Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика - курс лекций (семестр 1, часть 2)

для специальности:
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2017

Настоящее электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения лекций на ФСУ (профилирующая кафедра АСУ) в группах 446-1 и 446-2 осенью 2016 года.

Оглавление.

Оглавление по номерам лекций:

Лекция № 8. 21. 10. 2016

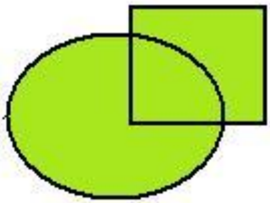
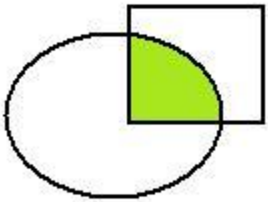
Глава 5. Основы математического анализа.
§1. Множества и функции.

Множеством называют совокупность объектов некоторого типа. Например, множество точек на плоскости, множество чисел, множество матриц.

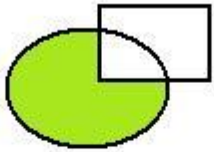
Объединение $A \cup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пересечение $A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}$

Объединение и пересечение 2 множеств показаны графически:

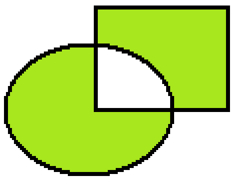



Разность множеств: $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$. Показано на чертеже:



Аналогично, $B \setminus A = \{x \in B, x \notin A\}$.

Объединение этих двух разностей называется симметрической разностью, и обозначается так: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, на чертеже:



В то же время, это множество можно получить и другим путём: из объединения удалить пересечение. То есть,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Ещё обозначения: $A \subset B$ - множество A является подмножеством множества B.

Числовые множества.

$N = \{1,2,3,\ldots\}$натуральные числа

$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ целые числа

$Q = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\; m,n \in Z \right\}$ рациональные числа

$R = (-\infty,\infty)$ вся действительная ось, действительные числа.

Множество $R \setminus Q$ - иррациональные числа.

Верно следующее: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Существует обобщение: комплексные числа вида $a+bi$. Комплексная плоскость.

Множества на действительной оси.

Интервал $(a,b) = \{x \in R \;\; a < x < b\}$ - граничные точки не включены.

Отрезок $[a,b] = \{x \in R \;\; a \le x \le b\}$ - здесь границы включены во множество.

Пример. Найти объединение и пересечение множеств $A = (0,2)$, $B = (1,3)$

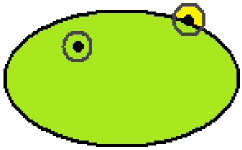
$A \cup B = (0,3) \quad A \cap B = (1,2)$.

Множество вида $[a,\infty) = \{x \in R \;\; a < x\}$. Числа «бесконечность» не существует, поэтому в таком множестве справа всегда должна быть круглая скобка.

Интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$в будущем будем называть окрестностью радиуса ε точки a и обозначать $U_\varepsilon(a)$.

Внутренние и граничные точки.

Если для точки $a \in A$ существует окрестность, которая полностью лежит во множестве A, то есть является его подмножеством, $U_\varepsilon(a) \subset A$, то такая точка называется внутренней точкой множества A. Если же для любой окрестности есть лишь частичное пересечение со множеством А, то такая точка называется граничной точкой множества. Показано на чертеже:



Функция, аргумент, образ.

Пусть даны 2 множества X , Y . Если задан некоторый способ каждому элементу $x \in X$ поставить в соответствие какой-то $y \in Y$, то говорится, что задана ФУНКЦИЯ из X в Y . Обозначение:

$f : X \to Y$.

x называется аргументом функции, а y - образом.

Основные элементарные функции и их графики: повторить из школьного курса (!)

Степенные x^a , показательные a^x , логарифмические $\log_a x$, тригонометрические $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$, обратные тригонометрические.

Лекция № 9. 28. 10. 2016

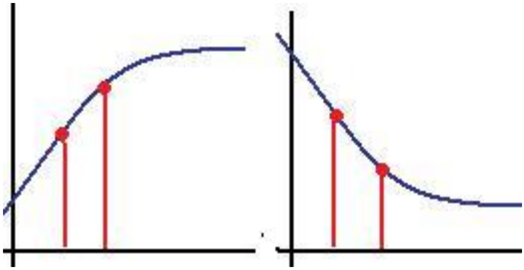
Если $f : R \to R$, то есть $y = f(x)$, график - кривая в плоскости.

Если $f : R^2 \to R$ функция двух переменных, то есть $z = f(x, y)$, её график - это поверхность в трёхмерном пространстве.

Монотонность.

Монотонно возрастающая функция: если $x_1 < x_2$ то $f(x_1) \le f(x_2)$.

Монотонно убывающая функция: если $x_1 < x_2$ то $f(x_1) \ge f(x_2)$.



Периодичность.
Если существует такое число T, что $\forall x \in R$ верно $f(x+T) = f(x)$ то функция называется периодической, T - период.
Примеры. $\sin(x)$, $\cos(x)$ период 2π, $tg(x)$, $ctg(x)$ период π.
О влиянии коэффициента на период. Если $\sin(ax)$ период равен $\frac{2\pi}{a}$. Если $a > 1$, колебания становятся чаще, а период меньше. Почему так происходит? Точка x прошла расстояние 2π, в это время ax - прошло в a раз больше, то есть в a раз больше колебаний произошло на этом отрезке, длина которого 2π. Если $a < 1$ наоборот, период больше, а колебания реже, чем у исходного графика.

Чётность и нечётность.

Чётная функция: $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси 0у, т.е. при зеркальном отражении переходит в точно такой же график, примером может быть парабола, а также cos(x).

Нечётная функция: $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно точки (0,0), то есть после поворота на 180^0 график был бы таким же, примером может быть кубическая парабола или любая другая нечётной степени, или например синус, тангенс.

Существует такое неочевидное свойство разложения на чётные и нечётные компоненты:
Свойство. Любая функция f представима в виде суммы чётной и нечётной, то есть $f(x) = g(x) + h(x)$.

Доказательство. Введём две функции: $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,

$h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. Первая из них чётна, вторая нечётна. Видно, что если заменить x на $-x$, то для $g(x)$ получится выражение, равное исходному, а вот для $h(x)$ разность в числителе будет противоположна: $h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$.

Сумма этих функций: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=$

$$\frac{f(x)+f(x)+f(-x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x).$$

итак, $f(x)=g(x)+h(x)$.

Если чётную и нечётную компоненты записать для функции $f(x)=e^x$, то получатся так называемые гиперболический косинус и гиперболический синус: $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Вообще, существует 3 способа задания функций - явный, неявный, параметрический.

Способ задания:	Явно	Неявно	Параметрически
Вид уравнения:	$y=f(x)$	$F(x,y)=0$	$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$
Пример (окружность)	$y=\pm\sqrt{1-x^2}$	$x^2+y^2=1$	$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$
Пример (прямая)	$y=kx+b$	$Ax+By+C=0$	$\begin{cases} x=x_0+kt \\ y=y_0+mt \end{cases}$

Для поверхностей тоже существуют эти 3 способа:
Явный: $z=f(x,y)$ Неявный: $F(x,y,z)=0$

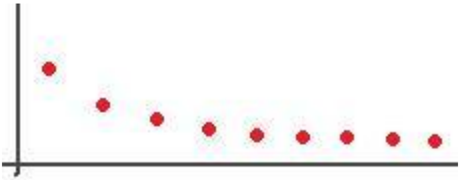
Параметрический: $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ (в этом случае обязательно будет два параметра). Например, 2 параметра на сфере: широта и долгота.

§2. Пределы.

Последовательность.

Множество чисел, пронумерованных с помощью натуральных чисел: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ называется последовательностью. Её можно определить также и как функцию $f : N \to R$.

Графиком будет не кривая, а дискретный набор точек, потому что только над каждой точкой с абсциссой, равной натуральному числу, есть точка графика.



Например, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ - последовательность.

Арифметическая и геометрическая прогрессии тоже частный случай последовательности.

Пример: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right\}$ геометрическая прогрессия

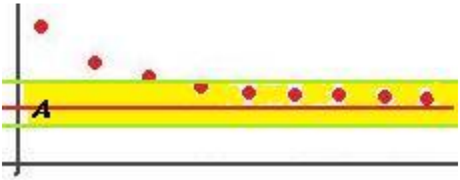
В рассмотренных примерах видно, что при возрастании номера элемент убывает к 0. Однако при этом само число 0 не достигается ни при каком номере. То есть, числа 0 в этой последовательности нет. Однако, все элементы уменьшаются и приближаются к 0. В связи с этим возникает определение предела последовательности:

Определение. Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$, такое, что $\forall n > n_0$ выполняется: $|A - a_n| < \varepsilon$.

(для любого числа эпсилон больше нуля, существует такой номер элемента последовательности, что для всех последующих номеров отклонение элементов от числа A меньше, чем эпсилон). В этом случае говорится, что последовательность **стремится** к числу A.

Обозначение предела: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (lim это от английского слова limit которое хорошо известно и в русском языке - лимиты потребления света, воды и т.д.).

Если рассмотреть полосу от $A-\varepsilon$ до $A+\varepsilon$ по высоте, то начиная с какого-то номера, все последующие точки будут попадать в эту полосу:



Чем меньше число ε (погрешность меньше) тем больший номер требуется .

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. По определению: если например требуемая точность $\varepsilon = 0{,}01$ то $n_0 = 100$, $\forall n < n_0$ выполняется: разность элемента и 0 менее 1/100, то есть 1/101 затем 1/102 и т.д.

* Для того, чтобы лучше понять, что такое предел, представьте следующее. Машина приближается к городу. Для любого заранее заданного расстояния (например ε = 10 км.) существует такой момент времени t_0, что в последующие моменты времени $t > t_0$ расстояние будет меньше, чем ε. Это как раз и означает «стремится к 0», то есть расстояние уменьшается к 0. Если задать ε = 5 км. то это достигается в более поздний момент времени, а если ε = 1 км. то ещё позже.

Предел может и не существовать. Для последовательности $\{1,0,1,0,\ldots\}$, например, предел не существует. Здесь не происходит стабилизация значений, то есть их колебания по высоте всегда 1. После каждого номера, найдётся последующий элемент, который удаляется на расстояние 1 от предыдущего, то есть эти колебания не могут быть меньше заранее заданного малого числа ε .

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} ..., \frac{n}{n+1}, ...\right\}$

Вычислим предел. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n/n}{(n+1)/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Второе

слагаемое в знаменателе стремится к 0. В итоге, $\frac{1}{1+0} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Таким же методом можно сокращать старшие степени и в других случаях, для произвольных степеней.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+n+1}{bn^2+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{b+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{a}{b} .$$

В общем случае, когда степени разные: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an^s+...}{bn^k+...} = \begin{cases} a/b \; npu \, s=k \\ 0 \; npu \, s<k \\ \infty \; npu \, s>k \end{cases}$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+1}{3n^2+7n+2}$

Решение. Здесь неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Сократим на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+1}{3n^2+7n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

Комментарий. В выражениях с неопределённостью типа $\infty-\infty$ ответ не виден из самого выражения. Так, если 2 объекта от нас удаляются в бесконечность, то при этом расстояние между ними может уменьшаться, может стабилизироваться на каком-то уровне, а может возрастать. Например, для $2n-n$ оба слагаемых стремятся к бесконечности, но и разность между ними тоже увеличивается неограниченно. А в разности $(n+1)-n$ оба слагаемых увеличиваются, но разность стабильна и равна 1. Поэтому при решении таких примеров снаала нужны преобразования, приводящие к виду дроби, а там уже можно сократить на какой-то множитель.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ умножим на сопряжённое выражение, то есть на сумму, подобную этой разности. Тогда можно будет применить формулу сокращённого умножения, и корень исчезнет, так как он будет возведён в квадрат.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}^{\,2}-n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n-n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

В знаменателе содержится n и выражение, содержащее корень из 2 степени, которое по скорости роста сопоставимо с n. Сократим числитель и знаменатель на n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}}+1\right)} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1\right)}$. Чтобы разделить корень, удобно факт деления на n представили как деление на корень из n^2, продолжим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Вычислительный эксперимент. Чтобы луше понять понятие предела, можете вычислить выражение $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ например, при n

= 100, n = 1000 на калькуляторе. Чем больше n тем ближе к 0,5 ответ получится.
n = 100 результат 0,49876. Отклонение от 1/2 составило 0,00124.
n = 1000 результат 0,49988. Отклонение от 1/2 составило 0,00012.

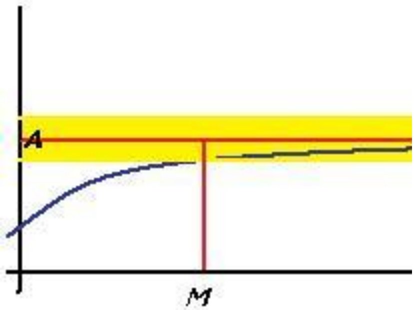
Теорема 1. Пусть дано 3 последовательности, причём для любого номера n: $u_n \le v_n \le w_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = A$ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = A$.

Доказательство. Так как для первой и третьей последовательности предел равен A, то числа u_n, w_n (начиная с какого-то номера) отклоняются от A не больше чем на величину ε, то есть принадлежат интервалу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Но число v_n находится между ними, тогда оно тоже принадлежит $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Тогда по определению, для средней последовательности тоже существует предел.

Теорема 2. Если последовательность монотонно возрастает *(убывает)* и ограничена сверху *(снизу)*, то она имеет конечный предел.

Примеры нарушения одного из этих двух условий.
$\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ не ограничена, предел ∞.
$\{1,0,1,0,\ldots.\}$ не монотонна. Пределом не может быть ни одно из чисел 0 или 1. Здесь после любого элемента, среди последующих есть какой-либо, удалённый от данного на расстояние 1, то есть в определении предела было бы не «для любого ε», а только для $\varepsilon > 1$. Колебания по высоте не уменьшаются, все последующие элементы не впишутся в узкую полосу ширины 2ε.

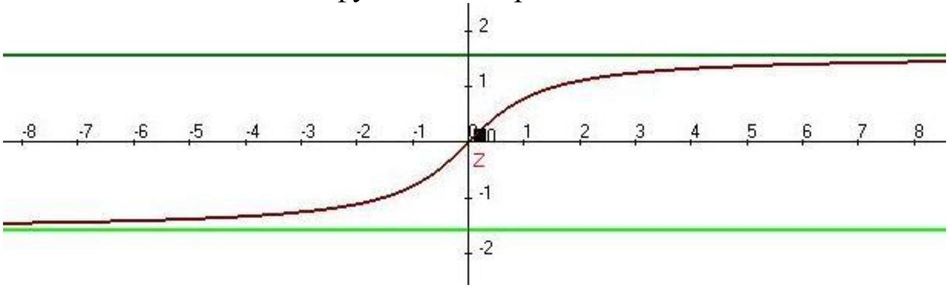
Предел функции при $x \to +\infty$.
Число A называется пределом функции $f(x)$, при $x \to +\infty$ если:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in R$, так, что $\forall x > M$ выполняется: $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Объяснение: для любой заранее заданной погрешности ε существует такая константа М, что правее неё график отклоняется от ординаты А не более, чем на ε.
Аналогично определяется предел при $x \to -\infty$ для левой полуоси.

Пример. $f(x) = arctg(x)$. Два различных предела при $+\infty$ и $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctg(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Предел на правой полуоси равен $\dfrac{\pi}{2}$, но при этом ни в одной точке $x \in R$ функция не принимает это значение.



Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x+6}$.Вычисление проводится таким же методом, как в случае последовательности, где было $n \to \infty$.

Сократим на x, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}}{3+\frac{6}{x}} = \dfrac{2+0}{3+0} = \dfrac{2}{3}$.

