МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»
Кафедра автоматизированных систем управления

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

ТОМСК – 2016

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
Учебное пособие

Составитель А.А. Мицель
Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – 2016. – 68 с.

В пособии представлены избранные разделы математического программирования: квадратичное программирование, теория двойственности, модели динамического программирования, основы вариационного исчисления.
Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению 09.04.01 – «информатика и вычислительная техника (магистратура)».

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Квадратичное программирование

1.1. Задача квадратичного программирования

Задача квадратичного программирования (ЗКП) представляет собой задачу с линейными ограничениями и квадратичной ЦФ. Общая ЗКП имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i = \overline{1,m} ,$$

$$x_j \geq 0 , \quad j = \overline{1,n} ,$$

или в матричном виде

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = c^T x + x^T Qx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}, \qquad (1.1)$$

где A – матрица ограничений ($m \times n$);

b – вектор ограничений ($m \times 1$);

c – вектор ($1 \times n$);

Q – квадратная матрица ($n \times n$);

x – вектор переменных ($1 \times n$).

1.2. Условие Куна-Таккера для ЗКП

Задача КП имеет вид

$$\begin{cases} f(x) = cx + x^T Qx \to \min, \\ g(x) = x \geq 0, \\ h(x) = Ax - b = 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) - \mu^T x - \lambda^T h(x) , \qquad (1.3)$$

где $\mu \geq 0$, λ – параметры (ограничения по знаку параметры λ не имеют).

Условия Куна-Таккера для ЗКП записываются следующим образом:

$$\begin{cases} c + x^T(Q + Q^T) - \mu - \lambda^T A = 0, \\ Ax = b, \quad x \ge 0, \\ \mu^T x = 0, \quad \mu \ge 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

где λ – неограниченная по знаку переменная.

Пример 1.1.

$$f(x) = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \to \min ,$$

$$x_1 + x_2 = 2 ; \; x_1, x_2 \ge 0 .$$

Для этой задачи условия Куна-Таккера задаются следующим образом:

$$-6 + 4x_1 - 2x_2 - \mu_1 - \lambda = 0 ;$$

$$-2x_1 + 4x_2 - \mu_2 - \lambda = 0 ;$$

$$x_1 + x_2 = 2 \quad x_1, x_2 \ge 0 ;$$

$$\mu_1 x_1 = 0 \; ; \; \mu_2 x_2 = 0 , \qquad \mu_1, \mu_2 \ge 0 ;$$

величина λ не ограничена по знаку.

Поскольку ограничение $h(x)$ – линейное, то применима теорема Куна-Таккера. Таким образом, условие Куна-Таккера является необходимым условием оптимальности решения ЗКП.

В случае положительной определенности или полуопределенности матрицы Q целевая функция является выпуклой и условия Куна-Таккера являются также и достаточными условиями оптимальности решения ЗКП. Таким образом, в случае $H_f \ge 0$ достаточно найти точку x, удовлетворяющую условиям Куна-Таккера.

Одним из методов решения ЗКП может быть метод решения системы (1.4) как задачи ЛП с использованием искусственного базиса и первой операции симплекс-метода. При этом условие $\mu_j x_j = 0$ неявно учитывается в процедуре симплекс-метода при помощи правила ограниченного ввода в базис. Это правило запрещает вводить в базис небазисную переменную μ_j, если значение соответствующей базисной переменной x_j положительное.

1.3 Метод решения ЗКП с помощью искусственного базиса

Одним из методов решения ЗКП может быть метод решения системы (1.4) как задачи ЛП с использованием искусственного базиса и первой операции симплекс-метода. При этом условие $\mu_j x_j = 0$ неявно учитывается в процедуре симплекс-метода при помощи правила ограниченного ввода в базис. Это правило запрещает вводить в базис небазисную переменную μ_j, если значение соответствующей базисной переменной x_j положительное.

Введем искусственные переменные x_3, x_4, x_5. В результате получим следующую целевую функцию:

$$z = x_3 + x_4 + x_5 = 8 - 3x_1 - 3x_2 + \mu_1 + \mu_2 + 2\lambda .$$

В табл. 1.1 – 1.4 жирным курсивом выделены опорные элементы.

Таблица 1.1

	x_1	x_2	μ_1	μ_2	λ	
x_3	4	-2	-1	0	-1	6
x_4	-2	***4***	0	-1	-1	0
x_5	1	1	0	0	0	2
	-3	-3	1	1	2	-8

Таблица 1.2

	x_1	x_4	μ_1	μ_2	λ	
x_3	3	1/2	-1	-1/2	-3/2	6
x_2	-1/2	***1/4***	0	-1/4	-1/4	0
x_5	***3/2***	-1/4	0	1/4	¼	2
	-9/2	3/4	1	1/4	5/4	-8

Таблица 1.3

	x_5	x_4	μ_1	μ_2	λ	
x_3	-2	1	-1	-1	***-2***	2
x_2	1/3	***1/6***	0	-1/6	-1/6	2/3
x_1	2/3	-1/6	0	1/6	1/6	4/3
	3	0	1	1	2	-2

Таблица 1.4

	x_5	x_4	μ_1	μ_2	x_3	
λ	1	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1
x_2			1/12	-1/12	-1/12	½
x_1			-1/12	1/12	1/12	3/2
	1	1	0	0	1	0

Таким образом, получили решение

$x_1 = 3/2$; $x_2 = 1/2$; $\lambda = -1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$.

Заметим, в уравнении (1.4) мы взяли *минус* в слагаемом с λ. Если бы мы взяли *плюс*, то в таблице вместо (-1) был бы (+1) в первой и второй строке. В конечном решении мы бы получили $\lambda = +1$.

1.4 Метод решения ЗКП с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений

Эту задачу можно решить гораздо проще, с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений; так мы ищем начальное базисное решение. Отличием здесь является только то, что μ_i и x_i не могут быть одновременно базисными, поэтому мы делаем базисными только x_i и λ_j. При этом необходимо учесть, что λ_j могут быть любого знака, в то время как $x_j \geq 0$.

Для нашего примера имеем следующие таблицы.

Таблица 1.5

x_1	x_2	μ_1	μ_2	λ	
4	-2	-1	0	-1	6
-2	***4***	0	-1	-1	0
1	1	0	0	0	2

Таблица 1.6

x_1	x_2	μ_1	μ_2	λ	
3	0	-1	-1/2	-3/2	6
-1/2	1	0	-1/4	-1/4	0
3/2	0	0	1/4	1/4	2

Таблица 1.7

x_1	x_2	μ_1	μ_2	λ	
0	0	-1	-1	**-2**	2
0	1	0	-1/6	-1/6	2/3
1	0	0	1/6	1/6	4/3

Здесь мы получили базисные переменные x_1, x_2. Теперь введем в базис переменную λ, не обращая внимания на ее знак.

Таблица 1.8

x_1	x_2	μ_1	μ_2	λ	
0	0	1/2	1/2	1	-1
0	1	1/12	-1/12	0	½
1	0	-1/12	1/12	0	3/2

Итак, получили базисные переменные:
$x_1 = 3/2$; $x_2 = 1/2$; $\lambda = -1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$.

К сожалению, в случае *положительно полуопределенной матрицы* Q (то есть матрица Гессе $H_f(x) \geq 0$) этот метод может расходиться.

Лемке разработал более эффективный и простой метод решения системы (1.4), называемый методом решения задач о дополнительности.

1.5. Задача о дополнительности

Рассмотрим общую задачу отыскания неотрицательного решения системы уравнений следующего вида: найти такие векторы ω и z, что

$$\omega = Mz + q\,; \tag{1.5}$$

$$\omega \geq 0; z \geq 0\,; \tag{1.6}$$

$$\omega^T z = 0\,, \tag{1.7}$$

где M – $n \times n$ матрица; ω, z, q – n - мерные векторы.

Сформулированная задача называется задачей о дополнительности. Заметим, что в ее формулировке не участвует оптимизируемая целевая функция.

Рассмотрим выпуклую ЗКП следующего вида:

$$f(x) = c^T x + x^T Qx \to \min,$$

$$Ax \geq b, x \geq 0,$$

где Q – положительно определенная или полуопределенная матрица.

Условия оптимальности Куна-Таккера для этой задачи записываются в следующем виде:

$$u = 2Qx - A^T\lambda + c,$$

$$s = Ax - b,$$

$$\mu^T x + s^T\lambda = 0, \qquad ;$$

$$x, s \geq 0,\ \mu, \lambda \geq 0.$$

Здесь s – дополнительный вектор переменных для преобразования ограничения-неравенства в ограничение-равенство ($Ax - b - s = 0$).

Пусть имеем

$$\begin{cases} f(x) = cx + x^T Q\, x \to \min\,, \\ Ax \geq b \to g(x) = A\, x - b \geq 0\,, \\ \qquad\qquad x \geq 0\,. \end{cases}$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(\mu, \lambda) = f(x) - \mu^T x - \lambda^T (Ax - b)\,.$$

Условие Куна-Таккера записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \qquad \nabla f - \mu - A^T\lambda = 0, \\ \mu^T x = 0;\quad \lambda^T (Ax - b) = 0;\ Ax - b \geq 0\,, \\ \qquad\qquad \mu, \lambda \geq 0\,. \end{cases}$$

Введем обозначения $s = Ax - b$.

Тогда условия Куна-Таккера примут вид:

$$\begin{cases} \nabla f - \mu - A^T \lambda = 0, \\ \quad s = Ax - b, \\ \mu^T x = 0; \;\; \lambda^T s = 0, \\ \mu, \lambda \ge 0; \;\; x, S \ge 0. \end{cases}$$

Сравнивая эту систему с задачей о дополнительности, можно заметить, что

$$\omega = \begin{pmatrix} \mu \\ s \end{pmatrix}; \; z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}; \;\; M = \begin{pmatrix} 2Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}; \; q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно получить решение выпуклой задачи КП путем решения эквивалентной задачи о дополнительности.

Задачу ЛП можно также свести к задаче о дополнительности, положив $Q = 0$. Таким образом, метод решения задач о дополнительности можно применить также для решения ЗЛП.

Пример **1.2**. Найти min ЦФ при заданных ограничениях:

$$f(x) = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2,$$
$$-x_1 - x_2 \ge -2, \; x_1, x_2 \ge 0.$$

Для этой задачи имеем:

$$A = (-1;-1), \; b = (-2), \; c = (-6;0), \; Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная задача о дополнительности имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} Q + Q^T & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$q = \begin{pmatrix} c^T \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \; z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix}; \; z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \;\; \omega = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ s \end{pmatrix};$$

λ – скалярная величина;

s – скалярная величина; $s = x_3$ (дополнительная переменная).

Найденное решение z даст нам оптимальное решение задачи:

$$(x_1^*, x_2^*) = x^*.$$

1.6. Метод решения задач о дополнительности

Рассмотрим следующую задачу о дополнительности:

$$\omega = Mz + q;\ \omega^T z = 0;\ \omega,\ z \geq 0.$$

Определение. Неотрицательное решение (ω, z) системы уравнений $\omega = M\,z + q$ называется допустимым решением задачи о дополнительности (З Д).

Допустимое решение (ω, z) задачи о дополнительности, удовлетворяющее условию дополняющей нежесткости $\omega^{\mathrm{T}}\mathrm{z} = 0$, называется решением задачи о Д.

Условие $\omega^T z = 0$ эквивалентно условиям $\omega_i z_i = 0,\ i = \overline{1,n}$. Если все элементы вектора $q_i \geq 0$, то очевидное решение ЗД: $\omega = q,\ z = 0$ (так как имеется условие $\omega_i z_i = 0$). Следовательно, ЗД нетривиальна только в том случае, если имеется хотя бы один элемент $q_i < 0$. В этом случае начальное базисное решение $\omega = q,\ z = 0$, удовлетворяющее условию $\omega^T z = 0$, является недопустимым для задачи о Д (так как $\omega_i = q_i < 0$).

Алгоритм работы ЗД начинает работу с недопустимого базисного решения $\omega = q,\ z = 0$. Для получения неотрицательного решения производится следующее преобразование задачи: во все уравнения системы $\omega - Mz = q$ вводится искусственная переменная z_0.

$$\omega - Mz - e \cdot z_0 = q;\ \omega, z \geq 0;\ \omega^T z = 0;\ z_0 \geq 0.$$

Здесь $e = (1,1,...,1)$ – вектор, состоящий из единиц.

Таким образом, начальная СТ имеет вид (см. табл.1.9):

Таблица 1.9

базис	z_1	….	z_s	.....	z_n	z_0	q
ω_1	$-m_{11}$	….	$-m_{1s}$	.....	$-m_{1n}$	-1	q_1
ω_s	$-m_{s1}$	….	$-m_{ss}$	.....	$-m_{sn}$	-1	q_s
ω_n	$-m_{n1}$	….	$-m_{ns}$	.....	$-m_{nn}$	-1	q_n

Шаг 1. В базис вводится z_0, заменяющая базисную переменную с наибольшим по абсолютной величине отрицательным значением. Пусть $q_s = \min\limits_i q_i < 0$, в этом случае z_0 заменяет в базисе переменную ω_s.

Выполнение итераций метода исключений приводит к следующей таблице (см. табл.1.10), где

$$q'_s = -q_s,\ q'_i = q_i - q_s,\ \forall i \neq s, \tag{1.8}$$

$$m'_{sj} = -m_{sj}/(-1) = m_{sj},\ \forall j = \overline{1,n}, \tag{1.9}$$

$$m'_{ij} = -m_{ij} + m_{sj},\ \forall j = \overline{1,n},\ i \neq s. \tag{1.10}$$

Таблица 1.10

базис	z_1	....	z_s	.....	z_n	ω_s	q
ω_1	m'_{11}	....	m'_{1s}	.....	m'_{1n}	0	q'_1
z_0	m'_{s1}	....	m'_{ss}	.....	m'_{sn}	1	q'_s
ω_n	m'_{n1}	....	m'_{ns}	.....	m'_{nn}	0	q'_n

Шаг 2. Заметим, что обе переменные ω_s и z_s в табл.1.10 небазисные. При введении в базис одной из этих переменных условие дополнительности не нарушается. Так как ω_s выведена из базиса на предыдущей итерации, то естественно ввести в базис z_s. Следовательно, существует следующее правило для выбора вводимой в базис небазисной переменной.

В базис всегда вводится переменная, дополнительная к базисной переменной, выведенной из базиса на предыдущей итерации (правило дополняющей нежесткости). Переменные ω_i, z_i, $\forall i$ называются парой взаимодополняющих переменных.

После того, как выбрана переменная, вводимая в базис, необходимо определить базисную переменную, которую надо вывести из базиса. При этом используется правило минимального отношения, аналогичное правилу в симплекс-методе ЛП. Применение этого правила гарантирует выполнение условия $q'_i \geq 0$. Таким образом, для вывода из базиса переменной используют следующие соотношения:

$$\min_{m'_{is}>0} (q'_i / m'_{is}) = q'_k / m'_{ks} \tag{1.11}$$

для всех $i = \overline{1,n}$, для которых значения $m'_{is} > 0$.

Мы выводим ω_k, а на ее место ставим z_s. Новая таблица получается путем выполнения итерации метода исключения с m'_{ks} в качестве ведущего элемента.

Шаг 3. Поскольку переменная ω_k выведена из базиса, то по правилу дополнительной нежесткости в базис необходимо ввести z_k. Далее изменения базиса проводятся описанным выше способом.

Критерии окончания работы алгоритма

Минимальное отношение достигается в строке s, а переменная z_0 выводится из базиса. Полученное в результате итерации метода исключения базисное решение представляет собой решение ЗД.

Правило минимального отношения неприменимо, так как все $m'_{is} \le 0,\ i = \overline{1, n}$. Это значит, что не существует решения ЗД. В таком случае говорят, что задача о дополнительности обладает лучевым решением, т. е. не удается обнаружить даже локальный оптимум.

Замечания.

Доказана сходимость метода к решению ЗД за конечное число шагов при выполнении одного из условий:

– все элементы матрицы M положительны;

– главные миноры матрицы M больше нуля (т. е. матрица M – положительно определена).

Наиболее важным применением метода решения ЗД является решение выпуклых ЗКП. При этом матрица M может быть положительно полуопределена. Если существует решение ЗД для $\mathrm{M} \ge 0$, то метод позволяет найти его за конечное число шагов.

Пример 1.3.

$$f(x) = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2,$$
$$-x_1 - x_2 \ge -2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Эквивалентная задача о дополнительности записывается следующим образом (см. предыдущий пример).

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad q = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как в столбце q имеется отрицательный элемент, то вводим искусственную переменную z_0. Получим таблицу (см.табл. 1.11).

Таблица 1.11

базис	z_1	z_2	z_3	z_0	q
ω_1	-4	2	-1	***-1***	-6
ω_2	2	-4	-1	-1	0
ω_3	1	1	0	-1	2

Начальное базисное решение: $\omega_1 = -6$; $\omega_2 = 0$; $\omega_3 = 2$;

$z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Получим частичное решение с использованием формул (1.8) - (1.10) с заменой ω_1 на z_0 (табл. 1.12).

Таблица 1.12

базис	z_1	z_2	z_3	ω_1	q
z_0	4	-2	1	1	6
ω_2	***6***	-6	0	0	6
ω_3	5	-1	1	0	8

Частичное базисное решение: $z_0 = 6$; $\omega_2 = 6$; $\omega_3 = 8$; $z_1 = z_2 = z_3 = \omega_1 = 0$. Так как ω_1 была выведена на предыдущей итерации, то вводим в базис z_1. Используя правило (1.11) для столбца z_1, получим разрешающей элемент 6. Таким образом, переменная z_1 должна заменить ω_2 (табл. 1.13).

Таблица 1.13

базис	ω_2	z_2	z_3	ω_1	Q
z_0	0	2	1	1	2
z_1	1	-1	0	0	1
ω_3	0	***4***	1	0	3

Так как мы вывели из базиса ω_2, то по правилу дополнительной нежесткости надо ввести в базис z_2. Разрешающий элемент равный 4, показывает что надо вывести из базиса ω_3 (табл. 1.14).

Таблица 1.14

базис	ω_2	ω_3	z_3	ω_1	Q
z_0	0	0	***2/4***	1	2/4
z_1	1	0	1/4	0	7/4
z_2	0	1	1/4	0	¾

Таблица 1.15

базис	ω_2	ω_3	z_0	ω_1	Q
z_3	0	0	1	2	1
z_1	1	0	0	-2/4	6/4
z_2	0	1	0	-2/4	2/4

В табл. 1.15 мы видим, что в базисе остались только z_1, z_2, z_3, т. е. переменная z_0 вышла из базиса. Следовательно, по первому критерию окончания, процесс заканчивается. Решение ЗД имеет вид:

$$z_1 = 6/4 \; ; \; z_2 = 2/4 \; ; \; z_3 = 1 \; ; \; \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 .$$

Таким образом, имеем следующее оптимальное решение ЗКП:

$$x_1^* = 3/2 \; ; \; x_2^* = 1/2 \; ; \; f(x^*) = -11/2 .$$

1.7 Алгоритм решения задачи КП Мицеля-Хващевского

Модель задачи квадратичного программирования

Задача квадратичного программирования имеет следующий вид:

$$f(x) = x^T Q x - c^T x \to \min_x , \tag{1.12}$$

$$\text{при } Ax \le b , \; x \ge 0 , \tag{1.13}$$

x – n-мерный вектор, компоненты которого являются неизвестными, подлежащими определению;

Q – матрица с компонентами q_{ij} (положительно определенная);

q – n-мерный вектор, определяющий линейный член целевой функции;

A – матрица ограничений размерности $m \cdot n$;

b – m-мерный вектор ограничений.

