 \cdot P(\hat{H}_1/H_0) + p_1 \cdot P(\hat{H}_0/H_1). \quad (3.40)$$

Идеальный наблюдатель полагает $p_0 = p_1 = 0.5$. По существу, это весовой критерий, когда $k_1 + k_2 = 1$ и обе ошибки одинаково опасны. Подобная ситуация характерна для различения сигналов в цифровых системах связи, где $s_0(t)$ и $s_1(t)$ используются для передачи 0 и 1. Таким образом, этот критерий также следует из критерия МСР.

3. *Критерий Неймана – Пирсона.* Для РЛ систем характерна ситуация, когда сигнал $s_0(t) = 0$, т.е. необходимо различать две гипотезы: H_0 — на входе только шум (в зоне обзора цели нет) и H_1 — на входе РЛ приемника есть сигнал $s_1(t)$. Как правило, вероятности p_0 и p_1 (отсутствия и наличия цели) неизвестны. Вероятность же ошибки 1-го рода $P(\hat{H}_1/H_0) = F$ (fals) называемая *вероятностью ложной тревоги*, не должна превосходить заранее заданного значения.



.....
 Оптимальный РЛ приемник обнаружения должен обеспечить максимальную величину $P(\hat{H}_1/H_1) = 1 - P(\hat{H}_0/H_1) = D$ (*detection*) — *вероятности правильного обнаружения* при заданной величине F . Это условие носит название *критерия Неймана – Пирсона*. Данный критерий также следует из критерия МСР как частный случай [1].



Выводы

.....
 Таким образом, для всех перечисленных выше критериев способ обработки остается неизменным, т.е. *оптимальный различитель (обнаружитель) формирует величину $L(y)$ — отношение правдоподобия. Отличие устройств обработки состоит в выборе стоимостей за принятые решения, которые влияют только на порог γ_0 .*

3.6 Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого гауссова шума. Структура оптимальных устройств

Наблюдаемый сигнал на входе приемника представим в виде (3.30), полагая сигналы $s_0(t, \lambda_0)$ и $s_1(t, \lambda_1)$ точно известными:

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_0(t, \lambda_0) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.41)$$



.....
 Важное условие, при котором мы решаем задачу, состоит в том, что *предполагаются точно известными моменты начала и окончания временного интервала, в котором находится полезный сигнал $s(t)$* . Неизвестно лишь то, какой это сигнал: $s_0(t)$ или $s_1(t)$.

Гауссов белый стационарный шум $n(t)$ имеет нулевое среднее значение и корреляционную функцию $K_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ (см. (1.48)).

Определим в явном виде отношение правдоподобия (3.37) для дискретной выборки из наблюдаемого сигнала (3.41). Для двух гипотез на входе приемника имеем:

$$\begin{aligned} H_0 \Rightarrow \theta = 0: y_i &= s_{0i} + n_i; \quad i = 1, \dots, m; \\ H_1 \Rightarrow \theta = 1: y_i &= s_{1i} + n_i, \text{ где } s_{0i} = s_0(t_i), \quad n_i = n(t_i). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Будем считать, что энергетический спектр шума сосредоточен в полосе $\pm f_b$. Тогда, при интервале дискретизации $\Delta t = 1/(2f_b)$ согласно рисунку 1.18 отсчеты гауссова шума статистически независимы. Дисперсия шума $\sigma_n^2 = N_0 f_b = N_0/(2\Delta t)$. Регулярный сигнал выполняет роль среднего значения: $H_0: \bar{y}_i = s_{0i}$; $H_1: \bar{y}_i = s_{1i}$. С учетом (1.44) m -мерные условные ПРВ выборочного вектора \mathbf{y} для двух гипотез имеют вид:

$$\begin{aligned} H_0: W(\mathbf{y}/H_0) &= \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - s_{0i})^2\right]; \\ H_1: W(\mathbf{y}/H_1) &= \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - s_{1i})^2\right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $m = T/\Delta t$ — число отсчетов на интервале наблюдения. Подставляя (3.43) в (3.37), после выполнения простых алгебраических преобразований получим:

$$L(\mathbf{y}) = \exp\left[-\frac{\Delta t}{N_0} \left(\sum_{i=1}^m s_{1i}^2 - \sum_{i=1}^m s_{0i}^2\right)\right] \cdot \exp\left[\frac{2\Delta t}{N_0} \sum_{i=1}^m y_i (s_{1i} - s_{0i})\right]. \quad (3.44)$$

Выражение (3.44) определяет искомое отношение правдоподобия для задачи различения двух сигналов с полностью известными параметрами на фоне помехи в виде квазибелого шума. Оно допускает простой предельный переход к случаю белого шума, когда $f_b \rightarrow \infty$, а $\Delta t \rightarrow 0$. При этом суммы в показателе степени первого сомножителя перейдут в интегралы, численно равные энергии различаемых сигналов:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m s_{1i}^2 \cdot \Delta t\right) = \int_0^T s_1^2(t, \lambda_1) dt = E_{s1}(\lambda_1). \quad (3.45)$$

Сумма в показателе второго сомножителя перейдет в интеграл:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^m (y_i s_{1i} - y_i s_{0i}) \cdot \Delta t\right] = \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt - \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt. \quad (3.46)$$

Полагая, что энергия сигналов E_{s1} и E_{s0} не зависит от параметра λ , отношение правдоподобия окончательно может быть представлено в виде:

$$L[y(t)] = \exp\left(-\frac{E_{s1} - E_{s0}}{N_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \left[s_1(t, \lambda_1) - s_0(t, \lambda_0)\right] dt\right). \quad (3.47)$$

Предельная форма (3.47) отношения правдоподобия (3.44) называется *функционалом отношения правдоподобия*. Процедура различения сигналов, состоящая в сравнении $L[y(t)]$ с порогом γ_0 , может быть заменена испытанием любой монотонной функции от этого отношения на соответствующий порог. Упрощение алгоритма оптимального различения достигается после логарифмирования (3.47). Выполнив его, оставим в левой части решающего правила (3.37) слагаемые, зависящие от наблюдаемой реализации $y(t)$. В итоге оптимальное правило различения (3.37) принимает следующий вид:

$$z = \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt - \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt \right] \begin{cases} \widehat{H}_1 > z_{\Pi} \\ \widehat{H}_0 < z_{\Pi} \end{cases}, \quad (3.48)$$

где

$$z_{\Pi} = \ln \gamma_0 + (E_{s1} - E_{s0})/N_0 - \text{модифицированный порог.} \quad (3.49)$$



.....
 Структура каждого из интегралов в (3.48) совпадает со структурой выражения (1.12), определяющего корреляционную функцию. По этой причине приемное устройство, реализующее для различения двух полностью известных сигналов алгоритм вида (3.48), называют *корреляционным приемником*.

Из (3.48) следует, что для вынесения решения о наличии на входе приемника сигнала $s_1(t, \lambda_1)$ или $s_0(t, \lambda_0)$ необходимо реализацию $y(t)$ перемножить с копией каждого из ожидаемых сигналов, проинтегрировать произведение, вычесть выходные сигналы интеграторов в момент $t = T$ и результат сравнить с порогом. Если пороговый уровень превышен, то принимается решение о наличии на входе $s_1(t)$; в противном случае — решение о наличии $s_0(t)$. Для критерия идеального наблюдателя и величинах энергии $E_{s1} = E_{s0}$, что имеет место, например, при ЛЧМ и ФКМ, порог $z_{\Pi} = 0$. Таким образом, оптимальный приемник фактически принимает решение по знаку разности выходных сигналов интеграторов.

.....

На рисунке 3.8, а показана структурная схема оптимального различителя, соответствующая алгоритму (3.48). Генераторы опорного сигнала (ГОС) формируют копии ожидаемых сигналов; устройство синхронизации (УС) обеспечивает тактирование работы различителя — запуск ГОС и считывание уровней сигналов

$$z_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt \quad \text{и} \quad z_0 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt \quad (3.50)$$

с выхода интеграторов в момент $t = T$.

Сравнивая (3.50) и (3.17), видим, что величины z_1 и z_0 можно получить как выходной сигнал $z(t, \lambda)$ СФ в момент времени $t = t_0$. Структурная схема различителя с использованием СФ приведена на рисунке 3.8, б; синхронизатор обеспечивает сравнение выходных напряжений СФ в момент времени $t = t_0 = T$. Задача, рассмотренная выше, типична для цифровых систем передачи информации.



В РЛ и РН системах гипотезе H_0 соответствует ситуация, когда $y(t) = n(t)$, т.е. объекта в зоне обзора нет, и на входе приемника присутствует только собственный шум. Очевидно, что структура оптимального РЛ обнаружителя является частным случаем различителя. Алгоритм обработки в этом случае содержит один канал.

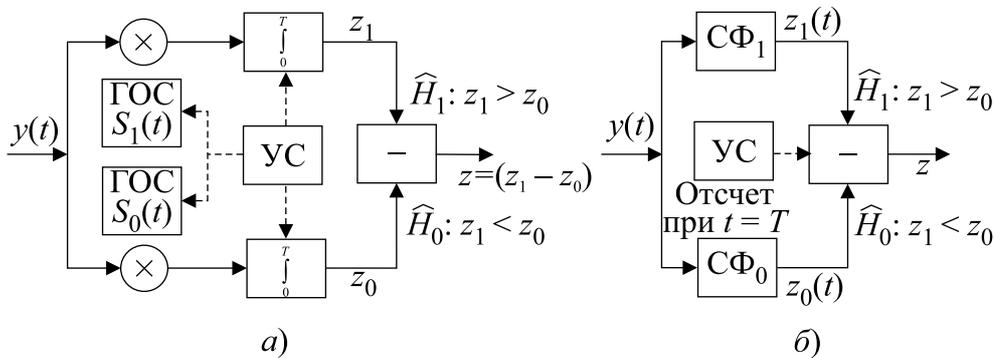


Рис. 3.8 – Структурные схемы оптимальных различителей: а) вариант с применением корреляторов; б) вариант с применением согласованных фильтров

3.6.1 Статистические характеристики качества различения

Критерий качества решения задачи различения определен выражением (3.40). Вероятности двух ошибочных решений для критерия идеального наблюдателя (порог $z_{п} = 0$) согласно (3.48) равны:

$$P(\hat{H}_1/H_0) = \int_0^{\infty} W(z/H_0) dz, \quad P(\hat{H}_0/H_1) = \int_{-\infty}^0 W(z/H_1) dz, \quad (3.51)$$

где $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ — условные ПРВ сигнала $z = z_1 - z_0$ на выходе разностного блока (см. (3.48), (3.50)). Если на входе верна гипотеза H_1 , то случайная величина сигнала (3.48) на выходе различителя:

$$z = \frac{2}{N} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] \cdot [s_1(t) - s_0(t)] dt. \quad (3.52)$$

Являясь линейным преобразованием гауссова шума, величина z также будет гауссовой. Расчет условного среднего значения и условной дисперсии величины z

выполним по способу, который использовался при выводе (3.21). В итоге получим:

$$M[z/H_1] = \frac{2E_s}{N_0}(1 - k_s), \quad D_{z/H_1} = \frac{4E_s}{N_0}(1 - k_s), \quad (3.53)$$

где величина

$$k_s = \frac{1}{E_s} \int_0^T s_1(t)s_0(t) dt \quad (3.54)$$

является по смыслу коэффициентом взаимной корреляции между сигналами $s_1(t)$ и $s_0(t)$.

Если на входе верна гипотеза H_0 , то случайная величина

$$z = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_0(t) + n(t)] \cdot [s_1(t) - s_0(t)] dt. \quad (3.55)$$

Она имеет гауссову ПРВ с параметрами:

$$M[z/H_0] = -\frac{2E_s}{N_0}(1 - k_s) \quad \text{и} \quad D_{z/H_0} = \frac{4E_s}{N_0}(1 - k_s). \quad (3.56)$$

Условные ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ показаны на рисунке 3.9. Полная вероятность ошибочного различения сигналов для «идеального наблюдателя» равна:

$$P_{\text{ош}} = 0.5 \left[\int_0^{\infty} W(z/H_0) dz + \int_{-\infty}^0 W(z/H_1) dz \right]. \quad (3.57)$$

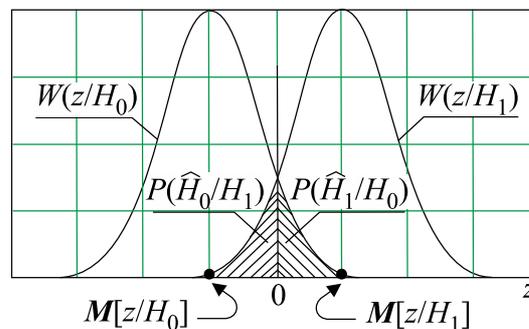


Рис. 3.9 – Гауссова плотность распределения вероятностей сигнала z для двух гипотез: H_1 – наличие сигнала $s_1(t)$; H_0 – наличие $s_0(t)$

Вероятности двух ошибок различения (3.51) численно равны площадям областей, которые на рисунке 3.9 заштрихованы. Интегрирование в (3.57) гауссовых ПРВ сводится, как известно, к интегралу вероятности $\Phi(x)$. В итоге после вычислений получим:

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{(E_s/N_0) \cdot (1 - k_s)}\right). \quad (3.58)$$

Интеграл вероятности $\Phi(x)$ является монотонно возрастающей функцией аргумента, поэтому при заданном отношении с/ш наибольшую помехоустойчивость (меньшую вероятность ошибки) будут иметь сигналы, для которых коэффициент

взаимной корреляции минимален. Величина k_s изменяется от -1 , когда $s_1(t) = -s_0(t)$ (противоположные сигналы), до $+1$, когда $s_1(t) = s_0(t)$. В случае, когда $k_s = 0$, говорят, что сигналы ортогональны. Одинаковые сигналы ($k_s = 1$), очевидно, невозможно различить по форме и поэтому $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(0) = 0.5$. Наиболее эффективно различимы сигналы одинаковые по форме и противоположные по знаку $k_s = -1$. На рисунке 3.10, а показаны результаты расчета по формуле (3.58).



Зависимость $P_{\text{ош}} = f[2E_s/N_0]$ при оптимальных методах приема сигналов называют **кривыми потенциальной помехоустойчивости**.

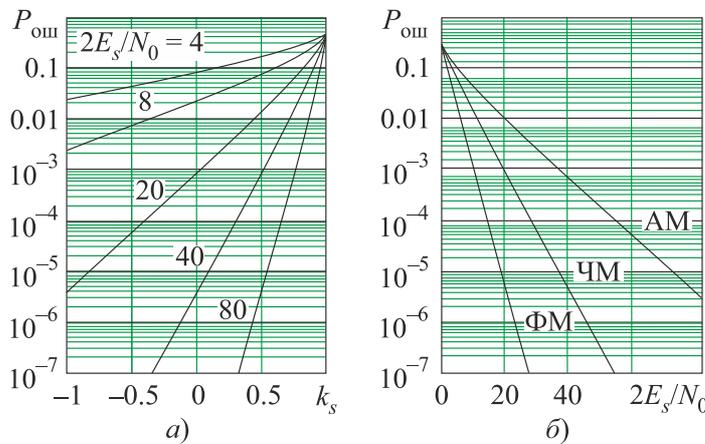


Рис. 3.10 – Зависимость полной вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ от коэффициента взаимной корреляции k_s между детерминированными сигналами (а) и кривые потенциальной помехоустойчивости (б) для АМ, ЧМ, ФМ

На рисунке 3.10, б показаны эти кривые для трех видов модуляции: АМ с сигналами $s_1(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$ и $s_0(t) = 0$; ЧМ с сигналами $s_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$ и $s_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, причем обычно $(\omega_1 - \omega_0) \cdot T \gg 1$ и $k_s = 0$; ФМ с сигналами $s_1(t) = A \cos(\omega t)$ и $s_0(t) = -A \cos(\omega t)$, т. е. $k_s = -1$. Из графиков следует, что при заданной энергии элементарных сигналов наибольшую потенциальную помехоустойчивость имеют ФМ сигналы.

3.6.2 Статистические характеристики качества обнаружения

Вычислим показатели, определяющие качество работы оптимального обнаружителя. Выше было отмечено, что в РЛ системах для задач обнаружения гипотеза H_0 : $y(t) = n(t)$. Выражения сигнала z на выходе корреляционного приемника для двух гипотез следуют из (3.52) и (3.55). Условные ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ также остаются гауссовыми. Их параметры (среднее значение и дисперсия) рассчитываются тем же способом, что и при выводе формулы (3.21). В итоге получаем:

$$\begin{aligned} M[z/H_1] &= 2E_s/N_0; & D_{z/H_1} &= 2E_s/N_0; \\ M[z/H_0] &= 0; & D_{z/H_0} &= 2E_s/N_0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

На рисунке 3.11 показаны условные ПРВ; они имеют гауссову форму и отличаются, как и следует из (3.59), только положением.

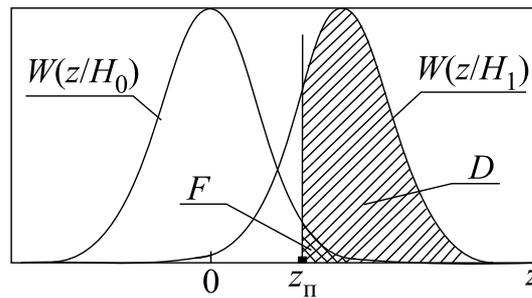


Рис. 3.11 – Нормальные ПРВ при наличии и отсутствии сигнала; D – вероятность правильного обнаружения; F – вероятность ложной тревоги

В соответствии с критерием Неймана – Пирсона необходимо задать *вероятность ложной тревоги (fals) $F = P(\hat{H}_1/H_0)$* , т. е. вероятность превышения порогового уровня z_{Π} случайной величиной z , когда на входе приемника имеется только шум:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2E_s/N_0}\sqrt{2\pi}} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot (2E_s/N_0)}} dz = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\Pi}}{\sqrt{2E_s/N_0}}\right). \quad (3.60)$$

Вероятность правильного обнаружения (detection) $D = P(\hat{H}_1/H_1)$ при этом оказывается равной:

$$D = \frac{1}{q_0 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} e^{-\frac{(z-q_0)^2}{2 \cdot q_0^2}} dz = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\Pi}}{q_0} - q_0\right), \quad (3.61)$$

где $q_0 = \sqrt{2E_s/N_0}$ – отношение с/ш по напряжению на выходе коррелятора при $t = T$ или на выходе СФ при $t = t_0$.

На рисунке 3.11 показаны площади, соответствующие величинам D и F . Видно, что желание одновременного уменьшения F и увеличения D является противоречивым. При заданном значении F из (3.60) следует определить нормированный порог (z_{Π}/q_0) и затем согласно (3.61) вычислить вероятность правильного обнаружения D как функцию q_0 , задавая этому отношению различные значения.



.....
 Семейство кривых $D = f(q_0)$ при $F = \text{const}$ называют **характеристиками обнаружения**.

Эти характеристики для оптимального обнаружителя сигнала с полностью известными параметрами следуют из (3.60), (3.61) и показаны на рисунке 3.12. Они позволяют для заданных значений F и D определить необходимое отношение с/ш q_0 .



.....
 Теория обнаружения утверждает, что *никакой другой способ обработки кроме оптимального* не может обеспечить лучшего сочетания параметров F , D , q_0 . В этом и есть сила и практическая польза результатов теории.

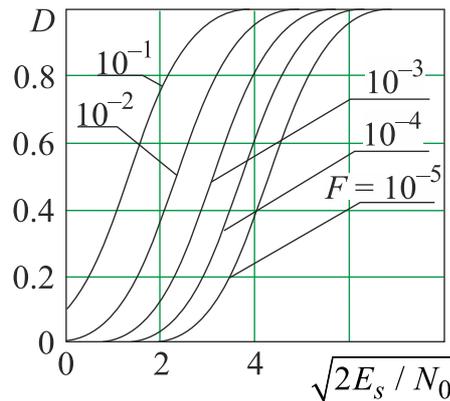


Рис. 3.12 – Характеристики обнаружения детерминированного сигнала

В гл. 3 показана важная роль, которая выполняет согласованный фильтр (или коррелятор) при извлечении полезной информации о наличии сигнала известной формы в смеси с шумом.



.....
 Повторим, что эффект улучшения отношения c/n на выходе СФ по сравнению с таковым на входе объясняется по существу когерентным (синфазным) сложением составляющих полезного сигнала и некогерентным суммированием шума.

Например, в случае ФКМ сигнала, состоящего из M парциальных импульсов, комплексная амплитуда напряжения в максимуме на выходе когерентного сумматора \dot{S}_Σ после линии задержки с M отводами (рис. 3.3–3.4), равна $\dot{S}_\Sigma = M\dot{S}_1$ (\dot{S}_1 — комплексная амплитуда парциального импульса). Соответственно, мощность полезного сигнала $P_\Sigma = M^2 S_1^2 / 2$. Поскольку шумы некогерентны и суммируются по мощности, то их средняя мощность в полосе $\Delta F_{\text{опт}}$ фильтра, согласованного с парциальным импульсом длительностью $\Delta = \tau_n / M$, равна $P_n = M\sigma_n^2 = MN_0 \cdot \Delta F_{\text{опт}}$. Полоса $\Delta F_{\text{опт}} \approx 1/2\Delta$, так как СФ имеет АЧХ вида $|\sin x/x|^2$. Для отношения c/n по мощности на выходе СФ получим: $q_0^2 = P_\Sigma / P_n = 2E_s / N_0$, где полная энергия сигнала $E_s = \tau_n \cdot S_1^2 / 2$.

На рисунке 3.13 показаны осциллограммы процессов при согласованной фильтрации ФКМ сигнала (7-позиционный код Баркера). Длительность сигнала τ_n соответствует семи клеткам на экране. На рисунке 3.13, а, б показан ВЧ процесс (смесь сигнала и шума) на входе фильтра и огибающая на выходе фильтра при отношении уровня сигнала к среднеквадратичному значению шума примерно 10. Очевидно, что проблемы обнаружения такого сильного сигнала практически нет. Проблема обнаружения (различения) возникает, когда сигнал на входе СФ сравним по уровню с шумом и это видно на рисунке 3.13, в, д. Положение существенно улучшается на выходе фильтра (рис. 3.13, з, е).

Следует обратить внимание на боковой всплеск слева от главного максимума на рисунке 3.13, е. В данном случае он соответствует боковому лепестку функции неопределенности полезного сигнала (рис. 3.4). Однако в реальной РЛ системе, когда число целей заведомо неизвестно, этот боковой максимум может принадлежать другому объекту, сигнал от которого более слабый. Это означает, в частности,

что уровень боковых лепестков ФН сигнала имеет важное значение в плане достоверности получаемой в РТС информации. Он должен иметь вполне определенную величину, зависящую от динамического диапазона полезных сигналов на входе.

