Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Приходовский М.А.

Математика - курс практических занятий
семестр 1 часть 2

для специальности
09.03.03 «прикладная информатика в экономике»

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2017

Электронное учебное пособие составлено и скорректировано с учётом реального проведения практических занятий на ФСУ в группах 446-1, 446-2 осенью 2016 года. В осеннем семестре, согласно рабочим программам, на специальности 09.03.03 изучаются следующие темы: линейная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление. Даны с подробным разбором задачи, которые решались на каждом практическом занятии. Пособие может представлять методический интерес для преподавателей, работающих на аналогичных специальностях, как материал для планирования занятий.

Номера практик по датам для групп 446-1, 446-2 согласно расписанию

Практика №	446-1	446-2
1	02.09.16	03.09.16
2	06.09.16	03.09.16
3	09.09.16	09.09.16
4	16.09.16	17.09.16
5	20.09.16	17.09.16
6	23.09.16	23.09.16
7	30.09.16	27.09.16
8	04.10.16	27.09.16
9	07.10.16	07.10.16
10	14.10.16	11.10.16
11	18.10.16	11.10.16
12	21.10.16	21.10.16
13	28.10.16	25.10.16
14	01.11.16	25.10.16
15	**11.11.16**	**07.11.16**
16	**15.11.16**	**07.11.16**
17	**18.11.16**	**18.11.16**
18	**25.11.16**	**21.11.16**
19	**29.11.16**	**21.11.16**
20	**02.12.16**	**02.12.16**
21	**09.12.16**	**05.12.16**
22	**13.12.16**	**05.12.16**
23	**16.12.16**	**16.12.16**
24	**23.12.16**	**19.12.16**
25	**27.12.16**	**19.12.16**
26	30.12.16	30.12.16

Практика 15
«Введение в математический анализ. Множества и функции»

Задача 1. Доказать нечётность функции $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

Решение. Заменим x на $-x$, при этом $-x$ наоборот, заменится на x.

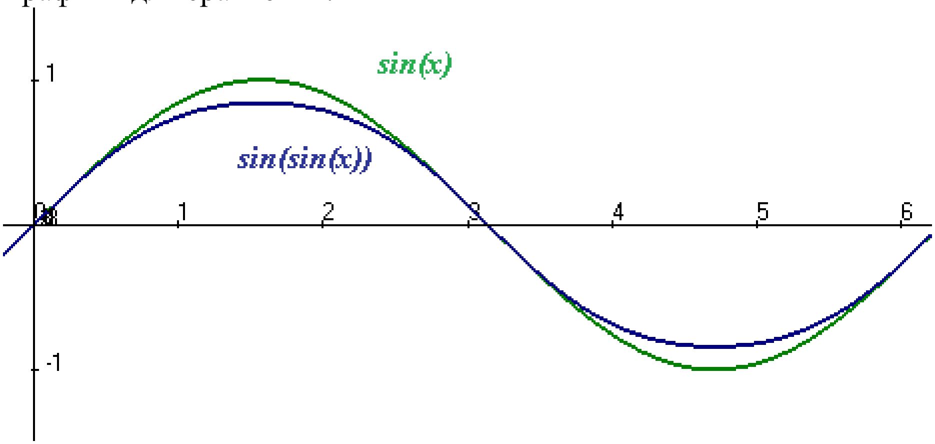
$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Таким образом, $f(-x)=-f(x)$, то есть функция нечётная.

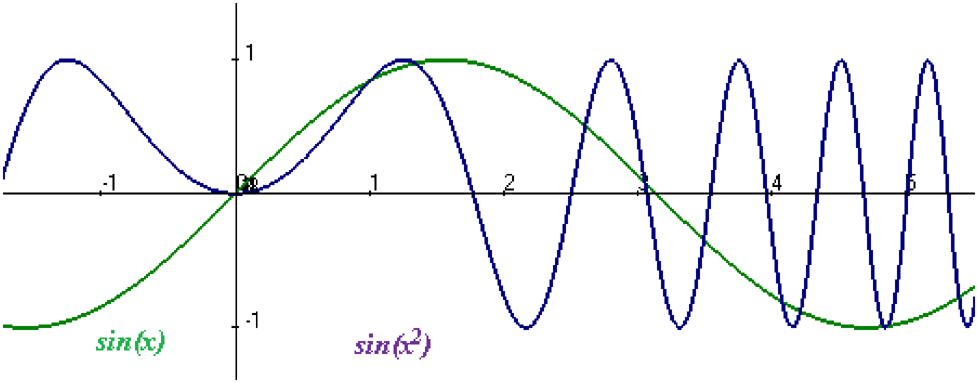
Задача 2. Даны 2 функции: $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$. Найти все их возможные композиции.

Решение. $f(f(x))=\sin(\sin(x))$ так как $\sin x<1$ то повторное вычисление синуса ещё чуть уменьшает значение этой величины, поэтому график суть ниже обычного графика синуса.

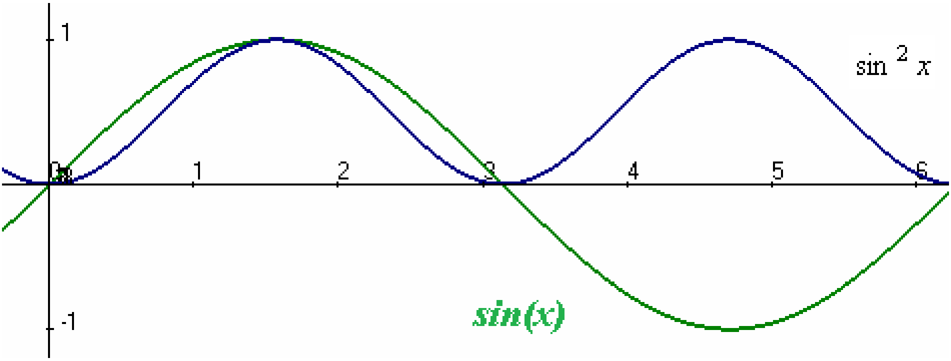
Графики для сравнения:



$f(g(x))=\sin\left(x^2\right)$, здесь скорость возрастания с ростом x всё более увеличивается, то есть колебания синуса учащаются. График:

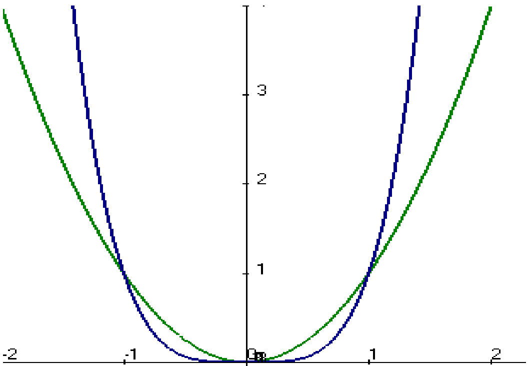


$g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$,график:



$g(g(x)) = (x^2)^2 = x^4$ строение этой функции хорошо известно.

На чертеже зелёным показан график $g(x) = x^2$, синим $g(g(x)) = x^4$.



Задача 3. Найти композицию $f(f(f(x)))$ если $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Решение. Двойная композиция это $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$,

а тройная композиция $f(f(f(x)))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$. Можно сначала привести подобные внутри самой внутренней дроби, для чего 1 представим как $\dfrac{1-x}{1-x}$.

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}\right)}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{-x}{1-x}\right)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}$$

И в этой дроби тоже приведём подобные таким же способом.

$$\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}=\frac{1}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1-x}{x}}=\frac{1}{\dfrac{x+1-x}{x}}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}=x.$$

Ответ. $f(f(f(x)))=x$.

К задаче 4. Композиции функций из R^n в R^1 и из R^1 в R^n.

Функция $w=f(x,y,z)$ отображает R^3 в R^1.

Функция из R^1 в R^3: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ такая функция задаёт движение точки в пространстве.

Можно рассматривать композицию: $R^1 \to R^3 \to R^1$.

$w=f(x(t),y(t),z(t))$. Физический смысл: каждой точке пространства задана температура, и заданы параметрические уравнения движения точки в пространстве. По какому закону для этой точки будет изменяться окружающая температура.

Задача 4. Точка движется по окружности единичного радиуса вокруг начала координат в плоскости. Температура распределена по закону: $f(x,y)=2xy$. Найти для этой точки функцию, как меняется температура в зависимости от времени.

Решение. Движение точки можно задать так: $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$.

Подставим эти выражения в $f(x,y)=2xy$, чтобы получить композицию функций. $f(x(t),y(t))=2\cos t\sin t = \sin(2t)$.

Ответ. Температура в зависимости от времени для этой точки изменяется так: $f(t)=\sin(2t)$.

Задача 5. Найти область определения функции:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Решение. Выражение под каждым из корней должно быть ≥ 0, а для второго даже строго больше 0, так как он в знаменателе.

Получается система из 2 неравенств: $x^2-1\geq 0$ и $9-x^2>0$.

$x^2\geq 1 \Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)$, $\quad x^2<9 \Rightarrow x\in(-3,3)$.

Итого, пересечение этих множеств: $x\in(-3,1]\cup[1,3)$.

Ответ. $x\in(-3,1]\cup[1,3)$.

Задача 6. Найти область определения функции:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{9-x^2-y^2}.$$

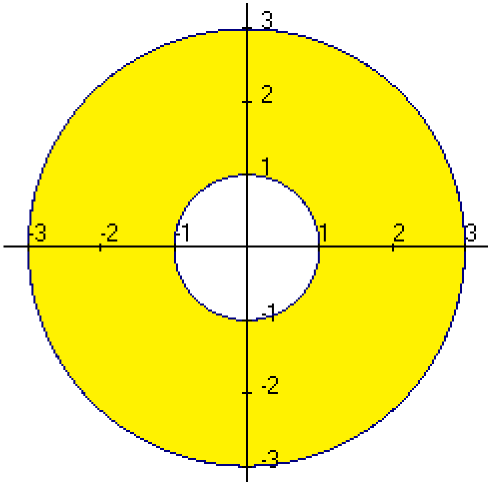
Решение. Оба подкоренных выражения должны быть неотрицательны

$x^2+y^2\geq 1$ это область вне круга радиуса 1.

$x^2+y^2\leq 9=3^2$ это область внутри круга радиуса 3.

В их пересечении лежит кольцо $1\leq x^2+y^2\leq 3$.

Чертёж:



Ответ. Кольцо $1 \le x^2 + y^2 \le 3$.

Задача 7. Найти область определения функции 3 переменных: $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Решение. Здесь $1 - x^2 - y^2 - z^2 \ge 0$, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Это неравенство задаёт шар радиуса 1. Штриховкой в плоскости, как в прошлой задаче, для функции трёх переменных изобразить уже невозможно.

Ответ. Шар радиуса 1: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

О комплексных числах. В следующем семестре мы будем подробно изучать такое расширение множества действительных чисел, как комплексные числа. Однако вкратце рассмотрим простейшие действия с ними уже сейчас, чтобы потом было легче понять.

Условно обозначим корень из -1 через i. Называется «мнимая единица». Такое число не существует на действительной прямой. Можно представить его в виде точки на вертикальной оси Оу в плоскости. Итак, $i = \sqrt{-1}$, то есть $i^2 = -1$.

Каждой точке с координатами (a,b)в плоскости можно поставить в соответствие $a + bi$, оно называется комплексным числом.

Умножение таких чисел производится с помощью обычного раскрытия скобок с учётом того, что $i^2 = -1$.

Задача 8. Умножить комплексные числа $(1+i)(2+i)$.

Решение. $(1+i)(2+i)$ = $1(2+i)+i(2+i)$ = $2+i+2i+i^2$ = $2+i+2i-1$ = $1+3i$. **Ответ.** $1+3i$.

Задача 9. Найти корни многочлена x^2+x+1, где $D<0$.

Решение. $D=1-4=-3$. Корни $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$ = $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ = $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **Ответ.** $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Перерыв в середине пары

Тема «Предел последовательности»

Задача 1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+4}{6n^2+7}$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки n^2 и в числителе, и в знаменателе, с целью сократить на этот множитель.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+4}{6n^2+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{6+\frac{7}{n^2}}$$

Каждая из мелких дробей в числителе и знаменателе стремится к 0, поэтому получается сумма пределов в каждом случае, и тогда $\frac{2+0+0}{6+0}$ = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. **Ответ.** $\frac{1}{3}$.

Задача 2. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+1}{2n^3+5n+2}$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки и сократим самую старшую степень элемента n, в прошлой задаче это была 2-я степень, а здесь 3-я.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\frac{3+0+0}{2+0+0}=\frac{3}{2}.$$ **Ответ.** $\frac{3}{2}$.

Задача 3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{3}=0$.

Замечание. Если наоборот, в знаменателе была бы степень больше, чем в числителе, то ответ не 0 а ∞.

Ответ. 0.

Задача 4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)$.

Решение. Здесь неопределённость типа $\infty-\infty$.

Чтобы свести к дроби, и сокращать как в прошлых примерах, надо сначала домножить на «сопряжённое» выражение, то есть такое где вместо разности сумма, это позволит использовать формулу сокращённого умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+6n+8}-n\right)\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n+8}^{\,2}-n^2}{\left(\sqrt{n^2+6n+8}+n\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+8-n^2}{\sqrt{n^2+6n+8}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+8}{\sqrt{n^2+6n+8}+n}.$$

Теперь можно сократить на первую степень n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+8}}{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+8}}{\sqrt{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+6n+8}{n^2}}+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}}+1}=\frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{6}{\sqrt{1}+1}=3.$$

Ответ. 3.

Задача 5. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+11}-2n}{3n+7}$.

Решение. Сначала домножим на сопряжённое выражение, так как здесь есть разность, содержащая $\infty-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{25n^2+11}-2n\right)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)}{(3n+7)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(25n^2+11-4n^2\right)}{(3n+7)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{21n^2+11}{(3n+7)\left(\sqrt{25n^2+11}+2n\right)}.$$

Нужно сокращать на n^2. При этом в знаменателе два множителя, можно каждый из них разделить на n, тем самым весь знаменатель разделится на n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{21+\frac{11}{n^2}}{\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{25n^2+11}+2n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{21+\frac{11}{n^2}}{\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{25n^2+11}}{\sqrt{n^2}}+2\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{21+\frac{11}{n^2}}{\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(\sqrt{25+\frac{11}{n^2}}+2\right)}=\frac{21+0}{(3+0)\left(\sqrt{25+0}+2\right)}=\frac{21}{3\cdot\left(\sqrt{25}+2\right)}=$$

$= \dfrac{21}{3 \cdot 7} = 1.$ **Ответ**. 1.

Задача 6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 + 1}}{n+3}$.

Решение. Здесь разности нет, так что можем сразу сократить на n. В числителе при этом можно представить n в виде $\sqrt[3]{n^3}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 + 1}}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{\sqrt[3]{8n^3 + 2n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^3}}\right)}{\left(\dfrac{n+3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^3}}}{1 + \dfrac{3}{n}} =$$

$\dfrac{\sqrt[3]{8+0+0}}{1+0} = 2.$ **Ответ**. 2.

Практика 16

Тема: Пределы функций.

Задача 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x+6}$.

Решение. Так как переменная неграниченно возрастает, то тоже влияют её старшие степени и коэффициенты перед ними.

Сократим дробь: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(2 + \dfrac{5}{x}\right)}{x\left(3 + \dfrac{6}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + \dfrac{5}{x}}{3 + \dfrac{6}{x}} = \dfrac{2+0}{3+0} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ. $\dfrac{2}{3}$.

Задача 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2}{3x^2 + 1}$.

Решение. Аналогично тому, как в прошлом примере, сократим на старшую степень, здесь это x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Решение. В этом примере надо домножить и поделить на «сопряжённое» то есть на сумму, чтобы использовать формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

здесь числитель равен 1, знаменатель неограниченно возрастает, поэтому получается выражение типа $\frac{1}{\infty}$, предел равен 0.

Ответ. 0.

Замечание. Как мы видим, методы решения примеров для последовательности ($n\to\infty$) и для функции при $x\to+\infty$ во многом очень похожи. В одном случае дискретно увеличивается к бесконечности, а в другом непрерывно, но всё равно и там, и здесь неограниченное возрастание. .

Задача 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$.