Известно, что необходимые и достаточные условия существования решения задачи (1.12) выражаются условиями Куна-Таккера, которые имеют вид:

$$2Qx - c - \mu + A^T \lambda = 0 \; ; \tag{1.14}$$

$$Ax - b + s = 0 \; ; \tag{1.15}$$

$$x, s \ge 0 , \; \mu, \lambda \ge 0 \; ; \tag{1.16}$$

$$\mu^T x + s^T \lambda = 0 , \tag{1.17}$$

здесь s – вектор дополнительных переменных, используемый для преобразования ограничения-неравенства (1.13) в ограничения-равенства;

μ, λ – векторы неопределенных множителей Лагранжа размерности n и m соответственно.

Одним из методов решения ЗКП может быть метод решения (1.14) – (1.17) как задачи линейного программирования с использованием искусственного базиса и модифицированного симплекс-метода. При этом условие (1.17) неявно учитывается в процедуре симплекс-метода при помощи правила ограниченного ввода в базис переменных s_j и μ_i .

Этот метод применим только в случае положительной определенности матрицы Q. Если матрица Q положительно полуопределена, то метод может расходиться.

Другим методом решения задачи (1.14) – (1.17) является так называемый метод решения задачи о дополнительности, разработанный Лемке. В процедуре решения этим методом также предусматривается введение искусственной переменной. Недостатком метода является его громоздкость.

В данной работе предлагается новый алгоритм решения ЗКП, на наш взгляд, более простой в численной реализации.

Описание алгоритма.

Разрешим систему (1.14) – (1.15) относительно переменных x_i и λ_j. Для этого введем составные вектора y, g и матрицу M.

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}; \; g = \begin{pmatrix} c + \mu \\ b - s \end{pmatrix} = \vartheta + \tilde{I} p; \; M = \begin{pmatrix} 2Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где $\vartheta = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$; $p = \begin{pmatrix} \mu \\ s \end{pmatrix}$; $\tilde{I}$ – единичная матрица, у которой нижние m строк умножены на (-1).

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений размерности (n+m).

$$M\, y = g\,. \tag{1.19}$$

Если определитель матрицы $\det M$ отличен от нуля, то существует единственное решение системы (1.19). Это решение будет зависеть от параметров μ и s. Так как параметры μ и s не определены, то решить систему (1.19) можно лишь при дополнительных условиях (1.16) и (1.17), которые полностью доопределяют исходную задачу.

Суть ограничений (1.16) и (1.18) состоит в том, что если все компоненты $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, n}$; $\lambda_j \ge 0$, $j = \overline{1, m}$, то соответствующие им компоненты μ_i и s_j равны нулю. Следовательно, мы можем положить $p = 0$ и решать систему

$$M\, y = \vartheta \tag{1.20}$$

любым классическим методом (например, методом симплексного преобразования системы либо методом Гаусса). Сформулируем алгоритм решения задачи (1.19).

Шаг 1: Решаем систему (3.135) и находим y.

Если все $y_i \ge 0$, $i = \overline{1, n+m}$, то полагаем

$$x_j = y_j, \; j = \overline{1, n} \tag{1.21}$$

и заканчиваем вычисления.

Если полученное решение (1.20) содержит отрицательные компоненты $y_i < 0$, то переход на Шаг 2.

Шаг 2: Решаем систему (1.19) методом симплексного преобразования. Подобная процедура используется при решении ЗЛП для поиска одной из угловых точек. Поскольку решение системы (1.9) единственно, то найденное решение и будет искомым решением задачи. Отличие метода симплексного преобразования при решении данной задачи состоит в необходимости учета ограничений (1.16), (1.17), которые и обеспечивают единственность решения (разумеется, если оно вообще существует). Модифицированный алгоритм симплексного преобразования выглядит следующим образом. Предполагается, что все компоненты $\vartheta_i > 0$. (Если имеются $\vartheta_i < 0$, соответствующие строки системы (1.19) умножаем на (-1)). Переписываем систему (1.19) в виде:

$$My - Ip = \vartheta \qquad (1.22)$$

или

$$WZ = \vartheta \ , \qquad (1.23)$$

где

$$W = (M, -\widetilde{I}); \;\; Z = (y, p)^T . \qquad (1.24)$$

Этап 1. Среди столбцов у коэффициентов W_{ij} матрицы W выбирается столбец, в котором имеется хотя бы один положительный элемент (Если таких столбцов нет, то решения не существует). Если в таком столбце несколько положительных элементов, то выбирается тот элемент в столбце, который дает наименьшее частное от деления элементов вектора ϑ на соответствующие элементы этого столбца. Выделенный таким образом разрешающий элемент обозначим за W_{kj}^{0}.

Этап 2. Рассчитываются элементы матрицы $W_{il}^{(1)}$ и столбца $\vartheta_i^{(1)}$ по следующим формулам:

$$W_{kl}^{(1)} = W_{kl}^{0} / W_{kj}^{0}, \;\; l = \overline{1, L};, \;\; L = 2(n+m);$$

$$W_{il}^{(1)} = W_{il}^{0} - \frac{W_{ij}^{0}}{W_{kj}^{0}} \cdot W_{kl}^{0}, \;\; l = \overline{1, L}; \;\; i = \overline{1, n+m}; \;\; i \neq k \;;$$

$$\vartheta_k^{(1)} = \vartheta_k^{0} / W_{kj}^{0};$$

$$\vartheta_i^{(1)} = \vartheta_i^{0} - \frac{W_{ij}^{0}}{W_{kj}^{0}} \cdot \vartheta_k^{0}, \;\; i = \overline{1, n+m}; \;\; i \neq k \;.$$

Переход на этап 1. Столбец с номером j в матрице $W^{(1)}$ состоит из нулей и единицы ($W_{kj}^{(1)} = 1$). При поиске разрешающего элемента в матрице

$W^{(1)}$ мы не рассматриваем столбец с номером $j+N$, где $N=n+m$, который соответствует переменной p_j (условие дополнительной нежесткости (1.17)). Если при поиске разрешающего элемента в $W^{(1)}$ мы окажемся в столбце с номером $N+r$, то это значит, что на следующем этапе при работе с матрицей $W^{(2)}$ мы исключаем из рассмотрения столбец с номером r, соответствующий переменной y_r (условие (1.17)).

После выполнения $N=n+m$ преобразований матрицы W и вектора ϑ мы получим матрицу $W^{(N)}$, в которой N столбцов состоят из нулей и единиц, причем единичные элементы расположены в разных строках и разных столбцах. Номера столбцов, состоящих из нулей и единиц, соответствуют тем номерам переменных, которые совпадают с номерами строк, содержащих единицы на пересечении столбцов, состоящих из нулей и единицы. Значения этих переменных равны значениям компонент вектора $\vartheta^{(N)}$, расположенных в указанных строках.

После того, как решение z системы (1.23) найдено, вычисляем компоненты искомого решения:

$$x_j = z_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{1.25}$$

Пример 1.3

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи квадратичного программирования:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \to \min;$$
$$x_1 + x_2 \le 2;$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 2, \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

Результаты моделирования приведены в таблицах 1.16. Шаг 2 алгоритма при решении данной задачи выполняется 4 раза. Искомое решение данной задачи имеет вид

$$x^* = (0{,}8;1{,}2), \quad f(x^*) = -7{,}2.$$

Решение системы $My = \vartheta$:

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 = 2,$$
$$-2y_1 + 4y_2 + y_3 + 2y_4 = 6,$$
$$y_1 + y_2 = 2, \; -y_1 + 2y_2 = 2$$

$$y = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{26}{9}, -\frac{4}{9}\right).$$

Последняя компонента получилась отрицательной, поэтому переходим на Шаг 2.

Окончательные результаты моделирования приведены в табл. 1.16

Таблица 1.16 – Результаты моделирования

x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	ϑ
2	-2	1	-1	-1	0	0	0	2
-2	4	1	2	0	-1	0	0	6
1	1	0	0	0	0	1	0	2
-1	2	0	0	0	0	0	1	2
x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	ϑ
1	-1	1/2	-1/2	-1/2	0	0	0	1
0	2	2	1	-1	-1	0	0	8
0	***2***	-1/2	1/2	1/2	0	1	0	1
0	1	1/2	-1/2	-1/2	0	0	1	3
x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	ϑ
1	0	1/4	-1/4	-1/4	0	1/2	0	3/2
0	0	***5/2***	1/2	-3/2	-1	-1	0	7
0	1	-1/4	1/4	1/4	0	1/2	0	1/2
0	0	3/4	-3/4	-3/4	0	-1/2	1	5/2
x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	ϑ
1	0	0	-6/20	-8/20	2/20	12/20	0	0,8
0	0	1	1/5	-3/5	-2/5	-2/5	0	2,8
0	1	0	6/20	3/20	-2/20	8/20	0	1,2
0	0	0	-18/20	-6/20	6/20	-4/20	1	0,4

Таким образом, получим следующее оптимальное решение:

$$\left.\begin{matrix} x_1^* = 0,8 \\ x_2^* = 1,2 \end{matrix}\right\}, \quad f(x^*) = -7,2 .$$

Примечание. Описанный алгоритм имеет следующие преимущества по сравнению с упомянутыми выше алгоритмами.

Для большинства практических задач решение задачи (1.12) сводится к решению системы (1.20), решение которой не представляет трудностей.

При решении задачи (1.22), записанной в общем виде, нет необходимости вводить искусственные переменные и вспомогательную целевую функцию.

Вопросы для текущего контроля

1. Запишите задачу квадратичного программирования (КП). Задача выбора портфеля ценных бумаг.
2. Условие Куна-Таккера для задач КП.
3. Решение задачи КП с помощью симплексного преобразования таблицы коэффициентов уравнений
4. Решение задачи КП с помощью искусственного базиса
5. Задача о дополнительности.
6. Метод решения задач о дополнительности

Алгоритм решения задачи КП Мицеля-Хващевского.

Тема 2. Теория двойственности

2.1. Формулировка двойственной задачи

Рассмотрим ЗНП, которую будем называть *прямой* задачей (П).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\to\min \\ g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m} \\ h_l(x)=0,\ l=\overline{1,p} \\ x\in X \end{array}\right\}. \qquad (\text{П})$$

Приведем формулировку задачи двойственной по Лагранжу:

$$\begin{cases} \Theta(\mu,\lambda)\to\max, \\ \mu\ge 0, \\ \text{где}\quad \Theta(\mu,\lambda)=\inf\limits_{x}\left\{f(x)+\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i g_i(x)+\sum\limits_{l=1}^{p}\lambda_l h_l(x);\ x\in X\right\}. \end{cases} \qquad (\text{Д})$$

Функция $\Theta(\mu,\lambda)$ называется *двойственной функцией Лагранжа*. Важно отметить, что μ_i неотрицательны, а λ_i могут иметь любой знак.

Так как (Д)-задача заключается в максимизации нижней грани функции $f(x)+\sum\mu_i\, g_i(x)+\sum\lambda_l\, h_l(x)$, то ее иногда называют *максиминной двойственной задачей*.

Запишем (П)- и (Д)-задачи в векторной форме. Пусть $g\in E_m\subset E_n$, $h\in E_p\subset E_n$, $x\in E_n$.

Прямая задача:

$$\left.\begin{array}{l} \min f(x) \\ g(x)\le 0 \\ h(x)=0 \\ x\in X \end{array}\right\}. \qquad (\text{П})$$

Двойственная задача:

$$\left.\begin{array}{l} \max\Theta(\mu,\lambda) \\ \mu\ge 0 \end{array}\right\}, \qquad (\text{Д})$$

где $\Theta(\mu,\lambda)=\inf\left\{f(x)+\mu^T g(x)+\lambda^T h(x);\ \ x\in X\right\}$.

Для каждой задачи НП можно построить различные двойственные задачи. Все зависит от того, какие из ограничений рассматриваются в виде неравенств $g(x)\le 0$ и равенств $h(x)=0$, а какие отнесены к описанию множества *X*. Этот выбор влияет на усилия, затрачиваемые на оценку и вычисление функции Θ при решении (Д)-задачи. Разумное выделение множества X зависит от структуры задачи.

2.2. Геометрическая интерпретация двойственной по Лагранжу задачи

Для простоты возьмем задачу с одним ограничением-неравенством.
Прямая задача:

$$\min f(x),$$
$$g(x) \le 0,$$
$$x \in X.$$

На рис.2.1 в плоскости (z_1, z_2) изображено множество

$$G = \{(z_1, z_2):\ z_1 = g(x),\ z_2 = f(x),\ x \in X\},$$

где G - образ множества X при отображении (g, f).

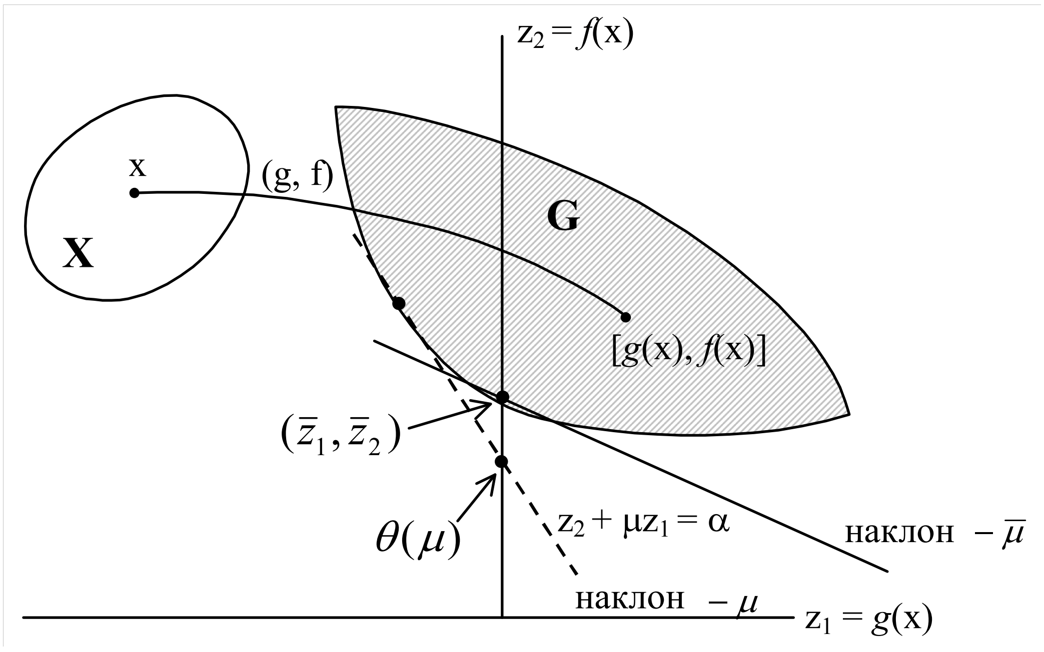


Рис. 2.1 – Поиск оптимальных решений (П)- и (Д)-задач

Прямая задача состоит в нахождении точки из множества G левее оси z_2 с минимальной ординатой. Очевидно, что такой точкой будет $(\overline{z_1}, \overline{z_2})$.

Пусть задано $\mu \ge 0$. Чтобы определить $\Theta(\mu)$, нужно минимизировать $f(x) + \mu g(x)$ при $x \in X$. Если положить $z_1 = g(x), z_2 = f(x)$ при $x \in X$, то для определения $\Theta(\mu)$ нужно минимизировать $z_2 + \mu z_1$ на множестве G. Для того чтобы минимизировать $z_2 + \mu z_1$ на множестве G, необходимо перемещать прямую $z_2 + \mu z_1 = \alpha$ параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет опорной (касательной) к множеству *G*. Тогда точка пересечения этой прямой с осью z_2 укажет значение $\Theta(\mu)$ (смотри рис.2.1). Двойственная задача заключается в нахождении такого наклона опорной (касательной) гиперплоскости, при котором значение координаты z_2, являющейся точкой ее пересечения с осью z_2, будет максимальным. Из рисунка видно, что такая гиперплоскость имеет наклон $-\overline{\mu}$ и является опорной к множеству *G* в точке $\left(\overline{z_1};\, \overline{z_2}\right)$. Таким образом, оптимальным решением (Д)-задачи является $\overline{\mu}$, а оптимальным значением - целевая функция $\overline{z_2}$. Заметим, что оптимальные значения (П)- и (Д)-задач *совпадают*.

Пример 2.1:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$
$$-x_1 - x_2 + 4 \le 0,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Легко проверить, что $x^* = [2;\, 2]$, $f^* = 8$.

Здесь $g(x) = -x_1 - x_2 + 4$, $X = \left\{(x_1, x_2):\ x_1, x_2 \ge 0\right\}$. Тогда функция Лагранжа (Д)-задачи имеет вид:

$$\Theta(\mu) = \inf_x \left\{x_1^2 + x_2^2 + \mu \cdot (-x_1 - x_2 + 4);\quad x_1, x_2 \ge 0\right\} =$$
$$= \inf_x \left\{x_1^2 - \mu x_1 : x_1 \ge 0\right\} + \inf_x \left\{x_2^2 - \mu x_2 : x_2 \ge 0\right\} + 4\mu.$$

Обе нижние грани достигаются при $x_1 = x_2 = \dfrac{\mu}{2}$, если $\mu \ge 0$:

$$\Theta(\mu) = -\frac{1}{2}\mu^2 + 4\mu,\quad \mu \ge 0;\qquad \Theta(\mu) = 4\mu,\quad \mu < 0$$

(т. к. $x_1 = x_2 = \mu/2$, то при $\mu < 0 \to x_1, x_2 < 0$), то есть недопустимо.

Заметим, что $\Theta(\mu)$ - вогнутая функция, достигающая своего максимума в точке $\overline{\mu} = 4$ и $\Theta(\overline{\mu}) = 8 = f^*$.