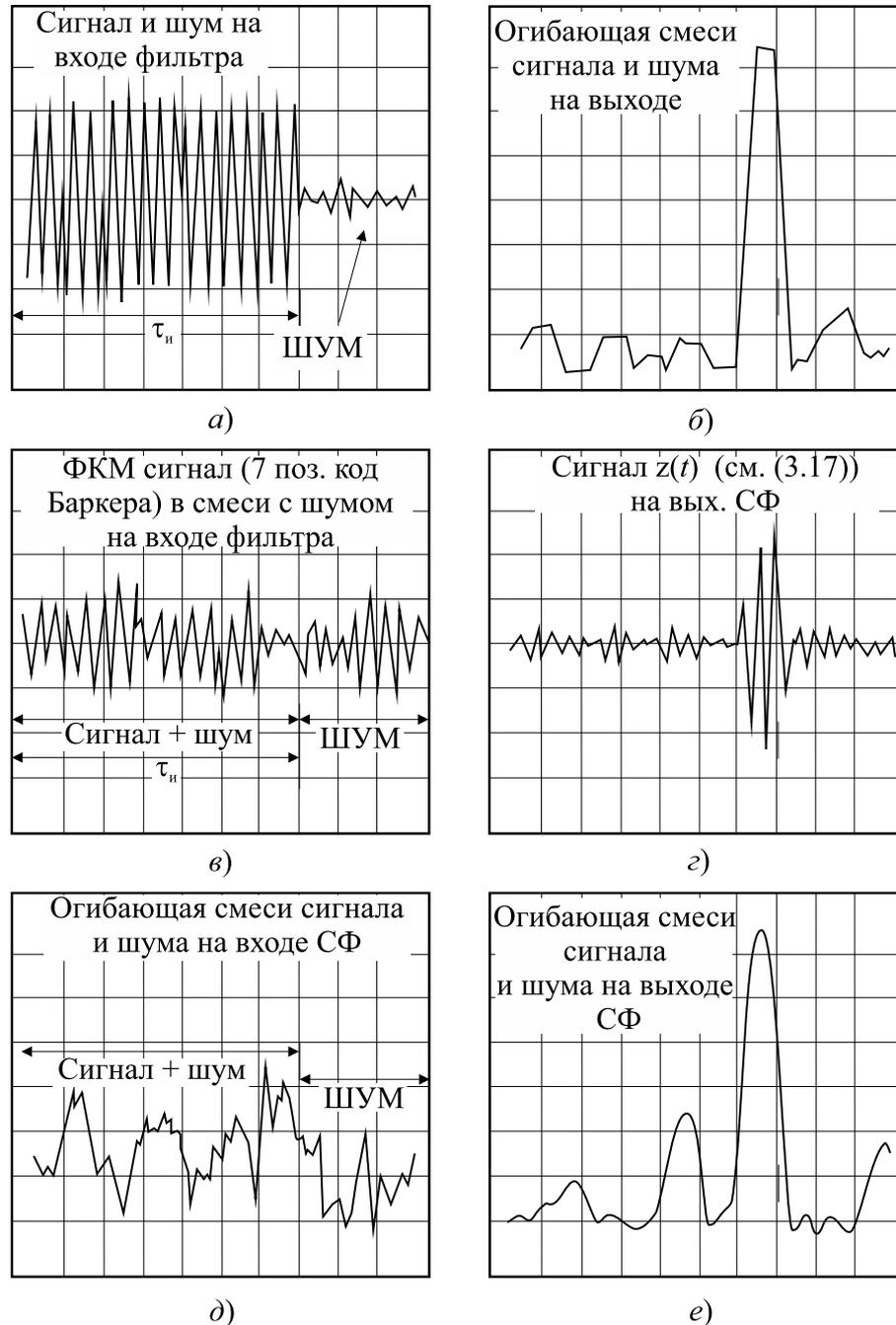


Рис. 3.13 – Осциллограммы процессов при согласованной фильтрации ФКМ сигнала в смеси с гауссовым шумом:

- а) и б) — отношение с/ш на входе фильтра 10;
- в)–е) — отношение с/ш на входе фильтра 1,5

3.6.3 Общие черты задач сыщика и оптимального обнаружителя

Алгоритмы обнаружения и различения сигналов, полученные выше, по своей логической структуре «сходны» с процедурой, которую реализует детектив при «поиске — обнаружении» преступника (полезный сигнал) в большой толпе (шуме) людей. Действительно, он заведомо изучает облик и повадки преступника — собирает всю *априорную информацию* о нем. В самой благоприятной (простой) ситуации он имеет его фотографию (*опорный сигнал*) и точно знает, где и когда (в каком кафе и в какое время), как правило, появляется «сигнал — преступник». Все действия (рассуждения) и принятие решения осуществляет мозг детектива (вычислительное устройство). Проблема в том, что реально всегда существует помеха — есть «люди — шум» и неизвестно точно, есть ли там преступник сегодня.

Задача обнаружения, конечно, будет намного сложнее, если информация о сигнале станет не такой полной. Радиосигнал может иметь неизвестное время прихода (и преступник тоже) или, например, неизвестную и случайную амплитуду и начальную фазу. Преступник также может изменить черты лица. Наконец и шум может быть не белый и не гауссов — люди могут быть в кафе, но на пляже, где они (и преступник тоже)... в темных очках. Что должен сделать сыщик, не нарушая закон, чтобы побудить посетителей снять очки, дабы повысить вероятность обнаружения? Оптимальный алгоритм обнаружения при этом окажется другим. В теории обнаружения получены мощные результаты для различных встречающихся на практике ситуаций.



Выводы

Легко представить, что число обоснованно разнообразных задач обнаружения велико. Однако следует уяснить два очевидных обстоятельства: ставить задачу обнаружения (различения), *ничего не зная о сигнале*, не имеет смысла, и эффективность обнаружителя (различителя) всегда будет выше, если он *наиболее полно учитывает априорную информацию об ожидаемом сигнале и шуме*.

Читателю, который проявит глубокий интерес к задачам теории обнаружения сигналов, можно рекомендовать для изучения [7, 9, 13].



Контрольные вопросы по главе 3

1. Назовите основные задачи статистической теории радиосистем.
2. В чем суть задачи оптимизации РТС и каковы основные этапы ее решения?

3. Изложите постановку задачи оптимизации характеристик линейного фильтра, решением которой является согласованный фильтр.
4. Если $\dot{g}(\omega)$ есть комплексный частотный спектр полезного сигнала $s(t)$, то какой вид имеют комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра и его импульсная реакция?
5. Объясните работу согласованного фильтра на физическом уровне.
6. Какие величины определяют максимальное отношение уровня сигнала к среднеквадратичному значению шума на выходе согласованного фильтра?
7. В какой момент времени на выходе согласованного фильтра можно получить наибольшее превышение полезного сигнала над шумом?
8. Какую форму имеет полезный сигнал на выходе согласованного фильтра, если входной сигнал есть: одиночный прямоугольный видеоимпульс; радиоимпульс с прямоугольной огибающей; одиночный радиоимпульс с ФКМ?
9. Изобразите структурную схему согласованного фильтра для радиоимпульса с ФКМ; для пачки радиоимпульсов с простой модуляцией.
10. Изложите постановку задачи в байесовской теории синтеза оптимального приемника — различителя (обнаружителя) двух полезных сигналов на фоне помехи.
11. Каков смысл величин, определяющих платежную матрицу в задаче синтеза оптимального приемника — различителя?
12. Что есть средний байесов риск в задаче синтеза оптимального приемника — различителя двух сигналов; приемника — обнаружителя полезного сигнала на фоне шума?
13. Запишите в общем виде оптимальное решающее правило приемника — различителя двух сигналов на фоне помехи.
14. Почему отношение двух плотностей распределения вероятностей, участвующих при формировании решения на выходе оптимального приемника — различителя, называют отношением правдоподобия?
15. Дайте формулировку критерия «идеального наблюдателя»; критерия Неймана — Пирсона.
16. Изобразите структуру оптимального приемника — различителя двух полностью известных полезных сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$, поступающих на вход приемника вместе с белым гауссовым шумом.
17. Изобразите структуру оптимального приемника — обнаружителя полностью известного сигнала, поступающего на вход приемника вместе с белым гауссовым шумом.
18. Почему в структуре оптимального приемника — различителя (обнаружителя) полностью известных сигналов возможно применение согласованных фильтров?
19. В каких координатах представляют графики кривых, определяющих статистические характеристики качества бинарного приемника — различителя?

20. Какие из перечисленных четырех случайных событий в приемнике — обнаружителе являются противоположными: ложная тревога; пропуск сигнала; правильное обнаружение; неправильное обнаружение?
21. Изобразите графически ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ выходного сигнала оптимального приемника — различителя (обнаружителя) и укажите площади под кривыми, определяющие вероятности принятия ошибочных решений.
22. Докажите, что интеграл свертки, определяющий для линейного фильтра связь выходного сигнала с входным, превращается в корреляционный интеграл, если линейный фильтр согласован с входным сигналом.
23. В чем сходство и различие выходных полезных сигналов коррелятора и согласованного фильтра?
24. Каковы последствия нарушения синхронизации при оптимальном приеме сигналов с использованием корреляционного приемника?

Глава 4

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОЦЕНОК НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

В главе будут рассмотрены основные аспекты второй обширной области теории статистических решений — теории оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех. Фактически в прикладной теории РТС представляют интерес оптимальные методы демодуляции сигналов (*первичной обработки*), если *информационное сечение* обозначено на входе приемника. Если же оно выбрано в НЧ тракте РТС (*вторичная обработка*), то интерес представляют оптимальные алгоритмы выделения (*фильтрации*) НЧ сообщений или их параметров. В последнем случае помехи должны быть приведены ко входу НЧ тракта РТС.

4.1 Оценки параметров сигналов и их свойства

В целях простоты изучения данного вопроса будем считать, что информативное сообщение $\lambda(t)$ является скалярным и постоянно на интервале обработки. Обозначим его неизвестное и постоянное значение λ . В общем случае полезный сигнал может также содержать один или несколько мешающих параметров β .

В теории оценивания известны два различных подхода к построению оценок параметров. Первый из них ориентирован на получение *интервальной оценки*. В этом случае для заданной *доверительной вероятности* P_d в устройстве обработки сигнала $y(t)$ формируются две величины $\hat{\lambda}_н$ и $\hat{\lambda}_в$. Они определяют нижнюю и верхнюю *границы доверительного интервала*, для которого выполняется условие

$$P[\lambda \in (\hat{\lambda}_н; \hat{\lambda}_в)] = P_d.$$



.....
 Таким образом, **доверительный интервал** — промежуток, который с вероятностью P_d «накрывает» неизвестное значение параметра λ .

Второй подход предполагает формирование *точечных оценок*. Задача оценивания параметра λ теперь состоит в том, чтобы по принятой (*наблюдаемой*) реализации сигнала, допустим на входе приемника $y(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t); t \in (0; T)$, получить достаточно близкую к λ величину $\hat{\lambda} = E\{y(t)\}$. Здесь E — функционал, определяющий преобразование реализации $y(t)$, заданной на интервале $(0; T)$, в скалярную величину $\hat{\lambda}$, которую называют *оценкой параметра λ* .



.....
 Под **оценкой параметра $\hat{\lambda}$** обычно понимают некоторое правило (способ) получения $\hat{\lambda}$ по конкретной реализации входного сигнала.

Являясь неизвестным, параметр λ может (в зависимости от конкретной задачи) рассматриваться как случайная величина, постоянная, на интервале обработки, либо как неизвестная и неслучайная величина. Например, в РЛ и РН системах при оценке дальности до случайно расположенной цели за время приема одного или нескольких отраженных радиоимпульсов (обычно это не более 10–40 мс), можно считать, что параметр $\lambda \equiv D = \text{const}$ и является случайной величиной.



.....
 В подобных случаях ПРВ параметра λ до приема сигнала $y(t)$ называют **априорной** и обозначают $W_\lambda(\lambda)$.

Оценка $\hat{\lambda}$, будучи результатом преобразования конкретной реализации $y(t)$, содержащей шум, является случайной величиной. Изучая свойства оценок, обычно выделяют следующие три: 1) несмещенность оценки; 2) эффективность оценки; 3) состоятельность или сходимость оценки. Поясним подробнее эти свойства.



.....
 Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно математическому ожиданию оцениваемого параметра. Оценка является **безусловно несмещенной**, если $M[\hat{\lambda}] = M[\lambda]$. Если же среднее значение оценки вычисляют при фиксированном λ и справедливо равенство $M[\hat{\lambda}/\lambda] = \lambda$, то оценка является **условно несмещенной**.

Очевидно, процесс оценивания сопровождается ошибками.



.....
 Разность $\varepsilon = \lambda - \hat{\lambda}$ есть **ошибка оценки**. Среднее значение $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - \hat{\lambda}$ называют **смещением оценки**. Для несмещенных оценок $\bar{\varepsilon} = 0$.

Рассеяние (разброс) ошибки характеризуют средним значением квадрата ошибки

$$M[\varepsilon^2] = \bar{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 W(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4.1)$$

где $W(\varepsilon)$ — ПРВ ошибки оценивания.



.....
 Величина $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\bar{\varepsilon^2}}$ имеет размерность оцениваемого параметра и называется **среднеквадратичной ошибкой (СКО) оценки**. Иногда эту величину называют **среднеквадратической погрешностью (СКП)**.

Если в (4.1) использовать условную ПРВ $W(\varepsilon/\lambda)$, т. е. распределение вероятностей ошибки при фиксированном значении неизвестного параметра λ , то получим $\sigma_{\varepsilon/\lambda}$ *условную среднеквадратичную ошибку*.

В некоторых случаях удобно использовать величину дисперсии ошибки

$$D_\varepsilon = M[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2] = \bar{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2. \quad (4.2)$$

Из этого выражения видно, что для несмещенных оценок ($\bar{\varepsilon} = 0$) понятия дисперсии ошибки и среднего квадрата ошибки тождественны.



.....
 Несмещенная оценка называется **эффективной**, если она имеет наименьшую из всех возможных оценок дисперсию.

Оценка называется **состоятельной в среднеквадратичном смысле**, если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{(\hat{\lambda}_T - \lambda)^2} = 0, \quad (4.3)$$

.....
 где $\hat{\lambda}_T$ означает, что оценка получена в результате обработки реализации $y(t)$, длительность которой T . Другими словами, для состоятельной оценки средний квадрат ошибки при $T \rightarrow \infty$ приближается к нулю.

В случае оценки векторного параметра $\boldsymbol{\lambda}^T = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (знак транспонирования « T » у вектора означает запись его в виде строки) устройство обработки (измеритель) формирует вектор оценок $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T = \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$. Соответственно, имеем вектор ошибок оценок $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\boldsymbol{\lambda} - \hat{\boldsymbol{\lambda}})^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$. Рассеяние ошибок в векторном случае характеризует *дисперсионная матрица ошибок оценивания*. Например,

РЛС часто работает в режиме совместного измерения дальности D и радиальной скорости V цели. Дисперсионная матрица ошибок в 2-мерной задаче оценивания имеет вид:

$$D_\varepsilon = M[\varepsilon \cdot \varepsilon^T] = \begin{vmatrix} \overline{\varepsilon_D^2} & \overline{\varepsilon_D \varepsilon_V} \\ \overline{\varepsilon_D \varepsilon_V} & \overline{\varepsilon_V^2} \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

На главной диагонали матрицы D_ε расположены средние квадраты ошибок по дальности и скорости; элементы другой диагонали равны корреляционному моменту ошибок двух параметров. Эта матрица симметрическая. Ее определитель, как правило, не равен нулю.

4.2 Основные способы формирования оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех

В гл. 3 отмечалось, что при решении задач синтеза структуры устройств обработки следует максимально учитывать реальную априорную информацию о статистических свойствах сигналов и помех. Степень полноты этой информации определяется содержанием конкретной задачи. Рассмотрим последовательно несколько способов построения оценок параметров в порядке уменьшения полноты априорной информации, требуемой для получения оценки.

4.2.1 Байесовские оценки

Будем считать, что наблюдаемый сигнал $y(t) = F[s(t, \lambda); n(t)]$; $t \in [0; T]$, т. е. получен в результате определенного взаимодействия сигнала $s(t, \lambda)$, зависящего от одного информативного параметра λ , и случайной помехи $n(t)$. Параметр λ является случайным и остается постоянным на интервале наблюдения. Его априорная ПРВ $W(\lambda)$ известна.

Статистические свойства помехи также известны. Это означает, что при дискретном отборе данных с шагом по времени Δt на интервале наблюдения $(0; T)$ может быть задана m -мерная ПРВ помехи $W_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = W_n(\mathbf{n})$. Статистические свойства полезного сигнала определены заданием m -мерной условной ПРВ $W_s(\mathbf{s}/\lambda)$.

Таким образом, при заданном операторе F и известных статистических свойствах сигнала и помехи определена m -мерная условная ПРВ наблюдаемого случайного сигнала $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$, а также совместная ПРВ $W(\mathbf{y}, \lambda) = W_y(\mathbf{y}/\lambda) \cdot W_\lambda(\lambda)$.

Параметр λ в задаче построения байесовских оценок является аналогом номера гипотезы в проблеме выбора решения при различении сигналов. Однако теперь λ есть непрерывная (или дискретная) случайная величина. Аналогом потерь (в задаче различения), связанных с принятием гипотезы \hat{H}_i , когда в действительности справедлива H_j , в задаче оценки является *функция потерь* $C(\varepsilon)$.



.....
 Значение *функции потерь* определяет потери, которые несет потребитель оценок вследствие ошибки $\varepsilon = \lambda - \hat{\lambda}$, обусловленной расхождением оценки $\hat{\lambda}$ с истинным параметром λ .

В качестве критерия оптимальности оценок выступает **байесов риск** R , который определяется как статистическое среднее функции потерь по всем возможным реализациям наблюдаемого сигнала и оцениваемого параметра.

Таким образом, получаем:

$$R = M[C(\varepsilon)] = \overline{C[\lambda - \hat{\lambda}(\mathbf{y})]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C[\lambda - \hat{\lambda}(\mathbf{y})] \cdot W(\mathbf{y}, \lambda) d\mathbf{y} d\lambda, \quad (4.5)$$

где $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$ — оценка как функция наблюдаемого сигнала (выборки) при дискретном отборе данных. Интегрирование по \mathbf{y} в (4.5) является m -кратным, т. е. $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_m$.



Оценка $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$, минимизирующая средний риск (4.5), называется **байесовой оценкой**, а получающееся при этом минимальное значение R_{\min} среднего риска — **байесовым риском**.

Согласно формуле Байеса, представим совместную ПРВ в виде

$$W(\mathbf{y}, \lambda) = W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) \cdot W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}), \quad (4.6)$$

где $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ апостериорная ПРВ параметра λ при конкретной выборке наблюдаемого сигнала \mathbf{y} . Подставим (4.6) в (4.5) и запишем выражение для среднего риска иначе:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{\infty} C[\hat{\lambda}(\mathbf{y}) - \lambda] \cdot W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.7)$$



Внутренний интеграл в (4.7) вычисляется при фиксированном значении выборки \mathbf{y} и является по существу условным апостериорным средним (по множеству значений λ) функции потерь. По смыслу это *условный (апостериорный) байесов риск*. Обозначим его $R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y})$, что означает зависимость условного риска от \mathbf{y} при заданном способе формирования $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$. В итоге (4.7) примет вид:

$$R = \overline{R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y})} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.8)$$

Функция $W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \geq 0$ определяет свойства входного сигнала и явно от λ не зависит. Поэтому минимум среднего риска R можно обеспечить путем минимизации условного риска:

$$R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} C[\hat{\lambda}(\mathbf{y}), \lambda] \cdot W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda \quad (4.9)$$

за счет оптимального способа построения оценки $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$.

Обсудим возможный вид функции потерь. Здравый смысл позволяет считать целесообразным задание $C(\varepsilon)$ со следующими свойствами:

- 1) $C(0) = 0$ (безошибочная оценка не влечет потери);
- 2) $C(\varepsilon) = C(-\varepsilon)$ (потери не зависят от знака ошибки);
- 3) $C(\varepsilon)$ функция неубывающая (с увеличением ошибки потери растут или могут быть постоянными).

Этим требованиям удовлетворяют три классических функции: квадратичная, модульная и простая. Они показаны на рисунке 4.1.

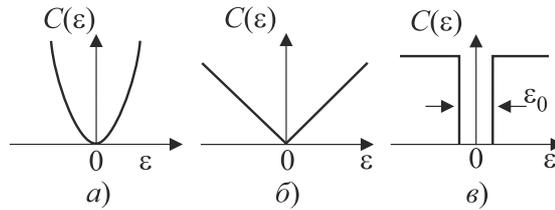


Рис. 4.1 – Типичные функции потерь при оценке скалярного параметра:

а) квадратическая; б) модульная; в) простая

Определим вид байесовской оценки при квадратичной функции потерь.

Выражение (4.9) принимает при этом следующий вид:

$$R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \hat{\lambda})^2 \cdot W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.10)$$

Видно, что байесовская оценка $\hat{\lambda}$, обеспечивающая минимум (4.10), будет иметь минимальную среднеквадратичную ошибку. Полагая выполненными условия дифференцирования интеграла по параметру (по оценке), вычислим производную от условного риска (4.10) по оценке $\hat{\lambda}$ и приравняем ее нулю. В итоге получим уравнение:

$$\left. \frac{\partial R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y})}{\partial \hat{\lambda}} \right|_{\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_B} = \hat{\lambda}_B - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = 0. \quad (4.11)$$



Выводы

Таким образом, байесовская оценка $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ при квадратичной функции потерь имеет минимум СКО и определяется в виде

$$\hat{\lambda}_B(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что оценка $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ равна апостериорному среднему значению параметра λ по распределению вероятностей $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ при фиксированном значении выборки \mathbf{y} .

Рассмотрим байесовскую оценку параметра λ при использовании функции потерь *модульного типа*. Подставив $C(\varepsilon) = |\hat{\lambda} - \lambda|$ в (4.9), имеем:

$$R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda} - \lambda| W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = \int_{-\infty}^{\hat{\lambda}} (\hat{\lambda} - \lambda) W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda - \int_{\hat{\lambda}}^{\infty} (\hat{\lambda} - \lambda) W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda.$$

Приравняв производную от условного риска по $\hat{\lambda}$ нулю, получаем уравнение для оценки:

$$\int_{\hat{\lambda}_B}^{\infty} W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = \int_{-\infty}^{\hat{\lambda}_B} W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.13)$$



Выводы

Из (4.13) видно, что *байесовская оценка при простой функции потерь совпадает с определением медианы апостериорного распределения вероятностей $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ неизвестного параметра λ .*

Функция потерь вида (рис. 4.1, в) определяется выражением:

$$C(\lambda, \hat{\lambda}) = \begin{cases} 0, & \text{при } |\lambda - \hat{\lambda}| < \varepsilon_0, \\ 1, & \text{при } |\lambda - \hat{\lambda}| \geq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

При использовании этой функции полагается, что оценки, образуемые измерительной РТС, одинаково хороши, если ошибка не превышает по модулю ε_0 (потери равны нулю). Оценки одинаково плохи, если модуль ошибки превышает ε_0 . Применение функции потерь (4.14) оправдано, например, в системе радионаведения, когда поражение цели происходит при любом промахе, не превышающем некоторой величины.

Представим средний риск для функции потерь (4.14) в виде

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda, \hat{\lambda}) d\lambda d\hat{\lambda} = \iint_{|\lambda - \hat{\lambda}| \geq \varepsilon_0} W(\lambda, \hat{\lambda}) d\lambda d\hat{\lambda} = P[|\lambda - \hat{\lambda}| > \varepsilon_0].$$

Из данного выражения видно, что минимизация среднего риска эквивалентна минимуму вероятности того, что модуль ошибки превысит заданное значение ε_0 . Для определения решающего правила перепишем выражение условного риска в виде

$$R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{(\hat{\lambda} - \varepsilon_0)} W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda + \int_{(\hat{\lambda} + \varepsilon_0)}^{\infty} W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.15)$$

Дифференцируя (4.15) по $\hat{\lambda}$ и приравнявая производную нулю, найдем условие, определяющее оценку:

$$W_{\lambda}(\lambda/y) \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}-\varepsilon_0} = W_{\lambda}(\lambda/y) \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}+\varepsilon_0}. \quad (4.16)$$



Выводы

Таким образом, оптимальная оценка должна обеспечивать равные значения апостериорной ПРВ в точках $(\hat{\lambda} + \varepsilon_0)$ и $(\hat{\lambda} - \varepsilon_0)$. Если функция $W_{\lambda}(\lambda/y)$ симметрична относительно некоторого $\lambda = \tilde{\lambda}$, то байесовская оценка совпадает с центром симметрии, т. е. $\hat{\lambda}_B = \tilde{\lambda}$. Можно показать, что по мере уменьшения величины ε_0 байесовская оценка при простой функции потерь приближается к значению параметра λ_{\max} , при котором апостериорная ПРВ $W_{\lambda}(\lambda/y)$ максимальна.

4.2.2 Оценки максимального правдоподобия

Байесовская оценка при простой функции потерь соответствует положению максимума функции $W(\lambda/y)$ и может быть определена как корень уравнения:

$$\frac{\partial W(\lambda/y)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}_B} = 0. \quad (4.17)$$

Поскольку логарифм есть монотонно возрастающая функция аргумента, то часто более удобно решать уравнение:

$$\frac{\partial \ln[W(\lambda/y)]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}_B} = 0. \quad (4.18)$$

Используем известное соотношение для любой условной ПРВ $W(\lambda/y) = W(\lambda) \times W(y/\lambda)/W(y) = k \cdot W(\lambda) \cdot W(y/\lambda)$, где k — константа, не зависящая от λ , и подставим его в (4.18). В итоге уравнение для оценки примет вид:

$$\frac{\partial \ln[W(y/\lambda)]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}_B} + \frac{\partial \ln[W(\lambda)]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}_B} = 0. \quad (4.19)$$

Во многих практических задачах априорная неопределенность о параметре велика, т. е. функция $W(\lambda)$ достаточно широкая — имеет слабо выраженный максимум по λ или вовсе его не имеет. В этом случае второе слагаемое в (4.19) близко к нулю. В итоге оценка по максимуму апостериорной вероятности совпадает с небайесовской оценкой по максимуму функции $L(\lambda) \equiv W(y/\lambda)$.



.....
 Функцию $L(\lambda)$ называют **функцией правдоподобия (ФП)**. Оценки параметров, определенные этим способом, называют **оценками максимального правдоподобия (МП)**. Таким образом, **функция правдоподобия** есть функция неизвестного параметра λ и для нас важно изменение ее значений при изменении параметра, подлежащего оцениванию. При этом сигнал y , лежащий на входе устройства формирования оценки.

Отметим, что существуют различные ситуации (такие, например, как измерения радиолокатором скорости вращения планеты), когда нет смысла предполагать, что параметр λ выбирается случайным образом из некоторого множества, на котором можно разумным способом задать априорную ПРВ. В этом случае использование оценок МП в сравнении с байесовскими в большей степени соответствует содержанию подобных задач.