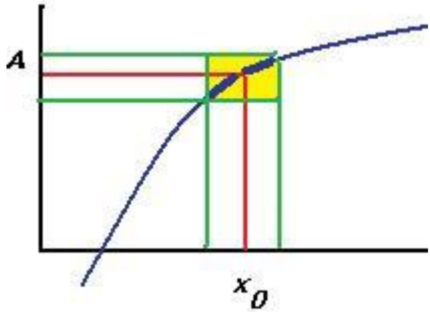
Как видим, вычислять пределы для дробно-рациональных выражений можно тем же методом, что было для последовательностей. Как видим, эта ситуация сильно напоминает то, что было в случае пределов последовательностей, только там дискретная величина $n \to +\infty$ а здесь непрерывная, $x \to +\infty$.

Предел функции в точке (при $x \to x_0$).

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется: $|A - f(x)| < \varepsilon$.

(для любого числа эпсилон больше нуля, существует такое число дельта, так что если модуль разности $x - x_0$ меньше дельта, то модуль разности $f(x) - A$ меньше, чем эпсилон).

Обозначение $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.



В случае существования предела, получается, что задавая погрешность ε можно найти такой интервал в области определения, что отклонение значений от А будет меньше чем ε. Фактически, часть графика впишется в некоторый прямоугольник, при уменьшении одной стороны будет уменьшаться и вторая.

У студентов может закономерно возникнуть вопрос, а для чего вообще нужно понятие предела в точке, и почему нельзя просто подставить x_0 и вычислить функцию. Проблема в том, что не всегда значение функции существует в точке. Иногда бывает так, что формально её вычислить нельзя. Например, для функции $\frac{x^2-9}{x-3}$ значение в точке $x_0=3$ не существует. При вычислении на калькуляторе поочерёдно числителя и знаменателя, получили бы $\frac{0}{0}$ и калькуляторы, компьютеры выдали бы сообщение об ошибке. Но ведь в соседних точках значение функции есть. График функции подходит к некоторой точке в плоскости. Так вот, её ордината и равна этому пределу.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

В точке 3 значение функции не существует, однако во всех соседних точках существует, и можно узнать, к какой ординате стремится график при $x\to 3$. Разложим на множители:

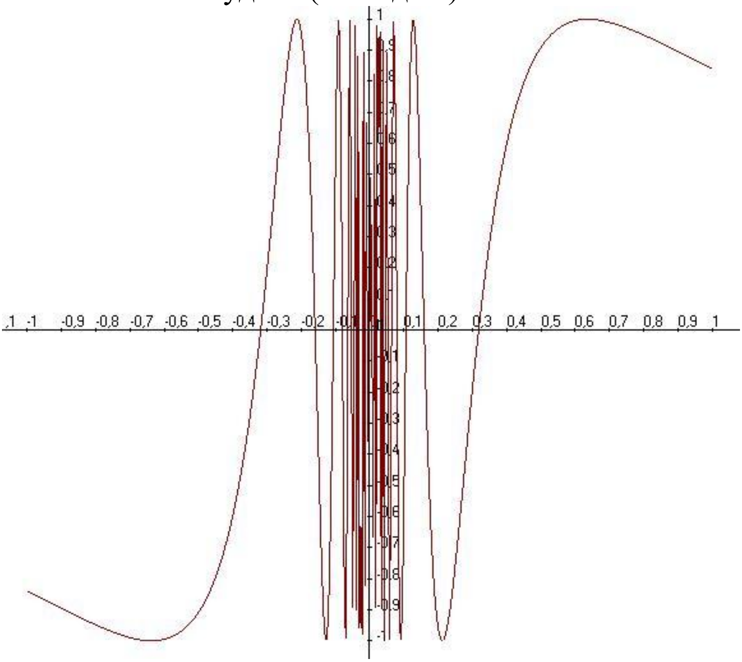
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{1} = 6.$$

Тот множитель, который отвечал за стремление к 0 в числителе и знаменателе, сокращён, поэтому далее удалось просто подставить 3 и получить ответ.

Как видим, методы разные: если неопределённость типа $\frac{0}{0}$, то выделяем множители, чтобы сократить те множители, которые стремятся к 0. Если неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, то корни искать не нужно, а нужно сократить на степенную функцию старшей степени. Для неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ основным методом является разложение на множители, и сокращение тех множителей, которые ответственны за стремление к 0.

Пример функции, не имеющей предела в нуле. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Здесь при приближении к 0 бесконечное число колебаний, то есть, уменьшая область определения, например интервал $(-\varepsilon,\varepsilon)$, никак не удастся получить уменьшение области значений функции над этим интервалом, размах колебаний всё равно останется от -1 до 1. При подходе абсциссы к 0, функция здесь должна пройти бесконечное число колебаний амплитуды 2 (от -1 до 1).



Лекция № 10. 11. 11. 2016

Метод Лопиталя для неопределённостей $\frac{0}{0}$. Несмотря на то, что тема «производные» подробно будет позже, и доказательство этого метода будет дано в той теме, производные для некоторых элементарных функций известны из школы, и можно этим пользоваться при вычислении пределов.

Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{2x - 3} = \dfrac{2}{-1} = -2$.

Этот метод можно применять и в 2 или более шагов, если после 1-го дифференцирования остаётся неопределённость $0/0$.

Вычислим этим же способом $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{1} = 1$.

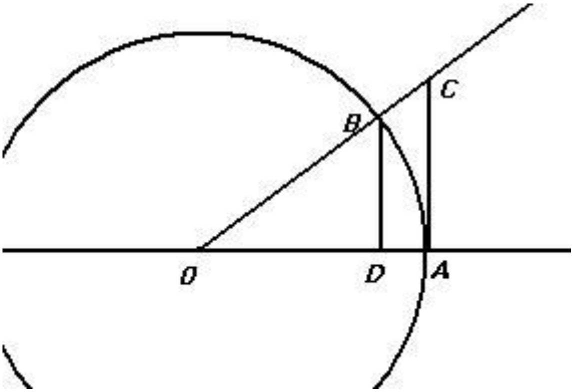
График ln(1+x) это ln(x) сдвинутый влево на 1, касательная проходит ровно под углом 45 градусов, то есть совпадает с функцияей y = x. Если рассмотреть при большом увеличении, они почти неотличимы.

Ещё пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = \dfrac{e^0}{1} = 1$.

Ещё пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$.

1-й замечательный предел. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство 1-го замечательного предела из геометрических соображений.



Рассмотрим единичную окружность, и какой-либо угол. Длина дуги AB равна φ - это по определению радианной меры угла. Так как OA это радиус, а мы взяли единичную окружность, то

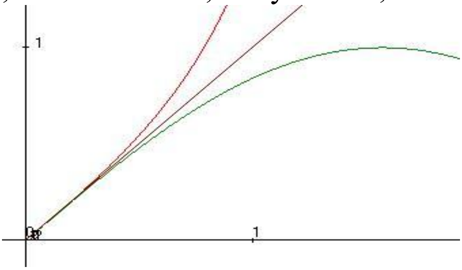
$$\frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|AC|}{1} = tg\varphi .$$

Так как OB это тоже радиус, то $\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|BD|}{1} = \sin\varphi$.

Но длина дуги на чертеже больше, чем отрезок BD, и меньше, чем AC. $|BD| \le \varphi \le |AC|$, то есть $\sin\varphi \le \varphi \le tg\varphi$.

Совпадают они именно при $\varphi = 0$.

Кстати, графики трёх функций именно так и расположены: у них общая касательная, тангенс выше, синус ниже, чем биссектриса.



Неравенства $\sin\varphi \le \varphi \le tg\varphi$ перепишем в виде: $\sin\varphi \le \varphi \le \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Теперь разделим всё на синус. $1 \le \frac{\varphi}{\sin\varphi} \le \frac{1}{\cos\varphi}$. Рассмотрим обратные величины ко всем этим, пользуясь тем, что из $a < b$ следует $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Получится $\cos\varphi \le \frac{\sin\varphi}{\varphi} \le 1$.

Применим свойство, которое доказывали когда-то ранее: если $u < v < w$ и две крайние из 3 величин стремятся к A, то и средняя имеет предел и стремится к A.

Учитывая, что $\lim\limits_{\varphi \to 0} \cos\varphi = 1$, а константа справа и так равна 1, то

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 .$$

Если обозначение угла сменить, обозначить x, то и получается

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Следствия из 1-го замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1,\ \lim_{a(x)\to 0}\frac{\sin a(x)}{a(x)}=1.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{(3x)}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

Более подробно: мы могли бы заменить $t=3x$, и учесть, что при $x\to 0$ будет и $t\to 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

Решение. Надо получить в знаменателе такое же выражение, как под знаком sin.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}(x+1) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Здесь можно в процессе решения переобозначить $\alpha(x)=x^2-1$, причём $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 1$.

2-й замечательный предел. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Обратите внимание, что этот предел вовсе не 1, как могло бы показаться. Ведь в степень всегда возводится не 1, а число, большее, чем 1. Оно уменьшается, но оно ни при каком n не равно 1. Здесь 2 процесса: одновременно уменьшается основание до единицы, и при этом увеличивается степень. Всё зависит от соотношения скоростей этих процессов.

Если, к примеру, есть 2 процесса: растворение краски и замораживание ёмкости с водой, то существенно отличается результат, если выполнить 1-й или 2-й процесс раньше. Если сначала заморозить воду, то уже ничего не растворится, а если сначала растворить, то будет равномерная смесь. Если замораживать одновременно с растворением, то будет другой результат, краска растворится не равномерно. Короче говоря, мы не имеем права считать, что сначала уменьшили основание в выражении $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и только потом стали увеличивать степень, здесь оба процесса идут одновременно, поэтому сказать, что такой предел всегда равен 1, будет ошибкой.

Число, даже очень близкое к 1, при возведении в выокую степень существенно возрастает. Так, при инфляции 10% в год, за 20 лет цена будет почти в 7 раз больше: $1{,}1^{20}$ = 6,7275. А если 15% в год, то за 20 лет в 16 раз больше: $1{,}15^{20}$ = 16,36654.

Докажем, используя некоторые ранее полученные пределы, чтобы понять, каким образом в этом пределе появляется число e.

Возьмём выражение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, запишем как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(x+1)\right)=1$. По свойству логарифма, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left((x+1)^{\frac{1}{x}}\right)=1$.

Возведём в степень e:

$\lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\ln\left((x+1)^{\frac{1}{x}}\right)\right)=e^1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Если ввести замену $t=\frac{1}{x}$, то получим $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$. Если здесь выбрать значения только для целых абсцисс, то получится

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Следствия из 2-го замечательного предела.

$\lim\limits_{n\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{a(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)}=e$,

$\lim\limits_{b(x)\to 0}(1+b(x))^{\frac{1}{b(x)}}=e$.

Вообще, с помощью 2 замечательного предела можно раскрывать неопределённости вида 1^∞.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Заметим, что если отдельно рассмотреть основание, видно, что оно стремится к 1 (там получается 3/3). Степень стремится к бесконечности. Таким образом, здесь есть неопределённость вида 1^{∞}, и можно применять 2-й замечательный предел.

Выделим целую часть этой неправильно дроби. Это можно сделать так: вписать перед дробью +1, а после неё (-1). Затем привести к общему знаменателю всё, что после первой единицы, то есть второй и третий элементы.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+1}{2x-1}-1\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(x+1)-(2x-1)}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

Обратите внимание, что само собой автоматически получилось, что после 1 такая дробь, которая стремится к 0. Это и должно было получиться, ведь всё основание стремится к 1. Теперь нужно в степени искусственно домножить на дробь, обратную к той, что в основании следует после единицы. Но чтобы степень в примере не изменилась, надо компенсировать домножением и на саму эту дробь, а не только на обратную.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}\bullet\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(\left(1+\frac{2-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2-x}}\right)^{\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}}$$ В больших скобках получилось выражение типа $(1+b(x))^{\frac{1}{\mathrm{b(x)}}}$, его предел равен e.

Таким образом,

осталось найти $\lim\limits_{x\to 2}(e)^{\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2x-1}} = e^{-1/3}$.

Чтобы степени было видно крупнее, можно записать через exp(A) вместо e^{A}.

$\exp\left(\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{2x-1}\bullet\frac{1}{x-2}\right) = \exp\left(-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2x-1}\right)$. Итак,

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{-1/3}$.

* Замечание. Если основание стремится не к 1, а к другому числу, то второй замечательный предел можно и не использовать. Так, если $a<1$ то предел равен 0, если $a>1$ то ∞.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(3)^n = \infty$. Неопределённость возникает только в том случае, когда основание стремится к 1.

§ 3. Бесконечно-малые и бесконечно-большие величины.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно-малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно-большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = \infty$.

Это понятие не применимо к функции «вообще», без указания точки. Не бывает просто «бесконечно-малой функции», бывает только «бесконечно-малая функция в точке». Это свойство поведения функции в конкретной точке. Так, $(x-1)^2$ является бесконечно-малой при $x_0 = 1$.

Очевидно, что если $\alpha(x)$ беск-малая в точке, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно-большой в той же точке.

Пример. Фкнкция $\frac{x^2-1}{x-2}$ является бесконечно малой в точках -1 и 1 и бесконечно большой в точке 2.

Бесконечно малые называются **сравнимыми**, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, причём $K\neq 0$ и $K\neq\infty$, то две функции называются бесконечно-малыми ОДНОГО ПОРЯДКА малости.

Кстати, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{K}$, то есть оба предела равны конечным числам, а не ∞. Если было бы $K=0$ то второй предел был бы ∞.

Если при этом $K=1$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то две бесконечно малые называются ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ Это частный случай той ситуации, когда они одного порядка.

Пример. $\sin(x)\approx x$.

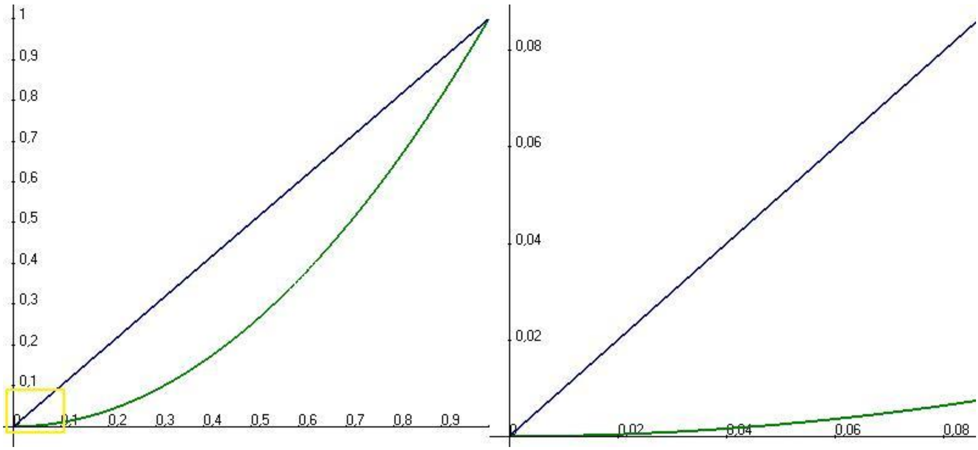
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 0$ то α называется бесконечно-малой более высокого порядка, чем β.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Функции x^2 и $2x^2$ одного порядка в точке 0.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1} = 0$, а также $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$,

то есть x^2 более высокого порядка, чем x. И хотя они обе стремятся к 0, но скорость этого процесса кардинально отличается. Если рассмотреть их графики при большом увеличении около начала координат, то парабола почти неотличима от оси 0x.

Третья степень - ещё более высокого порядка, она будет проходить ниже, чем парабола. Как мы видим, хоть и все они стремятся к 0, но эти нули как бы совершенно разной силы.



Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1. Если $\alpha \approx \beta$, то $\beta \approx \alpha$.

Доказательство очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$

2. Если $\alpha \approx \beta$ и $\beta \approx \gamma$ то $\alpha \approx \gamma$.

Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = 1$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Порядок разности двух эквивалентных величин больше, чем порядок малости каждой из них.