Рассмотрим эту задачу в плоскости (z_1, z_2), где

$$\begin{cases} z_1 = g(x) = -x_1 - x_2 + 4, \\ z_2 = f(x) = x_1^2 + x_2^2 \ . \end{cases}$$

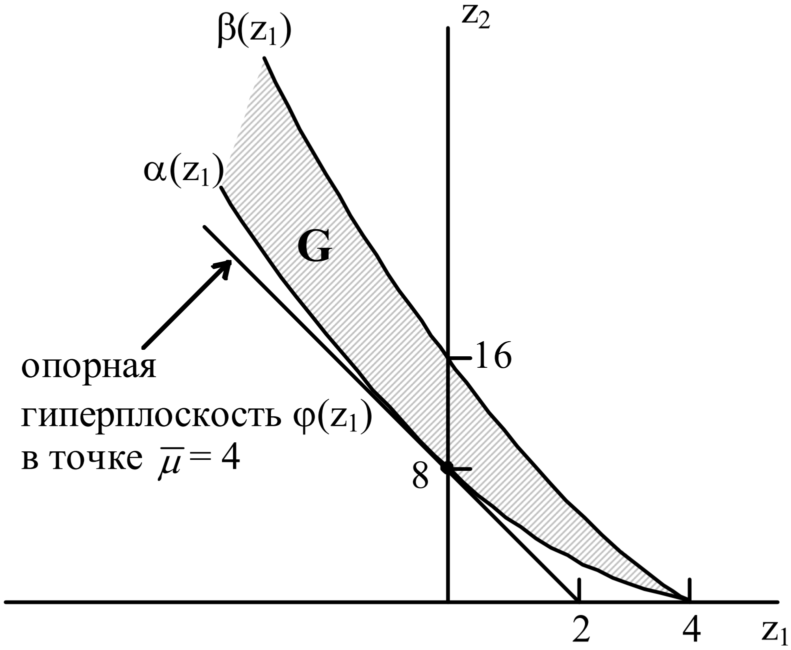


Рис. 2.2. ОДР ЗНП в опорной гиперплоскости

Найдем множество G - образ множества $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, полученный при отображении (g, f). Получим явное выражение для нижней $\alpha(z_1)$ и верхней $\beta(z_1)$ граней. При заданном z_1 значения $\alpha(z_1)$ совпадают с оптимальными значениями целевой функции прямой задачи:

$$\left. \begin{array}{c} x_1^2 + x_2^2 \to \min \\ при \ -x_1 - x_2 + 4 = z_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} .$$

Решим эту задачу: выразим из уравнения-ограничения переменную $x_1 = -z_1 + 4 - x_2$ и подставим ее в целевую функцию:

$$(4 - x_2 - z_1)^2 + x_2^2 \to \min .$$

Получим: $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}(4 - z_1)$; $\quad f^*(z_1) = \alpha(z_1) = \dfrac{1}{2}(4 - z_1)^2$.

Для того чтобы найти $\beta(z_1)$, проделаем следующие вычисления. Найдем производную $f(z_1)$:

$$\frac{df}{dz_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial z_1} = 2x_1(-1) + 2x_2(-1)$$

(т.к. $x_1 = 4 - z_1 - x_2$; $\quad x_2 = 4 - z_1 - x_1$)

или

$$\frac{df}{dz_1} = -2(x_1 + x_2) = -2(4 - z_1),$$

отсюда $f(z_1) = -2\int(4 - z_1)\,dz_1 + C = (4 - z_1)^2 + C$.

Константу C найдем из условия: $f(z_1 = 4) = 0 \to C = 0$.

Таким образом, $f(z_1) = \beta\ (z_1) = (4 - z_1)^2$.

Множество G показано на рис. 2.2. Если $x \in X$, то $x_1, x_2 \geq 0$ и, следовательно, $-x_1 - x_2 + 4 \leq 4$, т.е. любая точка $x \in X$ соответствует $z_1 \leq 4$. Оптимальное решение (Д)-задачи $\overline{\mu} = 4$ определяет наклон опорной гиперплоскости, изображенной на рис. 2.3, имеет значение $\varphi\ (z_1) = 8 - 4z_1$. Оптимальное значение целевой функции (D)-задачи $\alpha(0) = 8 = f^*$.

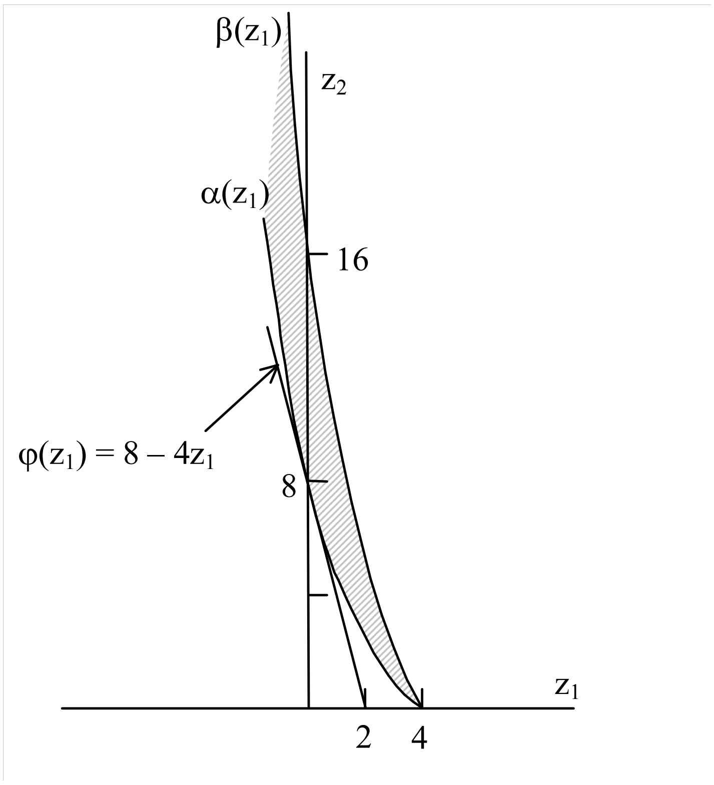


Рис. 2.3. Оптимальное решение (Д)-задачи

Уравнение касательной:

$$\varphi\ (z_1) = a + \alpha'\ (z_1^0) \cdot (z_1 - z_1^0),$$

где a - const:

$$\alpha\ (z_1) = \frac{1}{2} \cdot (4 - z_1)^2;$$

$$\alpha'\ (z_1^0) = -(4 - z_1)\big|_{z_1 = z_1^0 = 0} = -4;$$

$$a = \varphi\left(z_1 = z_1^0\right) = \alpha\left(z_1^0\right) = 8.$$

Отсюда $\varphi\left(z_1\right) = 8 - 4z_1$.

2.3. Разрыв двойственности

Теорема 2.1 (слабая теорема двойственности). Пусть x - допустимое решение (П)-задачи, то есть, $x \in X$, $g(x) \le 0$, $h(x) = 0$, а (μ, λ) - допустимое решение задачи (Д), т.е. $\mu \ge 0$. Тогда $f(x) \ge \Theta\left(\mu, \lambda\right)$.

Доказательство. Т.к. точка x - допустимое решение (Π)-задачи, то $x \in X,\, g(x) \le 0,\, h(x) = 0$. Кроме того, по условию теоремы $\mu \ge 0$, т.е. $\mu^T g(x) \le 0$. Тогда, по определению функции Θ, имеем

$$\Theta\left(\mu, \lambda\right) = \inf_y \left\{f(y) + \mu^T g(y) + \lambda^T h(y):\ y \in X\right\} \le$$
$$\le f(x) + \mu^T g(x) + \lambda^T h(x) \le f(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. $\inf\left\{f(x):\quad x \in X:\quad g(x) \le 0,\, h(x) = 0\right\} \ge$
$$\ge \sup\left\{\Theta\left(\mu, \lambda\right):\quad \mu \ge 0\right\}.$$

Следствие 2. Если $f\left(\bar{x}\right) = \Theta\left(\bar{\mu}, \bar{\lambda}\right)$, где $\bar{\mu} \ge 0$, а $\bar{x} \in S = \left\{x \in X:\quad g(x) \le 0,\quad h(x) = 0\right\}$, то точки $\bar{x}$ и $\left(\bar{\mu}, \bar{\lambda}\right)$ - оптимальные решения (П)- и (Д)-задач соответственно.

Следствие 3. Если $\inf f(x) = -\infty$ для $x \in S$, то $\Theta\left(\mu, \lambda\right) = -\infty$ для всех $\mu \ge 0$.

Следствие 4: Если $\sup \Theta\left(\mu, \lambda\right) = \infty$ для $\mu \ge 0$, то (П)-задача не имеет допустимых решений.

Из следствия 1 теоремы 1 имеем неравенство: $\inf f(x) \ge \sup \Theta(\mu, \lambda)$. Если $\inf f(x) > \sup \Theta\left(\mu, \lambda\right)$ (то есть неравенство строгое), то говорят, что имеет место *разрыв двойственности*. На рис. 2.4 показан случай, когда имеется разрыв двойственности в задаче с единственным ограничением–неравенством.

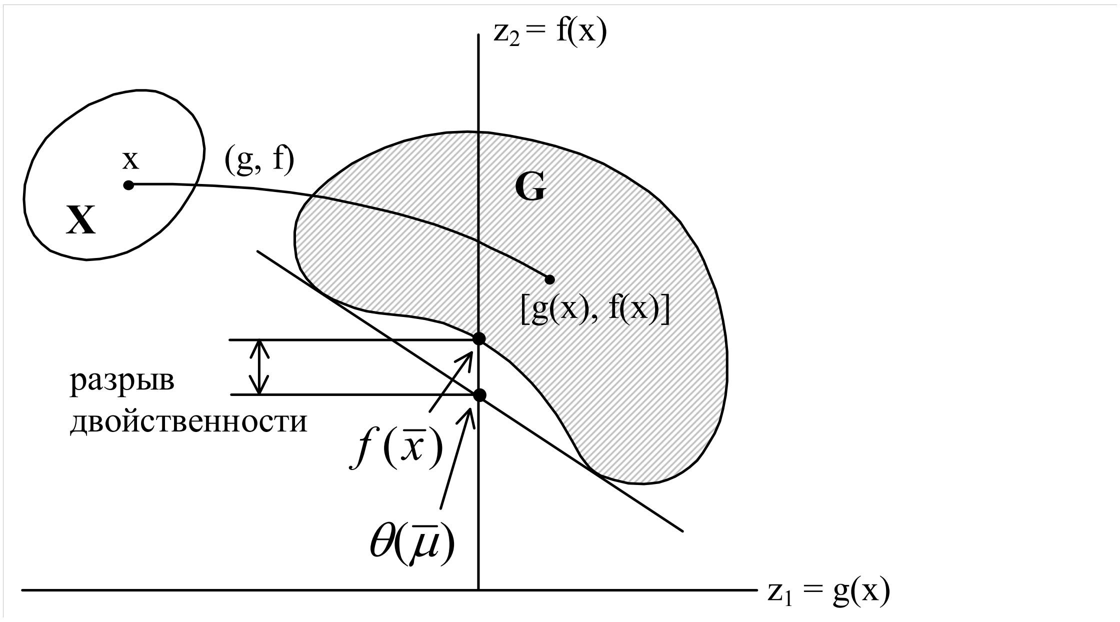


Рис. 2.4 - Разрыв двойственности ЗО

2.4. Решение двойственной по Лагранжу задачи

Градиентный метод

Теорема 2.2. Пусть $\left(\bar{\mu}, \bar{\lambda}\right) \in E_{m+p}, \quad \bar{\mu} \geq 0$. Предположим, что функция Θ дифференцируема в точке $\left(\bar{\mu}, \bar{\lambda}\right)$ и ее градиент равен $\left[g\left(\bar{x}\right), h\left(\bar{x}\right)\right]$. Строим модифицированное направление $\left[\hat{g}\left(\bar{x}\right), h\left(\bar{x}\right)\right]$,

$$\text{где} \begin{cases} \hat{g}_i(x) = g_i\left(\bar{x}\right), & \textit{если } \bar{\mu}_i \geq 0 \textit{ или } g_i \geq 0, \\ \max\left[0, g_i\left(\bar{x}\right)\right], & \textit{если } \mu_i = 0 \textit{ или } g_i < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Если $\left[\hat{g}\left(\bar{x}\right), h\left(\bar{x}\right)\right] \neq (0, 0)$, то $\left[\hat{g}\left(\bar{x}\right), h\left(\bar{x}\right)\right]$ - допустимое направление подъема для функции Θ в точке $\left(\bar{\mu}, \bar{\lambda}\right)$.

Если $\left[\hat{g}\left(\bar{x}\right), h\left(\bar{x}\right)\right] = (0, 0)$, то Θ достигает на области $\{(\mu, \lambda) : \mu \geq 0\}$ максимума в точке $\left(\bar{\mu}, \bar{\lambda}\right)$.

Алгоритм градиентного метода

Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда функция Θ дифференцируема и для решения задачи максимизации Θ на множестве $\{(\mu, \lambda):\ \mu \geq 0\}$ может быть использована следующая схема.

Шаг 1. Выбрать вектор $\omega_1 = (\mu_1, \lambda_1)$ такой, что $\mu_1 \ge 0$. Положить $k = 1$. Перейти к Шагу 2.

Шаг 2. При заданном (μ_k, λ_k) решить следующую вспомогательную задачу:

$$f(x) + \mu_k^T g(x) + \lambda_k^T h(x) \to \min, \quad x \in X.$$

Пусть x_k - единственное оптимальное решение. Построить вектор $\left[\hat{g}(x_k), h(x_k)\right]$ в соответствии с (2.1). Если этот вектор нулевой – остановиться, так как (μ_k, λ_k) - оптимальное решение. Иначе перейти к Шагу 3.

Шаг 3. Рассмотрим следующую задачу:

$$\Theta\left\{(\mu_k, \lambda_k) + \gamma\left[\hat{g}(x_k), h(x_k)\right]\right\} \to \max_{\gamma},$$

при $\mu_k + \gamma\hat{g}(x_k) \ge 0; \quad \gamma \ge 0$.

Пусть γ_k - оптимальное решение. Положить

$$(\mu_{k+1}, \lambda_{k+1}) = (\mu_k, \lambda_k) + \gamma_k\left[\hat{g}(x_k), h(x_k)\right],$$

$k = k + 1$ вернуться к Шагу 1.

Пример 2.2.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min.$$
$$-x_1 - x_2 + 4 \le 0,$$
$$x_1 + 2x_2 - 8 \le 0.$$

Решение этого примера легко получить: $\bar{x} = [2; 2]; \quad f(\bar{x}) = 8$.

Двойственная задача состоит в максимизации $\Theta(\mu_1, \mu_2)$:

$$\Theta(\mu_1, \mu_2) = \min_{x_1, x_2}\left\{x_1^2 + x_2^2 + \mu_1 \cdot (-x_1 - x_2 + 4) + \mu_2 \cdot (x_1 + x_2 - 8)\right\};$$

$$\mu_1, \mu_2 \ge 0; \ \mu^1 = (0, 0).$$

Решение: При $\mu^1 = (0, 0)$ имеем

Шаг 2. $\Theta(\mu^1) = \min\left\{x_1^2 + x_2^2\right\} = 0 \to x^1 = [0; 0]$.

Вычислим градиент в точке $\mu^1 = (0, 0)$: $\nabla\Theta(0) = g(x^1) = [4, -8]$. Тогда $\hat{g}(x^1)$ равно:

$$\hat{g}(x^1) = [4, 0].$$

Шаг 3. $\Theta\left[\mu^1 + \gamma \cdot \hat{g}(x^1)\right] = \Theta(4\gamma, 0) = \min\left\{x_1^2 + x_2^2 + [4\gamma, 0]^T \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}\right\} =$

$$= \min\left\{x_1^2 + x_2^2 - 4\gamma x_1 - 4\gamma x_2 + 16\gamma\right\} =$$

$$= \overbrace{\min_{x_1}\left\{x_1^2 - 4\gamma x_1\right\}}^{x_1=2\gamma} + \overbrace{\min_{x_2}\left\{x_2^2 - 4\gamma\, x_2\right\}}^{x_2=2\gamma} + 16\gamma =$$

$$4\gamma^2 - 8\gamma^2 + 4\gamma^2 - 8\gamma^2 + 16\gamma = -8\gamma^2 + 16\gamma.$$

Таким образом, $\Theta(4\gamma, 0) = -8\gamma^2 + 16\gamma$. Максимум $\Theta(4\gamma, 0)$ достигается при $\gamma_1 = 1$.

Вычислим $\mu^2 = \mu^1 + \gamma_1 \cdot \hat{g}(x^1) = (0; 0) + 1 \cdot (4; 0) = (4; 0)$.

При $\mu^2 = (4; 0)$ имеем

$$\Theta(\mu^2) = \min\left\{f(x) + \mu^{2^T} \cdot g(x)\right\} =$$
$$= \min\left\{x_1^2 + x_2^2 + 4 \cdot (-x_1 - x_2 + 4)\right\} = 8.$$

Здесь минимум достигается в точке $x^2 = [2; 2]$.

Далее, получим

$$\nabla\Theta(\mu^2) = g(x^2) = (0; -2), \text{ т.е. } g_1(x^2) = 0; \quad g_2(x^2) = -2.$$

Так как $\begin{cases} g_1(x^2) = 0, & \text{то } \hat{g}_1(x^2) = 0, \\ g_2(x^2) < 0, & \text{то } \hat{g}_2(x^2) = 0. \end{cases}$

Таким образом, $\hat{g}(\hat{x}) = (0; 0)$.

Так как $\begin{cases} \mu_1^2 = 4 > 0, & \text{то} \quad \hat{g}_1(x^2) = g_1(x^2) = 0, \\ \mu_2^2 = 0, & \text{то} \quad \hat{g}_2(x^2) = \max\left[0, g_2(x^2)\right] = 0. \end{cases}$

Следовательно, $\hat{g}(x^2) = (0; 0)$, и $\mu^2 = (4; 0)$ - оптимальное решение.

Существуют и другие методы решения двойственных задач, например, метод подъема для недифференцируемой двойственной функции, метод секущих плоскостей (смотри Базара, Шетти "Нелинейное программирование").

2.5. Задачи линейного и квадратичного программирования

Рассмотрим частные случаи двойственности по Лагранжу.

1. Линейное программирование.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} c^T x \to \min, \\ Ax \ge b, \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Пусть вектор $\mu_1 \ge 0$ связан с ограничениями $b - Ax \le 0$, а $\mu_2 \ge 0$ - с ограничениями $-x \le 0$. Тогда по Лагранжу задача (Д) заключается в максимизации функции $\Theta(\mu)$.

$$\Theta(\mu_1, \mu_2) = \inf_x \left\{ c^T x + \mu_1^T (b - Ax) + \mu_2^T x \right\}.$$

Очевидно, что

$$\Theta(\mu) = \begin{cases} \mu_1^T b, & \text{если} \quad c^T - \mu_1^T A + \mu_2^T \ge 0; \\ -\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, задача (Д) может быть сформулирована в виде:

$$\begin{cases} \mu_1^T b \to \max, \\ A^T \mu_1 \le c. \end{cases}$$

Таким образом, в линейном случае (Д)-задача не включает в себя переменных прямой задачи. Более того, (Д)-задача также является ЗЛП. Легко проверить, что двойственная к двойственной задаче совпадает с прямой исходной задачей.

Может встретиться одна из следующих взаимоисключающих друг друга ситуаций.

Прямая задача имеет допустимые решения, и *ее целевая функция не ограниченна* в допустимой области. В этом случае множество допустимых решений (D)-задачи *пусто*.