При наличии в полезном сигнале случайных неинформативных параметров β ФП принимает вид $L(\lambda; \beta) = W(y/\lambda; \beta)$. Определение МП оценки $\hat{\lambda}_{МП}$ в этом случае предполагает вычисление безусловной ПРВ выборки путем статистического усреднения, т. е.

$$W(y/\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(y/\lambda; \beta) W(\beta) d\beta = L(\lambda),$$

где $W(\beta)$ — совместная ПРВ совокупности параметров β . Интегрирование при этом выполняется по области возможных значений β .



.....
 Поиск оценок МП связан, в общем случае, с решением одного или системы (для векторного параметра λ) нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\left. \frac{\partial \ln[W(y/\lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{МП}} = 0. \quad (4.20)$$

Процесс определения МП оценки равносильен выбору среди семейства ПРВ $W(y/\lambda)$, образованного значениями параметра $\lambda \in \Lambda$, такой $W(y/\hat{\lambda}_{МП})$, которая для конкретной выборки y доставляет максимальную вероятность (плотность вероятностей). Отсюда проистекает название — **максимально правдоподобная оценка**. Любое значение λ , отличное от $\hat{\lambda}_{МП}$, для которого $L(\lambda; y) < L(\hat{\lambda}_{МП}; y)$ приводит к меньшей вероятности по отношению к исходным данным, и поэтому оно менее удовлетворительно.

Оценки МП постоянных параметров могут иметь ряд примечательных свойств — они асимптотически (при увеличении объема выборки) состоятельны, эффективны

и их ПРВ $W(\hat{\lambda}/\lambda)$ является гауссовой. Поэтому метод построения оценок по максимуму ФП находит широкое практическое применение. Указанные свойства оценок МП реализуются в случае, если ФП обладает свойством *регулярности*. Суть этого свойства в том, что должно выполняться тождество [6]:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}) W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \lambda} W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y},$$

т. е. ПРВ $W(\mathbf{y}/\lambda)$ должна допускать дифференцирование по параметру под знаком интеграла. В указанном тождестве $T(\mathbf{y})$ является произвольной интегрируемой функцией. В практических задачах нарушение тождества часто связано с наличием у функции $W(\mathbf{y}/\lambda)$ (как функции \mathbf{y}) точек разрыва, которые изменяются в зависимости от λ .

В простейшем случае уравнение правдоподобия (4.20) является линейным и его решение можно найти аналитически. В общем случае для его решения необходимо использовать численные методы. Результативность численного метода зависит от характера функции правдоподобия и близости начального приближения к неизвестному корню уравнения. В частности, важное значение имеет унимодальность ФП, т. е. наличие у нее единственного максимума.

4.2.3 Оценки неизвестных параметров методом наименьших квадратов

Во многих практических задачах можно полагать, что наблюдаемый сигнал на интервале времени $(0; T)$ допускает представление:

$$y(t; \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \cdot f_i(t) + n(t), \quad (4.21)$$

где $\boldsymbol{\lambda}^T = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}\}$ — r -мерный вектор-строка неизвестных параметров; $f_i(t)$, ($i = 0, \dots, r-1$) — совокупность r известных функций; $n(t)$ — аддитивная помеха. Задача состоит в том, чтобы найти способ получения оптимальных оценок $\hat{\lambda}_i$ параметров λ_i . Обратим внимание на два обстоятельства:

1. Математическая модель (4.21) является линейной по отношению к параметрам λ_i .
2. Помеха $n(t)$ является аддитивной и постановка задачи не предполагает задания ее статистических свойств.

Рассмотрим метод наименьших квадратов (МНК). Получим выражение для оценки $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{МНК}}$, предполагая поступление данных (сигнала) (4.21) в дискретные моменты времени $t_k = k \cdot \Delta t$; $k = 1, \dots, m$; $m = T/\Delta t$. Множество наблюдений представим в виде системы m уравнений:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \lambda_0 f_0(t_1) + \lambda_1 f_1(t_1) + \dots + \lambda_{r-1} f_{r-1}(t_1) + n(t_1); \\ y(t_2) &= \lambda_0 f_0(t_2) + \lambda_1 f_1(t_2) + \dots + \lambda_{r-1} f_{r-1}(t_2) + n(t_2); \\ &\dots \\ y(t_m) &= \lambda_0 f_0(t_m) + \lambda_1 f_1(t_m) + \dots + \lambda_{r-1} f_{r-1}(t_m) + n(t_m). \end{aligned} \quad (4.22)$$

В матричных обозначениях система (4.22) имеет вид:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}, \quad (4.23)$$

где \mathbf{y} – m -мерный вектор столбец наблюдений с координатами $y_i = y(t_i)$; \mathbf{n} – m -мерный вектор столбец помехи с координатами $n_i = n(t_i)$; \mathbf{F} – матрица размерностью ($m \times r$) следующего вида:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0(t_1) & f_1(t_1) & \dots & f_{r-1}(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(t_m) & f_1(t_m) & \dots & f_{r-1}(t_m) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Для заданных моментов времени t_k и известных функций $f_i(t_k)$ матрица \mathbf{F} – числовая матрица.



.....
Допустим, что $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ есть некоторая оценка, тогда $(\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \tilde{\mathbf{n}}$ – вектор остаточной помехи. Данный вектор называют вектором *невязок наблюдений*; по существу он является вектором оценок помехи. Критерий оптимальности (целевая функция) для оценок МНК определяется в виде

$$J(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{n}_i R_{ij} \tilde{n}_j = (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\lambda}})^T \mathbf{R} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\lambda}}), \quad (4.25)$$

где \mathbf{R} – положительно определенная и симметричная матрица весовых коэффициентов размерностью ($m \times m$). Из (4.25) видно, что скалярная функция $J(\hat{\boldsymbol{\lambda}})$ является функцией r переменных. Для единичной матрицы весов ($\mathbf{R} = \mathbf{E}$ – единичная матрица) значение целевой функции $J(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i^2$, т.е. равно сумме квадратов значений невязок по всем моментам времени. Для оптимальной по МНК оценки должно выполняться условие:

$$J(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{МНК}}) = \min_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} [J(\hat{\boldsymbol{\lambda}})].$$

Таким образом, если оптимальная оценка существует, то она может быть определена как корень уравнения:

$$\left. \frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\lambda}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{МНК}}} = 0. \quad (4.26)$$

.....

Выполняя перемножение в (4.23) по правилам алгебры матриц, получим целевую функцию в виде

$$J(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\lambda}} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (4.27)$$

Второе и третье слагаемые в (4.27) зависят от оценки, причем второе является линейной формой по отношению к $\hat{\lambda}$ и третье — квадратичной формой. Вычисление производной (4.26) с учетом (4.27) дает уравнение для оценки:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F}) \hat{\lambda}. \quad (4.28)$$



Решая (4.28) матричным методом, получаем выражение оценки МНК:

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{y}, \quad (4.29)$$

где $\mathbf{L} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}$ матрица размерностью $(r \times m)$, определяющая линейное преобразование вектора наблюдений \mathbf{y} .

Важно отметить, что *оптимальная по МНК оценка вектора неизвестных параметров сводится к линейному оператору (оператор \mathbf{L}) над входными данными*. Очевидно, это есть следствие линейности модели наблюдаемого сигнала и аддитивности помехи.

Получение оценки согласно (4.29) предполагает обращение матрицы $\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F}$ размера $(r \times r)$. Рассмотрим структуру этой матрицы для случая, когда $\mathbf{R} = \mathbf{E}$. Выполнив перемножение матриц, получим:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m f_0^2(t_i) & \sum_{i=1}^m f_0(t_i) f_1(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^m f_0(t_i) f_{r-1}(t_i) \\ \sum_{i=1}^m f_1(t_i) f_0(t_i) & \sum_{i=1}^m f_1^2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^m f_1(t_i) f_{r-1}(t_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m f_{r-1}(t_i) f_0(t_i) & \sum_{i=1}^m f_{r-1}(t_i) f_1(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^m f_{r-1}^2(t_i) \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Обращение матрицы (4.30) реализуется просто, если она является диагональной. Для этого необходимо чтобы семейство функций $f_0(t), f_1(t), \dots, f_{r-1}(t)$ обладало свойством дискретной ортогональности, т. е. $\sum_{i=1}^m f_k(t_i) f_l(t_i) = 0$ для любых $k \neq l$. Например, полиномы Чебышева имеют это свойство. При этом необходимо временной интервал наблюдения $(0; T)$ привести к интервалу $(-1; 1)$ и временные отсчеты формировать в моменты $t_i = \cos[(2i-1)\pi/2m]$, где $i = 1, 2, \dots, m$; причем $m > k, l$.

4.3 Статистические свойства оценок МНК

Определим смещение и дисперсию оценок МНК. Вычислим математическое ожидание оценки $\mathbf{M}[\hat{\lambda}_{\text{МНК}}]$. Для этого в (4.29) подставим выражение вектора наблюдений (4.23) и представим уравнение оценки в виде

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} (\mathbf{F} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n}) = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{L} \mathbf{n}, \quad (4.31)$$

где L — матрица, определяющая оператор оценки в (4.29). Таким образом, из (4.31) вектор ошибок оценки:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}} = (\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{МНК}} - \boldsymbol{\lambda}) = L\mathbf{n} \quad (4.32)$$

и его статистическое среднее $M[\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}}] = M[L\mathbf{n}] = LM[\mathbf{n}]$. Из этого следует, что среднее значение ошибки обращается в нуль при $M[\mathbf{n}] = 0$, т. е. оценки МНК являются несмещенными, если помеха $n(t)$, введенная в модель наблюдений (4.21), имеет нулевое среднее.

Определим ковариационную матрицу вектора ошибок (4.32) в виде

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}}} = M[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] = L\overline{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}L^T = L\mathbf{K}_nL^T, \quad (4.33)$$

где \mathbf{K}_n — ковариационная матрица помехи. В развернутой форме с учетом выражения для L матрица (4.33) имеет вид:

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК}}} = (\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{K}_n\mathbf{R}\mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{F})^{-1}. \quad (4.34)$$

Обсудим вопрос, связанный с выбором весовой матрицы \mathbf{R} , которая определяет коэффициенты R_{ij} в выражении (4.25) для критерия оптимальности J . Очевидно, что существенный вклад в J вносят большие по величине невязки, которые возникают при большой интенсивности помехи. В связи с этим для снижения их влияния целесообразно задать весовые коэффициенты обратно пропорциональными интенсивности помехи. Можно строго показать [4], что при выборе $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$ оценки параметров по МНК для линейной задачи вида (4.21) имеют минимальную дисперсию ошибки. При оценке векторного параметра $\boldsymbol{\lambda}$ это означает минимизацию суммы средних квадратов ошибок по всем составляющим вектора $\boldsymbol{\lambda}$. Очевидно, что получение таких оценок требует априорной информации о корреляционных свойствах помехи, т. е. необходимо знать матрицу \mathbf{K}_n .

Подставим в (4.34) оптимальную весовую матрицу $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$. В итоге ковариационная матрица ошибок принимает простой вид:

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{МНК. опт}}} = (\mathbf{F}^T\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{F})^{-1}. \quad (4.35)$$

Задача формирования оценок МНК усложнится, если математическая модель (4.21) будет нелинейной по параметрам. В этом случае целевая функция, равная $J(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^m [y_i - s(t_i; \boldsymbol{\lambda})]^2$, не является квадратичной функцией от переменных $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$.

Поиск аналитического решения системы уравнений вида (4.26) с целью определения выражения для оценок МНК в нелинейных задачах, как правило, оказывается безуспешным. Проблема обычно решается подходящим численным методом. Возможность применения МНК в конкретной задаче зависит от скорости сходимости и точности выбранного численного метода. Большое значение при этом имеют оценки на первом шаге итеративного процесса поиска корней (начальное приближение) и сведения о характере целевой функции.

4.4 Пример оценки неизвестного скалярного параметра

Рассмотрим одну из простых задач оценивания, когда выборочный вектор наблюдаемого сигнала \mathbf{y} образован совокупностью отсчетов вида

$$y_i = \lambda + n_i, \text{ где } i = 1, \dots, m; \quad (4.36)$$

где n_i — дискретный отсчет стационарного гауссова шума $n(t)$ с равномерным энергетическим спектром $S_n(\omega) = N_0/2$ [Вт/Гц] в полосе $\omega \in (-2\pi f_B; 2\pi f_B)$ и средним $\overline{n_i} = 0$; λ — неизвестный случайный параметр.

1. **Найдем оценку МП параметра λ .** Прежде получим в явном виде функцию правдоподобия $L(\lambda) \equiv W(\mathbf{y}/\lambda)$. Будем полагать, что интервал дискретизации $\Delta t = 1/(2f_B)$. Тогда согласно (1.47) дискретная последовательность n_i ($i = 1, \dots, m$) является последовательностью статистически независимых случайных величин. Из (4.36) следует, что y_i ($i = 1, \dots, m$) есть стационарная гауссова последовательность независимых случайных величин со средним $\overline{y_i} = \lambda$. Таким образом,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{y}/\lambda) &= \prod_{i=1}^m W(y_i/\lambda) = \prod_{i=1}^m \frac{\exp[-0.5\sigma_n^2(y_i - \lambda)^2]}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} = \\ &= K \cdot \exp\left[-0.5\sigma_n^2 \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda)^2\right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

где K — постоянная, не зависящая от λ ; $\sigma_n^2 = \overline{n_i^2} = N_0 f_B$ — дисперсия дискретного шума.

Из (4.37) найдем логарифм функции правдоподобия:

$$\ln[L(\lambda)] = \ln[W(\mathbf{y}/\lambda)] = \ln K - 0.5\sigma_n^2 \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda)^2. \quad (4.38)$$

Таким образом, уравнение правдоподобия имеет вид:

$$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda} = \sum_{i=1}^m y_i - m\lambda = 0$$

и в итоге для МП оценки параметра λ получаем:

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i. \quad (4.39)$$

Выражение оценки (4.39) по существу является средним арифметическим выборочных отсчетов.

2. **Найдем оценку МНК параметра λ .** В соответствии с (4.22), (4.23) матрица \mathbf{F} размерности $(m \times r)$ имеет m строк и один столбец. Определим весовую матрицу $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1} = \sigma_n^{-2} \cdot \mathbf{E}$, тогда целевая функция (4.25) для оценок МНК примет вид:

$$J(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\lambda})^2,$$

который с точностью до постоянной совпадает с выражением (4.38) для логарифма функции правдоподобия. Непосредственно из выражения (4.29) для оценки МНК получаем:

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}}(\mathbf{y}) = \left[|1 \ 1 \ 1 \dots 1| \cdot \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot |1 \ 1 \ 1 \dots 1| \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i.$$

Сравнивая полученную оценку с выражением (4.39) для $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$, видим, что в нашем случае они полностью совпадают. Внимательное рассмотрение проделанных выше простых преобразований показывает, что совпадение оценок обусловлено, во-первых, линейностью математической модели и, во-вторых, гауссовым характером ПРВ аддитивного шума.



.....
 Найдем дисперсию оценки $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}$. Отметим, что согласно (4.36) дисперсия единичного отсчета $D_{y_i} = \sigma_n^2$. Учтем, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме их дисперсий. В итоге получим:

$$\mathbf{D}[\hat{\lambda}_{\text{МНК}}] = \mathbf{D}\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i\right] = \frac{\sigma_n^2}{m}. \quad (4.40)$$

Отсюда следует, что рассеяние оценки МНК при неограниченном увеличении объема m выборки становится бесконечно малым.

3. **Определим байесовскую оценку параметра λ .** Предположим теперь, что неизвестный параметр λ является случайной величиной с гауссовой априорной ПРВ, параметры которой m_λ и σ_λ , т. е.

$$W_\lambda(\lambda) = \left[\frac{1}{\sigma_\lambda \sqrt{2\pi}} \right] \cdot \exp \left[-0.5 \sigma_\lambda^2 (\lambda - m_\lambda)^2 \right]. \quad (4.41)$$

Полагаем также, что λ статистически не зависит от помехи $n(t)$. В этом случае безусловная m -мерная ПРВ выборочного вектора \mathbf{y} в (4.23) также гауссова с параметрами $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{m}_y = \mathbf{F}m_\lambda$ и диагональной корреляционной матрицей вида $\mathbf{K}_y = (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2) \cdot \mathbf{E}$, т. е.

$$W(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)^{m/2}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}m_\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}m_\lambda)}{2 (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)} \right]. \quad (4.42)$$

Условная ПРВ $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$ (функция правдоподобия) соответствует (4.37) и в матричной форме имеет вид:

$$W_y(\mathbf{y}/\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma_n^m} \exp \left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}\lambda)}{2\sigma_n^2} \right]. \quad (4.43)$$

Подставляя (4.41)–(4.43) в (4.6), найдем апостериорную ПРВ $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$, которая также имеет гауссов вид. Выполнив группирование слагаемых в показателе экспоненты функции $W(\lambda/\mathbf{y})$, получим выражение для апостериорного математического ожидания параметра, т. е. для оптимальной байесовской оценки в следующем виде:

$$\hat{\lambda}_B(\mathbf{y}) = \frac{m_\lambda/\sigma_\lambda^2 + (1/\sigma_n^2) \sum_{i=1}^m y_i}{1/\sigma_\lambda^2 + m/\sigma_n^2} = \frac{m_\lambda + \eta \sum_{i=1}^m y_i}{1 + m\eta}, \quad (4.44)$$

где m — объем выборки; m_λ — среднее значение параметра λ ; $\eta = \sigma_\lambda^2/\sigma_n^2$ — отношение априорной дисперсии оцениваемого параметра к дисперсии помехи. Рассмотрим (4.44) в двух предельных формах.

1. При $\eta \rightarrow 0$, когда допустим $\sigma_\lambda \rightarrow 0$ или $\sigma_n \rightarrow \infty$, оценка $\hat{\lambda}_B \rightarrow m_\lambda$. Это и ясно, поскольку в первом случае параметр λ как бы априорно точно задан, и реальные данные не могут дать новой информации, а во втором случае интенсивность помехи так велика, что обработка выборочных данных теряет смысл. В обоих случаях байесовская оценка параметра приравнивается заданному среднему значению m_λ .

2. При $\sigma_\lambda \rightarrow \infty$ (априорная информация отсутствует) в итоге имеем

$$\hat{\lambda}_B = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i = \hat{\lambda}_{МП},$$

т. е. байесовская оценка совпадает с оценкой МП.

Рассмотрим вопрос смещения байесовских оценок. Введем величину относительного смещения условной (при заданном λ) байесовой оценки:

$$\delta = \frac{\overline{\hat{\lambda}_{B/\lambda}} - \lambda}{\lambda}, \quad (4.45)$$

где $\overline{\hat{\lambda}_{B/\lambda}} = \mathbf{M}[\hat{\lambda}_B/\lambda]$ — условное среднее оценки (4.44). Из (4.36) условное среднее $\mathbf{M}[y_i/\lambda] = \lambda$. Учитывая это, найдем среднее оценки (4.44) и выделим из полученного соотношения величину (4.45). В итоге получим:

$$\delta = \frac{\delta_\lambda}{1 + m\eta}, \quad (4.46)$$

где $\delta_\lambda = (m_\lambda - \lambda)/\lambda$ — относительное отклонение случайного параметра λ от его среднего значения m_λ .

На рисунке 4.2 показана зависимость $\delta(m)$. Таким образом, условная байесовская оценка при фиксированном объеме выборки в общем случае имеет смещение, тем большее, чем меньше величина η и чем сильнее оцениваемый параметр отклонился от среднего.

Дисперсия байесовой оценки $D_{\hat{\lambda}_B} = \overline{(\lambda - \hat{\lambda}_B)^2}$, так же как и сама оценка, определяется после приведения ПРВ $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$ к стандартной гауссовой форме и имеет вид:

$$D_{\hat{\lambda}_B} = \frac{\sigma_\lambda^2}{1 + m(\sigma_\lambda^2/\sigma_n^2)}. \quad (4.47)$$

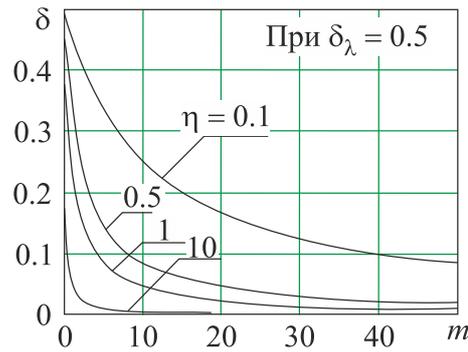


Рис. 4.2 – Зависимость относительного смещения δ условной байесовой оценки параметра λ от объема выборки m

Полагая в этом выражении $\sigma_\lambda^2 \rightarrow \infty$, что эквивалентно отсутствию априорной информации, когда $\hat{\lambda}_B \rightarrow \hat{\lambda}_{МП}$, получаем соотношение для дисперсии оценки МП скалярного параметра λ в виде

$$D_{\hat{\lambda}_B} = \frac{\sigma_n^2}{m} = D_{\hat{\lambda}_{МП}}. \quad (4.48)$$

Данное выражение, как и следовало ожидать, совпадает с (4.40) для дисперсии оценки МНК.

В заключение сделаем замечание, связанное с формой представления оператора формирования оценки. Вычисление оценок в соответствии с (4.39) или (4.29) предполагает наличие (запоминание) в вычислителе полного (m -мерного) выборочного вектора \mathbf{y} и последующую его обработку. В случае, если возникает необходимость продолжить наблюдение (прием), предстоит все вычисления повторить заново. В большинстве практических задач это ведет к неоправданному завышению требований к памяти и производительности вычислителя. По этой причине в реальных устройствах такой (*параллельный*) способ используется редко. Широкое применение находят *последовательные* алгоритмы обработки, в которых оценка параметра $\hat{\lambda}_k$ на текущем k -м шаге по времени образуется в виде суммы двух слагаемых: оценки на предыдущем шаге $\hat{\lambda}_{(k-1)}$ и поправки (обновления), зависящей от нового наблюдения y_k , полученного на текущий момент $t_k = k \cdot \Delta t$. Покажем это на примере алгоритма (4.39). Оценку на текущем k -м шаге можно представить в следующей форме:

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i = \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^{k-1} y_i + y_k \right] = \frac{1}{k} \left[(k-1) \cdot \hat{\lambda}_{(k-1)} + y_k \right] \text{ или}$$

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{(k-1)} + \frac{1}{k} [y_k - \hat{\lambda}_{(k-1)}]; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

Формирование оценки согласно (4.49) предполагает принудительное введение начального значения оценки $\hat{\lambda}_0$. В данном случае это может быть первое выборочное значение y_1 , т. е. как последовательный, алгоритм начнет работать с шага $k = 2$. Однако более корректно задать $\hat{\lambda} = m_\lambda$. Структура выражения (4.49) является типичной для последовательных алгоритмов оценивания параметров. На рисунке 4.3 она показана в виде схемы устройства, в состав которого входит дискриминатор

с изменяющимся во времени коэффициентом усиления. Учитывая, что в заданной задаче модель наблюдаемого сигнала имеет вид (4.36), оценка $\hat{\lambda}_{k-1}$ на $(k-1)$ -м шаге является оценкой предсказания для величины y_k , т. е. $\hat{\lambda}_{k-1} = \hat{y}_{k/k-1}$.

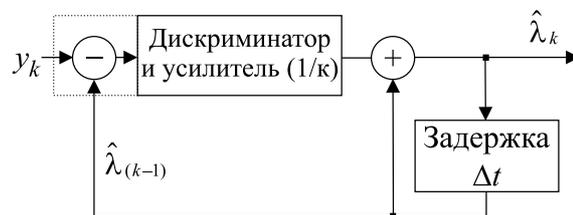


Рис. 4.3 – Структурная схема последовательного алгоритма оценки постоянной величины

Рассмотренный нами частный пример позволяет сформулировать следующие общие закономерности теории оценок:

1. Байесовские оценки параметров по максимуму апостериорной ПРВ $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$ и максимально правдоподобные оценки сближаются по мере уменьшения априорной информации о параметре.
2. Условные байесовские оценки (при фиксированном значении неизвестного параметра) имеют смещение, которое уменьшается при увеличении объема выборки.
3. Оценки параметров по методу наименьших квадратов являются несмещенными, если аддитивная помеха имеет нулевое среднее значение.
4. Оценки по методу наименьших квадратов при соответствующем выборе матрицы весовых коэффициентов ($\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$) в линейных по параметрам моделях наблюдений с аддитивной гауссовой помехой являются строго оптимальными и обеспечивают минимум дисперсий оценок.

4.5 Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы

В пп. 4.2.1 отмечалась общность задач различения гипотез и оценки параметров. Оптимальная процедура обработки наблюдаемого сигнала $y(t)$ в задаче различения (обнаружения) сигналов предполагает образование статистики в виде отношения правдоподобия $L(\mathbf{y}) = W(\mathbf{y}/H_1)/W(\mathbf{y}/H_0)$ и функции правдоподобия $L(\lambda) = W(\mathbf{y}/\lambda)$ в задаче оценки параметра.

