

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение выс-
шего профессионального образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

Анализ типового радиотехнического звена

Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы (расчетного задания, самостоятельной работы.) по дисциплинам «Статистическая теория инфокоммуникационных систем», «Основы статистической радиотехники». для студентов направления(я) подготовки (специальность): 11.03.02 (инфокоммуникационные технологии и системы связи), уровень основной образовательной программы: академический бакалавриат.

РАЗРАБОТЧИК
Доцент каф. РТС, к.т.н.
А.С. Бернгардт

Рекомендовано к изданию кафедрой радиотехнических систем Томского го-
сударственного университета систем управления и радиоэлектроники

2016

Бернгардт А.С. Анализ типового радиотехнического звена: Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы (расчетного задания, самостоятельной работы.) по дисциплинам «Статистическая теория инфкоммуникационных систем», «Основы статистической радиотехники» для студентов Направление(я) подготовки (специальность): 11.03.02 (инфокоммуникационные технологии и системы связи), уровень основной образовательной программы: академический бакалавриат.

Пособие содержит 97 вариантов задания, посвященного корреляционно-спектральному анализу прохождения случайного процесса через упрощенное типовое радиотехническое звено. Приведены краткие теоретические сведения о методах анализа линейных и нелинейных преобразований случайных процессов. Даны основные расчетные формулы, необходимые для выполнения работы. Предназначается для студентов радиотехнических специальностей.

© Бернгардт А.С.

© Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2016 г..

Содержание

1	Цель выполнения расчетного задания (курсовой работы)	5
2	Задание на работу и ее содержание	6
2.1	Состав анализируемого радиотехнического звена	6
2.2	Тип входного воздействия	6
2.2.1	Общие замечания	6
2.2.2	Варианты входного воздействия	7
2.3	Тип первого линейного фильтра	7
2.4	Тип нелинейного элемента	8
2.5	Тип второго линейного фильтра	7
2.6	Вопросы, подлежащие разработке	9
3	Организация выполнения работы	10
3.1	Организация работы над заданием	10
3.2	Защита работы	11
4	Оформление расчетного задания (курсовой работы)	12
4.1	Содержание пояснительной записки	12
4.2	Требования к оформлению	13
5	Рекомендации по определению статистических характеристик отклика линейных и нелинейных устройств	15
5.1	Введение	15
5.2	Корреляционная функция и энергетический спектр	15
5.3	Время корреляции и эффективная полоса случайного процесса	17
5.4	Линейные преобразования случайных процессов	19
5.5	Нелинейные преобразования случайных процессов	23
5.5.1	Общая характеристика методов анализа	23
5.5.2	Корреляционные функции откликов нелинейных элементов, рассматриваемых в работе	25
	Рекомендуемая литература	29
	Приложение А Рекомендуемые варианты задания	30
	Приложение Б Образец титульного листа	31
	Приложение В Справочные формулы	32
	Приложение Г Пример расчета	33

Список условных обозначений

- $U(t)$ – процесс на входе анализируемого звена;
 $X(t)$ – процесс на выходе первого линейного фильтра;
 $Y(t)$ – процесс на выходе нелинейного элемента;
 $Z(t)$ – процесс на выходе второго линейного фильтра;
 $K(\omega)$ – комплексная частотная характеристика фильтра;
 K_{Φ} – коэффициент передачи линейного фильтра;
 $f(x)$ – характеристика нелинейного элемента (детектора);
 b – коэффициент передачи нелинейного элемента
 $W(.)$ – плотность вероятностей;
 $M[.]$ – оператор статистического усреднения;
 m – математическое ожидание (среднее значение);
 D – дисперсия;
 σ – среднеквадратическое отклонение;
 $\theta(.)$ – характеристическая функция;
 $\delta(\tau)$ – дельта-функция;
 $R(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $K(\tau)$ – ковариационная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho(\tau)$ – нормированная ковариационная функция, коэффициент корреляции;
 f – частота;
 ω – круговая (циклическая) частота;
 ω_0 – резонансная частота полосового фильтра, центральная частота спектра узкополосного процесса;
 A_0 – амплитуда гармонического колебания;
 $A(t)$ – огибающая узкополосного случайного процесса;
 $\varphi(t)$ – фаза узкополосного случайного процесса;
 φ_0 – начальная фаза гармонического колебания;
 $R_0(\tau)$ – огибающая корреляционной функции узкополосного случайного процесса;
 $K_0(\tau)$ – огибающая ковариационной функции узкополосного случайного процесса;
 $\rho_0(\tau)$ – огибающая нормированной ковариационной функции узкополосного случайного процесса;
 $S(\omega)$ – двусторонняя спектральная плотность мощности, энергетический спектр;
 τ_k – время (интервал корреляции);
 Π – эффективная полоса процесса.

1 Цель выполнения расчетного задания (курсовой работы)

Современный этап развития радиоэлектроники характеризуется следующими двумя тенденциями. С одной стороны, на передний план выдвигается требование повышения дальности действия радиотехнических систем при ограниченной мощности передачи. С другой стороны, предъявляются все более высокие требования к достоверности информации, которая извлекается в результате обработки принятого радиосигнала.

Если учесть, что любая радиотехническая система подвержена действию различного рода помех, то первое требование сводится к тому, что прием сигналов должен осуществляться при малых значениях отношения мощности сигнала к мощности помехи. Поскольку помеха носит непредсказуемый, случайный характер, то ее взаимодействие с сигналом в приемном устройстве приводит к непредсказуемым, случайным искажениям параметров сигналов, которые несут информацию. Чем больше уровень помехи по сравнению с мощностью сигнала на входе приемника, тем меньше достоверность извлекаемой информации в результате приема. Таким образом, сформулированные требования к радиотехническим системам вступают в противоречие, и приходится констатировать, что многие задачи радиотехники становятся бессодержательными, если не учитывать действие помех.

Из сказанного следует, что *одной из актуальных проблем при проектировании радиотехнических систем является исследование их помехоустойчивости. Под помехоустойчивостью в широком смысле понимают способность системы противостоять вредному действию помех.* Существуют различные количественные меры помехоустойчивости, зависящие от назначения конкретной системы (радиосвязь, радиолокация, телеметрия и т.д.) и от характера извлекаемой информации. *В конечном итоге, анализ помехоустойчивости сводится к оценке уровня искажений информации, получаемой с помощью исследуемой радиотехнической системы.*

Уровень искажения информации можно оценить с различной степенью полноты. Во многих случаях достаточно определить среднее значение и корреляционную функцию процесса на выходе оконечного устройства исследуемой системы. Это позволяет рассчитать соотношение мощностей помехи и сигнала на выходе анализируемой системы, а также распределение мощности по частотам.

Поскольку приемные и оконечные устройства извлечения информации любой радиотехнической системы представляют собой набор линейных и нелинейных элементов, то задача исследования помехоустойчивости системы по существу сводится к анализу прохождения сигнала и помехи через линейные и нелинейные устройства.

Целью работы является изучение существующих методов анализа радиотехнических устройств при случайных воздействиях и овладение навыками практического расчета требуемых статистических характеристик случайного процесса на выходе системы.

Ниже даны рекомендации по использованию методов анализа линейных и нелинейных радиотехнических устройств при случайных воздействиях. Ограничиваться только указанными рекомендациями не следует. **При выполнении работы студент должен проявлять самостоятельность и стремиться к поиску рациональных решений.**

2 Задание на работу и ее содержание

2.1 Состав анализируемого радиотехнического звена

Статический анализ реальной радиотехнической системы представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Поскольку работа носит учебный характер и время, отведенное на ее выполнение, ограничено, то в рамках данной работы предлагается провести анализ *упрощенного типового радиотехнического звена*, состоящего из первого линейного фильтра (ЛФ1), нелинейного элемента (НЭ) и второго линейного фильтра (ЛФ2). Предполагается, что освоенная методика и приобретенные навыки позволят будущему радиоинженеру применить ее к анализу помехоустойчивости более сложных систем.

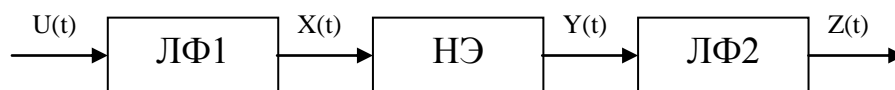


Рисунок 1-Схема типового радиотехнического звена.

Каждый студент получает один из вариантов задания в виде набора из четырех цифр, где первая цифра означает тип входного воздействия, вторая - тип ЛФ1, третья - тип НЭ и четвертая - тип ЛФ2. *Рекомендуемые варианты заданий приведены в приложении А.*

Укажем типы сигналов на входе и типы устройств, составляющих радиотехническое звено.

2.2 Тип входного воздействия

2.2.1 Общие замечания

Входное воздействие $U(t)$ представляет собой аддитивную смесь *полезного сигнала и шума*.