(D)-задача имеет допустимые решения, и ее целевая функция не ограниченна в допустимой области. В этом случае множество допустимых решений прямой задачи пусто.

Обе задачи имеют допустимые решения. В этом случае обе задачи имеют оптимальные решения $\bar{x}$ и $\bar{\mu}$ соответственно, при этом

$$c^T \bar{x} = \bar{\mu}^T b, \quad \left(c^T - \bar{\mu}^T A \right) \bar{x} = 0.$$

Допустимые области обеих задач пусты.

2. Квадратичное программирование

Рассмотрим следующую задачу КП:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} x^T H x + d^T x \to \min, \\ Ax \le b. \end{cases}$$

где H - симметричная положительно определенная матрица, так что целевая функция строго выпукла.

(Д)-задача, по Лагранжу, состоит в максимизации функции $\Theta(\mu)$ при $\mu \ge 0$, где $\Theta(\mu)$ равна:

$$\Theta(\mu)=\inf\left\{\frac{1}{2}x^T Hx+d^T x+\mu^T(Ax-b):\quad x\in E_n\right\}. \qquad (2.2)$$

При фиксированном μ функция $\Theta(\mu, x)$ строго выпуклая и достигает своего минимума по x в точке

$$Hx+A^T\mu+d=0.$$

Найдем из этого уравнения x:

$$x=-H^{-1}\left(d+A^T\mu\right).$$

Подставим это выражение в (2.2), получим:

$$\Theta(\mu)=\frac{1}{2}\mu^T D\mu+\mu^T c-\frac{1}{2}d^T H^{-1}d,$$

где $D=-AH^{-1}A^T$; $\quad c=-\left(b+AH^{-1}d\right)$.

Таким образом, задача (L) может быть записана следующим образом (опуская $const=-\frac{1}{2}d^T H^{-1}d$):

$$\begin{cases}\Theta(\mu)=\frac{1}{2}\mu^T D\mu+\mu^T c\to\max,\\ \qquad\mu\geq 0.\end{cases}$$

Решить задачу (Д) можно относительно легко, используя следующую схему.

При заданном значении μ положим

$$\nabla\Theta(\mu)=D\mu+c=g.$$

Определим $\hat{g}$ по формуле

$$\hat{g}_i=\begin{cases}g_i, & \text{если } g_i\geq 0,\\ 0, & \text{если } g_i<0.\end{cases}$$

Известно, что если $\hat{g}=0$, то вектор μ - оптимальное решение. В противном случае $\hat{g}$ - допустимое направление подъема для функции $\Theta(\mu)$. Оптимизируя функцию Θ, из точки μ вдоль направления $\hat{g}$ так, чтобы не нарушать условие $g_i\geq 0$, приходим к новой точке. Затем процесс продолжаем.

Пример 2.3*:*

$$f(x)=x_1^2+x_2^2\to\min,$$
$$-x_1-x_2+4\leq 0,\quad x_1+2\cdot x_2-8\leq 0.$$

Решение. Вычислим матрицы

$$H=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix};\quad d=[0;0]^T.$$

Далее:

$$H^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/2\end{pmatrix};\quad D=-\begin{pmatrix}1&-3/2\\-3/2&5/2\end{pmatrix};\quad c=-b=(4;-8)^T.$$

Задача (Д) имеет вид:

$$\Theta(\mu)=\frac{1}{2}\mu^T D\mu+\mu^T c\to\max,\quad \mu\ge 0.$$

Подставив матрицу D и вектор c, получим:

$$\begin{cases}\Theta(\mu)=\dfrac{1}{2}\left(-\mu_1^2+3\mu_1\mu_2-\dfrac{5}{2}\mu_2^2\right)+4\mu_1-8\mu_2\to\max,\\ \qquad \mu_1,\mu_2\ge 0.\end{cases}$$

Решим эту задачу методом наискорейшего спуска. Пусть $\mu^0=(0,0)^T$. Тогда

$$\nabla\Theta=\frac{1}{2}\left(-2\mu_1+3\mu_2+8,\quad 3\mu_1-5\mu_2-16\right);$$

$$\nabla\Theta\left(\mu^0\right)=(4,-8);\quad \hat{g}=(4,0).$$

Далее: $\Theta\left(\mu^1\right)=\Theta\left(\mu^0+\gamma\hat{g}\right)\to\max\limits_{\gamma}$.

Получим:

$$\nabla\Theta^T\left(\mu^1\right)\hat{g}=0$$

или

$$\left[-\left(\mu_1^0+\gamma\hat{g}_1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\mu_2^0+\gamma_0\right)+4;\ \frac{3}{2}\cdot\left(\mu_1^0+\gamma\,\hat{g}_1\right)-\frac{5}{2}\cdot\left(\mu_2^0+\gamma_0\right)-8\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=0.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\left(-4\gamma+4;\quad \frac{3}{2}\cdot 4\gamma-8\right)\cdot\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=16\cdot(\gamma-1)=0.$$

Таким образом, $\gamma=1$. Следовательно, $\mu^1=\mu^0+\gamma\hat{g}=(4;0)$.

Следующая итерация:

$$\nabla\Theta\left(\mu^1\right)=\left(-\mu_1+\frac{3}{2}\mu_2+4;\quad \frac{3}{2}\mu_1-\frac{5}{2}\mu_2-8\right)=(0;-2).$$

Следовательно, $\hat{g}=(0;0)$. Таким образом, оптимальное решение $\mu^1=(4;0)$.

Вопросы для текущего контроля

1. Формулировка двойственной задачи
2. Геометрическая интерпретация двойственной по Лагранжу задачи
3. Разрыв двойственности
4. Решение двойственной по Лагранжу задачи. Алгоритм градиентного метода.
5. Задачи линейного и квадратичного программирования.

Тема 3. Модели динамического программирования

3.1. Общая постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование (ДП) — метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются *многошаговыми.* Начало развития ДП относится к 50-м годам XX в. Оно связано с именем американского математика Р.Беллмана[1].

Если модели линейного программирования можно использовать в экономике для принятия крупномасштабных плановых решений в сложных ситуациях, то модели ДП применяются при решении задач значительно меньшего масштаба, например, при разработке правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа; при разработке принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; при распределении дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т. п.

В реально функционирующих больших экономических системах еженедельно требуется принимать микроэкономические решения. Модели ДЛ ценны тем, что позволяют на основе стандартного подхода при минимальном вмешательстве человека принимать такие решения. И если каждое взятое в отдельности такое решение малосущественно, то в совокупности эти решения могут оказать большое влияние на прибыль.

Приведем *общую постановку задами ДП.* Рассматривается управляемый процесс, например, экономический процесс распределения средств между предприятиями. Процесс описывается n-м вектором $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, т.е. точкой в пространстве R^n, которое называют фазовым пространством. В результате управления система (объект управления) S переводится из начального состояния $x^{(0)}$ в состояние $x^{(N)}$. Предположим, что управление можно разбить на N шагов, т.е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему S из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность N пошаговых управлений.

Обозначим через $u^{(k)}$ управление на k-м шаге ($k=1,...,N$). Переменные $u^{(k)}$ удовлетворяют некоторым ограничениям и в этом смысле называются *допустимыми (*$u^{(k)}$ может быть числом, точкой в m-мерном

пространстве, качественным признаком). В общем случае u представляет собой m-мерный вектор управления, т.е. $u \in R^m$.
В результате действия управления на каждом шаге получаем последовательность состояний $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(N)}$, которую изобразим кружками (рис. 3.1).

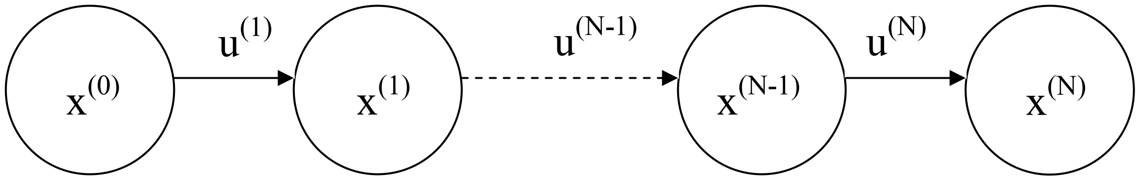


Рис. 3.1.

Показатель эффективности рассматриваемого управляемого процесса характеризуется целевой функцией, которая зависит от начального состояния и управления:

$$J = J(x^{(0)}, u). \tag{3.1}$$

Сделаем несколько предположений.

1. Состояние $x^{(k)}$ системы в конце k-го шага зависит только от предшествующего состояния $x^{(k-1)}$ и управления k-м шаге $u^{(k)}$ (и не зависит от предшествующих состояний и управлений). Это требование называется "отсутствием последействия". Сформулированное положение записывается в виде уравнений

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}),\ k = 1, 2, ..., N, \tag{3.2}$$

которые называются *уравнениями состояний.*

2. Целевая функция (3.1) является аддитивной от показателя эффективности каждого шага. Обозначим показатель эффективности k*-го* шага через

$$J_k = J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}),\ k = 1, 2, ..., N, \tag{3}$$

тогда

$$J(x, u) = \sum_{k=1}^{N} J_k = \sum_{k=1}^{N} J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}). \tag{3.4}$$

Задача пошаговой оптимизации (задача ДП) формулируется так: *определить такое допустимое управление* u, *переводящее систему S из состояния* $x^{(0)}$ *в состояние* $x^{(N)}$, *при котором целевая функция* (3.4) *принимает наибольшее (наименьшее) значение.*

Предположим далее, что на фазовую траекторию и выбор управлений наложены ограничения

$$x^{(k)} \in X_k,\ k = 1,...,N-1, \tag{3.5}$$

$$u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)}),\ k = 1,...,N, \tag{3.6}$$

где X_k и $U_k(x^{(k-1)})$ - заданные множества в пространствах R^n и R^m соответственно, причем множество $U_k(x^{(k-1)})$ зависит, вообще говоря, от предыдущего состояния $x^{(k-1)}$ k-го шага.

Ограничения на начальное и конечное состояния процесса

$$x^{(0)} \in X_0,\ x^{(N)} \in X_N$$

называются *начальными и конечными условиями*.

Пусть $u = \left\{u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(N)}\right\}$ - управление процессом, удовлетворяющее ограничениям (3.6) и переводящее его из некоторого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ в некоторое конечное состояние $x^{(N)} \in X_N$ в соответствии с уравнением (3.2) с учетом ограничений (3.5). Обозначим множество всех таких управлений буквой U.

Многошаговая задача оптимизации формулируется следующим образом: *среди всех управлений* $u \in U$ *выбрать такое* $\bar{u} = \left\{\bar{u}^{(1)}, ..., \bar{u}^{(N)}\right\}$, *для которого целевая функция (3.3) принимает минимальное или максимальное (в зависимости от смысла задачи) значение.*

Управление $\bar{u}$ и соответствующая ему фазовая траектория $\bar{x}$ называются *оптимальными*.

Условие многошаговой задачи оптимизации будем записывать следующим образом:

$$J(x,u) = \sum_{k=1}^{N} J_k = \sum_{k=1}^{N} J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \to \underset{u}{extr}, \tag{3.7}$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}),\ k = 1,...,N, \tag{3.8}$$

$$u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)}),\ k = 1,...,N, \tag{3.9}$$

$$x^{(0)} \in X_0,\ x^{(N)} \in X_N .$$

Выделим особенности модели ДП:

1. *Задача оптимизации интерпретируется как* N*-шаговый процесс управления,*
2. *Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага.*

3. Выбор управления на k-м *шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).*

4. *Состояние* $x^{(k)}$ *после* k*-го шага управления зависит только от предшествующего состояния* $x^{(k-1)}$ *и управления* $u^{(k)}$ *(отсутствие последействия).*

5. *На каждом шаге управление* $u^{(k)}$ *зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние* $x^{(k)}$ *— от конечного числа параметров (смысл* замечания 5 станет ясным из рассмотренных ниже примеров).

Существуют различные способы решения подобных задач, применяемые в зависимости от вида функций, ограничений, размерности и т. п. Рассмотрим вычислительную схему ДП, которая окажется безразличной к способам задания функций и ограничений. Вычислительная схема связана с принципом оптимальности и использует рекуррентные соотношения.

3.2. Принцип оптимальности и уравнения Беллмана

Принцип оптимальности впервые был сформулирован Р. Беллманом в 1953 г. *Каково бы ни было состояние* x *системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.* Беллманом четко были сформулированы и условия, при которых принцип верен. Основное требование — процесс управления должен быть без обратной связи, т.е. управление на данном шаге не должно оказывать влияния на предшествующие шаги.

Принцип оптимальности утверждает, что для любого процесса без обратной связи оптимальное управление таково, что оно является оптимальным для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса. Поэтому решение на каждом шаге оказывается наилучшим с точки зрения управления в целом. Если изобразить геометрически оптимальную траекторию в виде ломаной линии, то любая часть этой ломаной будет являться оптимальной траекторией относительно начала и конца,

Уравнения Беллмана. Вместо исходной задачи ДП (см. разд. 6.1) с фиксированным числом шагов N и начальным состоянием $x^{(0)}$ рассмотрим последовательность задач, полагая последовательно N=1, 2,... при различных x — одношаговую, двухшаговую и т.д., — используя принцип оптимальности.

Введем ряд новых обозначений. Обозначения в ДП несут большую информационную нагрузку, поэтому очень важно их четко усвоить.

На каждом шаге любого состояния системы $x^{(k-1)}$ решение $u^{(k)}$ нужно выбирать "с оглядкой", так как этот выбор влияет на последующее состояние $x^{(k)}$ и дальнейший процесс управления, зависящий от $x^{(k)}$. Это следует из принципа оптимальности.

Но есть один шаг, последний, который можно для любого состояния $x^{(N-1)}$ планировать локально-оптимально, исходя только из соображений этого шага.

Рассмотрим N-й шаг: $x^{(N-1)}$ — состояние системы к началу N-го шага, $x^{(N)}$ — конечное состояние, $u^{(N)}$ — управление на N-м шаге, а $J_k(x^{(N-1)},u^{(N)})$ — целевая функция (выигрыш) N-го шага.

Согласно принципу оптимальности, $u^{(N)}$ нужно выбирать так, чтобы для любых состояний $x^{(N-1)}$ получить максимум (минимум) целевой функции на этом шаге.

Обозначим через $B_N(x^{(N-1)})$ максимум целевой функции — показателя эффективности N-го шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии $x^{(N-1)}$, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$B_N(x^{(N-1)})$ *называется условным максимумом целевой функции на N-м шаге.* Очевидно, что

$$B_N(x^{(N-1)}) = \max_{u^{(N)} \in U_N(x^{(N-1)})} \left(J_N(x^{(N-1)},u^{(N)}) \right). \tag{3.10}$$

Максимизация ведется по всем допустимым управлениям U_N.

Решение $u^{(N)}$, при котором достигается $B_N(x^{(N-1)})$, также зависит от $x^{(N-1)}$ и называется *условным оптимальным управлением на N-м шаге.* Оно обозначается через $\bar{u}^{(N)}(x^{(N-1)})$.

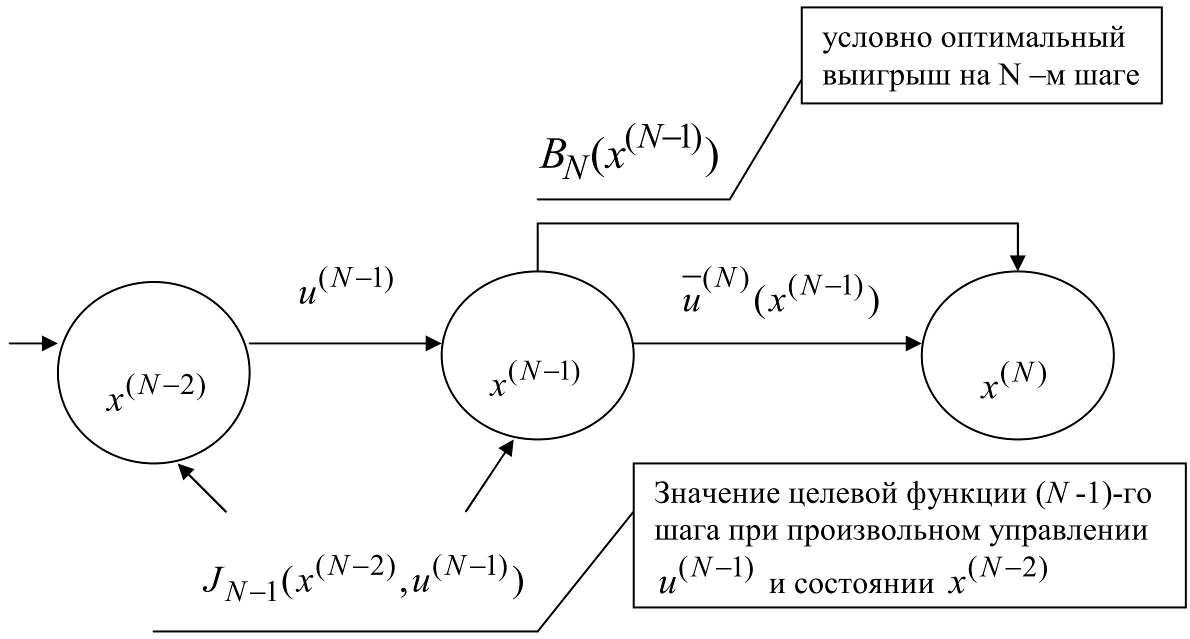


Рис. 3.2

Решив задачу локальной оптимизации (10), найдем для всех возможных состояний $x^{(N-1)}$ две функции: $B_N(x^{(N-1)})$ и $\bar{u}^{(N)}(x^{(N-1)})$.

Рассмотрим теперь двухшаговую задачу: присоединим к N-му шагу $(N-1)$-й шаг (рис.2).

Для любых состояний $x^{(N-2)}$, произвольных управлений $u^{(N-1)}$ и оптимальном управлении на N-м шаге значение целевой функции на двух последних шагах равно:

$$J_{N-1}(x^{(N-2)},u^{(N-1)})+B_N(x^{(N-1)}). \tag{3.11}$$

Согласно принципу оптимальности для любых $x^{(N-2)}$ решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем (N-м) шаге приводило бы к максимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, нужно найти максимум выражения (11) по всем допустимым управлениям $u^{(N-1)}$. Максимум этой суммы зависит от $x^{(N-2)}$ и обозначается через $B_{N-1}(x^{(N-2)})$ и называется *условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах.* Соответствующее управление $u^{(N-1)}$ на $(N-1)$-м шаге обозначается через $\bar{u}^{(N-1)}(x^{(N-2)})$ и называется *условным оптимальным управлением* на $(N-1)$-м шаге.

$$B_{N-1}(x^{(N-2)})=\max_{U_{N-1}}\left\{J_{N-1}(x^{(N-2)},u^{(N-1)})+B_N(x^{(N-1)})\right\}. \tag{3.12}$$

Следует обратить внимание на то, что выражение, стоящее в фигурных скобках (3.12), зависит только от $x^{(N-2)}$ и $u^{(N-1)}$, так как $x^{(N-1)}$ можно найти из уравнения состояний (3.2) при $k = N-1$

$$x^{(N-1)} = f^{(N-1)}(x^{(N-2)}, u^{(N-1)})$$

и подставить вместо $x^{(N-1)}$ в функцию $B_N(x^{(N-1)})$.