Доказательство. Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Докажем, что при делении разности на любую из них предел будет 0, это как раз и означает, что в числителе - более высокого порядка.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1\text{-}1 = 0.$$

4. Порядок малости суммы равен наименьшему из порядков слагаемых.

Доказательство. Пронумеруем так, чтобы 1-е слагаемое было наименьшего порядка. Тогда: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)}$ =

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 + \dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \ldots + \dfrac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} \right)$ = 1+0+...+0 = 1.

То есть, эта сумма эквивалентна слагаемому наименьшего порядка.

Пример: $\alpha(x) = x + x^3$ 1-го а не 3-го порядка малости в точке x = 0.

$\alpha(x) = x^2 + x^6 + x^8$ - 2-го порядка.

А вот если рассматривать предел при $x \to \infty$, то тогда 8-го порядка. При малых значениях наибольшее влияние на сумму оказывает наименьшая степень, а при бесконечном возрастании - наибольшая степень.

4а. Порядок суммы бесконечно-больших равен наибольшему из порядков слагаемых.

5. Если $\alpha \approx \alpha_1$, $\beta \approx \beta_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = K$ то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = K$

то есть этот предел тоже существует, и равен K.

Доказательство. Дано: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1$.

Вычислим $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ = $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$ = $1 \cdot K \cdot 1 = K$.

Это свойство даёт возможность в дробях фактически заменять более сложные бесконено-малые на более простые, как правило, даже на степенные.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{2x^2}$ = $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{x^2}{2x^2}$ = $1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2}$ = $\dfrac{1}{2}$.

Домножили и поделили, так что первая дробь стала состоять из двух эквивалентных величин, и её предел равен 1. А выглядит это так, как будто в числителе просто заменили $\sin^2 x$ на эквивалентную x^2.

Лекция № 11. 18. 11. 2016

Главная часть бесконечно-малой.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{C(x-x_0)^k} = 1$ то функция $C(x-x_0)^k$ называется ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ бесконечно-малой $\alpha(x)$.

Фактически, это степенная функция, эквивалентная данной $\alpha(x)$. Если найти коэффициент C и степень k, то мы найдём такую степенную функцию, график которой наилучшим образом (среди всех степенных) похож на график функции $\alpha(x)$ в окрестности точки.

Пример. Найти главную часть бесконечно-малой $\alpha(x) = x\sin\left(x^2\right)$ в точке 0.

Решение. Так как точка 0, то $(x-x_0) = x$, то есть главная часть имеет вид Cx^k. Запишем отношение данной бесконечно-малой и «эталонной» степенной. Нужно потребовать, чтобы этот предел был 1, ведь мы ищем именно эквивалентную бесконечно-малую.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\left(x^2\right)}{Cx^k} = 1$. Преобразуем выражение с целью его упростить. Домножим и поделим на x^2, этим мы фактически можем заменить $\sin(x^2)$ на x^2. Параметры C и k пока просто переписываем, не меняя их в процессе преобразований.

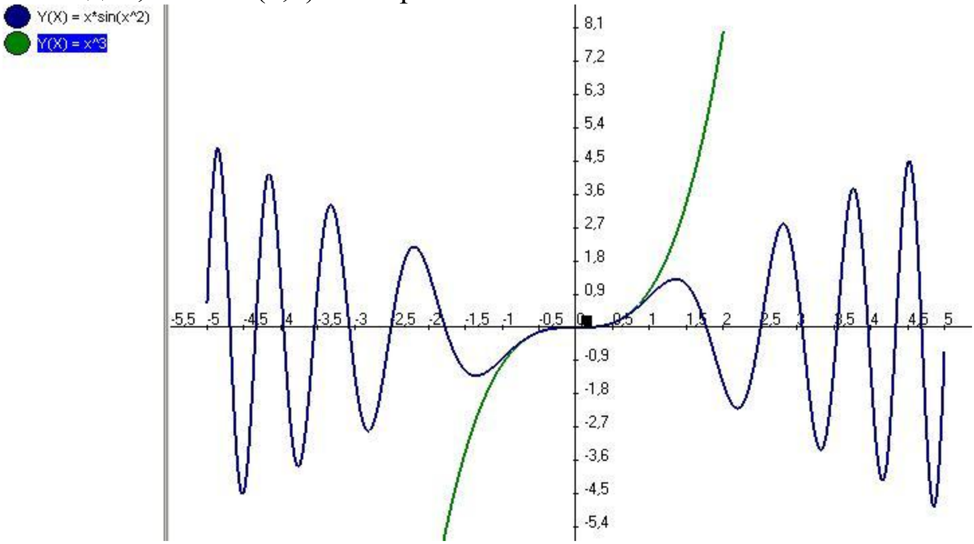
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin\left(x^2\right)}{Cx^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\frac{x^2 x}{Cx^k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{Cx^k} = 1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{Cx^k} = 1.$$

Полное сокращение всех x будет лишь в случае k=3, а иначе предел 0 или ∞, и не будет равен 1.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C} = 1$, тогда С = 1. Итак, $Cx^k = 1x^3$.

Ответ. $\gamma(x) = x^3$.

Ниже изображены графики бесконечно-малой и её главной части: как видно, вблизи (0,0) они практически неотличимы.



Задачи на поиск главной части по методам и сложности похожи на вычисление lim, но фактически это обратная задача: при вычислении предела внутри нет параметров, а предел неизвестен, здесь же наоборот, известно, что предел равен 1, но внутри выражения неизвестные параметры C, k, которые надо найти, так, чтобы предел был равен 1.

Если учесть не только одну степенную функцию, но добавить ещё и последующие степени, то можно построить ещё более точное приближение. Это будет изучено позже, тема «формула Тейлора».

§ 4. Непрерывность и точки разыва. Односторонние пределы.

Бывают такие ситуации, когда функция определена только при $x > a$ или $x < a$. В этом случае тоже можно вычислять предел, но область определения пересекается только с правой или левой полуокрестностью.

Определение. Число A называется правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0$, так, что при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется: $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

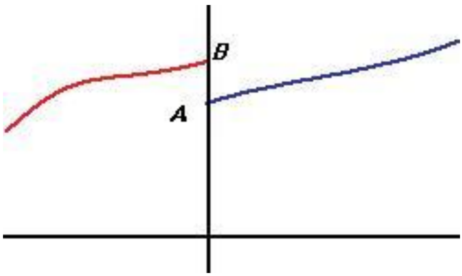
Аналогично,

Определение. Число A называется левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если: $\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0$, так, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется: $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Односторонние пределы очень полезны при изучении функций, так как существуют такие ситуации, когда график функции слева и справа от некоторого $x = a$ стремится к разным ординатам.

Если односторонние пределы равны между собой, то существует предел функции в точке, если они разные, то предел не существует: ведь тогда $|f(x) - A| < \varepsilon$ для одной полуокрестности, но для второй полуокрестности эта разность не может быть меньше чем ε, она будет $|A - B|$.



Представьте себе физический пример: температура 0 градусов. Если она понижается, проходя через 0, то есть до этого была положительна, то вода ещё не замёрзла, снега на улице нет. Если же она повышается и проходит через 0, например в марте, ситуация совсем иная - снег ещё не успел растяать. Как видно, ситуация при 0 градусов сильно зависит от того, какая температура была до этого.

Определение. Функция называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке определено значение $f(x_0)$, и оно совпадает как с правосторонним так и с левосторонним пределами:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Классификация: устранимый разрыв, разрыв 1 и 2 рода.

Устранимый разрыв.
Точка разрыва называется устранимой, если односторонние пределы равны $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ причём равны конечному числу, но не существует $f(x_0)$ или оно не равно пределу.

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Формально $\dfrac{\sin 0}{0}$ вычислить нельзя, но предел есть, он раен 1. Получается график с одной выколотой точкой.

Пример. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Точка $x = 3$ - точка устранимого разыва.

Значение не существует, но предел есть.

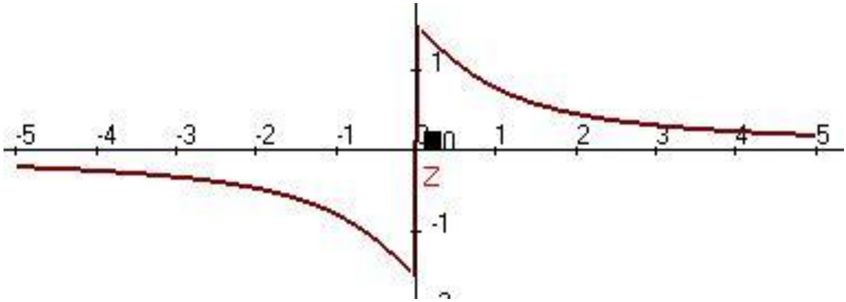
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6.$$

Можно доопределить значение функции в одной точке, то есть устранить разрыв. Поэтому он и называется устранимым.
Неустранимые разрывы делятся на 2 типа:

Разрыв 1-го рода (скачок).
Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$, $A \neq B$.

Вопрос о значении функции в точке в этом случае не обсуждается, это не имеет смысла, так как всё равно предел не существует, то есть непрерывности быть не может.

Пример. $f(x) = arctg\,\dfrac{1}{x}$.

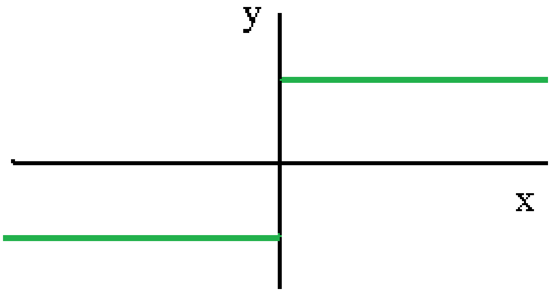


Односторонние пределы для этой функции таковы:

$\lim\limits_{x\to+0} arctg\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} arctg(t) = +\dfrac{\pi}{2}$, т.к. если $x \to 0$ и при этом $x > 0$ то $\dfrac{1}{x} \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-0} arctg\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to-\infty} arctg(t) = -\dfrac{\pi}{2}$, т.к. если $x \to 0$ и при этом $x < 0$ то $\dfrac{1}{x} \to -\infty$.

Пример. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Здесь при любом $x > 0$ верно $f(x) = 1$, а при любом $x < 0$ верно $f(x) = -1$. В точке 0 односторонние пределы различны.



Разрыв 2-го рода.

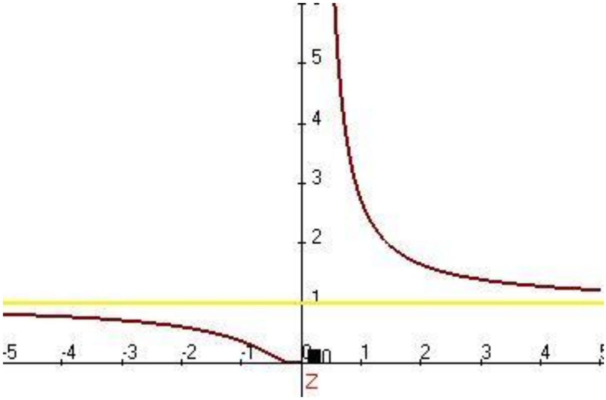
Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или ∞, точка называется точкой разрыва 2-го рода.

Примеры $f(x)=\frac{1}{x}$ точка разрыва $=0$

$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ точки разрыва 2 и 3.

$f(x)=\frac{1}{x^2}$. Оба односторонних предела равны $+\infty$, разрыв именно 2 рода а не устранимый, несмотря на совпадение, ведь здесь не конечные числа, а бесконечность. Поэтому нет такой точки вида (0,C) на какой-либо конечной высоте, чтобы эта точка устраняла разрыв.

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. Предел слева равен 0, справа $+\infty$. График:

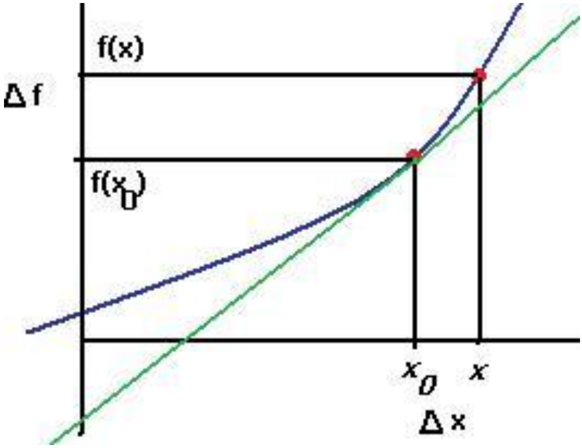


ГЛАВА 6. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

§1. Введение, основные методы.

Возьмём две соседние точки на графике некоторой функции. Разность их абсцисс обозначим Δx, а разность ординат Δf. Если соединить точки, то получим прямоугольный треугольник, его катеты это именно Δx и Δf.

Если сближать точки, то можно заметить, что катеты Δx и Δf уменьшаются, но угол, в общем случае, не уменьшается к нулю, а стабилизируется. То есть, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ равный некоторому числу. На этом и основана вся тема, которую мы сейчас будет изучать.



Определение 1.

Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, т.е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

В других обозначениях это же самое можно записать так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл. Так как соотношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ это тангенс угла наклона секущей, но секущая в пределе стремится к касательной, то производная равна тангенсу угла наклона касательной в графику в точке.
Для векторной функции физический смысл - скорость. Если дано $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то вектор $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ это скорость.
Этот вектор направлен по касательной к траектории.
Скорость - векторная величина, а скалярная «скорость» измеряемая в км/ч, показываемая в спидометрах на транспорте, это на самом деле - МОДУЛЬ скорости.

Примеры производных для некоторых известных функций.
$(x^n)' = nx^{n-1}$ в частности $(x^2)' = 2x$.
Докажем, например, что производная для 2-й степени вычисляется именно по этой формуле.
По определению, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ для этой функции

надо записать так: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

преобразуем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x$.
Итак, $(x^2)' = 2x$.

Кстати, тот факт что $x' = 1$ не просто кем-то введено произвольно, а тоже можно доказать: если $f(x) = x$ то $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

Аналогично, например, доказывается $(x^3)' = 3x^2$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right) = 3x^2.$$

Докажем, что $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. $(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$ Так как следующие бесконечно малые эквивалентны: $\ln(1+a)\approx a$ то получим, заменяя на эквивалентную: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}$.

Определение 2.

Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение функции можно представить в виде: $\Delta f = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)$, где α - бесконечно малая более высокого порядка, чем 1-й.

Действительно, бывают не дифференцируемые функции, например $|x|$ не дифф. в нуле. Дело в том, что там нет общей касательной для двух частей графика, правой и левой. Какую бы прямую мы ни провели через (0,0), она не будет касательной к графику функции. Если наклон $+45^0$ то есть $y=x$ то разность между ней и левой половиной графика не будет бесконечно-малой: эта прямая является касательной к одной части графика, то она перпендикулярна другой ветви этого же графика.

Взаимосвязь понятий «дифференцируемость» и «производная».

Теорема. Если f есть функция одной переменной, т.е. $f : R \to R$, то существует конечная производная в точке $x_0 \Leftrightarrow$ функция дифференцируема в точке x_0.

Доказательство. **Необходимость.**

Пусть существует производная в точке, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Докажем, что функция дифференцируема. Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ равен числу $f'(x_0)$, то сама эта функция, которая под знаком предела, представима в виде: это число + какая-то бесконечно малая. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \beta(\Delta x)$.

Если домножить на Δx то $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$. Здесь обозначим $\beta(\Delta x) \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x)$, причём эта α более высокого порядка, ведь на уже существующую бесконечно-малую домножается ещё одна, а именно Δx, т.е. порядок возрастает на 1. Получили $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$. Определение дифференцируемости выполняется.

Достаточность. Пусть f дифференцируема. Выполняется равенство $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$. Разделим его на Δx: получим $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$.

Перейдём к пределу. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$.