Решение. В этом примере тоже надо домножить и поделить на «сопряжённое».

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x} =$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}$ теперь сократим на x: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{9x^2+x}}{x}+3}$

В знаменателе можно представить x в виде $\sqrt{x^2}$, чтобы упростить выражение в знаменателе:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{9x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{9x^2+x}{x^2}}+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3} = \frac{1}{\sqrt{9+0}+3}$$

$= \dfrac{1}{6}$. **Ответ.** $\dfrac{1}{6}$.

Примеры, в которых $x \to x_0$.

Задача 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Решение. В этом случае x стремится к числу, а не бесконечности. Получается неопределённость совсем другого типа: если в прошлых примерах было $\infty-\infty$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то здесь $\dfrac{0}{0}$. Если просто подставить 1 в это выражение, получилось бы $\dfrac{0}{0}$. Поэтому и нельзя просто подставить и вычислить значение, а нужно раскрывать неопределённость. Выделим множитель $(x-1)$ и в числителе, и в знаменателе, чтобы его сократить.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x+1}{1} = 2.$$

Когда сократили, тогда уже можно просто подставить $x=1$.

Ответ. 2.

Задача 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$.

Решение. Найдём корни многочленов в числителе и знаменателе, и разложим на множители. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-5)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)}{(x-5)}=\dfrac{-1}{-4}=\dfrac{1}{4}$. Сократили тот множитель, который отвечает за стремление к нулю, в числителе и знаменателе.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Разложим на множители, как и в прошлой задаче.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)}{(x-3)}=\frac{2}{-2}=-1.$$

Нашли корни числителя и знаменателя, разложили на множители. Сократили тот множитель, который отвечает за стремление к нулю, в числителе и знаменателе.

Ответ. -1.

(!) Обратите внимание, что в случае, когда в числителе таких множителей (стремящихся к 0) больше, чем в знаменателе, то происходит неполное сокращение, и в числителе остаётся одна из скобок, стремящихся к 0, то есть предел получается 0. Это будет видно на следующем примере.

Задача 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-4x+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-3)}=$

$\dfrac{2\cdot0}{-2}=0$. В числителе остался один не сокращённый множитель $(x-1)$, остальные стремятся к константам, но уже не важно к каким, всё равно получится 0 из-за нуля в числителе.

Ответ. 0.

Замечание. Наоборот, если бы такой множитель остался в знаменателе, то предел был бы равен ∞. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{(x^2-1)(x-1)} = \infty$.

Задача 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2+2x}$.

Решение. Во-первых, если просто подставить -2, видно неопределённость $\frac{0}{0}$. Это означает, что -2 является корнем, т.е. по крайней мере, хотя бы один множитель вида $(x+2)$ и в числителе, и в знаменателе найдётся. Это облегчает поиск корней, можно обойтись даже без дискриминанта, а просто найти второй дополняющий. Когда мы сократим все $(x+2)$, можно будет просто подставить $x=-2$ в оставшееся выражение.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2+2x} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x\left(x^2+3x+2\right)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x+1)} =$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)}{x(x+1)} = \frac{-2-4}{(-2)(-2+1)} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Ответ. -3.

Задача 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$.

Решение. Способ 1. Тот факт, что при подстановке $x=1$ и в числителе, и в знаменателе даёт значение 0, говорит о том, что множитель $(x-1)$ присутствует хотя бы один раз. Поэтому найти корни можно даже без дискриминанта.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-5} = \frac{1-3}{1-5} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Способ 2. (Лопиталя).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)'}{(x^2-6x+5)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-4}{2x-6} = \frac{2-4}{2-6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$.

Решение. Воспользуемся формулой разности кубов:
$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right) = 27.$$

Впрочем, можно сделать и методом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^3-27)'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{1} = 27.$$

Ответ. 27.

Задача 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-5x}{x^2+5x+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-5x}{x^2+5x+4} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x\left(x^2-4x-5\right)}{x^2+5x+4} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x-5)}{(x+1)(x+4)}$

$= \lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x-5)}{x+4} = \frac{(-1)(-6)}{3} = 2.$

Замечание. Этот пример, как и многие из рассматриваемых, можно тоже для проверки решить вторым способом (Лопиталя).
Ответ. 2.

Задача 13. Найти предел $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$.

Решение. Здесь 3 степень в каждой части дроби, но зато мы точно знаем, что присутствует множитель $(x+3)$ ведь неопределённость $\frac{0}{0}$.

Это облегчает поиск корней многочленов 3-й степени: мы можем сначала поделить на $(x+3)$ и останутся многочлены 2-й степени, корни которых уже можно найти через дискриминант.

$$\begin{array}{l|l} x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+3x^2} & x^2+2x-3 \\ \quad 2x^2+3x & \\ \quad \underline{2x^2+6x} & \\ \qquad -3x-9 & \\ \qquad \underline{-3x-9} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3-3x^2-45x-81 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+3x^2} & x^2-6x-27 \\ \quad -6x^2-45x & \\ \quad \underline{-6x^2-18x} & \\ \qquad -27x-81 & \\ \qquad \underline{-27x-81} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Итак, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81} = \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x^2-6x-27)}$

Однако находя корни через дискриминант, обнаруживаем, что ещё раз выделяется множитель $(x+3)$.

В числителе $D=4-4(-3)=16$, корни $\dfrac{-2\pm4}{2}$, т.е. -3 и 1.

В знаменателе $D=36-4(-27)=144$, корни $\dfrac{6\pm12}{2}$, т.е. -3 и 9.

Получается $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+3)(x-9)}$. Значит, просто эту скобку надо сократить 2 раза, но всё равно она ведь полностью сокращается.

Получим $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-1}{x-9} = \dfrac{-3-1}{-3-9} = \dfrac{-4}{-12} = \dfrac{1}{3}$.

Замечание. 2-й способ. По методу Лопиталя здесь тоже пришлось бы дифференцировать 2 раза, из-за наличия корня кратности 2.

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x^3+5x^2+3x-9)'}{(x^3-3x^2-45x-81)'} = \lim_{x\to-3}\frac{3x^2+10x+3}{3x^2-6x-45}.$$

Здесь опять получается неопределённость $\dfrac{0}{0}$, поэтому дальше:

$$\lim_{x\to-3}\frac{(3x^2+10x+3)'}{(3x^2-6x-45)'} = \lim_{x\to-3}\frac{6x+10}{6x-6} = \frac{-18+10}{-18-6} = \frac{-8}{-24} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

Задача 14. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$.

Решение. Сразу вынесем за скобку общий множитель и в числителе, и в знаменателе, там все остальные коэффициенты ему кратны. Затем разложим на множители.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \lim_{x\to 1}\frac{5}{3}\cdot\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4} = \frac{5}{3}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-4)} =$$

$$\frac{5}{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-4} = \frac{5}{3}\cdot\frac{-2}{-3} = \frac{10}{9}.$$

Ответ. $\dfrac{10}{9}$.

Замечание. Если с самого начала не выносить старший коэффициент, то тогда надо не забыть домножить его потом, после разложения на множители. Ведь если просто записать разложение $(x-1)(x-3)$ то это равно x^2-4x+3, а вовсе не $5x^2-20x+15$.

Задача 15. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}$.

Решение. В отличие от прошлой задачи, здесь $x\to\infty$ и поэтому другой тип неопределённости, и применяется совершенно другой метод решения, несмотря на то, что функция та же самая.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \frac{5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1-0+0}{1-0+0} = \frac{5}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{5}{3}$.

Замечание. Оба этих предела (в задачах 14 и 15) можно было найти по правилу Лопиталя. Если решать таким методом, то можно вообще не задумываться о том, надо ли выносить старший коэффициент.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12} = \lim_{x\to 1}\frac{10x-20}{6x-15} = \frac{-10}{-9} = \frac{10}{9}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-20x+15}{3x^2-15x+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x-20}{6x-15}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

Задача 16. Найти предел $\lim_{x\to 2}\frac{3\sqrt{x+7}-9}{\sqrt{6-x}-2}$.

Решение. Домножим и разделим на сопряжённое к каждой разности.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(3\sqrt{x+7}-9\right)\left(3\sqrt{x+7}+9\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(3\sqrt{x+7}+9\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}$$

При этом соединим дугой те, которые в итоге сворачиваются в разность квадратов. Прочие множители, которые ни с чем не объединяются, вынесем в отдельную дробь, и даже в отдельный предел. Получается произведение пределов:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(3\sqrt{x+7}+9\right)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{9(x+7)-81}{(6-x)-4}$$

В одном из них нет неопределённости, а во втором преобразуем так, чтобы сократить скобку $(x-2)$.

$$\frac{\left(\sqrt{4}+2\right)}{\left(3\sqrt{9}+9\right)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{9x-18}{2-x}=\frac{4}{18}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{9(x-2)}{(-1)(x-2)}=\frac{4}{18}\cdot\frac{9}{(-1)}=\frac{36}{-18}=-2.$$

Ответ. -2.

Задача 17-А. Найти предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$.

Задача 17-Б. Найти предел $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x}$.

Решение. Сейчас на этом примере мы увидим, как может отличаться решение и ответ в зависимости от $+\infty$ или $-\infty$. И в том, и в другой случае мы стараемся сократить дробь на множитель x.

Если x положительно, то x можно представить в виде $\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{1} = \frac{1+3}{1} = 4.$$

А вот если x отрицательно, то надо учесть, что $\sqrt{x^2}$ это $|x|$, оно положительно, то есть при $x<0$ верно $x=-\sqrt{x^2}$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{9x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{1} = \frac{1-3}{1} = -2.$$

Ответы. 4 и -2.

<u>Практика 17 (18 ноября у обеих групп)</u>

Задача 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. В этом случае можно с помощью замены преобразовать так, что будут только целые степени, а для получившихся многочленов уже можно искать корни и проводить разложение на множители.

НОК(2,3) = 6. Если обозначим $t=\sqrt[6]{x}$, то:

$$\sqrt[3]{x}=x^{1/3}=x^{2/6}=\sqrt[6]{x}^{\,2}=t^2, \qquad \sqrt{x}=x^{1/2}=x^{3/6}=\sqrt[6]{x}^{\,3}=t^3.$$

При этом, если $x\to1$, то и $t=\sqrt[6]{x}\to1$ тоже стремится к 1.

* Такое совпадение при замене переменной бывает далеко не всегда, а лишь в частных случаях, а обычно надо пересчитать, возможно новая переменная стремится к другому числу. Например, если $t=x^2$ и $x\to2$, то $t\to4$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1-t^3}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}$ (для удобства сделали, чтобы многочлены начинались со старшей степени). Далее,

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

При этом даже нет необходимости делать обратную замену и возвращаться к старой переменной.

Ответ. $\dfrac{3}{2}$.

Тема «1-й замечательный предел».

Задача 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение. С помощью преобразований получим в знаменателе такое же выражение, как под знаком синуса в числителе.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)}\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-1} = 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Второй предел вообще не содержит неопределённости, а первый это в точности $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ если переобозначить $t=x-5$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(100x)}{x^2+20x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(100x)}{100x}\dfrac{100x}{x(x+20)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{100}{(x+20)} = 5.$

Ответ. 5.

Задача 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{4+x}-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{4+x}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 6x)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)} =$

$$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{4+x}+2\right)\frac{\sin 6x}{4+x-4} = \lim_{x\to0}\left(\sqrt{4+x}+2\right)\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{x} =$$

$$4\cdot\lim_{x\to0}6\cdot\frac{\sin 6x}{6x} = 24.$$

Сначала домножили на сопряжённое выражение, потом вынесли в отдельный множитель ту часть, где нет неопределённости. В конце домножили на 6 в знаменателе и числителе, чтобы в знаменателе образовалось ровно такое же выражение, как под знаком синуса, то есть $6x$.

Ответ. 24.

Задача 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$.

Решение. Эту задачу можно решить как с применением тригонометрической формулы, так и методом Лопиталя.

Способ 1. Вспомним формулу $\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$. Получается

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x} = 2.$$

Способ 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-\cos(2x)\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-(-\sin(2x))\cdot2}{2x} = 2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x} = 2.$

Ответ. 2.

Задача 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

Решение. Чтобы устранить разность, как всегда, домножим и поделим на сопряжённое.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}\right)}{\sin^2 x}\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x}.$$

это мы применили формулу понижения степени, а ту часть, которая стремится к 0, вычислили сразу, этот коэффициент теперь так и будет оставаться до ответа. Теперь заменим каждую из бесконечно-малых на эквивалентную.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}1\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/4}{x^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$ **Ответ.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Замечания. Начиная с того места, где мы получили $\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ можно было сделать и другими способами.

Способ 2. По правилу Лопиталя. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin^2 x)'} =$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Способ 3. Домножить на сопряжённое.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\sin^2 x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{(1+\cos x)} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Способ 3-а. Представить квадрат синуса в знаменателе в виде $1-\cos^2 x$ и тогда получается разбиение на 2 сопряжённых:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Задача 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x-6}-1}{\sqrt{4x-11}-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x-6}-1}{\sqrt{4x-11}-1} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(e^{2x-6}-1\right)\left(\sqrt{4x-11}+1\right)}{\left(\sqrt{4x-11}-1\right)\left(\sqrt{4x-11}+1\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{4x-11}+1\right)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x-6}-1}{4x-12} = 2\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2(x-3)}-1}{4(x-3)}$. Введём замену $t = x-3$

Тогда $2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{2t}-1}{4t} = 2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(e^{2t}-1)'}{(4t)'} = 2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2e^{2t}}{4} = 2\dfrac{2}{4} = 1$.

Ответ. 1.

Замечание. Почему выражение $(e^{2t}-1)$ мы здесь не домножаем на сопряжённое, а делали методом Лопиталя. Тогда получилось бы $(e^{2t}-1)(e^{2t}+1) = (e^{4t}-1)$, то есть в таких выражениях, в отличие от иррациональностей, формулу сокращённого умножения и структуру a^2-b^2 применять бесполезно, потому что это даёт точно такое же выражение, стремящееся к $e^0-1=0$.

Задача 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2+4x-4)}{x-1}$.

Решение.

Способ 1. С помощью замены на эквивалентную бесконечно-малую.
Можно выделить 1 под знаком логарифма, получить выражение типа $\ln(1+a)$. Затем воспользоваться эквивалентностью $\ln(1+a)\approx a$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x^2+4x-5))}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{x-1} =$$
$\lim\limits_{x\to 1}(x+5) = 6.$

Способ 2. По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\dfrac{2x+4}{x^2+4x-4}\right)}{1} = \dfrac{2+4}{1+4-4} = 6.$

Ответ. 6.

Задача 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$.

Решение. Методом Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-4x-1\right)'}{\left(\sin^2 5x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}-4}{2\sin 5x\cos 5x\cdot 5}$

$= \dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 10x}$. Но опять получилась неопределённость $\dfrac{0}{0}$.

Продифференцируем ещё раз $\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-1\right)'}{\left(\sin 10x\right)'} = \dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}}{10\cos 10x} =$

$\dfrac{4}{5}\dfrac{4e^0}{10\cos 0} = \dfrac{16}{50} = \dfrac{8}{25} = 0{,}32.$ **Ответ.** $\dfrac{16}{50}$.

Тема «2-й замечательный предел»

Задача 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Решение. Здесь неопределённость 1^∞. Основание стремится к 1, так как здесь одинаковые старшие степени многочленов в числителе и знаменателе, и одинаковые коэффициенты при них. Как и в прошлом примере, отделим от дроби её целую часть, то есть 1. Если предел дроби равен 1, то так можно сделать.

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}\right)^{2x-1} =$$

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{(x+1)-(x-2)}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}.$$

Слагаемое, которое следует после 1, стремится к 0, что и должно быть для 2 замечательного предела. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\bullet\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)} =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x-2}\bullet(2x-1)\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) = e^6.$$

Ответ. e^6.

Задача 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^x$.

Решение. Здесь целая часть 1 уже выделена. Остаётся только домножить и найти предел в степени.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{1}\frac{1}{2x+1}x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{1}}\right)^{\frac{x}{2x+1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2+1/x}} = e^{\frac{1}{2+0}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Ответ. $\sqrt{e}$.