В результате максимизации только по одной переменной $u^{(N-1)}$ согласно уравнению (3.12) вновь получаются две функции:

$$B_{N-1}(x^{(N-2)}) \text{ и } \overline{u}^{(N-1)}(x^{(N-2)}).$$

Далее рассматривается трехшаговая задача: к двум последним шагам присоединяется $(N-2)$-й шаг и т.д.

Обозначим через $B_k(x^{(k-1)})$ *условный максимум целевой функции, полученный при оптимальном управлении на* $N-(k-1)$ *шагах, начиная с* k*-го до конца, при условии, что к началу* k*-го шага система находилась в состоянии* $x^{(k-1)}$. Фактически эта функция равна

$$B_k(x^{(k-1)}) = \max_{\{U_k,\ldots,U_N\}} \sum_{i=k}^{N} J_i(x^{(i-1)}, u^{(i)}).$$

Тогда

$$B_{k+1}(x^{(k)}) = \max_{\{U_k,\ldots,U_N\}} \sum_{i=k+1}^{N} J_i(x^{(i-1)}, u^{(i)}).$$

Целевая функция на $(N-k)$ последних шагах (рис. 3) при произвольном управлении $u^{(k)}$ на k-м шаге и оптимальном управлении на последующих $(N-k)$ шагах равна

$$J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) + B_{k+1}(x^{(k)}).$$

Согласно принципу оптимальности, $u^{(k)}$ выбирается из условия максимума этой суммы, т.е.

$$B_k(x^{(k-1)}) = \max_{U_k}\left\{J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) + B_{k+1}(x^{(k)})\right\}, \quad k = N-1, N-2, \ldots, 2, 1. \quad (3.13)$$

Управление $u^{(k)}$ на k-м шаге, при котором достигается максимум в (13), обозначается через $\overline{u}^{(k)}(x^{(k-1)})$ и называется *условным оптимальным управлением на* k*-м шаге* (также как и в (12) в правую часть уравнения (3.13) вместо $x^{(k)}$ следует подставить выражение $x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})$, найденное из уравнения состояния).

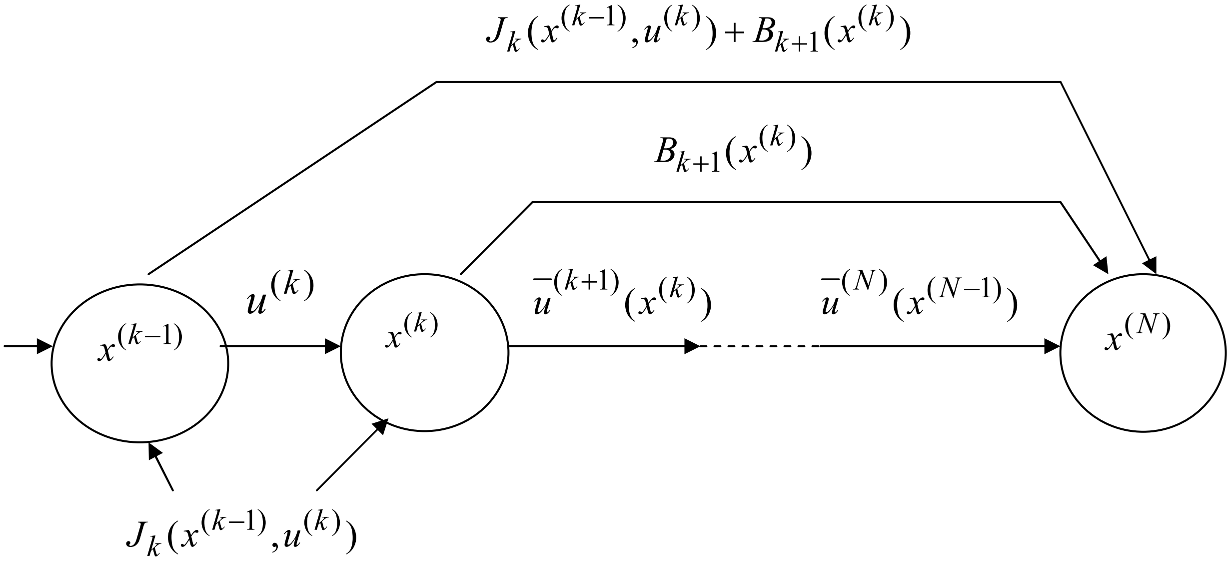


Рис. 3.3.

Функция $B_k(x^{(k-1)})$ называется *функцией Беллмана* последних $N-(k-1)$ шагов.

Уравнения (13) называют *уравнениями Беллмана.* Это рекуррентные соотношения, позволяющие найти предыдущее значение функции, зная последующие. Если из (10) найти $B_N(x^{(N-1)})$, то при $k=N-1$ из (13) можно определить, решив задачу максимизации для всех возможных значений $x^{(N-2)}$, выражение для $B_{N-1}(x^{(N-2)})$ и соответствующее управление $u^{(N-1)}(x^{(N-2)})$. Далее, зная $B_{N-1}(x^{(N-2)})$, находим $B_{N-2}(x^{(N-3)})$, используя (13) и уравнение состояния (3.2).

Процесс решения уравнений (3.10) и (3.13) называется *условной оптимизацией*.

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

1) условные максимумы целевой функции на последнем, двух последних, на … N шагах

$$B_N(x^{(N-1)}), B_{N-1}(x^{(N-2)}), ..., B_2(x^{(1)}), B_1(x^{(0)});$$

2)условные оптимальные управления на N-м, $(N-1)$-м,…,1-м шагах

$$\bar{u}^{(N)}(x^{(N-1)}), \bar{u}^{(N-1)}(x^{(N-2)}), ..., \bar{u}^{(2)}(x^{(1)}), \bar{u}^{(1)}(x^{(0)}).$$

Используя эти последовательности, можно найти решение задачи ДП при данных N и $x^{(0)}$. По определению $B_1(x^{(0)})$ — условный максимум целевой функции за N шагов при условии, что к началу 1-го шага система была в состоянии $x^{(0)}$, т.е.

$$B_{\max} = B_1(x^{(0)}). \tag{3.14}$$

Далее, используя последовательность условных оптимальных управлений и уравнения состояний (3.8), последовательно находим $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{x}^{(2)}$, …, $\bar{u}^{(N)}$, $\bar{x}^{(N)}$ из следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1)}(\bar{x}^{(0)}), && \bar{x}^{(1)} = f^{(1)}(\bar{x}^{(0)}, \bar{u}^{(1)}),\\
&\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2)}(\bar{x}^{(1)}), && \bar{x}^{(2)} = f^{(2)}(\bar{x}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\\
&\bar{u}^{(N)} = \bar{u}^{(N)}(\bar{x}^{(N-1)}), && \bar{x}^{(N)} = f^{(N)}(\bar{x}^{(N-1)}, \bar{u}^{(N)}).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Этот этап называется безусловной оптимизацией.

3.3. Задача о распределении средств между предприятиями

Планируется деятельность четырех промышленных предприятий (системы) на очередной год. Начальные средства: $x^{(0)} = 5$ усл.ед. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 усл.е. Средства u, выделенные k-му предприятию ($k = 1,2,3,4$), приносят в конце года прибыль $J_k(u)$. Функции $J_k(u)$ заданы таблично (табл.1). Принято считать, что:

а) прибыль $J_k(u)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия;

б) прибыль от каждого предприятия выражается в одних условных единицах;

в) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Таблица 1.

u	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	8	10	11	12	18
$J_2(u)$	6	9	11	13	15
$J_3(u)$	3	4	7	11	18
$J_4(u)$	4	6	8	13	16

Решение. Обозначим через $u^{(k)}$ количество средств, выделенных k-му предприятию. Суммарная прибыль равна

$$J = \sum_{k=1}^{4} J_k(u^{(k)}). \tag{3.16}$$

Переменные u удовлетворяют ограничениям:

$$\sum_{k=1}^{4} u^{(k)} = 5,\ u^{(k)} \geq 0,\ k = 1,2,3,4. \tag{3.17}$$

Требуется найти переменные $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$, удовлетворяющие системен ограничений (3.17) и обращающие в максимум функцию (3.16).

Схема решения задачи методом ДП имеет следующий вид: процесс решения распределения средств $x^{(0)} = 5$ можно рассматривать как 4-шаговый, номер шага совпадает с номером предприятия; выбор переменных $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ — управление соответственно на I, II, III, IV шагах. Конечное состояние процесса распределения $x^{(4)} = 0$, так как все средства должны быть вложены в производство. Схема распределения показана на рис. 3.

Уравнения состояний (2) в данной задаче имеют вид:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - u^{(k)}, \quad k = 1,2,3,4, \tag{3.18}$$

где $x^{(k)}$ — параметр состояния — количество средств, оставшихся после k-го шага, т.е. средства, которые остается распределить между оставшимися $4-k$ предприятиями.

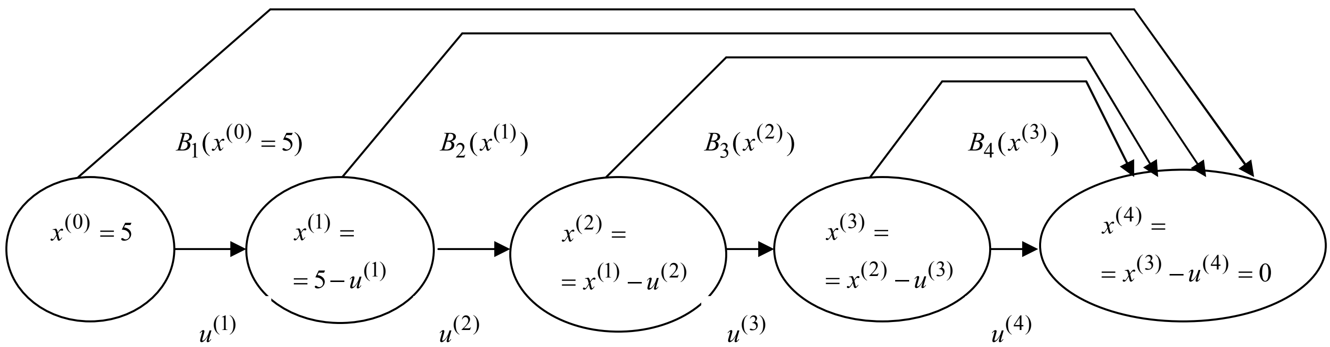


Рис. 3.4.

Введем в рассмотрение функцию $B_k(x^{(k-1)})$, ($k = 4,3,2,1$) — условную оптимальную прибыль, полученную от 4-го предприятия ($k = 4$), 4-го и 3-го предприятий ($k = 3$), 4-го, 3-го и 2-го предприятий ($k = 2$) и всех четырех предприятий ($k = 1$). При этом предполагается, что средства $x^{(k-1)}$ $(0 \leq x^{(k-1)} \leq 5)$ распределяются между ними оптимальным образом. Допустимые управления на k-м шаге удовлетворяют условию: $0 \leq u^{(k)} \leq x^{(k-1)}$ (либо k-му предприятию ничего не выделяем, $u^{(k)} = 0$, либо не больше того, что имеем к k-му шагу, $u^{(k)} \leq x^{(k-1)}$).

Уравнения (3.11) и (3.14) имеют вид:

$$k = 4,\ x^{(4)} = 0 \Rightarrow B_4(x^{(3)}) = \max_{0 \leq u^{(4)} \leq x^{(3)}} J_4(u^{(4)}), \tag{а}$$

$$B_3(x^{(2)}) = \max_{0 \leq u^{(3)} \leq x^{(2)}} \left(J_3(u^{(3)}) + B_4(x^{(3)}) \right), \tag{б}$$

$$B_2(x^{(1)}) = \max_{0 \le u^{(3)} \le x^{(2)}} \Big(J_2(u^{(2)}) + B_3(x^{(2)}) \Big), \qquad \text{(в)}$$

$$B_1(x^{(0)} = 5) = \max_{0 \le u^{(3)} \le x^{(2)}} \Big(J_1(u^{(1)}) + B_2(x^{(1)}) \Big). \qquad \text{(г)}$$

Последовательно решаем записанные уравнения, проводя условную оптимизацию (см. рис. 3.4) каждого шага.

IV шаг. В табл. 3.1 прибыли $J_4(u)$ монотонно возрастают, поэтому все средства, оставшиеся к IV шагу следует вложить в 4-е предприятие. При этом для возможных значений $x^{(3)} = 0,1,...,5$ получим:

$$B_4(x^{(3)}) = J_4(x^{(3)}) \text{ и } \overline{u}^{(4)}(x^{(3)}) = x^{(3)}.$$

III шаг. Делаем все предположения относительно остатка средств $x^{(2)}$ к III шагу (т.е. после выбора $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$). Величина $x^{(2)}$ может принимать значения 0,1,2,3,4,5 (например, $x^{(2)}$=0, если все средства отданы 1-му и 2-му предприятиям, $x^{(2)}$=5, если 1-е и 2-е предприятия ничего не получили, и т.д.). В зависимости от этого выбираем управление $0 \le u^{(3)} \le x^{(2)}$, находим $x^{(3)} = x^{(2)} - u^{(3)}$ и сравниваем для разных $u^{(3)}$ при фиксированном $x^{(2)}$ значения суммы $J_3(u^{(3)}) + B_4(x^{(3)})$. Для каждого $x^{(2)}$ наибольшее из этих значений есть $B_3(x^{(2)})$— условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении средств $x^{(2)}$ между 3-м и 4-м предприятиями. Результаты расчетов даны в табл. 2 для. Для каждого значения $x^{(2)}$ при k=3 величины $B_3(x^{(2)})$ и $\overline{u}^{(3)}(x^{(2)})$ помещены в столбцы 5 и 6 соответственно.

II шаг. Условная оптимизация в соответствии с выражением (в) представлена в табл.2 при $k = 2$ в столбцах 7 – 9. Для всевозможных значений $x^{(1)}$ величины $B_2(x^{(1)})$ и $\overline{u}^{(2)}(x^{(1)})$ даны в столбцах 8 и 9 соответственно; первые слагаемые в столбце 7 — значения $J_2(u^{(2)})$, взяты из табл. 3.1, а вторые слагаемые взяты из столбца 5 табл. 3.2 при $x^{(2)} = x^{(1)} - u^{(2)}$.

Таблица 3.2.

$x^{(k-1)}$	$u^{(k)}$	$x^{(k)}$	$k=3$			$k=2$			$k=1$		
			$J_3(u^{(3)}) + B_4(x^{(3)})$	$B_3(x^{(2)})$	$\overline{u}^{(3)}(x^{(2)})$	$J_2(u^{(2)}) + B_3(x^{(2)})$	$B_2(x^{(1)})$	$\overline{u}^{(2)}(x^{(1)})$	$J_1(u^{(1)}) + B_2(x^{(1)})$	$B_1(x^{(0)})$	$\overline{u}^{(1)}(x^{(0)})$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+4=4	4	0	0+4=4			0+6=6		
	1	0	3+0=3			6+0=6	6	1	8+0=8	8	1
2	0	2	0+6=6			0+7=7			0+10=10		
	1	1	3+4=7	7	1	6+4=10	10	1	8+6=14	14	1

	2	0	4+0=4			9+0=9			10+0=10		
3	0 1 2 3	3 2 1 0	0+8=8 3+6=9 4+4=8 7+0=7	9	1	0+9=9 6+7=13 9+4=13 11+0=11	13	1 2	0+13=13 8+10=18 10+6=16 11+0=11	18	1
4	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0+13=13 3+8=11 4+6=10 7+4=11 11+0=11	13	0	0+13=13 6+9=15 9+7=16 11+4=15 13+0=13	16	2	0+16=16 8+13=21 10+10=20 11+6=17 12+0=12	21	1
5	0 1 2 3 4 5	5 4 3 2 1 0	0+16=16 3+13=16 4+8=12 7+6=13 11+4=15 18+0=18	18	5	0+18=18 6+13=19 9+9=18 11+7=18 13+4=17 15+0=15	19	1	0+19=19 8+16=24 10+13=23 11+10=21 12+6=18 18+0=18	24	1

I шаг. Условная оптимизация в соответствии с выражением (г) приведена в табл. 2 при $k=1$ (здесь достаточно провести расчеты только для $x^{(0)}=5$, так как начальное состояние задано и равно 5).

Дадим пояснение этим расчетам. Если $u^{(1)}=0$, то $x^{(1)}=5$, прибыль, полученная от четырех предприятий при условии, что $x^{(1)}=$ 5 у.е. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна $J_1(0)+B_2(5)$=0+19=<u>19</u> (величина $B_2(5)$ взята из столбца 8 табл. 3.2 при $x^{(1)}$=5). Если $u^{(1)}=1$, то $x^{(1)}=4$. Суммарная прибыль от четырех предприятий при условии, что $x^{(1)}$=4 у.е. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна $J_1(1)+B_2(4)$=8+16=<u>24</u> ($J_1(1)$ взято из табл. 1, а $B_2(4)$ — из столбца 8 табл. 2). Аналогично при $u^{(1)}=2$, $x^{(1)}=3$, и $J_1(2)+B_2(3)$=10+13=<u>23</u>. Продолжая этот процесс, мы получим:

при $u^{(1)}=3$, $x^{(1)}=2$ и $J_1(3)+B_2(2)$=11+10=<u>21</u>;

при $u^{(1)}=4$, $x^{(1)}=1$ и $J_1(4)+B_2(1)$=12+6 =<u>18</u>;

при $u^{(1)}=5$, $x^{(1)}=0$ и $J_1(5)+B_2(0)$=18+0=<u>18</u>.

Сравнивая подчеркнутые числа, получим $B_{\max}=B_1(5)$=24 при $\bar{u}^{(1)}=\bar{u}^{(1)}(5)$=1.

Рассмотрим этап *безусловной оптимизации*. Используя уравнения (3.18), получим $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \bar{u}^{(1)}$=5 - 1 = 4. В табл. 2 в столбце 9 находим $\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2)}(4)=2$ Продолжая этот процесс, имеем:

$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} - \bar{u}^{(2)} = 4 - 2 = 2$, $\bar{u}^{(3)} = \bar{u}^{(3)}(2)=1$ (см. столбец 6);

$\bar{x}^{(3)} = \bar{x}^{(2)} - \bar{u}^{(3)} = 2 - 1 = 1$, $\bar{u}^{(4)} = \bar{u}^{(4)}(1)=1$, так как $\sum_{k=1}^{5} \bar{u}^{(k)} = 5$ (см. условие (3.17)).

Таким образом имеем: максимум суммарной прибыли равен 24 у.е. средств при условии, что 1-му предприятию выделено 1 у.е., 2-му предприятию — 2 у.е., 3-му предприятию — 1 у.е., 4-му предприятию — 1.у.е.