Но ведь $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, то есть там содержится Δx не в первой, а какой-то более высокой степени. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Осталось $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Заодно доказали, что константа A в этом равенстве - это и есть производная в точке, то есть $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Замечание. В одном из прошлых примеров, а именно $(x^3)'$, элемент $3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ это и есть та самая бесконечно малая более высокого порядка $\alpha(\Delta x)$. Здесь она содержит 2 и 3 степени, и как видно, даже после деления на Δx она станет $3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$, то есть содержит в каждом слагаемом хоть какие-то степени от Δx, и поэтому стремится к 0.

Лекция № 12. 25. 11. 2016

Основные правила дифференцирования.

Сумма и разность: $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

Произведение: $(uv)'=u'v+v'u$. Частное: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

Композиция: $u(v(x))'=u'(v(x))\cdot v'(x)$.

Запомнить можно так: для произведения между $u'v$ и $v'u$ знак плюс, а для частного минус. Но в формуле частного есть ещё лишнее v^2 в знаменателе. Почему же производная произведения это не просто $u'v'$? И откуда появляется ещё и v^2 в знаменателе для частного? Эти формулы вовсе не являются очевидными. Сейчас докажем формулы для произведения и частного.

Доказательство формулы $(uv)'=u'v+v'u$.

Запишем производную по определению.

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Но тут есть сдвиг на Δx и по u, и по v. Добавим и вычтем такое слагаемое, в котором сдвиг по одной функции есть, а по второй нет:

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

теперь слагаемых стало 4, но зато их можно сгруппировать по два, и даже разбить на две дроби, так, что дельта прибавляется только на одном из мест.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Теперь можно вынести тот множитель, который одинаков в каждой разности:

$$\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0} u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

Видно, то, что осталось в дробях, это и есть производные для u или v соответственно, т.е. в итоге:

$v(x)u'(x)+u(x)v'(x)$. Итак, $(uv)'=u'v+v'u$.

Докажем формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$**.**

Запишем по определению: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$.

В том выражении, которое есть в числителе, приведём к общему знаменателю.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}.$$

Аналогично как в прошлом случае, добавим и вычтем слагаемое, чтобы получилось 4 слагаемых а не два, и чтобы в каждой паре был сдвиг только по одной из функций. Можно для этой цели прибавить и отнять, например, $u(x)v(x)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

Если во втором пределе переставить два слагаемых и при этом, конечно, добавить знак минус, то часть, содержащая дельта-икс, получится раньше, что и приведёт к записи точь в точь, как в определении производной для v.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$=$

$$u'(x)\frac{v(x)}{v(x)v(x)}-v'(x)\frac{u(x)}{v(x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

С помощью правил дифференцирования решим несколько примеров.
Пример. Найти производную тангенса (мы фактически докажем одну из формул таблицы интегралов).

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Пример. Найти $\left(\sin(x^2)\right)'$. Примерим формулу дифференцирования композиции.

$$\left(\sin(x^2)\right)' = \cos(x^2)\cdot(x^2)' = 2x\cdot\cos(x^2).$$

Производные высших порядков.
Если мы вычислили 1-ю производную, то получили новую функцию. Но ведь для неё тоже существует производная. $f''(x)=(f'(x))'$.
Вторая производная - это производная от первой производной.
2-я производная в точке определяется так:

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

Пример. $(\ln x)''=\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Пример. Производная 4 порядка для синуса или косинуса - это исходная функция. $\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x$.

Производная порядка n обозначается $f^{(n)}(x)$. Здесь n в скобках это не степень! Такое обозначение ввели, чтобы не писать много штрихов, ведь их будет трудно различить. Если производная выше 3 порядка, то лучше использовать такое обозначение.

Производная функции $f: R^1 \to R^n$**.**

Пусть дана векторная функция, отображающая одну переменную в n переменных . $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.

Координатные функции дифференцируются независимо друг от друга:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}.$$

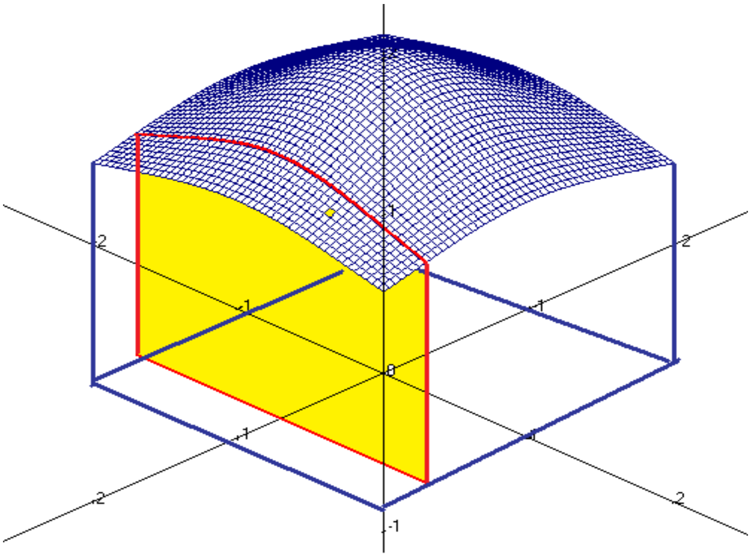
Как правило, это применяется в физических задачах на движение.

Там 3 координаты это функции от времени, то есть $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ координаты в момент времени, а производная это вектор скорости:

$$v(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

§2. Частные производные и градиент.

Мы рассмотрели случай $f: R^1 \to R^n$. Как видим, там метод дифференцирования практически ничем не отличается от случая скалярных функций, просто есть n компонент. А теперь рассмотрим производные для функций нескольких переменных $f: R^n \to R^1$. Пусть например, дана функция $f(x, y)$, или $f(x, y, z)$. Приращение аргумента в этом случае задаётся не однозначным образом: ведь можно задать приращение каждому из аргументов, которых несколько. Так, например, для $f(x, y)$ можно фиксировать y и рассмотреть функцию $f(x, y_0)$. Это уже будет функция одной переменной. График функции $f: R^2 \to R^1$ это поверхность, тогда при фиксировании $y = y_0$ получается сечение поверхности вертикальной плоскостью, то есть кривая.



Можно задать приращение только для x, и тогда получим такое понятие, как частная производная.

Определение. Производной функции f по переменной x называется предел:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Кроме f'_x ещё применяют такое обозначение: $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y, ведь можно взять вторую точку, отступив в направлении другой оси.

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Геометрический смысл: тангенс угла наклона касательной к кривой, получающейся в одном из сечений.

Физический смысл. Если функция - это температура воздуха, то например, при движении самолёта строго на юг температура за бортом будет возрастать, а при движении на запад или восток почти неизменна. Как видим, частные производные в двух перпендикулярных направлениях могут сильно отличаться.

Метод вычисления частных производных.

Если бы вам нужно было вычислить производную функции, содержащей параметр C, например $(Cx^2)'$, то понятно, что $(Cx^2)'$ = $2Cx$. Так вот, аналогично, если функция нескольких переменных, то при дифференцировании по одной из них, остальные в роли параметров, то есть вы можете мысленно «заморозить» их или даже переобозначить через A или C, а после вычисления производной, разморозить или переобозначить обратно.

Если $f(x,y) = x^2y^3$ то $f'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3$, $f'_y = (x^2y^3)'_y = 3x^2y^2$.

Если объединить частные производные в один вектор, то получим

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

этот вектор называется **градиентом** функции.

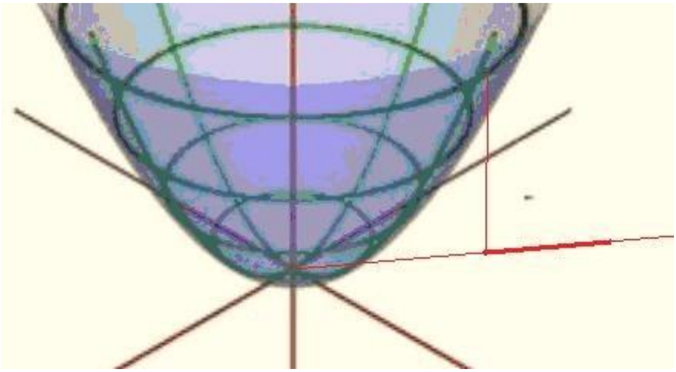
Кроме ∇f , применяется обозначение $grad(f)$.

Если после вычисления частных производных фиксировать переменные, то есть взять конкретную точку, то получится градиент в точке. Это вектор, состоящий из чисел, а не функций.

Пример. Найти градиент функции $f(x,y,z) = x^2y + yz$ в точке (1,1,1).

Решение. Найдём частные производные. $f'_x = 2xy$, $f'_y = x^2 + z$, $f'_z = y$. Присвоим все значения x,y,z=1. Получаем $\nabla f(1,1,1) = (2,2,1)$.

Пример. Пусть $f(x,y) = x^2 + y^2$. Соответствующая поверхность - эллиптический параболоид. Градиент поверхности это вектор $(2x,2y)$. Теперь, если фиксировать точку (1,0) то получим, что градиент равен (2,0) а если точку (1,1) то (2,2) и т.д. Градиент для этой функции всегда направлен радиально от начала координат.

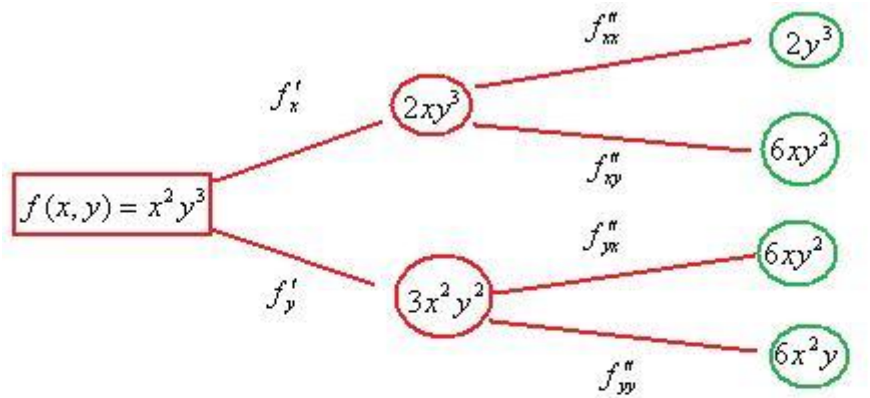


И действительно, если точка находится под этой поверхностью, то она должна двигаться в направлении от центра, чтобы рост высоты поверхности над ней происходил быстрее всего. А для неявно заданной окружности, этот вектор как раз и является перпендикуляром. Заметим, что градиент ортогонален окружности, то есть горизонтальному сечению.

Старшие производные.

После дифференцрования по той или иной переменной, мы получаем снова функцию от тех же нескольких переменных. Но ведь её снова можно продифференцровать по одной или другой переменной. Таким образом, получается n^2 возможностей определить какие-либо вторые производные, например, если две переменных, то вторых производных будет четыре: f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.

Покажем их нахождение в виже схемы:



Кстати, смешанные вторые производные f''_{xy}, f''_{yx} всегда совпадают.
Также применяются и такие обозначения:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Из 2-х производных можно образовать матрицу:

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}.$$

Здесь также можно найти 8 третьих производных, 16 четвёртых и т.д.
Кстати, часть из них может быть и 0, так, $f'''_{xxx} = (2y^3)'_x = 0$.

Это был пример с $f : R^2 \to R^1$. А если $f : R^3 \to R^1$, то градиент из 3 координат, тогда есть 9 вторых смешанных частных производных.

Производная функции $f : R^n \to R^n$.

Пусть дано n функций, каждая из них от n переменных:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$$

тогда возникает n^2 возможностей вычислить различные частные производные. Их можно записать в виде матрицы. В случае векторной функции векторного аргумента уже даже первые производные образуют матрицу.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица и называется производной матрицей функции f.
В каждой из её строк расположен градиент какой-либо из координатных функций f_i.

Пример. Найти производную матрицу для функции $\begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (xy)'_x & (xy)'_y \\ (x+y)'_x & (x+y)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Композиция $F(x(t), y(t))$ и формула полной производной

Пусть задана композиция типа $R^1 \to R^2 \to R^1$, а именно $F(x(t), y(t))$. Фактически, эта функция является функцией от t (если выразить переменные x,y через t). Следовательно, можно вычислить производную по t. Посмотрим, как эта производная взаимосвязана с частными производными. По правилу дифференцирования композиции,

$$\frac{dF}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

что в других обозначениях можно записать так: $\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t)$.

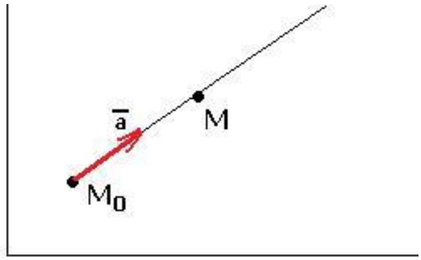
Аналоличная формула верна и в случае 3 координат.

Производная по направлению.

В определении частных производных, мы рассматривали приращение аргумента в виде Δx или Δy. Но ведь от исходной точки можно отступить не только в направлении координатных осей, но и в произвольном направлении. Если рассмотреть разность значений функции в какой-то паре точек, расположенных произвольно, а не вдоль оси, то есть $M_0 M \parallel \bar{a}$ и затем приближать 2-ю точку к первой, и при этом делить Δf на расстояние между точками, получим предел

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0 M|}$$

называется «производная по направлению». Будем считать, что вектор нормирован, то есть $|a|=1$. Только в этом случае мы получим правильный результат, ведь нужно измерять скорость изменения функции именно в расчёте на единицу длины при движении по этой прямой.



Если это направление соответствует какой-либо из координатных осей, то как раз и получаются частные производные, которые изучили раньше.

Формула взаимосвязи производной по направлению и градиента

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\nabla f, a).$$

Доказательство. Обозначим координаты вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$.

Точка М произвольная, её координаты (x, y, z), а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Так как $M_0 M \parallel \bar{a}$ то их координаты пропорциональны, то есть

$\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$, что также записывается в параметрическом виде:

$$x = x_0 + a_1 t$$
$$y = y_0 + a_2 t$$
$$z = z_0 + a_3 t$$

Это функция $R^1 \to R^3$.

Рассмотрим производную композиции функций $R^1 \to R^3 \to R^1$, а именно $t \to (x, y, z) \to f$. Одно число (время t) сначала отображается

в тройку чисел (координаты точки в момент времени) а затем функция f отображает эти 3 числа снова в одно число.
Производная внешней функции (которая действует последняя) это вектор-строка градиент функции f.
Производная внутренней функции (которая действует первая) это вектор-столбец.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

Но ведь $x' = (x_0 + a_1 t)' = a_1$, аналогично $y' = a_2$ и $z' = a_3$. Тогда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot a_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot a_3$$

Но это и есть скалярное произведение градиента и вектора a.

Отсюда виден смысл градиента.
Геометрический смысл. Градиент это вектор, при движении в направлении которого рост функции наиболее быстрый. Если движение в перпендикулярном направлении, то рост функции будет нулевым. Если под большим увеличением рассмотреть какой-то небольшой кусочек поверхности, то он выглядит почти как наклонная плоскость, а для наклонной плоскости при движении в ту сторону, куда она наклонена, наибольшая скорость роста высоты, в перпендикулярном направлении - высота не изменяется, а при движении в противоположном - уменьшается.
Замечание. Если направление a - по координатной оси, то производная по направлению как раз и совпадает с какой-либо из частных производных. Если вектор вдоль оси Ox, то $a = (1,0,0)$, скалярное произведение этого вектора и градиента $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ это

$1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Лекция № 13. 02. 12. 2016

Теорема. Пусть кривая неявно задана уравнением $F(x, y) = 0$, точка $M_0 \in$кривой. Тогда градиент $\nabla F(M_0)$ ортогонален этой кривой.