Полезным сигналом является гармоническое колебание, амплитуда A_0 и несущая частота ω_0 которого постоянны, а фаза φ случайна и распределена равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$.

$$S(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1)$$

Использованы *три типа шума*:

- нормальный белый шум $n_1(t)$ - стационарный нормальный случайный процесс с нулевым средним и двусторонним энергетическим спектром

$$S(\omega) = N_0, \quad -\infty < \omega < \infty; \quad (2.2)$$

- нормальный шум $n_2(t)$ с экспоненциальной корреляционной функцией
- стационарный узкополосный случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma_n^2 \exp[-\alpha|\tau|] \cos \omega_0 \tau; \quad (2.3)$$

- нормальный шум $n_3(t)$ с гауссовской корреляционной функцией - стационарный узкополосный случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma_n^2 \exp[-\alpha^2 \tau^2] \cos \omega_0 \tau. \quad (2.4)$$

Конкретные варианты комбинаций сигнала и шума определены ниже.

2.2.2 Варианты входного воздействия

2.2.2.1 Нормальный белый шум

$$u(t) = n_1(t).$$

- 2.2.2.2 Нормальный шум с экспоненциальной корреляционной функцией

$$u(t) = n_2(t).$$

2.2.2.3 Сумма сигнала и нормального белого шума

$$u(t) = s(t) + n_1(t).$$

- 2.2.2.4 Сумма сигнала и нормального шума с экспоненциальной корреляционной функцией

$$u(t) = s(t) + n_2(t).$$

2.2.2.5 Нормальный шум с гауссовской корреляционной функцией

$$u(t) = n_3(t).$$

- 2.2.2.6 Сумма сигнала и нормального шума с гауссовской корреляционной функцией

$$u(t) = s(t) + n_3(t).$$

2.3 Тип первого линейного фильтра

- 2.3.1 Одноконтурный резонансный усилитель, квадрат амплитудно-частотной характеристики которого определяется выражением

$$|K_{\phi_1}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi_1}^2 \beta^2}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{K_{\phi_1}^2 \beta^2}{\beta^2 + (\omega + \omega_0)^2}.$$

- 2.3.2 Усилитель с гауссовской частотной характеристикой (многоступенчатый резонансный усилитель)

$$|K_{\phi_1}(\omega)|^2 = K_{\phi_1}^2 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta^2}\right] + K_{\phi_1}^2 \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2\beta^2}\right].$$

2.4 Тип нелинейного элемента

2.4.1 Нелинейный элемент с параболической характеристикой

$$f(x) = b_1x + b_2x^2.$$

2.4.2 Двухполупериодный квадратичный детектор

$$f(x) = bx^2.$$

2.4.3 Однополупериодный квадратичный детектор

$$f(x) = \begin{cases} bx^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2.4.4 Двухполупериодный линейный детектор

$$f(x) = b|x|.$$

2.4.5 Однополупериодный линейный детектор

$$f(x) = \begin{cases} bx, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2.5 Тип второго линейного фильтра

2.5.1 Усилитель с нагрузкой в виде RC-цепи

$$|K_{\phi 2}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi 2}^2 \gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2}.$$

2.5.2 Два последовательно соединенных усилителя с нагрузкой в виде RC-цепи со слабой связью

$$|K_{\phi 2}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi 2}^2 \gamma^4}{(\gamma^2 + \omega^2)^2}.$$

2.5.3 Усилитель с нагрузкой в виде пропорционально-интегрирующего фильтра [2, с.286]

$$|K_{\phi 2}(\omega)|^2 = K_{\phi 2}^2 \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T_0^2}, \quad T_1 \ll T_0.$$

2.5.4 Одноконтурный резонансный усилитель, настроенный на удвоенную несущую частоту

$$|K_{\phi 2}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi 2}^2 \gamma^2}{\gamma^2 + (\omega - 2\omega_0)^2} + \frac{K_{\phi 2}^2 \gamma^2}{\gamma^2 + (\omega + 2\omega_0)^2}.$$

2.5.5 Два последовательно соединенных резонансных усилителя со слабой связью, настроенных на удвоенную несущую частоту

$$|K_{\phi 2}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi 2}^2 \gamma^4}{[\gamma^2 + (\omega - 2\omega_0)^2]^2} + \frac{K_{\phi 2}^2 \gamma^4}{[\gamma^2 + (\omega + 2\omega_0)^2]^2}.$$

2.5.6 Усилитель с гауссовской характеристикой (многоступенчатый усилитель)

$$|K_{\phi 2}(\omega)|^2 = K_{\phi 2}^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\gamma^2}\right).$$

2.5.7 Усилитель с гауссовской частотной характеристикой (многокаскадный резонансный усилитель), настроенный на удвоенную несущую частоту

$$|K_{\phi_2}(\omega)|^2 = K_{\phi_2}^2 \exp\left[-\frac{(\omega - 2\omega_0)^2}{2\gamma^2}\right] + K_{\phi_2}^2 \exp\left[-\frac{(\omega + 2\omega_0)^2}{2\gamma^2}\right].$$

2.6 Вопросы, подлежащие разработке

2.6.1 Статистический анализ типового радиотехнического звена включает в себя:

а) определение энергетического спектра, корреляционной функции, среднего значения и дисперсии процессов на выходах ЛФ1, НЭ и ЛФ2;

б) определение времени корреляции и эффективной полосы *флуктуационной составляющей* процессов на выходах ЛФ1 и ЛФ2, а также *составляющих* отклика НЭ, определяющих отклик ЛФ2.

в) выбор основных параметров, определяющих входное воздействие и анализируемое звено и расчет указанных выше числовых характеристик.

2.6.2 Необходимо:

- построить графики *огibaющей* корреляционной функции и *одностороннего* энергетического спектра процессов на входе и на выходе ЛФ1;

- построить графики зависимостей дисперсии и времени корреляции отклика ЛФ1 от полосы пропускания фильтра;

- изобразить *структуру энергетического спектра* отклика НЭ; построить графики низкочастотной составляющей энергетического спектра и соответствующей ей составляющей корреляционной функции, определяющих отклик ЛФ2;

- построить график зависимости среднего значения отклика нелинейного элемента от полосы пропускания ЛФ1;

- построить графики энергетического спектра, корреляционной функции и коэффициента корреляции отклика ЛФ2 при трех значениях отношения полос пропускания ЛФ1 и ЛФ2, например: 0,25; 1; 4. Если какое-либо из указанных значений приводит к

возрастанию кратности полюсов энергетического спектра откликов ЛФ1 или ЛФ2, его необходимо изменить;

- построить графики зависимостей дисперсии и времени корреляции отклика ЛФ2 от его полосы пропускания для *двух* значений полосы пропускания ЛФ1, отличающихся в два раза;

- построить графики зависимостей дисперсии и эффективной полосы процесса на выходе ЛФ2 от полосы пропускания ЛФ1; полоса пропускания ЛФ2 постоянна;

- знать смысл и размерность параметров, определяющих входное воздействие и анализируемую цепь, представлять характер их влияния на исследуемые статистические характеристики;

- представлять возможный вид реализаций случайных процессов во всех точках исследуемого радиотехнического звена.

2.6.3 Анализ производится для *установившегося режима* работы линейных устройств и *неинерционного* нелинейного элемента; предполагается, что взаимным влиянием линейных и нелинейных элементов можно пренебречь.

2.6.4 Численные значения параметров, определяющих входное воздействие и анализируемую цепь, выбираются самим студентом близкими к существующим в реальных радиотехнических устройствах.

2.6.5 При выполнении задания студент должен показать знание методов исследования линейных и нелинейных преобразований случайных процессов и литературы по статической радиотехнике, в которой излагаются эти методы.

3 Организация выполнения работы

3.1 Организация работы над заданием

3.1.1 Срок выполнения работы при 15-недельном семестре составляет 13 недель. Две последние недели отводятся для организации защиты работ. Объем самостоятельной работы рассчитан примерно на 35 часов (порядка 2,5 часов в неделю). Ориентировочная трудоемкость отдельных этапов работ приведена в таблице 1:

Таблица 3.1

№	Наименование этапа	Объем, %
1.	Анализ задания и знакомство с литературой	10
2.	Определение статистических характеристик процесса на выходе первого линейного фильтра	20
3.	Определение статистических характеристик процесса на выходе нелинейного элемента	10
4.	Определение статистических характеристик процесса на выходе второго линейного фильтра	30
5.	Расчет на ЭВМ зависимостей указанных в задании и оформление пояснительной записки	30

3.1.2 Выполнение работы рекомендуется начинать с составления календарного плана в соответствии данными таблицы 3.1. Студенты выполняют работу под руководством преподавателя, который консультирует их во время *обязательных* занятий (по расписанию) и дополнительных консультаций. На обязательных занятиях преподаватель контролирует работу каждого студента. *Явка на эти занятия обязательна для всех студентов с необходимой для расчета литературой и рабочей тетрадью.*

В рабочей тетради выполняются все варианты расчетов, заносятся справочные данные, сведения из литературных источников, выделяются

страницы для списка литературы. Используемую в расчетах статью или книгу нужно сразу же записать в список литературы, не откладывая до оформления пояснительной записки, когда этой книги может не оказаться под рукой. Рабочая тетрадь предъявляется преподавателю для текущего контроля.