Пусть гипотеза H_1 связана с наличием полезного сигнала $s(t, \lambda)$, а H_0 — с его отсутствием. Поскольку $W(\mathbf{y}/H_0)$ теперь от λ не зависит и $W(\mathbf{y}/H_1) \equiv W(\mathbf{y}/\lambda)$, то отношение правдоподобия и функция правдоподобия совпадают с точностью до постоянного множителя, не зависящего от λ . Этот факт позволяет при решении задач оценки параметров сигнала использовать результаты, полученные в п. 3.6.

Допустим, на интервале времени $[0; T]$ наблюдается сумма $y(t) = s(t, \lambda) + n(t)$ сигнала $s(t, \lambda)$, известного с точностью до постоянного параметра λ и гауссова

белого шума $n(t)$. Используя (3.47) при $s_0(t) = 0$ и полагая параметр λ неэнергетическим, представим функционал правдоподобия (ФП) параметра λ в виде

$$L(\lambda) = \text{const} \cdot \exp[z(\lambda)],$$

где

$$z(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s(t, \lambda) dt + C \quad (4.50)$$

логарифм ФП. В дальнейшем всегда постоянная C как несущественная не участвует в записи $z(\lambda)$.

Формирование максимально правдоподобной оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ предполагает определение λ , при котором (4.50) имеет глобальный максимум. Эта оценка, если она существует, является корнем уравнения правдоподобия:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} [z(\lambda)] \right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{\text{МП}}} = 0. \quad (4.51)$$

Аппаратное решение уравнения (4.51) можно реализовать различными способами. Первый из них предполагает фиксацию (запоминание) принятого сигнала $y(t)$ с последующим расчетом $z(\lambda)$ для заданного множества значений $\{\lambda_i\}$, где $i = 1, \dots, M$ и $\lambda_i \in [\lambda_{\text{min}}; \lambda_{\text{max}}]$. В качестве оценки выбирается $\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \arg \left(\max_{i \in 1, \dots, M} z(\lambda_i) \right)$, т. е. одно из M значений λ_i , при котором ФП имеет наибольшую величину. Данный способ связан с большими затратами времени и практически не применяется.

Второй способ реализуется в многоканальном (параллельном) вычислителе, структура которого показана на рисунке 4.4. Оптимальный измеритель состоит из генератора сетки M опорных сигналов и M идентичных каналов, в каждом из которых формируется логарифм ФП для некоторого значения параметра λ_i . В решающем устройстве происходит сравнение множества $\{z(\lambda_i)\}$ и выбор номера канала с наибольшим значением уровня входного сигнала. Оценка $\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \arg \left[\max_{\lambda_i} z(\lambda_i) \right]$. Количество каналов, очевидно, оказывает влияние на точность измерения параметра λ .



.....
 Следует отметить, что в структуре оптимального измерителя (рис. 4.4), подобно оптимальному различителю (см. п. 3.6), реализуется вычисление *корреляционных интегралов*.

В п. 3.2 при рассмотрении преобразований сигналов в согласованном фильтре было показано, что они совпадают с операцией формирования корреляционного интеграла. Таким образом, и в данном случае оптимальный измеритель корреляционного типа может быть выполнен на основе применения, в общем случае, системы СФ.

Наконец, существует косвенный метод получения оценки с использованием дискриминаторов. При этом предполагается, что известно опорное значение оцениваемого параметра $\lambda_{\text{оп}}$, попадающее в область сигнального выброса ФП. Представим логарифм ФП (4.50) рядом Тейлора в окрестности точки $\lambda_{\text{оп}}$:

$$z(\lambda) \approx z(\lambda_{\text{оп}}) + \left. \frac{d}{d\lambda} z(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_{\text{оп}}} \cdot (\lambda - \lambda_{\text{оп}}) + \left. \frac{d^2}{2 d\lambda^2} z(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_{\text{оп}}} \cdot (\lambda - \lambda_{\text{оп}})^2.$$

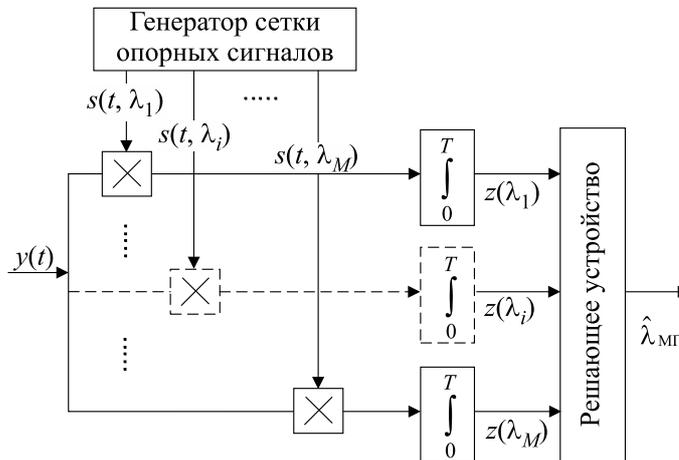


Рис. 4.4 – Общая структурная схема устройства формирования МП оценки параметра известного сигнала

Обозначим производные логарифма ФП в точке $\lambda_{\text{оп}}$ символами:

$$A_{\text{оп}} = \frac{d}{d\lambda} z(\lambda_{\text{оп}}) \text{ и } B_{\text{оп}} = \frac{d^2}{d\lambda^2} z(\lambda_{\text{оп}}). \tag{4.52}$$

Подставим (4.52) в (4.51) и запишем уравнение правдоподобия:

$$A_{\text{оп}} + B_{\text{оп}}(\hat{\lambda}_{\text{МП}} - \lambda_{\text{оп}}) = 0,$$

из которого следует выражение для оптимальной оценки в виде

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \lambda_{\text{оп}} - \frac{A_{\text{оп}}}{B_{\text{оп}}}. \tag{4.53}$$

Структурная схема оптимального дискриминатора, построенного в соответствии с уравнением (4.53), приведена на рисунке 4.5. Первый (верхний) канал оптимального дискриминатора формирует сигнал рассогласования, а второй — регулирует коэффициент усиления в зависимости от мощности сигнала и помехи.



.....
 Первый канал называют дискриминатором, а второй — блоком точности.

Основное применение дискриминаторы находят в схемах следящих измерителей. Значение опорного параметра обычно формируется в блоке поиска.

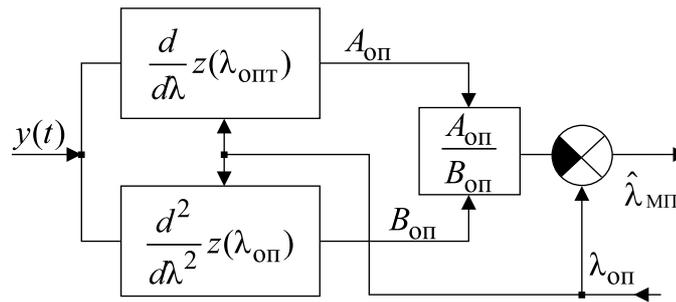


Рис. 4.5 – Структурная схема оптимального дискриминатора

4.6 Оптимальная оценка амплитуды детерминированного сигнала при наличии белого гауссова шума

Рассмотрим задачу оценки амплитуды a радиоимпульса известной формы $s(t; a) = a \cdot s_1(t)$, поступающего в сумме с гауссовым белым шумом $n(t)$ на вход приемного устройства — измерителя. Сигнал на входе приемника:

$$y(t) = as_1(t) + n(t) = aS_n(t) \cos [\omega t + \Phi(t) + \varphi] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.54)$$

где $S_n(t)$ — функция, определяющая форму нормированной огибающей; a — «амплитуда» сигнала — максимальное значение функции $aS_n(t)$ на интервале наблюдения; ω — несущая частота; $\Phi(t)$ — закон ФМ; φ — начальная фаза. Считаем, что все параметры сигнала (4.54), исключая a , известны.

Запишем на основании (3.47) функционал правдоподобия энергетического параметра a . В данном случае $E_{s0} = 0$; $s_0(t) = 0$ и в итоге имеем:

$$L(\lambda) = \exp\left(\frac{-E_s}{N_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)as_1(t) dt\right), \quad (4.55)$$

где $E_s = a^2 \int_0^T s_1^2(t) dt = a^2 E_1$ — энергия сигнала; E_1 — энергия весовой функции $s_1(t)$.

Уравнение правдоподобия принимает следующий вид:

$$\frac{d}{da^*} [\ln L(a^*)] = -\frac{2a^* E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s_1(t) dt = 0.$$

Корень уравнения — МП оценка параметра a :

$$a_{МП}^* = \frac{1}{E_1} \int_0^T y(t)s_1(t) dt. \quad (4.56)$$

Соотношение (4.56) определяет структуру оптимального измерителя, которая показана на рисунке 4.6. Она состоит из генератора весовой функции $s_1(t)$, интегратора за время обработки ($0 \div T$) и масштабного усилителя с коэффициентом $(1/E_1)$.



Рис. 4.6 – Структура оптимального измерителя амплитуды полностью известного радиоимпульса

Определим среднее и дисперсию полученной оценки. Полагая истинное значение амплитуды равным a_0 , найдем:

$$\mathbf{M}[a_{\text{МП}}^*] = \frac{1}{E_1} \int_0^T [a_0 s_1(t) + \mathbf{M}[n(t)]] s_1(t) dt = a_0,$$

т. е. оценка $a_{\text{МП}}^*$ несмещенная.

Для определения дисперсии оценки $D_{a_{\text{МП}}^*}$ положим максимальное значение нормированной огибающей $\max[S_n(t)] = 1$ и представим энергию весовой функции согласно пп. 1.3.3 в виде

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T S_n^2(t) dt \approx \frac{1}{2} \tau_{\text{И}},$$

где $\tau_{\text{И}}$ — величина, равная в данном случае длительности радиосигнала:

$$\tau_{\text{И}} = \int_0^T S_n^2(t) dt.$$

В итоге для дисперсии оценки получаем соотношение [9]:

$$D_{a_{\text{МП}}^*} = \mathbf{M}[(a_{\text{МП}}^* - a_0)^2] = \int_0^T \int_0^T K_n(t_2 - t_1) s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{\tau_{\text{И}}}. \quad (4.57)$$



Выводы

Таким образом, дисперсия оценки амплитуды радиосигнала с известными остальными параметрами пропорциональна интенсивности белого шума и обратно пропорциональна длительности радиоимпульса.

4.7 Статистические характеристики оценок максимума правдоподобия

Вычисление дисперсии оптимальных оценок при произвольном отношении сигнал/шум часто является весьма сложной задачей. Практический же интерес представляет режим работы измерительной РТС, в котором обеспечивается достаточно высокая точность. В противном случае измерения просто теряют смысл. В большинстве случаев СКО параметра не превышает 5–10% от измеряемой величины. Высокая точность в оптимальных РТС обеспечивается при достаточно большом отношении энергии сигнала к спектральной плотности мощности белого шума: обычно $q_0 = \sqrt{(2E_s/N_0)} \geq (3 \div 5)$.

При больших величинах q_0 для определения статистических характеристик оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ успешно применяется метод малого параметра, под которым понимают величину $\varepsilon = q_0^{-1}$ [9]. Рассмотрим кратко этот метод, полагая параметр λ неэнергетическим.

Используя (3.47) и замечание из п. 4.3, представим функционал правдоподобия (ФП) параметра λ в виде

$$L(\lambda) = \text{const} \cdot \exp [z(\lambda)],$$

где

$$\begin{aligned} z(\lambda) = \ln [L(\lambda)] &= \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)s(t; \lambda) dt = z_s(\lambda; \lambda_0) + z_n(\lambda) = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t; \lambda_0)s(t; \lambda) dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t)s(t; \lambda) dt, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где $z_s(\lambda; \lambda_0)$ и $z_n(\lambda)$ — сигнальная и шумовая составляющие логарифма функционала правдоподобия (ЛФП); λ_0 — истинное значение параметра. Отметим, что постоянная величина в (4.58), как и ранее, отброшена, поскольку она не влияет на конечный результат.

При полезном входном сигнале $s(t; \lambda_0)$ известной формы сигнальная функция $z_s(\lambda; \lambda_0)$ является неслучайной. По существу, $z_s(\lambda; \lambda_0)$ совпадает с сигнальной функцией, которая была введена в первой главе (см. (1.10), (1.11)) при изучении меры различия сигналов. В соответствии с логикой введения этой функции она имеет максимум при $\lambda = \lambda_0$.

Случайный характер ФП $L(\lambda)$ обусловлен слагаемым $z_n(\lambda)$, для которого согласно (4.58) среднее значение $\overline{z_n(\lambda)} = 0$. По этой причине положение максимума функции $z(\lambda)$, т. е. корень уравнения правдоподобия и, соответственно, оценка $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$, оказываются случайными (изменяются при различных реализациях шума на интервале наблюдения). Очевидно, что в первом приближении можно положить:

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \lambda_0 + \varepsilon \tilde{\lambda}, \quad (4.59)$$

где $\tilde{\lambda}$ — случайная поправка, обусловленная наличием шума. Видно, что влияние $\tilde{\lambda}$ на оценку при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю, т. е. при $q_0 \rightarrow \infty$ имеем $z_n \rightarrow 0$ и $\hat{\lambda}_{\text{МП}} \rightarrow \lambda_0$.

Метод малого параметра [9] предполагает введение функции:

$$\Psi(\lambda) = \varepsilon^2 \frac{d}{d\lambda} z(\lambda),$$

которая определяет скорость изменения логарифма ФП по параметру λ и явно зависит от малого параметра ε .

На рисунке 4.7 условно показаны логарифм ФП и его сигнальная часть. Представим функцию $\Psi(\lambda)$ в окрестности истинного значения λ_0 в виде ряда Тейлора. Тогда при учете в разложении только линейной части ряда значение $\Psi(\hat{\lambda}_{МП}) = 0$ можно представить в виде

$$\Psi(\hat{\lambda}_{МП}) = \Psi(\lambda_0) + \frac{d\Psi(\lambda_0)}{d\lambda} (\hat{\lambda}_{МП} - \lambda_0) = 0. \quad (4.60)$$

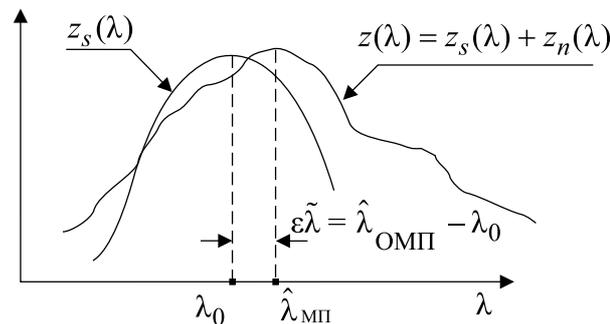


Рис. 4.7 – Логарифм ФП $z(\lambda)$ и его сигнальная функция $z_s(\lambda)$

После введения соответствующих нормировок для $z_s(\lambda; \lambda_0)$ и $z_n(\lambda)$ из (4.60) с учетом (4.59) получаем алгебраическое уравнение для случайной поправки $\tilde{\lambda}$ в виде

$$B\tilde{\lambda} = -A, \text{ где } B = \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} [\check{z}_s(\lambda; \lambda_0)] \right|_{\lambda=\lambda_0}; \quad A = \left. \frac{d}{d\lambda} [\check{z}_n(\lambda)] \right|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (4.61)$$

Величина B определяет кривизну нормированной сигнальной функции:

$$\check{z}_s(\lambda; \lambda_0) = \frac{1}{q_0^2} z_s(\lambda; \lambda_0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t; \lambda_0) s(t; \lambda) dt \quad (4.62)$$

в точке λ_0 .

Величина A является случайной и определяет (в первом приближении) нормированное приращение логарифма ФП, обусловленное влиянием шума. Нормированная шумовая функция $\check{z}_n(\lambda) = z_n(\lambda)/q_0$ и ее среднее $\overline{\check{z}_n} = 0$.



.....
 Для определения среднего и дисперсии оценки $\hat{\lambda}_{МП}$ найдем соответствующие характеристики поправки $\tilde{\lambda}$. Согласно (4.61) $\overline{A} = 0$, так как $\overline{\check{z}_n} = 0$. Таким образом, в первом приближении при большом отношении $2E_s/N_0$ максимально правдоподобная оценка параметра является несмещенной.

Непосредственной проверкой можно показать, что корреляционная функция $\check{z}_n(\lambda_1)\check{z}_n(\lambda_2) = \check{z}_s(\lambda_1; \lambda_2)$. Таким образом, величина дисперсии $D_A = \overline{A^2}$ определяется

в данном случае значением второй производной от нормированной сигнальной функции и имеет вид:

$$D_A = - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} [\check{z}_s(\lambda_1; \lambda_2)] \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0} . \quad (4.63)$$

В (4.63) знак «минус» обусловлен тем, что вторая производная от сигнальной функции в максимуме отрицательна. Окончательно с учетом (4.61), (4.63) и (4.59) для дисперсии МП оценки неэнергетического параметра получим:

$$D[\hat{\lambda}_{МП}] = \frac{\varepsilon^2 D_A}{B^2} = - \frac{1}{(2E_s/N_0) [\partial^2 \check{z}_s(\lambda; \lambda_0) / \partial \lambda^2] \Big|_{\lambda_0}} . \quad (4.64)$$



Выводы

Таким образом, при большом отношении $q_0^2 = 2E_s/N_0$ дисперсия МП оценки параметра λ обратно пропорциональна величине этого отношения и значению кривизны автокорреляционной функции регулярного сигнала по параметру λ в точке λ_0 , т. е. в максимуме АКФ.

Применение формулы (4.64) для расчета дисперсии максимально правдоподобной оценки параметра сигнала иногда может дать результат, достижение которого в реальном измерителе практически теряет смысл. В частности, подобная ситуация возникает при оценке времени задержки τ_0 ВЧ радиоимпульса $s(t - \tau_0)$ с полностью известными параметрами. Рассмотрим подробнее суть вопроса.

Как следует из п. 4.5, формирование оценки $\hat{\tau}_{МП}$ предполагает наличие в устройстве обработки генератора опорного сигнала $s(t - \tau)$. Поскольку фактически необходимо определить взаимное положение на оси времени двух сигналов, то момент начала отсчета времени при этом не имеет значения и можно полагать $\tau_0 = 0$.

На основе (4.58) с учетом (4.62) нормированная сигнальная функция в задаче оценки временной задержки сигнала имеет вид:

$$\check{z}_s(\tau; \tau_0 = 0) = (1/E_s) \int_0^T s(t)s(t - \tau) d\tau,$$

который полностью совпадает с выражением (1.16) для временной автокорреляционной функции $k(\tau)$ ВЧ сигнала $s(t)$. В п. 3.2 было показано, что сигнальная часть отклика на выходе согласованного фильтра также повторяет по форме АКФ $k(\tau)$. Вид этой функции для радиоимпульсов с прямоугольной и гауссовой огибающей показан на рисунках 1.10 и 1.11.



.....
 Формула (4.64) для дисперсии МП оценки параметра утверждает, что дисперсия обратно пропорциональна кривизне функции $k(\tau)$ в точке $\tau = 0$. В случае узкополосных ВЧ сигналов, когда несущая ω_0 значительно превышает полосу $\Delta\omega$ и огибающая $K(\tau)$ (см. (1.17)) практически постоянна на интервале времени, равном периоду ВЧ сигнала, величина $k''(\tau = 0)$ фактически определяется множителем $\cos(\omega_0\tau)$ и равна $-\omega_0^2$. Таким образом, для частот, превышающих сотни мегагерц и более, можно, казалось бы, достигнуть точности измерения времени задержки порядка единиц наносекунд. Однако это, как правило, не возможно. Причиной тому является наличие *близко расположенных соседних пиков сигнальной функции*. Они не позволяют реализовать надежное (однозначное) измерение временной задержки.

Выход из положения состоит в том, чтобы оценку $\hat{\tau}_{МП}$ получать по положению максимума огибающей $K(\tau)$. Необходимость использования огибающей сигнальной функции $z_s(\tau)$ возникает и в том случае, когда полезный сигнал содержит неизвестную начальную фазу. Для выделения огибающей $K(\tau)$ в оптимальном измерителе используется амплитудный детектор. В случае, когда функция $z_s(\tau)$ обрывается с помощью согласованного фильтра, детектор подключается к его выходу.

Таким образом, при расчете дисперсии $D[\hat{\tau}_{МП}]$ следует в (4.64) использовать вторую производную $K''(\tau = 0)$. Определим ее величину через спектральную функцию комплексной огибающей $\dot{G}(\omega)$.

Для этого предварительно покажем справедливость соотношения

$$2E_s \cdot \dot{K}(\tau) \stackrel{F^{-1}}{\underset{F}{\rightleftharpoons}} |\dot{G}(\omega)|^2.$$

Запишем преобразование Фурье по переменной t от произведения функций $\dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t - \tau)$, рассматривая τ в качестве параметра.

В итоге получим $\dot{\Gamma}(\omega; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{-i\omega t} dt$ и отметим, что согласно (1.17)

$2E_s \cdot \dot{K}(\tau) = \dot{\Gamma}(0; \tau)$. В соответствии со свойствами преобразования Фурье справедливости соотношения:

$$\dot{S}(t) \stackrel{F^{-1}}{\underset{F}{\rightleftharpoons}} \dot{G}(\omega); \quad \dot{S}^*(t) \stackrel{F^{-1}}{\underset{F}{\rightleftharpoons}} \dot{G}^*(-\omega); \quad \dot{S}^*(t - \tau) \stackrel{F^{-1}}{\underset{F}{\rightleftharpoons}} \dot{G}^*(-\omega) e^{-i\omega\tau}.$$

Известно также, что Фурье-образ произведения двух функций времени является сверткой Фурье-образов этих функций. Таким образом, для функции $\dot{\Gamma}(\omega; \tau)$ запишем интеграл свертки в виде

$$\dot{\Gamma}(\omega; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{G}^*(x - \omega) e^{i(x-\omega)\tau} dx,$$

из которого при $\omega = 0$ непосредственно следует:

$$\dot{\Gamma}(0; \tau) = \dot{K}(\tau) = \frac{1}{2E_s} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Выполнив вычисление второй производной от этого выражения по τ и учитывая (1.21), получим:

$$K''(\tau = 0) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega = -\Delta\Omega^2,$$

где $\Delta\Omega$ — среднеквадратичная полоса частот радиосигнала, равная среднеквадратичной ширине энергетической спектральной плотности $|\dot{G}(\omega)|^2$ комплексной огибающей. Напомним, что точка начала отсчета частоты ($\omega = 0$) совмещена при этом с центром масс нормированной функции (1.20).



Выводы

В итоге для дисперсии оценки времени задержки получим:

$$D[\hat{\tau}_{МП}] = \frac{1}{(2E_s/N_0) \cdot \Delta\Omega^2}. \quad (4.65)$$

В радиолокационных и радионавигационных системах измерение времени задержки сигнала на входе приемника относительно сигнала излученного передатчиком позволяет определить дальность до объекта. Формула (4.65) позволяет вычислить дисперсию оптимальной оценки дальности, связанную с влиянием аддитивного собственного шума приемника.

4.8 Оптимальная оценка начальной фазы радиоимпульса

Определим оптимальный алгоритм приемника — измерителя начальной фазы φ радиоимпульса вида (4.54). На основании (4.58) запишем уравнение правдоподобия для неэнергетического параметра φ :

$$\left. \frac{d}{d\varphi} \ln [L(\varphi)] \right|_{\hat{\varphi}_{МП}} = \left. \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) a S(t) \cos [\omega t + \Phi(t) + \varphi] dt \right] \right|_{\hat{\varphi}_{МП}} = 0.$$

Для оценки $\hat{\varphi}_{МП}$ получаем уравнение:

$$\int_0^T y(t) S(t) \sin [\omega t + \Phi(t) + \hat{\varphi}_{МП}] dt = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \sin(\hat{\varphi}_{\text{МП}}) \int_0^T y(t)S(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] dt + \\ & + \cos(\hat{\varphi}_{\text{МП}}) \int_0^T y(t)S(t) \sin[\omega t + \Phi(t)] dt = 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Из (4.66) окончательно получаем:

$$\hat{\varphi}_{\text{МП}} = -\text{arctg} \left\{ \frac{\int_0^T y(t)S(t) \sin[\omega t + \Phi(t)] dt}{\int_0^T y(t)S(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] dt} \right\}. \quad (4.67)$$

Из (4.67) следует структурная схема оптимального устройства формирования оценки $\hat{\varphi}_{\text{МП}}$. На рисунке 4.8 она приведена для случая гармонического радиосигнала, когда нет амплитудной и фазовой модуляции ($S(t) = S_0$ и $\Phi(t) = 0$). По своей структуре данный приемник — измеритель, как и в п. 4.5, является измерителем корреляционного типа.