Замечание 1. Метод ДП безразличен к виду и способу задания функции прибыли $J_k(u)$. Здесь они были заданы таблично, поэтому оптимальные $B_k(x)$ и $\bar{u}^{(k)}(x)$ принимали дискретные значения, представленные в табл. 2. Если бы $J_k(u)$ были заданы аналитически, то $B_k(x)$ и $\bar{u}^{(k)}(x)$ также были бы получены в аналитическом виде.

Замечание 3. В рассмотренных задачах состояния системы x и управления u были скалярными величинами, поэтому на каждом шаге у нас рассматривались одномерные задачи оптимизации. В общем случае, как мы отмечали ранее состояния системы $x \in R^n$ описываются n-мерным вектором, а управления — m-мерным вектором ($u \in R^m$). Поэтому с увеличением размерности векторов состояний и управлений объем вычислений резко возрастает, так как на каждом шаге возникает $n \cdot m$-мерная задача оптимизации.

3.4. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет

Планируется деятельность двух отраслей производства на N лет. Начальные ресурсы $x^{(0)}$. Средства u, вложенные в I отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $J_1(u)$ и возвращаются в размере $q_1(u) < u$; аналогично для II отрасли функция прибыли равна $J_2(u)$, а возврата — $q_2(u)$ ($q_2(u) < u$). В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между I и II отраслями, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладываются. (Последние условия определяют вид уравнений состояний; если поступают новые средства или часть прибыли вкладывается в производство, то это можно легко учесть, так как алгоритм метода ДП не изменится).

Требуется распределить имеющиеся средства $x^{(0)}$ между двумя отраслями производства на N лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за N лет оказалась максимальной.

Необходимо:

а) построить модель ДП для задачи и вычислительную схему;

б) решить задачу при условии, что $x^{(0)} = 10000$ у.е., $N = 4$, $J_1(u) = 0.6u$, $q_1(u) = 0.7u$, $J_2(u) = 0.5u$, $q_2(u) = 0.8u$.

Решение.

а) Процесс распределения средств между двумя отраслями производства разворачивается во времени, решения принимаются в начале каждого года, следовательно, осуществляется деление на шаги: номер шага — номер года. Управляемая система — две отрасли производства, а управление состоит в выделении средств каждой отрасли в очередном году. Параметры состояния к началу k-го года — $x^{(k-1)}$ ($k = 1,2,...,N$) — количество средств, подлежащих распределению. Переменных управления на каждом шаге две: $u_1^{(k)}$ — количество средств, выделенных I отрасли, и $u_2^{(k)}$ — II отрасли. Но так как все средства $x^{(k-1)}$ распределяются, то $u_2^{(k)} = x^{(k-1)} - u_1^{(k)}$, поэтому управление на k-м шаге зависит от одной переменной $u_1^{(k)}$, т.е. $U^{(k)}(u^{(k)}, x^{(k-1)} - u^{(k)})$.

Уравнения состояний

$$x^{(k)} = q_1(u^{(k)}) + q_2(x^{(k-1)} - u^{(k)}) \qquad (3.19)$$

выражают остаток средств, возвращенных в конце k-го года.

Показатель эффективности k-го шага — прибыль, полученная в конце k-го года от обеих отраслей:

$$J_k = J_1(u^{(k)}) + J_2(x^{(k-1)} - u^{(k)}) \qquad (3.20)$$

Суммарный показатель эффективности — целевая функция — прибыль за N лет:

$$J = \sum_{k=1}^{N} \Big(J_1(u^{(k)}) + J_2(x^{(k-1)} - u^{(k)}) \Big). \qquad (3.21)$$

Пусть $B_k(x^{(k-1)})$ – условная оптимальная прибыль за $N - k + 1$ лет, начиная с k-го года до N-го включительно, при условии что имеющиеся на начало k-го года средства $x^{(k-1)}$ в дальнейшем распределялись оптимально. Тогда оптимальная прибыль за N лет $J_{\max} = B_1(x^{(0)})$.

Уравнения Беллмана приобретают вид:

$$B_N(x^{(N-1)}) = \max_{0 \le u^{(N)} \le x^{(N-1)}} \{J_1(u^{(N)}) + J_2(x^{(N-1)} - u^{(N)})\}, \qquad (3.22)$$

$$B_k(x^{(k-1)}) = \max_{0 \le u^{(k)} \le x^{(k-1)}} \{J_1(u^{(k)}) + J_2(x^{(k-1)} - u^{(k)})\}, \qquad (3.23)$$

$k = N-1, N-2, ..., 1$

б) Выполним вычисления для конкретных данных.

Уравнение состояний (3.19) примет вид:

$$x^{(k)} = 0.7u^{(k)} + 0.8(x^{(k-1)} - u^{(k)}) = 0.8x^{(k-1)} - 0.1u^{(k)}. \tag{3.24}$$

Целевая функция k го шага (3.20)

$J_k = 0.6u^{(k)} + 0.5(x^{(k-1)} - u^{(k)}) = 0.5x^{(k-1)} + 0.1u^{(k)}$.

Целевая функция задачи

$$J = \sum_{k=1}^{4}\left(0.5x^{(k-1)} + 0.1u^{(k)}\right). \tag{3.25}$$

Уравнения Беллмана

$$B_4(x^{(3)}) = \max_{0 \le u^{(4)} \le x^{(3)}} \{0.5x^{(3)} + 0.1u^{(4)}\}, \tag{3.26}$$

$$B_k(x^{(k-1)}) = \max_{0 \le u^{(k)} \le x^{(k-1)}} \{0.5x^{(k-1)} + 0.1u^{(k)} + B_{k+1}(x^{(k)})\}. \tag{3.27}$$

Проводим условную оптимизацию.

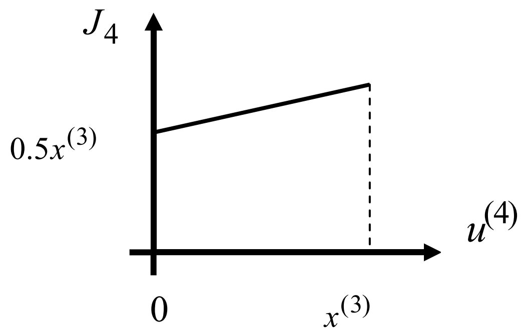


Рис. 3.5

IV шаг. Используем уравнение (3.26). Обозначим через J_4 функцию, стоящую в скобках, $J_4 = 0.5x^{(k-1)} + 0.1u^{(k)}$; функция J_4 — линейная, возрастающая. Поэтому максимум достигается на конце интервала $[0, x^{(3)}]$ (см. рис. 3.5)

Поэтому, $B_4(x^{(3)}) = 0.6x^{(3)}$ при $\bar{u}^{(4)}(x^{(3)}) = x^{(3)}$.

III шаг. Запишем уравнение (3.27) для k =3

$$B_3(x^{(2)}) = \max_{0 \le u^{(3)} \le x^{(2)}} \{0.5x^{(2)} + 0.1u^{(3)} + 0.6x^{(3)}\}.$$

Найдем $x^{(3)}$ из уравнения состояния (24) $x^{(3)} = 0.8x^{(2)} - 0.1u^{(3)}$ и подставим его в правую часть, получим

$B_3(x^{(2)}) = \max_{0 \le u^{(3)} \le x^{(2)}} \{0.5x^{(2)} + 0.1u^{(3)} + 0.6(0.8x^{(2)} - 0.1u^{(3)})\}$, или

$B_3(x^{(2)}) = \max\limits_{0 \le u^{(3)} \le x^{(2)}} \{0.98x^{(2)} + 0.04u^{(3)}\}$.

Как и в предыдущем случае, максимум достигается при $u^{(3)} = x^{(2)}$, т.е.
$B_3(x^{(2)}) = 1.02x^{(2)}$ при $\overline{u}^{(3)}(x^{(2)}) = x^{(2)}$.

II шаг. Из уравнения состояния находим $x^{(2)}$: $x^{(2)} = 0.8x^{(1)} - 0.1u^{(2)}$.
Уравнение (3.27) при k =2 примет вид:

$B_2(x^{(1)}) = \max\limits_{0 \le u^{(2)} \le x^{(1)}} \{0.5x^{(1)} + 0.1u^{(2)} + 1.02x^{(2)}\} =$

$= \max\limits_{0 \le u^{(2)} \le x^{(1)}} \{0.5x^{(1)} + 0.1u^{(2)} + 1.02(0.8x^{(1)} - 0.1u^{(2)})\}$. После преобразования получим:

$B_2(x^{(1)}) = \max\limits_{0 \le u^{(2)} \le x^{(1)}} \{1.316x^{(1)} - 0.002u^{(2)}\}$.

Имеем убывающую по $u^{(2)}$ функцию на отрезке $[0, x^{(1)}]$, поэтому максимум достигается при $u^{(2)} = 0$ (см. рис. 3.6) $B_2(x^{(1)}) = 1.316x^{(1)}$ при $\overline{u}^{(2)}(x^{(1)}) = 0$.

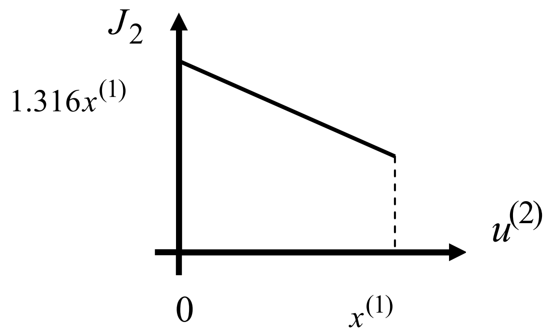


Рис. 3.6

I шаг. $x^{(1)} = 0.8x^{(0)} - 0.1u^{(1)}$. Уравнение (27) при k =1 имеет вид:

$B_1(x^{(0)}) = \max\limits_{0 \le u^{(1)} \le x^{(0)}} \{0.5x^{(0)} + 0.1u^{(1)} + 1.316(0.8x^{(0)} - 0.1x^{(1)}\}$, или

$B_1(x^{(0)}) = \max\limits_{0 \le u^{(1)} \le x^{(0)}} \{1.5528x^{(0)} - 0.0316u^{(1)}\}$.

Максимум достигается в начале отрезка, т.е.
$B_1(x^{(0)}) = 1.5528x^{(0)}$ при $\overline{u}^{(1)}(x^{(0)}) = 0$.

Переходим к безусловной оптимизации. $J_{\max} = B_1(10000) = 15528$.

$\overline{u}_1^{(1)} = 0,\ \overline{u}_2^{(1)} = x^{(0)} - \overline{u}_1^{(1)} = 10000$ (все средства выделяются II отрасли);

$\rightarrow \overline{x}^{(1)} = 0.8\overline{x}^{(0)} - 0.1\overline{u}^{(0)} = 0.8 \cdot 10000 - 0.1 \cdot 0 = 8000 \Rightarrow$

$\overline{u}_1^{(2)} = 0$, $\overline{u}_2^{(2)} = \overline{x}^{(1)} = 8000$(все средства выделяются II отрасли);

$\rightarrow \overline{x}^{(2)} = 0.8\overline{x}^{(1)} - 0.1\overline{u}^{(2)} = 0.8 \cdot 8000 - 0.1 \cdot 0 = 6400 \Rightarrow$

$\overline{u}_1^{(3)} = 6400$, $\overline{u}_2^{(3)} = \overline{x}^{(2)} - \overline{u}_1^{(3)} = 0$ (все средства выделяются I отрасли);

$\rightarrow \overline{x}^{(3)} = 0.8\overline{x}^{(2)} - 0.1\overline{u}^{(3)} = 0.8 \cdot 6400 - 0.1 \cdot 6400 = 4480 \Rightarrow$

$\overline{u}_1^{(4)} = 4480$, $\overline{u}_2^{(4)} = \overline{x}^{(3)} - \overline{u}_1^{(4)} = 0$ (все средства выделяются I отрасли).

Оптимальная прибыль за 4 года, полученная от двух отраслей производства при начальных средствах 10000 у.е., равна 15528 у.е. при условии, что I отрасль получает по годам (0, 0, 6400, 4480), а II отрасль — соответственно (10000, 8000, 0, 0).

3.5. Задача о замене оборудования

Замена оборудования — важная экономическая проблема. Задача состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования (станков, производственных зданий и т. п.). Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты, затраты на ремонт и обслуживание, снижаются производительность труда, ликвидная стоимость. Критерием оптимальности являются, как правило, либо прибыль от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

При построении модели задачи принято считать, что решение о замене выносится в начале каждого промежутка эксплуатации (например, в начале года) и что в принципе оборудование можно использовать неограниченно долго.

Основная характеристика оборудования — параметр состояния — его возраст t.

При составлении динамической модели замены процесс замены рассматривают как N-шаговый, разбивая весь период эксплуатации на N шагов. Возможное управление на каждом шаге характеризуется качественными признаками, например, U^c (сохранить оборудование), $U^з$ (заменить) и U^p (сделать ремонт).

Рассмотрим конкретный пример.

• **Пример**. Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после этого продается. В начале каждого года можно принять решение сохранить оборудование или заменить его новым. Стоимость нового оборудования $p_0 = 4000$ ден. ед. После t лет эксплуатации ($1 \le t \le 5$) оборудование можно продать за $g(t) = p_0 2^{-t}$ ден. ед. (ликвидная стоимость). Затраты на содержание в течение года зависят от возраста t оборудования и равны $r(t) = 600(t+1)$. Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны.

Решение. Способ деления управления на шаги естественный, по годам, $N = 5$. Параметр состояния — возраст машины — $x^{(k-1)} = t$, $x^{(0)} = 0$ — машина новая в начале первого года эксплуатации. Управление на каждом шаге зависит от двух переменных U^c и $U^з$.

Уравнения состояний зависят от управления:

$$x^{(k-1)} = \begin{cases} t+1, \; \textit{если} \; u^{(k)} = U^c, \\ 1, \quad \textit{если} \; u^{(k)} = U^з, \; k = 1,2,3,4. \end{cases} \tag{3.28}$$

В самом деле, если к k-му шагу $x^{(k-1)} = t$, то при сохранении машины ($u^{(k)} = U^c$) через год возраст машины увеличится на 1. Если машина заменяется новой ($u^{(k)} = U^з$), то это означает, что к началу k*-го* шага ее возраст $t = 0$, а после года эксплуатации $t = 1$, т.е. $x^{(k)} = 1$.

Показатель эффективности k*-го* шага:

$$J_k(u^{(k)}, t) = \begin{cases} 600(t+1), \qquad \textit{если} \; u^{(k)} = U^c, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t}, \; \textit{если} \; u^{(k)} = U^з, \; k = 1,...,4. \end{cases} \tag{3.29}$$

(При U^c затраты только на эксплуатацию машины возраста t, при $U^з$ машина продается ($-4000 \cdot 2^{-t}$), покупается новая (4000) и эксплуатируется в течение первого года (600), общие затраты равны ($-4000 \cdot 2^{-t} -$ 4000+600).

Пусть $B_k(t)$ — условные оптимальные затраты на эксплуатацию машины, начиная с *k-то* шага до конца, при условии, что к началу *k-го* шага машина имеет возраст t лет. Запишем для функций $B_k(t)$ уравнения Беллмана (10) и (13), заменив задачу максимизации на задачу минимизации:

$$B_5 = \min \begin{cases} 600(t+1) - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, \qquad \textit{если} \; u^{(5)} = U^c, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, \; \textit{если} \; u^{(5)} = U^з. \end{cases} \tag{3.30}$$

Величина $4000 \cdot 2^{-(t+1)}$ — стоимость машины возраста t лет (по условию машина после 5 лет эксплуатации продается).

$$B_k = \min \begin{cases} 600(t+1) + B_{k+1}(t+1), \qquad \textit{если} \; u^{(k)} = U^c, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} + B_{k+1}(1), \; \textit{если} \; u^{(k)} = U^з. \end{cases} \tag{3.31}$$

$$k = 4,3,2,1.$$

Из определения функций $B_k(t)$ следует

$$J_{\min} = B_1(0).$$

Дадим геометрическое решение этой задачи. На оси абсцисс будем откладывать номер шага k, на оси ординат — возраст t машины. Точка $(k-1,t)$ на плоскости соответствует началу k*-го* года эксплуатации машины возраста t лет. Перемещение на графике в зависимости от принятого управления на k-м шаге показано на рис. 3.7.

Состояние начала эксплуатации машины соответствует точке $x^{(0)}(0,0)$, конец — точкам $\hat{x}(6,t)$. Любая траектория, переводящая точку $x(k-1,t)$ из $x^{(0)}$ в $\hat{x}$, состоит из отрезков — шагов, соответствующих годам эксплуатации. Надо выбрать такую траекторию, при которой затраты на эксплуатацию машины окажутся минимальными.

Над каждым отрезком, соединяющим точки $(k-1,\ t)$ и $(k,\ t+1)$, запишем соответствующие управлению U^c затраты, найденные из (3.29): $600(t+1)$, а

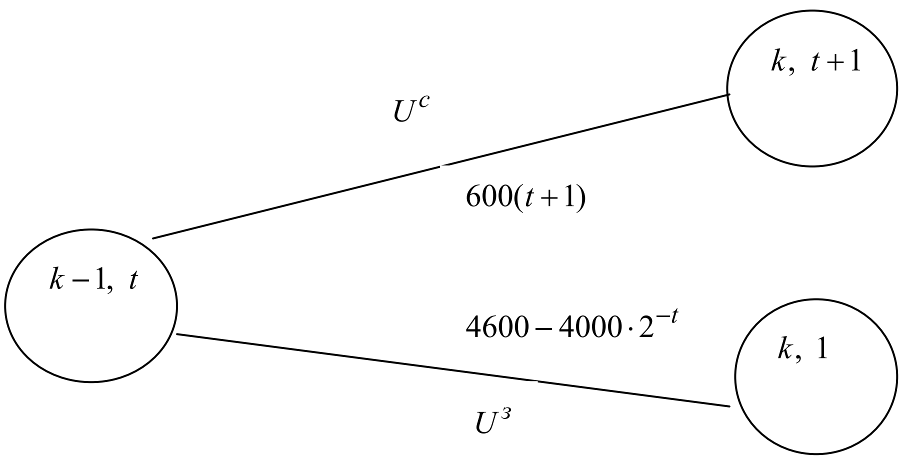


Рис. 3.7.

над отрезком, соединяющим $(k-1,\ t)$ и $(k,\ 1)$, запишем затраты, соответствующие управлению $U^з$, т.е. $4600-4000\cdot 2^{-t}$. Таким образом, мы разметим все отрезки, соединяющие точки на графике, соответствующие переходам из любого состояния $x^{(k-1)}$ в состояние $x^{(k)}$ (см. рис. 3.8). Например, над отрезками, соединяющими точки $(k,2)$ и $(k+1,\ 3)$, стоит число 1800, что соответствует затратам на эксплуатацию в течение каждого года машины возраста $t=2$ лет, а над отрезками, соединяющими $(k,\ 2)$ и $(k+1,\ 1)$, стоит число 3600 — сумма затрат на покупку машины и эксплуатацию новой машины в течение года без "затрат" (выручки) за проданную машину возраста t лет. Следует учесть, что $0 \le t \le k$.