3.1.3 Готовую работу студент предъявляет для проверки за 3-4 дня до защиты. После проверки работы преподаватель фиксирует на титульном листе пояснительной записки «к защите» или «доработать». Требование «доработать» предусматривает сдачу пояснительной записки после доработки на повторную проверку. При доработке *нельзя убирать листы с замечаниями. Они должны быть подшиты в конце пояснительной записки.*

3.2. Защита работы

3.2.1 Защита работы производится перед комиссией. Работы к защите принимаются при наличии зачетной книжки и допускающей отметки руководителя.

Комиссия по защите преследует цель выяснить:

- а) умение студента кратко, четко, технически грамотно изложить содержание работы;
- б) умение обосновать выбранные методы анализа линейных и нелинейных устройств, указанных в задании;
- в) степень владения теоретическим материалом по предмету работы;
- г) правильность выполнения расчетов;
- д) знание физического содержания и основных свойств определяемых статистических характеристик.

3.2.2 На выступление студента по содержанию работы отводится 5-7 минут. Защита длится 20-25 минут и включает в себя: выступление студента, вопросы членов комиссии и ответы студента, выступление членов комиссии, заключительное слово защищающегося, сообщение председателя комиссии об оценке. *Оценка за работу отражает качество ее выполнения и защиты.*

При оценке качества выполнения учитываются:

- соответствие содержания пояснительной записки требованиям задания;
- качество выполнения расчетной части;
- качество оформления (соответствие стандартам);
- использование ЭВМ при выполнении расчетов и оформлении пояснительной записки.

4 Оформление расчетного задания (курсовой работы)

4.1 Содержание пояснительной записки

4.1.1 Курсовая работа (задание) оформляется в виде расчетно-пояснительной записки, в которой следует предусмотреть следующие разделы:

- а) задание на работу;
- б) анализ задания и выбор метода расчета;
- в) определение статистических характеристик процессов на выходах отдельных устройств, включенных в типовое звено;
- г) численный расчет и построение графиков требуемых зависимостей;
- д) заключение.

4.1.2 Задание на работу составляется студентом на основании шифра, выданного руководителем.

4.1.3 В разделе «*Анализ задания и выбор метода расчета*» кратко излагаются цель и основные задачи, предусмотренные заданием. Рассматриваются возможные методы расчета статистических характеристик процессов на выходах линейных и нелинейных устройств и выбираются методы анализа, в наибольшей степени отвечающие требованиям задания. Обоснование выбранного метода проводится на основе предварительной оценки сложности анализа по тому или иному методу.

4.1.4 Раздел «*Определение статистических характеристик процессов на выходах отдельных устройств, включенных в типовое звено*» в пояснительной записке оформляется в виде трех подразделов, в которых отражается определение статистических характеристик процессов на выходах ЛФ1, НЭ и ЛФ2 соответственно. На основании выбранного метода должны быть получены формулы в замкнутом виде для расчета статистических характеристик, указанных в задании. При выполнении пунктов задания в этом разделе студент должен умело пользоваться *приближениями и допущениями, которые упрощают расчетные соотношения*, сохраняя достаточную для практики точность.

4.1.5 В разделе «*Численный расчет и построение графиков*» по полученным формулам производится расчет требуемых статистических характеристик откликов ЛФ1, НЭ и ЛФ2, а также расчет и построение графиков зависимостей, предусмотренных в задании. Для расчетов необходимо использовать численные значения параметров, определяющих входное воздействие и анализируемую цепь (спектральная плотность мощности шума, коэффициенты передач, полосы пропускания фильтров и т.д.), близкие к реально существующим в приемных устройствах радиотехнических систем. Результаты расчетов предусматриваются в виде таблиц и графиков.

4.1.6 В разделе «*Заключение*» формулируются основные результаты проделанной работы и дается физическое объяснение полученных зависимостей.

4.2 Требования к оформлению

4.2.1 При оформлении текста пояснительной записки следует пользоваться стандартом вуза *ОС ТАСУР 6.1-97 “Работы студенческие учебные и выпускные квалификационные. Общие требования и правила оформления”*. Ниже приведены некоторые требования к оформлению.

4.2.2 Текст должен быть выполнен на листах формата А4, сброшюрованных в отдельную тетрадь или переплетенных. Работа начинается с титульного листа, затем располагается реферат, заполненный бланк задания, содержание с указанием страниц, список условных обозначений и сокращений, введение, основная часть, заключение, список использованных источников, приложения.

4.2.3 Содержание пояснительной записки разбивают на *разделы и подразделы*. При необходимости разделы и подразделы разбивают на *пункты*, а пункты - на *подпункты*.

Разделы должны иметь порядковые номера, обозначенные арабской цифрой без точки. Номера подразделов состоят из номера раздела и подраздела, разделенных точкой. Номера пунктов состоят из номеров раздела, подраздела и пункта, разделенных точкой. Все номера записывают с абзацного отступа.

4.2.4 Разделы и подразделы должны иметь *заголовки*. Заголовки выполняются с прописной буквы без точки в конце. Начинается заголовок с номера. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой. Переносы слов в заголовках не допускаются.

Расстояние между заголовком и текстом должно быть равно удвоенному межстрочному расстоянию; между заголовками раздела и подраздела – одному межстрочному расстоянию.

4.2.5 Внутри пунктов или подпунктов могут быть приведены *перечисления*. Перечисления записывают с абзацного отступа. Перед каждой позицией следует ставить дефис или строчную букву со скобкой. Для дальнейшей детализации перечислений необходимо использовать арабские цифры со скобкой, а запись производится с абзацного отступа. Начинается перечисление со строчной буквы. В конце перечисления, если за ним следует еще перечисление, ставят точку с запятой.

4.2.6 *Формулы* нумеруют арабскими цифрами в пределах раздела, номер ставят с правой стороны листа, на уровне формулы, в круглых скобках. Номер формулы состоит из номера раздела и порядкового номера. Ссылку в тексте на порядковый номер формулы дают в скобках, например, “... в формуле (5)”. Рекомендуются нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в последующем тексте.

Если значения символов, входящих в формулу, *не расшифрованы* в списке условных обозначений и сокращений, то их расшифровка должна быть приведена непосредственно за формулой. Значение каждого символа,

входящего в формулу, записывают с новой строки. Первая строка расшифровки должна начинаться со слова “где” без двоеточия после него.

4.2.7 При аналитических расчетах рекомендуется следующий порядок записи: приводится соответствующая формула, после знака равенства подставляются числовые значения в основных единицах системы СИ и пишется результат с указанием единиц измерения по ГОСТу (В, мВ, мкВ, А, мА, мкА, Ом, кОм, МОм, Гц, КГц, МГц, Вт, с, мс, мкс, нс).

4.2.8 Количество *иллюстраций* должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста. Все иллюстрации нумеруют в пределах раздела арабскими цифрами, например, “Рисунок 1.2”. На все иллюстрации должны быть ссылки в тексте, например, (рисунок 1.2) или “в соответствии с рисунком 1.2”. Иллюстрации могут иметь наименования, соответствующие содержанию. Слово “рисунок”, его номер и наименование помещают ниже изображения и пояснительных данных симметрично иллюстрации.

4.2.9 Все *таблицы* нумеруют в пределах раздела арабскими цифрами. Над левым верхним углом таблицы помещают надпись “Таблица” с указанием порядкового номера, например, “Таблица 2.1”. Если таблица имеет название, его помещают после номера таблицы через тире. На все таблицы должны быть ссылки в тексте.

4.2.10 В пояснительной записке должен быть приведен список использованной литературы. Каждый библиографический источник должен содержать:

- фамилию и инициалы автора (сначала фамилия, потом инициалы);
- название статьи (или книги);
- название журнала, книги;
- номер тома, номер выпуска;
- издательство, год издания;
- страницы: первую и последнюю (для статьи).

В тексте записки ссылки на литературу делаются в квадратных скобках.

4.2.11 Материалы иллюстративного и вспомогательного характера рекомендуется включать *в приложения*. Приложения обозначают прописными буквами русского алфавита. Начинать приложения следует с новой страницы. Посередине страницы помещают «Приложение Б», а под ним (обязательное), если его выполнение предусмотрено заданием, или (справочное). *Приложение должно иметь заголовок*. Он записывается ниже отдельной строкой с прописной буквы симметрично относительно текста.