Задача 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{x^2}{x^4+1}\right)^{\frac{x^4+1}{x^2}}\right)^{\frac{x^2}{x^4+1}(2x^2+3)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x^2}{x^4+1}(2x^2+3)} =$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2(2x^2+3)}{x^4+1}} = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2}{x^4+1}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}}\right) = e^2.$$

Ответ. e^2.

Задача 13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}}$.

Решение. Здесь сначала заметим, что основание стремится к 7/7 = 1. А степень к бесконечности. То есть, неопределённость типа 1^∞ и можно использовать 2-й замечательный предел. Сначала выделяем целую часть дроби, то есть 1. Прибавим и отнимем 1, но ту, которую отняли, представим в таком виде, чтобы она объединилась с дробью.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+3}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x+3}{4x-1}-1\right)^{\frac{14}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x+3}{4x-1}-\frac{4x-1}{4x-1}\right)^{\frac{14}{x^2-4}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x+3)-(4x-1)}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x+3)-(4x-1)}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$$

$= \lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{4-2x}{4x-1}\right)^{\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$ теперь после 1 следует бесокнечно-малая, которая обращается в 0 при $x\to 2$, ведь там числитель $4-2x$. Далее, в степени домножаем обратную к этой дроби, но при этом и её саму тоже, чтобы ничего не изменилось.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2(2-x)}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2(2-x)}\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\left(1+\frac{2(2-x)}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2(2-x)}}\right)^{\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(e)^{\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}}$$

использовали тот факт, что $\lim\limits_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$.

Далее, получаем $\exp\left(\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(2-x)}{4x-1}\frac{14}{(x+2)(x-2)}\right)=$

$$\exp\left(\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2}{4x-1}\frac{14}{(x+2)}\right)=\exp\left(\frac{-28}{7\cdot 4}\right)=e^{-1}.$$

Ответ. e^{-1}.

Задача 14. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x-3}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}$.

Решение. Заметим, что основание стремится к 1, неопределённость типа 1^{∞}, можно использовать 2-й замечательный предел.

$$\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x-3}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\frac{x-3}{2x-7}-1\right)^{\frac{x+3}{4-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\frac{x-3}{2x-7}-\frac{2x-7}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}=$$

$$\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\frac{(x-3)-(2x-7)}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\frac{4-x}{2x-7}\right)^{\frac{x+3}{4-x}}=$$

$$\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\frac{4-x}{2x-7}\right)^{\frac{2x-7}{4-x}\cdot\frac{4-x}{2x-7}\cdot\frac{x+3}{4-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\left(\left(1+\frac{4-x}{2x-7}\right)^{\frac{2x-7}{4-x}}\right)^{\frac{4-x}{2x-7}\cdot\frac{x+3}{4-x}}=$$

$$\exp\left(\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-x}{2x-7}\cdot\frac{x+3}{4-x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+3}{2x-7}\right)=e^{7}.$$ **Ответ.** e^{7}.

Домашнее задание. № 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin^2 x)}{\sin^2 x}$. **Ответ.** 2.

№ 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-30x+29}{x^2-50x+49}$. **Ответ.** $\frac{7}{12}$.

№ 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}}$. **Ответ.** $e^{-\frac{3}{7}}$.

Некоторые особенности вычисления с помощью второго замечательного предела.

1. Если основание стремится не к 1, а к числу a<1 а степень к бесконечности, то можно сразу сделать вывод, что предел 0. Если a>1 то наоборот, ∞.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0\quad,\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=\infty$$

2. Не всегда в степени экспоненты получается конечное число. Так, в примере

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}=\left(\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right)^{\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}$$

$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x}\frac{1}{(x-1)^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}\frac{1}{(x-1)^2}}=e^{+\infty}=+\infty$. Это произошло из-за того, что в степени в её знаменателе остался множитель $(x-1)$.

<u>Практика 18</u>

Главная часть бесконечно-малой.

Задача 1. Найти главную часть для $\alpha(x)=x^2+x-2$ в точке $x_0=1$ т.е. вида $C(x-1)^k$.

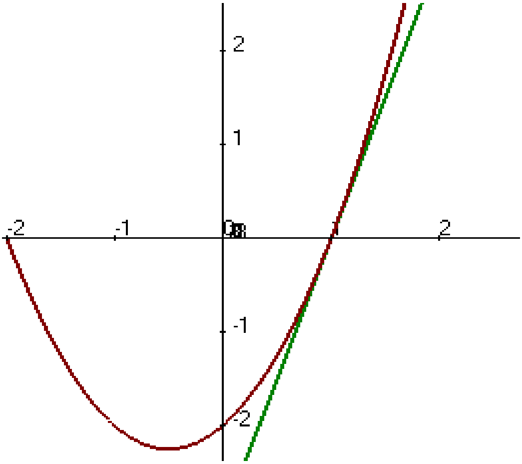
Решение. Во-первых, видно, что это действительно бесконечно-малая в точке 1, ведь $\alpha(1)=0$. Запишем в знаменателе $C(x-1)^k$ и приравняем предел к единице, ведь эти величины должны быть эквивалентны. Затем ведём преобразования и упрощаем выражение под знаком предела, как при обычном вычислении предела. Когда оно упростится настолько, что все $(x-1)$ можно будет собрать в отдельный множитель, а все остальные, не стремящиеся к нулю, отдельно, тогда легко определится k и C. Так как мы ищем эквивалентную, то предел изначально приравняем к 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{C(x-1)^k}=1\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{C(x-1)^k}=1\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)^k}\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{C}=1.$$

Множители (x-1) полностью сократятся лишь в случае, когда k=1, иначе предел получился бы 0 или ∞. Теперь, если уже известно, что k=1, и все множители типа (x-1) сократились, вычислим C.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)}{C}=1$, $\frac{3}{C}=1$, C = 3. Тогда $\gamma(x)=3(x-1)$.

Ответ. $\gamma(x)=3(x-1)$. График $\alpha(x)=x^2+x-2$ и $\gamma(x)=3(x-1)$:



На графике зелёным изображена главная часть $\gamma(x)=3(x-1)$, а коричневым $\alpha(x)=x^2+x-2$. Фактически мы нашли среди степенных функций вида $C(x-1)^k$ наилучшую, соответствующую $\alpha(x)$. Кстати, заметим, если порядок малости в данной точке равен 1, то есть k=1, то график пересекает ось Ox под каким-то углом, причём главная часть это и есть уравнение касательной. Если же касательная горизонтальна, то бесконечно малая имеет не 1 порядок, а более высокий.

Задача 2. Выделить главную часть бесконечно-малой $\alpha(x)=\sin\left(x^2-1\right)$ в точке $x_0=1$.

Решение. Запишем $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{C(x-1)^k}=1$.

Заменяем на синус на эквивалентную бесконечно-малую, для этого делим и домножаем, чтобы избавиться от синуса в этом выражении, т.е. чтобы остались только степенные функции.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\dfrac{(x^2-1)}{C(x-1)^k}=1$ предел первого множителя = 1, остаётся

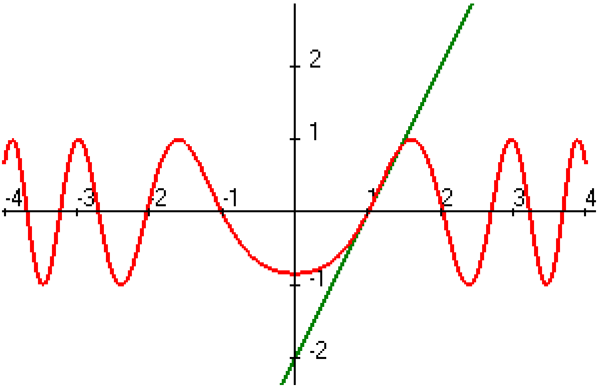
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{C(x-1)^k}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{C(x-1)^k}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)^k}\frac{(x+1)}{C}=1.$$

В отдельную дробь вынесли множители, содержащие $(x-1)$. Тогда видно, что $k=1$, иначе множитель $(x-1)$ остался бы или в числителе, или знаменателе, и предел 0 или ∞, а должен быть равен 1.

При $k=1$ остаётся $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{C}=1 \Rightarrow \dfrac{2}{C}=1 \Rightarrow C=2$.

Ответ. $\gamma(x)=2(x-1)$. Фактически, это получилось уравнение касательной $y=2x-2$.

В дополнение, чертёж к этой задаче. $\alpha(x)=\sin\left(x^2-1\right)$ показано красным цветом, а главная часть $\gamma(x)=2(x-1)$ зелёным.



Задача 3. Выделить главную часть бесконечно-малой:
$\alpha(x)=\sin\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)$ в точке $x_0=0$.

Решение. Так как точка 0, то вместо множителя $C(x-x_0)^k$ здесь просто Cx^k. Поделим и приравняем предел к 1, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}{Cx^k}=1$.

Преобразуем так, как обычно при вычислении предела, когда внутри не было неизвестных параметров. Заменим на эквивалентную бесонечно-малую.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}{\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}{Cx^k}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}{Cx^k}=1.$$

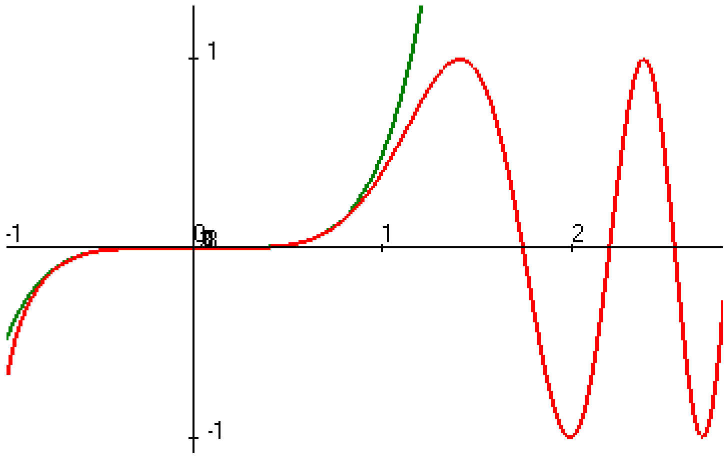
Теперь домножим и поделим на сопряжённое выражение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^5}-1\right)}{Cx^k}\frac{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1+x^5-1}{Cx^k}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}=1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{Cx^k}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^5}+1\right)}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{Cx^k}\frac{1}{2}=1$$ очевидно, что этот lim может быть равен константе лишь при $k=5$, ведь если x сократится не полностью, то будет 0 или ∞. При $k=5$ остаётся $\frac{1}{2C}=1$, $C=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\gamma(x)=\frac{x^5}{2}$.

Чертёж к этой задаче. Красным показана исходная функция, зелёным главная часть.



Таким образом, найдена «наиболее похожая» на $\alpha(x)$ в окрестности нуля функция (в классе степенных функций). Видно, что в окрестности 0 их графики очень близки, вот в чём состоит геометрический смысл **главной части** бесконечно-малой функции.

Непрерывность и точки разрыва.

Задача 4. Найти точки разрыва и определить их тип $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$.

Решение. Вычислить значение функции обычным путём здесь нельзя лишь в точках 1,–1 где знаменатель обращается в 0. Эти две точки подозрительные на существование разрыва, мы и будем исследовать.

Во-первых, можно представить так: $f(x) = \frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)}$.

Надо найти оба односторонних предела в каждой из точек.
Рассмотрим $x = 1$.
Для предела справа, $x > 1$ и модуль раскрывается без лишнего знака:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Для предела слева, $x < 1$, и при раскрытии модуля знак минус:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Получились разные константы. Значит, разрыв 1-го рода.

Рассмотрим $x = -1$.
Здесь $|x-1|$ и $(x-1)$ раскрываются одинаково, и равны 2 и -2. А отличие в том, какого знака бесконечно-малая $(x+1)$ в знаменателе.

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1+0} \frac{2}{(x+1)(-2)} = \frac{2}{(+0)(-2)} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{|x-1|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1-0} \frac{2}{(x+1)(-2)} = \frac{2}{(-0)(-2)} = +\infty.$$

Хотя бы с одной стороны предел ∞ или не существует, значит разрыв 2-го рода.

Ответ. $x = -1$ разыв 2 рода, $x = 1$ разрыв 1 рода.

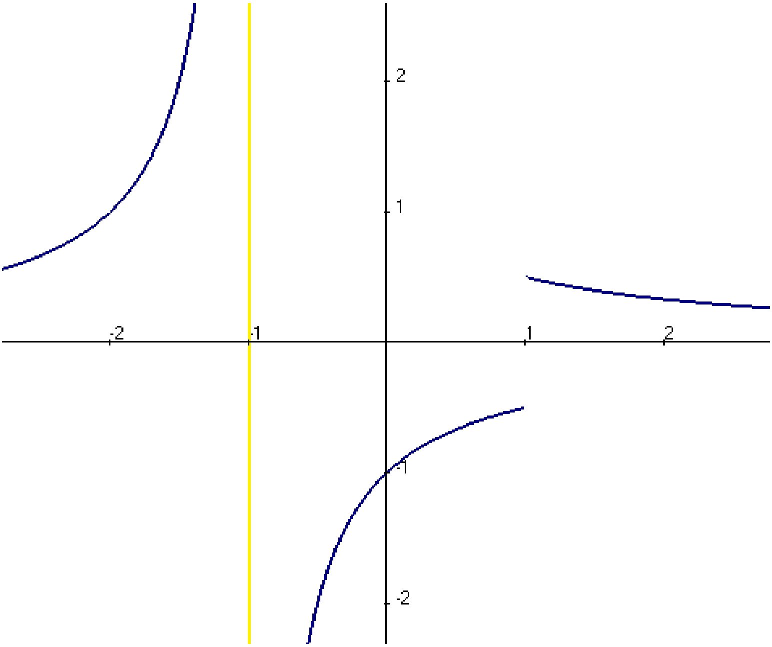


Чертёж к этой задаче. Синим цветом показан график этой функции, жёлтым - вертикальная асимптота, где разрыв 2-го рода.

Задача 5. Исследовать тип точки разрыва $x = 0$ для $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Решение.

И при $x \to +0$, и при $x \to -0$ здесь $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, а тогда $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$.

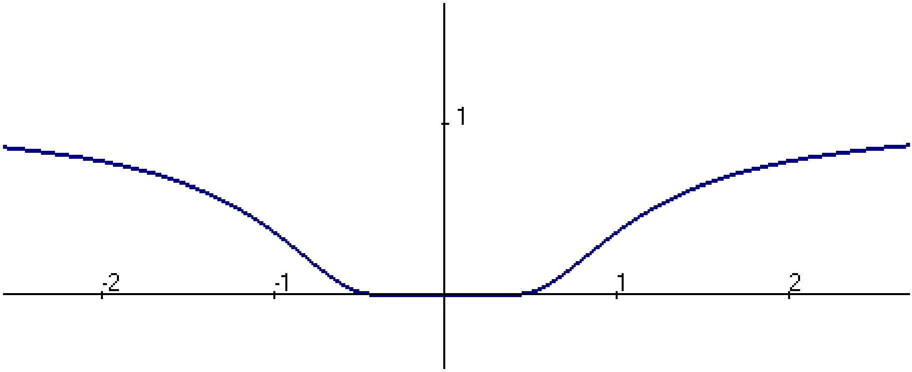
Тогда для обоих односторонних пределов получается одинаково:

$\lim\limits_{x \to +0} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to -0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$. Тогда разрыв устранимый.

К тому же функция чётная, и так ясно, что с двух сторон симметричные ветви графика. Так что достаточно было вычислить только с одной стороны.

Ответ. $x = 0$ устранимый разрыв.

График этой функции:



Задача 6. Найти точки разрыва и установить их тип для функции

$$f(x) = arctg\frac{1}{x^2 - 9}.$$

Решение. Знаменталь дроби 0 при $x = 3$ и $x = -3$. Вычислим односторонние пределы в точках -3 и 3. При этом учитываем, что

$$arctg(y) \to +\frac{\pi}{2} \text{ при } y \to +\infty \text{ и } arctg(y) \to -\frac{\pi}{2} \text{ при } y \to -\infty.$$

$$\lim_{x \to 3+0} arctg\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\frac{1}{(6)\cdot(+0)} = arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \to 3-0} arctg\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\frac{1}{(6)\cdot(-0)} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Пределы конечные, но разные. Разрыв 1-го рода.