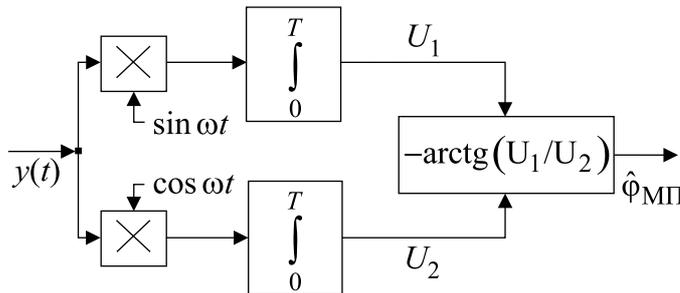


Рис. 4.8 – Оптимальный измеритель начальной фазы гармонического радиосигнала

Используя соотношение (4.64), вычислим дисперсию оценки $D_{\hat{\varphi}_{\text{МП}}}$. С этой целью, учитывая (4.58), запишем нормированную сигнальную функцию (4.62):

$$\begin{aligned} \check{z}_s(\lambda; \lambda_0) &= \frac{z_s(\lambda; \lambda_0)}{q_0^2} = \frac{2}{N_0 q_0^2} \int_0^T a^2 S^2(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi_0] dt \simeq \\ &\simeq \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в (4.64) и в итоге получим:

$$D_{\hat{\varphi}_{\text{МП}}} = \frac{1}{q_0^2}. \quad (4.68)$$



Выводы

Таким образом, дисперсия МП оценки начальной фазы радиосигнала, поступающего на вход приемника в смеси белым гауссовским шумом, обратно пропорциональна отношению с/ш по мощности и не зависит от вида амплитудной и фазовой модуляции радиоимпульса.

Напомним, что величина $q_0^2 = 2E_s/N_0$ соответствует максимальному отношению мощностей сигнала и шума на выходе согласованного с полезным сигналом фильтра.

4.9 Информация по Фишеру. Неравенство Крамера — Рао

Нельзя не обратить внимания, что определение МП оценок параметров сигнала и анализ их точности в наших выкладках всякий раз приводили к необходимости рассмотрения логарифма функционала правдоподобия (ЛФП) $\ln [L(\lambda)] = \ln [W(\mathbf{y}/\lambda)]$. Можно предположить, что этот факт обусловлен гауссовым видом ПРВ аддитивного шума. Однако это не так, и суть указанного совпадения несколько глубже. Она связана с понятием *количества информации* о неизвестном параметре λ , которое содержится в случайной выборке \mathbf{y} .

Это понятие играет фундаментальную роль и было введено в теории оценок Р. А. Фишером.

Рассмотрим понятие количества информации. Будем полагать, что выборка образована совокупностью $\{y_i\}$ *n* независимых случайных величин с одинаковой ПРВ. Таким образом, условная ПРВ выборки и она же функция правдоподобия параметра λ имеет вид:

$$L(\lambda; \mathbf{y}) = W(\mathbf{y}/\lambda) = \prod_{i=1}^n W(y_i/\lambda). \quad (4.69)$$

Причем в силу условия нормировки ПРВ

$$\int_Y L(\lambda; \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1. \quad (4.70)$$

Последующие выкладки и результаты связаны с предположением о *регулярности* ФП (см. также п. 4.2.2). Они состоят в том, что $L(\lambda; \mathbf{y})$, а также ее первая и вторая производные по параметру λ должны быть непрерывны по λ равномерно относительно \mathbf{y} и ФП должна допускать дифференцирование под знаком интеграла в (4.70). Следует отметить, что эти требования выполняются для многих важных вероятностных моделей, встречающихся в практических задачах, в частности для ПРВ Гаусса и Пуассона, а также биномиального, гамма-распределения вероятностей и др.

Рассмотрим случайную величину

$$v(\mathbf{y}; \lambda) = \frac{\partial \ln [L(\lambda; \mathbf{y})]}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln [W(y_i/\lambda)]}{\partial \lambda}, \quad (4.71)$$

которую называют *вкладом* (или *функцией вклада*) выборки \mathbf{y} [5]. Каждое i -е слагаемое в правой части (4.71) определяет *вклад i -го наблюдения*, $i = 1, \dots, n$. Будем полагать, что случайная величина v имеет конечный второй момент, т. е. $\mathbf{M} [v^2(\mathbf{y}; \lambda)] < \infty$ для всех $\lambda \in \Lambda$, где Λ — интервал возможных значений неизвестного параметра. При выполнении условий регулярности ФП путем дифференцирования тождества (4.70) по параметру λ найдем:

$$0 = \int_Y \frac{\partial L(\lambda; \mathbf{y})}{\partial \lambda} d\mathbf{y} = \int_Y \frac{\partial [\ln L(\lambda; \mathbf{y})]}{\partial \lambda} W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y} = \mathbf{M} [v(\mathbf{y}; \lambda)]. \quad (4.72)$$



Выводы

Таким образом, для регулярных моделей выборочных данных среднее значение *вклада* — математическое ожидание производной от ЛФП по λ , равно нулю.



Количество *информации по Фишеру о параметре* λ , содержащееся в случайной выборке \mathbf{y} объема n определяется соотношением:

$$i_n(\lambda) = \mathbf{M} [v^2(\mathbf{y}; \lambda)] = \mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial \ln [W(\mathbf{y}/\lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \quad (4.73)$$

или с учетом (4.69) для независимой выборки объема n :

$$i_n(\lambda) = \mathbf{M} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [W(y_i/\lambda)] \right)^2 \right].$$

Величина $i_{n=1} = i_1$ называется *количеством (фишеровской) информации, содержащимся в одном наблюдении*. Из (4.73) для нее получим:

$$i_1(\lambda) = \mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial \ln [W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right]. \quad (4.74)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что общее количество информации i_n , содержащееся в независимой выборке \mathbf{y} , есть сумма количеств информации i_i , содержащихся в ее отдельных элементах y_i . Почему так получается? Вообще говоря, это не противоречит здравому смыслу — должна же накапливаться (суммироваться) информация по мере увеличения наблюдений, содержащих ее. Но почему «придуманные» формулы подтверждают это? Ответ почти очевиден. Причин здесь две.

Во-первых, вероятность совместного появления выборки $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, состоящей из независимых элементов y_i , в соответствии с правилами теории вероятностей равна произведению вероятностей. Во-вторых, Р. А. Фишер, как и читатель, не смог бы предложить какую-либо простую функцию, кроме логарифмической, которая обладает свойством «превращать произведения в суммы», т. е. $\ln[x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_i \cdot \dots \cdot x_n]$. Именно поэтому понятие информации с необходимостью оперирует логарифмом функции правдоподобия. Вид распределения вероятностей выборки при этом не имеет никакого значения. Отсюда, конечно же, следует важный «житейский вывод» о том, что если «некто» решил добыть достоверную информацию о чем-либо (или о ком-либо), то использовать для этого следует независимые источники информации. В противном случае велик риск того, что придется пожинать плоды субъективизма. В частности, по причине статистической зависимости элементов выборки будет получена недостоверная и далекая от истинной картина об объекте интереса. Именно к этому случаю относится расхожее высказывание: «есть истина, есть ложь и есть статистика». Однако к научной статистике оно не имеет равным счетом никакого отношения.

В практических расчетах удобно использовать для $i_1(\lambda)$ эквивалентное представление. Оно получается после повторного дифференцирования (4.72) по λ и имеет вид:

$$i_1(\lambda) = -M \left[\left(\frac{\partial^2 \ln [W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda^2} \right) \right]. \quad (4.75)$$

Из соотношений (4.73), (4.74) следует $i_n(\lambda) = n \cdot i_1(\lambda)$, т. е. общее количество информации растет пропорционально объему выборки в случае ее независимости.

Рассмотрим пример вычисления функции $i_1(\lambda)$. Для этого обратимся к задаче из п. 4.4, где выборочные значения $y_i = \lambda + n_i$. Шум имеет гауссовскую ПРВ — $N(0; \sigma_n^2)$ и величина y_i также является гауссовой. Таким образом, в этом случае вклад одного наблюдения

$$v(y_1; \lambda) = \frac{\partial \ln [W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda} = \frac{y_1 - \lambda}{\sigma_n^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln [W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\sigma_n^2}.$$

Отсюда по формуле (4.75) получаем $i_1(a) = 1/\sigma_n^2$, что не противоречит здравому смыслу. Действительно, чем меньше дисперсия шума, тем большую информацию несет случайное выборочное наблюдение y_i об оцениваемом параметре a .



.....

В статистической теории оценок существует теорема [3], которая утверждает, что при выполнении условий регулярности для ФП и существовании $i_n(\lambda)$, ПРВ случайной величины $T = \sqrt{n}(\hat{\lambda}_{МП} - \lambda)$, где $\hat{\lambda}_{МП}$ — единственный корень уравнения правдоподобия, сходится (по мере увеличения объема выборки n) к нормальному распределению с нулевым средним значением и дисперсией:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{M \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [W(y_i/\lambda)] \right)^2 \right]} = \frac{1}{i_1}. \quad (4.76)$$

.....

Это означает, что при больших n оценка МП является несмещенной, т. е. $M[\hat{\lambda}_{МП}] = \lambda$ и ее дисперсия равна:

$$D[\hat{\lambda}_{МП}] = \sigma_{\lambda_{МП}}^2 = \frac{1}{n \cdot i_1}. \quad (4.77)$$

Подчеркнем, что при *любых* видах ПРВ $W(y/\lambda) = \prod_{i=1}^n W(y_i/\lambda)$, удовлетворяющих условиям регулярности, асимптотически выполняется (4.76). Это поясняет и оправдывает название «количество информации», введенное Р. Фишером для величины, находящейся в знаменателе формулы (4.77).

Рассмотрим без доказательства известное в теории оценок и важное для практических приложений неравенство Крамера — Рао.



.....
Оно утверждает, что для дисперсии несмещенной оценки $\hat{\lambda}$ параметра λ при произвольном объеме выборки n выполняется соотношение:

$$\sigma_{\hat{\lambda}}^2 \geq [i_n(\lambda)]^{-1}, \text{ где для независимой выборки } i_n(\lambda) = n \cdot i_1(\lambda).$$

Или в развернутой форме:

$$\sigma_{\hat{\lambda}}^2 \geq \frac{1}{M \left[\left(\frac{\partial \ln[W(y/\lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right]} \quad (4.78)$$

При статистически независимой выборке:

$$\sigma_{\hat{\lambda}}^2 \geq \frac{1}{n \cdot M \left[\left(\frac{\partial^2 \ln[W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda^2} \right) \right]}$$

Неравенство (4.78) определяет нижнюю границу дисперсий любых несмещенных оценок параметра λ .

.....

Условием его справедливости является только наличие свойств регулярности у функции $W(y/\lambda)$ и независимость выборки.

С неравенством (4.78) связано понятие *эффективности оценки*.



.....
Несмещенная оценка параметра λ называется эффективной, если ее выборочная дисперсия равна границе Крамера — Рао.

.....

Соотношения (4.76), (4.77) утверждают, что оценка МП асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) несмещенная и эффективная.

Значимость результата (4.78) для практики разработки измерительных РТС состоит в следующем. Инженер в конкретной задаче может использовать различные алгоритмы обработки сигналов и далеко не всегда их привлекательность связана с оптимальностью (в смысле дисперсии ошибки). Возможно, они более простые в технической реализации или, наконец, просто интуитивно ясные по структуре. Однако ответ на вопрос о том, исчерпаны ли ресурсы измерительной системы по точности, реализованы ли ее предельные возможности, очень часто важен и многое определяет.

Допустим, что выбранный вариант построения системы управления воздушным движением обеспечивает СКО ошибки вывода самолета на полосу посадки 100 м, в то время как предельно достижимая (потенциальная) СКО при тех же свойствах входных сигналов могла бы быть 15 м. Очевидно, ресурс системы по точности далеко не исчерпан. Последствия применения системы посадки в первом варианте связаны с риском при наличии низкой облачности, поскольку пилот, в случае непопадания в зону посадки, ограничен в выполнении маневра. Конечно, возможно расширение полосы, но это практически часто неприемлемо, например, если аэродром — авианосец.



Контрольные вопросы по главе 4

1. Изложите в общем виде постановку задачи в статистической теории оценивания.
2. Что есть смещение оценки неизвестного параметра сигнала?
3. Запишите выражение для среднеквадратической ошибки параметра сигнала.
4. Поясните свойство состоятельности оценок.
5. Изложите постановку задачи оценки параметра сигнала в байесовской теории оценивания.
6. Какой смысл имеет функция потерь в байесовской теории оценивания и каковы основные типы этих функций?
7. Что есть байесовский риск в теории оценивания?
8. Запишите в общей форме выражение байесовского риска.
9. Каков содержательный смысл априорной ПРВ $W(\lambda)$ и апостериорной ПРВ $W(\lambda/y_1, y_2, \dots, y_n)$ оцениваемого параметра λ ?
10. Запишите в общей форме выражение байесовской оценки при квадратичной функции потерь.
11. Как изменяется вид байесовской оценки при назначении простой функции потерь?
12. Что есть функция правдоподобия и оценка параметра по максимуму правдоподобия?

13. Запишите выражение, связывающее апостериорную ПРВ оцениваемого параметра и функцию правдоподобия; запишите в общем виде уравнение правдоподобия.
14. Запишите в общей форме математическую модель наблюдаемого сигнала, которая содержит аддитивную помеху и является линейной по отношению к одному (двум, трем) неизвестным параметрам.
15. Каков смысл и вид целевой функции при определении оценок по методу наименьших квадратов (МНК)?
16. В чем особенность оператора, определяющего оценку $\lambda_{\text{МНК}}(\mathbf{y})$ в случае линейной по параметрам модели наблюдаемого сигнала?
17. Выполните необходимые преобразования и получите выражение для оценки постоянного параметра методом наименьших квадратов.
18. Каково условие несмещенности оценок по МНК?
19. Какие величины определяют СКО оценки $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}(\mathbf{y})$ постоянного параметра λ , если выборка состоит из n некоррелированных отсчетов наблюдаемого сигнала $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$?
20. Изобразите в общем виде структуру оптимального измерителя неизвестного параметра полезного сигнала, поступающего на вход приемника-измерителя в смеси с аддитивным гауссовским шумом и поясните функции отдельных элементов измерителя.
21. Запишите выражение для дисперсии оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ неизвестного постоянного параметра λ сигнала, поступающего в смеси с белым гауссовым шумом на вход приемника-измерителя и перечислите величины, которые определяют ее значение.
22. Запишите в общей форме функцию правдоподобия параметра λ для случая выборки, состоящей из n статистически независимых отсчетов y_1, y_2, \dots, y_n наблюдаемого сигнала $y(t)$, который есть аддитивная сумма полезного сигнала и белого гауссовского шума.
23. Что есть вклад выборки \mathbf{y} и как его определяют? Каков вклад отдельного наблюдения y_i , являющегося элементом статистически независимой выборки?
24. Как определяют количество информации по Фишеру о параметре λ , содержащееся в независимой выборке \mathbf{y} объема n ?
25. Какими свойствами обладают максимально правдоподобные оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ неизвестного параметра λ при выполнении условий регулярности для функции правдоподобия?
26. Запишите неравенство Крамера — Рао. Что определяет это неравенство?

Глава 5

РЕКУРСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ

5.1 Среднеквадратичная регрессия

Байесовская теория оценок неизвестных параметров λ , содержащихся в наблюдаемых данных y , основана на предположении о случайном характере оцениваемого параметра и наблюдаемых данных. В пп. 4.2.1 было показано, что оптимальная байесовская оценка, которая имеет наименьшую СКО, получается при обработке данных оператором условного среднего. Для векторного параметра соотношение (4.12) имеет вид:

$$\hat{\lambda}_B = M[\lambda/y] = \int \dots \int_{\mathbb{L}} \lambda \cdot W(\lambda/y) d\lambda = f(y). \quad (5.1)$$

Конкретный вид $f(y)$ полностью определяется апостериорной ПРВ $W(\lambda/y)$.



.....
*В общей теории статистики, имеющей дело с произвольными по своей природе случайными величинами, соотношение (5.1) определяет **оптимальную среднеквадратичную регрессию величины λ на величину y** (размерность этих величин здесь не имеет значения).*
.....

По существу в радиотехнических задачах выражение (5.1) определяет алгоритм работы оптимального (в смысле минимума среднего риска при квадратичной функции потерь) фильтра. Вот только раскрытие этого оператора в явной форме, удобной для реализации в реальном масштабе времени, представляет в общем случае непростую задачу. Во всяком случае, только в 1960-х гг. в основном в трудах Р. Л. Стратоновича и Р. Калмана в решении этой задачи был сделан фундамен-

тальный прорыв — получены дифференциальные и разностные уравнения, определяющие оптимальную оценку для аналоговых и дискретных систем обработки соответственно. Эти уравнения (для оценки и ковариационных моментов ошибки оценивания) в случае дискретных систем имеют рекурсивную форму и, таким образом, наилучшим способом ориентированы для реализации на ЭВМ.

В линейных задачах с гауссовскими λ и y эти результаты получены в явном виде и являются строгим решением задачи оптимальной байесовской фильтрации. В произвольном случае при негауссовских λ и (или) y или нелинейных уравнениях, определяющих их взаимосвязь, задача не имеет решения в замкнутой форме. Могут быть реализованы только квазиоптимальные процедуры обработки данных.

5.2 Линейная среднеквадратичная регрессия

Рассмотрим подробно задачу оценки параметров линейной регрессии, когда вид уравнения $\hat{\lambda} = f(y)$ принудительно задан в виде линейной функции. Прежде приведем один простой (λ и y скалярные случайные величины), но важный для дальнейших рассуждений результат. Итак, пусть Λ и Y — случайные величины. В данном случае важно различать случайную величину, обозначаемую прописной буквой, и ее конкретное значение, обозначаемое строчной буквой.

Интерес к линейным процедурам обработки обусловлен их простотой, поэтому ограничим себя этими способами формирования оценок и будем полагать, что оператор условного среднего задан в виде линейной регрессии (в общем случае она не оптимальна):

$$\Lambda_{lin}^* = f(Y) = \mathbf{M}[\Lambda/Y] = a + bY, \quad (5.2)$$

где a и b — неизвестные коэффициенты, которые определяют правило обработки — уравнение (5.2). Найдем такие a и b , при которых дисперсия ошибки окажется минимальной. Для дисперсии ошибки имеем:

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(a, b) &= \mathbf{M}\left\{\left[\Lambda - \Lambda_{lin}^*(Y)\right]^2\right\} = \mathbf{M}\left[(\Lambda - a - bY)^2\right] = \\ &= \overline{\Lambda^2} + a^2 + b^2\overline{Y^2} - 2b\overline{\Lambda \cdot Y} - 2a\overline{\Lambda} + 2ab\overline{Y}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где для краткости записи оператор статистического усреднения $\mathbf{M}[\bullet]$ записан в виде $\overline{(\bullet)}$. Будем считать, что в рамках корреляционной теории статистические свойства скалярных случайных величин Λ и Y известны, т. е. заданы их начальные, центральные и смешанные моменты до второго порядка. Напомним, что это исчерпывающая информация, если совместная ПРВ этих величин гауссовская.

Для определения оптимальных коэффициентов уравнения линейной регрессии решим систему линейных уравнений относительно переменных a и b :

$$\begin{cases} \frac{\partial D_\varepsilon(a, b)}{\partial a} = a - \overline{\Lambda} + b\overline{Y} = 0, \\ \frac{\partial D_\varepsilon(a, b)}{\partial b} = b\overline{\Lambda^2} - \overline{\Lambda \cdot Y} + a\overline{Y} = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Введем следующие обозначения и запишем известные из теории вероятностей соотношения:

$$\overline{\Lambda} = m_\lambda; \quad \overline{Y} = m_y; \quad D_\lambda = \sigma_\lambda^2 = \overline{\Lambda^2} - m_\lambda^2; \quad D_y = \sigma_y^2 = \overline{Y^2} - m_y^2; \quad (5.5)$$

$$k_{\lambda y} = \frac{1}{\sigma_{\lambda} \sigma_y} \cdot (\overline{\Lambda \cdot Y} - \overline{\Lambda} \cdot \overline{Y}) \rightarrow \overline{\Lambda \cdot Y} = K_{\lambda y} + m_{\lambda} \cdot m_y, \quad (5.6)$$

где $K_{\lambda y} = \sigma_{\lambda} \sigma_y k_{\lambda y}$ — ненормированный взаимный ковариационный момент величин Λ и Y . В итоге с учетом обозначений (5.5), (5.6) решение системы (5.4) имеет вид:

$$a_{opt lin} = m_{\lambda} - K_{\lambda y} \cdot D_y^{-1} \cdot m_y; \quad (5.7)$$

$$b_{opt lin} = K_{\lambda y} \cdot D_y^{-1}. \quad (5.8)$$

Можно строго показать, что (5.7), (5.8) действительно обеспечивают минимум величины дисперсии ошибки $D_{\varepsilon}(a, b)$.



.....
 Подставим выражения (5.7), (5.8) в (5.2) и, выполнив простые алгебраические преобразования, получим *уравнение линейной среднеквадратичной регрессии* — линейной оценки случайного информативного (интересующего потребителя) параметра Λ как функции одного случайного наблюдения Y в виде

$$\Lambda_{lin}^* = f(Y) = m_{\lambda} + K_{\lambda y} \cdot D_y^{-1} (Y - m_y). \quad (5.9)$$

.....

Уравнение (5.9) имеет здравый смысл. Пусть, в частности, Λ есть количество детей в семье и Y — средний доход на одного члена семьи. По ансамблю семей эти величины случайны. Необходимо по данным о доходе конкретной семьи $Y = y$, который она будет иметь в определенное время, дать оценку количества детей. Из уравнения (5.9) видно, что если величины Λ и Y не коррелированы ($K_{\lambda y} = 0$), то знание дохода ничего не даст при *линейном прогнозе*. В качестве *линейной оценки* следует использовать известное среднее $\lambda_{lin}^* = m_{\lambda}$ и это обеспечит минимум СКО ошибки *линейной оценки*. Если доход имеет значительное рассеяние ($D_y = \sigma_y^2 \rightarrow \infty$), то знание этой величины также не следует учитывать, так как при этом условии

$$K_{\lambda y} \cdot D_y^{-1} = \frac{k_{\lambda y} \cdot \sigma_{\lambda}}{\sigma_y} \rightarrow 0$$

и второе слагаемое в (5.9) исчезает. Во всех других случаях знание конкретного $Y = y$ позволит точнее прогнозировать $\lambda_{lin}^* = f(y)$.

Из уравнения (5.9) достаточно просто установить факт несмещенности безусловной оценки Λ_{lin}^* . Для этого следует определить статистическое среднее (среднее по ансамблю) левой и правой частей уравнения (5.9). Поскольку $\overline{Y} = m_y$, то $\overline{\Lambda_{lin}^*} = m_{\lambda}$. Дисперсия линейной оценки также следует из (5.9) и имеет вид:

$$D_{\lambda_{lin}^*} = D_{\lambda} - K_{\lambda y}^2 \cdot D_y^{-1} = D_{\lambda} - K_{\lambda y} \cdot D_y^{-1} \cdot K_{y\lambda}. \quad (5.10)$$



.....
 Сделаем важное замечание. Поскольку в случае совместно гауссовских Λ и Y их вероятностное поведение полностью определено заданием средних значений, дисперсий и ковариации, то можно предположить, что строго оптимальный оператор условного среднего (5.2) в случае гауссовских распределений имеет линейный вид. В п. 4.4 этот результат имел место в задаче байесовской оценки скалярного параметра λ по выборке y объема m .

Конечно, больший практический интерес представляют задачи, когда обе случайные величины являются многомерными. В задачах, связанных с проектированием устройств обработки сигналов в радиотехнических системах, вектор Λ может состоять из параметров, определяющих траекторию движения объекта, в системах связи это могут быть последовательные отсчеты речевого сигнала. Вектор Y есть совокупность наблюдаемых (подлежащих обработке) сигналов.

В многомерном случае необходимые преобразования в обозримом виде можно выполнить в матричной форме. Для записи ПРВ гауссовского случайного вектора x , имеющего вектор среднего значения m_x и матрицу ковариаций K_x , будем использовать обозначение:

$$N(x; m_x; K_x) \triangleq \left[\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det K_x} \right]^{-1} \cdot \exp \left(-0.5 \|x - m_x\|_{K_x^{-1}} \right),$$

где $\|x - m_x\|_{K_x^{-1}}$ — квадратичная форма с матрицей K_x^{-1} . При необходимости наряду с обозначением K_x будет использовано иное обозначение $K(x, x) \triangleq K_x$.