4.2.12 Все листы работы должны иметь сквозную нумерацию. Номер листа проставляют в его правом верхнем углу. Первым листом является титульный лист, но на нем номер не проставляют.

Образец оформления титульного листа приведен в приложении Б.

Работы, оформленные неаккуратно, не в соответствии с изложенными выше требованиями, к защите не допускаются.

5 Рекомендации по определению статистических характеристик отклика линейных и нелинейных устройств

5.1 Введение

Любая радиотехническая система обычно состоит из комбинации *линейных и нелинейных* устройств. К *линейным* устройствам можно отнести *усилители, фильтры, длинные линии и т.д.* К *нелинейным* относят *смесители, модуляторы, ограничители, триггеры, умножители, все автоколебательные системы и т.д.*

К чисто линейным системам приходят, как правило, в результате *упрощений*, допустимых лишь при определенных условиях. Так, например, усилитель можно отнести к числу линейных устройств лишь в том случае, если входной случайный процесс с большой вероятностью располагается в пределах линейного участка нелинейной вольтамперной характеристики активного элемента, на котором построен усилитель. В дальнейшем считаем, что усилители, входящие в анализируемое радиотехническое звено, удовлетворяют этому требованию и рассматриваются как линейные.

Нелинейные устройства подразделяют на *инерционные* и *неинерционные*. *Неинерционным* называют такое устройство, *отклик* которого в *любой момент времени* определяется только *значением входного воздействия в тот же самый момент времени*, в противном случае устройство называют *инерционным*. Анализ нелинейных инерционных устройств, представляет собой чрезвычайно сложную, а подчас и *неразрешимую* задачу. Поэтому обычно стремятся представить радиотехническое звено в виде последовательного соединения линейных и нелинейных элементов. *Если нелинейные элементы можно считать неинерционными и взаимным влиянием между линейными и нелинейными элементами можно пренебречь, тогда задачи линейного инерционного и нелинейного неинерционного преобразования решаются отдельно.* Типовое звено, анализируемое в курсовой работе, удовлетворяет этим условиям, поэтому методы анализа нелинейных инерционных преобразований в дальнейшем не рассматриваются.

Методы анализа линейных и нелинейных устройств существенно отличаются между собой. Краткая характеристика этих методов при случайных входных воздействиях дана в последующих подразделах. Более подробно методы анализа освещены в литературе [1-7].

5.2 Корреляционная функция и энергетический спектр

Корреляционная и ковариационная функции несут важную информацию о линейной статистической зависимости между двумя отсчетами случайного процесса, т.е. о его динамике, а также о его мощности.

По определению корреляционная функция есть математическое ожидание произведения значений случайного процесса в два различных момента времени

$$R_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]. \quad (5.1)$$

Наряду с корреляционной функцией, используют и *ковариационную функцию, представляющую собой математическое ожидание произведения значений центрированного случайного процесса в два различных момента времени*

$$K_x(t_1, t_2) = M[X^0(t_1)X^0(t_2)], \quad (5.2)$$

где $X^0(t) = X(t) - m_X(t)$.

Несложно убедиться, что

$$K_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2).$$

Для *стационарных* случайных процессов как корреляционная, так и ковариационная функции зависят от *разности моментов времени*, в которые берутся значения случайного процесса, например,

$$R_X(\tau) = M[X(t)X(t-\tau)].$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса, *не содержащего квазидетерминированных составляющих*, обладает следующими свойствами:

- 1) $R_X(0) = P_{cp}$, это полная средняя мощность процесса;
- 2) $R_X(\infty) = m_x^2$, то есть значение корреляционной функции при достаточно большом аргументе равно мощности постоянной составляющей процесса;
- 3) $\sigma_x^2 = K_x(0) = R_X(0) - R_X(\infty)$, то есть мощность флуктуаций около среднего значения равна разности между полной мощностью процесса и мощностью постоянной составляющей;
- 4) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$, то есть корреляционная функция четна.

Наряду с *энергетическими (мощностными)* характеристиками, корреляционная функция определяет степень *линейной вероятностной зависимости (корреляции)* между значениями случайного процесса в два момента времени, разделенными интервалом τ . По мере увеличения интервала τ корреляция между значениями процесса уменьшается. При этом сильная корреляция понимается в том смысле, что знание процесса в момент времени $t-\tau$ позволяет с большой уверенностью прогнозировать значение процесса в момент времени t . И наоборот, значения процесса в два различных момента времени считаются некоррелированными, если диапазон значений, которые может принять процесс в момент времени t не зависит от того, какое значение имел процесс в момент времени $t-\tau$.

Характеристикой коррелированности значений случайного процесса в чистом виде, безотносительно к энергетическим параметрам, является нормированная ковариационная функция, называемая также функцией коэффициента корреляции или коэффициентом корреляции.

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (5.3)$$

Эта функция является количественной мерой степени линейной вероятностной зависимости (корреляции) отсчетов стационарного случайного процесса, разделенных интервалом τ , и достигает максимального значения, равного единице, в совпадающие моменты времени при $\tau=0$.

Следует отметить, что если отсчеты случайного процесса *независимы*, то

они обязательно *некоррелированы* и ковариационная функция равна нулю. *Обратное утверждение справедливо только для нормальных случайных процессов.* В общем случае равенство нулю ковариационной функции означает лишь отсутствие линейной вероятностной зависимости, другие виды зависимостей могут присутствовать.

При фиксированном интервале времени τ корреляция между значениями процесса определяется тем, насколько быстро и хаотично могут изменяться реализации случайного процесса на этом интервале, т.е. динамикой процесса.

Очевидно, что скорость изменения реализаций случайного процесса зависит от того, на каких частотах сосредоточена его мощность, т.е. от энергетического спектра. Существует связь между корреляционной функцией $R_X(\tau)$ и энергетическим спектром $S_X(\omega)$, которая устанавливается *теоремой Винера-Хинчина*.

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (5.5)$$

Энергетический спектр $S_X(\omega)$ определяет плотность, с которой средняя мощность процесса распределена по частотам. Это средняя мощность, приходящаяся на полосу шириной один Герц на частоте ω . Использование в качестве аргумента круговой частоты $\omega=2\pi f$ объясняется удобством записи и вызвана тем, что во все выражения линейная частота f входит в виде произведения $2\pi f$. Корреляционная функция и энергетический спектр обладают всеми свойствами пары преобразований Фурье. В частности, *чем шире спектр, тем уже корреляционная функция.*

5.3 Время корреляции и эффективная полоса случайного процесса [1,3,7]

Время корреляции τ_K дает ориентировочное представление о том, на каком интервале времени в среднем имеет место коррелированность между значениями случайного процесса.

Эффективная полоса процесса Π дает представление о величине интервала частот в котором сосредоточена основная доля мощности флуктуационной составляющей случайного процесса. Под *флуктуационной* будем понимать составляющую случайного процесса *без постоянной и квазидетерминированной составляющих.* Флуктуационной составляющей соответствует непрерывная часть энергетического спектра, не содержащая δ -функций.

Будем определять время корреляции и эффективную полосу процесса с помощью соотношений

$$\tau_K = \frac{1}{K(0)} \int_0^{\infty} |K(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau, \quad (5.6)$$

$$П = \frac{1}{S_0 2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (5.7)$$

где S_0 – значение энергетического спектра при некоторой характерной частоте, обычно соответствующей максимуму.

Для процессов на выходах линейных трактов радиотехнических систем характерны *два типа* ковариационных функций [1,3,7].

Первый тип соответствует процессам на выходах трактов *низкой частоты*, спектр которых сосредоточен в области нулевых частот. При этом ковариационные функции часто имеют вид *монотонно убывающих* функций, для которых $|K(\tau)|=K(\tau)$, следовательно

$$\tau_K = \frac{1}{K(0)} \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau = \frac{S(0)}{2K(0)}, \quad (5.8)$$

$$П = \frac{K(0)}{2S(0)}. \quad (5.9)$$

Второй тип соответствует процессам на выходах трактов *высокой и промежуточной частоты*, спектр которых сосредоточен в *сравнительно узкой полосе частот $\Delta\omega$ около некоторой центральной частоты ω_0 ($\Delta\omega \ll \omega_0$)*. Такие процессы называют *узкополосными*. Узкополосные случайные процессы представляют собой гармонические колебания со случайной амплитудной и фазовой модуляцией, то есть

$$X(t) = A(t) \cos(\omega_0 t - \varphi(t)).$$

Случайную функцию $A(t)$ называют *огибающей*, а функцию $\varphi(t)$ – *фазой* узкополосного процесса. Это *медленно изменяющиеся по сравнению с $\cos\omega_0 t$ случайные функции времени*. Ковариационные функции узкополосных процессов имеют вид *быстро осциллирующих затухающих функций*

$$K_X(\tau) = K_0(\tau) \cos(\omega_0 \tau - \psi(\tau)),$$

где $K_0(\tau)$ – огибающая,

$\psi(\tau)$ – фаза ковариационной функции.