Проведем на размеченном графе состояний (см. рис. 8) условную оптимизацию.

V шаг. Начальные состояния — точки (4; t), конечные (5; t). В состояниях (5; t) машина продается, условный оптимальный доход от продажи равен

$4000 \cdot 2^{-t}$, но поскольку целевая функция связана с затратами, то в кружках точек (5; t) поставим величину дохода со знаком минус.

Анализируем, как можно попасть из каждого начального состояния в конечное на V шаге.

Состояние (4; 1). Из него можно попасть в состояние (5; 2), затратив на эксплуатацию машины 1200 и выручив затем от продажи 1000, т.е. суммарные затраты равны 200, и в состояние (5; 1) с затратами 2600—2000=600. Значит, если к последнему шагу система находилась в точке (4; 1), то следует идти в точку (5; 2) (укажем это направление жирной стрелкой), а неизбежные минимальные затраты, соответствующие этому переходу, равны 200 (поместим згу величину $B_5(1) = 200$ в кружке точки (4; 1).

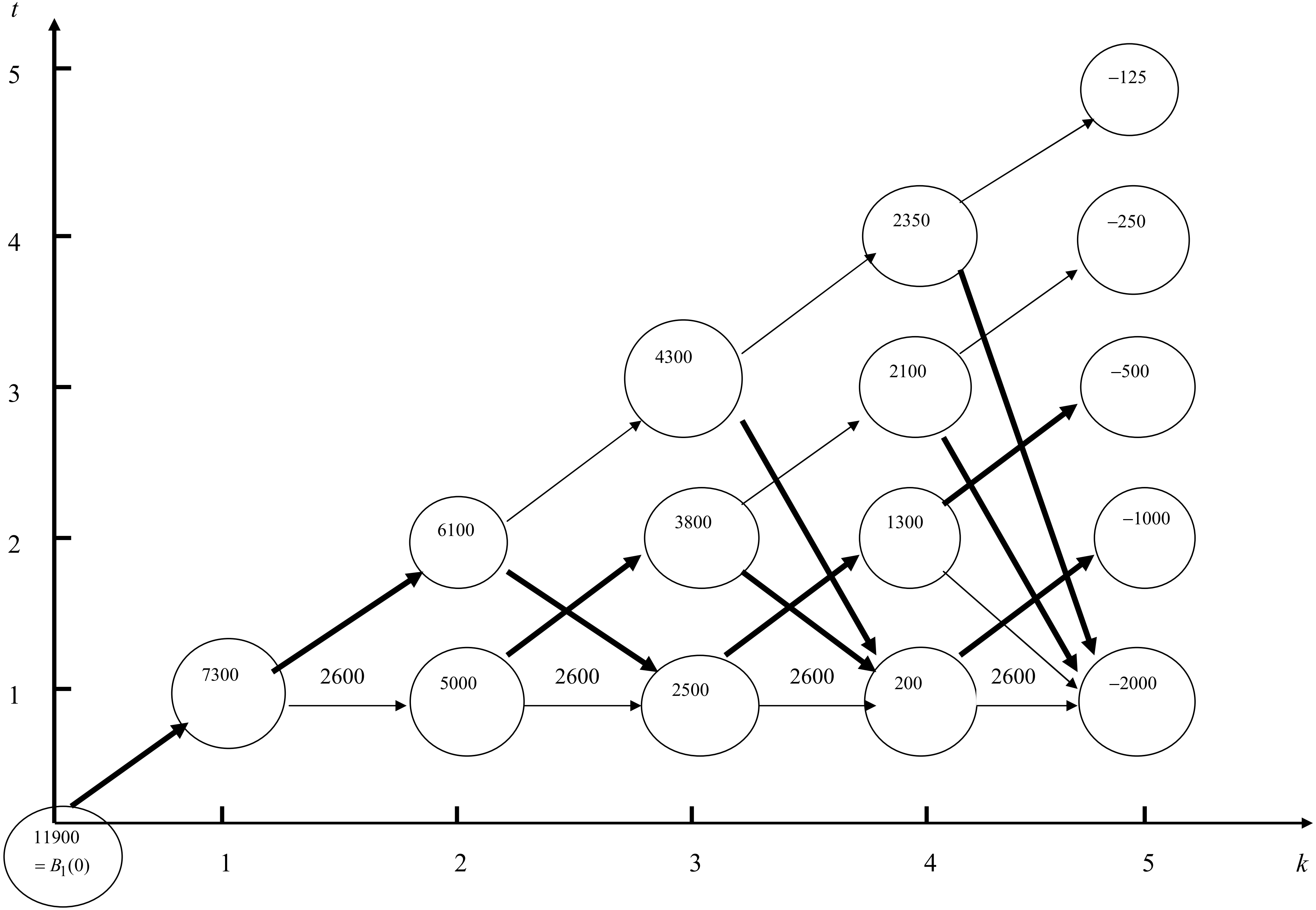
Состояние (4; 2). Из него можно попасть в точку (5; 3) с затратами 1800-500-1300 и в точку (5; 1) с затратами 3600-2000=1600. Выбираем первое управление, отмечаем его жирной стрелкой, а $B_5(2) = 1300$ проставляем в кружке точки (4; 2).

Рассуждая таким же образом для каждой точки предпоследнего шага, мы найдем для любого исхода IV шага оптимальное управление на V шаге, отметим его на рис. 3.8 жирной стрелкой.

Далее планируем IV шаг, анализируя каждое состояние, в котором может оказаться система в конце III шага с учетом оптимального продолжения до конца процесса, т.е. решаем для всех $0 \le t \le 4$ при k=4 уравнения (28). Например, если начало IV шага соответствует состоянию (3; 1), то при управлении U^c система переходит в точку (4; 2), затраты на этом шаге 1200, а суммарные затраты за два последних шага равны 1200+1300=2500. При управлении $U^з$ затраты за два шага равны 2600+200=2800. Выбираем минимальные затраты 2500, ставим их в кружок точки (3; 1), а соответствующее управление на этом шаге помечаем жирной стрелкой, ведущей из состояния (3; 1) в состояние (4; 2). Так поступаем для каждого состояния (3; t) (см. рис. 3.8).

Продолжая условную оптимизацию III, II и I шагов, мы получим на рис. 8 следующую ситуацию: из каждой точки (состояния) выходит стрелка, указывающая, куда следует перемешаться в данном шаге, если система оказалась в этой точке, а в кружках записаны минимальные затраты на переход из этой точки в конечное состояние. На каждом шаге графически решались уравнения (3.28).

После проведения условной оптимизации получим в точке (0; 0) минимальные затраты на эксплуатацию машины в течение 5 лет с последующей продажей: $J_{\min} = 11900$. Далее строим оптимальную траекторию, перемещаясь из точки $x^{(0)}(0;0)$ по жирным стрелкам в $\hat{x}$.


t
5
4
3
2
1
k
1
2
3
4
5
11900
$= B_1(0)$
7300
6100
5000
4300
3800
2500
2350
2100
1300
200
−125
−250
−500
−1000
−2000
2600
2600
2600
2600

Получаем набор точек:

$$\{(0;\,0),\,(1;\,1),\,(2;\,2),\,(3;\,1),\,(4;\,2),\,(5;\,3)\},$$

который соответствует оптимальному управлению $\bar{u} = (U^c, U^c, U^з, U^c, U^c)$. Оптимальный режим эксплуатации состоит в том, чтобы заменить машину новой в начале 3-го года.

Таким образом, размеченный график (сеть) позволяет наглядно интерпретировать расчетную схему и решить задачу методом ДП.

Вопросы для текущего контроля

1. Что понимают под динамическим программированием?
2. Запишите условие многошаговой задачи оптимизации
3. Перечислите особенности модели динамического программирования
4. В чем состоит принцип оптимальности управления при решении задачи динамического программирования?
5. Запишите уравнения Беллмана
6. Запишите модель задачи о распределении средств между предприятиями в виде модели динамического программирования
7. Запишите модель задачи об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет в виде модели динамического программирования
8. Запишите модель задачи о замене оборудования в виде модели динамического программирования

Тема 4. Основы вариационного исчисления

4.1. Функционалы. Основные понятия

Далеко не все встречающиеся в приложениях задачи поиска экстремума могут быть решены в форме задач нелинейного программирования. Математические модели многих прикладных задач на экстремум сводятся к оптимизации *функционалов* на множестве функций. Первые задачи подобного типа были сформулированы в математике и решены в 17-18 вв. С тех пор раздел математики, где исследуются задачи на экстремум в бесконечномерных *функциональных пространствах*, *называется вариационным исчислением* (ВИ).

Основная задача ВИ возникла как непосредственное обобщение поставленной Бернулли[1] в 1696г. *задачи о брахистохроне* (брахистохрона – линия наискорейшего ската материальной точки). Эта задача содержала типичные черты нового класса задач и на протяжении всей истории развития ВИ служила и как объект испытаний новых методов, и как основа для многих интеграционных обобщений.

Задача о брахистохроне. В плоскости (xOy) имеются две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой. Координаты точек: $A(0;0)$ и $B(x_1;y_1)$.

Необходимо найти линию, соединяющую их. При движении вдоль этой линии тяжелый материальный шарик под действием силы тяжести P должен достигнуть точки B за кратчайшее время. Силами трения пренебрегаем. $v_A = 0$ - начальная скорость равна нулю.

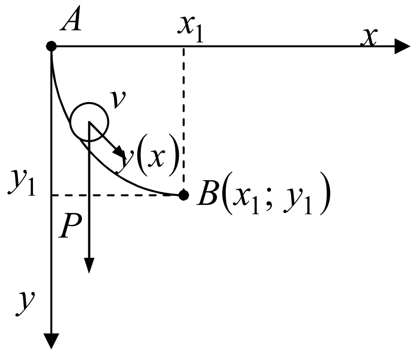


Рис. 4.1 Линия наискорейшего спуска в задаче о брахистохроне

Найдем зависимость времени движения от траектории $y(x)$. Обозначим через ds элемент пути, а через $d\tau$ элемент времени. Тогда мы можем записать

$$v(x) = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{2g\,y(x)}, \quad ds = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\,,$$

---

[1] Якоб Бернулли (1654 – 1705 гг.) – швейцарский ученый.

где g - ускорение свободного падения. Подставив выражение ds в первое уравнение, получим

$$d\tau = \frac{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{2g\;\; y(x)}}\;\; dx\;\; .$$

Отсюда получаем время движения шарика из точки A в точку B:

$$T = J(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{y}}dx\;.$$

Необходимо найти такую кривую $y(x)$ $x\in[0, x_1]$, чтобы $J(y)$ было минимальным. Граничные условия задачи следующие:

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1\,.$$

Определение. Если каждому элементу $y = y(x)$ множества $G\subset X$ из некоторого функционального пространства X поставлено в соответствие определенное число J, то говорят, что на множестве $G\subset X$ задан функционал $J(y)\equiv J[y(x)]$.

Задание функционала $J[y(x)]$ равносильно заданию закона, по которому каждой функции $y(x)$ ставится определенное действительное число. Например:

1) $J=\int\limits_a^b y(x)\,dx;$ 2) $J=\int\limits_a^b \varphi\,[y(x)]\,dx\,;$

2) $J(y_1, y_2) = J(y) = \int\limits_a^b \varphi\,[y_1(x), y_2(x)]\,dx\,;$

3) $J(y, y') = \int\limits_a^b \varphi\,[y(x), y'(x)]\,dx\,;$

4) длина дуги плоской кривой, соединяющей две заданные точки $A(a, y_a)$ и $B(b, y_b)$, если задано уравнение кривой $y = y(x)$, вычисляется по формуле (см. рис. 4.2)

$$l(y) = J(y, y') = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx\,;$$

5) функционалом является также площадь поверхности $y(x_1, y_2)$:

$$S(y) = J(y, y') = \iint\limits_E \sqrt{1+\left(\frac{\partial\, y\,(x_1, x_2)}{\partial\, x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\, y\,(x_1, x_2)}{\partial\, x_2}\right)^2}\,dx_1\,dx_2\,,$$

где E - область изменения векторной переменной $x=(x_1, x_2)$. Она представляет собой проекцию поверхности $y(x_1, x_2)$ на плоскость (x_1, x_2).

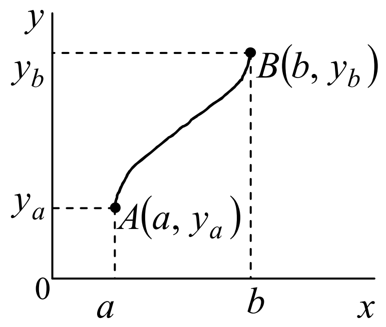


Рис. 4.2 К вопросу о вычислении длины дуги кривой

В качестве функциональных пространств X в ВИ используются пространства $C_n[a, b]$, которые определяются следующим образом $(n = 0, 1, \ldots)$. $C_n[a, b]$ - линейное нормированное пространство, которое состоит из функций $y(x)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные $y^{(k)}(x)$ до n-го порядка включительно $\left(y^{(0)} \equiv y(x)\right)$ с нормой

$$\| y \|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,\, b]} \left| y^{(k)}(x) \right|.$$

Расстояние $\rho(y_1, y_2)$ между функциями (кривыми) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространстве $C_n[a, b]$ определяется формулой

$$\rho(y_1, y_2) = \| y_1 - y_2 \| = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,\, b]} \left| y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x) \right|, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Пусть функция $y^*(x) \in C_n[a, b]$ и $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Множество функций (кривых) $y(x) \in C_n[a, b]$, для которых выполняется неравенство

$$\rho\,\left(y^*, y\right)_n < \varepsilon,$$

называется ε-окрестностью n-го порядка кривой $y^*(x)$.

4.2. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функционалов

Определение. Функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ *локального экстремума* (min или max), если для $\forall\ y(x)$ из некоторой ε-окрестности кривой $y^*(x)$ выполняется неравенство

$$J\left[y^*(x)\right] \le (\ge)\, J\,[y(x)]. \tag{4.1}$$

Если выражение (4.1) выполняется для $\forall\ y(x) \in G \subset C_n[a, b]$, то говорят, что на кривой $y^*(x)$ достигается *глобальный экстремум* функционала $J[y(x)]$ на множестве G.

Получим необходимое условие экстремума.

Если дан ненулевой элемент v подпространства $G_V \subset G$ и ε - действительное число, то произведение $\varepsilon \cdot v$ называют *вариацией*. Рассмотрим функционал J в точке $y^* + \varepsilon\, v$ пространства G. Нетрудно видеть, что этот функционал является функцией скалярного аргумента ε:

$$F(\varepsilon) \equiv J\left(y^* + \varepsilon\, v\right). \tag{4.2}$$

Разложим $F(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке ε:

$$F(\varepsilon) \equiv J\left(y^* + \varepsilon\, v\right) = J\left(y^*\right) + \delta J\left(y^*, v\right) \cdot \varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{4.3}$$

Здесь $\delta J\left(y^*, v\right) = \dfrac{dF(0)}{d\varepsilon}$ - первая вариация J (дифференциал Гато). Здесь появился аргумент v (см. ниже формулу (4.5)).

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{O}(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0.$$

Необходимое условие экстремума функционала J приобретает вид

$$\delta J\left(y^*, v\right) = \frac{dF(0)}{d\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J\left(y^* + \varepsilon\, v\right) - J\left(y^*\right)}{\varepsilon} = 0 \tag{4.4}$$

Пример. Пусть $\varphi(y)$ непрерывная дифференцируемая функция на множестве R_1 и $J(y)$ - функционал, определенный в функциональном пространстве G:

$$J(Y) = \int_0^1 \varphi(y(x))dx.$$

Рассмотрим

$$J\left(y^* + \varepsilon v\right) = \int_0^1 \varphi\left(y^*(x) + \varepsilon v(x)\right)dx = \int_0^1 \left\{ \varphi\left(y^*(x)\right) + \varepsilon \cdot \left.\frac{d\varphi}{dy}\right|_{y=y^*(x)} v(x) \right\} dx =$$

$$= J\left(y^*\right) + \varepsilon \int_0^1 \varphi'\left(y^*(x)\right) \cdot v(x)dx + \mathrm{O}(\varepsilon).$$

Таким образом, первая вариация равна

$$\delta J\left(y^*\right) = \int_0^1 \varphi'\left(y^*(x)\right) \cdot v(x)dx,$$

где $v(x)$ - любой элемент пространства G.

Приравнивая к нулю первую вариацию функционала, мы получаем уравнение, которому удовлетворяют все подозрительные на экстремум функции $y \in G$.

Пример. Пусть $\varphi(y_1, y_2)$ - непрерывная дифференцируемая на R_2 функция:

$$y = (y_1(x), y_2(x)) \in G;$$

$$J(y) = J(y_1, y_2) = \int_0^1 \varphi(y_1(x), y_2(x))dx.$$

Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\int_0^1 \nabla\varphi\left(y^*(x)\right)\, v(x)\, dx = 0,$$

где $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$; $\quad \nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)$.

Достаточное условие.

Разложим $F(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке $\varepsilon = 0$ до второго порядка включительно

$$F(\varepsilon) = J\left(y^* + \varepsilon v\right) = J\left(y^*\right) + \varepsilon\,\delta\, J\left(y^*\right) + \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\,\delta^2 J\left(y^*\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right). \qquad (4.5)$$

Считаем, что $\delta J\left(y^*\right) = 0$. Тогда, если

$$J\left(y^* + \varepsilon v\right) - J\left(y^*\right) > 0,$$

то в точке y^* функционал достигает своего минимума. Последнее условие с учетом (4.5) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2 J\left(y^*\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right) > 0$$

или с точностью до членов второго порядка малости по ε

$$\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\,\delta^2 J\left(y^*\right) > 0,$$

или $\delta^2 J\left(y^*\right) > 0$ - достаточное условие.

Пример. Пусть $\varphi(y)$ - дважды дифференцируемая непрерывная функция на R_1 и пусть дан функционал

$$J(y) = \int_0^1 \varphi(y(x))\,dx.$$

Разложим в ряд Тейлора подынтегральную функцию функционала

$$J\left(y^* + \varepsilon v\right) = \int_0^1 \varphi\left(y^*(x) + \varepsilon\cdot v(x)\right)dx =$$

$$\int_0^1 \left\{\varphi\left(y^*(x)\right) + \varepsilon\,\varphi'\left(y^*(x)\right)\cdot v(x) + \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\varphi''\left(y^*(x)\right)v^2(x)\right\}dx =$$

$$= J\left(y^*\right) + \varepsilon\int_0^1 \varphi'\left(y^*(x)\right)v(x)\,dx + \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \varphi''\left(y^*(x)\right)v^2(x)\,dx.$$

Если $\delta J\left(y^*\right) = 0$ и $\delta^2 J\left(y^*\right) = \int\limits_0^1 \varphi''\left(y^*(x)\right)v^2(x)\,dx > 0$,

то в этой точке функционал достигает минимума.

Пример.