Доказательство. Кривая также может быть задана и параметрически. Тогда получается функция $F(x(t), y(t)) = 0$, то есть F в итоге есть функция от t, она получается тождественно равной 0. Тогда и её производная по t тоже тождественный 0.

$\frac{dF}{dt} = 0$. Запишем по формуле полной производной:

$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) = 0$. Но ведь это и есть скалярное

произведение векторов $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ и $v = \left(x'(t), y'(t) \right)$.

Геометрический смысл: сечение поверхности, наибольший рост ортогонален сечению. Пример: Если на склоне горы двигаться к вершине, то на карте движение будет видно как ортогональное линии уровня.

Теорема. Пусть поверхность неявно задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, точка $M_0 \in$поверхности. Тогда градиент $\nabla F(M_0)$ ортогонален этой поверхности.

Доказательство. Рассмотрим произвольную кривую, которая целиком лежит на поверхности. Её можно задать параметрическими уравнениями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Вектор, лежащий на касательной к этой кривой в точке M_0, это $v = \left(x'(t), y'(t), z'(t) \right)$ - вектор, который в физике называется вектором скорости. Заметим, что все такие касательные векторы для кривых, лежащих на данной поверхности и проходящих через M_0, принадлежат касательной плоскости.

Так как $F(x, y, z) = 0$, а $x(t), y(t), z(t)$ такие, что точка принадлежит поверхности при любом t, то

$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, то есть F, как функция от t, получается тождественно равной 0.

Тогда и её производная по t тоже тождественный 0.

$\frac{dF}{dt} = 0$. Запишем по формуле полной производной:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 0$$

но ведь это и есть скалярное произведение векторов $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \right)$

и $v = \left(x'(t), y'(t), z'(t) \right)$.

Получается, что $\left(\nabla F, v \right) = 0$, то есть градиент ортогонален к касательной для любой кривой, проходящей через точку M_0. В итоге, доказали, что градиент ортогонален касательной плоскости, что и означает, что он ортогонален поверхности в данной точке.

Производная функции, заданной неявно.

Формула: $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Доказательство. Пусть $F(x, y) = 0$ - неявное уравнение кривой. Переменная y явно не выражена, однако теоретически, какая-то функция $y(x)$ существует, просто нам она неизвестна. Тогда, тем не менее, можем записать: $F(x, y(x)) = 0$. Вычислим производную по формуле полной производной, здесь просто одна переменная, а именно x, совпадает с параметром t.

$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$, то есть $\frac{\partial F}{\partial x} 1 + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x = 0$, то есть $F'_x + F'_y y'_x = 0$,

тогда $F'_y y'_x = -F'_x$, и как следствие, $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

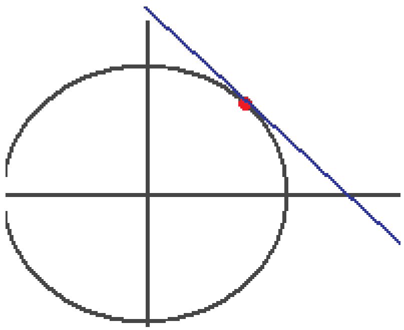
Пример. Найти тангенс угла наклона касательной к окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Неявное уравнение $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{(x^2+y^2-1)'_x}{(x^2+y^2-1)'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$, что в данной точке равно

$$-\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1.$$

Эта точка и касательная отмечены на чертеже: конечно, и так видно, что касательная наклонена под углом -45 градусов, то есть производная -1.



Для сравнения, если бы не было этой формулы, можно было сначала выразить явно: $y = \sqrt{1-x^2}$,

затем найти производную $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ и подставить

$x = 1/\sqrt{2}$, тогда $\dfrac{-1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -1.$

Производная функции, заданной параметрически.

Вывод формулы $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пусть кривая задана параметрически.

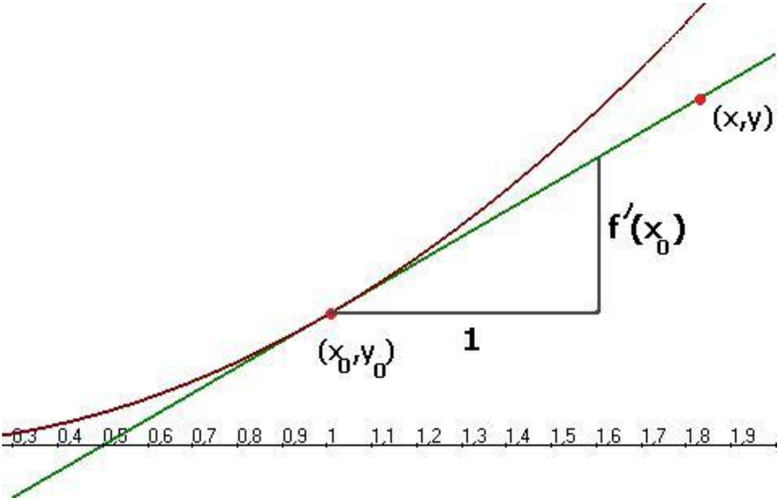
$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда можно выразить как композицию прямой и обратной функций: $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Производная композиции:

$$y' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = y' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

§ 3. Уравнение касательной, формула Тейлора.

Уравнение касательной. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство.



Рассмотрим треугольник. Его катеты Δx и $f'(x_0)\cdot\Delta x$, так как тангенс угла наклона касательной это $f'(x_0)$.

Направляющий вектор для прямой направлен в точности по гипотенузе.

При этом, мы можем пропорционально увеличить этот треугольник, тогда катеты будут такие: 1 и $f'(x_0)$.

Соответственно, направляющим вектором можем считать такой вектор: $(1, f'(x_0))$.

Возьмём теперь точку (x, y) где-нибудь на касательной. Она принадлежит касательной в точности тогда, когда вектор M_0M коллинеарен направляющему вектору этой прямой, т.е. $(x - x_0, y - y_0) \parallel (1, f'(x_0))$.

Запишем пропорцию координат так, как это всегда делали в теме «аналоитическая геометрия». Получается каноническое уравнения прямой: $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{f'(x_0)}$. А теперь просто умножим на $f'(x_0)$.

Получается $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

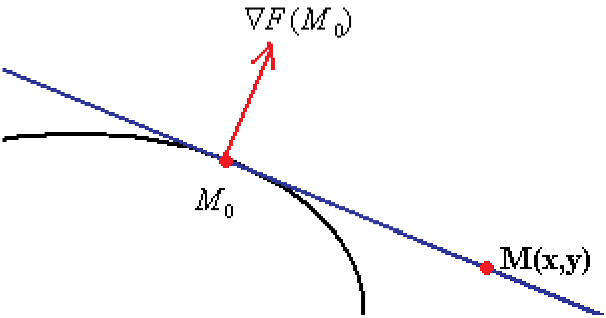
Замечание. Уравнение касательной можно запомнить в виде
$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$ причём, так запомнить легче.

Пример. Найти касательную к графику $y=x^2$ в точке $x_0=1$
$f(1)=y_0=1$, $f'(x)=2x$, $f'(1)=2$. Уравнение $y-1=2(x-1)$, то есть $y=2x-1$.

Если кривая задана неявно, то уравнение касательной в точке M_0 может быть тоже записано в виде:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0$$

Доказательство. Рассмотрим кривую и точку M_0 на ней. Градиент в этой точке ортогонален поверхности.



Тогда строим уравнение прямой так, как это делали в аналитической геометрии: вектор $(x-x_0, y-y_0)$ ортогонален $\nabla F(M_0)$, то есть их скалярное произведение 0. Тогда получается именно такое уравнение:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0.$$

Взаимосвязь 2 форм записи уравнения касательной.

Полученное выше уравнение действительно является другой формой того уравнения касательной, которое мы выводили раньше, а именно $(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Покажем это подробнее.

Пусть $y = f(x)$ явное уравнение кривой. Можно легко свести его к неявному: $y - f(x) = 0$. Функция $F(x, y)$ это как раз и есть $y - f(x)$. Тогда $F'_x(M_0) = -f'(x_0)$, $F'_y(M_0) = 1$, значит, уравнение

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) = 0$$

примет вид: $-f'(x_0)(x - x_0) + (y - y_0) = 0$, то есть $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Также можно и наоборот, в уравнении $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ записать производную по формуле $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$. Тогда $y - y_0 = -\dfrac{F'_x}{F'_y}(x - x_0)$

из чего следует $F'_y(y - y_0) = -F'_x(x - x_0)$, что и приводит к уравнению $F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) = 0$.

Выведем уравнение касательной плоскости к поверхности.

Теперь, когда нам известен вектор нормали к поверхности, а именно, что $n \parallel \nabla F$ (градиент расположен именно по нормали), можно воспользоваться тем методом, который применяли в геометрии для вывода уравнения плоскости по точке и нормали. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, нормаль $\nabla F(M_0) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0) \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) \quad \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) \right)$.

Это можно записать, используя более короткие обозначения: $\nabla F(M_0) = \left(F'_x(M_0) \quad F'_y(M_0) \quad F'_z(M_0) \right)$.

Если взять произвольную точку $M(x, y, z)$ в касательной плоскости, то вектор M_0M ортогонален ∇F.

Тогда скалярное произведение векторов $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\left(F'_x(M_0) \quad F'_y(M_0) \quad F'_z(M_0) \right)$ равно 0.

Итак, уравнение касательной плоскости:

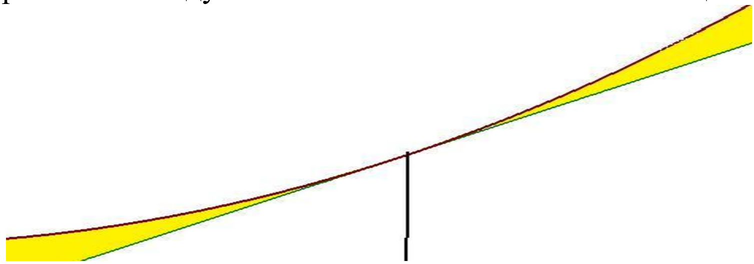
$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Формула Тейлора.

Согласно уравнению касательной, ординату точки на касательной можно записать так: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, то есть $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Как можно сразу заметить, в точке x_0 она совпадает со значением функции, то есть $f(x_0)$. Чем дальше удаляемся от точки x_0, тем разнность между ординатой точки на касательной и точки на графике становится больше. Обозначим эту разность через α:

$\alpha(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)$. Так как она стремится к 0 при $x \to x_0$, то можно сказать, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой в x_0.

Вот эта разность между f и касательной показана жёлтым цветом:



Если изобразить график $\alpha(x)$ то он похож на параболу. Как сейчас увидим, это не случайно, там действительно появится 2-я степень. Если выделить главную часть этой бесконейно малой $\alpha(x)$, то она будет, по крайней мере, не 1-го порядка, а более высокого, потому что первая степень полностью учтена в том слагаемом, которое из уравнения касательной. Тейлор доказал, что её главная часть зависит от второй производной, и равна $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$. Касательная даёт очень грубое приближённое значение функции, а с учётом этого слагаемого, получится что мы задаём уже не многочленом 1-й степени, а 2-й степени, то есть более точное приближение, чем это было для касательной.

Если теперь и это слагаемое отнять от f(x), то получится

$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ но это снова бесконечно-малая, из неё снова можно выделить главную часть, которая уже будет 3 порядка. Тогда получится многочлен 3 степени, который ещё точнее задаёт функцию $f(x)$. Если этот процесс продолжить до бесконечности, то получится формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

А если остановить на n-м шаге, то f будет задана приближённо с помощью многочлена n-й степени.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Погрешность в этом случае можно записать в виде $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$,

где $c \in (x_0, x)$.

Если начальная точка, в окрестности которой ищется разложение на степенные функции, это $x_0 = 0$, то

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$ называется

формулой Маклорена.

Полный вывод формулы Тейлора проводится в курсе комплексного анализа (ТФКП) так как основан на свойствах комплексных функций. Однако мы сейчас можем рассмотреть другую краткую идею доказательства. Продифференцируем равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

получим

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Если при этом обозначить первую производную: $g(x) = f'(x)$ то мы бы получили такую запись:

$g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$ то есть, точно такая же формула Тейлора верна и для производной. Если теперь допустить, что коэффициенты в формуле Тейлора как-либо отличались бы от $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, то при дифференцировании бы не сократился последний множитель из факториала, то есть для производной формула была бы уже не верна. То есть, тогда она была бы не верна в классе непрерывных функций, потому что для каждой функции f сразу нашлась бы такая функция f', для которой эта формула была бы не верна.

Уравнение касательной - это самая короткая из формул Тейлора, это самое грубое приближение, где учтена только 1-я степень.

Примеры рядов Тейлора некоторых известных функций.

Пример. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

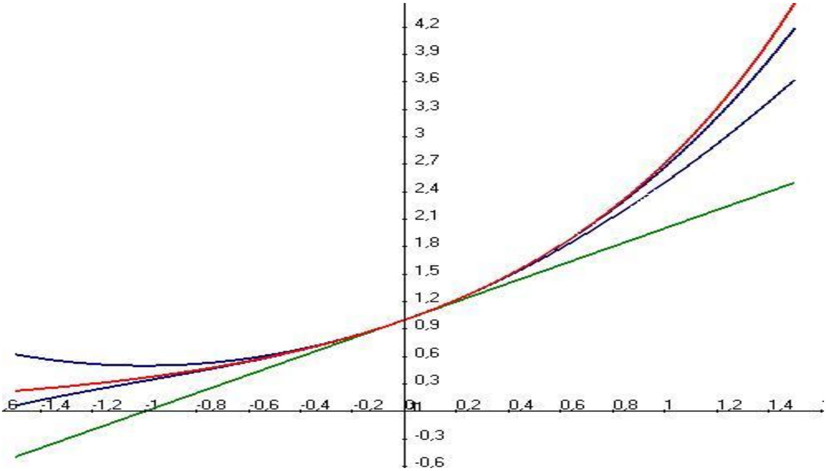
Выведем эту формулу. Рассмотрим несколько производных и затем их значения в точке 0:

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$ $f''(x) = e^x$ ...	$f(0) = 1$ $f'(0) = 1$ $f''(0) = 1$ ...

тогда мы и получаем, что: $e^x = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$

т.е $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$.

Вот как выглядят графики многочленов и экспоненты:



Красным показан график экспоненты, зелёным - касательная, затем

$1+x+\dfrac{x^2}{2}$ и $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

Как видно, уже даже для 3 степени погрешность очень мала.

Пример. $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}...$

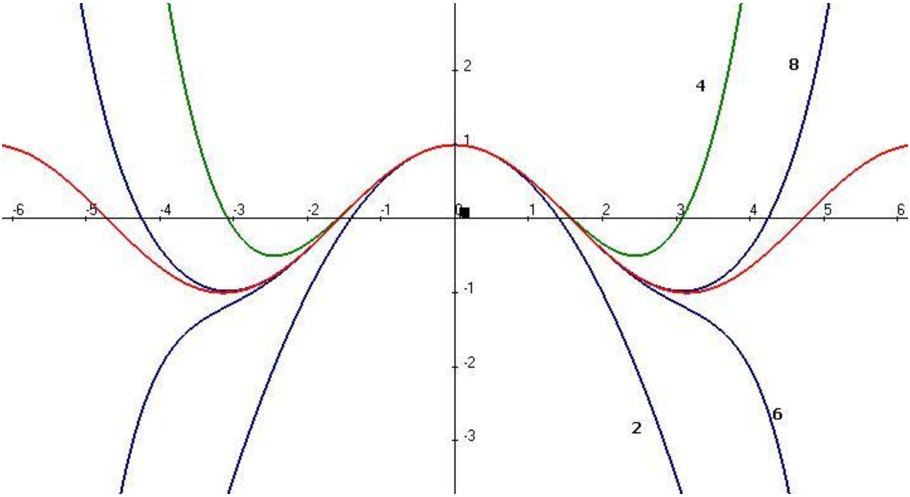
Выведем эту формулу. Рассмотрим несколько производных и затем их значения в точке 0:

$f(x)=\cos(x)$ $f'(x)=-\sin(x)$ $f''(x)=-\cos(x)$ $f'''(x)=\sin(x)$ ...	$f(0)=1$ $f'(0)=0$ $f''(x)=-1$ $f'''(x)=0$ ...