Пусть λ и y имеют совместную гауссовскую ПРВ:

$$W(\lambda, y) = N \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} m_\lambda \\ m_y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} K_{\lambda\lambda} & K_{\lambda y} \\ K_{y\lambda} & K_{yy} \end{bmatrix} \right), \quad (5.11)$$

где $K_{\lambda\lambda}$, K_{yy} — автоковариационные матрицы векторов λ и y ; $K_{\lambda y}$ и $K_{y\lambda}$ — взаимные ковариационные матрицы этих векторов. Найдем в матричной форме выражение для апостериорной ПРВ $W(\lambda/y)$ и по нему определим $m_{\lambda/y}$. В общем виде для условной ПРВ справедливо соотношение:

$$W(\lambda/y) = \frac{W(\lambda, y)}{W(y)} \propto \sqrt{\frac{\det K_{yy}}{\det K}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \lambda \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_\lambda \\ m_y \end{bmatrix} \right\|_{K^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|y - m_y\|_{K_{yy}^{-1}}^2 \right), \quad (5.12)$$

где блочная ковариационная матрица:

$$K = \begin{bmatrix} K_{\lambda\lambda} & K_{\lambda y} \\ K_{y\lambda} & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

Запишем для K тождественное соотношение:

$$\begin{bmatrix} K_{\lambda\lambda} & K_{\lambda y} \\ K_{y\lambda} & K_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & K_{\lambda y} \cdot K_{yy}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{\lambda\lambda} - K_{\lambda y} \cdot K_{yy}^{-1} \cdot K_{y\lambda} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_{yy}^{-1} \cdot K_{\lambda y} & I \end{bmatrix},$$

учтем правило $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ и правило обращения треугольной матрицы:

$$\begin{bmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}.$$

Это позволит записать в блочном виде матрицу \mathbf{K}^{-1} . Введем ее выражение в (5.12) и после группировки слагаемых в показателе экспоненты найдем в матричной форме апостериорную ПРВ $W(\boldsymbol{\lambda}/\mathbf{y})$. Эта функция имеет следующий вид:

$$W(\boldsymbol{\lambda}/\mathbf{y}) = N(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{m}_\lambda + \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y); \mathbf{K}_{\lambda\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{y\lambda}). \quad (5.13)$$

Таким образом, в случае совместно гауссовских векторных наблюдений \mathbf{y} и полезного сообщения $\boldsymbol{\lambda}$ оптимальная байесовская оценка полезного сообщения определена соотношением:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_B = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{m}_\lambda + \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y). \quad (5.14)$$

Ковариационная матрица ошибки оптимальной оценки согласно (5.13) равна:

$$D_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_B} = \mathbf{K}_{\lambda\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{y\lambda}. \quad (5.15)$$

Сравнивая векторно матричные выражения (5.14) и (5.15) с аналогичными по смыслу выражениями (5.9) и (5.10), видим, что первые являются обобщением результатов, полученных для скалярного случая.

5.3 Рекурсивная оценка параметров линейной регрессии

Рассмотрим вновь задачу оценки векторного параметра $\boldsymbol{\lambda}$ при наличии линейных скалярных наблюдений с аддитивной помехой (см. пп. 4.2.3, (4.21)). Только теперь полагаем, что $\boldsymbol{\lambda}$ случайный вектор. Запишем уравнение наблюдений (4.21) в виде

$$y_t = \mathbf{h}_t^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + n_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.16)$$

где $\mathbf{h}_t^T = \{f_0(t), f_1(t), \dots, f_{r-1}(t)\}$ — известный r -мерный вектор; $\boldsymbol{\lambda}$ — r -мерный вектор неизвестных параметров; n_t — случайная погрешность (ошибка) наблюдения. Случайную последовательность ошибок полагаем стационарной с параметрами:

$$\mathbf{M}[n_t] = 0 \text{ и } D_{n_t} = \sigma^2 \text{ для } \forall t.$$

Алгоритмы в рекурсивной форме требуют инициализации, т. е. задания начального значения. Будем считать, что начальная оценка $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0 = \mathbf{M}[\boldsymbol{\lambda}]$ и ее ковариационная матрица известны:

$$\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0) = \mathbf{M}\left[(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0 - \boldsymbol{\lambda}_0)(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0 - \boldsymbol{\lambda}_0)^T\right] \equiv \mathbf{K}_0 \quad (5.17)$$

(эту матрицу также называют дисперсионной матрицей ошибки оценки). Очевидно, к моменту времени t вся полезная информация о неизвестном параметре $\boldsymbol{\lambda}$

содержится в выборке $Y_t^T = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$. Априорная информация представлена двумя величинами $\{\hat{\lambda}_0; \mathbf{K}_0\}$ — начальной оценкой и ее ковариационной матрицей. По мере поступления наблюдений, т. е. в текущем времени, рекурсивный алгоритм должен формировать пару $\{\hat{\lambda}_t; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_t)\}$, причем на каждом предыдущем $(t-1)$ -м моменте времени пара $\{\hat{\lambda}_{t-1}; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_{t-1})\}$ может рассматриваться как априорная информация по отношению к паре в момент времени t .

Выше было показано, что при задании вероятностных свойств наблюдений и информативного сообщения в рамках корреляционной теории можно найти линейную оценку $\hat{\lambda}_t = \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot Y_t$ и ее ковариацию $\mathbf{K}(\hat{\lambda}_t)$.

Таким образом, для линейной оценки желаемая рекурсивная форма алгоритма оценивания может быть получена на основе соотношений (4.49), (5.14). Рекурсивный алгоритм должен реализовать процесс пересчета $\{\hat{\lambda}_{t-1}; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_{t-1})\} \Rightarrow \{\hat{\lambda}_t; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_t)\}$ и учесть при этом отличие апостериорных оценок и их ковариаций от априорных, обусловленное получением новой информации — текущего (в данной задаче скалярного) наблюдения y_t .

С учетом замечаний, сделанных выше, рекурсивную форму линейной оценки векторного сообщения следует представить в виде

$$\hat{\lambda}_t = \mathbf{M}[\lambda/Y_t] = \mathbf{M}[\lambda/Y_{t-1}] + \mathbf{K}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t) \cdot \mathbf{K}_{t-1}^{-1}(y_t, y_t) \cdot \{y_t - \mathbf{M}[y_t/Y_{t-1}]\}. \quad (5.18)$$

Рассмотрим смысловое содержание всех элементов соотношения (5.18). Очевидно, $\mathbf{M}[\lambda/Y_{t-1}] = \hat{\lambda}_{t-1}$ есть оценка вектора параметров, которая образуется на основе всех наблюдений до момента времени $(t-1)$. По отношению к моменту времени t с учетом уравнения наблюдений (5.12) можно установить теперь смысл выражения $\mathbf{M}[y_t/Y_{t-1}]$. Действительно,

$$\mathbf{M}[y_t/Y_{t-1}] = \mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1} \quad (5.19)$$

и этот элемент по смыслу есть *оценка наблюдения* на момент времени t на основе априорной информации, доступной к моменту времени $(t-1)$. Другими словами, это есть прогноз (экстраполяция) наблюдений на один шаг вперед. Введем обозначение $\mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1} = y_{t/t-1}^*$. Таким образом, выражение

$$\{y_t - \mathbf{M}[y_t/Y_{t-1}]\} = y_t - y_{t/t-1}^* \triangleq v_t \quad (5.20)$$

уместно назвать ошибкой прогноза наблюдений (невязка). При формировании текущей оценки невязка учитывает новую информацию, содержащуюся в поступившем наблюдении y_t . Если математическая модель наблюдений достоверна, то невязка обеспечивает улучшение качества оценок параметров по мере поступления новых данных. Последовательность $\{v_t\}$ при $t = 1, 2, \dots$ часто называют процессом обновления (innovation process).

Следовательно, условная (при заданных наблюдениях Y_{t-1}) ковариация $\mathbf{K}_{t-1}(y_t, y_t)$, которая при скалярном наблюдении есть условная дисперсия, т. е. $\mathbf{K}_{t-1}(y_t, y_t) \equiv \mathbf{D}_{t-1}[y_t]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t-1}(y_t, y_t) &\equiv \mathbf{D}[y_t/Y_{t-1}] = \mathbf{D}[\mathbf{h}_t^T (\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda) + n_t] = \\ &= \overline{[\mathbf{h}_t^T (\lambda - \hat{\lambda}_{t-1})]^2} + \overline{n_t^2} = \mathbf{h}_t^T \cdot \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, \hat{\lambda}_{t-1}) \cdot \mathbf{h}_t + \sigma^2 = \mathbf{D}_v. \end{aligned} \quad (5.21)$$

При выводе (5.21) учтено, что $\hat{\lambda}_t$ при $\forall t$ есть оценка несмещенная, является линейной функцией наблюдений и элементы последовательности ошибок $\{n_t\}$ статистически независимы между собой и с вектором наблюдений λ .

Обратимся теперь к элементу $\mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t)$, который представляет условную (при заданных наблюдениях \mathbf{Y}_{t-1}) ковариацию оценки $\hat{\lambda}_{t-1}$, полученной к моменту $(t-1)$ и наблюдения y_t . В развернутой форме получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t) &= \mathbf{M} \left[(\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda) \cdot (\mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1} - \mathbf{h}_t^T \lambda_t)^T \right] = \\ &= \mathbf{M} \left[(\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda) (\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda)^T \cdot \mathbf{h}_t \right] = \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, \hat{\lambda}_{t-1}) \cdot \mathbf{h}_t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В итоге рекурсивная форма алгоритма оценивания (5.18) принимает вид:

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_{t-1} + \mathbf{K}_{t-1} \cdot \mathbf{h}_t \cdot [\mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t + \sigma^2]^{-1} \cdot (y_t - \mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1}). \quad (5.23)$$

Найдем рекурсивное соотношение для ковариационных матриц ошибок оценивания \mathbf{K}_{t-1} и \mathbf{K}_t для соседних моментов времени. Из уравнения (5.15) следует:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{t-1} - \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t) \cdot \mathbf{K}_{t-1}^{-1}(y_t, y_t) \cdot \mathbf{K}_{t-1}(y_t, \hat{\lambda}_{t-1}). \quad (5.24)$$

Подставляя в (5.24) выражения (5.21), (5.22), получим в итоге:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{t-1} - \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t \cdot (\mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t + \sigma^2)^{-1} \cdot \mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1}. \quad (5.25)$$

Уравнения (5.23) и (5.25) полностью определяют рекурсивный алгоритм формирования линейной оценки $\hat{\lambda}$ случайного векторного параметра λ с минимальным значением суммарной (по всем компонентам вектора) дисперсии ошибок.

Напомним, что полученный выше алгоритм является наилучшим (в смысле минимума СКО) в классе линейных алгоритмов и он строго оптимален, если вероятностные свойства наблюдаемого сигнала и полезного сообщения описываются совместной гауссовской ПРВ.



.....
В заключение перечислим основные элементы алгоритма (5.23), которые определяют его структуру:

- $v_t = y_t - \mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1}$ — текущая ошибка прогноза наблюдения (невязка);
 - $D_v = \mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t + \sigma^2$ — дисперсия невязки;
 - $\mathbf{g}_t = \mathbf{K}_{t-1} \cdot \mathbf{h}_t \cdot D_v^{-1}$ — векторный коэффициент усиления фильтра;
 - $\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_{t-1} + \mathbf{g}_t \cdot v_t$ — текущая оценка вектора параметров;
 - $\mathbf{K}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{h}_t^T) \cdot \mathbf{K}_{t-1}$ — ковариационная матрица ошибки оценивания.
-

Для инициализации процедуры вычислений должны быть задана начальная оценка $\hat{\lambda} = \mathbf{M}[\lambda]$ и ее ковариационная матрица \mathbf{K}_0 .

5.4 Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана

В общем случае полезное сообщение $\lambda(t)$ есть случайная функция времени. Задачу оценивания неизвестной функции обычно называют задачей фильтрации сообщения. Отметим, что не всегда удобно для представления функции использовать разложение в ряд (4.21) по известным функциям со случайными коэффициентами вида

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i \cdot f_i(t). \quad (5.26)$$

Физически ясно, что при заданном r используемые в (5.26) функции окажут влияние на точность представления случайной функции. Допустим, $\lambda(t)$ — речевой сигнал. Какой набор $\{f_i(t)\}$ использовать для его представления? Может быть степенные функции или лучше гармонические? Но какие у речевого сигнала гармоники? Он же не периодический сигнал.

Существуют два основных способа *прямого* представления случайного сигнала. Попутно отметим, что *косвенный* способ задания случайной функции предполагает ее описание на основе аппарата ПРВ [17]. Итак, рассмотрим первый способ прямого описания случайной функции. Он основан на применении ряда (5.26) и оптимальном или подходящем выборе множества функций $\{f_i(t)\}$, и здесь известны несколько подходов.

Остановимся кратко на двух подходах: разложение Карунена — Лоэва [14] и метод канонических разложений Пугачева [15]. В первом случае необходимо решить интегральное уравнение и найти собственные функции и соответствующие им собственные числа для оператора, определяемого ковариационной функцией случайного сигнала. Во втором случае необходимо использовать произвольную систему порождающих функций, обладающих свойством биортогональности относительно корреляционной функции случайного процесса [15]. В обоих случаях количество членов ряда может быть достаточно большим, т. е. размерность вектора λ неизвестных параметров будет также достаточно большой.

Второй способ представления основан на концепции «формирующего фильтра» и введении понятия «переменной состояния» динамической системы. Именно этот подход [16, 17] явился той основой, которая объединила теорию динамических систем, использующую для описания систем дифференциальные и разностные уравнения, и теорию описания случайных функций, обладающих марковским свойством.

Понятие переменной состояния поясним на простом примере. Известно, что случайный гауссовский процесс $\lambda(t)$ с корреляционной функцией

$$K_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}$$

получается в результате воздействия белого гауссовского шума $u(t)$ на динамическую систему (линейный фильтр) в виде интегрирующей RC цепи [16]. Стохастическое дифференциальное уравнение, связывающее вход и выход RC цепи, является простым уравнением первого порядка вида

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha \cdot \lambda(t) + \alpha \cdot u(t), \quad (5.27)$$

где $\alpha = (1/RC)$ — постоянная времени динамической системы. Задание начального условия (напряжения на емкости) — случайной величины $\lambda(t=0) = \lambda_0$ и реализации $u^{(i)}(t)$ для $t \in [0; T]$ полностью и однозначно определяют реализацию случайного процесса $\lambda^{(i)}(t)$.

В разностной форме, используя простейшую схему Эйлера, уравнению (5.27) можно сопоставить уравнение

$$\lambda_t = (1 - \alpha \cdot \Delta t) \cdot \lambda_{t-1} + \alpha \cdot \Delta t \cdot u_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.28)$$

где Δt — интервал дискретизации; u_t — дискретный во времени некоррелированный гауссовский шум с соответствующей дисперсией. Отметим, переход от непрерывного уравнения (5.27) к численной разностной схеме (5.28) имеет некоторые особенности [17], которые здесь не обсуждаются.

Динамику системы (5.27), если не иметь в виду входной шум $u(t)$, определяет лишь одна величина: $x_1 \equiv \lambda_0$. Если перейти к дискретному времени и рассматривать последовательность моментов $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, то для любого текущего t_i предыдущий t_{i-1} момент выполняет роль начального момента времени. Таким образом, вполне естественно ввести в рассмотрение переменную $x(t) \equiv \lambda(t)$ и назвать ее переменной состояния динамической системы первого порядка, поскольку она полностью (наряду с входным шумом) определяет развитие процессов в системе.

Отметим, что именно по этой причине при белом шуме на входе динамической системы 1-го порядка случайный процесс $\lambda(t)$ на ее выходе имеет последствие (в статистическом смысле) на один шаг. В вероятностном плане $\lambda(t)$ является *простым марковским процессом* (см. п. 1.2), который требует для своего описания задания ПРВ начального состояния $W(\lambda_0)$ и ПРВ перехода $W(\lambda_i; t_i/\lambda_{i-1}; t_{i-1})$. Динамическая система фактически может рассматриваться как формирующий фильтр для процесса $\lambda(t)$. Дифференциальное уравнение (5.27) называют порождающим для процесса $\lambda(t)$. Таким образом, по существу нет различия в математическом описании сигналов и систем. В этом суть концепции «формирующего фильтра», используемой в современной теории фильтрации [16, 17].

Очевидно, что при более сложной корреляционной функции $K_\lambda(\tau)$ порождающий фильтр, оставаясь линейным для гауссовских процессов, будет динамической системой более высокого — n -го порядка. Порождающее дифференциальное уравнение (разностное для дискретных во времени систем) уже не будет уравнением первого порядка. Для обеспечения единственности выходной реализации процесса $\lambda^{(i)}(t)$, который рассматривается нами как информативный сигнал, потребуется задание n случайных величин, определяющих начальные условия. В итоге будет введен вектор переменных состояния $\mathbf{x}(t)$, одна из компонент которого (в общем случае некоторая линейная комбинация), совпадает с самим процессом $\lambda(t)$. Однако теперь случайный процесс $\lambda(t)$ не будет простым марковским, но будет сложным — *многосвязным*.

Известно, что дифференциальное уравнение n -го порядка можно заменить эквивалентной системой n уравнений первого порядка для новых переменных. В качестве этих переменных целесообразно выбрать переменные состояния, определяющие начальные условия или их линейные комбинации. В итоге порождающее дифференциальное уравнение для информативного сообщения $\lambda(t)$ будет представлено системой уравнений первого порядка для вектора переменных состояния

$\mathbf{x}(t)$. Эта система уравнений и определяет математическую модель полезного сообщения в задачах теории марковской фильтрации. Таким образом, вместо (5.27) для стационарных гауссовских сообщений $\lambda(t)$ имеем в векторной форме уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot u(t), \quad t \in [0; T], \quad (5.29)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — n -мерный вектор состояния; \mathbf{A} — $(n \times n)$ числовая матрица, вид которой зависит от корреляционной функции $K_\lambda(\tau)$; \mathbf{B} — $(n \times 1)$ числовая матрица. При переходе к дискретному времени уравнению (5.29) можно сопоставить разностное уравнение

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B} \cdot u_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.30)$$

где $\mathbf{\Phi}$ — $(n \times n)$ матрица перехода состояний; u_t — дискретная стационарная некоррелированная гауссовская последовательность с параметрами $\overline{u_t} = 0$, $\overline{u_t^2} = \sigma_u^2$. Начальные условия для системы (5.29), (5.30) определяет случайный гауссовский вектор \mathbf{x}_0 с параметрами:

$$\overline{\mathbf{x}_0} = \mathbf{m}_0, \quad \overline{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_0)^T} = \mathbf{K}_0.$$

В линейной задаче фильтрации полезного сообщения $\lambda(t)$ наблюдаемый скалярный сигнал y_t является одной (как правило, первой) из компонент вектора состояния. Математическая модель для него по структуре аналогична (5.16) и имеет вид:

$$y_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_t + n_t; \quad t = 1, 2, \dots; \quad \overline{n_t} = 0; \quad \overline{n_t^2} = \sigma_n^2. \quad (5.31)$$

В уравнении (5.31) матрица \mathbf{H} не зависит от времени и имеет размерность $(1 \times n)$, т. е. фактически, как и в (5.16), это вектор-строка. Однако здесь \mathbf{H} определяет связь наблюдений с n -мерным вектором состояния и в задаче, где $x_1(t) \equiv \lambda(t)$, имеем $\mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Случайные возмущения в (5.29), (5.30) называют *шумами состояния*. Это виртуальный шум, обеспечивающий в математической модели (5.29), (5.30) случайную природу полезного сообщения $\lambda(t)$.



.....
 Возмущения в (5.31) называют *шумами наблюдения*.

Часто в практических задачах можно полагать, что возмущения состояний и наблюдений статистически независимы между собой и независимы от вектора начального состояния, т. е.

$$\overline{u_m \cdot n_k} = 0; \quad \overline{u_m \cdot \mathbf{x}_k^T(0)} = 0; \quad \overline{n_m \cdot \mathbf{x}_k^T(0)} = 0 \quad \text{для } \forall m, k = 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

В силу линейности уравнения (5.30), определяющего динамику гауссовского полезного сообщения $\lambda(t)$, и уравнения наблюдения (5.31), определяющего гауссовский процесс $y(t)$, эти процессы совместно гауссовские. Таким образом, оператор байесовской оценки (5.1) сводится к линейному фильтру, что и было показано в п. 5.1, 5.2.

Вывод уравнений оптимальной линейной фильтрации достаточно сложен. Впервые в 1960 г. эти уравнения для линейных дискретных во времени моделей состояния и наблюдений получил американский ученый Р. Калман.

В России в 1961 г. профессор МГУ Р. Л. Стратонович получил уравнения, определяющие оператор байесовской оценки (5.1) для более сложных моделей непрерывных сообщений и наблюдений, когда уравнения (5.29) и/или (5.31) являются нелинейными. В этом случае $\lambda(t)$ и $y(t)$ не являются совместно гауссовскими и оптимальный фильтр оказывается нелинейной системой, байесовский оператор (5.1) не имеет точного представления в явной форме [16, 17].

По своей сути задача линейной фильтрации аналогична задаче оптимальной линейной регрессии рассмотренной в п. 5.3. *Отличие задач возникает в связи с представлением случайной функции с помощью порождающих дифференциальных уравнений.* Оно проявляется на этапе прогноза оценки (в данном случае прогноза оценки состояния) и прогноза ковариационной матрицы этой оценки. Физически ясно, что поскольку в общей задаче фильтрации полезное сообщение изменяется во времени, то на этапе прогноза оценок и их ковариаций должна учитываться модель для переменных состояния, т. е. (5.30).

Оптимальный алгоритм линейной фильтрации с гауссовскими сигналами состоит из следующих этапов:

- 1) предсказание (прогноз) оценки состояния на один шаг:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{t-1} \text{ при } \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{m}_0; \quad (5.33)$$

- 2) вычисление ковариации ошибки прогноза состояния:

$$\mathbf{K}_{t/t-1} = M[(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} - \mathbf{x}_t)(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} - \mathbf{x}_t)^T] = \Phi \mathbf{K}_{t-1} \Phi^T + \sigma_u^2 \cdot \mathbf{B}^* \mathbf{B}^{*T}, \quad (5.34)$$

\mathbf{K}_0 — априорная ковариация $\hat{\mathbf{x}}_0$;

- 3) вычисление текущей ошибки прогноза наблюдения (невязка):

$$\mathbf{v}_t = y_t - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}, \quad (5.35)$$

где $\hat{y}_{t/t-1} = \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ — предсказание (экстраполяция) наблюдения;

- 4) вычисление дисперсии невязки:

$$D_v = \mathbf{H}_t \mathbf{K}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \sigma_n^2; \quad (5.36)$$

- 5) вычисление векторного коэффициента усиления фильтра Калмана:

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{K}_{t/t-1} \cdot \mathbf{H}_t^T \cdot D_v^{-1}; \quad (5.37)$$

- 6) вычисление текущей оценки состояния:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{v}_t; \quad (5.38)$$

- 7) вычисление текущей ковариации ошибки фильтрации:

$$\mathbf{K}_t = M[(\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)(\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)^T] = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K}_{t/t-1}. \quad (5.39)$$

Сравнение алгоритма фильтра Калмана с уравнениями оценки *параметров* линейной регрессии показывает, что они различаются уравнением предсказания оценки состояния (5.33) и уравнением (5.34) для ковариации ошибки предсказанного состояния.

Представляет интерес сравнение результатов, полученных для байесовской оценки в п. 4.4 при модели наблюдаемого сигнала (4.36), и результатов, которые получаются при использовании рекурсивных вычислений по формулам (5.33)–(5.39), определяющим алгоритм фильтра Калмана.

Математическая модель скалярного полезного сообщения *в терминах переменных состояния* в данной задаче имеет вид:

$$x_t = x_{t-1} \text{ при } \bar{x}_0 = m_\lambda \text{ и } D_{x_0} = \sigma_\lambda^2; \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.40)$$

Математическая модель наблюдений определена выражением (4.36):

$$y_t = x_t + n_t; \quad \bar{n}_t = 0, \quad \bar{n}_t^2 = \sigma_n^2. \quad (5.41)$$

Сопоставляя (5.40), (5.41) с (5.30), (5.31), получаем $\mathbf{\Phi} = 1$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 1$. Из уравнений (5.33)–(5.39), определяющих оптимальный алгоритм фильтра Калмана, получаем:

$$\hat{x}_{t/t-1} = \hat{x}_{t-1}; \quad K_{t/t-1} = K_{t-1}$$

и так как $K_0 = \sigma_\lambda^2$, то $K_{t/t-1} = \sigma_\lambda^2$, для дисперсия невязки согласно (5.36) имеем:

$$D_v = \sigma_n^2 + K_{t/t-1}. \quad (5.42)$$

Для коэффициента усиления фильтра согласно (5.37) получим:

$$g_t = K_{t/t-1} \cdot (\sigma_n^2 + K_{t/t-1})^{-1}.$$

Оценка в соответствии с (5.38) имеет вид:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t/t-1} + \frac{K_{t/t-1}}{(\sigma_n^2 + K_{t/t-1})} \cdot (y_t - \hat{x}_{t/t-1}) \quad (5.43)$$

и текущая дисперсия ошибки фильтрации согласно (5.39) равна:

$$K_t = (1 - g_t) \cdot K_{t/t-1} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + K_{t/t-1}} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_\lambda^2}. \quad (5.44)$$

Выполним простые алгебраические расчеты для трех шагов $t = 1, 2, 3$. Результаты расчетов сведены в таблицу 5.1, где, как и в п. 4.4, $\eta = \sigma_\lambda^2 / \sigma_n^2$.