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \varphi(y_1(x), y_2(x))\,dx.$$

Можно показать, что достаточные условия (ДУ) имеют вид:

$$\int_0^1 \left(v_1(x), v_2(x)\right)^T \nabla^2 \varphi\left(y_1^*, y_2^*\right) \cdot \left(v_1(x), v_2(x)\right) dx > 0,$$

где

$$\nabla^2 \varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \end{pmatrix}.$$

4.3. Вариационные задачи с закрепленными концами

Сформулируем основную лемму вариационного исчисления.

Рассмотрим функционал $J = \int \varphi(t, y(t))\, dt$.

Необходимое условие (НУ) экстремума имеет вид:

$$\int_E \left(\varphi_y(t), v(t)\right) dt = 0, \tag{4.6}$$

где $\varphi_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$; $v(t)$ - произвольная векторная непрерывная функция;

$$v(t) = \{v_1(t), \ldots, v_n(t)\}; \quad \varphi_y = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\right\},$$

E - область изменения аргумента t;

$\left(\varphi_y(t), v(t)\right)$ - скалярное произведение элементов векторного пространства непрерывных функций.

Лемма. Если равенство (4.6) выполняется для любых непрерывных функций $v(t) \in Y(E, R_n)$, где $\varphi_y(t)$ - также непрерывная векторная функция $\varphi_y(t) \in Y(E, R_n)$, то $\varphi_y(t) \equiv 0, \quad t \in E$.

В общем случае вместо $\varphi_y(t)$ может быть любая другая вектор-функция $f(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$. Поэтому, если мы имеем равенство:

$$\int_E \left(f(t),\ v(t)\right) dt = 0, \text{ то } f(t) \equiv 0.$$

Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами

Уравнения Эйлера представляют собой необходимые условия существования экстремума для определенного вида функционалов.

Получим НУ экстремума функционала:

$$J(y, y') = \int_a^b \varphi(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{4.7}$$

где $y(x)$ - скалярная непрерывная функция с непрерывной первой производной $y'(x)$; φ - известная непрерывная дифференцируемая функция своих аргументов

$$y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b, \tag{4.8}$$

где y_a, y_b - заданные числа.

Выражения (4.8) есть граничные условия (ГУ) вариационной задачи.

Считаем, что экстремум функционала (4.7) достигается в точке $\left[y^*, (y^*)'\right]$. Тогда, приравнивая нулю первую вариацию, получаем:

$$\delta J(y, y') = \int_a^b \left\{ \varphi_y(y, y') \cdot v(x) + \varphi_{y'}(y, y') \cdot v'(x) \right\} dx = 0, \tag{4.9}$$

где
$$\varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \varphi_{y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'}. \tag{4.10}$$

$v(x)$ - непрерывная с непрерывной производной $v'(x)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$v(a) = v(b) = 0, \quad \text{так как} \quad (y + \varepsilon v)\Big|_{x=a}^{x=b} = \begin{cases} y_b, \\ y_a. \end{cases} \tag{4.11}$$

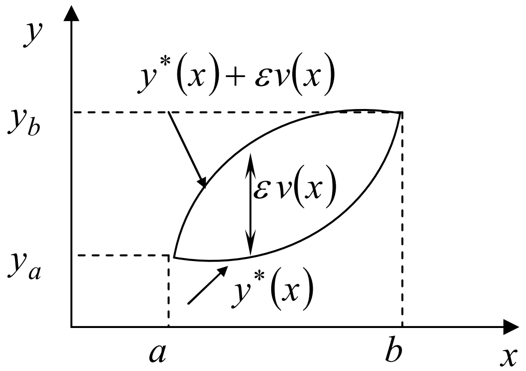


Рис. 4.3 Функция $y(x)$ и ее вариация $\varepsilon v(x)$ для задачи с закрепленными концами

Преобразуем выражение (4.9). Интегрируем второе слагаемое в (4.9) по частям:

$$\int_a^b \varphi_{y'} v' dx = \varphi_{y'} v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) \frac{d}{dx} \varphi_{y'}\, dx \quad \text{где} \quad \varphi_{y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'}.$$

Учитывая выражение (4.11), первое слагаемое равно нулю, и тогда уравнение (4.9) преобразуется в уравнение

$$\int\limits_a^b \left\{ \varphi_y - \frac{d}{dx}\varphi_{y'} \right\} \cdot v(x)\, dx = 0\,. \qquad (4.12)$$

Так как $v(x)$ - произвольная функция, то из выражения (4.12) следует

$$\varphi_y - \frac{d}{dx}\varphi_{y'} = 0\,, \quad \text{где} \quad \varphi_y = \frac{\partial \varphi(x, y, y')}{\partial y}\,. \qquad (4.13)$$

Уравнение (4.14) называется *уравнением Эйлера*. В развернутом виде это уравнение записывается следующим образом:

$$y''(x)\varphi_{y'y'} + y'(x)\varphi_{yy'} + \varphi_{xy'} - \varphi_y = 0\,, \qquad (4.14)$$

где $\varphi_{y'y'}$, $\varphi_{yy'}$, $\varphi_{xy'}$ - смешанные частные производные 2-го порядка.

Общее решение (4.14) зависит от двух констант - c_1 и c_2, т.е.

$$\Phi\left(y^*(x), x, c_1, c_2\right) = 0\,. \qquad (4.15)$$

Определить c_1, c_2 можно из условия закрепленности концов траектории (т.е. из условия (4.8)):

$$\Phi(y_a, a, c_1, c_2) = 0; \quad \Phi(y_b, b, c_1, c_2) = 0\,. \qquad (4.16)$$

Таким образом, поиск экстремума функционала (4.7) сводится к решению уравнения Эйлера (4.13) или (4.14) с двумя краевыми условиями. Решение его представляет самостоятельную сложную задачу.

Пример. $J(y, y') = \int\limits_0^{\pi/2} \left[y^2 - (y')^2 \right] dx, \quad y(0) = 1; \quad y(\pi/2) = 0\,.$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$2 \cdot (y + y'') = 0\,.$$

Общее решение имеет вид: $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Из краевых условий находим $c_1 = 0,\ c_2 = 1$ и тогда имеем $y^*(x) = \cos(x)$.

Уравнение Эйлера (4.14) не всегда интегрируемо, а в ряде случаев его решение может вызвать затруднения. *Перечислим частные случаи*, в которых решение уравнения Эйлера упрощается по сравнению с общим случаем.

Случай (1). Функция φ *не зависит* от y', т.е. $\varphi = \varphi(x, y(x))$.

Уравнение (4.14) принимает вид

$$\varphi_y(x, y) = 0\,.$$

В общем случае решение этого алгебраического (недифференциального) уравнения не существует в классе функций, лежащих внутри G.

Пример. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \cdot y^2$.

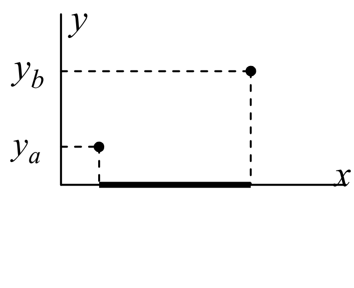


Рис. 4.4 Решение уравнения Эйлера для случая (1) (функция φ не зависит от y')

Уравнение Эйлера $y=0$ имеет решение $y(x)=0$, которое не удовлетворяет ГУ (4.8) задачи, за исключением случая, когда $y_a = y_b = 0$. Функционал достигает своего экстремума на кривой (см. рис. 4.4), удовлетворяющей ограничениям (4.8), но не относящейся к классу непрерывных функций.

Случай (2). Функция φ зависит только от y': $\varphi = \varphi(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\varphi_{y'} = 0 \text{ или } y''(x)\varphi^{*}_{y'y'} = 0,$$

а его общее решение - $y(x)=c_1 x + c_2$. Таким образом, в данном случае экстремум функционала достигается на семействе прямых (двухпараметрическом семействе прямых).

Справка. Уравнению Эйлера для случая $\varphi=\varphi(y')$ ($\varphi^{*}_{y'y'}\, y''=0$) - удовлетворяет двухпараметрическое семейство прямых линий $y(x)=c_1 x + c_2$. Действительно, из уравнения Эйлера следует либо $y''=0$, либо $\varphi^{*}_{y'y'}=0$. В первом случае $y(x)=c_1 x + c_2$. Во втором случае мы имеем алгебраическое уравнение $\varphi_{y'y'}(y')=0$ (здесь обозначение (*) опускаем) относительно y'. Пусть $\varphi_{y'y'}(y')$ является многочленом степени m, т.е. $\varphi_{y'y'}(y') = \prod_{i=1}^{m}(y'-k_i)$. Тогда его корнями являются $k_1, k_2, \ldots, k_m$, т.е.

$$y' = k_i, \quad i = \overline{1, m}$$

или $y(x) = k_i x + c, \quad i=\overline{1, m}$.

Это однопараметрическое семейство прямых линий, входящее в двухпараметрическое семейство $y = c_1 x + c_2$.

Пример 1. Найти траекторию перемещения из точки $A(a; y_a)$ в точку $B(b; y_b)$ за минимальное время, если скорость движения v зависит лишь от y', то есть $v = v(y')$; минимизируемый функционал имеет вид (смотри задачу о брахистохроне, где вместо $v(x)=\sqrt{2g\,y(x)}$ мы подставляем $v=v(y')$)

$$J(y') = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(y')}\,dx.$$

Так как J зависит только от y', то экстремум может достигать лишь на прямых линиях $y(x)=c_1 x + c_2$, где c_1, c_2 определяются краевыми условиями.

Пример 2. Из всех кривых, соединяющих две точки A и B, наименьшую длину

$$J(y')=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

имеет прямая линия.

Случай (3). Подынтегральная функция линейно зависит от y':

$$\varphi(x,\, y,\, y')=\varphi_1(x,\, y)+\varphi_2(x,\, y)\,y'.$$

Уравнение Эйлера $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0$ представляет, как и в первом примере, алгебраическое (а не дифференциальное) уравнение, и решение его из класса непрерывных с непрерывной первой производной функции $(G=C_1)$ не удовлетворяет ГУ (4.8) за исключением частных случаев.

Пример 1. $J(y,\, y')=\int_0^1 \left(y^2+x^2y'\right)dx, \quad y(0)=0; \quad y(1)=b$.

Уравнение Эйлера: $2y-2x=0$.

Решение: $y(x)=x$ удовлетворяет краевым условиям лишь при $b=1$.

Пример 2. $J(y,\, y')=\int_a^b \left(y^2+2xyy'\right)dx=\int_{ay_a^2}^{by_b^2} d\left(x\,y^2\right)=b\,y_b^2-a\,y_a^2$.

Случай (4). Функция φ не зависит от y, т.е. $\varphi=\varphi(x,\, y')$.

Уравнение Эйлера $\dfrac{d}{dx}\varphi_{y'}(x,\, y')=0$ откуда получаем первый интеграл $\varphi_{y'}(x,\, y')=C_1$. Т.е. имеем дифференциальное уравнение первого порядка. Иногда удается получить его аналитическое решение.

Пример. Время, затрачиваемое на перемещение по кривой $y(x)$ из одной точки $A(a;\, y_a)$ в другую $B(b;\, y_b)$, если скорость движения $v=x$ представляет собой функционал

$$J(y')=\int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}\,dx.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера равен $\dfrac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}=\dfrac{1}{c_1}$.

Решение его проще искать в параметрической форме. Делаем замену $y'=tg(\gamma)$, (γ - параметр) и тогда

$$x=\frac{c_1y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=c_1\cdot\left[\frac{\sin y/\cos y}{1/\cos y}\right]=c_1\sin\gamma.$$

Находим затем y как функцию параметра γ:

$$d\,y=y'\,dx=c_1\;tg\,(\gamma)\cos\gamma\;d\gamma=c_1\sin\gamma\;d\gamma;$$

$$y = -c_1 \cos\gamma + c_2.$$

Итак, экстремум достигается на кривых, заданных в параметрической форме:

$$\left\{\begin{aligned} & y - c_2 = -c_1 \cos\gamma \\ & x = c_1 \sin\gamma \end{aligned}\right\}.$$

Это семейство окружностей $(y - c_2)^2 + x^2 = c_1^2$ с центром на оси ординат. Параметры c_1, c_2 определяются из ГУ задачи.

Случай (5). Функция φ не зависит от x, т.е. $\varphi = \varphi(y, y')$.

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид:

$$\varphi_y - \varphi_{yy'} y' - \varphi_{y'y'} y'' = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на y', получим $\dfrac{d}{dx}\left(\varphi - y'\varphi_{y'}\right) = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера: $\varphi - y'\varphi_{y'} = c_1$.

Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра.

Пример. Решим задачу о брахистохроне:

$$J(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx \to \min.$$

Первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y\left(1 + (y')^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}.$$

После преобразований получим

$$y\left[1 + (y')^2\right] = c_1.$$

Решение ищем в параметрическом виде, вводя $y' = ctg\,\gamma$. Тогда

$$y = \frac{c_1}{1 + (y')^2} = \frac{c_1}{1 + ctg^2\gamma} = c_1 \sin^2\gamma = \frac{1}{2} c_1 (1 - \cos 2\gamma);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1 \sin\gamma \cos\gamma}{ctg\,\gamma} d\gamma = 2c_1 \sin^2\gamma\, d\gamma = c_1(1 - \cos 2\gamma) d\gamma;$$

$$x = c_1 \int (1 - \cos 2\gamma) d\gamma = c_1\left(\gamma - \frac{1}{2}\sin 2\gamma\right) + c_2 =$$

$$= \frac{1}{2} c_1 (2\gamma - \sin 2\gamma) + c_2; \quad c_2 = 0 \ \text{ т.к. } \ y(0) = 0,$$

при $\gamma = 0, \quad x = c_2 = 0 \to c_2 = 0 \quad v(0) = \sqrt{2g\,y(0)} = 0$.

Получим параметрическое уравнение циклоиды:

$$y=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2\gamma);\quad x=\frac{c_1}{2}(2\gamma-\sin 2\gamma).$$

4.4. Многомерный случай

Приведенные выше результаты автоматически обобщаются на многомерный случай:

$$J(y,y')=\int_a^b \varphi(x,y(x),y'(x))dx;\quad y(a)=y_a;\quad y(b)=y_b, \tag{4.18}$$

где

$$y=(y_1,y_2,\ldots,y_n);\quad y'=(y_1',y_2',\ldots,y_n');$$
$$y_a=\{y_{a1},\ldots,y_{an}\};\quad y_b=\{y_{b1},\ldots,y_{bn}\}.$$

Метод получения уравнений Эйлера полностью сохраняется, единственное отличие – необходимо правильно выполнять соответствующие операции над векторными величинами. В результате для первой вариации получим

$$\delta J(y,y')=\int_a^b\left\{\varphi_y-\frac{d}{dx}\varphi_{y'}\right\}\cdot v(x)\,dx=0, \tag{4.19}$$

где $v(x)=\{v_1(x),\ldots,v_n(x)\}$.

Из (4.19) получим систему дифференциальных уравнений Эйлера

$$\varphi_y-\frac{d}{dx}\varphi_{y'}=0. \tag{4.20}$$

Здесь $\varphi_y=\{\varphi_{y1},\ldots,\varphi_{yn}\};\qquad \varphi_{y'}=\{\varphi_{y'1},\ldots,\varphi_{y'n}\}$.

Система (4.20) решается совместно с ГУ: $y(a)=y_a;\quad y(b)=y_b$.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы набор функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)\in c_1[a,b]$ доставлял экстремум функционалу (4.18), необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли системе дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\varphi_{y_k}-\frac{d}{dx}\varphi_{y_k'}=0,\quad k=1,\ldots,n. \tag{4.21}$$

Пример.

$$J(y_1,y_2,y_1',y_2')=\int_0^{\pi/2}\left(y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2\right)dx;$$
$$y_1(0)=0;\quad y_2(0)=0;\quad y_1(\pi/2)=1;\quad y_2(\pi/2)=-1.$$

Составляем систему уравнений Эйлера

$$y_1''-y_2=0;\quad y_2''-y_1=0$$

и решаем ее:

$$y_1(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x;$$
$$y_2(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

Из ГУ находим $const$: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$; $c_4 = -1$. Получим кривые $y_1^*(x) = \sin x$, $y_2^*(x) = -\sin x$, на которых функционал может достигать экстремума.

4.5. Уравнения Эйлера-Пуассона

Найдем необходимое условие экстремума функционала

$$J\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = \int_a^b \varphi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) dx \tag{4.22}$$

при наличии ограничений

$$\left. \begin{aligned} y(a) = y_a,\ y'(a) = y'_a, \ldots, y^{n-1}(a) = y_a^{n-1}, \\ y(b) = y_b,\ y'(b) = y'_b, \ldots, y^{n-1}(b) = y_b^{n-1}. \end{aligned} \right\}. \tag{4.23}$$

Здесь $y(x)$ - скалярная непрерывная функция с непрерывными производными $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$; φ - известная непрерывная дифференцируемая функция своих аргументов.

Теорема. Для того чтобы функционал (4.22) достигал на функции $y(x) \in C_n[a, b]$ локального экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона

$$\varphi_y - \frac{d}{dx}\varphi_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\varphi_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\varphi_{y^n} = 0. \tag{4.24}$$

Подобно случаю простейшей задачи ВИ, решения уравнения (4.24) (экстремали функционала (4.22)), удовлетворяющие ГУ (4.23), являются кривыми, на которых функционал (4.22) может достигать экстремума на множестве $G = \left\{ y(x) \in C_n[a,b] \middle| ГУ(7.23) \right\}$.

Пример. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 \left(120\, x\, y - \frac{1}{2} y''^2 \right) dx.$$

ГУ: $y(0) = y'(0) = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 6$.

Решение: Запишем уравнение Эйлера-Пуассона

$$y^{(4)} = 120x.$$

Общее решение: $y(x) = x^5 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$.

Отсюда с помощью ГУ получаем систему уравнений для определения констант $c_i, \quad i = \overline{1,4}$.

Проверить самостоятельно:

$$\left.\begin{cases} c_4 = 0; \quad c_3 = 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 1, \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = 1; \quad c_2 = -1; \quad c_3 = c_4 = 0.$$

Ответ: $y(x) = x^5 + x^3 - x^2$.

Вопросы для текущего контроля

1. Вариационное исчисление. Понятие функционала.
2. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функционала.
3. Основная лемма вариационного исчисления.
4. Вариационные задачи с закрепленными концами
5. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (случаи 1, 2).
6. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (случаи 3, 4).
7. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (случаи 5)
8. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами (многомерный случай).
9. Уравнение Эйлера-Пуассона.

Литература

1. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы/Пер. с англ. – М.:Мир, 1982. – 583с.
2. Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации: Учеб. пособие – Томск: Изд-во ТУСУРа, 2004. – 256 с
3. Черепанов О.И. Методы оптимизации: Учебное пособие. – Томск : ТУСУР, 2007. - 203с.
4. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011. – 352с. (электр. ресурс). – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/1552/
5. Есипов Б.А. Методы исследования операций: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 256с. (электр. ресурс). – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/10250/