Далее 4 производная совпадает с $f(x)$ и повторение через каждые 4 шага. Подставим эти константы в формулу:

$f(x)= f(0)+ f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$ и получим

$\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}...$ А вот как это всё выглядит на графике:



Красным цветом показан график $\cos(x)$.

Цифрой 2 помечен график функции $1-\frac{x^2}{2!}$ (в которой включены до второй степени включительно), цифрой 4 - график $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, далее, кривая, помеченная «6» соответствует $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, а «8» это $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$. Как видим, чем больше степень, тем на большем промежутке наблюдается почти полное совпадение многочлена с косинусом. Если взять степени до 8-й, то совпадение происходит почти весь период от $-\pi$ до π.

Формула Тейлора для синуса выводится аналогичным образом.

(подробнее эту и другие функции рассмотрим на практике).

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots$$

Ряд Тейлора, метод его получения с помощью прогрессий.
Существует формула суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии $\frac{b_1}{1-q} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots$.

Но мы ведь можем вынести первый член прогрессии за скобку, а также и из числителя дроби, то есть привести к виду, чтобы прогрессия начиналась с единицы. Поэтому проще запомнить формулу в таком виде: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Пример. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Решение. Можем рассматривать в интервале $(-1,1)$ то есть $|x| < 1$.

Тогда $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Серия других примеров на применение прогрессий будет рассмотрена на практике.

Лекция № 14. 09. 12. 2016

§4. Экстремумы и строение графика.

Монотонность и знак производной.

Вспомним определение монотонного роста и убывания: если при $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция монотонно возрастает, а если $f(x_1) \ge f(x_2)$ то монотонно убывает. Рассмотрим, как монотонность взаимосвязана со знаком 1-й производной.

Лемма. 1) $f'(x) \ge 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ монотонно возрастает.

2) $f'(x) \le 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ монотонно убывает.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (это та самая функция, которая была в определении предела).

Предел $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$ это и есть $f'(x_0)$.

Возьмём $x > x_0$. Если f мнонтонно возрастает, то при этом $f(x) \ge f(x_0)$, то есть дробь положительна. Если функция $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ положительна, то и её предел больше нуля, тогда $f' \ge 0$.

Аналогично, если функция $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ отрицательна, то и её предел меньше нуля, тогда $f' \le 0$.

Определение 1 (точки наибольшего, наименьшего значения в D).

Пусть функция f - функция одной переменной, т.е. отображает некоторое множество $D \subset R$ в R. Точка x_0 называется точкой наибольшего (соответственно, наименьшего) значения в D, если $f(x_0) \ge f(x)$ $\forall x \in D$. (соответственно, $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in D$).

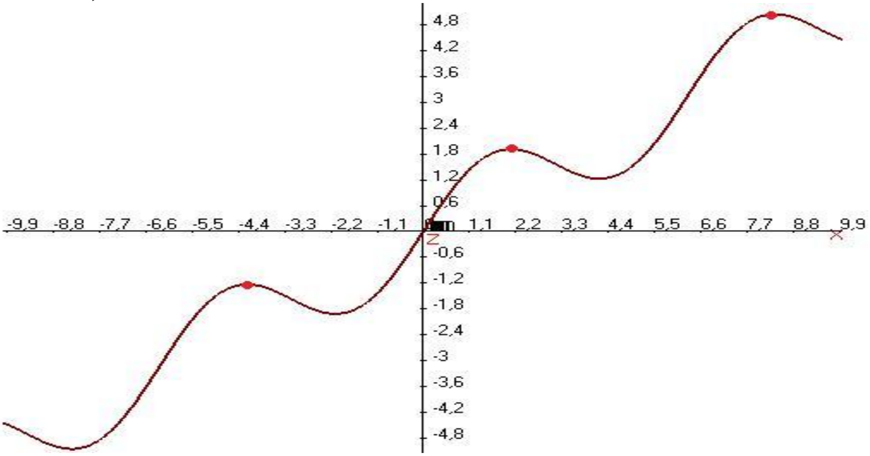
Примечание. Здесь D это область определения, может совпадать со всей числовой прямой, но не обязательно.

Определение 2. (максимум и минимум)

Пусть функция $f : D \to R$. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума), если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая, что $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U(x_0)$. (для минимума $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U(x_0)$).

Для максимума и минимума есть общее название - **«экстремум».**

Локальных максимумов в смысле определения 2 может быть несколько или даже бесконечное количество. Например, график $y = \frac{x}{2} + \sin x$, здесь через каждые 2π есть новый максимум, который выше того, что слева от него:



Понятие «максимум» отличается от понятия «наибольшее значение» тем, что для максимума требуется, чтобы функция была наибольшей в некоторой **окрестности**, а для наибольшего значения - **во всей области**.

Взаимосвязь между равенством нулю первой производной и экстремумом не однозначна. Так, функция $y = |x|$ имеет минимум в точке 0, но там не существует производная, то есть нельзя сказать, что $f' = 0$. А для функции $y = x^3$, $f'(0) = 0$, но при этом нет экстремума.

Рассмотрим подробно структуру функции в случае, когда производная не равна 0.

Теорема 1.

1). Если $f'(x_0) > 0$ то:

$f(x) < f(x_0)$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in U^+(x_0)$.

2). Если $f'(x_0) < 0$ то:

$f(x) > f(x_0)$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U^+(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим дробь $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Предел этой дроби при $x \to x_0$ равен $f'(x_0)$.

Если $f'(x_0) > 0$, то есть предел функции $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ больше нуля, то в некоторой окрестности эта функция положительна. Для точки из правой полуокрестности, $x \in U^+(x_0)$, верно $x > x_0$, то есть $x - x_0 > 0$.

Но так как дробь больше нуля, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, тогда и числитель должен быть больше нуля. $f(x) - f(x_0) > 0$, тогда $f(x) > f(x_0)$.

Если точка x - в левой полуокрестности $x \in U^-(x_0)$, тогда $x < x_0$, то есть $x - x_0 < 0$, и в положительной дроби $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ будет отрицательный знаменатель, тогда и числитель должен быть меньше нуля. $f(x) - f(x_0) < 0$, тогда $f(x) < f(x_0)$ для точек $x \in U^-(x_0)$.

Итак, справа от точки x_0 график функции выше, чем ордината $f(x_0)$, а слева - ниже. То есть, экстремума там точно нет.

Если $f'(x_0) < 0$ то доказывается аналогично: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ в некоторой окрестности, то при $x \in U^+(x_0)$ то есть положительном знаменателе, должен быть отрицательный числитель, и тогда $f(x) < f(x_0)$. А при $x \in U^-(x_0)$ знаменатель отрицательный, тогда числитель положительный, и $f(x) > f(x_0)$.

Итак, теорема доказана.

Из Т.1 следует, что если производная в точке не равна 0, а является положительным или отрицательным числом, то экстремума точно нет. По законам логики, если из А следует В, то из отрицания В следует отрицание А. Тогда можно вывести такой односторонний факт: если экстремум есть, то производная равна 0. Правда, только с оговоркой, что производная в той точке существует. Ведь как мы видели, для модуля производная может не существовать в точке 0.

Теорема 2. (Ферма) (необходимый признак экстремума).

Если функция дифференцируема в точке x_0, и x_0 - точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство опирается на теорему 1. Если допустить, что точка экстремума, но производная не 0, то тогда производная в точке равна какому-то числу, положительному или отрицательному. А тогда по прошлой теореме, справа и слева от этой точки график то выше, то ниже, то есть $f(x_0)$ не может быть экстремальным значением во всей окрестности.

Замечание. Если функция дифференцируема, а следовательно и непрерывна, то f' должна при возрастании из отрицательных значений в положительные пройти через 0. Если же разрывна, то можете перескочить через 0, так чтобы 0 не был знаением ни в одной точке. Поэтому эта теорема и не применима для функции $y = |x|$. Для неё производная равна -1 до начала координат, а потом сразу 1, проходит через разрыв 1 рода, то есть скачок, и производная в точке минимума не равна 0, а сразу перескочила в положительное значение.

Теорема 3. (достаточный признак экстремума на основе 1-й производной)

1). Если $f'(x_0) > 0$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f'(x_0) < 0$ при $x \in U^+(x_0)$ то x_0 - точка максимума,

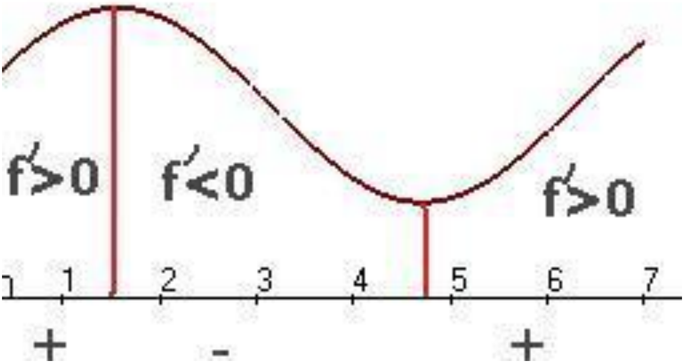
2). Если $f'(x_0) < 0$ при $x \in U^-(x_0)$ и $f'(x_0) > 0$ при $x \in U^+(x_0)$ то x_0 - точка минимума.

Доказательство.

Если до точки x_0 производная больше нуля, то это значит, что функция возрастает в левой полуокрестности. При возрастании, чем правее точка, тем больше в ней значение. Но ведь x_0 это правая граница множества $U^-(x_0)=(x_0-\varepsilon, x_0]$. Таким образом, $f(x_0)$ наибольшее значение во множестве $U^-(x_0)$.

При убывании, чем правее точка, тем меньше в ней значение. Но ведь x_0 это левая граница множества $U^+(x_0)=[x_0, x_0+\varepsilon)$. Таким образом, $f(x_0)$ наибольшее значение также и во множестве $U^+(x_0)$. Получается, что $f(x_0)$ - наибольшее значение во всём множестве $U(x_0)$, а это и есть максимум.

Доказали подробно 1-й пункт, 2-й аналогичными рассуждениями с заменой неравенств на противоположные.

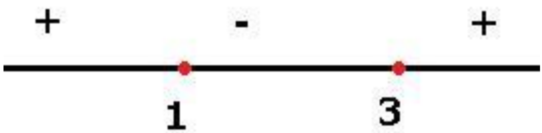


Итак, на стыке интервалов монотонного роста и убывания - точки экстремума. Таким способом и можно находить экстремумы. Кстати, для теоремы 3 всё равно, гладкая функция или точка излома (производная разрывна) в точке экстремума. Она применима и для функции $y=|x|$.

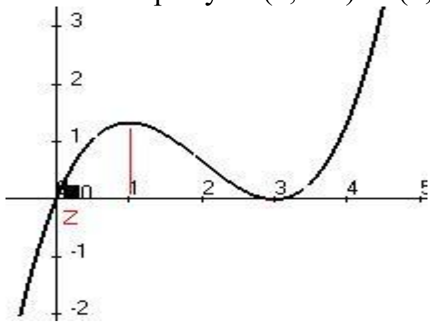
Теперь становится ясно, почему у кубической параболы нет экстремума в точке (0,0): интервал роста сменяется снова на интервал роста, поэтому, хоть даже и производная равна 0, но экстремума там нет.

Пример. Найти экстремумы $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$.

Решение. Найдём f' = x^2-4x+3. Корни 1 и 3. Выясним знак производной на каждом из интервалов $(-\infty,1)$, $(1,3)$ и $(3,+\infty)$. Для этого надо вычислить знак f' в какой-нибудь точке на каждом из этих интервалов. Желательно для удобства вычислений взять целое число как представителя интервала.
Например, $0\in(-\infty,1)$, $2\in(1,3)$ и $4\in(3,+\infty)$.
$f'(0)=3>0$. $f'(2)=4-8+3=-1<0$. $f'(4)=16-16+3=3>0$.



Таким образом, в точке $x=1$ рост сменяется убыванием, $x=1$ точка максимума. В точке $x=3$ убыванием сменяется ростом, $x=3$ точка минимума. Можно вычислить и ординаты, чтобы более подробно нарисовать график. Точки экстремума (1, 4/3) и (3, 0) . Вот график:



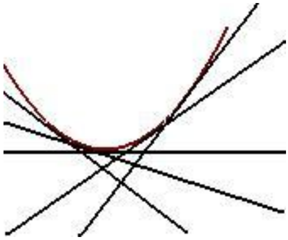
Теорема 4. (достаточный признак экстремума на основе 2-й производной)
Если функция дважды дифференцируема, и $f'(x_0)=0$, то:

при $f''(x_0)>0$ - то в точке x_0 минимум,

при $f''(x_0)<0$ в точке x_0 максимум.

Доказательство.

Если вторая производная больше нуля, значит, первая производная возрастает при прохождении через точку x_0. То есть, до точки x_0 она была отрицательна, а после положительна. Т.е. f' переходит из - в + , то есть точка на стыке интервалов убывания и роста. По теореме 3 это и означает, что там минимум. Изобразим семейство касательных в точках вокруг минимума:



касательная была направлена вниз, а после прохождения через эту точку - повернётся вверх.

Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то f' убывающая, что означает, что она проходит через 0 именно в процессе убывания, т.е. положительная в левой полуокрестности и отрицательна в правой. По теореме 3 это и означает, что в точке x_0 максимум. Теорема доказана.

Замечание. Этот факт легко запомнить: для параболы $y = x^2$ вторая производная равна +2, а там минимум, так как ветви этой параболы направлены вверх. Для $y = -x^2$ будет $f''(0) = -2$, для неё - максимум.

Решим тот же самый **пример** теперь с помощью 2 производной. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$, $f' = x^2 - 4x + 3$. Точки с нулевой производной 1 и 3. А теперь не будем искать знак производной на каждом интервале, а просто вычислим $f''(x) = 2x - 4$.

$f''(1) = -2 < 0$ в точке $x = 1$ максимум.

$f''(3) = 2 > 0$ в точке $x = 3$ минимум.

Но что делать, если окажется $f''(x_0) = 0$? Как видим, такие ситуации тоже бывают, например, рассмотрим функции $y = x^3$ и $y = x^4$. Для x^3, $f'' = 6x$, $f''(0) = 0$ и там нет экстремума. Для 4-й степени, $f'' = 12x^2$, тоже $f''(0) = 0$, но для x^4 есть минимум в нуле. В чём же разница и как узнавать, есть ли экстремум? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 5. (достаточный признак экстремума на основе старших производных).

Если функция n раз дифференцируема, при этом $f'(x_0) = 0$,
$f''(x_0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:
если n нечётно то эгстремума нет,
если n чётно, то: при $f^{(n)}(x_0) > 0$ - то в точке x_0 минимум,
при $f^{(n)}(x_0) < 0$ в точке x_0 максимум.
(т.е. если чётно, то аналогично 2-й производной).

Доказательство.

Запишем формулу Тейлора, причём перенесём $f(x_0)$ влево.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha$$

Но ведь здесь первые слагаемые обнуляются по условию теоремы. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, тогда начинается именно с n-го слагаемого. $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha$, где α - бесконечно малая более высокого порядка, чем n, то есть в некоторой окрестности она по модулю меньше чем $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ и её знак уже не влияет на знак всего выражения. Тогда фактически, тогда знак разности $f(x) - f(x_0)$ в окрестности точки x_0 зависит от знака выражения $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

При чётном n множитель $(x - x_0)^n$ всегда неотрицателен
$(x - x_0)^n \geq 0$
n! по построению положительное число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Значит, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ получится всё выражение

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \geq 0$, тогда $f(x) - f(x_0) \geq 0$ в окрестности точки x_0, то есть $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. Это значит, что в точке x_0 минимум.