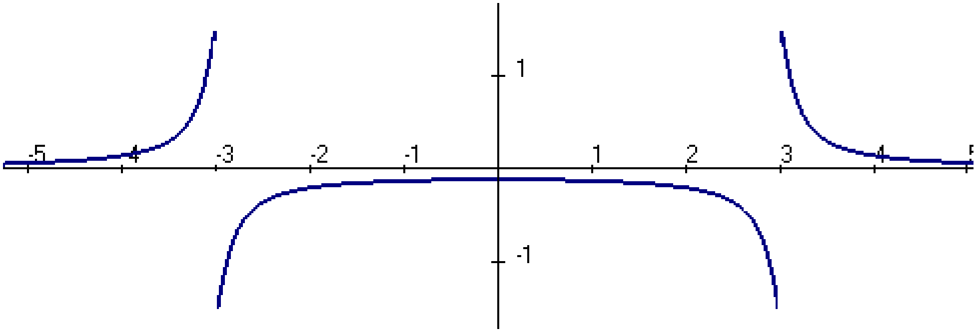
$$\lim_{x \to -3+0} arctg\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\frac{1}{(+0)\cdot(-6)} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \to -3-0} arctg\frac{1}{(x+3)(x-3)} = arctg\frac{1}{(-0)\cdot(-6)} = arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}.$$

Пределы конечные, но разные. Разрыв 1-го рода.

Ответ. -3 и 3 разрывы 1 рода.

График этой функции:



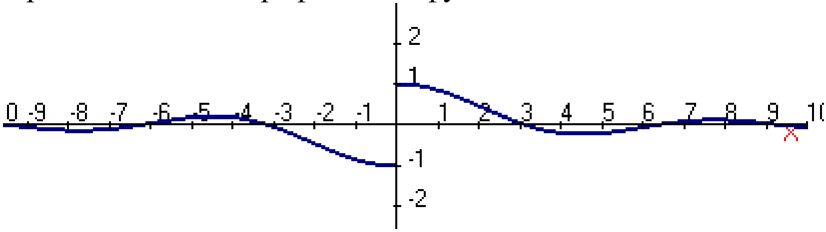
Задача 7. Исследовать тип точки $x_0 = 0$ для функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$.

Решение. Ищем односторонние пределы вокруг 0, но при этом каждый раз домножаем и делим на x, так чтобы избавиться от синуса в выражении.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+0} 1\cdot\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+0} 1\cdot\frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-0} 1\cdot\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-0} 1\cdot\frac{x}{-x} = -1.$$

Здесь знак модуля раскрывается по-разному в зависимости от того, справа или слева от 0 мы находимся. Это либо x либо $-x$.
Получились различные числа. Разрыв 1-го рода.
Ответ. $x = 0$ разрыв 1 рода.
Примечание. Вот график этой функции:



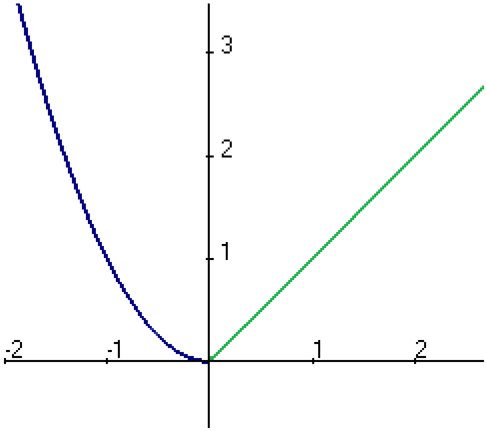
Задача 8. Выяснить тип точки $x_0 = 0$ для $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$.

Решение. Левосторонний предел здесь должен вычисляться с помощью первой ветви функции, а правосторонний с помощью второй. $\lim\limits_{x \to -0} x^2 = 0$. $\lim\limits_{x \to +0} x = 0$. Кроме того, $f(0) = 0^2 = 0$.

Значение функции существует и равно как левостороннему пределу, так и правостороннему. 0 это точка непрерывности.

Ответ. $x_0 = 0$ точка непрерывности.

График этой функции:



Задача 9. Найти точки разрыва и определить их тип для функции:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x^2 - 4}, x \le 1 \\ \dfrac{x-5}{|x-5|}, x > 1 \end{cases}.$$

Решение. Сначала ищем точки, подозрительные на разрыв, то есть где возможен разрыв. Во-первых, это точка стыковки двух ветвей графика, то есть $x = 1$. Там надо предел слева искать с помощью одной функции, а справа - с помощью другой. Кроме того, $x = -2$ и $x = 5$. Точка $x = 2$ не должна рассматриваться, т.к. правее 1 уже действует другая ветвь функции.

Рассмотрим $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{3}{-3}=-1$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x-5}{|x-5|}=\dfrac{-4}{4}=-1$. Кроме того, значение в точке 1 тоже существует и равно $f(1)=\dfrac{3}{1^2-4}=-1$.

Тогда $x=1$ точка непрерывности.

Рассмотрим $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{3x}{(x+2)(x-2)}=\frac{(-6)}{(+0)(-4)}=+\infty.$$

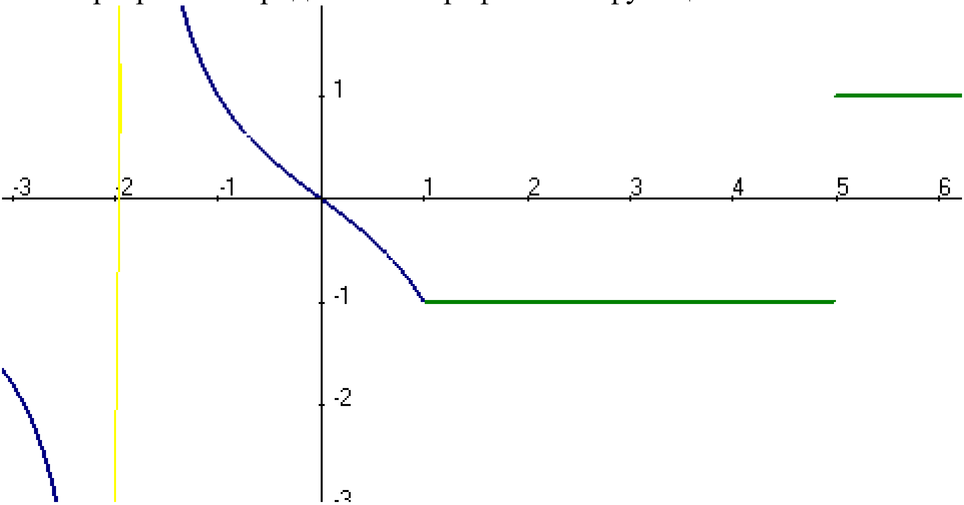
$$\lim_{x\to -2-0}\frac{3x}{(x+2)(x-2)}=\frac{(-6)}{(-0)(-4)}=-\infty.$$

$x=-2$ разрыв 2-го рода.

Рассмотрим $x=5$.

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x-5}{|x-5|}=\lim_{x\to 5+0}\frac{x-5}{x-5}=1,\quad \lim_{x\to 5-0}\frac{x-5}{|x-5|}=\lim_{x\to 5-0}\frac{x-5}{-(x-5)}=-1.$$

$x=5$ разрыв 1-го рода. Вот график этой функции:



На графике синим цветом показана левая ветвь функции, зелёным - правая, жёлтым - асимптота (она там, где разрыв 2 рода).

Ответ. $x=-2$ разрыв 2 рода, $x=1$ точка непрерывности, $x=5$ разрыв 1 рода.

Задача 10 (А,Б). Установить тип точки разрыва $x_0 = 0$ для функций:

А) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Б) $f(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

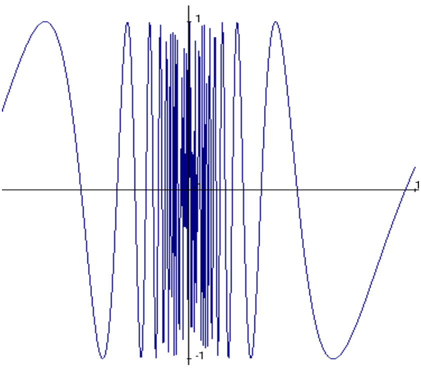
Решение. $\lim\limits_{x\to\pm 0} \sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{y\to\pm\infty} \sin y$, такие пределы не существуют (бесконечное количество колебаний, ордината не устанавливается ни на каком уровне). Разрыв 2 рода.

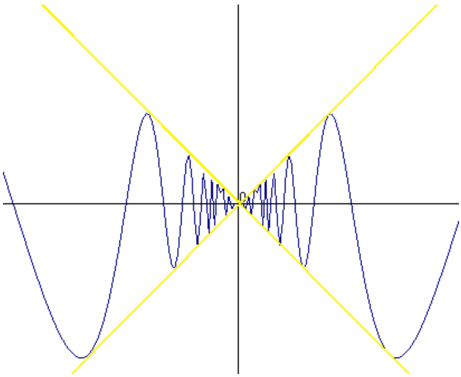
А вот при умножении на x получается, что максимумы также уменьшаются к 0, и тогда пределы существуют.

$\lim\limits_{x\to\pm 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ (произведение бесконечно-малой на ограниченную является бесконечно-малой).

Ответ. А) разрыв 2-го рода. Б) устранимый разрыв.

Графики этих функций $\sin\dfrac{1}{x}$ и $x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ выглядят так:



и


Пункт «Повторные и двойные пределы».

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Возьмём точку $M_0 = (x_0, y_0)$ на плоскости. Можно определить понятие предела функции в данной точке, аналогично тому, как это вводили для обычных функций одной переменной. Число А называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке M_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки M_0, так что если $(x, y) \in U$, то $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ - двойной предел. Но ведь в плоскости можно приблизиться к этой точке с многих направлений. Ситуаций не две, как на числовой оси (там можно приближаться только слева или справа) а бесконечно много.

Если сначала вычислить предел по x (при этом y пока будет служить в роли параметра) а затем по y, то получим: $\lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right)$. А если наоборот, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right)$ Это так называемые «повторные» пределы.

Повторные пределы, как правило, совпадают между собой и равны двойному.

. $x^2 + y^2 \to 2$ в точке (1,1).

Однако, есть примеры, где это не так.

Пример 11. Доказать, что для $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ двойной предел не существует.

Решение. Если сначала устремить $x \to 0$ то $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \right)$ = $\lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{0}{y^2} \right)$ = 0. А если приближаться к точке (0,0) по произвольной прямой $y = kx$, то можно сначала всё свести к одной переменной, и затем устремить $x \to 0$.

Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(kx)}{x^2 + (kx)^2}$ = $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx^2}{(1 + k^2)x^2}$ = $\dfrac{k}{1 + k^2}$. Получается, что результат зависит от того, с какой стороны приближаться к точке (0,0). Это значит, что, двигаясь к началу координат с разных направлений, точка на поверхности стремится к разным высотам, тогда ни в какой малой окрестности не может быть выполнено $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, т.е. предел не существует. Таким свойством обладает винтовая поверхность, состоящая из прямолинейных образующих, у которых направление зависит от высоты. Чтобы понять, представьте себе винтовую лестницу в узкой башне: разные ступеньки отходят от общей вертикальной прямой, но с ростом высоты меняется угол поворота.

Практика 19 Повторение.

Задача 1. (из Домашнего задания) Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+4}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\left(1+\dfrac{3x+4}{5x+2}-1\right)^{\frac{x+2}{x^2-1}} =$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{3x+4}{5x+2}-\frac{5x+2}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{(3x+4)-(5x+2)}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}} =$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2-2x}{5x+2}\right)^{\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\left(\left(1+\frac{2-2x}{5x+2}\right)^{\frac{5x+2}{2-2x}}\right)^{\frac{(2-2x)}{(5x+2)}\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}} =$$

$$\lim_{x\to 1}(e)^{\frac{(2-2x)}{(5x+2)}\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}} = \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{(2-2x)}{(5x+2)}\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}\right) =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(5x+2)(x+1)}\frac{2(1-x)}{(x-1)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(5x+2)(x+1)}\frac{-2}{1}\right) =$$

$$\exp\left(\frac{3}{7\cdot 2}\frac{-2}{1}\right) = e^{-\frac{3}{7}}.$$

Ответ. $e^{-\frac{3}{7}}$.

№ 2. (Из домашнего задания). Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-30x+29}{x^2-50x+49}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-30x+29}{x^2-50x+49} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-29)}{(x-1)(x-49)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-29)}{(x-49)} =$

$\dfrac{1-29}{1-49} = \dfrac{-28}{-48} = \dfrac{7}{12}$. **Ответ.** $\dfrac{7}{12}$.

Повторим ещё с помощью нескольких примеров, приведённых в конце пособия в приложении 1.

№ 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+1}-n)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+6n+1}-n)(\sqrt{n^2+6n+1}+n)}{(\sqrt{n^2+6n+1}+n)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+6n+1-n^2)}{(\sqrt{n^2+6n+1}+n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{(\sqrt{n^2+6n+1}+n)}$ сократим на n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+1}}{n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+6n+1}}{\sqrt{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} =$$

$\dfrac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \dfrac{6}{2} = 3$. **Ответ.** 3.

№ 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-3} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Ответ. -1.

№ 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^3+2x^2+x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^3+2x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x(x^2+2x+1)} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{(x^2+2x+1)} = 1\cdot\dfrac{5}{1} = 5$. **Ответ.** 5.

№ 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}} = \lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{x+1}{2x-2}-1\right)^{\frac{x}{x-3}} =$

$\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{2x-2}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}} = \lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{3-x}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}} =$

$$\lim_{x\to 3}\left(\left(1+\frac{3-x}{2x-2}\right)^{\frac{2x-2}{3-x}}\right)^{\frac{3-x}{2x-2}\frac{x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(3-x)x}{(2x-2)(x-3)}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{-x}{(2x-2)}} = e^{-3/4}.$$

Ответ. $e^{-3/4}$.

Контрольная 45 минут.

9 Предел последовательности

10 Предел функции, с неопределённостью 0/0.

11 Предел функции, 1-й замеч. lim

12 Предел функции, 2-й замеч. lim

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Практика 20 (2 декабря у обеих групп).

Основные правила дифференцирования, таблица производных.

Вводная часть. Таблица производных.

Степенные функции. $(x^a)' = ax^{a-1}$.

В частности, отсюда можно вывести:

1) $\sqrt{x}' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. 2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Действительно,

Пусть $a = 1/2$. Тогда $\left(x^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пусть $a = -1$. Тогда $\left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Показательные. $(a^x)' = a^x \ln a$ в частности, $(e^x)' = e^x$;

Логарифмические. $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x\ln a}$, в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Тригонометрические.

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

Обратные тригонометрические:

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Гиперболический синус и косинус: $(shx)' = chx$ и $(chx)' = shx$

Здесь повтор производных будет не через 4 шага, как для обычных синуса и косинуса, а через 2 шага.

Действительно, $\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Задача 1. С помощью определения доказать, что $(\sin x)' = \cos x$.

Решение. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$ =

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)+\cos(x)\sin(\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} =$$

$$\sin(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}+\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

воспользуемся тригонометрической формулой понижения степени

$2\sin^2\dfrac{a}{2}=1-\cos a$:

$$\sin(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}+\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= -2\sin(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}{\Delta x}+\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= -2\sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 = \cos(x).$$

Ответ. $(\sin x)' = \cos x$.

Задача 2. Вычислить производную от функции $f(x)=\sin^4 x$.

Решение. Здесь композиция функций, внутренняя - синус, внешняя - степенная. $\left(\sin^4 x\right)' = 4\sin^3 x\cdot(\sin x)' = 4\sin^3 x\cdot\cos x$.

Ответ. $4\sin^3 x\cdot\cos x$.

Задача 3. Найти производную от $f(x)=\ln\cos(x^2+4)$.

Решение. Здесь композиция трёх функций. Сначала действует степенная и переводит x в x^2+4, затем вычисляется косинус, а от этого выражения зависит логарифм.

$$\left(\ln\cos(x^2+4)\right)' = \frac{1}{\cos(x^2+4)}\left(\cos(x^2+4)\right)' =$$

$\dfrac{1}{\cos(x^2+4)}(-\sin(x^2+4))\left(x^2+4\right)' = \dfrac{-\sin(x^2+4)}{\cos(x^2+4)}2x$, что можно записать в виде $-2x\cdot tg(x^2+4)$.