Если энергетический спектр узкополосного процесса *симметричен* относительно центральной частоты ω_0 , тогда

$$K(\tau) = K_0(\tau) \cos(\omega_0 \tau).$$

В этом случае $|K(\tau)|=K_0(\tau)$, следовательно

$$\tau_K = \frac{1}{K(0)} \int_0^{\infty} K_0(\tau) d\tau = \frac{S(\omega_0)}{K(0)}, \quad (5.10)$$

$$П = \frac{K(0)}{2S(\omega_0)}. \quad (5.11)$$

Из полученных выражений следует что произведение интервала корреляции на эффективную полосу величина постоянная. Следовательно, *расширение энергетического спектра приводит к сужению корреляционной функции*.

5.4 Линейные преобразования случайных процессов

Система называется *линейной*, если выполняется *принцип суперпозиции*, который утверждает, что *полный отклик* линейной системы, возникающий в результате действия некоторого количества входных воздействий, *равен сумме откликов* от каждого входного воздействия.

Важнейшим подклассом линейных систем являются *системы с постоянными параметрами*, для которых сдвиг во времени входного воздействия приводит к аналогичному сдвигу во времени отклика системы. *В дальнейшем рассматриваются только линейные системы с постоянными параметрами.*

Линейная система считается заданной, если известны ее *импульсная характеристика* $g(t)$ или *комплексная частотная характеристика* $K(\omega)$. *Импульсной характеристикой* системы называется ее отклик на воздействие в виде δ -функции. *Комплексная частотная характеристика* представляет зависимость от частоты отношения отклика системы к входному гармоническому воздействию.

Комплексная частотная и импульсная характеристики связаны между собой парой преобразований Фурье.

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

При анализе прохождения случайных процессов через линейные устройства рассматриваются задачи *двух типов*:

- определение *многомерных законов распределения* отклика устройства;
- определение *числовых характеристик*, чаще всего *корреляционной функции и энергетического спектра отклика*.

Первая задача является чрезвычайно сложной, за исключением случая, когда входное воздействие представляет собой нормальный случайный процесс. Известно, что линейное преобразование нормального случайного процесса дает опять нормальный случайный процесс. Поэтому, при прохождении нормального случайного процесса через линейное устройство изменяются только его числовые характеристики - среднее значение и корреляционная функция, правила расчета которых будут определены ниже. Следует также отметить, что *если эффективная полоса входного воздействия намного больше, чем полоса пропускания устройства, то отклик такого устройства имеет тенденцию к нормализации.*

В курсовой работе решается вторая задача, то есть определяется корреляционная функция отклика линейного устройства, если входное воздействие – нормальный стационарный случайный процесс с известной корреляционной функцией.

Напомним, как определяются числовые характеристики отклика линейного устройства в установившемся режиме [1,3-5]. Отклик и входное воз-

действие линейного устройства связаны известным соотношением, которое называется *интегралом свертки*.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du. \quad (5.12)$$

Определим *среднее значение отклика*, усреднив левую и правую часть предыдущего выражения. Тогда

$$M[Y(t)] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du\right].$$

Операторы статистического усреднения и интегрирования являются *линейными и независимыми*, поэтому *порядок их выполнения можно изменять*. Вынося неслучайные функции за знак оператора статистического усреднения, получим

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)m_X(t-u)du.$$

Определим *корреляционную функцию* отклика линейного устройства. Известно (5.1), что

$$R_Y(t_1, t_2) = M[Y(t_1)Y(t_2)].$$

Подставив выражение для отклика линейного устройства (5.12) и изменяя порядок статистического усреднения и интегрирования, получим

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(v)R_X(t-u, t_2-v)dudv.$$

Если процесс на входе линейного устройства стационарен, тогда

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = m_X K(0), \quad (5.13)$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(v)R_X(\tau-u+v)dudv. \quad (5.14)$$

Из последних выражений видно, что *при стационарном входном воздействии отклик линейной системы в установившемся режиме также будет стационарным*.

Напомним, что энергетический спектр и корреляционная функция случайного процесса связаны парой преобразований Фурье, поэтому

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(v)R_X(\tau-u+v)\exp(-j\omega\tau)dudvd\tau.$$

С помощью замены $z=\tau-u+v$ переменные в последнем выражении разделяются, и оно приводится к виду

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)|K(\omega)|^2. \quad (5.15)$$

Формула (5.15) указывает *закон преобразования энергетического спектра* стационарного случайного процесса при его прохождении через линейную систему с известной частотной характеристикой. Как и следовало ожидать, фазовая характеристика системы на закон преобразования энергетического спектра влияния не оказывает.

Таким образом, задача определения корреляционной функции и энергетического спектра отклика линейного устройства в установившемся режиме при стационарном входном воздействии полностью решается с помощью формул (5.4) и (5.14) или (5.5) и (5.15). При использовании (5.4) и (5.14) анализ производится *во временной области (временной метод)*, а при использовании (5.5) и (5.15) *в частотной области (частотный метод)*. Анализ, как во временной, так и в частотной области даёт одинаковые результаты, и выбор конкретного метода обусловлен лишь удобствами расчета.

Практика показывает, что расчеты упрощаются, если анализ производить в частотной области. Действительно, для вычисления корреляционной функции отклика линейной цепи временным методом необходимо вычислить двойной интеграл (5.14), что часто бывает сделать очень сложно. При анализе в частотной области наиболее трудоемким является вычисление обратного преобразования Фурье (5.5) для определения корреляционной функции отклика по известному энергетическому спектру. Вычисление интеграла (5.5) во многих случаях проще, чем двойного интеграла (5.14).

В частности, на выходе физически реализуемой линейной системы при широкополосном входном воздействии энергетический спектр отклика представляет собой дробно-рациональную функцию квадрата частоты ω и может быть представлен следующим образом:

$$S(\omega) = \frac{G_{n-1}(\omega^2)}{F_n(\omega^2)}, \quad (5.16)$$

где $G_{n-1}(\omega^2)$ - полином степени $(n-1)$, а $F_n(\omega^2)$ - полином степени n относительно квадрата частоты. Вычисление интеграла (5.5) в подобном случае может быть облегчено при использовании *методов контурного интегрирования на плоскости комплексного переменного*, которые основываются на *теореме о вычетах теории аналитических функций*. Напомним некоторые необходимые сведения из теории аналитических функций [8].

Функция комплексной переменной называется аналитической в некоторой области, если она определена и дифференцируема в каждой точке этой области. Пусть $f(z) = \varphi(z)/\theta(z)$ - аналитическая функция в некоторой области комплексной переменной, за исключением ограниченного числа особых точек, в которых знаменатель обращается в ноль. Эти точки называются *полюсами* функции $f(z)$. Полюс имеет кратность m , если он повторяется m раз; при $m=1$ полюс называется простым. В соответствии с теоремой о вычетах [8]

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_i \operatorname{Res} f(z_i), \quad (5.17)$$

где полюса z_i находятся как решения уравнения $\theta(z_i)=0$, а вычет относительно полюса кратности m вычисляется следующим образом:

$$\operatorname{Res} f(z_i) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \left[\frac{\partial^{(m-1)} \varphi(z)}{\partial \theta(z)^{(m-1)}} (z - z_i)^m \right]. \quad (5.18)$$

Наиболее просто вычет вычисляется относительно простого полюса, при $m=1$. В этом случае

$$\operatorname{Res} f(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{\varphi(z)}{\theta(z)} (z - z_i) = \frac{\varphi(z_i)}{\theta^{(1)}(z_i)}. \quad (5.19)$$

Вернемся к вычислению интеграла (5.5). Перейдем от действительной переменной ω к комплексной переменной $z = \omega + js$, совпадающий с ω , на оси абсцисс. Заменяя в (5.5) ω на z , получим

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(z) \exp(jz\tau) dz.$$

Чтобы воспользоваться теоремой о вычетах, необходимо перейти от интеграла по действительной оси к интегралу по *замкнутому контуру*. Это можно сделать, добавив дугу бесконечно большого радиуса, расположенную либо в верхней, либо в нижней полуплоскости. Для того, чтобы результат не изменился, т.е. интеграл по действительной оси совпадал с интегралом по замкнутому контуру, необходимо, чтобы интеграл по замыкающей дуге был равен нулю. Это условие выполняется, если подынтегральное выражение на замыкающей дуге обращается в нуль. Учитывая, что в верхней полуплоскости значение аргумента $z = j\infty$, а в нижней полуплоскости значение аргумента $z = -j\infty$, несложно убедиться, что *выбор контура интегрирования зависит от знака τ* . При $\tau > 0$ контур интегрирования необходимо замыкать в *верхней полуплоскости* и учитывать только *полюса, расположенные выше действительной оси*. При $\tau < 0$ контур интегрирования необходимо замыкать в *нижней полуплоскости* и учитывать полюса, расположенные *ниже действительной оси*. Так как $F_n(\omega^2)$ - полином, содержащий только четные степени аргумента, то будем иметь, с учетом кратности, n пар сопряженных полюсов $(z_1, z_1^*, \dots, z_n, z_n^*)$, расположенных соответственно в верхней (z_i) и нижней (z_i^*) полуплоскостях.