А если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \leq 0$, и тогда $f(x) - f(x_0) \leq 0$ а значит, $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U(x_0)$. Это значит, что в точке x_0 максимум.

Если **n нечётно**, то $(x - x_0)^n$ разного знака в правой и в левой полуокрестности, то есть какого бы знака ни было число $f^{(n)}(x_0)$, выражение $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе из правой в левую полуокрестность. Тогда $f(x_0) \geq f(x)$ и $f(x_0) \leq f(x)$ в той или иной полуокрестности, и экстремума нет.

Замечание. Кстати, предыдущую теорему 4 можно было доказать таким же способом, n=2 это частный случай этой теоремы. Но там было показано более простое рассуждение, с помощью роста и убывания функции, чтобы было более понятно.

Набольшее и наименьшее значение на отрезке.

Если требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции на каком-то множестве, нужно учесть не только экстремумы внутри множества, но и значения в правой и левой граничных точках.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение $f(x) = x^2$ на отрезке $[-1,2]$.

Решение. Сначала найдём экстремумы во внутренних точках. $f'(x) = 2x$, $f' = 0$ только при $x = 0$. При этом $f'' = 2 > 0$, то есть, там минимум.

Осталось найти все значения функции в точках экстремума и в двух граничных точках и сравнить их:

$$f(0)=0$$
$$f(-1)=1$$
$$f(2)=4$$

Наибольшее значение в точке 2, наименьшее в точке 0. Не учитывать граничные точки нельзя, потому что наибольшее значение может оказаться именно там, а не в точках экстремума внутри интервала.

Лекция № 15. 16. 12. 2016

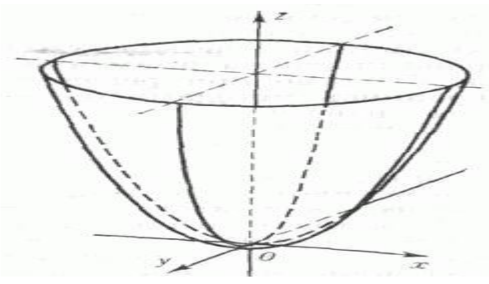
Экстремум функции нескольких переменных.

Определение (запишем для R^2, но аналогично и для n-мерного). Пусть $f: R^2 \to R^1$, то есть $f(x,y)$. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой максимума (минимума), если $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U(x_0,y_0)$ (для минимума соответственно, $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U(x_0,y_0)$).

Идея здесь та же самая, что и для функций одной переменной: максимум, если значение функции больше, чем в любой точки из окрестности, а минимум, если меньше. просто окрестность в плоскости это не интервал, а круг. А в пространстве - шар.

Физический смысл экстремума функции n переменных. Если задано распределение температур в пространстве, то есть точка максмальной и минимальной температуры. Так, существует точка минимальной температуры в земной атмосфере.

Пример. $f(x,y)=x^2+y^2$.



$\nabla f(x,y)=(2x,2y)$. Вертикальные сечения параболоида - это параболы, ветвями направленные вверх, для них как для кривых просто обычный минимум. В точке (0,0) частные производные нулевые, т.е. $\nabla f = 0$ в точке (0,0).

Аналог необходимого признака, т.е. теоремы Ферма, здесь имеет место: Если $M_0(x_0, y_0)$ точка экстремума, то $\nabla f(M_0) = 0$.

Аналог достаточного признака на основе 2-й производной здесь выглядит более сложно, но тоже имеет место. Если вычислить все возможные вторые производные, то они образуют матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

в данном случае она равна $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, соответствует положительно-определённой квадратичной форме $Q = 2x^2 + 2y^2 \geq 0$. В каждом из двух перпендикулярных сечений поверхности такая кривая, что 2-я производная больше нуля, то есть по каждому сечению минимум. При этом все угловые миноры больше нуля. Для данной матрицы это очевидно, однако если бы она была не диагональная, то именно проверка знаков угловых миноров позволяла бы точно сказать, есть ли в точке экстремум.

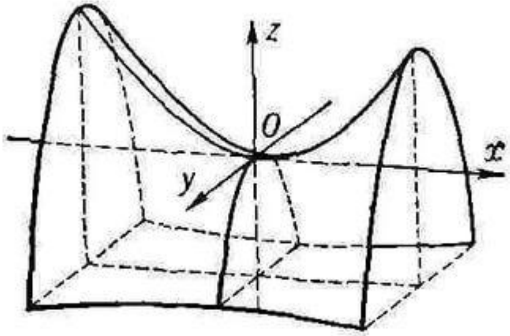
Для сравнения, рассмотрим функцию $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Для неё точка (0,0) является точкой максимума. $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$.

Посмотрим, как при этом устроена матрица вторых производных.

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для каждого отдельно взятого сечения вдоль оси 0x или оси 0y, как для обычной кривой, есть максимум, вторая производная равна 0. Если же исследовать знаки угловых миноров, то они чередуются, начиная с отрицательного. Это достаточное условие максимума для функции n переменных. Если матрица диагональная, то это означает, что на диагонали все элементы отрицательны.

Если градиент равен 0-вектору, это вовсе не является достаточным условием экстремума. Так, есть функции, для которых градиент 0, а экстремума нет, так как в одном сечении минимум, а в другом сечении максимум. Гиперболический параболоид:



$f(x, y) = x^2 - y^2$, $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

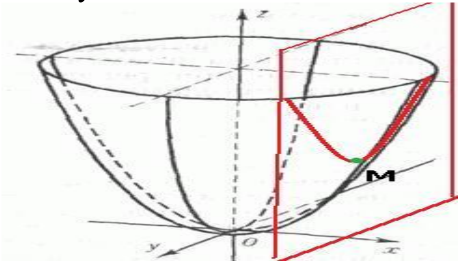
Однако матрица вторых производных такая:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Не выполняется ни одно из свойств: угловые миноры не положительны, но и их знаки не чередуются, начиная с минуса. Видно, что для параболы в сечении в плоскости Oxz минимум, а в перпендикулярном сечении в плоскости Oyz максимум.

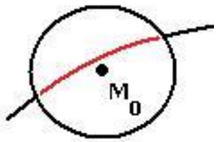
Условный экстремум.

Рассмотрим эллиптический параболоид, сделаем сечение вертикальной плоскостью, которая параллельна координатной плоскости. Для самой поверхности точка М ничем не характерна, рядом с ней есть и точки меньшей, и точки большей высоты. Но вот для сечения это - минимум.



То есть, если сузить область определения с плоской фигуры до одномерной линии, то от поверхности останется сечение, и для сечение, уже как просто для кривой, могут быть экстремумы, которых не было на самой поверхности. такие экстремумы называются «условными», потому что для сужения области определения применяется какое-то условие. Неявно задать кривую можно с помощью какого-то условия типа $F(x, y) = 0$. Например, показанное на чертеже сечение получается, если фиксировать х, т.е. здесь условие вида $x = a$, то есть $x - a = 0$. Итак, определение.

Определение. Пусть задана функция $f(x, y)$ и некоторое неявное уравнение кривой L в плоскости $F(x, y) = 0$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой условного максимума, если $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ для любой точки (x, y) принадлежащей $U(M_0) \cap L$.



Отличие от обычного максимума: для максимума в центре окрестности должно быть значение больше, чем в любой точке окрестности, а для условного максимума больше, чем во всех точках пересечения этой окрестности и кривой L. (В других точках из окрестности, которые не принадлежат кривой, может быть не больше, а меньше).

Определение условного минимума вводится аналогично, лишь в неравенстве изменён знак: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Эти понятия нужны для того, чтобы искать наибольшие и наименьшие значения в плоских областях. Ведь граница плоской области это линия, а не две точки a,b как было при поиске наибольшего значения на отрезке.

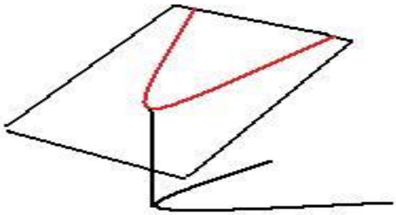
На наклонной плоскости, то есть для поверхностей типа $z = kx + my$, вообще нет точек экстремума, т.к. рядом с любой точкой есть другие точки, как выше, так и ниже. Градиент этой функции равен (k, m) и он, очевидно, не равен (0,0). Но если сузить область определения, провести параболу под этой наклонной плоскостью, то на плоскости будет кривая, у которой уже есть точка минимальной высоты!

Пример. Дана функция $f(x,y)=y$. Найти условный экстремум этой функции на параболе $y=x^2$.

Решение. Условие имеет вид $F(x,y)=y^2-x=0$.

Выразим все имеющиеся в функции y через x.

$f(x,y(x)) = f(x,x^2)=x^2$. Обычная производная $(x^2)'=2x$, минимум в точке 0. Тогда $(0,0)$ условный минимум. Чертёж:



Пример. Найти отношение сторон прямоугольника, такое, что при фиксированном периметре получилась бы максимальная площадь.

Решение. Периметр $P(x,y)=2x+2y$. Площадь выражается функцией $S(x,y)=xy$. Если периметр фиксирован, например приравняем к константе 2C, то $P(x,y)=2x+2y=2C$, это условие позволит нам одну переменную выразить через другую. $x+y=C$, т.е. $y=C-x$. Подставим в функцию $S(x,y)=xy$, получим $S(x,y(x))=x(C-x)=S(x)$. Функция стала зависеть только от одной переменной, и для неё уже можно искать экстремумы обычным способом. $S(x)=Cx-x^2$, тогда $S'(x)=C-2x$.

$C-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{C}{2}$. Это именно максимум т.к. $S''(x)=-2<0$.

$x=\dfrac{C}{2} \Rightarrow y=C-\dfrac{C}{2}=\dfrac{C}{2}$. Тогда отношение $y/x=1$.

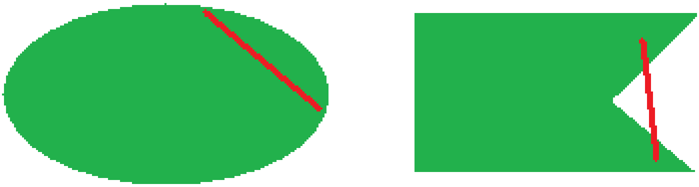
Ответ. $y/x=1$. То есть, среди прямоугольников равного периметра, наибольшей площадью обладает квадрат.

Замечание. Представим, что квадрат размера 1 на 1, периметр равен 4. Так вот, при увеличении одной стороны до 2 вторая уменьшается до 0 и соответственно, площадь до 0. Для прямоугольника со сторонами 2 и 0 периметр формально тоже равен 4.

Выпуклость вверх (вниз) графика функции и 2 производная.
Выпуклое множество.

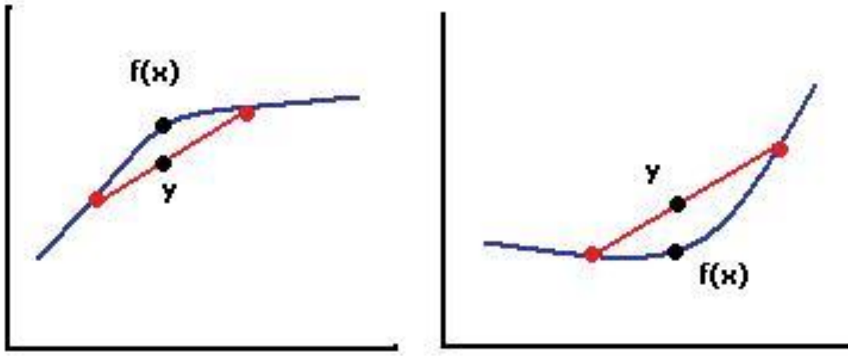
Определение. Множество D называется выпуклым, если для любой пары точек этого множества отрезок, соединяющий их, состоит из точек, принадлежащих этому множеству.

В первом примере множество выпуклое, во втором нет: есть пары точек, такие, что кратчайшая линия, соединяющая их, выходит за пределы этого множества.



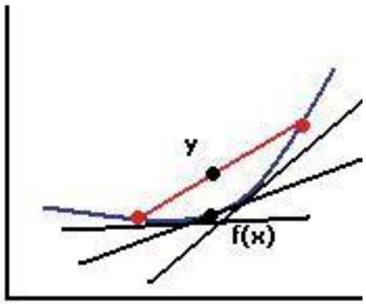
Ещё пример не выпуклого множества на карте. Если лететь с Каматки, то кратчайшая линия проходит над морем, а если из Владивостока - над чужой территорией. Есть соединяющая линия, проходящая по своей территории и именно над сушей, но она - не кратчайшая.

Для графиков функций эти понятия обобщаются так.
Функция называется выпуклой вверх (соотв., вниз) на отрезке [a,b], если график проходит выше (соотв., ниже) любой хорды, соединяющей пару точек на графике.
На чертеже: для выпуклой вверх функции $f(x) > y$, для выпуклой вниз $f(x) < y$.



В случае, когда f выпукла вверх, множество точек, расположенных под графиком является выпуклым множеством, а если выпуклая вниз - то выпуклое множество точек, лежащих над графиком.

Если f выпукла вверх, то угол наклона касательной уменьшается при движении точки вправо, то есть f' убывает, а это происходит тогда и только тогда, когда $f'' < 0$.
Если f выпукла вниз, то соответственно f' возрастает, а $f'' > 0$.



Теорема. Функция выпукла вверх $\Leftrightarrow$ $f'' < 0$, функция выпукла вниз $\Leftrightarrow$ $f'' > 0$.

Определение. Если $f''(x_0) = 0$, при этом в правой и левой полуокрестности f'' разного знака, то точка x_0 называется точкой перегиба.

Точки перегиба хорошо видны и в реальной жизни: если дорога поворачивает сначала в одну сторону, например влево (при этом линия дороги выпукла вправо) а потом дорога закругляется вправо (линия при этом выпукла влево), то между ними точка перегиба.

Если мы проезжаем кольцо, то траектория движения сначала выпукла влево (заезжаем на кольцо), потом вправо (движемся по кольцу), потом снова влево (когда съезжаем с кольца на следующую часть дороги).

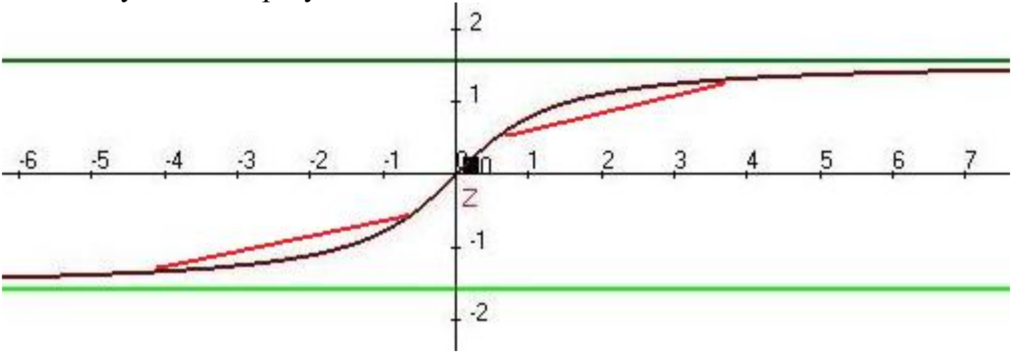
Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для $f(x) = arctgx$.

$$f(x) = arctgx,\ \ f'(x) = \frac{1}{x^2+1},\ \ f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

При $x < 0$: $\quad f''(x) > 0$, $\quad$ f выпукла вниз.

При $x > 0$: $\quad f''(x) < 0$, $\quad$ f выпукла вверх.

Касательная сначала поворачивается вверх, 1-я производная растёт (в начале координат угол наклона доходит до 45 градусов), а потом снова опускается при удалении точки в $+\infty$.