Ответ. $-2x\cdot tg(x^2+4)$.

Задача 4. Найти производную функции $f(x)=\sqrt{x}^5$.

Решение. Способ 1. Можно рассматривать как композицию, тогда:

$$\left(\sqrt{x}^5\right)' = 5\sqrt{x}^4\left(\sqrt{x}\right)' = 5x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{3/2}.$$

Способ 2. Можно рассматривать сразу как степенную функцию с дробной степенью, тогда решение такое: $\left(x^{5/2}\right)' = \dfrac{5}{2}x^{3/2}$.

Как мы видим, двумя способами получаем одно и то же.

Ответ. $\dfrac{5}{2}x^{3/2}$.

Задача 5. Найти вторую производную $(tgx)''$.

Решение. Сначала найдём 1-ю производную. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

А теперь есть 2 способа. Во-первых,можно рассматривать как дробь, и вычислять по правилу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{0\cdot\cos^2 x-1\cdot(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{-2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

А во-вторых, можно эту функцию рассматривать в виде $\cos^{-2} x$, то есть композицию $(\cos x)^{-2}$ и тогда:

$$\left((\cos x)^{-2}\right)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = -2(\cos x)^{-3}(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Как мы видим, двумя способами получаем одно и то же.

Ответ. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Задача 6. Найти производную от $f(x) = \ln(x^3) \cdot tg(x)$.

Решение. Здесь произведение, причём в одном из множителей есть композиция.

$$\left(\ln(x^3) \cdot tg(x)\right)' = tg(x)\left(\ln(x^3)\right)' + \ln(x^3)\left(tg(x)\right)' =$$

$$tg(x)\frac{\left(x^3\right)'}{x^3} + \ln(x^3)\frac{1}{\cos^2 x} = tg(x)\frac{3x^2}{x^3} + \frac{\ln(x^3)}{\cos^2 x} = \frac{3tg(x)}{x} + \frac{\ln(x^3)}{\cos^2 x}.$$

Ответ. $\dfrac{3tg(x)}{x} + \dfrac{\ln(x^3)}{\cos^2 x}$.

Задача 7. Найти производную от функции $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\cos(x^2)}$.

Решение. $$\left(\frac{\sin(\sqrt{x})}{\cos(x^2)}\right)' = \frac{\left(\sin(\sqrt{x})\right)'\cos(x^2) - \sin(\sqrt{x})\left(\cos(x^2)\right)'}{\cos^2(x^2)} =$$

$$\frac{\cos(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x^2) - \sin(\sqrt{x})\left(-\sin(x^2)\right)\cdot 2x}{\cos^2(x^2)}.$$ Каких-либо существенных упрощений в этом выражении добиться невозможно. Использовать формулу $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$ тоже нельзя, ведь там коэффициентами при них служат разные функции,у одной корень а у другой $2x$.

Ответ. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})\cos(x^2) + 2x\sin(\sqrt{x})\sin(x^2)}{\cos^2(x^2)}$.

Задача 8. Найти производную от $f(x) = x^x$.

Решение. Здесь нельзя применять формулу степенной функции, ведь в показателе тоже есть переменная. Но нельзя и формулу показательной функции, т.к. в основании тоже есть переменная. Единственным выходом здесь является логарифмирование, чтобы x соатлось только в степени. Основание может быть представлено в виде $x = e^{\ln x}$. Тогда $f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \cdot \ln x}$.

$\left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\left(x \cdot \ln x\right)' = e^{x\cdot\ln x}\left(x \cdot (\ln x)' + x' \cdot \ln x\right) =$

$e^{x\cdot\ln x}\left(x \cdot \dfrac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right)$ а теперь можем заменить обратно $e^{x\cdot\ln x}$ на x^x.

После приведения подобных, получим $x^x\left(1 + \ln x\right)$.

Ответ. $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

Перерыв в середине пары

Задача 9. Найти 1 и 2 производную от $f(x) = \dfrac{x+1}{x+4}$.

Решение. $\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)' = \dfrac{(x+1)'(x+4) - (x+4)'(x+1)}{(x+4)^2} =$

$\dfrac{(x+4) - (x+1)}{(x+4)^2} = \dfrac{3}{(x+4)^2}$, что можно записать в виде $3(x+4)^{-2}$.

Вторая производная: $\left(3(x+4)^{-2}\right)' = -6(x+4)^{-3} = \dfrac{-6}{(x+4)^3}$.

Ответ. $f' = \dfrac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2}$, $f'' = \dfrac{-6}{(x+4)^3}$.

Задача 10. Найти производную вектор-функции $f(x)=\begin{pmatrix}\sin^3(x^2)\\ x^3\end{pmatrix}$.

Решение. Производные двух координатных функций ищем независимо друг от друга.

$$f'(x)=\begin{pmatrix}(\sin^3(x^2))'\\ (x^3)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sin^2(x^2)\cos(x^2)2x\\ 3x^2\end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix}6x\sin^2(x^2)\cos(x^2)\\ 3x^2\end{pmatrix}$.

Задача 11. Найти 1-ю и 2-ю производную для $f(x)=arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найти $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. $$\left(arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{(x)'\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}'}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1-x^2}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Итак, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Следующая, 2-я производная:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\left(1-x^2\right)' =$$

$$-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\left(-2x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}.$$

Вычислим «тестовое» значение при конкретном $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}^{\,3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}^{\,3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}^{\,3}}{1} = \sqrt{2}^{\,2} = 2.$$

Ответ. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$, $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2$.

Задача 12. Найти 1-ю и 2-ю производную для $f=\dfrac{x+3}{x^2+4}$.

Решение. $f'=\left(\dfrac{x+3}{x^2+4}\right)' = \dfrac{(x+3)'(x^2+4)-(x^2+4)'(x+3)}{(x^2+4)^2} =$

$$\frac{(x^2+4)-2x(x+3)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2-6x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-6x-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

2-я производная: $f''=\left(\dfrac{4-6x-x^2}{(x^2+4)^2}\right)' =$

$$= \frac{(4-6x-x^2)'(x^2+4)^2-(4-6x-x^2)\left((x^2+4)^2\right)'}{(x^2+4)^4} =$$

$$= \frac{(-6-2x)(x^2+4)^2-(4-6x-x^2)2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4},$$

сократим по крайней мере на 1 множитель (x^2+4):

$$\frac{(-6-2x)(x^2+4)-(4-6x-x^2)\cdot 4x}{(x^2+4)^3}=$$

$$=\frac{-(2x+6)(x^2+4)-(16x-24x^2-4x^3)}{(x^2+4)^3}=$$

$$=\frac{-(2x^3+6x^2+8x+24)-16x+24x^2+4x^3}{(x^2+4)^3}=\frac{2x^3+18x^2-24x-24}{(x^2+4)^3}.$$

Ответ. $f'=\dfrac{4-6x-x^2}{(x^2+4)^2}$ $\quad f''=\dfrac{2x^3+18x^2-24x-24}{(x^2+4)^3}$

Задача 13. Дана функция $f(x)=4ctg^2x+8\ln(\sin x)$.

Найти $f''(x)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $f'(x)=8ctgx(ctgx)'+8\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=8ctgx\dfrac{-1}{\sin^2 x}+8\dfrac{\cos x}{\sin x}=$

$$-8\frac{ctgx}{\sin^2 x}+8ctgx=8ctgx\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=8ctgx\left(\frac{\sin^2 x-1}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=8ctgx\left(\frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=-8ctg^3x.$$

Максимально возможно привели подобные, чтобы затем было легче считать 2-ю производную.

$$f''(x)=-8\left(ctg^3x\right)'=-8\left(3ctg^2x\right)(ctgx)'=-24ctg^2x\frac{-1}{\sin^2 x}=$$

$$=24\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{\sin^2 x}=24\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}.$$

Вычислим $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$. $24\frac{\cos^2\left(\pi/4\right)}{\sin^4\left(\pi/4\right)} = 24\frac{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^4} = 24\frac{1/2}{1/4} = 48.$

Ответ. $f''(x) = 24\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$. $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 48$.

Задача 14. $f(x) = e^{\sin x}$ найти $f''(x)$, $f''(0)$, $f''(\pi/2)$.

Решение. $f(x) = e^{\sin x}$, $f'(x) = \left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x}\left(\sin x\right)' = e^{\sin x}\cos x$.

$f''(x) = \left(e^{\sin x}\cos x\right)' = \left(e^{\sin x}\right)'\cos x + e^{\sin x}\left(\cos x\right)' =$
$e^{\sin x}\cos x\cos x - e^{\sin x}\sin x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$.

$f''(0) = e^0(1-0) = 1$. $f''(\pi/2) = e^1(0-1) = -e$.

Ответ. $f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$, $f''(0) = 1$, $f''(\pi/2) = -e$.

Домашняя задача (15). Найти 2-ю производную для $f(x) = x^{10}\sin^2 x$.

Решение. 1-я производная: $\left(x^{10}\sin^2 x\right)' = \left(x^{10}\right)'\sin^2 x + x^{10}\left(\sin^2 x\right)' =$
$10x^9\sin^2 x + x^{10}2\sin x\cos x = x^9\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right)$.

2-я производная: $9x^8\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right) + x^9\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right)' =$
$= 9x^8\left(10\sin^2 x + x\sin 2x\right) + x^9\left(20\sin x\cos x + (\sin 2x + 2x\cos 2x)\right) =$
$= x^8\left(90\sin^2 x + 9x\sin 2x\right) + x^9\left(10\sin 2x + \sin 2x + 2x\cos 2x\right) =$
$= x^8\left(90\sin^2 x + 9x\sin 2x\right) + x^8\left(11x\sin 2x + 2x^2\cos 2x\right) =$
$= x^8(90\sin^2 x + 20x\sin 2x + 2x^2\cos 2x)$.

Ответ. $f''(x) = x^8(90\sin^2 x + 20x\sin 2x + 2x^2\cos 2x)$.

Практика 21

Тема «Частные производные, градиент».

Задача 1. Дана функция $u = 3xy + xy^2$. Найти координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1)$.

Решение. Найдём две частных производных.

$$\left(3xy + xy^2\right)'_x = 3y + y^2, \quad \left(3xy + xy^2\right)'_y = 3x + 2xy.$$

Градиент в произвольной точке: $\nabla u(x,y) = \left(3y + y^2, 3x + 2xy\right)$.

Градиент в точке $M_0(1,1)$: $\nabla u(1,1) = \left(4,5\right)$.

Ответ. $\nabla u(1,1) = \left(4,5\right)$.

Задача 2. Дана функция $u(x,y,z) = xy + xz - z^2$.

Найти $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1,1,1)$.

Решение. Найдём все 3 частных производных.

$$\left(xy + xz - z^2\right)'_x = y + z - 0.$$

$$\left(xy + xz - z^2\right)'_y = x + 0 - 0.$$

$$\left(xy + xz - z^2\right)'_z = 0 + x - 2z.$$

Итак, градиент это вектор $\left(y + z, x, x - 2z\right)$.

В точке $(1,1,1)$ он равен $(2,1,-1)$.

Ответ. $(2,1,-1)$.

Алгоритм вычисления производной по направлению можно условно разделить на 4 шага:

1) Найти градиент в произвольной точке,
2) Найти гралиент в конкретной точке,
3) Нормировать вектор, задающий направление,
4) Скалярно умножить градиент в точке на этот нормированный вектор.

Задача 3. Дана функция $u(x,y,z) = xy + xz - z^2$. Найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,1,-1)$, б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (-1, 2, 2)$.

Решение. Найдём все 3 частных производных.

$$\left(xy + xz - z^2\right)_x' = y + z - 0.$$

$$\left(xy + xz - z^2\right)_y' = x + 0 - 0.$$

$$\left(xy + xz - z^2\right)_z' = 0 + x - 2z.$$

1) Градиент в произвольной точке: $\left(y + z, x, x - 2z\right)$.

2) Градиент в точке $M_0(2,1,-1)$: $\left(0,2,4\right)$.

3) Нормируем вектор $\mathbf{a} = (-1, 2, 2)$. Его длина $\sqrt{1+4+4} = 3$.

Нормированный вектор $\mathbf{a} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

4) Скалярно умножим его на градиент в точке, т.е. $\left(0,2,4\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \left(\nabla u, a\right) = 0 + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Ответ. $\nabla u(2,1,-1) = \left(0,2,4\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial a} = 4.$

Замечание. Пункты 3 и 4 перестановочны, то есть поделить на длину вектора можно уже тогда, когда скалярно умножили.

Задача 4. Дана функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(1, -2, 2)$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a} = (8, -4, 1)$.

Решение. Частные производные:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)_x' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$ Аналогично

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)_z' = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Присвоим конкретные значения x, y, z и получим градиент в точке.

Учитывая, что $\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$,получится:

$$\nabla u(1,-2,2)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Нормируем вектор $\mathbf{a}=(8,-4,1)$. Его длина $\sqrt{64+16+1}=\sqrt{81}=9$.

Итак, надо рассматривать такой вектор: $\mathbf{a}=\left(\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)$.

Теперь скалярно умножим его на градиент.

$$\frac{8}{9}\frac{1}{3}+\left(-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{9}\frac{2}{3}=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{2}{27}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}.$$

Ответ. $\nabla u(1,-2,2)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{2}{3}$.

Задача 5. Дана функция $u=x^2+3xy$. Найти:

а) координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(2,-2)$;

б) $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a}=(3,1)$.

Решение. Ищем частные производные.

$$\left(x^2+3xy\right)_x'=2x+3y, \qquad \left(x^2+3xy\right)_y'=3x.$$

Итак, градиент $\left(2x+3y,3x\right)$. При $x=2, y=-2$ получаем вектор $\left(-2,6\right)$. Нормируем вектор $\mathbf{a}=(3,1)$. Его длина $\sqrt{10}$. Новый вектор $\mathbf{a}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Скалярно умножаем его на $\left(-2,6\right)$:

$$-2\frac{3}{\sqrt{10}}+6\frac{1}{\sqrt{10}}=0.$$

Ответ. $\nabla u(2,-2)=\left(-2,6\right)$, $\frac{\partial u}{\partial a}=0$.

Задача 6. Найти градиент функции $U=x^3y+xy^4$ в точке (2,2) и производную по направлению а = (3,4).

Решение. $\left(x^3y + xy^4\right)_x' = 3x^2y + y^4$, $\left(x^3y + xy^4\right)_y' = x^3 + 4xy^3$.

Градиент в произвольной точке: $\left(3x^2y + y^4, x^3 + 4xy^3\right)$.

Градиент в точке (2,2) равен $(40,72)$.

Нормируя вектор (3,4) получаем $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Скалярно умножаем $(40,72)$ и $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. $\frac{120}{5} + \frac{288}{5} = \frac{408}{5} = 81{,}6$.

Ответ. Градиент $\nabla u(2,2) = (40,72)$, $\frac{\partial u}{\partial a} = 81{,}6$.

Задача 7. Найти градиент функции $f = x^4y$ в точке (1,1) и производную по направлению (1,3).

Решение. $\left(x^4y\right)_x' = 4x^3y$, $\left(x^4y\right)_y' = x^4$.

Градиент в произвольной точке: $\nabla f(x,y) = (4x^3y, x^4)$

Градиент в конкретной точке: $\nabla f(1,1) = (4,1)$

Нормируем вектор (1,3). $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Скалярно умножим $(4,1)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. $\frac{4}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

Ответ. $\nabla f(1,1) = (4,1)$, $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

Тема «Уравнение касательной».

Задача 8. Найти уравнение касательной к кривой $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Значение в точке: $f(2) = y_0 = 16 + 12 + 2 = 30$.

Производная: $f'(x) = 6x^2 + 6x$.

Производная в точке: $f'(2) = 24 + 12 = 36$.

Уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ принимает вид $y - 30 = 36(x - 2)$, что преобразуется к виду $y = 36x - 42$.

Ответ. $y = 36x - 42$.

Задача 9. Найти касательную к графику $y = x^2$ в точке с абсциссой 2 и расстояние от этой прямой до начала координат.

Решение. $y_0 = 4$, $f'(x) = 2x$, $f'(2) = 4$.