Таким образом, мы можем написать окончательное выражение для расчета корреляционной функции

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \oint_{c_1} S(z) \exp(jz\tau) dz = j \sum_i \operatorname{Res} S(z), \tau \geq 0, \quad (5.20)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \oint_{c_2} S(z) \exp(jz\tau) dz = -j \sum_i \operatorname{Res} S(z), \tau < 0. \quad (5.21)$$

где вычеты подсчитываются по формуле (5.18), а выбор контуров интегрирования описан выше. В последнем выражении перед суммой появляется знак минус, так как направление обхода контура отрицательное. *Вычислять оба интеграла (5.20) и (5.21) не имеет смысла. Достаточно вычислить корреляционную функцию, например, при $\tau > 0$, а затем воспользоваться ее четностью.*

Для вариантов задания, в которых входное воздействие содержит нормальный процесс с гауссовской корреляционной функцией, и характеристика фильтра также является гауссовской, при определении энергетического спектра и корреляционной функции следует использовать [9,10] табличный интеграл (В.1) из приложения В.

5.5 Нелинейные преобразования случайных процессов

5.5.1 Общая характеристика методов анализа

В общем случае задача ставится следующим образом [1, 2]. На вход нелинейного неинерционного элемента с известной характеристикой $f(x)$ поступает случайный процесс $X(t)$, статистические характеристики которого известны. Необходимо определить статистические характеристики отклика нелинейного элемента. *Принципиальное решение указанной задачи дают правила определения законов распределения и числовых характеристик функций от случайных величин*, применение которых во многих практических случаях сопровождается *значительными трудностями*.

В работе необходимо решить *более простую задачу определения корреляционной функции отклика нелинейного элемента при стационарном нормальном входном воздействии с нулевым средним значением*.

Можно выделить *два основных метода* определения корреляционной и других моментных функций отклика нелинейного элемента: *прямой метод* и *метод характеристических функций*. Существуют также различные модификации этих методов, позволяющие упростить расчеты для определенных типов нелинейных характеристик и определенных видов входного воздействия.

В *прямом методе* используются *сами нелинейные характеристики* и статистическое усреднение выполняется *при помощи плотности распределения вероятностей*. Корреляционная функция отклика нелинейного элемента определяется в этом случае следующим образом

$$R_Y(t_1, t_2) = M[f(x(t_1))f(x(t_2))],$$

Для стационарного входного воздействия

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)W(x_1, x_2; \tau)dx_1dx_2, \quad (5.22)$$

и отклик нелинейного элемента также будет стационарным. Непосредственное вычисление двойного интеграла (5.22), как правило, очень сложно и возможно лишь в редких случаях.

Часто вычисления упрощаются с помощью метода характеристических функций [1-3,5-7]. В *методе характеристических функций* используется *изображение по Лапласу нелинейной характеристики* и усреднение осуществляется с *характеристической функцией* входного воздействия. Действительно, в этом случае отклик нелинейного элемента определяется выражением

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(p) \exp(px) dp, \quad (5.23)$$

где $p = u + j\varepsilon$,

C – контур интегрирования, выбранный соответствующим образом в комплексной плоскости p ,

$f(p) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-px) dx$ – переходная функция нелинейного элемента.

Вид контура интегрирования и выражения для переходной функции нелинейного элемента для многих практически важных случаев приведены в [3, 5-7].

Подставив (5.23) в выражение для корреляционной функции (5.22) и поменяв местами линейные независимые операторы интегрирования и статистического усреднения, получим

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint f(p_1) f(p_2) \theta_{2x} \left(\frac{p_1}{j}, \frac{p_2}{j}; \tau \right) dp_1 dp_2. \quad (5.24)$$

Двумерная характеристическая функция входного воздействия определяется следующим образом

$$\theta_{2x} \left(\frac{p_1}{j}, \frac{p_2}{j}; \tau \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p_1 x_1 - p_2 x_2) W_{2x}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2. \quad (5.25)$$

Формула (5.24) является основной для метода характеристических функций. Сравнивая (5.22), (5.24) и учитывая (5.25), видим, что как *прямой метод*, так и *метод характеристических функций* требуют *одинаковых априорных сведений* о входном воздействии. *Критерием выбора* того или иного метода анализа *служит сложность расчетов и возможность получить результат в замкнутом виде*. Выбор метода зависит от статистических свойств входного воздействия и характера исследуемой нелинейности. В общем случае, если известна характеристическая функция входного воздействия, контурный интеграл (5.24) вычислить проще, чем двойной интеграл (5.22). Отметим также, что большинство имеющихся результатов получено для случая, когда входное воздействие представляет собой нормальный случайный процесс.

Для большинства реальных нелинейных характеристик вычисление интегралов, входящих в (5.22) или (5.24), очень сложно или невозможно. В этом случае используют следующий прием. Подынтегральное выражение в (5.22) или (5.24) преобразуют к такому виду, при котором переменные интегрирования в двойном интеграле разделяются и его можно записать как произведение двух простых интегралов. Этого можно добиться, используя подходящее разложение двумерной плотности распределения или двумерной характеристической функции в ряд, например, по системе ортогональных функций. При этом [1,3,5,6,7] отклик нелинейного элемента, рассчитанный как прямым методом, так и методом характеристических функций можно представить в виде ряда

$$R_Y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 D_n(\tau),$$

где $D_n(\tau)$ -функция, которая определяется корреляционными свойствами входного воздействия.

Если входное воздействие - нормальный случайный процесс, тогда

$$R_Y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 R_X^n(\tau).$$

В частности, если входное воздействие $X(t)$ - узкополосный случайный процесс, его корреляционная функция при симметричном относительно частоты ω_0 спектре имеет вид

$$R_X(\tau) = R_0(\tau) \cos(\omega_0 \tau).$$

Используем (В.2) для разложения $\cos^n(\omega_0 \tau)$ в ряд по гармоникам несущей частоты ω_0 . Группируя затем все члены при одинаковых гармониках, корреляционную функцию отклика можно представить следующим образом

$$R_Y(\tau) = c_0^2 + \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\tau) \cos(m\omega_0 \tau - b_m(\tau)).$$

Здесь $B_m(\tau)$ и $b_m(\tau)$ - медленные функции времени по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$. Взяв преобразование Фурье от последнего выражения, получим

$$S_Y(\omega) = 2\pi c_0^2 \delta(\omega) + \sum_{m=0}^{\infty} S_m(\omega),$$

где $S_m(\omega)$ -составляющая энергетического спектра, сосредоточенная в узкой (по сравнению с ω_0) полосе частот в районе частоты $m\omega_0$.

Таким образом, энергетический спектр отклика нелинейного элемента при узкополосном входном воздействии можно представить как последовательность отделенных друг от друга спектральных полос, расположенных около гармоник несущей частоты. Эти полосы можно выделить с помощью полосовых фильтров. Пусть фильтр настроен на частоту $k\omega_0$. При определении числовых характеристик отклика фильтра следует перейти к укороченным выражениям для корреляционной функции и энергетического спектра отклика нелинейного элемента, учитывающим только те составляющие, которые дают вклад в энергетический спектр в области частот $k\omega_0$. Если $k=0$, то есть включен ФНЧ, тогда

$$R_{YV}(\tau) = c_0^2 + B_0(\tau),$$

$$S_{YV}(\tau) = 2\pi c_0^2 \delta(\omega) + S_0(\omega).$$

5.5.2 Корреляционные функции откликов нелинейных элементов, рассматриваемых в работе

В различных вариантах курсовой работы (задания) рассматриваются пять типов нелинейных элементов, находящих практическое применение. Подробный анализ воздействия на указанные устройства нормального шума, а также суммы полезного сигнала и нормального шума проведен в [1-7]. Опуская промежуточные вычисления, приведем необходимые конечные результаты.

5.5.2.1 Нелинейный элемент с параболической характеристикой, определяемой выражением

$$f(x) = b_1 x + b_2 x^2.$$

Пусть входное воздействие представляет собой сумму полезного сигнала $S(t)$ и стационарного нормального шума $n(t)$, т.е. $x(t)=S(t)+n(t)$, причем $S(t)$ и $n(t)$ - независимые случайные процессы с равными нулю средними значениями. Тогда из определения корреляционной функции непосредственно следует, что

$$R(\tau) = b_1^2 \{M[S_1 S_2] + M[n_1 n_2]\} + b_2^2 \{M[S_1^2 S_2^2] + M[n_1^2 n_2^2] + 2M[S_1^2 n_2^2] + 4M[S_1 S_2 n_1 n_2]\},$$

где $S_i=S(t_i)$,

$n_i=n(t_i)$,

$\tau=t_2-t_1$.