Текущая оценка состояния на первом шаге согласно (5.43) имеет вид:

$$\hat{x}_{t=1} = \hat{x}_{1/0} + \left[\frac{\eta}{1 + \eta} \right] \cdot (y_1 - \hat{x}_{1/0}) = m_\lambda + \left[\frac{\eta}{1 + \eta} \right] \cdot (y_1 - m_\lambda) = \frac{m_\lambda + \eta \cdot y_1}{1 + \eta}. \quad (5.45)$$

Это выражение при $m = 1$ тождественно равно оценке (4.44). Дисперсия ошибки текущей оценки в таблице совпадает с величиной $D_{\hat{x}_t}$ в формуле (4.47). Полученные результаты подтверждают тождественность рекурсивного алгоритма оценивания и алгоритма ориентированного на полный объем данных за весь интервал

наблюдения. Однако преимущества первого очевидны, он реализует обработку по мере поступления данных, т. е. в реальном масштабе времени.



.....
 На рисунке 5.1 приведена структура фильтра, соответствующая алгоритму обработки данных в фильтре Калмана. Ее основными элементами являются: блок экстраполяции оценки (БЭО), блок экстраполяции наблюдений (БЭН), блок вычисления матричного коэффициента усиления (БКУ), образующий вместе с разностным устройством дискриминатор.

Следует обратить внимание, что в рассмотренной линейной задаче матрицы Φ и H не зависят от времени. Матричный коэффициент усиления g_t при скалярных наблюдениях имеет структуру вектора, зависит от времени, но не зависит от наблюдаемого сигнала. Следовательно, он может быть вычислен предварительно и введен в память вычислителя. В нелинейных задачах, в частности при частотной или фазовой модуляции наблюдаемого сигнала полезным сообщением, дискриминатор, входящий в состав демодулятора, оказывается нелинейным [9, 16, 17].

.....

Таблица 5.1 – Расчетные значения параметров в фильтре Калмана

Момент времени t	Дисперсия ошибки прогноза оценки $K_{t/t-1}$	Коэффициент усиления фильтра g_t	Дисперсия ошибки текущей оценки K_t
$t = 1$	σ_k^2	$\eta/(1 + \eta)$	$\sigma_k^2/(1 + \eta)$
$t = 2$	$\sigma_k^2/(1 + \eta)$	$\eta/(1 + 2\eta)$	$\sigma_k^2/(1 + 2\eta)$
$t = 3$	$\sigma_k^2/(1 + 2\eta)$	$\eta/(1 + 3\eta)$	$\sigma_k^2/(1 + 3\eta)$
...
$t = m$	$\sigma_k^2/[1 + (m - 1)\eta]$	$\eta/(1 + m\eta)$	$\sigma_k^2/[1 + m(\sigma_k^2/\sigma_n^2)]$

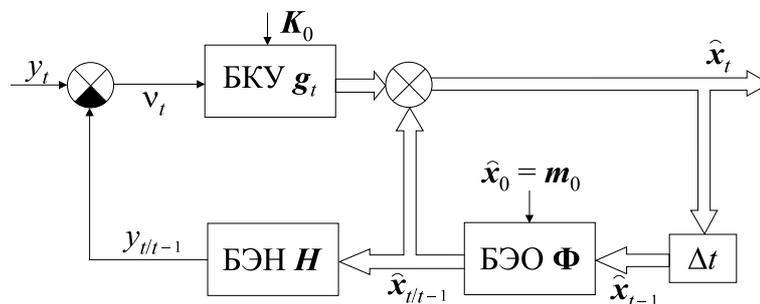


Рис. 5.1 – Структурная схема линейного фильтра Калмана при скалярных наблюдениях



Контрольные вопросы по главе 5

1. Запишите в общем виде выражение байесовской оценки векторного параметра λ .
2. Какая функция определяет свойства параметра λ как случайного параметра?
3. В чем отличие априорной и апостериорной ПРВ параметра λ ?
4. Какой общий вид имеет оператор условного среднего в задаче оценки параметра λ ?
5. Что понимают под термином «оптимальная среднеквадратичная регрессия вектора λ на вектор наблюдений y »?
6. Сформулируйте задачу оптимальной линейной среднеквадратичной регрессии.
7. Почему задача оптимальной линейной регрессии не является строго оптимальной?
8. Какие статистические характеристики полезного (скалярного) параметра λ и скалярного наблюдения y определяют уравнение оптимальной *линейной регрессии*?
9. Назовите статистические параметры, определяющие совместную гауссовскую ПРВ $W(\lambda, y)$. Запишите их выражения.
10. Запишите в явной форме выражение байесовской оценки векторного параметра λ при использовании для ее формирования гауссовских наблюдений y , если их совместная ПРВ имеет гауссовский вид. В чем сходство этого выражения с уравнением оптимальной линейной регрессии в скалярном случае?
11. Какими способами можно задать случайную функцию?
12. В чем сущность задания случайной функции в терминах «переменных состояния» динамической системы? Какой вид имеет дифференциальное уравнение — «генератор» реализаций случайной функции?
13. Объясните на физическом уровне взаимосвязь марковского свойства случайной функции и порядка дифференциального уравнения, содержащего белый гауссов шум в правой части и используемого в качестве «генератора» реализаций.
14. В чем различие и сходство задач оптимальной линейной регрессии и оптимальной линейной фильтрации?
15. Перечислите этапы формирования оптимальной оценки неизвестной случайной функции в рекурсивной форме с помощью алгоритма фильтра Калмана.

16. Изобразите структурную схему линейного фильтра Калмана и объясните функции каждого блока.
17. Что есть невязка наблюдений в алгоритме фильтра Калмана? Каким образом она формируется?
18. От чего зависит размерность вектора \mathbf{g}_t , который определяет усиление многомерного фильтра Калмана? В каком случае вектор \mathbf{g}_t получит структуру матрицы и что повлияет на ее размерность?
19. Обратите внимание на уравнения фильтра Калмана и определите в каком случае матричный (векторный) коэффициент фильтра Калмана не зависит от времени?

Глава 6

РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

Для многих типов РТС, в особенности радиолокационных и радионавигационных, характерным является режим работы, когда на входе приемника одновременно присутствует более чем один полезный сигнал. Например, при РЛ наблюдении двух объектов, находящихся в зоне облучения, определяемой шириной диаграммы направленности антенны, входной сигнал приемника:

$$y(t) = s_1(t; \lambda_1, \beta_1) + s_2(t; \lambda_2, \beta_2) + n(t), \quad t \in (0; T). \quad (6.1)$$

Составляющими вектора информативных параметров λ_i ($i = 1, 2$) каждого из сигналов могут быть: время задержки τ_{0i} , связанное с дальностью до объектов, доплеровский сдвиг частоты Ω_{0i} , зависящий от их радиальной скорости, угловая координата и др. В (6.1) β — вектор неинформативных параметров.

В РЛ системе необходимо для каждого объекта получить оценки полезных параметров. В случае, когда объекты близки друг к другу по какому-либо из параметров (допустим по дальности), сигналы $s_1(\cdot)$ и $s_2(\cdot)$ на входе приемника перекрываются во времени. Если объекты имеют близкие радиальные скорости, то произойдет перекрытие частотных спектров сигналов.

Очевидно, что определение числа сигналов в наблюдаемой реализации (6.1) и измерение параметров каждого из них при перекрытии сигналов значительно сложнее, нежели в случае, когда сигналы достаточно разнесены по соответствующему параметру.



.....
Проблема разрешения сигналов, перекрывающихся по одному или нескольким параметрам (по времени задержки и (или) частоте), состоит в раздельном выделении полезной информации, содержащейся в каждом из них.
.....

Разрешающая способность наряду с точностью относится к важнейшим тактическим показателям РТС. В РЛ системах она влияет на полноту и достоверность сведений о наблюдаемой обстановке при наличии нескольких целей.



.....
Разрешающая способность количественно равна минимальной разнице по каждому из разрешаемых параметров двух сигналов, при которой возможно их раздельное обнаружение и измерение параметров.
.....

Наличие шума, как и ранее, вносит неопределенность и придает задаче статистический характер. Чем больше отношение (сигнал/шум), тем меньшая разница в параметрах разрешаемых сигналов может быть уверенно отмечена в выходном устройстве системы обработки. И наоборот, при уменьшении этого отношения требуется все большее и большее различие параметров перекрывающихся сигналов для их уверенного разрешения.

Кроме отношения энергий сигналов и шума на достоверность разрешения большое влияние оказывает форма разрешаемых сигналов, и в первую очередь их протяженность по параметру разрешения. Чем уже разрешаемые сигналы по этому параметру, тем ближе друг к другу они могут быть расположены и при этом надежно разрешены, и тем лучше разрешающая способность РТС. Таким образом, определенный смысл имеет анализ разрешающей способности без учета влияния шума. Во всяком случае, результаты анализа будут оправдываться по мере увеличения уровня сигнала по отношению к шуму.



.....
В этом случае в литературе по теории РТС обычно говорят о *потенциальной (предельной) разрешающей способности* системы по соответствующему параметру: по дальности (по времени задержки сигналов), по радиальной скорости (по частотному сдвигу спектра сигналов).
.....

Учитывая указанные выше обстоятельства, рассмотрим влияние законов и параметров модуляции сигналов на разрешающую способность РТС по времени задержки τ и сдвигу несущей частоты F .

6.1 Разрешение по времени запаздывания. Простые и сложные сигналы

В пп. 1.3.1, 1.3.2 определено понятие функции различия (1.7) двух сигналов $s(t, \lambda_0)$ и $s(t, \lambda)$, отличающихся значениями информативных параметров λ_0 и λ , и в дальнейшем показана ключевая роль нормированной сигнальной функции $q(\lambda_0, \lambda)$ в задачах различения, обнаружения сигналов и измерения их параметров на фоне шума. Напомним, что функция $q(\lambda_0, \lambda)$ при заданных λ_0 и λ определяет степень различия двух копий сигнала, отличающихся значением параметра λ .

В важном частном случае, когда двумерный неэнергетический параметр $\lambda = \{\tau, \Omega\}$, функция $q(\lambda_0, \lambda)$ по существу является частотно-временной корреляционной функцией $k(\tau, F)$, имеющей вид (1.13). Напомним, что огибающую $K(\tau, F)$ функции $k(\tau, F)$ называют функцией неопределенности (ФН). В п. 3.2 показано, что сигнальная функция $z_s(t)$ на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s(t; \tau_0 = 0, \Omega_0 = 0)$, при входном воздействии $s(t - \tau; \Omega)$ повторяет по форме функцию $k[(t - \tau); \Omega = \text{const}]$. В силу инвариантности линейного стационарного фильтра к временному сдвигу изменение задержки входного сигнала на произвольную величину δ приводит к равному сдвигу по времени сигнала на выходе фильтра.

В пп. 1.3.2 показано, что мерой различия (или сходства) двух сигналов $s(t, \lambda_0)$ и $s(t, \lambda)$ по неэнергетическим параметрам τ и Ω является функция неопределенности $K(\tau, \Omega)$. Следовательно, анализ разрешения сигналов по параметрам τ и Ω непременно связан с формой этой функции. Рассмотрим отклик СФ при воздействии на его вход двух радиосигналов, отличающихся временным положением.

Пусть на вход поступают два сигнала с прямоугольной огибающей длительностью T_S и простой модуляцией, т. е. база сигналов $B = \Delta T \cdot \Delta F \simeq 1$. Временное положение сигналов отличается на величину $\Delta\tau$ (рис. 6.1). Тогда в силу линейности фильтра сигнальный отклик (3.18) на его выходе — сигнал $z_s(t)$ — будет также состоять из двух слагаемых. Причем с точностью до постоянного коэффициента огибающая каждого из них имеет форму, которая совпадает с огибающей временной автокорреляционной функции $K(\tau)$. Для прямоугольных радиоимпульсов функция $K(\tau)$ имеет треугольную форму и протяженность по времени $2T_S$ (рис. 1.9, а). Таким образом, на выходе детектора огибающей получим два треугольных импульса, разделенных промежутком $\Delta\tau$.

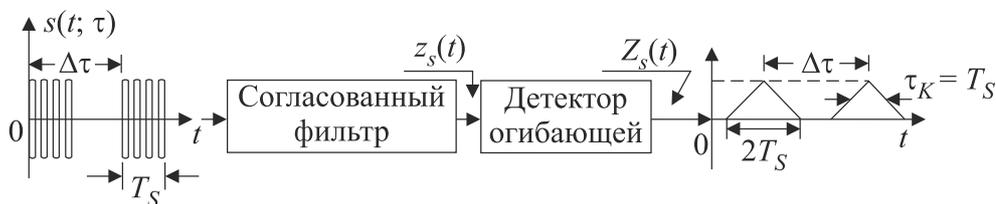


Рис. 6.1 – Разрешение по времени задержки двух радиосигналов прямоугольной формы с простой модуляцией при согласованной фильтрации

Ширину функции $K(\tau)$ и соответственно длительность сигналов на выходе СФ часто определяют по уровню 0.5 от их максимального значения. Эту величину τ_K называют *интервалом корреляции* и согласно определению $\tau_K = 2\tau_{0.5}$, где $K(\tau_{0.5}) = 0.5$. Для прямоугольного радиоимпульса (рис. 1.9, а) $\tau_{0.5} = 0.5T_S$ и, следовательно, $\tau_K = T_S$. Найдем связь длительности сигнала τ_K на выходе СФ со среднеквадратической шириной спектра узкополосного радиосигнала ΔF . Для этого в формуле (1.24), определяющей протяженность сечения (эллипса) функции неопределенности $K(\tau, F)$ по оси τ , зададим величину $c = 0.5$. В итоге получим:

$$\delta_\tau = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta F} \Big|_{c=0.5} = \tau_K = \frac{\sqrt{3}}{\Delta F}. \quad (6.2)$$

Определение величины δ_{τ_p} , характеризующей разрешающую способность сигнала по задержке, предполагает введение критерия, который позволит опре-

делить минимальное сближение двух сигналов $\Delta\tau_{\min}$, при котором «наблюдатель» может фиксировать наличие двух сигналов. Согласно критерию Рэлея, который применяется в оптических измерениях, условие $\delta\tau_P = \Delta\tau_{\min}$ соответствует такому положению сигналов на выходе устройства разрешения (СФ), при котором *огibaющая мгновенной мощности двух некогерентных сигналов* имеет двугорбую форму с провалом до уровня, равного половине от максимума. Мгновенная мощность каждого сигнала пропорциональна функции $K^2(t)$. Поскольку для некогерентных сигналов мощность суммы сигналов равна сумме мощностей, то «провал» до половины от максимума (рис. 6.2) образуется при пересечении огibaющих как раз на уровне 0.5 от максимального; при этом $\delta\tau_P = \Delta\tau_{\min} = \tau_K$. В случае радиопульса с простой модуляцией интервал корреляции $\tau_K \approx T_S$ (при прямоугольной огibaющей $\tau_K = T_S$), поэтому для такого сигнала $\delta\tau_P \approx T_S$ или $\delta\tau_P \approx \Delta T$, так как среднеквадратическая длительность сигнала ΔT , если она существует, имеет всегда тот же порядок, что и длительность сигнала T_S .

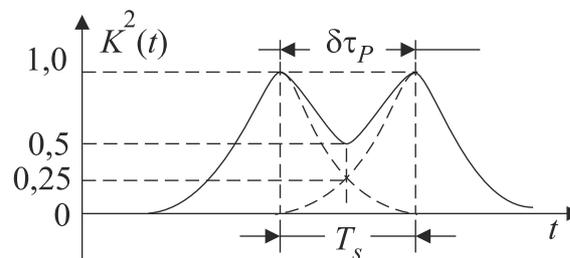


Рис. 6.2 – Интенсивность отклика согласованного фильтра при разрешении двух некогерентных сигналов по критерию Рэлея



Выводы

Таким образом, общий вывод состоит в том, что разрешающая способность сигнала по задержке равна интервалу временной корреляции, т. е. — $\delta\tau_P = \tau_K$. Улучшение разрешающей способности (уменьшение $\delta\tau_P$) связано согласно (6.2) с увеличением ширины спектра сигнала ΔF . Привлекая понятие базы сигнала $B = \Delta F \cdot \Delta T$, можно утверждать, что разрешающая способность:

$$\delta\tau_P \approx \frac{1}{\Delta F} = \frac{\Delta T}{B}. \quad (6.3)$$

Таким образом, повысить разрешающую способность сигнала по времени задержки, используя простую модуляцию ($B \approx 1$), возможно только путем сокращения его длительности.

В этом случае при неизменной мощности излученного сигнала его энергия уменьшится. В итоге в приемнике на выходе согласованного фильтра максимальное отношение сигнал/шум $q_0^2 = 2E_s/N_0$ также уменьшится и, как следствие, в РТС станут хуже характеристики обнаружения и различения сигналов. Исправить положение можно путем увеличения мощности излучения. Однако это не всегда допустимо. Более того, режим с малой мощностью излучения повышает

скрытность работы и благоприятствует решению проблемы электромагнитной совместимости различных РТС.

.....

Применение сложных сигналов позволяет избежать указанных последствий. Действительно, согласно (6.3) можно при заданной длительности сигнала ΔT значительно увеличить (с целью повышения разрешающей способности) базу сигнала B путем увеличения ширины его спектра ΔF , например за счет внутриимпульсной ЛЧМ или ФКМ.

На рисунке 6.3, а условно показаны два перекрывающихся по времени ВЧ сигнала $s(t)$ и $s(t - \tau)$ со сложной модуляцией, которые поступают на вход СФ. Автокорреляционная функция сигналов $k(\tau)$ показана на рисунке 6.3, б; ее ширина $\tau_K \approx 1/\Delta F = \Delta T/B$, причем $\tau_K \ll T_S$. Сигналы на выходе СФ показаны на рисунке 6.3, в. По форме они повторяют функцию $k(\tau)$ и, таким образом, сжимаются по длительности по сравнению с входными сигналами примерно в $B = \Delta F \cdot \Delta T$ раз. В итоге перекрывающиеся по времени входные сигналы будут разрешены по задержке, если $\Delta\tau \geq \Delta\tau_{\min}$. Разрешающая способность по критерию Рэлея $\delta\tau_p = \tau_K \approx 1/\Delta F$, т. е. формально это совпадает с выражением при использовании простых сигналов. Однако у сложного сигнала эту величину можно изменять независимо от его длительности T_S . Действительно, например, при ЛЧМ ширина спектра сигнала определяется девиацией частоты, а при ФКМ $\Delta F \approx 1/\Delta$, где Δ — длительность парциального импульса (см. пп. 1.3.4 и 3.3.2).

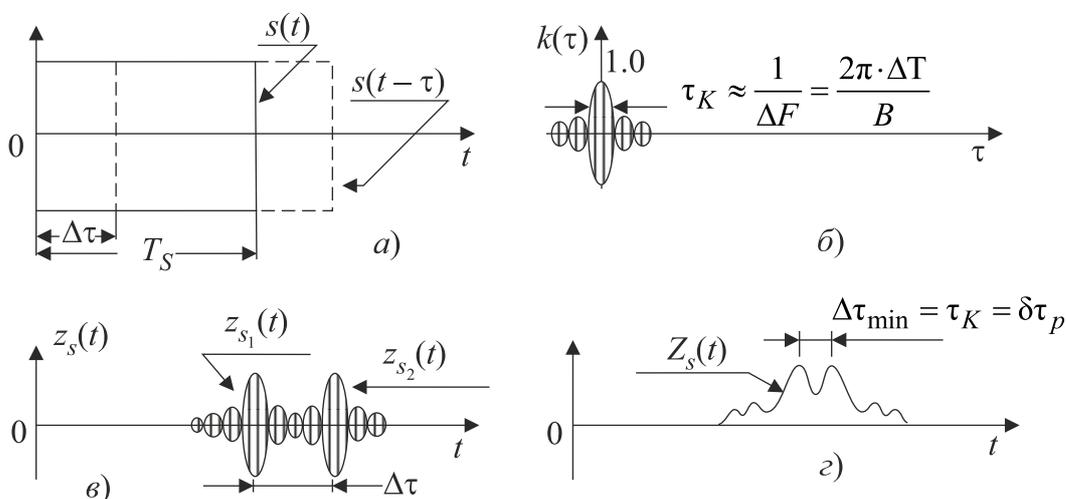


Рис. 6.3 – Разрешение сложных сигналов по времени задержки:

а) два перекрывающихся по времени задержки радиосигнала на входе согласованного фильтра; б) автокорреляционная функция радиосигнала; в) сигнальный отклик согласованного фильтра; г) огибающая сигнального отклика

На рисунке 6.3, в видно, что наличие боковых всплесков (лепестков) и их уровень существенно влияют на достоверность разрешения сигналов по времени задержки. Параметр τ_K , равный разрешающей способности $\delta\tau_p$ (по критерию Рэлея), учитывает только локальное поведение временной автокорреляционной функции $K(\tau)$. В этой связи более корректной для задачи разрешения является характери-

стика, предложенная Ф. Вудвордом. Он ввел величину, называемую «постоянной разрешения по времени», которая определяется выражением:

$$\delta\tau_B = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

По существу, постоянная разрешения $\delta\tau_B$ равна ширине прямоугольника, площадь которого равна площади под кривой $K^2(\tau)$. На рисунке 6.4 показано соотношение величин временной разрешающей способности по Рэлею и Вудворду.

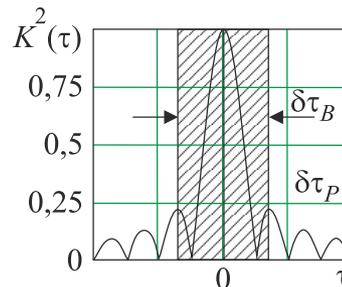


Рис. 6.4 – Соотношение величин разрешающей способности по Рэлею и Вудворду

Рассмотрим в общем виде особенности совместного разрешения сигналов по двум параметрам — задержке τ и частоте F .

6.2 Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частоте

Качество разрешения сигналов по двум параметрам τ и F зависит от вида функции неопределенности (частотно-временной корреляционной функции) $K(\tau, F)$. Геометрически $K(\tau, F)$ представляет поверхность, форма которой (ширина, уровень боковых лепестков и др.) зависит от способа и параметров модуляции сигнала (см. рис. 1.8, *a* и 1.12, *a*). Способ и параметры модуляции ВЧ сигнала $s(t) = \text{Re} [\dot{S}(t)e^{i\omega_0 t}]$ определяют его комплексную огибающую $\dot{S}(t) = S(t)e^{i\Phi(t)}$. В пп. 1.3.2 показано, что функция неопределенности

$$K(\tau, \Omega) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)e^{i\Omega t} dt \right|.$$



.....
 Тело, образованное поверхностью $|K(\tau, F)|^2$ и плоскостью координат (τ, F) , называется **телом неопределенности** [7].

Очевидно, разрешение двух копий сигнала, отличающихся друг от друга по времени запаздывания на τ и по частоте на F , будет тем выше, чем меньше значение ФН в точке с координатами τ и F . Другими словами, совместная разрешающая

способность по задержке τ и частоте F будет выше, если тело неопределенности имеет максимально узкий и единственный пик.

Свойства главного сечения $K(\tau) = K(\tau; \Omega = 0)$ обсуждались выше — протяженность пика ФН вдоль оси τ определяет разрешающую способность $\delta\tau_p$ сигнала по времени и имеет порядок длительности τ_K огибающей временной автокорреляционной функции сигнала. Другое главное сечение ФН — частотная автокорреляционная функция $K(F) = K(\tau = 0; F) = |\dot{K}(\tau = 0; F)|$, очевидно, определяет разрешение только по частоте, когда копии сигналов совмещены по времени, но отличаются частотами. В соответствии с (1.15) имеем:

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 e^{i2\pi Ft} dt \right|. \quad (6.5)$$

Явный смысл этой функции, как функции корреляционной, установить просто. Применяя к (6.5) теорему Парсеваля, получим:

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f - F) \dot{G}^*(f) df \right|. \quad (6.6)$$

Таким образом, протяженность пика функции неопределенности вдоль частотной оси F имеет порядок ширины F_K огибающей частотной автокорреляционной функции $K(F)$. Согласно (6.5) $K(F)$ и $|\dot{S}(t)|^2 = S^2(t)$ образуют пару сопряженных по Фурье функций.