Подставим эту информацию в уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Получается $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 4$.

Надо применить формулу расстояния от точки до прямой в плоскости:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

для этого сначала преобразуем к неявному виду: $4x - y - 4 = 0$.

Тогда видно, что $A = 4, B = -1, C = -4$. $(x_1, y_1) = (0,0)$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Ответ. Касательная $y = 4x - 4$, расстояние $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Задача 10. Найти касательную к графику $y = 3x^3 + 4x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $f(1) = 7$, $f'(x) = 9x^2 + 8x$, $f'(1) = 17$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = 17(x - 1) \Rightarrow y - 7 = 17x - 17 \Rightarrow$
$y = 17x - 10$.

Ответ. Уравнение касательной $y = 17x - 10$.

Задача 11. Найти касательную к графику функции $f(x) = \cos x + \ln(x + 1)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. $y_0 = f(0) = \cos 0 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$.

$f'(x) = -\sin x + \frac{1}{x + 1}$. $f'(0) = -\sin 0 + \frac{1}{0 + 1} = 1$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 1 = 1(x - 0) \;\Rightarrow\; y = x + 1.$

Ответ. Уравнение касательной $y = x + 1$.

Задача 12. Найти касательную к графику функции $f(x) = arctg(x)$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $y_0 = arctg(1) = \dfrac{\pi}{4}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Тогда уравнение: $y - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}(x - 1)$ что сводится к виду

$y = \dfrac{1}{2}x + \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ. $y = \dfrac{1}{2}x + \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$.

<u>Практика 22</u>

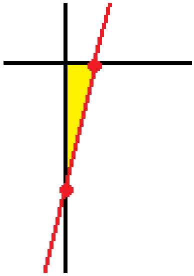
Задача 1. Найти уравнение касательной к графику $y = 2x^3 + 3x^2 + 3$ в точке $x_0 = 1$ и площадь треугольника, который она отсекает от одной из координатных четвертей.

Решение. $f(1) = 8$, $f'(x) = 6x^2 + 6x$, $f'(1) = 12$.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 8 = 12(x - 1) \;\Rightarrow\; y = 12x - 4$.

Выясним, треугольник и в какой четверти она отсекает. Для этого найдём точки пересечения с координатными осями.

$x = 0 \Rightarrow y = -4$, $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$. Точки $(0,-4)$ и $\left(\dfrac{1}{3},0\right)$. Треугольник в 4-й четверти. Схематично покажем, где и как он расположен:



Его площадь это 0,5 от площади достроенного прямоугольника, а она была бы равна $\frac{4}{3}$. Поэтому ответ $\frac{2}{3}$.

Ответ. Касательная $y=12x-4$, площадь треугольника $\frac{2}{3}$.

Задача 2. На графике функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ взята точка A. Касательная к графику в точке A наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен -4. Найти точку A.

Решение. «Касательная наклонена под углом, тангенс которого -4» это значит, что производная в той точке равна -4. Вообще говоря, уравнение касательной здесь в полном виде и не понадобится. Надо узнать, в какой точке производная функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ равна -4.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}^3}.$$

Решим уравнение $-\frac{1}{2\sqrt{x}^3}=-4 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x}^3=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}^3=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow$ $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{4}$. А тогда уже легко вычисляется и значение функции, и находится точка. $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{1/4}}=\frac{1}{1/2}=2.$

Ответ. Точка $\left(\frac{1}{4},2\right)$.

Задача 3. Найти точки на графике $y = x^2 + 4$, такие, что касательная, проведённая в них, проходит через начало координат.

Решение. Необходимо, чтобы в уравнении касательной не было константы, тогда касательная будет содержать начало координат. Пусть такая точка имеет абсциссу c. Тогда $y_0 = c^2 + 4$, $f'(c) = 2c$. Уравнение касательной $y - (c^2 + 4) = 2c(x - c)$. Преобразуем его. $y - c^2 - 4 = 2cx - 2c^2 \Rightarrow y = 2cx - c^2 + 4$. Чтобы не было константы, должно быть $c^2 = 4$, т.е. $c = 2$ или $c = -2$. Высота графика при обоих этих значениях одинакова, и равна 8. Тогда точки: $(-2,8)$ и $(2,8)$.

Ответ. $(-2,8)$ и $(2,8)$.

Задача 4. Найти уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 7x$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. $f(2) = 4 + 14 = 18$, $f'(x) = 2x + 7$ $f'(2) = 4 + 7 = 11$.
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, тогда $y - 18 = 11(x - 2)$, $y = 11x - 4$.

Ответ. $y = 11x - 4$.

Задача 5 . Найти касательную плоскость к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке (1,1,2).

Решение. Уравнение касательной плоскости, которые доказали в лекциях, имеет вид:
$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$.

Запишем уравнение поверхности в неявной форме $x^2 + y^2 - z = 0$, чтобы можно было искать градиент. $\nabla F = (2x, 2y, -1)$.
$\nabla F(1,1,2) = (2,2,-1)$. Тогда уравнение касательной плоскости:
$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$, приведём подобные:
$2x - 2 + 2y - 2 - z + 2 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2x + 2y - 2$.

Ответ. $z = 2x + 2y - 2$.

Задача 5а (домашняя) . Найти касательную плоскость к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке (1,2,5). **Ответ.** $z = 2x + 4y - 5$.

Задача 6 . Найти касательную к неявно заданной кривой $x^2 y^3 + x^4 y - 2 = 0$ в точке $M_0(1,1)$.

Решение. Уравнение касательной для этого случая имеет вид: $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) = 0$. Выражать $y(x)$ в явном виде и не требуется.

Во-первых, проверим, что точка на самом деле принадлежит этой кривой. Подставим 1,1 и проверим тождество. Оно выполняется.

Найдём частные производные:

$$\left(x^2 y^3 + x^4 y - 2\right)'_x = 2xy^3 + 4x^3 y$$

$$\left(x^2 y^3 + x^4 y - 2\right)'_y = 3x^2 y^2 + x^4$$

Тогда $F'_x(1,1) = 6,\quad F'_y(1,1) = 4$.

Уравнение касательной: $6(x-1) + 4(y-1) = 0$, сводится к виду

$$6x + 4y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x.$$

Ответ. $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$.

Тема «Формула Тейлора».

Задача 7. Вывести формулу Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдём производные и их значения в нуле, до тех пор, пока они не начнут повторяться:

$f(x) = \sin(x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin(x)$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos(x)$	$f'''(0) = -1$
...	...

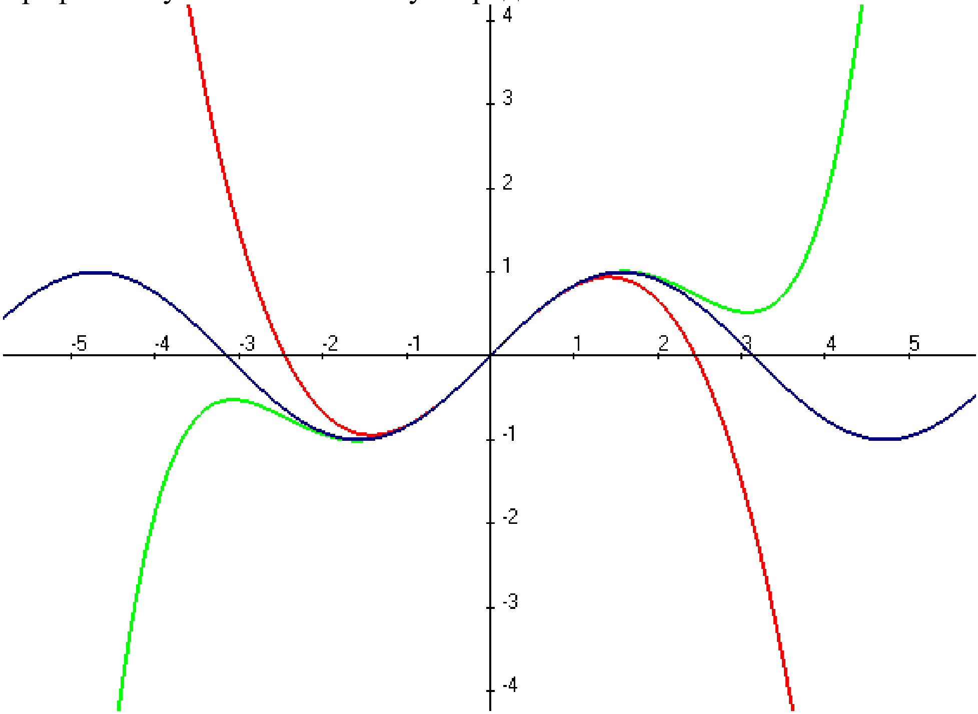
Как и для косинуса, здесь 4 производная совпадает с $f(x)$ и повторение через каждые 4 шага. Подставим эти константы в формулу

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Получаем $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\ldots$

Ответ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\ldots$

График синуса и частичных сумм ряда:



Синим цветом показан $\sin x$, красным кубическая парабола $x - \frac{x^3}{6}$,

а зелёным ещё более точное приближение $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Задача 8. Вывести формулу Тейлора для $f(x)=\ln(x+1)$ в точке $x_0=0$.

Решение. Найдём производные:

$f(x)=\ln(x+1)$	$f(0)=0$
$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$	$f'(0)=1$
$f''(x)=(-1)(x+1)^{-2}$	$f''(0)=-1$
$f'''(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3}$	$f'''(0)=(-1)(-2)=(-1)^2 2!$
$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$	$f^{(4)}(x)=(-1)^3 3!$
...	...

Подставим эти коэффициенты в формулу. Получим

$$f(x)=0+x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{(-1)^2 2!}{3!}x^3+\frac{(-1)^3 3!}{4!}x^4+...$$

В числителе тоже факториалы, но с небольшим отставанием, на одно число. Поэтому почти все множители из этих факториалов (кроме последнего) сокращаются, например $\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{1}{4}$. А элемент $(-1)^n$ это просто либо $+1$ либо -1 при чётной и нечётной степени соответственно.

Ответ. $\ln(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...$

Задача 9. Вывести формулу Тейлора для $f(x)=(x+1)^a$ в точке $x_0=0$.

Решение. Запишем производные.

$f(x)=(x+1)^a$	$f(0)=1$
$f'(x)=a(x+1)^{a-1}$	$f'(0)=a$
$f''(x)=a(a-1)(x+1)^{a-2}$	$f''(0)=a(a-1)$
$f'''(x)=a(a-1)(a-2)(x+1)^{a-3}$	$f'''(0)=a(a-1)(a-2)$
	...

Подставим эти коэффициенты в формулу. Получим

$$(x+1)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$$

Ответ. $(x+1)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$

Серия задач, где разложение получается с помощью геометрической прогрессии.

Задача 10. Разложить в степенной ряд $\frac{1}{1+x}$ в окрестности $x_0=0$.

Решение. Представим $x=-(-x)$, и тогда знаменатель прогрессии будет $q=-x$. Эта функция представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии, записанную в свёрнутом виде, т.е. мы по формуле должны развернуть её обратно в сумму.

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n .$$

Ответ. $1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

Задача 11. Разложить в степенной ряд $\frac{1}{5-x}$ в окрестности $x_0=0$.

Решение. Здесь константа не равна 1, тогда можно вынести константу за скобки, и тогда получится $q=\frac{x}{5}$. Мы можем пользоваться этой формулой при условии, что $\frac{|x|}{5}<1$, то есть $x\in(-5{,}5)$.

Итак, $\frac{1}{5-x}=\frac{1}{5\left(1-\frac{x}{5}\right)}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=\frac{1}{5}+\frac{x}{5^2}+\frac{x^2}{5^3}+\ldots$

Ответ. $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=\frac{1}{5}+\frac{x}{5^2}+\frac{x^2}{5^3}+\ldots$

Задача 12. Разложить в степенной ряд $\frac{1}{5-x}$ в окрестности $x_0=1$.

Решение. Здесь разложение в окрестности другой точки, а не 0, в этом случае надо изначально сделать арифметическое преобразование, чтобы отделить слагаемое вида $(x-1)$.

$$\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4-(x-1)}$$

Затем вынесем за скобку констенту 4, чтобы в знаменателе выражение начиналось с 1, т.е. чтобы присутствовала структура типа $\frac{1}{1-q}$. Итак, $\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4-(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x-1}{4}}$.

А уже после этого, в качестве знаменателя прогрессии получается $q=\frac{x-1}{4}$ и тогда, при условии, что $\frac{|x-1|}{4}<1$, получим $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$.

Это верно в такой области: $|x-1|<4$, т.е. $x\in(-3{,}5)$.

Ответ. $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$.

Приложения формулы Тейлора.

Нахождение производных высокого порядка. Допустим, нужно вычислить производную 10 порядка в точке 0 для функции, содержащей произведение, например $x^3\sin x$. Если просто считать производные до 10 порядка, и лишь затем фиксировать число, то на каждом шаге по формуле $(uv)'=u'v+v'u$ происходит удвоение количества слагаемых. Таким образом, их будет до 1024. Некоторые из них обнуляются в процессе, так как понижается степень, так что в реальности меньше, но всё равно, это очень трудоёмкая работа, вычислить 10 производную для такого типа функции. Вместо этого, мы можем выбрать коэффициент при 10 степени из разложения в ряд Тейлора.

Задача 13. Найти $f^{(10)}(0)$ для функции $x^3 \sin x$.

Решение. $x^3 \sin x = x^3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots\right) =$

$x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \frac{x^{12}}{9!} \ldots$

Итак, коэффициент при 10-й степени равен $-\frac{1}{7!}$. Теоретически же этот коэффициент должен быть $\frac{f^{(10)}(0)}{10!}$. Приравняем эти значения.

$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = -\frac{1}{7!}$, тогда $f^{(10)}(0) = -\frac{10!}{7!} = -8 \cdot 9 \cdot 10 = -720$.

Ответ. -720.

<u>Практика 23 (16 декабря у обеих групп).</u>

Экстремумы.

Задача 1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x + 1$.

Решение. Найдём производную. $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18$.

Ищем корни этого многочлена. $3(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1,\ x = \frac{5 \pm 1}{2}$, корни 2 и 3.

Для определения интервалов монотонности надо найти знак производной на интервалах $(-\infty,2)$, $(2,3)$ и $(3,+\infty)$. Знак производной может меняться только в точках 2 и 3, на интервалах он остаётся неизменным. Надо выбрать какую-нибудь наиболее удобную для вычислений точку на интервале, желательно с целой абсциссой.

1) $0 \in (-\infty,2)$, $f'(0) = 18 > 0$, на этом интервале монотонный рост.

2) $\frac{5}{2} \in (2,3)$ здесь очевидно, целое выбрать не получится.

$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3\frac{25}{4} - 15\frac{5}{2} + 18 \;=\; \frac{75}{4} - \frac{75}{2} + 18 \;=\; 18 - \frac{75}{4} \;=\; \frac{72}{4} - \frac{75}{4} < 0$, на этом интервале монотонное убывание.

3) $4 \in (3,+\infty)$, $f'(4) = 3 \cdot 16 - 15 \cdot 4 + 18 \;=\; 48 - 60 + 18 \;=\; 6 > 0$, здесь монотонный рост.

В точке 2 рост сменяется убыванием, это максимум.

В точке 3 убывание сменяется остом, это минимум.

Кстати, тип экстремума можно найти и с помощью 2 производной:

Выясним знак 2-й производной в этих точках. $f''(x) = 6x - 15$.

$f''(2) = 12 - 15 = -3 < 0 \Rightarrow x = 2$ максимум.

$f(2) = 8 - 30 + 36 + 1 = 15$.

$f''(3) = 18 - 15 = 3 > 0 \Rightarrow x = 3$ минимум.

$f(3) = 27 - \frac{15}{2}9 + 54 + 1 = 82 - 67{,}5 = 14{,}5$.

Ответ. $(-\infty,2)$ возрастание, $(2,3)$ убывание, $(3,+\infty)$ возрастание. $x = 2$ максимум, $x = 3$ минимум.

Задача 2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 9x^2$ и разность между ординатами максимума и минимума.

Решение. Производная: $f'(x) = 3x^2 - 18x = 3(x^2 - 6x) = 3x(x-6)$.

Стационарные точки (где производная = 0) $x = 0$ и $x = 6$.