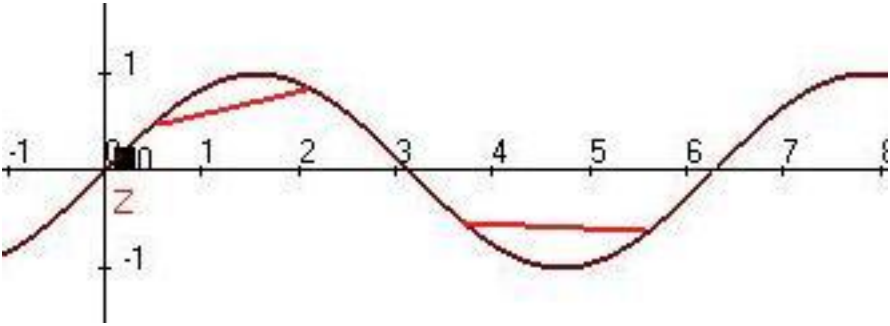


Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба для функции $f(x) = \sin x$.

Вторая производная: $\ f''(x) = -\sin x$.

На $(0 + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$: $\ f''(x) < 0$, f выпукла вверх.

На $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$: $\ f''(x) > 0$, f выпукла вверх.



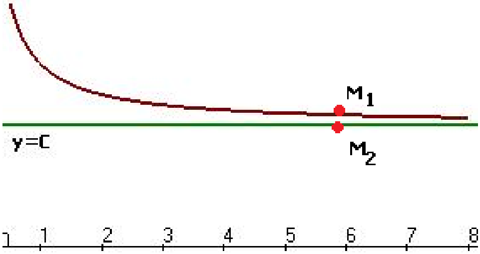
Точки перегиба: $x = k\pi$.

Асимптоты.

Если при удалении точки графика в бесконечность, она сближается с некоторой прямой, то эта прямая называется асимптотой.

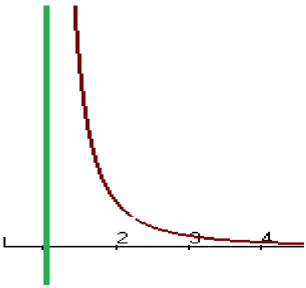
Так как удаление от начала координат в бесконечность может происходить как вправо/влево, так и вверх/вниз либо вообще по диагонали, то можно эту ситуацию описать одним общим условием: Если $\sqrt{x^2 + f^2(x)} \to \infty$ то $|M_1M_2| \to 0$.

Горизонтальные асимптоты:



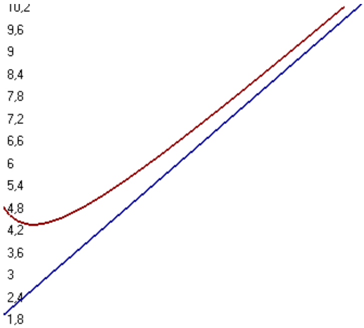
Если $f(x) \to C$, $x \to \infty$, то асимптота горизонтальная, эта ситуация имеет место, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$.

Вертикальные асимптоты:



Если $f(x) \to \infty$, $x \to a$, то асимптота вертикальная (это соответствует разрыву 2 рода, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$).

Наклонные асимптоты:



Если $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$, но при этом график всё же стремится к некоторой прямой, то асимптота наклонная.

Как видно, что во всех этих случаях точка неограниченно удаляется в бесконечность, но $\sqrt{x^2 + f^2(x)} \to \infty$ за счёт либо 1-го слагаемого, либо 2-го, либо двух сразу.

Наклонные асимптоты. Вывод формул $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Так как точка на графике и на асимптоте сближаются то:

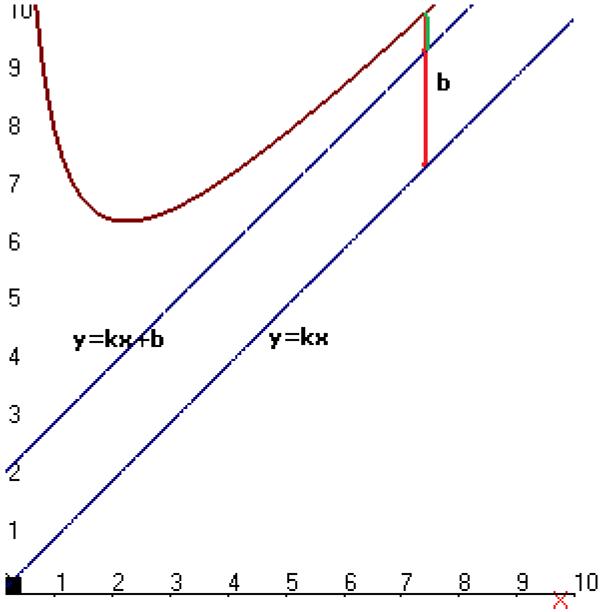
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0 .$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, то есть

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Рассмотрим прямую $y = kx$, параллельную асимптоте $y = kx + b$.

Если разность ординат для точки на графике и соответствующей точки на прямой $y = kx + b$ стремится к 0, то разность ординат для точки на графике и точки на прямой $y = kx$ стремится к b. Отрезок, соответствующий этому расстоянию, отмечен красным на чертеже.



Если две величины, $f(x)$ и kx, неограниченно возрастают, и при этом разность между ними не увеличивается, а стремится к константе, то их отношение стремится к 1, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{kx}=1$. Но тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$.

Итак, мы получили формулы для нахождения k, b. На практике сначала надо найти k, а уже затем b.

Пример. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$.

Решение. Во-первых, сразу видно точку разрыва 2-го рода $x=2$. Есть вертикальная асимптота $x=2$.
Найдём наклонную асимптоту.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}$ (мы просто добавили лишний x в знаменателе, тем самым поделили на x).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=1.$$ Итак, $k=1$.

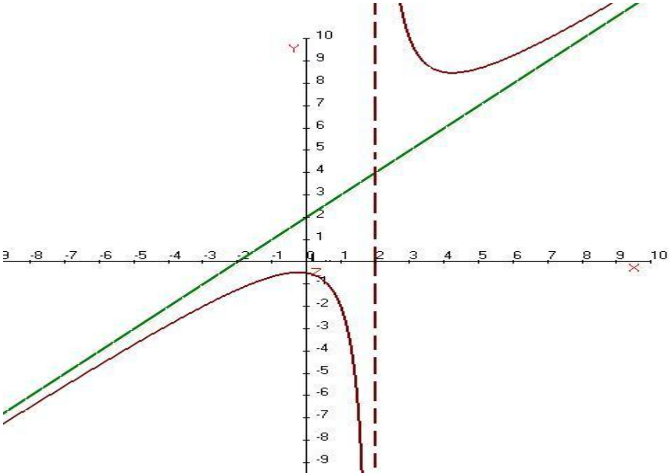
Обратите внимание: здесь предел одинаково вычисляется при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, но бывают примеры, в которых по-разному, то есть на правой и левой полуплоскости могут быть разные асимптоты.

Найдём $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-\frac{x(x-2)}{x-2}\right)=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-(x^2-2x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)=2.$$

Ответ. Вертикальная x = 2, наклонная y = x + 2.

График выглядит так:



Замечание. При значении $k=0$ ситуация не однозначна: не всегда существует горизонтальная асимптота, например, для ln(x) горизонтальной асимптоты нет, несмотря на то, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Коэффициент k лишь выявляет, к чему стремится угловой коэффициент касательной. Но для ln(x) касательная стремится к горизонтальному положению, тем не менее, функция не ограничена сверху.

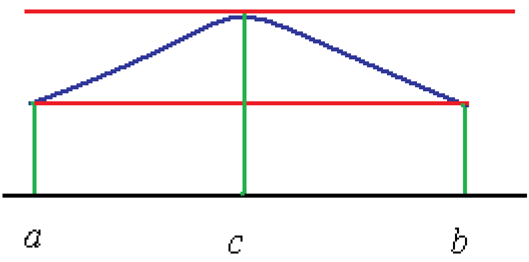
Замечание. Если на данной полуплоскости, правой или левой, есть наклонная асимптота, то нет горизонтальной, и наоборот, если есть горизонтальная, то нет наклонной. Действительно, ситуации $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$ (что требуется для горизонтальной асимптоты) и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (при существовании наклонной, f возрастает к ∞) взаимоисключающие.

Замечание. Если получается $k = \infty$, тогда нет наклонной асимтоты. Например, при $f = x^3$, деление на x ни к чему не приведёт, всё равно останется ∞. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Лекция № 16. 23. 12. 2016

§ 5. Основные теоремы дифф. исчисления

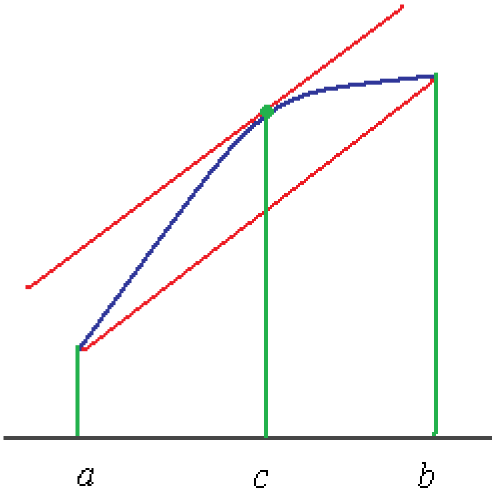
Теорема 1 (Ролля). Если функция f непрерывна и дифференцируема на [a,b], и $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a,b)$, такая что $f'(c) = 0$.



Доказательство. Если в точке b такое же значение, как было в точке a, то:

1) либо функция тождественно равна константе (но тогда вообще в любой точке нулевая производная)
2) либо не константа, но тогда она должна достигать какого-то максимального отклонения от ординаты $f(a)$ и снова возвращаться на эту же высоту, в этом случае есть точка экстремума, одна или несколько. Из теоремы Ферма об эстремуме следует, что в такой точке производная равна 0.

Теорема 2 (Лагранжа). Если функция f непрерывна и дифференцируема на [a,b], то существует точка $c \in (a,b)$, такая что
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
Пояснение. Теорема Лагранжа фактически утверждает, что на графике есть такая точка, что касательная в ней наклонена под таким же углом, как хорда, соединяющая 2 конца графика в точках $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Чертёж:



Доказательство. Рассмотрим функцию
$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$
Вычислим, чему она равна в точках a, b.

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Итак, на концах интервала значение одно и то же. Тогда по теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, где $\varphi'(c) = 0$. Рассмотрим подробнее производную $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Дробь здесь фактически просто коэффициент k, он не содержит переменную, дифференцируется только $(x-a)$. Ясно, что производная от $k(x-a)$ равна просто числу k. Теперь рассмотрим её в точке c: $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$, тогда $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Коши). Если функции f,g непрерывны и дифференцируемы на [a,b], то существует точка $c \in (a,b)$, такая что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Доказательство. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$.

Проверим её значения на концах интервала, они одинаковы:

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = f(a).$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Тогда по теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, где $\varphi'(c) = 0$.

$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, тогда

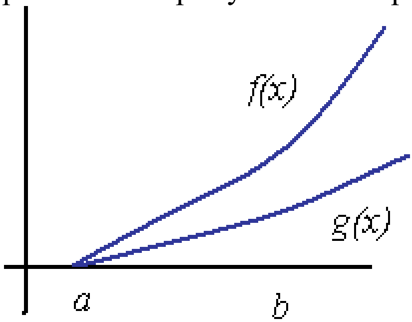
$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)\text{, в итоге } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Теорема 4 (Лопиталя). Функции f,g непрерывны и дифференцируемы на [a,b], и $f(a)=0$, $g(a)=0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доказательство. Применим теорему Коши к отрезку [a,x].



В некоторой точке c верно: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0}$.

Но при $x \to a$, точка c, лежащая между a,x тоже стремится к a.

Тогда в итоге получится $\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Кратко об основах темы «интегралы».
Взаимосвязь производной и интеграла.

Чтобы легче понять начало 2 семестра, кратко рассмотрим понятия первообразной и неопределённого интеграла.

Определение. Если $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$.

Свойство. Если $F(x)$ первообразная, то $F(x)+C$ (для любого $C \in R$) тоже является первообразной для той же самой функции $f(x)$.

Это легко доказать, действительно, $(F(x)+C)' = f(x)+0 = f(x)$.

Таким образом, первообразных бесконечно много, то есть, если поднять или опустить на любую высоту график $F(x)$, снова будет первообразная.

Определение. Множество всех первообразных от одной и той же функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом этой функции.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Свойство. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две различные первообразные функции $f(x)$, то $F_1(x)-F_2(x)\equiv C$.

Доказывается так: $(F_1(x)-F_2(x))'\equiv C'$, то есть $f(x)-f(x)=0$.

Свойства линейности.

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

2. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Некоторые основные интегралы.

$\int 0dx = C$ $\quad \int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C\ (a \neq -1)$

$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

Интернет-тестирование.

Рассмотрим некоторые задачи из официального интернет-тестирования по предмету «математика».

Вопрос 1. Система уравнений: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \end{cases}$

1) имеет бесконечное множество решений
2) не имеет решений
3) имеет 2 решения
4) имеет единственное решение.

Решение. Мы видим, что в системе 2 уравнения и 3 неизвестных, это означает,что есть свободная неизвестная. Ранг системы равен 2, так как нет 3-го уравнения, он не может быть равен 3 и потому базисный минор не может заполнять все столбцы. Это означает, что решений бесконечно много, ответ № 1.

Вопрос 2. Угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $x-5y-3=0$ равен:

1) $\frac{1}{5}$ 2) $-\frac{3}{5}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{1}{5}$

Решение. Чтобы найти угловой коэффициент, просто перейдём от неявного задания прямой к явному. $x-5y-3=0 \Rightarrow x-3=5y \Rightarrow$ $y=\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}$. Угловой коэффициент это коэффициент при x, то есть $\frac{1}{5}$.

Ответ № 1 .

Вопрос 3. Даны точки $A(2,-1,-5)$ и $B(-1,0,-2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору AB имеет вид

1) $3x-y-3z-22=0$
2) $x-y-7z+38=0$
3) $3x-y-3z+22=0$
4) $x-y-7z-38=0$

Решение. Во-первых, $AB=(-3,1,3)$ или $BA=(3,-1,-3)$ это нормаль к плоскости, и именно такие коэффициенты мы видим в ответах № 1 и

№ 3. Какой из них верный? Вспомним, что точка А должна принадлежать плоскости. Подставим координаты точки А. Равеноство выполяется только для ответа № 1.

Вопрос 4. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+3}$ равен:

1) 2 2) $\dfrac{1}{3}$ 3) 0 4) ∞

Решение. Сократим на x^2, получим в числителе 2 + бесконечно малые, в знаменателе 1 + беск. малые. Ответ: предел равен 2, то есть ответ № 1.

Вопрос 5. Производная функции $y = 2\sqrt{x} + x^3 - 1$ равна

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2 - 1$ 3) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 3x^2$ 4) $\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} + \dfrac{x^4}{4} - x$

Решение. Вспомним, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, тогда $\left(2\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то есть подходят, по крайней мере, ответы 1-й и 2-й. Но во 2-м лишнее -1, при дифференцировании константа должна исчезнуть, а $-x$ там и не было, так что слагаемого -1 быть не может. Поэтому правильный только ответ № 1.

Литература.

1. Л.И.Магазинников, А.Л. Магазинникова.
Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебное пособие
http://edu.tusur.ru/publications/2244

2. Л.И.Магазинников, А.Л.Магазинников.
Дифференциальное исчисление. Учебное пособие
http://edu.tusur.ru/publications/2246

Предыдущая часть (1-я половина семестра):
3. Приходовский М.А.
Математика (курс лекций, семестр 1, часть 1) учебное пособие для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике" — Томск: ТУСУР, 2016. — 84 с.
http://edu.tusur.ru/publications/6308

4. Приходовский М.А.
Математика (курс практических занятий, семестр 1, часть 1) учебное пособие для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике" — Томск: ТУСУР, 2016. — 102 с.
http://edu.tusur.ru/publications/6307