Выводы

Следовательно, *повышение разрешающей способности только по частоте, т. е. уменьшение величины $\delta F_p \approx F_K$, для любых сигналов связано с увеличением протяженности действительной огибающей $S(t) = |\dot{S}(t)|$ радиосигнала $s(t)$. В случае простых сигналов ($B = 1$) это равносильно увеличению их длительности (T_S или ΔT) и непременно ведет к снижению разрешения по задержке τ , так как $\delta\tau_p \approx \Delta T/B$. Увеличение совместной разрешающей способности по параметрам τ и F для сигналов с простой модуляцией реализовать невозможно.*

Для наглядного пояснения данного положения обратимся к геометрической интерпретации. На рисунке 6.5 показана функция неопределенности для простого сигнала с гауссовой огибающей. Длительность сигнала $s(t)$ и протяженность его спектра можно положить приблизительно равными соответствующим среднеквадратичным величинам ΔT и ΔF . Тогда протяженность области определения функции $K(\tau, F)$ по переменным τ и F практически равна $2\Delta T$ и $2\Delta F$. Площадь основания $\Pi_{\text{очн}}$, в пределах которого сосредоточено тело неопределенности: $\Pi_{\text{очн}} \approx 4\Delta T \cdot \Delta F = 4B$.

Совместное разрешение сигналов по задержке τ и частоте F , как было показано ранее, возможно вне области высокой корреляции, которая определяется условием

$K(\tau, F) \geq 0.5$ и показана на рисунке 6.5. Главные оси эллипса, который определяет границу области высокой корреляции, согласно (6.2) равны разрешающей способности $\delta\tau_P = \sqrt{3}/\Delta F$ и $\delta F_P = \sqrt{3}/\Delta T$. Таким образом, площадь $\Pi_{0.5}$ области высокой корреляции (площадь эллипса) равна $\Pi_{0.5} = 3\pi/(4\Delta T \cdot \Delta F) = 3\pi/4B$.

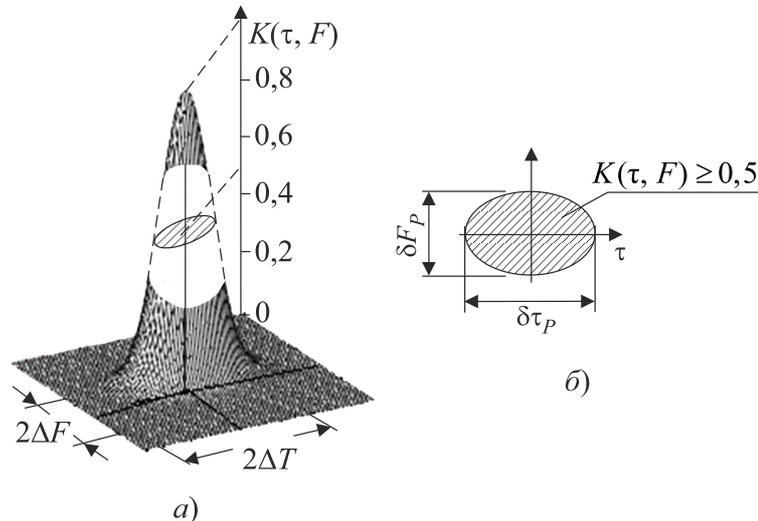


Рис. 6.5 – Функция неопределенности радиоимпульса с простой модуляцией (а); область высокой корреляции (б)



.....

Для простых сигналов ($B = 1$) и величина $\Pi_{0.5}$ составляет около 60% от общей площади основания $\Pi_{\text{осн}}$. Это значит, что для простых сигналов почти весь объем тела неопределенности, равный единице, сосредоточен в области высокой корреляции и вытеснить оттуда существенную часть полного объема в целях улучшения совместного разрешения по параметрам τ и F невозможно. В этом и состоит особенность задачи совместного разрешения при использовании сигналов с простой модуляцией, когда сужение ФН по одной из осей непременно вызывает ее расширение по другой.

Идеальное тело неопределенности должно иметь «кнопочный» вид — типа иглы единичной высоты на прямоугольном основании, имеющем площадь $4\Delta T \cdot \Delta F = 4B$ (рис. 6.6).

Однако получить тело неопределенности с нулевыми боковыми лепестками невозможно, так как существует ограничение, согласно которому нельзя произвольно менять форму тела неопределенности. Это ограничение (принцип неопределенности в радиолокации) упоминалось в пп. 1.3.2. Суть его состоит в том, что объем тела неопределенности не зависит от формы сигнала и равен единице (см. рис. 1.16, а). Приближение к идеальной форме ФН возможно только при использовании сложных сигналов ($B \gg 1$).

.....

Действительно, при площади $\Pi_{\text{осн}} = 4B \gg 1$ область высокой корреляции будет иметь площадь $\Pi_{0,5} = (3\pi/4B) \ll 1$. Поскольку $K^2(\tau, F) \leq 1$, то объем главного пика тела неопределенности, соответствующий области высокой корреляции, равен $V_{\text{гл}} \approx 1 \cdot (3\pi/4B)$, т.е. он имеет порядок величины $1/B$. Остальная часть объема $V_{\text{ост}} = [1 - (1/B)] \approx 1$, т.е. практически весь объем тела неопределенности придется на основание, площадь которого $4\Delta F \cdot \Delta T = 4B$. Таким образом, высота основания, имеющая смысл средней интенсивности (мощности) боковых лепестков, равна $1/4B$. Это значит, что среднеквадратичный уровень боковых лепестков идеальной частотно-временной корреляционной функции $K(\tau, F)$, или, что то же самое, среднеквадратичная величина напряжения на выходе СФ вне области главного пика, примерно равна $1/2\sqrt{B}$ (рис. 6.5).

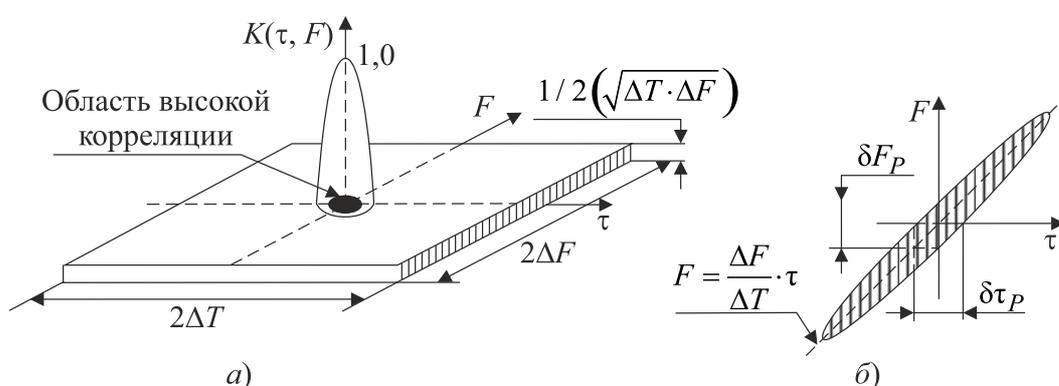


Рис. 6.6 – Условное представление идеальной функции неопределенности сложного (база $B > 1$) сигнала (а) и область высокой корреляции радиосигнала с внутриимпульсной линейной частотной модуляцией (б)



Выводы

Таким образом, уменьшение уровня боковых лепестков функции $K(i, F)$ можно получить только за счет увеличения базы сигнала.

Следует отметить, что сама по себе большая величина базы B не обеспечивает приближения ФН $K(\tau, F)$ к идеальной форме. Например, функция неопределенности ЛЧМ сигнала (рис. 1.12) имеет вид не иглы, расположенной на основании, а узкого гребня, повернутого относительно осей τ, F . Область высокой корреляции такого сигнала показана на рисунке 6.6, б, она ограничена эллипсом, у которого большая ось совпадает с линией $F = (\Delta F_M/\Delta T)\tau$ (ΔF_M — девиация частоты). В пределах этой области отрезки осей τ и F равны величинам разрешающей способности ЛЧМ сигнала по частоте $\delta F_P = \sqrt{3}/\Delta T$ и по времени $\delta \tau_P = \sqrt{3}/\Delta F_M$. Таким образом, подходящим выбором девиации ΔF_M (ширины спектра) и длительности ΔT можно обеспечить высокое разрешение по времени τ при $F = 0$ и по частоте F при $\tau = 0$. Вместе с тем из рисунка 6.6, б видно, что какими бы ни были девиация ΔF_M и длительность сигнала ΔT , в области высокой корреляции существуют

значения временного и частотного сдвигов, которые превышают величины разрешения $\delta\tau_p$ по времени или δF_p по частоте. Это означает, что сигналы с такими значениями параметров τ и F тем не менее не будут наблюдаться отдельно.

Функцию неопределенности, близкую к идеальной, можно получить в классе сигналов с ФКМ. У этих сигналов область высокой корреляции, как и в случае простых сигналов, симметрична относительно осей τ и F . Они имеют достаточную длительность $T_S = n \cdot \Delta$ (Δ — длительность парциального элемента и n — их число), что позволяет получить необходимое разрешение по частоте. Ширина автокорреляционной функции $K(\tau)$, определяющая разрешение по времени задержки, равна $\tau_K = \Delta \approx 1/\Delta F$ (см. пп. 1.3.4). База сигнала с ФКМ $B = T_S \cdot \Delta F \approx n \cdot \Delta \cdot 1/\Delta = n$. Боковые лепестки (рис. 1.16, б) на плоскости (τ, F) имеют при этом характер хаотически расположенных треугольных пиков, уровень некоторых из них может превышать $1/\sqrt{B}$.



Контрольные вопросы по главе 6

1. В чем состоит особенность задачи разрешения сигналов по параметру в сравнении с задачей различения сигналов?
2. Что есть мера разрешения двух сигналов по параметру временной задержки?
3. Что определяет величину потенциальной разрешающей способности двух сигналов известной формы по времени задержки?
4. Как следует построить приемник-обнаружитель, чтобы реализовать предельную разрешающую способность сигналов известной формы по времени задержки?
5. Что дает применение сигналов с большой базой в плане их разрешения по времени задержки?
6. Какими должны быть характеристики приемного устройства, чтобы реализовать потенциальные возможности радиосигнала в плане разрешающей способности по времени задержки?
7. Каковы особенности разрешения сигналов одновременно по двум параметрам — времени задержки и частотному сдвигу?
8. Почему применение сигнала с простой модуляцией не позволяет одновременно повышать разрешение сигналов по временной задержке и частотному сдвигу?
9. В чем состоит преимущество применения сигналов с большой базой при достижении высокого разрешения сигналов по временной задержке и частотному сдвигу?
10. В чем состоят преимущества радиосигнала с ФКМ по сравнению с радиосигналом с ЛЧМ при одновременном разрешении сигналов по времени задержки и частотному сдвигу?

11. Сформулируйте критерий разрешения по Рэлею и Вудворду. В чем состоит отличие этих критериев?
12. Какой параметр радиосигнала определяет потенциальную разрешающую способность по частотному сдвигу?
13. Что есть область высокой корреляции ФН радиосигнала?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал пособия составляет основу статистической теории оптимальных методов различения, обнаружения и оценки параметров сигналов при наличии помех. Напомним ключевые моменты, которые могут оказать помощь в систематизации результатов теории.

Прежде всего обсуждается необходимость введения функции, определяющей степень близости сигналов $s(t, \lambda)$ и $s(t, \lambda_0)$, имеющих различные значения параметра λ . Для неэнергетических параметров τ и F таковой функцией является $k(\tau, F)$ — частотно-временная АКФ сигнала и ее огибающая $K(\tau, F)$, названная функцией неопределенности. Объем тела неопределенности, ограниченного поверхностью $K^2(\tau, F)$, не зависит от формы сигнала и равен 1. Свойства функций $k(\tau, F)$ и $K(\tau, F)$ играют фундаментальную роль в статистической теории приема сигналов, что и подтверждено в дальнейшем.

Было показано, что линейный согласованный фильтр с импульсной реакцией $h(t; \lambda_0) = s(t_0 - t; \lambda_0)$ формирует на выходе сигнал, среднее значение которого $z_s(t; \lambda_0)$ совпадает по форме с АКФ сигнала по времени задержки τ . В момент окончания полезного сигнала на выходе СФ обеспечивается наибольшее отношение мощностей сигнала к шуму — $q_0^2 = 2E_s/N_0$.

При решении задачи синтеза оптимального различителя (обнаружителя) была показана определяющая роль отношения правдоподобия. Оказалось, что при гауссовой помехе эта статистика, по существу, предполагает применение корреляторов или СФ. Характеристики потенциальной помехоустойчивости приемника-различителя зависят от параметра $2E_s/N_0$ и степени близости сигналов — их корреляции по параметру.

Структура оптимальных приемников-оценителей параметров сигналов включает воспроизведение ФП $L(\lambda)$ или в более общем случае апостериорной ПРВ $W(\lambda/y)$. Получение оптимальной оценки связано с поиском глобального максимума этих функций. Гауссов характер аддитивной помехи и здесь предопределяет структуру приемников, которые содержат СФ или корреляторы. Дисперсия оценок МП зависит от параметра $2E_s/N_0$ и кривизны пика нормированного логарифма сигнальной части ФП. Эта кривизна совпадает с кривизной пика АКФ регулярного сигнала по оцениваемому параметру. Фундаментальная роль статистики в виде ФП связана с понятием количества фишеровской информации о параметре λ , содержащемся в независимой выборке, и неравенством Крамера — Рао, определяющим нижнюю границу дисперсии несмещенных оценок в регулярном случае.

Таким образом, мера близости сигналов, использующая АКФ по информативному параметру, оказалась исчерпывающей для рассмотрения задач обработки сигналов при гауссовой помехе. Параметры и форма АКФ определяют предельные возможности РТС по помехоустойчивости, точности и разрешающей способности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Березин Л. В. Теория и проектирование радиосистем / Л. В. Березин, В. А. Вейцель. — М. : Сов. радио, 1977.
- [2] Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов / Л. Е. Варакин. — М. : Сов. радио, 1970.
- [3] Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика / Д. Дюге. — М. : Наука, 1972.
- [4] Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б. Ф. Жданюк. — М. : Сов. радио, 1978.
- [5] Ивченко Г. И. Математическая статистика / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — М. : Высшая школа, 1984.
- [6] Кук Ч. Радиолокационные сигналы. Теория и применение / Ч. Кук, М. Бернфельд. — М. : Сов. радио, 1971.
- [7] Радиотехнические системы / под ред. Ю. М. Казаринова. — М. : Высшая школа, 1990.
- [8] Слока В. К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов / В. К. Слока. — М. : Сов. радио, 1970.
- [9] Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1983.
- [10] Тихонов В. И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В. И. Тихонов, Н. К. Кульман. — М. : Сов. радио, 1975.
- [11] Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1986.
- [12] Теоретические основы радиолокации / под ред. Я. Д. Ширмана. — М. : Сов. радио, 1970.
- [13] Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов / К. Хелстром. — М. : ИЛ, 1963.

-
- [14] Шахтарин Б. И. Случайные процессы в радиотехнике / Б. И. Шахтарин. — М. : Гелиос АРВ, 2006.
- [15] Пугачев В. С. Теория случайных функций / В. С. Пугачев. — М. : ФМЛ, 1962.
- [16] Тихонов В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. — М. : Радио и связь, 1961.
- [17] Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Сов. радио, 1977.
- [18] Плис А. И. MathCad 2000: математический практикум для экономистов и инженеров / А. И. Плис, Н. А. Сливина. — М. : Финансы и статистика, 2000. — 655 с.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$s(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t));$ $s(t) = \operatorname{Re} [\dot{S}(t)e^{i\omega_0 t}]$	Действительный узкополосный радиосигнал
$\dot{S}(t) = S(t)e^{i\Phi(t)}$	Комплексная огибающая сигнала
$\begin{array}{c} F^{-1} \\ \longleftrightarrow \\ F \end{array}$	Знак взаимного преобразования Фурье для двух функций слева и справа от него
$\dot{G}(\omega); \quad \dot{G}(\omega) \begin{array}{c} F^{-1} \\ \longleftrightarrow \\ F \end{array} \dot{S}(t)$	Спектральная функция комплексной амплитуды сигнала
$\dot{g}(\omega) = g(\omega); \quad \dot{g}(\omega) \begin{array}{c} F^{-1} \\ \longleftrightarrow \\ F \end{array} s(t);$ $\dot{g}(\omega) = 0.5 [\dot{G}(\omega - \omega_0) + \dot{G}^*(-\omega - \omega_0)]$	Комплексный частотный спектр $\dot{g}(\omega)$ действительного сигнала $s(t)$
$\Delta T \text{ и } \Delta\Omega = 2\pi \cdot \Delta F$	Среднеквадратические длительность и полоса частот сигнала
$B = \Delta T \cdot \Delta F \geq 1/4\pi$	База сигнала
$E_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) ^2 dt =$ $= \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) ^2 d\omega;$ $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) ^2 d\omega$	Энергия сигнала. $ \dot{G}(\omega) ^2$ энергетическая спектральная плотность
$\dot{G}(\omega - \omega_0) \begin{array}{c} F^{-1} \\ \longleftrightarrow \\ F \end{array} \dot{s}(t)$	Односторонний спектр комплексного узкополосного сигнала
$\dot{k}(\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$	Комплексный коэффициент передачи линейного фильтра
продолжение на следующей странице	

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$h(t) \xleftrightarrow{F^{-1}} \dot{k}(\omega)$	Импульсная реакция линейного фильтра
$q(x_0, v_0, x, v) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, x_0, v_0) s(t, x, v) dt$	Нормированная сигнальная функция, определяющая различие сигналов по двум неэнергетическим параметрам
$k(\tau, \Omega) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, \omega_0) s[(t - \tau); (\omega_0 - \Omega)] dt = \text{Re} \{ \dot{K}(\tau, \Omega) \cdot e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \}$	Частотно-временная автокорреляционная функция узкополосного радиосигнала; $\dot{K}(\tau, \Omega)$ — комплексная огибающая этой функции
$K(\tau, \Omega) = \dot{K}(\tau, \Omega) ; \quad \dot{K}(0, 0) = 1$	Функция неопределенности (ФН) сигнала или огибающая частотно-временной автокорреляционной функции
$K(\tau) = \dot{K}(\tau; 0) = \left \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right = \frac{1}{2E_s} \left \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f) ^2 e^{i2\pi f\tau} df \right ;$ $K\left(\frac{\tau_K}{2}\right) = 0.5; \quad 2E_s \dot{K}(\tau) \xleftrightarrow{F^{-1}} \dot{G}(\omega) ^2$	Огибающая временной автокорреляционной функции (АКФ) $k(\tau)$ детерминированного сигнала (иногда в контексте просто временная автокорреляционная функция). τ_k — ширина огибающей временной автокорреляционной функции по уровню 0.5
$K(F) = \left \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f - F) \dot{G}^*(f) df \right = \dot{K}(F) ; \quad \dot{K}(F) = \frac{1}{2E_s} \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) ^2 e^{i2\pi Ft} dt; \quad K\left(\frac{F_K}{2}\right) = 0.5$	Огибающая частотной автокорреляционной функции (АКФ) сигнала (иногда в контексте просто частотная автокорреляционная функция). F_K — ширина частотной автокорреляционной функции по уровню 0.5
$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(\mathbf{x})$	Совместная плотность распределения вероятностей (ПРВ) системы n случайных величин
$M[\dots] = \overline{[\dots]}; \quad D[\dots] = \overline{[\dots]^2} - [\overline{[\dots]}]^2$	Операторы математического ожидания (среднее по ансамблю) и дисперсии
$\mathbf{K}_n = M[\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T];$ \mathbf{n} — вектор столбец, \mathbf{n}^T — вектор строка	Ковариационная матрица случайного вектора \mathbf{n}
$D_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2$	Дисперсия случайной величины ε

продолжение на следующей странице

Обозначение в тексте	Смысловое содержание
$L(\lambda) = W(y/\lambda)$	Функция правдоподобия (ФП), совпадающая по виду с условной плотностью распределения вероятностей (ПРВ) принятых данных y при заданном значении параметра λ . При непрерывном отборе данных $L(\lambda)$ – функционал правдоподобия
$z(\lambda) = \ln [L(\lambda)] = z_s(\lambda, \lambda_0) + z_n(\lambda)$	Логарифм функционала правдоподобия, имеющий сигнальную $z_s(\cdot)$ и шумовую $z_n(\cdot)$ составляющие
$\hat{\lambda}_B, \hat{\lambda}_{МП}, \hat{\lambda}_{МНК}$	Оценки параметра λ : соответственно – байесовская, максимально правдоподобная и по методу наименьших квадратов
$\delta\tau_P$ и δF_P $\delta\tau_B$ и δF_B	Разрешающая способность по времени задержки и частоте (критерий Рэлея). Разрешающая способность по времени задержки и частоте (критерий Вудворда)
$q_0^2 = \frac{2E_s}{N_0}$	Максимальное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе согласованного фильтра
$\frac{N_0}{2} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{Гц}} \right]$	Двухсторонняя спектральная плотность мощности белого шума
$z_s(t, \lambda)$ и $z_n(t, \lambda)$	Соответственно, сигнальная и шумовая функции на выходе согласованного фильтра (СФ)
$i_1(\lambda) = M \left[\left(\frac{\partial \ln [W(y_1/\lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$	Количество информации Фишера о параметре λ , содержащееся в одиночном наблюдении

ГЛОССАРИЙ

Байесов риск R — статистическое среднее функции потерь по всем возможным реализациям наблюдаемого сигнала и оцениваемого параметра.

Безусловно несмещенной оценка называется, если $M[\hat{\lambda}] = M[\lambda]$.

Доверительный интервал — промежуток, который с вероятностью P_d «накрывает» неизвестное значение параметра λ .

Кривые потенциальной помехоустойчивости — зависимость $P_{\text{ош}} = f[2E_s/N_0]$ при оптимальных методах приема сигналов.

Марковским случайным процессом $\lambda(t)$ (*первого порядка*) называется случайный процесс, если условная плотность вероятности процесса λ_n в момент времени t_n по всем предыдущим значениям $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1$ зависит только от λ_{n-1} , т. е. $W(\lambda_n/\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1) = W(\lambda_n/\lambda_{n-1})$.

Несмещенной оценка называется, если ее математическое ожидание равно математическому ожиданию оцениваемого параметра.

Оценка параметра $\hat{\lambda}$ — некоторое правило (способ) получения $\hat{\lambda}$ по конкретной реализации входного сигнала.

Ошибка оценки — разность $\varepsilon = \lambda - \hat{\lambda}$.

Параметр когерентности — величина $a = A/\sigma$, определяющая статистические характеристики огибающей фазы смеси полезного сигнала и шума. Чем больше параметр когерентности, тем ближе временная структура сигнала на входе приемника к структуре регулярного сигнала.

Помехами называют процессы или поля, мешающие достоверному воспроизведению (извлечению) сообщения $\lambda(t)$.

Процессы (функции времени) $\lambda(t)$ или *поля* $\lambda(t, x, y, z)$ — функции пространственных координат и времени, содержащие полезную для потребителя информацию, которая подлежит воспроизведению в системах передачи информации или извлечению в системах извлечения информации.

Разрешающая способность количественно равна минимальной разнице по каждому из разрешаемых параметров двух сигналов, при которой возможно их раздельное обнаружение и измерение параметров.

Сигналом называется процесс $s(t, \lambda(t), \beta)$ или поле $e(t, x, y, z, \lambda(t), \beta)$, которые выполняют функцию переносчика сообщения $\lambda(t)$.

Смещение оценки — среднее значение $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - \hat{\lambda}$. Для несмещенных оценок $\bar{\varepsilon} = 0$.

Состоятельной оценкой в среднеквадратичном смысле называется оценка, если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{(\hat{\lambda}_T - \lambda)^2} = 0,$$

где $\hat{\lambda}_T$ означает, что оценка получена в результате обработки реализации $y(t)$, длительность которой T . Другими словами, для состоятельной оценки средний квадрат ошибки при $T \rightarrow \infty$ приближается к нулю.

Среднеквадратичная ошибка (СКО) оценки — величина $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$, имеющая размерность оцениваемого параметра.

Тело неопределенности — тело, образованное поверхностью $|K(\tau, F)|^2$ и плоскостью координат (τ, F) .

Условно несмещенной оценка называется, если среднее значение оценки вычисляют при фиксированном λ и справедливо равенство $M[\hat{\lambda}/\lambda] = \lambda$.

Функция потерь определяет потери, которые несет потребитель оценок вследствие ошибки $\varepsilon = \lambda - \hat{\lambda}$, обусловленной расхождением оценки $\hat{\lambda}$ с истинным параметром λ .

Функция правдоподобия (ФП) — функция $L(\lambda)$ неизвестного параметра λ ; ее математическая запись совпадает с условной плотностью вероятностей $W(\vec{y}/\lambda)$, где $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — выборка данных, содержащая информацию о параметре λ . Оценки параметров, определенные как положение $\max_{\lambda} L(\lambda)$, называют *оценками максимального правдоподобия (МП)*. Таким образом, *функция правдоподобия* есть функция неизвестного параметра λ и для нас важно изменение ее значений при изменении параметра, подлежащего оцениванию.

Характеристики обнаружения — семейство кривых $D = f(q_0)$ при $F = \text{const}$.

Эффективной несмещенной оценкой параметра λ называется оценка, если ее выборочная дисперсия равна границе Крамера — Рао.

Учебное издание

Тисленко Владимир Ильич

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.

Компьютерная верстка Мурзагулова Н. Е.

Издано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40
Тел. (3822) 533018.