Чтобы определить, где максимум, а где минимум, выясним знак 2-й производной в этих же точках. $f'(x) = 3x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 6x - 18$.

$f''(0) = -18 < 0$, точка $x = 0$ максимум.

$f''(6) = 36 - 18 = 18 > 0$ точка $x = 6$ минимум.

$f(0) = 0$, $f(6) = 36 \cdot 6 - 9 \cdot 36 = -3 \cdot 36 = -108$.

Ответ. $x = 0$ максимум, $x = 6$ минимум. Разность ординат 108.

Задача 3. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Решение. $f'(x) = \dfrac{(x^2-x+1)'(x^2+x+1)-(x^2+x+1)'(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$$\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$\frac{(2x^3+x^2+x-1)-(2x^3-x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}.$$

От знаменателя знак не зависит, знаменатель тут всегда строго больше 0. Поэтому всё зависит только от знака числителя.
Выделим множитель, который может менять свой знак:

$f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+x+1)^2}(x^2-1)$. Корни $1,-1$.

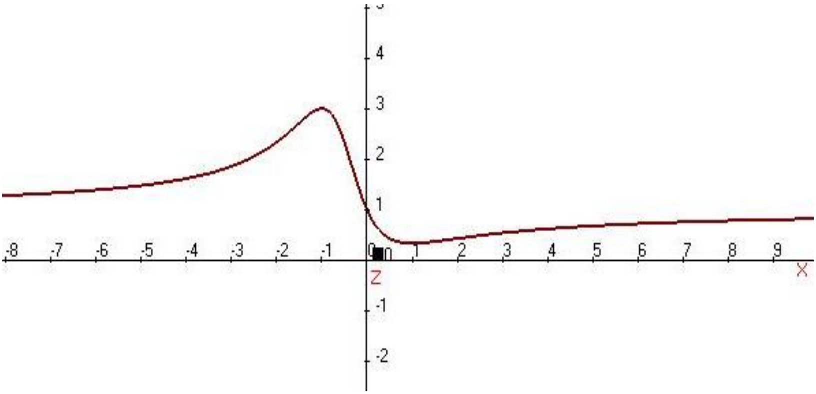
На интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$: $f'(x) > 0$, рост.

На интервале $(-1,1)$: $f'(x) < 0$ убывание.

В точке $x = -1$ рост сменяется убыванием, это максимум.
В точке $x = 1$ убывание сменяется ростом, это минимум.
Кстати, в этом примере с помощью интервалов узнать экстремумы проще, чем с помощью 2-й производной, ведь пришлось бы считать поизводную от дроби $\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$.

Для построения графика можем найти высоту в точках максимума и минимума: $f(-1) = \dfrac{1-(-1)+1}{1-1+1} = 3$, $f(1) = \dfrac{1-1+1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3}$.

Вот как выглядит график:



Ответ. $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$ рост, $(-1,1)$ убывание.
$x=-1$ максимум, $x=1$ минимум.

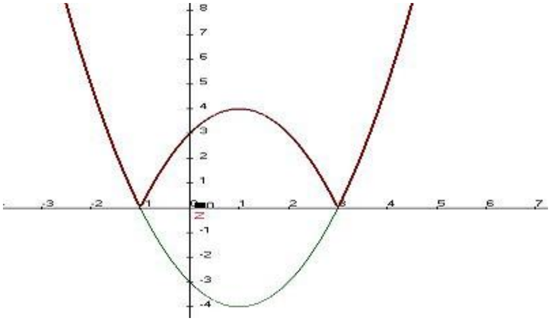
Задача 4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$.

Решение. Сначала найдём корни выражения под знаком модуля, чтобы понять, какая часть параболы отражается вверх.

$x^2-2x-3=0$, $D=4-4(-3)=16$, $x=\dfrac{2\pm 4}{2}$, корни -1 и 3.

Тогда знак меняется на интервале $(-1,3)$, то есть функцию можно записать в виде: $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & x\notin(-1,3) \\ -x^2+2x+3 & x\in(-1,3) \end{cases}$.

График:



Производная: $f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x\notin(-1,3) \\ -2x+2 & x\in(-1,3) \end{cases}$.

Производная разрывна при $x = -1, x = 3$ и обращается в 0 при $x = 1$. Выбирая целочисленную точку на каждом интервале, найдём знак производной на этом интервале.

$f'(-2) = -6 < 0$ убывание на $(-\infty, -1)$.

$f'(0) = 2 > 0$ рост на $(-1, 1)$.

$f'(2) = -2 < 0$ убывание на $(1, 3)$.

$f'(4) = 6 > 0$ рост на $(3, \infty)$.

Таким образом, $x = -1, x = 3$ точки минимума, $x = 1$ максимум.

Ответ. $(-\infty, -1)$ и $(1, 3)$ убывание, $(-1, 1)$ и $(3, \infty)$ рост, $x = -1, x = 3$ минимумы, $x = 1$ максимум.

Наибольшее и наименьшее значение на отрезке.

Задача 5. Дана функция $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$. Найти её наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-4, -1]$.

Решение. Сначала найдём производную и точки экстремума.

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -x - \frac{8}{x^2}.$$

$$-x - \frac{8}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{x^2} = -x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Точка $-2 \in [-4, -1]$. Чтобы узнать, максимум это или минимум, найдём 2-ю производную.

$$f''(x) = (-x - 8x^{-2})' = -1 - 8(-2)x^{-3} = -1 + \frac{16}{x^3}.$$

$$f''(-2) = -1 + \frac{16}{-8} = -3 < 0$$ поэтому в этой точке максимум.

Других экстремумов на данном отрезке нет. Производная и сама функция не существуют при $x = 0$, однако эта точка в рассматриваемый отрезок не входит. Теперь остаётся сравнить значения в точке экстремума и на концах отрезка.

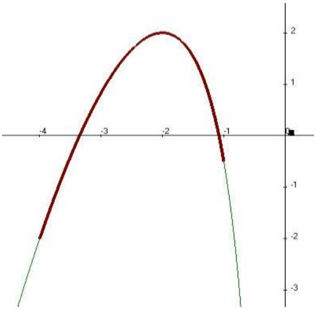
$$f(-4) = -\frac{16}{2} + \frac{8}{-4} + 8 = -8 - 2 + 8 = -2.$$

$$f(-2) = -\frac{4}{2} + \frac{8}{-2} + 8 = -2 - 4 + 8 = 2$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{-1} + 8 = -\frac{1}{2} - 8 + 8 = -\frac{1}{2}.$$

Наибольшее значение $f(-2) = 2$, наименьшее $f(-4) = -2$.

График:



Ответ. Наибольшее $f(-2) = 2$, наименьшее $f(-4) = -2$.

Задача 6. Дана функция $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^2}$. Найти её наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-4,3]$.

Решение. $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4(4+x^2) - 2x \cdot 4x}{(4+x^2)^2} = \dfrac{16 - 4x^2}{(4+x^2)^2} =$

$\dfrac{4}{(4+x^2)^2}(4 - x^2)$ вынесли множитель, который меняет знак, отдельно. Первый множитель здесь всегда больше нуля.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$, то есть $x = \pm 2$.

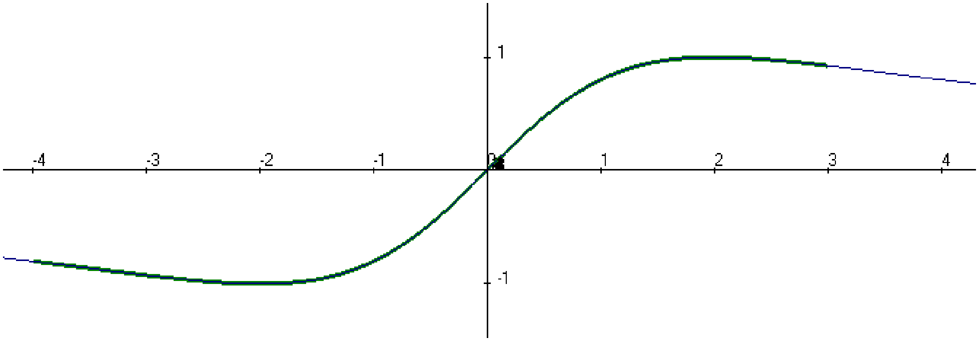
При $x \in (-2,2)$ производная положительна, там рост функции.

Вне этого интервала $4 - x^2 < 0$, убывание функции.

В точке $x = -2$ убывание сменяется ростом, это минимум.

В точке $x = 2$ рост сменяется убыванием, это максимум.

График:



Осталось сравнить значения в точках экстремума и на концах отрезка.

$$f(-4)=\frac{-16}{4+16}=-\frac{4}{5}, \qquad f(-2)=\frac{-8}{4+4}=-1,$$

$$f(2)=\frac{8}{4+4}=1, \qquad f(3)=\frac{12}{4+9}=\frac{12}{13}.$$

Ответ. Наименьшее: $f(-2)=-1$, наибольшее: $f(2)=1$.

Задача 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^2-3x+2$ на отрезке [0,5].

Решение. Сначала найдём экстремумы во внутренних точках.

$f'(x)=2x-3$, $f'=0$ только при $x=\dfrac{3}{2}$. При этом $f''=2>0$, то есть там минимум. Осталось найти все значения функции в точках экстремума и в двух граничных точках и сравнить их:

$$f(0)=2, \quad f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}, \quad f(5)=12.$$

Ответ. Наибольшее $f(5)=12$, наименьшее $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Задача 8. Найти экстремум функции 2 переменных: $f(x,y)=x^2-2x+y^2-6y+10$.

Решение. Найдём точку, в которой обе частные производные $f'_x=2x-2$, $f'_y=2y-6$ обращаются в 0.

Получим $x=1, y=3$. Составим матрицу из вторых производных.

$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ она соответствует положительно-определённой квадратичной форме $Q = 2x^2 + 2y^2 \geq 0$. Проще говоря, в каждом из двух перпендикулярных сечений поверхности такая кривая, что 2-я производная больше нуля, то есть по каждому сечению минимум.

Тогда точка (1,3) минимум для поверхности.

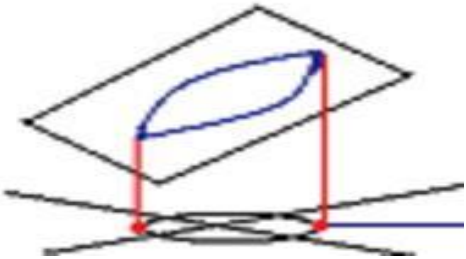
Замечание. Можно было выделить полный квадрат по каждой переменной и сразу получить $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$ тогда было бы видно, что в любой точке значение больше нуля, а в то же время $f(1,3) = 0$.

Ответ. Точка (1,3) минимум.

Условные экстремумы.

Задача 9. Дана функция $f(x, y) = x + y + 2$. Найти условные экстремумы этой функции на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Условие имеет вид $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Наклонная плоскость $z = x + y + 2$ наклонена в сторону биссектрисы первой четверти. Окружность под плоскостью проецируется наверх, и там получается эллипс, и видно, что у него есть точки максимальной и минимальной высоты.



Теперь найдём их подробно, аналитическим путём. Надо функцию двух переменных свести к функции одной переменной с помощью условия, и затем искать экстремум для неё уже обычным образом. Для точки на окружности, можно задать x,y так: $x = \cos(t), y = \sin(t)$.

Тогда вместо $f(x, y)$ можно получить в итоге $f(x(t), y(t)) = f(t)$.

$f(x,y)=x+y+2 = \cos t+\sin t+2= f(t)$.

$f'(t)=-\sin t+\cos t$. $f'(t)=0$ при $\sin t=\cos t$, то есть $t=\dfrac{\pi}{4}$ и $t=\dfrac{5\pi}{4}$.

$f''(t)=-\cos t-\sin t$. Тогда $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$, там условный максимум.

$f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)>0$, там условный минимум.

Переведём t обратно в декартовы координаты x,y.

$t=\dfrac{\pi}{4}$ соответствует $x=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

итак, при $t=\dfrac{\pi}{4}$ получим $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $t=\dfrac{5\pi}{4}$ получим $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Кстати, на чертеже они тоже хорошо видны, в 1-й четверти условный максимум, в 3-й четверти условный минимум. Высота в точках условного максимума и минимума легко вычисляется, если подставить в функцию.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+2 = \frac{2}{\sqrt{2}}+2=2+\sqrt{2}.$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}+2=2-\sqrt{2}.$$

Замечание. Не всегда обязательно выражать переменные через t, просто здесь для окружности так было удобнее. Если в другой задаче кривая - парабола, то можно например все y заменить на x^2, и тоже $f(x,y)$ сведётся к одной переменной, а именно $f(x,x^2)$.

Ответ. Точка $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условный максимум, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условный минимум.

Практика 24.

Задача 1. Найти условный экстремум функции $f(x,y) = x + y$ при условии, что $y = x^2$.

Решение. Поверхность $z = x + y$ это наклонная плоскость. Ни одна точка на ней не является точкой экстремума, ведь в её окрестности есть другие точки как выше, так и ниже. Однако если сузить область определения, то есть рассматривать не всю плоскость, а только параболу, над параболой есть точка минимальной высоты.

Подставим условие $y = x^2$ в функцию $f(x,y) = x + y$.

$f(x, y(x)) = f(x, x^2) = x + x^2$, свели к функции одной переменной, и для неё уже ищем обычный экстремум.

$$(x + x^2)' = 1 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}.$$

$(x + x^2)'' = 2 > 0$, т.е. минимум.

Значение функции в этой точке: $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

Ответ. Точка $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ условный минимум.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y) = x - y^2$ в области $[-1,1]\times[-1,1]$.

Решение. Сначала найдём экстремумы во внутренних точках, а затем условные экстремумы на границах квадрата, после этого сравним все значения в получившихся точках, а также в 4 углах квадрата.

$\nabla f = (1, -2y^2)$ никогда не обращается в (0,0) из-за первой координаты. Экстремумов во внутренних точках нет. Теперь ищем условные экстремумы на границах квадрата.

$x = -1$. $f(-1, y) = -1 - y^2$, $f'_y = -2y$, экстремум при $y = 0$, то есть в точке $(-1,0)$, это условный максимум, т.к. $f''_{yy} = -2 < 0$.

$x = 1$. $f(1, y) = 1 - y^2$, $f'_y = -2y$, экстремум при $y = 0$, то есть в точке $(1,0)$, это условный максимум, т.к. $f''_{yy} = -2 < 0$.

$y=-1$. $\quad f(x,-1)=x-1, \quad f'_x=1$, экстремумов нет.

$y=1$. $\quad f(x,1)=x-1, \quad f'_x=1$, экстремумов нет.

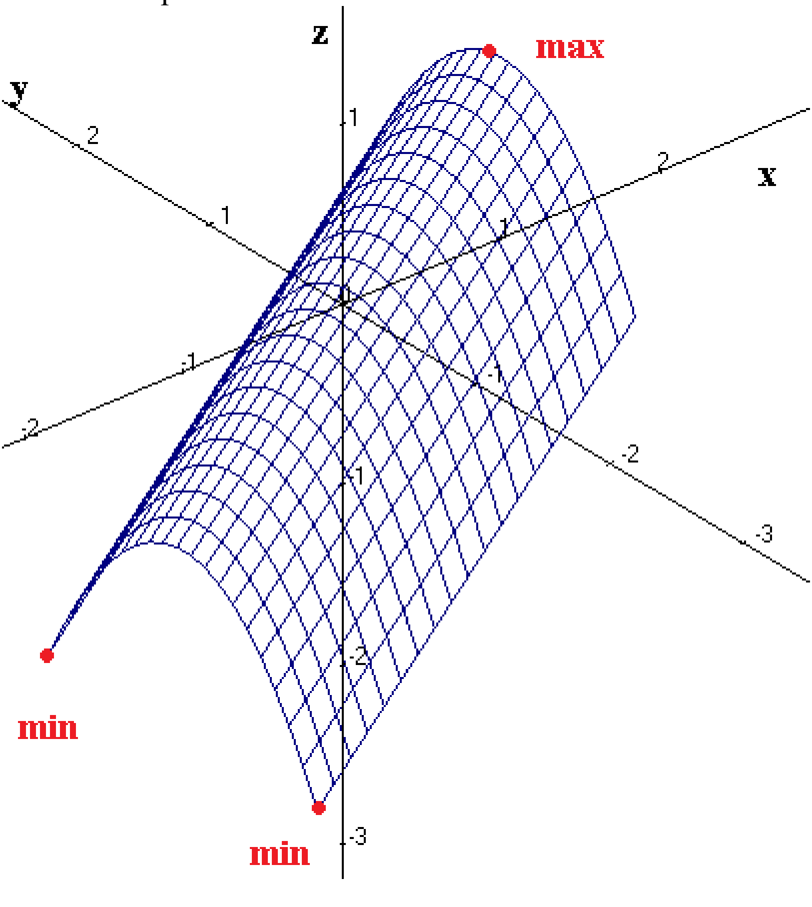
Итак, осталось проверить значение функции в точках условного экстремума на границах $(-1,0)$, $(1,0)$ и в 4 угловых точках квадрата: $(-1,-1),(1,1),(1,-1),(-1,1)$.