Корреляционная функция отклика содержит слагаемые четырех типов. *Первое и второе* слагаемые обусловлены *линейной* составляющей параболической характеристики. *Третье* слагаемое обусловлено *взаимодействием* на нелинейности сигнала с собой. *Четвертое* слагаемое обусловлено *взаимодействием* шума с собой, а два последних слагаемых обусловлены *взаимодействием* сигнала и шума.

В работе полезным сигналом является гармоническое колебание на выходе ЛФ1, амплитуда и несущая частота которого постоянны, а фаза распределена равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$. Вычисление моментных функций сигнала и шума, входящих в последнее выражение, в этом случае производится достаточно просто [1,3,4] и результирующее выражение для корреляционной функции отклика нелинейного элемента примет вид

$$R_Y(\tau) = b_2^2 \left(\frac{A_0^2}{2} + \sigma_m^2 \right)^2 + b_1^2 \left\{ \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \sigma_m^2 \rho(\tau) \right\} + b_2^2 \left\{ \frac{A_0^4}{8} \cos 2\omega_0 \tau + 2A_0^2 \sigma_m^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau + 2\sigma_m^4 \rho^2(\tau) \right\}. \quad (5.26)$$

Здесь не зависящее от τ первое слагаемое дает квадрат среднего значения, или мощность постоянной составляющей, а остальные слагаемые при $\tau=0$ дают дисперсию, или мощность флуктуационной составляющей. *Использовать соотношение $m_Y^2 = R_Y(\infty)$ в данном случае нельзя, так как корреляционная функция отклика содержит периодическую составляющую и $R_Y(\infty)$ не определено.*

Положив в (5.26) $A_0=0$, получим отклик на входное воздействие в виде нормального шума.

5.5.2.2 Двухполупериодный квадратичный детектор, характеристика которого определяется выражением

$$f(x) = bx^2.$$

Корреляционную функцию отклика можно получить из (5.26), положив $b_1=0$, $b_2=b$.

5.5.2.3 Однополупериодный квадратичный детектор, характеристика которого определяется выражением

$$f(x) = \begin{cases} bx^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Корреляционная функция отклика при стационарном нормальном входном воздействии имеет вид [5,6]

$$R_Y(\tau) = \frac{2b^2\sigma^4}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{8} + \rho(\tau) + \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2(\tau)}{2!} + \sum_{m=0}^{\infty} [(2m-1)!!]^2 \frac{\rho^{2m+3}(\tau)}{(2m+3)!} \right\}.$$

Ряд можно просуммировать [1], при этом

$$R_Y(\tau) = \frac{2b^2\sigma^4}{\pi} \left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi\rho^2(\tau)}{4} + \frac{3}{4}\rho(\tau)\sqrt{1-\rho^2(\tau)} + \frac{1}{4}\arcsin \rho(\tau) + \frac{1}{2}\rho^2(\tau)\arcsin \rho(\tau) \right].$$

Для расчетов следует использовать приближенное выражение

$$R_Y(\tau) \cong \frac{2b^2\sigma^4}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{8} + \rho(\tau) + \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2(\tau)}{2!} + \frac{\rho^3(\tau)}{3!} \right\}.$$

Необходимо оценить погрешность определения дисперсии, возникающую при замене точного выражения приближенным.

5.5.2.4 Двухполупериодный линейный детектор, характеристика которого определяется выражением

$$f(x) = b|x|.$$

Корреляционная функция отклика при нормальном стационарном входном воздействии имеет вид [5,6]

$$R_Y(\tau) = \frac{2b^2\sigma^2}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} [(2m-3)!!]^2 \frac{\rho^{2m}(\tau)}{2m!} \right\},$$

Ряд можно просуммировать [1], при этом

$$R_Y(\tau) = \frac{2b^2\sigma^2}{\pi} \left[\sqrt{1-\rho^2(\tau)} + \rho(\tau)\arcsin \rho(\tau) \right].$$

Для расчетов следует использовать приближенное выражение

$$R_Y(\tau) \cong \frac{2b^2\sigma^2}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\rho^2(\tau)}{2!} + \frac{\rho^4(\tau)}{4!} \right\}.$$

Если процесс на входе анализируемого звена является нормальным шумом с экспоненциальной корреляционной функцией, в последнем выражении можно ограничиться двумя первыми слагаемыми. Необходимо оценить погрешность определения дисперсии, возникающую при замене точного выражения приближенным.

5.5.2.5 Однополупериодный линейный детектор, характеристика которого определяется выражением

$$f(x) = \begin{cases} bx, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Корреляционная функция отклика при нормальном стационарном входном воздействии имеет вид [5,6]

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2\sigma^2}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2}\rho(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} [(2m-3)!!]^2 \frac{\rho^{2m}(\tau)}{2m!} \right\},$$

Ряд можно просуммировать [1,3,7], при этом

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2\sigma^2}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2}\rho(\tau) + \sqrt{1-\rho^2(\tau)} + \rho(\tau)\arcsin \rho(\tau) \right].$$

Для расчетов следует использовать приближенное выражение

$$R_Y(\tau) \cong \frac{b^2 \sigma^2}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \rho(\tau) + \frac{\rho^2(\tau)}{2!} \right\}.$$

Необходимо оценить погрешность определения дисперсии, возникающую при замене точного выражения приближенным.

Рекомендуемая литература

1. Чумаков А.С. Основы статистической радиотехники: Учеб пособие. –Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. -394 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.1, М.: Сов. радио – 1966 и др. годы выпуска.
3. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. М.: Сов. радио – 1980.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио – 1966, 1982.
5. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М.: Иностран. лит-ра – 1960.
6. Купер ДЖ., Макгиллен К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989. (в библиотеке 29 экз.)
7. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике. Учеб. пособие / Евсиков Ю.А., Обрезков Г.В. и др. – М.: В.Ш., 1985.
8. Евсиков Ю.А., Чапурский В.В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах. Учеб. пособие – М.: В.Ш., 1977
9. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. М.: Связь. – 1969.
10. Магазинников Л.И. Высшая математика 3. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учебное пособие. – Томск, ТУСУР, 1998.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Любое издание.
12. Двайт Г.Д. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М: Наука, 1997.
13. Чернышев А.А. ОС ТАСУР 6.1-97 «Работы студенческие учебные и выпускные квалификационные. Общие требования и правила оформления». Томск, 2002 .

Приложение А
(обязательное)
Рекомендуемые варианты заданий

№ вар.	Шифр	№ вар.	Шифр	№ вар.	Шифр
1	1112	34	2114 *	67	3217
2	1113	35	2115 **	68	3226
3	1114	36	2121 *	69	3227
4	1115	37	2122 **	70	4111 *
5	1122	38	2123 *	71	4112 **
6	1123	39	2124 *	72	4113 **
7	1124	40	2125 **	73	4114 *
8	1125	41	2131 *	74	4115 **
9	1132	42	2132 **	75	4121 *
10	1133	43	2133 *	76	4122 **
11	1134	44	2134 *	77	4123 **
12	1135	45	2135 **	78	4124 *
13	1142	46	2141 *	79	4125 **
14	1143	47	2142 **	80	5216
15	1144	48	2143 *	81	5217
16	1145	49	2144 *	82	5226
17	1152	50	2145 **	83	5227
18	1153	51	2151 *	84	5236
19	1154	52	2152 **	85	5237
20	1155	53	2153 *	86	5246
21	1216	54	2154 *	87	5247
22	1217	55	2155 **	88	5256
23	1226	56	3111	89	5257
24	1227	57	3112 *	90	6216
25	1236	58	3113 *	91	6217
26	1237	59	3114	92	6226
27	1246	60	3115 *	93	6227
28	1247	61	3121	94	1111
29	1256	62	3122 *	95	1131
30	1257	63	3123	96	1141
31	2111 *	64	3124 *	97	1151
32	2112 **	65	3125 *		
33	2113 *	66	3216		

Примечание:

* - задание средней сложности;

** - задание повышенной сложности.

Приложение Б
(справочное)

Образец титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕ-
ДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)
Кафедра радиотехнических систем (РТС)

АНАЛИЗ ТИПОВОГО РАДИОТЕХНИЧЕСКОГО ЗВЕНА

Курсовая работа (Расчетное задание) по дисциплине “Основы стати-
стической радиотехники”

Выполнил студент гр. 100-1

_____ О.Т. Личный

“ ”

Руководитель: доцент каф. РТС

_____ Г.Р. Озный

“ ”

Приложение В
(справочное)
Справочные формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 x^2 \pm 2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right). \quad (\text{B.1})$$

$$\cos^{2n} \alpha = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2C_{2n}^k \cos(2(n-k)\alpha) + C_{2n}^n \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\cos^{2n-1} \alpha = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} C_{2n-1}^k \cos((2n-2k-1)\alpha) \right\}.$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (\text{B.3})$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \quad (\text{B.4})$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!. \quad (\text{B.5})$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1). \quad (\text{B.6})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm jax) dx = 2\pi\delta(a) \quad (\text{B.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \quad (\text{B.8})$$

Приложение Г (обязательное)

Пример расчета.

Рассмотрим вариант задания, обозначенный шифром [1;1;2;1]. Для данного варианта типовое радиотехническое звено состоит из полосового фильтра в виде одноконтурного резонансного усилителя, квадратичного двухполупериодного детектора и низкочастотного усилителя с нагрузкой в виде RC-цепи. Входное воздействие представляет собой нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности N_0 . Проанализируем прохождение входного шума через каждое из устройств, входящих в рассматриваемое звено.

Определим требуемые статистические характеристики, а именно: среднее значение m_x , корреляционную функцию и энергетический спектр отклика резонансного усилителя. Резонансный усилитель - это линейное устройство, квадрат модуля частной характеристики которого задан и определяется выражением.

$$|K_{\phi 1}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi 1} \beta^2}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{K_{\phi 1}^2 \beta^2}{\beta^2 + (\omega + \omega_0)^2}.$$

Анализ линейных устройств возможен во временной и в частотной областях. Учитывая, что входное воздействие стационарно и рассматривается установившийся режим работы, вычисления будут проще, если использовать частотный метод анализа.

Определим энергетический спектр и корреляционную функцию процесса на выходе полосового фильтра, используя методику, изложенную в подразделе 5.4.

$$S_x(\omega) = S_n(\omega) |K_{\phi 1}(\omega)|^2,$$

$$R_x(\tau) = N_0 K_{\phi 1}^2 \beta^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp j\omega\tau}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp j\omega\tau}{\beta^2 + (\omega + \omega_0)^2} d\omega \right] = N_0 K_{\phi 1}^2 \beta^2 (I_1 + I_2).$$

Вычислим интегралы, входящие в последнее выражение. Используя комплексную переменную $z = \omega + js$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp jz\tau}{\beta^2 + (z - \omega_0)^2} dz.$$

Подынтегральная функция имеет два комплексно сопряженных простых полюса $z_1 = \omega_0 + j\beta$ и $z_2 = \omega_0 - j\beta$, расположенных симметрично относительно оси ω в верхней и нижней полуплоскостях. Перейдем от интеграла по действительной оси к интегралу по замкнутому контуру. Необходимо отдельно рассмотреть случай положительных и отрицательных времен. Для $\tau > 0$ контур замыкается в верхней полуплоскости, поэтому учитываем только полюс z_1 . Следовательно

$$I_1 = j \operatorname{Re} sf(z_1),$$

$$\operatorname{Re} sf(z_1) = \frac{\exp(-\beta\tau + j\omega_0\tau)}{j2\beta}.$$

Проделив аналогичные вычисления для I_2 и учитывая четность корреляционной функции, запишем окончательное выражение

$$R_x(\tau) = N_0 K_{\phi_1}^2 \beta \exp(-\beta|\tau|) \cos \omega_0 \tau.$$

Для вычисления среднего значения m_x и дисперсии D_x используем свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса, а именно

$$m_x^2 = R_x(\infty); D_x = R_x(0) - R_x(\infty).$$

В данном случае

$$m_x = 0; D_x = \sigma_x^2 = N_0 K_{\phi_1}^2 \beta; \quad \rho(\tau) = \exp(-\beta|\tau|) \cos \omega_0 \tau.$$

Отметим, что отклик полосового фильтра будет узкополосным нормальным случайным процессом, статистические свойства которого полностью определяются корреляционной функцией.

Определим корреляционную функцию отклика квадратичного детектора. Как отмечалось в подразделе 5.5, для нормального входного воздействия выражение, связывающее корреляционные функции процессов на входе и на выходе квадратичного детектора, имеет вид

$$R_Y(\tau) = b^2 \sigma_x^4 [1 + 2\rho^2(\tau)].$$

Или, в рассматриваемом случае

$$R_Y(\tau) = b^2 \sigma_x^4 [1 + \exp(-2\beta|\tau|) + \exp(-2\beta|\tau|) \cos 2\omega_0 \tau].$$

Используя свойства корреляционной функции, получим

$$m_Y^2 = b^2 \sigma_x^4,$$

$$D_Y = 2b^2 \sigma_x^4 = 2m_Y^2.$$

Определим энергетический спектр отклика квадратичного детектора

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_3(\omega),$$

где

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m_Y^2 \exp(-j\omega\tau) d\tau = b^2 \sigma_x^4 2\pi\delta(\omega),$$

$$S_2(\omega) = b^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta|\tau| - j\omega\tau) d\tau = \frac{4\beta}{(2\beta)^2 + \omega^2} b^2 \sigma_x^4,$$

$$S_3(\omega) = \frac{1}{2} [S_2(\omega - 2\omega_0) + S_2(\omega + 2\omega_0)].$$

В энергетическом спектре отклика нелинейного элемента имеется δ -функция, обусловленная появлением постоянной составляющей m_y , и полосы в области нулевой (низкочастотный спектр) и удвоенной несущей частоты (высокочастотный спектр). Ширина каждой из полос определяется величиной 2β , то есть в два раза больше, чем ширина энергетического спектра входного воздействия, равная β .

Определим числовые характеристики отклика ФНЧ. Так как входное воздействие, являющееся откликом квадратичного детектора, стационарно и рассматривается установившийся режим работы, используем частотный метод анализа. Определим энергетический спектр входного воздействия. Учтем что для ФНЧ входным воздействием является отклик квадратичного детектора, последнее слагаемое которого определяет энергетический спектр, сосредоточенный в области частоты $2\omega_0$, то есть за пределами полосы пропускания ФНЧ. Отбрасывая это слагаемое, в дальнейшем удобно оперировать с укороченными выражениями для корреляционной функции и энергетического спектра процесса на выходе ФНЧ

$$R_{YV}(\tau) = b^2 \sigma_x^4 [1 + \exp(-2\beta |\tau|)],$$

$$S_{YV}(\omega) = b^2 \sigma_x^4 \left[2\pi \delta(\omega) + \frac{4\beta}{(2\beta)^2 + \omega^2} \right].$$

Корреляционная функция отклика ФНЧ определяется выражением

$$R_Z(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YV}(\omega) |K_{\phi_2}(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau) d\omega,$$

где $|K_{\phi_2}(\omega)|^2 = \frac{K_{\phi_2}^2 \gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2}$.

Следовательно,

$$R_Z(\tau) = b^2 K_{\phi_2}^2 \sigma_x^4 [I_1 + I_2],$$

$$I_1 = \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega) \exp(j\omega\tau)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega = 1,$$

$$I_2 = 4\beta\gamma^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega\tau)}{((2\beta)^2 + \omega^2)(\gamma^2 + \omega^2)} d\omega.$$

При вычислении I_1 использовано фильтрующее свойство δ -функции. Используя для вычисления I_2 теорию вычетов и учитывая четность корреляционной функции, получим

$$R_Z(\tau) = b^2 \sigma_x^4 K_{\phi_2}^2 \left[1 + \frac{\gamma}{\gamma^2 - (2\beta)^2} (\gamma \exp(-2\beta |\tau|) - 2\beta \exp(-\gamma |\tau|)) \right].$$

Полученное выражение справедливо только при $\gamma \neq 2\beta$. В противном случае полюса подынтегрального выражения становятся кратными и необходимо использовать соответствующее выражение для определения вычета. Этот факт необходимо учитывать при расчете зависимости корреляционной функции и дисперсии отклика ФНЧ от его полосы пропускания. Зная корреляционную функцию, несложно определить среднее значение и дисперсию отклика

$$m_Z = b^2 K_{\phi_2}^2 \sigma_x^4,$$

$$D_Z = b^2 K_{\phi_2}^2 \sigma_x^4 \frac{\gamma}{\gamma + 2\beta},$$

или

$$D_z = b^2 K_{\phi_1}^4 K_{\phi_2}^2 N_0^2 \frac{\beta^2 \gamma}{\gamma + 2\beta}.$$

Отметим в заключение, что при расчетах часто получаются громоздкие выражения, поэтому важен контроль правильности полученных результатов на каждом этапе. Наиболее простым средством для этого является постоянный контроль единиц измерения получаемых выражений, а также проверка полученных результатов на соответствие физическому содержанию задачи. Например, корреляционная функция должна быть действительной и четной, дисперсия – неотрицательной, а энергетический спектр – действительным, четным и неотрицательным. Если рассматриваемый случайный процесс представляет собой шумовое напряжение, то единицей измерения дисперсии и корреляционной функции будет (вольт)², а энергетического спектра (вольт)²/герц.