$f(-1,0)=-1 \qquad f(1,0)=1 \qquad f(-1,-1)=-1-1=-2 \qquad f(1,1)=1-1=0$

$f(1,-1)=1-1=0 \qquad f(-1,1)=-1-1=-2$

Наименьшее значение -2, наибольшее 1.

Чертёж этой поверхности:



Ответ. Наименьшее $f(-1,1)=f(-1,-1)=-2$ наибольшее $f(1,0)=1$.

Задача 3. Найти отношение высоты к радиусу основания цилиндра, такое, что при фиксированном объёме получалась наименьшая площадь поверхности.

Решение. Это задача на условный экстремум. Формула объёма цилиндра $V(h,R)=\pi R^2 h$. Полная площадь поверхности это сумма площади боковой поверхности и площадей 2 кругов, то есть верхней и нижней грани цилиндра. Она вычисляется по формуле:

$$S(h,R)=(2\pi R)h+2(\pi R^2) = 2\pi R(h+R).$$

Требуется, чтобы эта площадь была наименьшей. Пусть объём фиксирован и составляет 1 единицу, $\pi R^2 h=1$. Тогда $h=\frac{1}{\pi R^2}$. Таким образом, мы можем в функции $S(h,R)$ одну из двух переменных выразить через другую, то есть получится функция одной переменной.

$$S(h(R),R)=2\pi Rh+2\pi R^2 = 2\pi R\frac{1}{\pi R^2}+2\pi R^2 = \frac{2}{R}+2\pi R^2.$$

Теперь найдём экстремум этой функции по R.

$\left(\frac{2}{R}+2\pi R^2\right)' = -\frac{2}{R^2}+4\pi R$. Найдём, когда производная равна 0.

$$-\frac{2}{R^2}+4\pi R=0 \Leftrightarrow 2\pi R=\frac{1}{R^2} \Leftrightarrow 2\pi=\frac{1}{R^3} \Leftrightarrow R=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

При этом $h=\frac{1}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi}$.

Соотношение $\frac{h}{R} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi}:\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi}\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^3}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi}=2.$

Ответ. $h/R=2$.

Замечание. Для наименьшей площади поверхности диаметр цилиндра должен быть равен высоте, сбоку такой цилиндр виден именно как квадрат! Если цилиндрическая консервная банка слишком плоская, или наоборот, слишком высокая, это перерасход металла. Так что задача имеет прямое отношение к экономике.

Выпуклость графика и асимптоты.

Задача 4. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз и асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Решение. Сначала, очевидно, надо найти первую производную.

$$\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Первая производная положительна, она может обратиться в 0 лишь при $x=0$. Так как она нигде не отрицательна (ведь все степени чётные) то интервал роста не сменяется интервалом убывания, а снова продолжается рост. Таким образом, мы установили, что экстремумов нет, функция монотонно возрастает.

Теперь найдём 2-ю производную.

$$f''(x) = \left(\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

Сократим по крайней мере на одну степень выражения (x^2+1).

$$\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)-4x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^5+10x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3} =$$

$= \dfrac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2}{(x^2+1)^3}x(3-x^2)$ выделили множитель, который заведомо больше 0, а также там видим 2 множителя, которые могут менять знак. Когда они одного знака, оба плюс или минус, тогда вторая производная больше 0, а когда разного знака, тогда меньше 0.

1) $x>0$ на $(0,+\infty)$, $x<0$ на $(-\infty,0)$.

2) $3-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<3 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

Теперь сопоставим эти интервалы, вот на схеме жёлтым показано, на каком интервале то или иное выражение положительно, а зелёным - отрицательно:

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

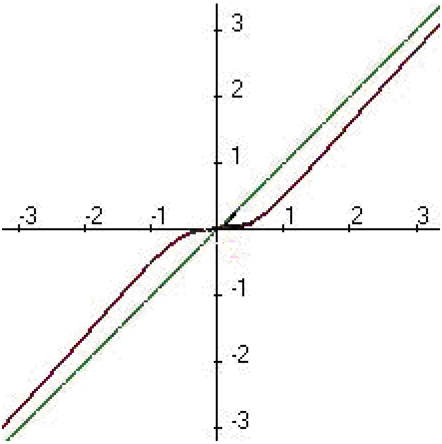
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$3-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x(3-x^2)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Итак, $f''(x)>0$, если $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $x\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.
На этих интервалах график выпуклый вниз.
$f''(x)>0$, если $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $x\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.
На этих интервалах график выпуклый вверх.
Точки перегиба $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$.

Поиск асимптот. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x^2+1)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x}=1.$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^3+x}{x^2+1}\right)=$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=0$. Асимптота $y=x$. Вот чертёж:



Видно, что сначала график отходит от асимптоты, в это время выпуклый вниз. Потом после $x=-\sqrt{3}$ начинает возвращаться, в это время выпуклость вверх. Пересекает её, начинается торможение, в это время выпуклость вниз. А потом до бесконечности приближается к асимптоте, в это время выпуклость вверх.

Примечание. Сравнение с реальной ситуацией - машина, которая съехала с дороги, потом возвращается но проскочила мимо, потом снова начинает приближаться, но уже с другой стороны и плавно.

Ответ. $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ и $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$ выпуклый вниз,
$x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$ и $x \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ выпуклый вверх.
Точки перегиба $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$. Асимптота $y = x$.

Задача 5. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

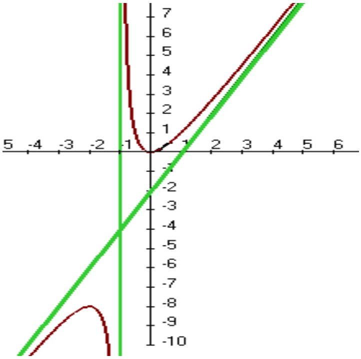
Решение. Во-первых, при $x = -1$ знаменталь обращается в 0, здесь разрыв 2 рода. То есть, вертикальная прямая $x = -1$ это вертикальная асимптота. Теперь ищем наклонные асимптоты.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{(x+1)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2 + x} = 2$. Причём этот результат не зависит от того, предел при $+\infty$ или $-\infty$, ведь обе старшие степени чётные. Нашли $k = 2$, т.е. есть наклонная асимптота типа $y = 2x + b$. теперь найдём b.

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{2x(x+1)}{x+1}\right) =$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+1} - \dfrac{2x^2 + 2x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2x}{x+1}\right) = -2$. Итак, $b = -2$ и опять же, это независимо от $+\infty$ или $-\infty$. Значит, прямая $y = 2x - 2$ это двусторонняя асимптота.

Ответ. Вертикальная $x = -1$ и наклонная $2x - 2$. График:



Задача 6. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Область определения: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Здесь нет знаменателя, который мог бы обращаться в 0, поэтому вертикальных асимптот нет. Функция не ограниченная при $x\to\infty$, поэтому и горизонтальных асимптот нет, так что ищем только наклонные. Функция чётная, поэтому можем искать только при $x\to+\infty$ на правой полуплоскости, а на левой график симметричен, так что если $y=kx+b$ будет асимптотой на правой полуплоскости, то

$y=-kx+b$ на левой. А вот двусторонняя асимптота здесь никак не могла бы быть, ведь график симметричен относительно вертикальной оси, т.к. функция чётная.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

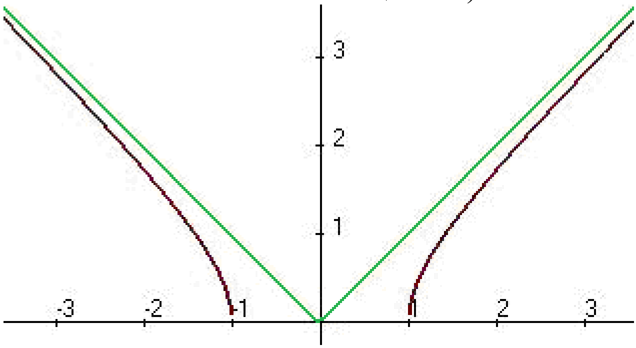
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}$$

здесь умножили на сопряжённое, как в таких пределах делали раньше.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\frac{-1}{\infty}=0.$$

Итак, $k=1$, $b=0$, на правой полуплоскости асимптота $y=x$. Тогда из-за симметрии графика чётной функции на левой полуплоскости наклонная асимптота $y=-x$.

Ответ. Две односторонние асимптоты $y = x$ и $y = -x$.
График (асимптоты показаны зелёным цветом).



Задача 7. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$.
Решение. Функция не является чётной, поэтому здесь придётся при $+\infty$ и $-\infty$ искать пределы каждый отдельно.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+1\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = \sqrt{1+0}+1 = 2.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = 0.$$

Итак, $k = 2$, $b = 0$, на правой полуплоскости асимптота $y = 2x$.
На левой полуплоскости:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}+1\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = -\sqrt{1+0}+1 = 0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$$

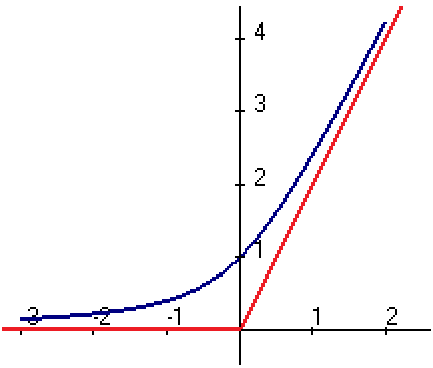
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$ но так как x отрицательно то

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+|x|\right)}=0$. Итак, на левой полуплоскости $k=0$, $b=0$.

Здесь не наклонная, а горизонтальная асимптота, $y=0$.

Ответ. На правой полуплоскости наклонная асимптота $y=2x$, на левой горизонтальная асимптота $y=0$.

Вот график этой функции:



Задача 8. (Производная функции, заданной неявно).

$F(x,y)=x^2y^2+x^4+y^3-3=0$. Найти производную в точке (1,1).

Решение. Во-первых, проверим, что эта точка принадлежит кривой. $F(1{,}1)=1+1+1-3=0$, да, принадлежит. Ищем производную:

$$y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{(x^2y^2+x^4+y^3-3)'_x}{(x^2y^2+x^4+y^3-3)'_y}=-\frac{2xy^2+4x^3}{2x^2y+3y^2}=-\frac{2+4}{2+3}=-\frac{6}{5}.$$

Ответ. $-\dfrac{6}{5}$.

Практика 25.

Задача 1. Дано: $F(x,y,z)=x^2+yz$. Точка движется по прямой: $\{x=1+t,\, y=3t,\, z=2+4t\}$. Вычислить $\dfrac{dF}{dt}$ с помощью формулы полной производной и без её использования.

Решение.

1 способ. Сведём к функции от t и вычислим для неё обычную производную.

$F(x(t),y(t),z(t))=x^2+yz = (1+t)^2+3t(2+4t)=t^2+2t+1+12t^2+6t=$

$13t^2+8t+1$, $\dfrac{dF}{dt} = \left(13t^2+8t+1\right)' = 26t+8$.

2 способ. По формуле полной производной:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial F}{\partial z}z'(t) = 2x\cdot x'(t)+z\cdot y'(t)+y\cdot z'(t) =$$

$= 2x\cdot 1+z\cdot 3+y\cdot 4$ а теперь уже в этом выражении выразим x,y,z через t: $2x+3z+4y = 2(1+t)+3(2+4t)+4(3t)=$

$2+2t+6+12t+12t = 26t+8$.

Ответ. $26t+8$.

Задача 2. Вывести формулу $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$.

Решение. Объединим первые 2 слагаемых в один условный множитель, а третье пусть будет вторым множителем. После этого применим известную формулу, доказанную для 2 множителей.

$((uv)w)'=(uv)'w+(uv)w' = (u'v+v'u)w+uvw'$, что и приводит к выражению $u'vw+uv'w+uvw'$.

Задача 3. Найти производную для $f(x)=x^2\cdot\ln x\cdot\sin x$.

Решение. По формуле из прошлой задачи, для 3 множителей:

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\ln x\cdot\sin x\right)' = 2x\cdot\ln x\cdot\sin x+x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x+x^2\cdot\ln x\cdot\cos x =$$

$2x\cdot\ln x\cdot\sin x+x\cdot\sin x+x^2\cdot\ln x\cdot\cos x$.

Ответ. $2x \cdot \ln x \cdot \sin x + x \cdot \sin x + x^2 \cdot \ln x \cdot \cos x$.

Повторение перед контрольной.

Задача 4. Найти 1-ю производную $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin x}{x}$.

Задача 5. Найти 1-ю и 2-ю производную $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ и $f''(0)$.

Ответ. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, $f''(0) = -2$.

Задача 6. Найти градиент функции $f = x^3 yz$ в точке $M(1,1,1)$ и производную по направлению $a = (1,1,0)$.

Ответ. $\nabla f(1,1,1) = (3,1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial a} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Задача 7. Найти уравнение касательной для $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 1$ и высоту касательной при $x = 0$.

Ответ. Уравнение $y = 8x - 3$, $y(0) = -3$.

Задача 8. Найти экстремумы для $f(x) = \dfrac{1}{2} x^4 - 2x^3 + 2x^2$.

Ответ. $x = 0$ и $x = 2$ минимумы, $x = 1$ максимум.

Темы 4-й контрольной (45 минут, 4 задачи):

13. Производная функции одной переменной.
14. Частные производные, градиент, производная по направлению.
15. Уравнение касательной.
15. Экстремумы.

Практика 26 (30 декабря у обеих групп).
Зачётная неделя. Новый материал не предусмотрен. Исправление контрольных. Написание контрольных, пропущенных по уважительным причинам.

Приложение 1.
Пример одного варианта контрольных работ.

Темы 3-й контрольной:
9. Предел последовательности
10. Предел функции, с неопределённостью 0/0.
11. Предел функции, 1-й замеч. lim
12. Предел функции, 2-й замеч. lim

Вариант:

9) Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+1}-n)$

10) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

11) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^3+2x^2+x}$

12) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}$

Темы 4-й контрольной:
13. Производная функции одной переменной.
14. Частные производные, градиент, производная по направлению.
15. Уравнение касательной.
16. Экстремумы.

Вариант:

13) Найти 1-ю и 2-ю производную $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ и $f''(0)$.

14) Найти градиент функции $f=x^3yz$ в точке $M(1,1,1)$ и производную по направлению $a=(1,1,0)$.

15) Найти уравнение касательной для $y=x^3+2x^2+x+1$ в точке $x_0=1$ и высоту касательной при $x=0$.

16) Найти экстремумы для $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+2x^2$.

Литература.

1. Л.И.Магазинников, А.Л. Магазинникова.
Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебное пособие
http://edu.tusur.ru/publications/2244

2. Л.И.Магазинников, А.Л.Магазинников.
Дифференциальное исчисление. Учебное пособие
http://edu.tusur.ru/publications/2246

3. Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Предыдущая часть (1-я половина семестра):

4. Приходовский М.А.
Математика (курс лекций, семестр 1, часть 1) учебное пособие для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике" — Томск: ТУСУР, 2016. — 84 с.
http://edu.tusur.ru/publications/6308

5. Приходовский М.А.
Математика (курс практических занятий, семестр 1, часть 1) учебное пособие для специальности 09.03.03 "прикладная информатика в экономике" — Томск: ТУСУР, 2016. — 102 с.
http://edu.tusur.ru/publications/6307